

Reduktion analytischer Impedanzfunktionen auf lineare Matrizenpolynome am Beispiel der dynamischen Seilsteifigkeit

U. Starossek, Stuttgart

Übersicht: Die dynamische Steifigkeit eines durchhängenden Seiles gegenüber harmonischen Randverschiebungen kann mit Methoden der Kontinuumsmechanik in geschlossener Form mittels analytischer Funktionen der Schwingungsfrequenz dargestellt werden. Eine Berücksichtigung derartiger Funktionen in den Steifigkeitsmatrizen zusammengesetzter Systeme macht diese Matrizen allerdings ebenfalls frequenzabhängig – ein besonders bei der Behandlung des Eigenwertproblems hinderlicher Umstand, da dieses nichtlinear wird. Durch die hier beschriebene Reduktion einer komplexen analytischen Impedanzfunktion auf ein konstantes Matrizenpaar beliebiger Ordnung werden derartige Schwierigkeiten behoben. Diese Abbildung entspricht einem nachträglichen Übergang von Kontinua auf diskrete Schwingungssysteme. In strukturdynamischen Anwendungen, wie z. B. für die hier betrachtete dynamische Seilsteifigkeit, entsprechen die beiden Ergebnismatrizen einer statischen Steifigkeitsmatrix und einer Massenmatrix. Die Berücksichtigung des resultierenden Matrizenpaares im Rahmen einer linearen Eigenwertaufgabe ist in jedem Fall problemlos möglich.

Reduction of analytic impedance function to linear matrix polynomial – exemplified for dynamic cable stiffness

Summary: For the dynamic stiffness of a sagging cable subject to harmonic boundary displacements, frequency-dependent closed-form analytic functions can be derived from the corresponding continuum equations. By consideration of such functions in stiffness matrices of composed systems, however, these matrices become frequency-dependent, too – a troublesome fact, especially with regard to the eigenvalue problem which becomes nonlinear. In this paper a method for avoiding such difficulties is described: A complex analytic impedance function is reduced to two constant matrices of any desired dimension. This reduction corresponds to a mathematically performed transition from a continuum to a discrete-coordinate vibrating system. In structural dynamics applications such as for dynamic cable stiffness the two resultant matrices correspond to a static stiffness matrix and a mass matrix. In every case, these matrices can easily be considered within the scope of a linear eigenvalue problem.

1 Einleitung

Zur Illustration und zur Begründung der Zweckmäßigkeit wird die Methode am Beispiel der dynamischen Seilsteifigkeit vorgeführt. Hierfür seien zunächst einige Grundzusammenhänge erläutert.

Die statische Berechnung elastischer Systeme erfordert im allgemeinen Kenntnis über das Last-Verformungsverhalten der Systemelemente. Die Darstellung dieses Verhaltens in konzentrierter Form erfolgt üblicherweise mittels Steifigkeitsmatrizen. Unter Beschränkung auf den eingeschwungenen Zustand harmonischer Schwingung kann dieses Konzept auf die Untersuchung *dynamischer* Vorgänge übertragen werden, was auf dynamische Steifigkeits- oder Impedanzmatrizen führt [1]. In [2] wird die dynamische Steifigkeitsmatrix eines dehnbaren, biegeschlaffen und durchhängenden Einzelseiles hergeleitet, die zur dynamischen Berechnung zusammengesetzter Systeme (Schrägelbrücken, abgespannte Masten) herangezogen werden kann. Viskose Dämpfung, etwa infolge von äußeren Strömungskräften, wird berücksichtigt. Es werden nur kleine Verschiebungen zugelassen (lineare Theorie).

