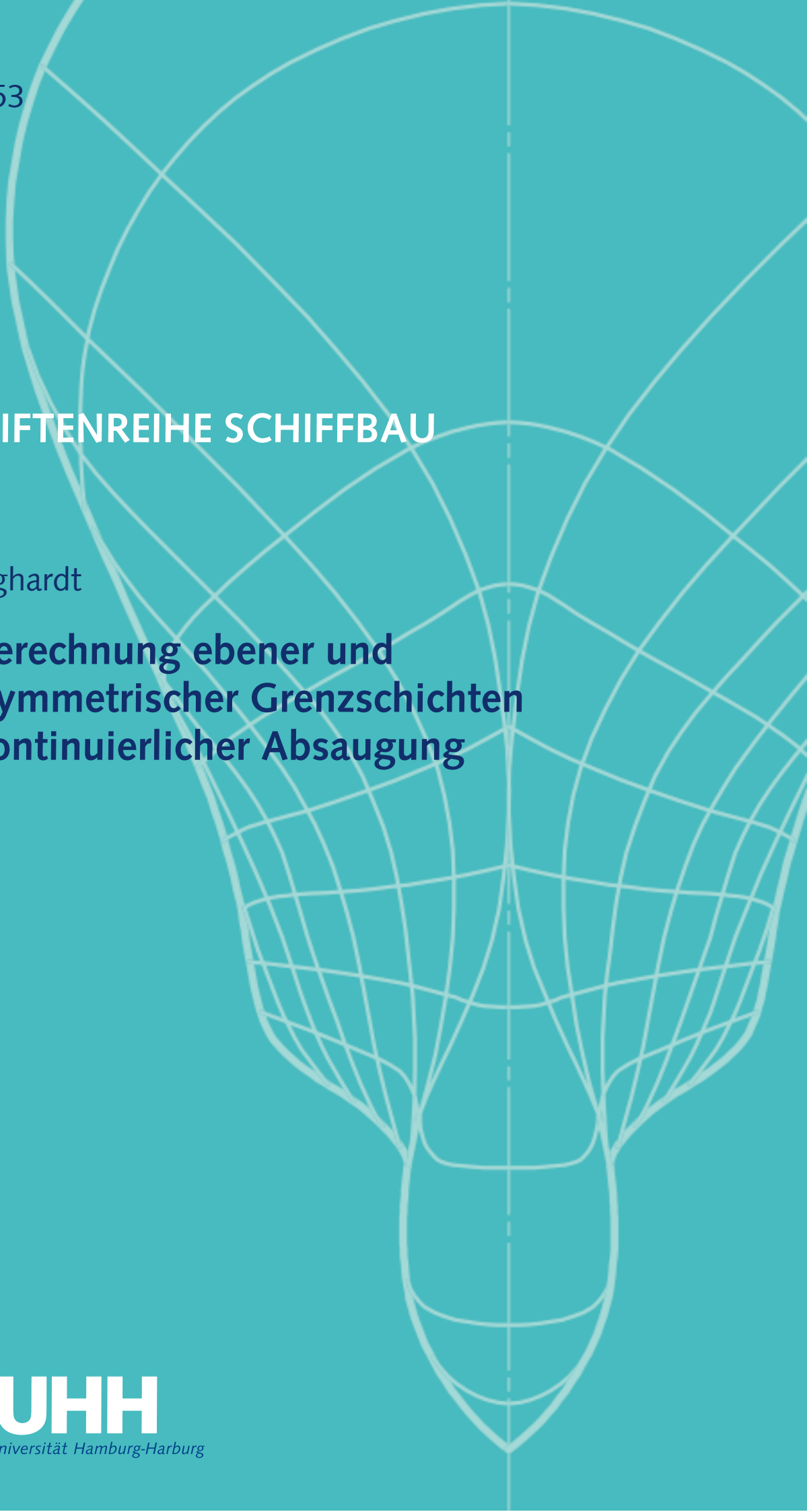
2 | 1953

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Wieghardt

Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung



TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung.

Von K. Wieghardt in Hamburg.

1.) Einleitung.

Der Strömungswiderstand eines Körpers kann bekanntlich durch Absaugen der Grenzschicht oft wesentlich verringert werden. Einerseits kann dadurch etwa bei einem Körper mit stumpfer Hinterkante die Ablösung der Grenzschicht verzögert und damit der Druckwiderstand verkleinert werden, wie in den bekannten Strömungsaufnahmen von L.Prandtl aus dem Jahr 1904 [1]. Andererseits kann aber auch der Reibungswiderstand stromlinienförmiger Körper mit vernachlässig - barem Druckwiderstand noch dadurch gesenkt werden, dass die laminare Grenzschicht durch Absaugen stabilisiert und somit nicht turbulent wird; denn besonders bei hohen Reynolds-Zahlen ist die laminare Reibung viel kleiner als die der turbulenten Reibungsschicht bei unbeeinflusster Strömung.

Bereits vor etwa zehn Jahren war aus theoretischen Arbeiten von H.Schlichting [2,3] und J. Pretsch [4] zu ersehen, dass auf diese Weise - auch bei Berücksichtigung der Absaugeleistung - der Widerstand um die Hälfte und mehr verringert werden könnte. Trotzdem sind nur wenige Versuche bekannt geworden, diese grossen Möglichkeiten technisch zu verwirklichen. Nach den ersten Versuchen schien es so, als ob sich bei grossen Reynolds-Zahlen (über 6.10^6) diese Methode der Widerstandssenkung wegen der aufzubringenden Absaugeleistung nicht lohnte [5]. Spätere Windkanalversuche [6,7] an einem Tragflügel aus gesinterter Bronze bestätigten aber die optimistische, theoretische Voraussage doch zum Teil. Die Ergebnisse für diesen Flügel (bei $Re=6.10^6$ und 20.10^6) sind in den Abb.3 und 4 miteingetragen. Danach ist eine Widerstandssenkung von 50 % und mehr auch bei Einbe - ziehung der Absaugleistung durchaus zu verwirklichen; allerdings lässt der unregelmässige Gang der Widerstandsbeiwerte mit der Reynolds-Zahl noch auf Ungenauigkeiten der komplizierten Versuche schliessen.

Das Obige bezieht sich auf kontinuierliche Absaugung durch eine poröse Oberfläche. Experimentell eingehender untersucht worden ist die Absaugung aus mehreren Einzelschlitzen in mehr oder weniger weiten Abständen voneinander. Dieser theoretisch wesentlich kompliziertere Fall der diskontinuierlichen Absaugegrenzschicht ist erst vor kurzem von W. Wuest [8] der Rechnung zugänglich gemacht worden. Es scheint, dass bei dieser technisch leichter zu verwirklichenden diskontinuierlichen Absaugung nicht so hohe Widerstandeinsparungen erwartet werden können, wie bei der theoretisch einfacheren aber praktisch schwierigeren kontinuierlichen Absaugung.

