

302 | 1974

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

W.H. Isay und Th. Roestel

Berechnung der Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

W. H. ISAY / TH. ROESTEL

Berechnung der Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung

Die vorliegende Arbeit behandelt die ebene, stationäre und kompressible Strömung von gashaltigem Wasser um Tragflügelprofile. Unter dem Begriff Gas wird dabei sowohl die im Wasser enthaltene ungelöste Luft als auch der durch auftretende Kavitation bedingte Wasserdampf verstanden. Zur Vereinfachung der Theorie ist die Eigenbewegung der Gasblasen gegenüber dem umgebenden Wasser vernachlässigt, also ein einheitliches Geschwindigkeits- und Druckfeld angenommen; außerdem wird vorausgesetzt, daß das Verhältnis von Gasmasse zu Wassermasse eine eindeutige Funktion des örtlichen Druckfeldes sei. In Anlehnung an eine in der Theorie schallnaher Gasströmungen bewährte Methode erfolgt die Berechnung des Druckfeldes in der Umgebung der Flügelprofile aus einer nichtlinearen Integralgleichung. Die Theorie wird an einer Reihe von Zahlenbeispielen erprobt. Es zeigt sich, daß durch den Gasgehalt des Wassers nur dann wesentliche Unterschiede gegenüber dem inkompressiblen Strömungszustand bedingt sind, wenn infolge der niedrigen örtlichen Schallgeschwindigkeit mit Verdichtungsstößen abgeschlossene lokale Überschallgebiete auftreten. Vergleiche mit aus der Literatur entnommenen Messungen geben eine zumindest qualitative Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen.

The paper is concerned with the two-dimensional steady and compressible flow of water with gas-content around hydrofoils. Gas means as well the content on free air in the water as the vapour occurring from cavitation. For the sake of simplicity we have neglected the movement of gas-bubbles relative to the surrounding water. Therefore only one velocity- and pressurefield is adopted. Besides we have assumed, that the mass-ratio of gas to water is only a function of the local pressure. Following an efficient method of the theory of transsonic gasdynamics, the pressure-field around the profil is calculated solving a non-linear integralequation. The theory is tested on some numerical examples. It turns out, that the gas-content in water gives only then remarkable differences in comparison with the incompressible pressure-field, if because of the low velocity of sound local supersonic regions occur, which end with shocks. A comparison with available experimental data shows at least a qualitative agreement with the theoretical results.

В настоящей работе рассматривается плоское, стационарное, сжимаемое обтекание профилей крыла водой, содержащей газ. При этом подразумевается под газом как и находящийся в воде нерастворенный воздух так и водяной пар, возникающий вследствие наличия кавитации. Для упрощения теории собственное движение пузырей газа относительно окружающей воды пренебрегается. Следовательно принимается наличие однородного поля скоростей и давлений. Кроме этого предполагается, что отношение массы газа к массе воды является однозначной функцией местного поля давления. Примыная к испытанному в теории околосвуковых потоков методу, расчёт поля давления вблизи профилей крыла производится с помощью нелинейного интегрального уравнения. Теория проверяется рядом числовых примеров. Оказывается, что обусловленные наличием газа в воде существенные разницы по отношению к несжимаемому потоку наблюдаются только тогда, когда вследствие низкой локальной скорости звука возникают ограниченные скачками уплотнения местные области сверхзвуковых скоростей. Взятые из литературы для сравнения результаты замеров согласовываются с теоретическими результатами по крайней мере качественно.

1. Einleitung und Übersicht

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit der ebenen stationären Strömung um Tragflügelprofile in gashaltigem Wasser. Unter letzterem wollen wir zusammenfassend sowohl Wasser mit einem Gehalt an ungelöster Luft verstehen als auch Wasser mit Blasen, welche auf Dampfkavitation beruhen.

Es ist bekannt, daß schon durch einen geringen Volumenanteil an ungelöster Luft oder auch an Dampf die Kompressibilität des Wassers erheblich zunimmt. Die örtliche Schallgeschwindigkeit kann dabei weit (d. h. durchaus zwei Größenordnungen bei technisch wichtigen Strömungen) unter den für reines Wasser geltenden Wert von etwa 1500 bis 1400 m/sec absinken [1], [2], [3], [4].