Bei der mechanischen Beschreibung des schwingenden Seiles erweisen sich die Methoden der Kontinuumsmechanik als besonders geeignet, ja im Extremfall (stark gespanntes Seil) vielleicht als unumgänglich [2]. Die Elemente der dynamischen Steifigkeitsmatrix sind dann in geschlossener Form

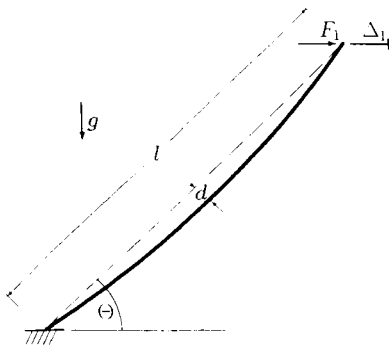


Bild 1. Oben horizontal verschieblich gelagertes Seil

angebbare zeitunabhängige analytische Funktionen der Schwingungsfrequenz. Für die horizontale Steifigkeit am oberen Ende eines unten fest verankerten, schräg gespannten Seiles (Bild 1) erhält man z. B.

$$K_{11} := \frac{F_1}{\Delta_1} = \frac{EA}{L_e} \cos^2 \Theta \left[\frac{1 + \frac{1}{2} \varepsilon \tan \Theta (\kappa - 1)}{1 + (\kappa - 1) \lambda^2 / \Omega_c^2} \right]^2 + \frac{T_\Theta}{l} \sin^2 \Theta \Omega_c \cot \Omega_c. \quad (1)$$

Die Hilfsfunktion

$$\kappa = \kappa(\Omega_c) := \frac{\tan(\Omega_c/2)}{\Omega_c/2} \quad (2)$$

hängt allein vom dimensionslosen Frequenz-Dämpfungs-Parameter

$$\Omega_c := \omega_c l \sqrt{m_i T_\Theta} \quad (3)$$

ab; hierfür wurde definiert

$$\omega_c := \omega \sqrt{1 - 2\zeta i}, \quad \zeta := \frac{c}{2m\omega}, \quad (4)$$

wobei ω für die (reelle) Kreisfrequenz steht. Weiterhin ist m die auf die Länge bezogene Seilmasse und c die auf Länge und Geschwindigkeit bezogene Dämpfungskraft, T_Θ steht für die statische Seilkraft im Punkt mit der Tangentenneigung Θ und entspricht etwa der mittleren statischen Seilkraft, EA ist die Dehnsteifigkeit. Die Größen

$$\lambda^2 := \varepsilon^2 \frac{EA}{T_\Theta} \frac{l}{L_e}, \quad (5)$$

$$\varepsilon := \frac{mgl}{T_\Theta} \cos \Theta = \frac{8d}{l}, \quad (6)$$

$$L_e \approx l(1 + \varepsilon^2/8) \approx l \quad (7)$$

schließlich sind Seilparameter, von denen besonders die dimensionslosen Kennwerte λ^2 und ε von fundamentaler Bedeutung sowohl für die Statik als auch die Dynamik des durchhängenden Seiles sind. Die Einführung der komplexen Parameter ω_c , Ω_c und die hierdurch bedingte Benutzung trigonometrischer Lösungsfunktionen mit komplexen Argumenten ermöglichten übrigens eine besonders einfache Herleitung und Darstellung auch für das *gedämpfte* Seil – ein Kunstgriff, der für alle Arten gedämpfter Schwingungen möglich ist, sofern diese durch lineare Differentialgleichungen beschreibbar sind [2].

Durch die Berücksichtigung von Funktionen wie (1) in den Steifigkeitsmatrizen zusammengesetzter Systeme werden diese Matrizen ebenfalls parameterabhängig – anders etwa als bei einer durchgängigen Modellierung mit Finiten Elementen. Insbesondere bei der Behandlung des

Eigenwertproblems ist dieser Umstand hinderlich: Der Eigenwert ω und somit die von ihm abhängigen Systemmatrizen sind zunächst unbekannt; auf die gut entwickelte Theorie der linearen Eigenwertaufgabe (konstanter Matrizenpaare) kann deshalb nicht unmittelbar zurückgegriffen werden. Die in mechanischer Hinsicht vorzuziehende Modellierung des Seiles als Kontinuum führt also vom Standpunkt der rechnerischen Durchführung auf gewisse Schwierigkeiten. Ein Weg zu deren Überwindung soll nun aufgezeigt werden.