Im folgenden wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung der stationären, inkompressiblen laminaren Grenzschicht bei kontinuierlicher Absaugung dargestellt, das sowohl für ebene wie für drehsymmetrische Körper gilt. Ein Verfahren für ebene Körper hat H. Schlichting [3] bereits 1945 entwickelt. Die von ihm speziell zur Darstellung der kontinuierlichen Absaugung aufgestellte Klasse von Grenzschichtprofilen wird für das vorliegende Verfahren übernommen. Methodisch ist dieses eine Erweiterung eines Verfahrens für ebene Grenzschichten ohne Absaugung von A. Walz [9], insofern als auch hier Impuls- und Energiesatz von einer einparametrigen Profilklasse erfüllt werden. Es ist vor allem zur direkten Berechnung der wirtschaftlich günstigsten Absaugung geeignet.

2.) Näherungsverfahren.

Es wird wieder die mathematisch einschneidende Annahme gemacht, dass auch bei kontinuierlicher Absaugung die Geschwindigkeitsprofile durch eine einparametrige Kurvenschar angenähert werden können. Dann ist die Grenzschicht an jeder Stelle durch einen Formparameter und ein Maß für die Grenzschichtdicke bereits vollständig beschrieben. Als Parameter werde benutzt

$$H = \delta_1 / \delta_2 \qquad (1)$$

mit δ_1 = Verdrängungsdicke = $\int_0^\infty (1-u/U)\,dy$ (2)

w_0 und δ_2 = Impulsverlustdicke = $\int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$ (3)

w_0 den Wandabstand, u die Geschwindigkeit innerhalb und U diejenige außerhalb der Grenzschicht bezeichnen. Ein dimensionsloses Maß für die Dicke der Schicht ist die örtliche Reynolds-Zahl der Grenzschicht

$$Re = U\delta_2/\nu$$

mit ν = kinematische Zähigkeit. (4)

Zur Berechnung dieser zwei Größen, H und $\varkappa$, abhängignvon der Bogenlänge s vom Staupunkt, genügen auch hier Impuls- und Energiegleichung, wenn außerhalb der Schicht $U(s)$ auch der örtliche Körperrad $r_0(s)$ bei Drehkörpern und die Absaugxxgeschwindigkeit $v_0(s)$ gegeben sind

Der Impulssatz lautet bekanntlich

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\varepsilon}{Re} = \frac{1}{r_0}\frac{d}{ds}(r_0\delta_2) + (2+H)\frac{\delta_2}{U}\frac{dU}{ds} - \frac{v_0}{U} \qquad (5)$$

und analog dazu der Energiesatz

$$\frac{2D}{Re} = \frac{1}{U^3 r_0}\frac{d}{ds}\left(U^3 r_0 \delta_3\right) - \frac{v_0}{U} \qquad (6)$$

Dabei bedeuten τ_0 die Wandschubspannung, ρ die Dichte, ε die dimensionslose Wandtangente des Profils

$$\varepsilon = \frac{\partial u/U}{\partial y/\delta_2}, \quad y = \text{Wandabstand}, \qquad (7)$$

D eine dimensionlose Dissipationskunktion

$$D = \int_0^\infty \frac{r}{r_0}\left(\frac{\partial u/U}{\partial y/\delta_2}\right)^2 d\frac{y}{\delta_2} \qquad (8)$$

mit r = Abstand von der Achse des Drehkörpers, δ_3 Energieverlustdick

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left[1-\left(\frac{u}{U}\right)^2\right]dy. \qquad (9)$$

Bei einer einparametrigen Profilklasse bestehen nun eindeutige Beziehungen zwischen den verschiedenen, dimensionslosen Parametern wie H, ε, D oder

$$H_{32} = \delta_3 / \delta_2 . \tag{10}$$

Man kann sie daher alle als eindeutige Funktionen eines Parameters, z.B. von H, auffassen: $\varepsilon(H)$, $D(H)$ und $H_{32}(H)$.

Dann lassen sich aus den zunächst noch allgemein gültigen Gleichungen (5) und (6) sofort zwei Differentialgleichungen für die Unbekannten H und re ableiten, die in dimensionslosen Grössen geschrieben lauten:

$$\frac{dH}{d\sigma} = -f(H)\frac{1}{U/U_0}\frac{dU/U_0}{d\sigma} - g(H)\frac{U}{U_0}\frac{Re}{re^2} + h(H)\frac{Re}{re}\frac{v_0}{U_0} \tag{11}$$

$$\frac{dre}{d\sigma} = -\left\{\frac{H+1}{U/U_0}\frac{dU/U_0}{d\sigma} + \frac{1}{r_0/R}\frac{dr/R}{d\sigma}\right\} re + \varepsilon\frac{U}{U_0}\frac{Re}{re} + Re\frac{v_0}{U_0} . \tag{12}$$

Darin bedeuten R eine charakteristische Länge, z.B. der grösste Radius des Drehkörpers, $\sigma = s/R$ die dimensionslose Bogenlänge vom Staupunkt aus gemessen, U_0 die Anströmgeschwindigkeit und

$$Re = U_0 R/\nu . \tag{13}$$

f,g und h sind Funktionen des Profilparameters H, die für die zu Grunde gelegte Profilklasse einmal berechnet werden müssen:

$$f(H) = -H_{32}(H-1)/N$$

$$g(H) = -(2D - \varepsilon H_{32})/N \tag{14}$$

$$h(H) = -(H_{32} - 1)/N \tag{15}$$

und $$N = \frac{dH_{32}}{dH} \qquad (16).$$

Zur schrittweisen Integration des Systems (11) und (12) denken wir uns, ähnlich wie in [9], alle auftretenden Funktionen der Bogenlänge über das jeweilige Intervall linearisiert. Die Schrittlänge Δs von der Bogenlänge s_1 bis s_2 muss so klein gewählt werden, dass alle Funktionen in diesem Intervall genügend genau durch Geradenstücke angenähert werden können. Dann lassen sich Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzen, wie z.B. in

$$\gamma = \frac{1}{U}\frac{dU}{ds}\Delta s \approx \frac{U_2 - U_1}{(U_1 + U_2)/2} \qquad (17)$$

$$\omega = \frac{1}{r_o}\frac{dr_o}{ds}\Delta s \approx \frac{(r_o)_2 - (r_o)_1}{[(r_o)_1 + (r_o)_2]/2} \qquad (18)$$

und

Für die gesuchten Zuwächse von Δre u. ΔH ergibt sich dann

$$\Delta re = \frac{-\{(H+1)\gamma + \omega\} re_1 + \varepsilon \frac{\bar{U}}{U_o}\frac{Re}{re_1}\Delta\sigma + \frac{\bar{v}_o}{U_o} Re\,\Delta\sigma}{1 + (H+1)\gamma + \omega - \frac{1}{2}\frac{\bar{v}_o}{U_o}\frac{Re}{re_1}\Delta\sigma} \qquad (19)$$

und $$\Delta H = \frac{-f\gamma - g\frac{\bar{U}}{U_o}\frac{Re}{\bar{re}^2}\Delta\sigma + h\frac{Re}{\bar{re}}\frac{\bar{v}_o}{U_o}\Delta\sigma}{1 + \frac{1}{2}\dot{f}\gamma + \frac{1}{2}\dot{g}\frac{\bar{U}}{U_o}\frac{Re}{\bar{re}^2}\Delta\sigma - \frac{1}{2}\dot{h}\frac{Re}{\bar{re}}\frac{\bar{v}_o}{U_o}\Delta\sigma} \qquad (20).$$

Der Querstrich über U, v_o und re bedeutet Mittelbildung im Intervall also z.B. $\bar{U} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$. Der Punkt bezeichnet Differentiation nach H, z.B. $\dot{f} = \frac{df(H)}{dH}$. Die Funktionen f, g und h sowie ihre Ableitungen sind in Tabelle 1 angegeben. Dabei wurden die Absaugeprofile von H. Schlichting [3] zu Grunde gelegt, die zwischen dem Blasius-Profil ($v_o = 0$) und dem asymptotischen Absaugeprofil interpolieren.