Das Ziel der hier vorgelegten Arbeit ist es zu untersuchen, inwieweit das Druckfeld in der Umgebung eines Tragflügelprofils auf Grund der erhöhten Kompressibilität gashaltigen Wassers gegenüber den Verhältnissen in reinem Wasser modifiziert wird. Um mit einem vertretbaren Aufwand zu numerischen Ergebnissen zu kommen, beschränken wir uns auf die ebene stationäre und reibungsfreie Strömung.

Eine wichtige Größe für unser Problem ist das örtliche Verhältnis von Gasmasse M_G zu Wassermasse M_W in der Strömung; wir bezeichnen es mit $\mu = M_G/M_W$.

Genau genommen ist dieses Massenverhältnis μ eine orts- und zeitabhängige Funktion, welche durch eine ganze Anzahl physikalischer Effekte beeinflußt wird. Zum einen charakterisiert μ die im Wasser enthaltene ungelöste Luftmasse. Letztere ändert sich, wenn das Gleichgewicht zwischen gelöster und ungelöster Luft infolge Variation des lokalen Druckfeldes gestört wird; auch die Eigenbewegung der Luftblasen relativ zum umgebenden Wasser wird dabei eine Rolle spielen. Zum anderen sind Luftblasen in ihrer Eigenschaft als Kavitationskeime auch für die in den Stellen niedrigen Druckes wesentliche Dampfkavitation bedeutsam. In denjenigen Gebieten des Strömungsfeldes, in denen Dampfkavitation herrscht, wird das Massenverhältnis μ vor allem durch die Verdampfungsvorgänge und die Blasendynamik einschließlich der Wechselwirkung zwischen den Blasen bestimmt sein. Der freie Luftgehalt ist dann von geringerem Gewicht.

Aus diesen kurzen Überlegungen wird bereits deutlich, wie schwierig eine genaue, den physikalischen Gegebenheiten entsprechende Berechnung von μ sein würde.

Bei einer Unterscheidung zwischen Luft und Wasserdampf hätte man unter Berücksichtigung der Eigenbewegung der Blasen eine echte Drei-Phasen-Strömung mit drei verschiedenen untereinander in Wechselwirkung stehenden Geschwindigkeitsfeldern. Überdenkt man jedoch die mathematischen Konsequenzen, so ergibt sich, daß eine solche Theorie nach dem derzeitigen Stand der Forschung kaum sicher formulierbar und schon gar nicht mit einem vertretbaren Aufwand numerisch auswertbar wäre. Man muß sich vielmehr mit einem wesentlich vereinfachten Modell begnügen, wie dieses in der vorliegenden Arbeit auch geschieht.

Dazu gehört zunächst die Vernachlässigung der Eigenbewegung von Luft- und Kavitationsblasen gegenüber dem umgebenden Wasser. Dadurch haben wir es nur noch mit einem einzigen Geschwindigkeitsfeld zu tun, das wir außerhalb etwa auftretender Verdichtungsstöße (oder wie man auch sagt Kavitationsstöße) als Potentialströmung behandeln werden. Der Einfluß der Zähigkeit des Mediums wird ohnehin nicht berücksichtigt.

Weiter wollen wir annehmen, daß das örtliche Massenverhältnis μ eine eindeutige Funktion des örtlichen Druckfeldes p sei und gleichzeitig die ungelöste Luftmasse und die Dampfmasse beschreibt. Thermodynamisch entspricht dies der Voraussetzung eines Gleichgewichtszustandes für das Strömungsmedium. Da μ auf jeden Fall mit abnehmendem Druck wachsen muß, liegt ein Ansatz der Form

$$\mu = \mu_{\infty} \left(\frac{p_{\infty}}{p} \right)^{\lambda} \quad (\lambda \geq 0) \quad (1)$$

nahe mit einem zunächst freien Exponenten λ . Die Größen p_{∞}, μ_{∞} bezeichnen dabei einen Ausgangszustand, z. B. die Verhältnisse weit vor dem betrachteten Flügelprofil. Der Sonderfall $\lambda = 0$ entspricht einem konstanten Massenverhältnis. Der Ansatz (1) hat sich vom theoretischen Standpunkt aus bei der Behandlung der strömungsmechanischen Gleichungen (Kontinuitätsgleichung, Impulssatz, Energiesatz, Stoßrelationen) als recht übersichtlich erwiesen [5].