Die hier vorgeschlagene Alternative zur meist aufwendigen Lösung der nichtlinearen Eigenwertaufgabe ist die Linearisierung der das Seilverhalten beschreibenden Matrizenelemente und nachfolgende Lösung einer linearen Eigenwertaufgabe. Sei

$$K = K(\omega) := F/\Delta \quad (8)$$

ein beliebiges Element der dynamischen Steifigkeitsmatrix des Seiles. Mit Linearisierung ist dann eine näherungsweise Abbildung dieser analytischen Funktion auf das in ω^2 lineare Polynom

$$S = S(\omega^2) := P - \omega^2 Q \quad (9)$$

mit konstanten Koeffizienten P und Q gemeint (Reduktion). Die Berücksichtigung von $S(\omega^2)$ im Rahmen einer linearen Eigenwertaufgabe ist problemlos möglich. Insbesondere können dabei P und Q auch Matrizen im Prinzip beliebiger Ordnung (Reihenzahl) n sein; die Linearisierung von $K(\omega)$ ist dann verbunden mit einer Expansion. P und Q entsprechen einer statischen Steifigkeitsmatrix bzw. einer Massenmatrix und werden den Systemmatrizen entsprechend zugewiesen. Die so durchgeführte Abbildung entspricht einem nachträglichen, d.h. rein mathematisch vollzogenen Übergang von Kontinua auf diskrete Schwingungssysteme.

Im folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, mit dessen Hilfe die beschriebene Abbildung für beliebige Ordnung n (und damit beliebige Abbildungsgenauigkeit) durchgeführt werden kann. Die Bedeutung der Methode geht über den engeren Problemkreis der hier als Beispiel angeführten Seilschwingungen hinaus. Es könnte sich in weiterentwickelter Form auch als gangbarer Weg zur Formulierung von Finiten Elementen erweisen.

2 Linearisierung einer dynamischen Steifigkeitsfunktion (allgemeines Vorgehen)

Beim Übergang auf das neue Gesamtsystem wird ausschließlich die Komponente K durch ein Element der Matrix S , etwa s_{11} , ersetzt. Die restlichen Elemente von S werden in zusätzlich anzuschreibenden Leerzeilen und -spalten so angeordnet, daß ihre Zuordnung zu s_{11} und untereinander gewahrt bleibt. Die zweite bis n -te Spalte von S berücksichtigt den Einfluß neuer, fiktiver Freiheitsgrade, die entsprechenden Zeilen ergeben zusätzliche, aus Gründen der Allgemeinheit homogene Gleichungen.

Die Abbildung von K auf S erfolgt über gebrochen rationale Funktionen, wie sie typisch sind für die Impedanz diskreter Schwingungssysteme. Die Güte des Verfahrens beruht auf der so ermöglichten Anpassung zweier Sätze von Eigenwerten (gültig für zwei verschiedene Sätze von Randbedingungen). Die Konstruktion von S geht von der Beziehung

$$S \begin{bmatrix} \Delta \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

aus, wobei $\mathbf{r} := [r_1, r_2, \dots, r_{n-1}]^T$ für den Vektor der neuen, fiktiven Verschiebungen r_j steht und \tilde{F} näherungsweise gleich der vom Seil auf das Restsystem wirkenden (Schnitt-)Kraft F infolge der gemeinsamen Verschiebung Δ ist:

$$\tilde{F} \approx F. \quad (11)$$

Für die von S dem Restsystem vermittelte Seilsteifigkeit \tilde{K} gilt

$$\tilde{K} = \tilde{K}(\omega) = \tilde{F}/\Delta. \quad (12)$$

Nun ist S so zu bestimmen, daß

$$\tilde{K} \approx K. \quad (13)$$

Aus (10) folgt für reguläre \mathbf{S}

$$\tilde{K} = ((\mathbf{S}^{-1})_{11})^{-1} = \frac{\det \mathbf{S}}{S_{11}} \quad (14)$$

mit dem algebraischen Komplement S_{11} (Unterdeterminante zum Element s_{11}). Der Fall singulärer Matrix \mathbf{S} bzw. verschwindendem S_{11} entspricht einem Nulldurchgang bzw. einer Polstelle von \tilde{K} . Mit Ansatz (9) erhält man aus (14) die gebrochen rationale Funktion