Die Formeln (19) und (20) gelten natürlich auch für $v_o = 0$, also für unbeeinflusste Grenzschichten. Jedoch ist dann ein

etwas abgeändertes Gleichungssystem [10] geeigneter, das in Nähe des Staupunkts besser konvergiert und für das die Profilfunktionen f und g aus den Hartree-Profilen [11] berechnet worden sind.

3.) Stabilitätskriterium.

Gewöhnlich interessiert nun weniger die Weiterentwicklung einer Grenzschicht bei vorgegebener Absaugung an sich, sondern die praktische Frage, wie weit der Widerstand eines Körpers durch Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugen überhaupt verringert werden kann. Nach J. Pretsch [4] wird nun der Reibungswiderstand, auch bei Einbeziehung der Absaugeleistung dann ein Minimum, wenn die örtliche Absaugegeschwindigkeit überall so bemessen wird, dass das laminare Geschwindigkeitsprofil der Gefahr des Umschlags in die turbulente Form noch gerade widersteht. Die geringste dazu erforderliche Absaugung ist dann von Fall zu Fall erst zu berechnen. Zu den bisherigen Unbekannten re und H tritt also noch eine dritte - nämlich $v_o(s)$ - hinzu, zu deren Berechnung neben Impuls- und Energiegleichung als dritte Gleichung eine Stabilitätsbedingung benötigt wird.

Ein Kriterium zur Bestimmung des wirklichen laminar - tubulenten Umschlagpunktes ist zwar noch nicht bekannt. Statt dessen rechnet man gewöhnlich mit dem berechenbaren Indifferenzpunkt, dh. mit dem Punkt, bis zu dem die laminare Grenzschicht gegen jede kleine Störung stabil ist, und der noch strömaufwärts vor dem eigentlichen Umschlagpunkt liegt. Das Stabilitätskriterium hierfür lässt sich für einparametrige Geschwindigkeitsprofile in der Form $(U\delta_1/\nu)_{krit.}$ = örtliche, Kritzsche Reynolds-Zahl der Verdrängungsdicke abhängig von irgend einem Profilparameter angeben. Für das vorliegende Verfahren, bei dem die Grenzschicht durch re und H charakterisiert wird, ist es praktischer

$$re_{krit.} = (U\delta_2/\nu)_{krit.} \qquad (21)$$

als Funktion des Parameters H aufzufassen.

In dieser Art sind die veröffentlichten Ergebnisse für verschiedene Profiklassen in Abb. 1 aufgetragen. Die vollen Kreise gelten nach J. Pretsch [12,13,14] für Hartree-Pro - file (z.B. ebenes Staupunktprofil H = 2,22; rotationssymmetrisches Staupunktsprofil H = 2,33; Plattenströmung H=2,59). Die Punkte für diese Grenzschichten an undurchlässigen Wänden liegen offenbar mit guter Annäherung auf einer Geraden, der eine Gleichung

$$Re_{Krit.} = e^{a - bH} \qquad (22)$$

entspricht, mit $a = 26{,}3$ und $b = 8$. (23).
Auch die kritische Re-Zahl für das asymptotische Absaugeprofil [15]

$$u/U = 1 - e^{v_0 y/\nu}, \quad v_0 < 0, \quad H = 2 \qquad (24)$$

liegt noch in Nähe dieses Gesetzes.

Etwas höhere re-Werte für gleiche H-Werte markieren die leeren Kreise, die Ergebnisse von H.Schlichting und A. Ulrich [16] auch ohne Absaugung wiedergeben; sie gelten für P_6-Profile, dh. für Geschwindigkeitsprofile, die aus gewissen Polynomen 6. Grades bestehen. Etwa für $2{,}3 < H < 2{,}7$ ergibt sich in Abb.1 wieder eine Gerade mit den Konstanten

$$a = 29{,}1 \quad \text{und} \quad b = 9 \qquad (25).$$

Für die hier benutzten Absaugeprofile nach H.Schlichting schliesslich haben D.L.Burrows, A.L. Braslow und N. Tetervin [6] die Stabilitätsrechnung durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abb.1 durch die eingezeichnete Kurve dargestellt. Auch diese Kurve wird im praktisch interessierenden Bereich von $2{,}2 < H < 2{,}6$ durch die Gerade (22) mit den Konstanten (25) genau genug angenähert. Diese Konstanten werden daher der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt.

Die Ergebnisse von Stabilitätsrechnungen an ebenen Grenzschichten lassen sich nach J.Pretsch [14] ohne weiteres auf den rotationssymmetrischen Fall übertragen, solange die Grenzschichtdicke klein gegenüber dem Körperradius bleibt. Daher kann das obige Kriterium auch auf Drehkörper angewandt werden.

4.) Optimales Absaugen.

Die Grenzschichtrechnung für den Optinalfall der Absaugung kann nun folgendermaßen durchgeführt werden. Zunächst wird vom Staupunkt an, wo die Grenzschicht auch ohne Absaugung noch laminar ist, nach einem der üblichen Verfahren gerechnet. Vom Indifferenzpunkt an, wo bei undurchlässiger Wand die Gefahr des Turbulentwerdens beginnt, wird Absaugung angenommen, und zwar gerade so stark, dass überall stromabwärts das Kriterium (22) erfüllt ist.