2. Die strömungsmechanischen Gleichungen

Im Rahmen der hier beabsichtigten Untersuchung des stationären Druckfeldes in der Umgebung eines Tragflügelprofils ist es ohne Eingehen auf die akustische Abstrahlung ohne weiteres zulässig, das reine Wasser als inkompressibel, also

$$\rho_w = \text{konst.} \quad (2)$$

anzunehmen. Die Kompressibilität ist dann lediglich durch die Gasdichte ρ_g bedingt. Unter ρ_g verstehen wir zusammenfassend sowohl die Luftdichte als auch die Dampfdichte.

Wir bezeichnen mit α das Verhältnis von Gasvolumen V_g zu Wasservolumen V_w in einem kleinen Volumenbereich $V_g + V_w$ des Strömungsfeldes, also

$$\alpha = \frac{V_g}{V_w} = \mu \frac{\rho_w}{\rho_g} \quad (3)$$

Damit wird die Gemischdichte

$$\rho = \rho_w \frac{1 + \mu}{1 + \alpha} \quad (4)$$

Für den Gasanteil der Strömung setzen wir die Gültigkeit der Zustandsgleichung

$$p = \rho_g T R \quad (R = \text{Gaskonstante}) \quad (5)$$

voraus. Unter der einleuchtenden Annahme, daß die Gasblasen die gleiche Temperatur T wie das umgebende Wasser haben und diese Wassertemperatur überhaupt konstant bleibt (isotherme Zustandsänderung), folgt weiter¹⁾

$$\frac{p\alpha}{\mu\rho_w} = \text{konst.} \quad (6)$$

oder auch mit (1) und (2):

$$\alpha = \alpha_{\infty} \left(\frac{p_{\infty}}{p} \right)^{1+\lambda} \quad (7)$$

Der Index „ ∞ “ bezeichnet Bezugswerte, die sich auf den Zustand weit vor dem Flügelprofil, also auf die Anströmung beziehen.

Für die Anwendung in der Propellerhydrodynamik haben vor allem Strömungen mit einem relativ kleinen Luftvolumengehalt Bedeutung. Wir wollen daher $\alpha < 1$ voraussetzen, und da außerdem $\rho_g/\rho_w \ll 1$ ist, dürfen wir davon ausgehen, daß etwa $\mu < 10^{-2}$ bleibt. Dann läßt sich überall

$$1 + \mu \approx 1 \quad (8)$$

¹⁾ Dabei wird entsprechend der in der Einleitung getroffenen Voraussetzung ein durch die Blasendynamik bedingter Unterschied zwischen dem Druck im umgebenden Wasser und dem Druck am Blasenrand vernachlässigt.

setzen und mit dieser Vereinfachung folgt aus (4) und (7) für die Gemischdichte

$$\varrho = \varrho_W \left[1 + \alpha_\infty \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{1+\lambda} \right]^{-1}. \quad (9)$$

Aus (9) erhalten wir für die Schallgeschwindigkeit c des gashaltigen Wassers die Relation

$$c^2 = \frac{p_\infty}{\varrho_W} \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^\lambda \left[\frac{\alpha_\infty + \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1+\lambda}}{\alpha_\infty(1+\lambda)} \right]^2 = \frac{p_\infty}{\varrho_W} \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} \frac{[1+\alpha]^2}{\alpha(1+\lambda)}. \quad (10)$$

Formel (10) zeigt, daß die Schallgeschwindigkeit stark vom örtlichen Druckfeld abhängt und in Bereichen niedrigen Druckes sehr kleine Werte annehmen kann. Wegen der vorausgesetzten Inkompressibilität des reinen Wassers gemäß (2) darf in Gleichung (10) der Grenzübergang zu reinem Wasser mit $\alpha_\infty \rightarrow 0$ nicht vorgenommen werden. Jedoch ist es ohne weiteres möglich [5], die Darstellung (10) entsprechend zu verallgemeinern, für die Behandlung des vorliegenden Problems ist dieses aber nicht notwendig.