$$\tilde{K} = \frac{\sum_{j=0}^n a_j (\omega^2)^j}{\sum_{j=0}^{n-1} b_j (\omega^2)^j} = \hat{K} \frac{\prod_{j=1}^{k \leq n} (\omega^2 - \tilde{\omega}_{0j}^2)}{\prod_{j=1}^{l \leq n-1} (\omega^2 - \tilde{\omega}_{xj}^2)} \quad (15)$$

mit maximal n Nullstellen $\tilde{\omega}_{0j}^2$ (Eigenwerte von \mathbf{S}) und maximal $n-1$ Polstellen $\tilde{\omega}_{xj}^2$ (Eigenwerte von \mathbf{S}_{22} , d.h. \mathbf{S} vermindert um erste Zeile und Spalte). Diese Funktion stellt das Mittelglied bei der Abbildung von K auf \tilde{K} dar; die Aufgabe ist in zwei durch (13) und (14) vorgegebene Schritte aufgeteilt.

3 Approximation von K durch \tilde{K}

Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen ist die in (15) angegebene Produktdarstellung von Zähler und Nenner der gesuchten Funktion \tilde{K} . Außer deren Null- und Polstellen sind dort auch die kennzeichnenden Funktionswerte

$$\tilde{K}_0 := \tilde{K}|_{\omega=0} = \hat{K} \frac{\prod_{j=1}^{k \leq n} (-\tilde{\omega}_{0j}^2)}{\prod_{j=1}^{l \leq n-1} (-\tilde{\omega}_{xj}^2)}, \quad (16)$$

$$\tilde{K}_x := \tilde{K}|_{\omega \rightarrow \pm x} = \hat{K} (\omega^2)^{k-l} |_{\omega \rightarrow \pm x} \quad (17)$$

direkt ablesbar (es sei $\tilde{\omega}_{xj} \neq 0$). Die angegebenen allgemeinen Formeln sollen noch etwas spezifiziert werden. Der Grenzwert \tilde{K}_x sei endlich groß. Zähler- und Nennerpolynom in (15) müssen dann von gleichem Grad sein (also $k = l \leq n-1 \Rightarrow a_n = (-1)^n \det \mathbf{Q} = 0$) und somit

$$\tilde{K} = \tilde{K}_x. \quad (18)$$

Zur weiteren Vereinfachung wird man die Struktur von \mathbf{S} bzw. \mathbf{Q} außerdem so voraussetzen, daß das algebraische Komplement Q_{11} ungleich null ist (also $b_{n-1} = (-1)^{n-1} Q_{11} \neq 0 \Rightarrow l = n-1$). Insgesamt folgt

$$\tilde{K} = \tilde{K}_x \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\omega^2 - \tilde{\omega}_{0j}^2}{\omega^2 - \tilde{\omega}_{xj}^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\tilde{K}_x}{\tilde{K}_0} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\omega}_{xj}^2}{\tilde{\omega}_{0j}^2}. \quad (20)$$

Die unbekannten Kennwerte \tilde{K}_0 , \tilde{K}_x , $\tilde{\omega}_{0j}$ und $\tilde{\omega}_{xj}$ sind mit geeigneten Verfahren so zu bestimmen, daß die analytische Funktion $K(\omega)$ durch die gebrochen rationale Funktion $\tilde{K}(\omega)$ nach (19) möglichst gut, am besten gleichmäßig approximiert wird.

Im Falle geringer Dämpfung (etwa $\xi \leq 0,1$) ist hierbei eine weitere wesentliche Vereinfachung möglich: Die zu bestimmenden Kennwerte werden reell angesetzt; die Dämpfung wird einbezogen mittels Ersetzen der unabhängigen Variablen ω durch

$$\tilde{\omega}_c := \omega \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad (21)$$

wobei $\tilde{\xi}$ einem zusätzlichen reellen Freiwert entspricht, der nun frequenzunabhängig festzulegen ist. Dieses Vorgehen wird vom Aufbau der analytischen Lösungen, bei denen im dämpfungslosen Fall ω an die Stelle von ω_c tritt, nahegelegt; wie numerische Testrechnungen zeigten, ermöglicht es gute Approximation bei kleinem Aufwand. Als Approximationsfunktion $\tilde{K}(\omega)$ wird statt (19) also der Ausdruck