Führt man dazu diese Gleichung (22) als starre Bedingung in die Impuls- und Energiegleichung (5) und (6) ein, so kann man jetzt re und $v_o(s)$ eliminieren, um eine Gleichung allein für H zu erhalten:

$$\frac{dH}{d\sigma} = -\frac{f_1(H)}{U}\frac{dU}{d\sigma} + \frac{f_2(H)}{r_o}\frac{dr_o}{d\sigma} - f_3(H)\frac{U}{U_o}\frac{Re}{re^2}\,, \qquad re = e^{a-bH} \tag{26}$$

Daraus folgt wieder durch Linearisieren für kleine Schnittlängen die Rechenformel

$$\Delta H = \frac{-f_1\gamma + f_2\omega - f_3\frac{Re}{re_1^2}\frac{\bar{U}}{U_o}\Delta\sigma}{1 + \frac{1}{2}f_1\gamma - \frac{1}{2}f_2\omega + (\frac{1}{2}f_3 + bf_3)\frac{Re}{re_1^2}\frac{\bar{U}}{U_o}\Delta\sigma} \tag{27}$$

Nachdem so H (σ) und damit auch re(6) berechnet sind, folgt die örtliche Absaugegeschwindigkeit aus dem Impulssatz:

$$\frac{v_o}{U_o} = \frac{1}{Re}\frac{dre}{d\sigma} + \left\{\frac{H+1}{U}\frac{dU}{d\sigma} + \frac{1}{r_o}\frac{dr_o}{d\sigma}\right\}\frac{re}{Re} - \frac{U}{U_o}\frac{\varepsilon}{re} \tag{28}$$

Die Hilfsfunktionen f, f_2 und f_3 hängen dabei von H wie folgt ab:

$$f_1(H) = -(H+1-2H_{32})/N^* \tag{29}$$

$$f_2(H) = (1-H_{32})/N^* \tag{30}$$

$$f_3(H) = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}D)/N^* \tag{31}$$

mit $N^* = b(1-H_{32}) + \frac{dH_{32}}{dH}$. (32).

Für die benutzten Absaugeprofile und die Konstante b = 4,9 aus (25) erhält man Funktionen, die sich für $2 < H < 2{,}8$ genau genug durch lineare Ausdrücke annähern lassen, nämlich durch

$$f_1 \approx -0{,}0121 + 0{,}2745\,(H-2{,}2) \quad (33)$$

$$f_2 \approx 0{,}1210 + 0{,}0033\,(H-2{,}2) \quad (34)$$

$$f_3 \approx 0{,}0385\,(H-2) . \quad (35)$$

Damit sind alle Formeln zur schrittweisen Berechnung der Absauge-Grenzschicht mit Hilfe des Rechenschiebers zusammengestellt.

5.) Anwendungsbeispiele.

a) Plattenströmung.

Die Grenzschicht an einer längs angeströmten Platte (also bei konstanter Aussengeschwindigkeit U) mit optimaler Absaugung ist 1943 von J.Pretsch [4] berechnet worden. Seine Lösung kann jetzt zur Kontrolle benutzt werden.

Bei dieser einfachsten ebenen Strömung kann man die Gleichung (26) direkt integrieren, denn sie lautet hier

$$re^2 \frac{dH}{ds} = -f_3 \frac{U_o}{\nu} . \quad (36).$$

Mit $f_3 = c\,(H-2)$ (35)

und $re = e^{a-bH}$ (22)

wird daher

$$Re(s) - Re(s_o) = -ce^{-2a} \int_{H_o}^{H} \frac{e^{-2bH}}{H-2}\, dH \quad , \text{ mit } Re(s) = U_o s/\nu . \quad (37).$$

Der Index o bezieht sich auf den Indifferenzpunkt, wo die Absaugung beginnt. Nachdem so ermittelt worden ist, wie der Parameter H mit wachsender Lauflänge $Re(s)$ abnimmt, kann das zugehörige v_o/U_o aus Gl.(28) berechnet werden, die sich hier vereinfacht zu

$$\frac{v_o}{U_o} = \frac{b f_3 - \varepsilon}{re} \quad . \tag{38}$$

Das Ergebnis ist in derselben Weise wie bei J.Pretsch, nämlich $-v_o/U_o$ über $\sqrt{Re(s)}$,in Abb.2 aufgetragen. Rechnet man mit den Konstanten a = 26,3 und b = 8 für das Stabilitätskriterium, so wird $-v_o/U_o$ überall zu gross. Das ist aber nach Abb.1 auch verständlich: die Gerade mit diesen a- und b - Werten liegt deutlich tiefer als die Indifferenzkurve für die Absaugeprofile. Um diese unnötig scharfe Stabilitätsbedingung zu erfüllen, muss eben stärker abgesaugt werden, als eigentlich erforderlich.

Auch das andere Konstantenpaar (a = 29,1 und b = 9) gibt aus dem gleichen Grund noch zu grosse Absaugegeschwindigkeiten, doch sind die Unterschiede im gezeichneten Be - reich - jedenfalls für Re (s) $> 10^7$ - bedeutungslos. Andererseits wird hier die asymptotische Absaugegeschwindigkeit für $Re(s) \to \infty$ wesentlich zu klein, im Gegensatz zur Rechnung mit a = 26,3 und b = 8. Auch das ist nach Abb.1 erklärlich, da die obere Näherungsgerade für $H \to 2$ wesentlich über den Wert $(re)_{Krit.}$ für das asymptotische Absaugeprofil hinausschießt, während die andere Gerade ganz gut dorthin trifft.

Der Beiwert für den Reibungswiderstand der ganzen Platte ergibt sich aus

$$c_f = \frac{1}{Re} \int_o^{Re} \frac{\tau_o}{\frac{\rho}{2} U^2} \, dRe = \frac{1}{Re} \int_o^{Re} \frac{2\,\varepsilon(H)}{re} \, dRe \quad . \tag{39}$$

Wenn sich auch in den Absaugegeschwindigkeiten gewisse Unterschiede gegenüber der Lösung von J.Pretsch ergeben haben, so stimmen diese c_f-Werte und damit die rechnerischen Er - sparnisse im Widerstand durch Laminarhalten durch Absaugen gut überein (s.Abb. 3 und 4).

b) Rotationsellipsoid 1 : 8.

Nachdem sich das Verfahren im vorigen Beispiel als brauchbar erwiesen hatte, wurde es auf ein Rotationsellip - soid angewandt. Das Längenverhältnis grösster Durchmesser/ Gesamtlänge ist 2 R/L = 1 : 8.

Als Re-Zahl wurde gewählt:

bezogen auf den grössten Radius $U_o R/\nu = 5 \cdot 10^5$,bzw.
" " die Gesamtlänge L $U_o L/\nu = 8 \cdot 10^6$.

Die günstigsten Absaugegeschwindigkeiten sind in Abb.5 aufgetragen. Vom Indifferenzpunkt der unbeeinflussten Grenzschicht am Kopf an bis etwa 3/4 der Länge ist v_o/U_o praktisch konstant, und zwar

$$v_o/U_o = -1{,}4 \cdot 10^{-4}. \qquad (40).$$

Für das hinterste Ende jedoch schreibt die Rechnung örtlich sehr starkes Absaugen vor, wenn man auch dort nicht nur Ablösung sondern auch turbulentes Umschlagen der Reibungsschicht vermeiden wollte.