Im Rahmen der Vereinfachung (8) ergibt sich für die innere Energie e der Strömung

$$e = \varepsilon_W T = \frac{\varepsilon_W}{R} \frac{\alpha p}{\mu \varrho_W} = \frac{1}{0,07} \frac{p}{\mu} \left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_W} \right] \quad (11)$$

mit ε_W als der spezifischen Wärme des Wassers. $R/\varepsilon_W = 0,07$ (für Luft). Aus Gleichung (11) folgt mit $c^2 = \left(\frac{p}{\varrho^2} - \frac{\partial e}{\partial \varrho} \right) \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)^{-1}$ wieder das Ergebnis (10), wie man leicht bestätigt.

Das Geschwindigkeitsfeld v in der Umgebung des betrachteten Flügelprofils setzen wir (abgesehen vom Bereich etwa auftretender Verdichtungsstöße) als Potentialströmung in der Form

$$v = u_\infty(e_x + \delta_0 e_y) + \text{grad } \Phi \quad (12)$$

an. Dabei ist $u_\infty(e_x + \delta_0 e_y)$ mit $\delta_0^2 \ll 1$ die Anströmung weit vor dem Profil. Wie in der Theorie schlanker Profile üblich, legen wir die (abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Staupunktes) in guter Näherung erfüllte Voraussetzung

$$(\text{grad } \Phi)^2 \ll u_\infty^2 \quad (13)$$

zugrunde. Damit nehmen die Erhaltungssätze von Impuls (EULERSche Gleichung) und Masse (Kontinuitätsgleichung) die Form an:

$$u_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \int \frac{dp}{\varrho(p)} = \text{konst.}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{u_\infty^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Das in der ersten Gleichung auftretende Integral läßt sich mit (9) unmittelbar auswerten; für c^2 ist der Wert aus Formel (10) einzusetzen. Es ergibt sich

$$1 - \frac{\varrho_W u_\infty}{p_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{p}{p_\infty} - \frac{\alpha_\infty}{\lambda} \left[\left(\frac{p_\infty}{p} \right)^\lambda - 1 \right], \quad (14)$$

und

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \alpha_\infty \frac{\varrho_W u_\infty^2}{p_\infty} (1 + \lambda) \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^\lambda \left[\left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\lambda+1} + \alpha_\infty \right]^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Die beiden Relationen (14) und (15) stellen ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zur Berechnung des Geschwindigkeitspotentials Φ und des Druckes p dar. Sie gelten aber nur in den stoßfreien Bereichen des Strömungsfeldes, wo sich alle Funktionen stetig differenzierbar verhalten.

Auf der Saugseite eines Flügelprofils können wegen der dort herrschenden niedrigen örtlichen Schallgeschwindigkeit lokale Bereiche mit Überschallzustand auftreten, die mit einem Verdichtungsstoß abgeschlossen werden. Wir müssen daher für die vollständige Berechnung der Strömung außer Gleichung (14) und (15) noch die Stoßrelationen berücksichtigen.

Wir bezeichnen mit U_n die Geschwindigkeitskomponente senkrecht und mit U_t die Komponente parallel zu der als Gerade angenommenen Stoßlinie und kennzeichnen alle Größen vor dem Verdichtungsstoß mit \sim , dahinter mit $\hat{\sim}$.

Die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Energie liefern die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t &= \hat{U}_t; & \frac{\tilde{U}}{1+\tilde{\alpha}} &= \frac{\hat{U}}{1+\hat{\alpha}}; & \frac{\tilde{p}}{\varrho_W} + \frac{\tilde{U}_n^2}{1+\tilde{\alpha}} &= \frac{\hat{p}}{\varrho_W} + \frac{\hat{U}_n^2}{1+\hat{\alpha}}; \\ \frac{1}{2} \tilde{U}_n^2 + \frac{\tilde{p}}{\varrho_W} \left(1 + \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\alpha}}{0,07\tilde{\mu}} \right) &= \frac{1}{2} \hat{U}_n^2 + \frac{\hat{p}}{\varrho_W} \left(1 + \hat{\alpha} + \frac{\hat{\alpha}}{0,07\hat{\mu}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Durch eine elementare Rechnung folgt aus (16) unter Berücksichtigung von (10) zunächst:

$$\frac{\hat{p}}{\bar{p}} = 1 + \frac{1 - \hat{\alpha}/\tilde{\alpha}}{1 + \lambda} \left(\frac{\tilde{U}_n}{\tilde{c}} \right)^2; \quad \frac{\hat{q}}{\bar{q}} = \frac{\tilde{U}_n}{\tilde{U}_n} = \frac{1 + \tilde{\alpha}}{1 + \hat{\alpha}}. \quad (17)$$