$$\tilde{K} = \tilde{K}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\omega}_c^2 - \tilde{\omega}_{0j}^2}{\tilde{\omega}_c^2 - \tilde{\omega}_{xj}^2}; \quad \tilde{K}_0, \tilde{K}_x, \tilde{\omega}_{0j}, \tilde{\omega}_{xj} \in \mathbb{R} \quad (22)$$

verwendet. Geeignete Startwerte für iterative Berechnung der Kennwerte sind die aus einer Kurvendiskussion von $K(\omega)$ für den ungedämpften Fall gewonnenen Parameter $K_0, K_x, \omega_{0j}, \omega_{xj}$ sowie ein nach (4) geschätztes mittleres $\tilde{\xi}$.

4 Übergang von \tilde{K} auf S

Der jetzt erfolgende Übergang auf S ist exakt. Die Kennwerte $\tilde{K}_0, \tilde{K}_x, \tilde{\omega}_{0j}, \tilde{\omega}_{xj}$ und $\tilde{\xi}$ der Näherungsfunktion \tilde{K} seien als reelle Größen ermittelt worden. Durch Umformen der Definitionsgleichung (9) mittels (21) gemäß

$$S = S(\tilde{\omega}_c^2) = P - \tilde{\omega}_c^2 Q' = P - \underbrace{\omega^2 (1 - 2\tilde{\xi}i)}_{=Q} Q' \quad (23)$$

mit dem nun reellen Matrizenpaar P, Q' bleiben die Imaginäranteile zunächst ausgeklammert. Aus S soll bei Anwendung der Rechenvorschrift (14) ein \tilde{K} in der Form von (22) folgen. Das Matrizenpaar P, Q' ist zu konstruieren.

Die Lösung dieser Aufgabe ist nicht eindeutig, denn den festzulegenden $2n^2$ Matrizenelementen stehen, entsprechend der Anzahl der in (22) vorhandenen Kennwerte, nur $2n - 1$ wesentliche Parameter gegenüber. Die Differenz entspricht der Anzahl frei wählbarer Vorgaben für die Matrizenelemente p_{ij}, q'_{ij} (wobei aber eine ausreichende Verkopplung zwischen den Freiheitsgraden von vornherein sichergestellt werden muß). Im folgenden wird eine spezielle Lösung in geschlossener Form angegeben. Sie ist allgemein in dem Sinne, daß sie für beliebige Ordnung n gilt. Die Grundbeziehung

$$\tilde{K}A = \tilde{F} \quad (24)$$

wird schrittweise umgeformt und durch Hinzufügen trivialer Gleichungen auf das Gleichungssystem (10) expandiert. Erster Schritt ist die Teilbruchzerlegung der gebrochen rationalen Funktion \tilde{K} von (22). Diese Zerlegung ist immer möglich und führt (bei untereinander verschiedenen $E\tilde{\omega}_{0j}, \tilde{\omega}_{xj}$) auf

$$\tilde{K} = \tilde{K}_x \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{\tilde{\omega}_c^2 - \tilde{\omega}_{xj}^2} \right) \quad (25)$$

mit konstanten A_j , die als

$$A_j = A_j(\tilde{\omega}_{0k}^2, \tilde{\omega}_{xk}^2) \in \mathbb{R}; \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (26)$$

formelmäßig angegeben werden können [3]. Definiert man die fiktiven Weggrößen

$$r_j := \frac{A_j}{\tilde{\omega}_c^2 - \tilde{\omega}_{xj}^2}; \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (27)$$

so ist die Beziehung (24) auch in der Form

$$\tilde{K}_x \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} r_j \right) = \tilde{K}_x [1, 1, \dots, 1] \begin{bmatrix} A \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} = \tilde{F} \quad (28)$$

darstellbar. Aus (27) folgen aber auch die $n-1$ homogenen und linear unabhängigen Gleichungen

$$A - \frac{1}{A_j} (\tilde{\omega}_c^2 - \tilde{\omega}_{x,j}^2) r_j = 0; \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (29)$$