In die Berechnung des Absaugebeiwertes c_Q geht bei Drehkörpern auch die Körperform ein. Wird bis zu einer Lauflänge x längs der Achse abgesaugt, so ist der Mengenbeiwert wie folgt zu definieren:

$$c_Q = \frac{Q}{F U_o} = \frac{2\pi R^2}{F} \int_0^{x/R} \frac{r_o}{R} \frac{v_o}{U_o} d\frac{s}{R}, \qquad (41)$$

mit Q = in der Zeiteinheit abgesaugtes Flüssigkeitsvolumen, und F = gesamte Oberfläche des Ellipsoids. Für das Seitenverhältnis L/ 2R = 8 wird

$$F = 2\pi R^2 \frac{L}{2R}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right) = 79{,}5\, R^2. \qquad (42)$$

mit ε = Exzentrizität $= \sqrt{1-(2R/L)^2}$. (43).

Der in Abb.5 gezeichnete Verlauf von c_Q längs der Achse zeigt, dass die Absaugemenge erst später als die Absaugegeschwindigkeit stark anwächst.

Praktisch ist ein derart starkes Absaugen am hintersten Körperende natürlich undurchführbar; bei Drehkörpern wird man ja dort die bis dahin abgesaugte Flüssigkeit wieder nach hinten ausblasen müssen. Man muss also sowieso das Turbulentwerden und Ablösen der Grenzschicht dort zulassen.

Zur Berechnung des Reibungswiderstandes des ganzen Körpers

$$c_f = \frac{1}{\frac{\rho}{2} U_0^2 F} \int_0^L 2\pi r_0 \tau_0 \, dx = \frac{4\pi}{F/R^2} \int_0^{L/R} \frac{\varepsilon}{re} \frac{r_0}{R} \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 d\frac{x}{R} \,, \qquad (44)$$

ist aber der Anstieg der Wandschubspannung auf diesem letzten kurzen Teilstück bedeutungslos. Wesentlich könnte nur der Formwiderstand sein, d.h. der Druckwiderstand, der sich daraus ergibt, dass am Heck der potentialtheoretische Druckrückgewinn (mit einem Staupunkt auf der Achse) sich nicht einstellt, sondern statt dessen ein Nachlauf. Bei langen, schlanken Drehkörpern ohne Grenzschichtbeeinflussung ist dieser Formwiderstand jedoch klein gegenüber dem Reibungswiderstand. Der gemessene Gesamtwiderstand solcher Körper bezogen auf die Körperoberfläche erweist sich nämlich als nur wenig grösser als der bezogene turbulente Widerstand einer gleich langen ebenen Platte. Man wird daher nur einen kleinen Fehler machen, wenn man auch bei laminar gehaltener Grenzschicht annimmt, dass der Gesamtwiderstand fast dem berechenbaren Reibungswiderstand gleichzusetzen ist. Allerdings würde hier schon ein kleiner Formwiderstand mehr ins Gewicht fallen als bei natürlicher, turbulenter Strömung.

In Abb.3 wird nun der auf die Oberfläche bezogene Beiwert des Reibungswiderstandes des Ellipsoids verglichen mit dem der ebenen Platte. Der von H.Antsberg [17] gemessene Beiwert des Gesamtwiderstands ohne Absaugen liegt nur wenig über dem der turbulenten Plattenströmung, und der bei optimaler Absaugung ist ebenfalls nur wenig grösser als für die entsprechende Plattenströmung. Ebenso verhalten sich die rechnerischen Beiwerte für unbeeinflusste, aber trotzdem laminar gebliebene Grenzschichtströmungen an Ellipsoid und Platte.

Diese Ergebnisse für das Ellipsoid 1 : 8 berechtigen wohl zu der sowieso plausiblen Verallgemeinerung, dass bei schlanken Umdrehungskörpern, deren Widerstand fast ausschliesslich aus Reibungswiderstand besteht, durch Laminarhalten der Grenzschicht durch Absaugung Widerstandsgewinne von derselben Grössenordnung wie für die ebene Platte (s. Abb.3 und 4) möglich sein müssten.

c) Ovoid 1 : 8.

Als letztes Beispiel wurde noch das Ovoid 1 : 8 für die gleiche Re-Zahl $U_0 R/\nu = 5 \cdot 10^5$, bzw. $U_0 L/\nu = 8 \cdot 10^6$ berechnet. Die Potentialströmung wurde durch Annahme einer punktförmigen Quelle und gleichstarker Senke bestimmt.

Die Aussengeschwindigkeit U steigt hier nicht wie beim Ellipsoid monoton bis zur Körpermitte an, sondern hat ein Maximum in Nähe der Körperenden. Demzufolge ergibt sich für die optimale Absaugegeschwindigkeit kein so ausgegli - chener Verlauf wie beim Ellipsoid, und im letzten Viertel des Körpers schreibt die Rechnung teilweise sogar Ausblasen statt Absaugen vor (s.Abb.6). Das rührt davon her, dass das Stabilitätskriterium (22) als starre Bedingung eingeführt worden ist und nun automatisch überall erfüllt wird. Dort, wo (potentialtheoretisch) ein stabilisierender Druckabfall - also Ansteigen von U - vorhanden ist, wäre die laminare Grenzschicht ohne Ausblasen stabiler als erforderlich, um das turbulente Umschlagen zu vermeiden; die Grenzschicht wäre dann unnötig dünn und die Wandschubspannung somit überflüssig gross. Sowie die Geschwindigkeit U jedoch wieder abnimmt, wird das starke Absaugen in Hecknähe wie beim El - lipsoid gefordert.

Trotz des unterschiedlichen Verlaufs der Absauge- bzw. Ausblasgeschwindigkeit längs des Körpers ist der Beiwert des gesamten Reibungswiderstands wieder fast derselbe wie beim Ellipsoid, wenn man diesen auf die hier grössere Oberfläche bezieht (vgl. Abb.3 und Tabelle 2).

4.) Zusammenfassung.

Es wird ein verhältnismässig einfaches Verfahren zur Berechnung von ebenen und drehsymmetrischen laminaren Grenzschichten mit Absaugung oder Ausblasung beschrieben. Besonders geeignet ist es zur direkten Bestimmung des optimalen Falles, wenn überall am Körper so abgesaugt werden soll, dass die laminare Grenzschicht gerade noch stabil ist. - Verf. dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

5.) Schriftentum.

[1] L.Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh.d.III.Intern.Math.Kongr., Heidelberg 1904.

[2] H.Schlichting: Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen. Luftfahrtforschung 19,(1942),293.

[3] H.Schlichting: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Ing.Arch. XVL (1948), 201.

[4] J.Pretsch: Die Leistungsersparnis durch Grenzschichtbe - einflussung beim Schleppen einer ebenen Platte. UM 3048 (1943).

[5] A.E.von Doenhoff und L.K.Loftin: Present status of research on boundary layer control.Journ.aero Sci.16 (1949), 729.

[6] D.L.Burrows, A.L.Braslow and N.Tetervin: Experimental and theoretical studies of area suction for the control of the laminar boundary layer on a porous bronze NACA 64Ao1o airfoil. NACA Techn.Note 1905 (1949).

[7] A.L.Braslow and F.Visconti: Further experimental studies of area suction for the control of the laminar boundary layer on a porous bronze NACA 64Aô1o airfoil. NACA Techn.Note 2112 (1950).