Wir setzen weiter voraus, daß die Abhängigkeit (1) auch über den Stoß hinweg gültig bleibt und beachten die Näherung (8). Dann liefert eine elementare Rechnung nach Elimination von \tilde{p} , \hat{p} , \tilde{U}_n die noch fehlende Bestimmungsgleichung für $\hat{\alpha}/\tilde{\alpha}$, nämlich:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \left(1 + \frac{1 - \hat{\alpha}/\tilde{\alpha}}{1 + \lambda} \left(\frac{\tilde{U}_n}{\tilde{c}} \right)^2 \right)^{\lambda+1} = 1. \quad (18)$$

Gleichung (18) enthält natürlich stets die triviale Lösung $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha}$. Die dem Verdichtungsstoß entsprechenden Werte sind z. B. für $\lambda = 0$:

$$\tilde{\alpha}/\hat{\alpha} = \tilde{U}_n^2/\tilde{c}^2 \equiv \tilde{M}_n^2,$$

und für $\lambda = 1$:

$$\tilde{\alpha}/\hat{\alpha} = \tilde{M}_n^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \tilde{M}_n^2 + \frac{1}{2} \tilde{M}_n \right] / \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{16} \tilde{M}_n^2 \right].$$

Mit $\hat{\alpha}/\tilde{\alpha}$ liegen gemäß Gleichung (17) auch die übrigen Größen des Strömungszustands hinter dem Stoß fest. Sie lassen sich eindeutig aus dem Strömungsfeld vor dem Stoß berechnen.

Bei der hier untersuchten Strömung um schlanke Tragflügelprofile kann man in guter Näherung annehmen, daß die Stoßlinie senkrecht zur Profilschne, also zur x -Achse (vgl. Bilder 1 und 2), verläuft. Dann ist $U_i^2 \ll U_n^2$ und $\tilde{M}_n = \tilde{U}_n/\tilde{c}$ stellt die örtliche MACHzahl vor dem Stoß dar.

3. Berechnung des Druckfeldes am Tragflügelprofil

Um das Druckfeld in der Umgebung des Flügelprofils zu bestimmen, haben wir das System der Differentialgleichungen (14), (15) zu lösen und zwar sowohl unter Erfüllung der üblichen Strömungsrandbedingung am Profil als auch unter Beachtung der Stoßrelationen (17), (18) längs einer sich auf der Saugseite etwa bei $x = x_1$ von $y = 0$ bis $y = l_1$ erstreckenden Stoßlinie (vgl. Bilder 1 und 2). Es ist zweckmäßig, eine verallgemeinerte Druckfunktion \wp einzuführen, durch die Definition

$$\wp = \begin{cases} p/p_\infty + \frac{\alpha_\infty}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^\lambda \right), & (\lambda \neq 0) \\ p/p_\infty + \alpha_\infty \ln \frac{p}{p_\infty}; & (\lambda = 0) \end{cases} \quad (19)$$

Dann nimmt Gleichung (14) die Gestalt an:

$$\wp = 1 - \frac{\rho_\infty u_\infty}{p_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (20)$$

Wie eine elementare Rechnung zeigt, läßt sich die Differentialgleichung (15) in die Form bringen

$$\Delta \Phi = u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[1 + \alpha_\infty \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{1+\lambda} \right]. \quad (21)$$

Im Zusammenhang mit den Gleichungen (19) und (20) vermerken wir noch: Im Fall der inkompressiblen Strömung ohne Gasgehalt, also für $\alpha_\infty = 0$, kann das Druckfeld bei genügend großen Werten von u_∞ ($\partial \Phi / \partial x$) formal negativ werden; die Strömung wird dann also nicht mehr realistisch erfaßt. Bei Berücksichtigung eines