die man mit (28) zusammenfaßt zum Gleichungssystem

$$\mathbf{S} \begin{bmatrix} A \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \underbrace{\tilde{\mathbf{K}}_x \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{\tilde{\omega}_{x,1}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\tilde{\omega}_{x,2}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{A_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{\tilde{\omega}_{x,n-1}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{A_{n-1}} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{S}} \begin{bmatrix} A \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Die so konstruierte Matrix \mathbf{S} erfüllt die Grundgleichung (10) und hat die in (9) bzw. (23) festgelegte Form eines linearen Matrizenpolynoms. Die Teilmatrix \mathbf{P} hat volle Bandbreite; das mechanische Pendant zum Matrizenpaar \mathbf{P}, \mathbf{Q} ist eine Parallelschaltung geerdeter Einmassenschwinger. Die Bandbreite der hiermit konstruierten Gesamtmatrizen eines zusammengesetzten Systems erhöht sich bei geschickter Anordnung der zusätzlichen Zeilen und Spalten aber nur unwesentlich.

Zur Anwendung wird nun der spezielle und einfachste Fall $n = 2$ betrachtet. Nach Teilbruchzerlegung von (22) entsprechend (25) und Einsetzen in den allgemeinen Ausdruck (30) folgt mit $\tilde{\omega}_0 \neq \tilde{\omega}_c$, das in $\tilde{\omega}_c^2$ lineare Matrizenpolynom

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{K}}_x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{\tilde{\omega}_x^2}{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_0^2} \end{bmatrix} - \tilde{\omega}_c^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\mathbf{K}}_x}{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_0^2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Mechanisch entspricht es einem Einmassenschwinger mit zwei Freiheitsgraden, wie er in [4] bereits als Ersatzmodell für das schwingende Seil vorgeschlagen wurde. Die dort *ad hoc* vorgenommene Systemidentifizierung ist allerdings nur für relativ schwach gespannte Seile zulässig und schöpft die Möglichkeiten dieses Primitivmodells nicht voll aus [2].

Durch elementare Umformungen unter Rückgriff auf die Beziehung (20) findet man den alternativ zu verwendenden Ausdruck

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_x & \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{z}} & \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \tilde{\omega}_c^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\mathbf{z}}}{\tilde{\omega}_x^2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{z}} := \tilde{\mathbf{K}}_x - \tilde{\mathbf{K}}_0 \neq 0. \quad (33)$$

Zum Übergang auf die eigentlich gewünschte Form (9) wird $\tilde{\omega}_c$ gemäß (21) substituiert, womit man die Darstellung

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_x & \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{z}} & \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\mathbf{z}}(1 - 2\zeta^2 i)}{\tilde{\omega}_x^2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

erhält. Nach wiederum elementaren Umformungen folgt die mögliche Alternative

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{K}_x & \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-2\tilde{\xi}i}} \\ \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-2\tilde{\xi}i}} & \frac{\dot{z}}{1-2\tilde{\xi}i} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{z}}{\omega_x^2} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

bei der im Gegensatz zu vorher die Massenmatrix reell, die Steifigkeitsmatrix aber komplex ist. Diese Form wird man vorziehen, wenn auch die Gesamtmatrizen für Masse bzw. Steifigkeit bereits reell bzw. komplex sind.

Literatur

1. Clough, R. W.; Penzien, J.: Dynamics of Structures. New York: McGraw-Hill 1975
2. Starossek, U.: Brückendynamik – Winderregte Schwingungen von Seilbrücken (Dissertation, Universität Stuttgart, 1991). Braunschweig: Vieweg 1992
3. Strubecker, K.: Einführung in die höhere Mathematik. Band I: Grundlagen. München: R. Oldenbourg 1966
4. Veletsos, A. S.; Darbre, G. R.: Dynamic stiffness of parabolic cables. Earthquake Engineering Structural Dynamics 11 (1983) 367–401
5. Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen und ihre Anwendungen (5. Aufl.). Berlin: Springer 1984

Eingegangen am 7. Februar 1992

Dr.-Ing. Uwe Starossek
 Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion
 Universität Stuttgart
 Pfaffenwaldring 7
 W-7000 Stuttgart 80
 Bundesrepublik Deutschland