[8] W.Wuest: Näherungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminaren Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitze. Ing.-Arch. XXI (1953), 90.

[9] A.Walz: Anwendung des Energiesatzes von Wieghardt auf einparametrige Geschwindigkeitsprofile in laminaren Grenzschichten. Ing.-Arch. XVI (1948), 243.

[9] K. Wieghardt: On a simple method for calculating laminar boundary layers. Aero.Quart. (1953).

[10] D.R.Hartree: On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer.
Proc. Cambr.Phil.Soc. 33, Past II, (1937), 223.

[12] J.Pretsch: Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg.
Jahrb.d.deutschen Luftfahrtforschung I (1941),58.

[13] J.Pretsch: Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht.
Jahrb.d.deutschen Luftfahrtforschung I (1942),54.

[14] J.Pretsch: Über die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel. Luftfahrtforschung 18 (1941), 341.

[15] J.Pretsch: Umschlagbeginn und Absaugung.
Jahrb.der deutschen Luftfahrtforschung I (1942),1.

[16] H.Schlichting und A.Ulrich: Zur Berechnung des Um - schlages laminar-turbulent.
Jahrb.d.deutschen Luftforschung I (1942),8.

[17] H.Amtsberg: Untersuchungen über die Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes.
Jahrb.d.Schiffbautechn.Gesellschaft 38 (1937),177.

Tabelle 1.

Hilfsfunktionen, berechnet für Absaugeprofile nach H.Schlichting [3].

H	f	g	h	$\frac{1}{2}\dot{f}$	$\frac{1}{2}\dot{g}$	$\frac{1}{2}\dot{h}$	ε
2	8,0	- 1,60	3,19	7,0	1,15	0,7	0,500
2,05	8,7	- 1,48	3,27	7,4	1,1	0,9	0,467
2,1	9,5	- 1,37	3,37	8,1	1,05	1,1	0,437
2,15	10,3	- 1,27	3,49	8,9	1,05	1,3	0,409
2,2	11,3	- 1,17	3,63	10,0	1,05	1,5	0,383
2,25	12,4	- 1,06	3,79	11,1	1,1	1,65	0,359
2,3	13,6	- 0,95	3,96	12,2	1,1	1,75	0,337
2,35	14,9	- 0,84	4,14	13,4	1,1	1,85	0,316
2,4	16,3	- 0,73	4,33	14,7	1,15	2,0	0,297
2,45	17,8	- 0,61	4,54	16,2	1,25	2,25	0,279
2,5	19,5	- 0,48	4,78	18,3	1,35	2,6	0,262
2,55	21,5	- 0,34	5,06	20,6	1,4	3,0	0,246
2,6	23,7	- 0,20	5,38	23,0	1,45	3,35	0,231
2,65	26,1	- 0,06	5,73	25,5	1,5	3,65	0,217
2,7	28,7	+ 0,10	6,11	28,1	1,6	3,95	0,204
2,75	31,7	0,27	6,52	31,0	1,75	4,25	0,192
2,8	34,9	0,45	6,96	34,6	2,0	4,6	0,181
2,85	38,7	0,67	7,44	40,0	2,4	4,9	0,170

T a b e l l e 2.

Rechenergebnisse für zwei Drehkörper bei $U_o L/\nu = 8 \cdot 10^6$.

	Rotations-ellipsoid	Rankine'sches Ovoid (Quell-Senken-Körper)
Länge/Durchmesser $L/2R$	8	8
Oberfläche F	$79{,}5\ R^2$	$96{,}5\ R^2$
Volumen V	$33{,}5\ R^3$	$45{,}5\ R^3$
Meridianfläche M (grösste Wasserlinienfläche)	$25{,}1\ R^2$	$30{,}1\ R^2$
Querschnittsfläche $\otimes$ (Hauptspant)	$3{,}14\ R^2$	$3{,}14\ R^2$
$\alpha = M/2RL$	0,785	0,942
$\beta = \otimes/(2R)^2$	0,785	0,785
$\delta = V/(2R)^2 L$	0,524	0,711
$\varphi = V/\otimes L = \delta/\beta$	0,667	0,906
Turbulenter Gesamtwiderstand bezogen auf die Oberfläche (Messung [17]) $W/\frac{\rho}{2} U_o^2 F$	$3{,}32.10^{-3}$	-
Reibungswiderstand bei optimaler Absaugung bezogen auf die Oberfläche $W_{rAbs.}/\frac{\rho}{2} U_o^2 F$	$0{,}67_8.10^{-3}$	$0{,}68_4.10^{-3}$
Laminarer Reibungswiderstand bezogen auf die Oberfläche $W_{rlam.}/\frac{\rho}{2} U_o^2 F$	$0{,}51_2.10^{-3}$	
Turbulenter Gesamtwiderstand bezogen auf den Querschnitt $W/\frac{\rho}{2} U_o^2 \otimes$	$84{,}0.10^{-3}$	-
Reibungswiderstand bei optimaler Absaugung bezogen auf den Querschnitt $W/_{rAbs.}/\frac{\rho}{2} U_o^2 \otimes$	$17{,}1.10^{-3}$	$21{,}0.10^{-3}$

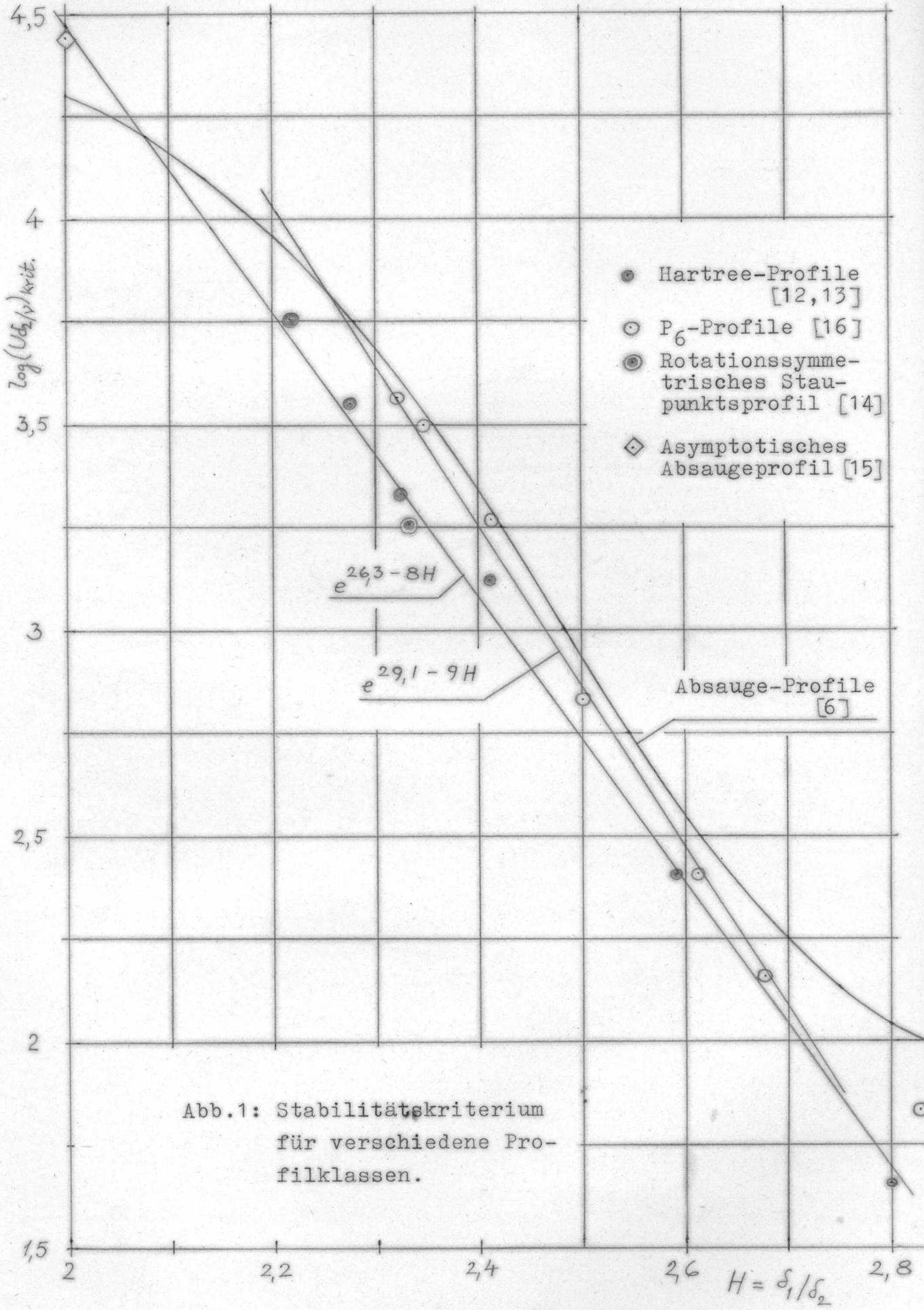


Abb.1: Stabilitätskriterium für verschiedene Profilklassen.

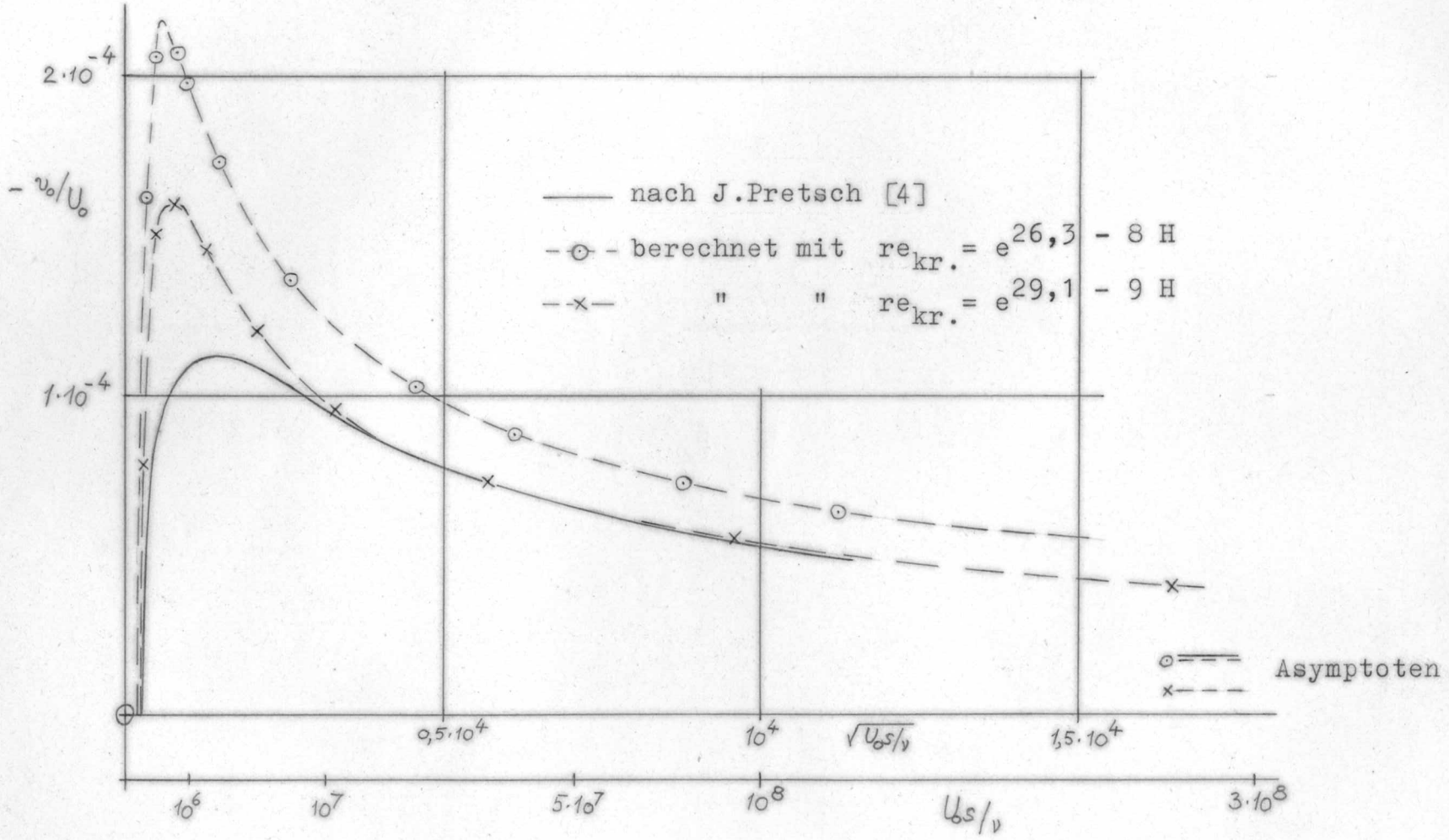


Abb.2. Verteilung der Absaugegeschwindigkeit längs der Platte bei optimaler Absaugung.

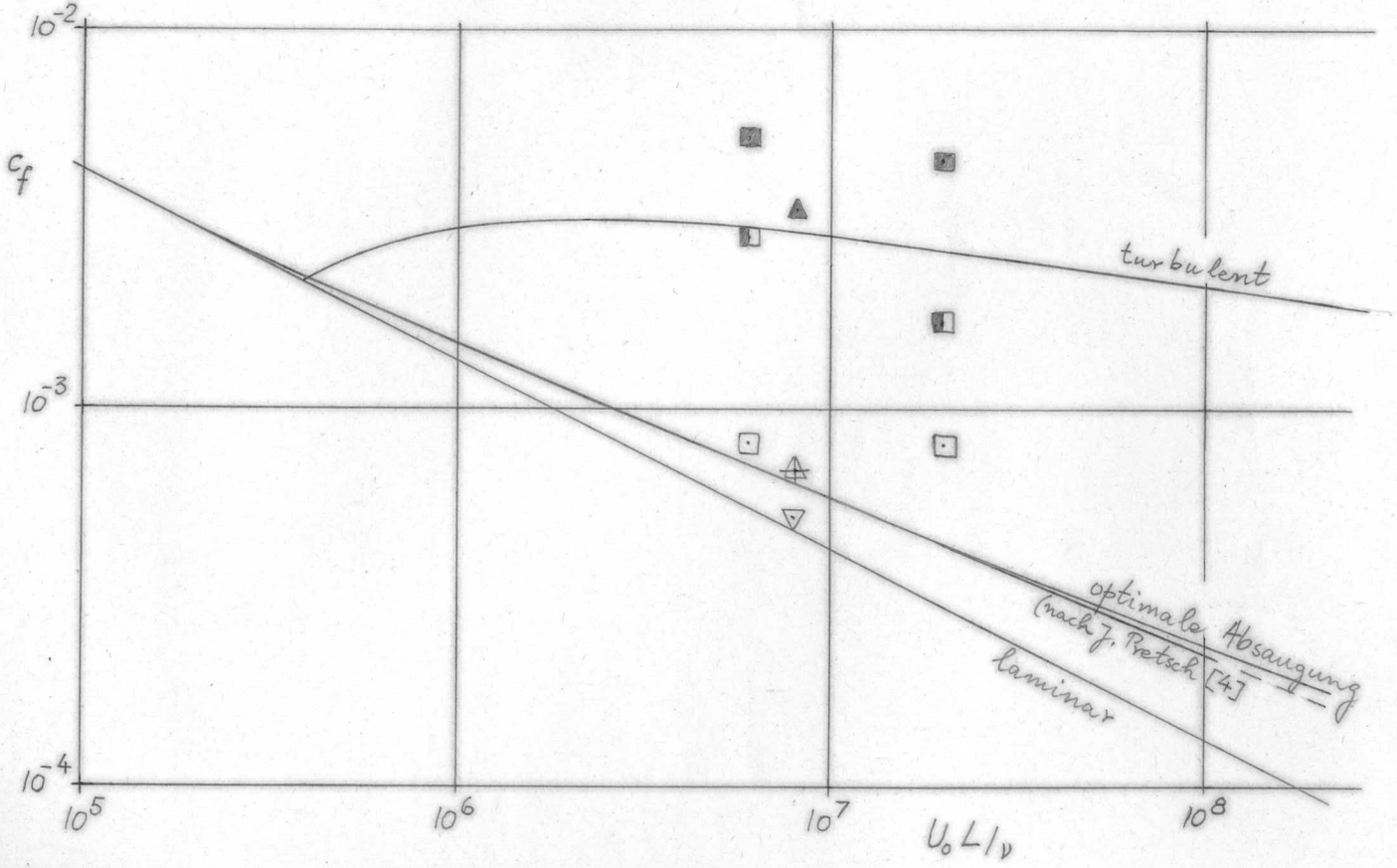


Abb.3 Vergleich mit dem Plattenwiderstand

Ellipsoid 1:8 Ovoid 1:8 NACA-Profil Messung [6,7]

▲ c_w Messung [17]

△ c_f bei optimaler Absaug. + c_f bei opt. Abs.

▽ c_f bei Laminarströmung

c_w ■

■ c_f bei opt.Abs. einschliesslich Absaugleistung

□ c_f bei opt.Abs. ohne Abs.-Leistung.

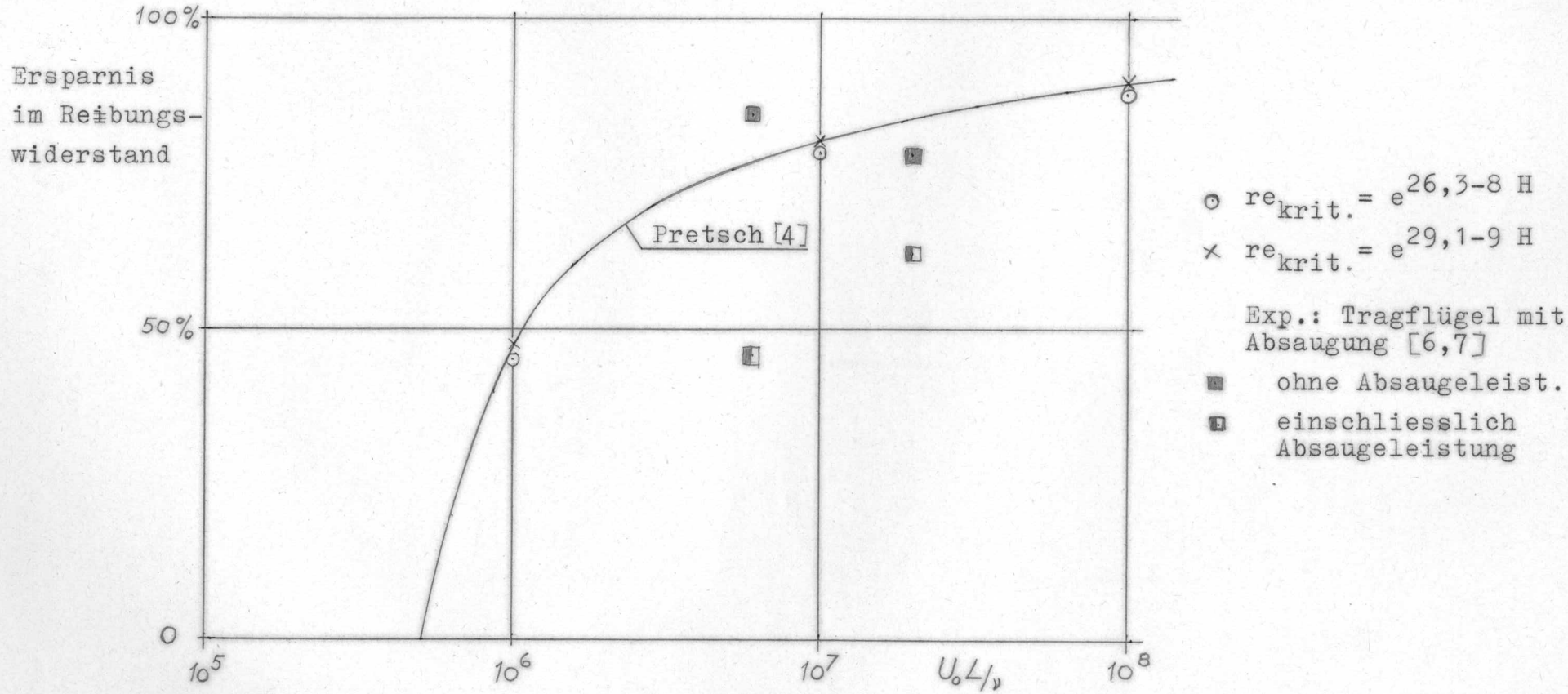


Abb.4. Mögliche Ersparnis im Reibungswiderstand der Platte mit Absaugung.