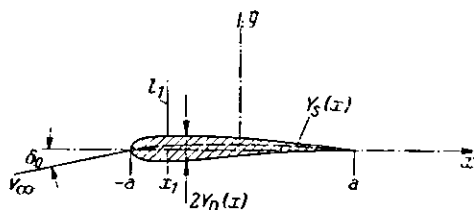


Bild 1. Bezeichnungen und Koordinaten am Flügelprofil

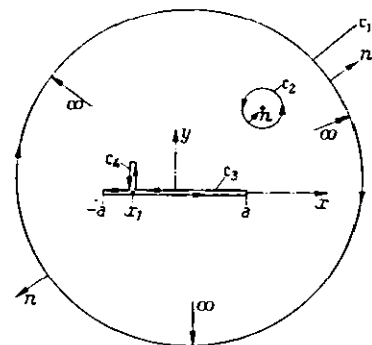


Bild 2. Integrationsbereich und Integrationswege

Gasgehalts mit $\alpha_\infty \neq 0$ wird nur noch die in diesem Fall nicht mit p/p_∞ übereinstimmende Druckfunktion \wp (welche keine physikalische Bedeutung hat) negativ; der Druck p selbst bleibt stets positiv. Dem Grenzwert $p \rightarrow 0$ entspricht $\wp \rightarrow -\infty$ wie ein Blick auf Gleichung (19) zeigt.

Für die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (21) mit den zusätzlichen Relationen (19), (20) und den Stoßbeziehungen (17), (18) verwenden wir eine Integralgleichungsmethode, die von der GREENSchen Formel der Potentialtheorie ausgeht. Ein ähnliches Vorgehen hat sich bereits in der Theorie der schallnahen Gas-Strömungen mit lokalen Überschallgebieten bewährt [6]. Die GREENSche Formel

$$\iint_{(\mathfrak{B})} [\phi \Delta \psi' - \psi' \Delta \phi] d\xi d\eta = \sum_{(m)} \int_{(c_m)} \left[\phi \frac{\partial \psi'}{\partial n} - \psi' \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds_m \quad (22)$$

mit

$$\psi' = \ln |(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2| = \ln r$$

ist nach bekannten Methoden der Analysis auf den Bereich (\mathfrak{B}) der x - y -Ebene anzuwenden, in dem die Funktionen ϕ und ψ' zweimal stetig differenzierbar sind. Letzteres ist für ϕ längs der Profilschne im Bereich $-\alpha \leq x \leq a$ der x -Achse und an der Stoßlinie $x = x_1$, $0 \leq y \leq l_1$ nicht der Fall. Die Berandung des Bereichs (\mathfrak{B}) besteht daher außer aus den Kreisen (c_1) mit sehr großem und (c_2) um den Aufpunkt (x, y) mit infinitesimalem Radius noch aus zwei weiteren Anteilen: Die Randkurve (c_3) schließt die Profilschne und die Randkurve (c_4) die Stoßlinie aus dem Bereich (\mathfrak{B}) aus. (vgl. Bild 2).

In Gleichung (22) ist n die äußere Normale, und wir verabreden, daß die Ränder für die Auswertung der Linienintegrale so durchlaufen werden, daß das Gebiet (\mathfrak{B}) zur Rechten liegt.

Wie üblich setzen wir voraus, daß ϕ sich im Unendlichen so verhält, daß

$$\int_{(c_2)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[\phi \frac{1}{r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \ln r \right] r d\varphi_1 = 0 \quad (23)$$

angenommen werden kann. Weiter folgt mit $n = -r$:

$$\int_{(c_2)} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[-\phi \frac{1}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \ln r \right] r d\varphi_2 = -2\pi \phi(x, y). \quad (24)$$

Wir schreiben nun die Diskontinuitäten der Funktion ϕ und ihrer Normalableitungen, welche längs der Linien (c_3) und (c_4) auftreten, in der Abkürzung

$$\begin{aligned} \phi_{\eta=+0} - \phi_{\eta=-0} &= \partial(\phi)_{\eta=0}; & \frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_{\eta=+0} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_{\eta=-0} &= \partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \\ \phi_{\xi=x_1+0} - \phi_{\xi=x_1-0} &= \partial(\phi)_{\xi=x_1}; & \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{\xi=x_1+0} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_{\xi=x_1-0} &= \partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{\xi=x_1} \end{aligned} \quad (25)$$

und erhalten so für die beiden restlichen Randintegrale:

$$\int_{(c_3)} = \int_{-a}^a \left[-\partial(\phi) \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} + \partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \ln r \right]_{\eta=0} d\xi; \quad (26)$$

$$\int_{(c_4)} = \int_0^{l_1} \left[-\partial(\phi) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} + \partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \ln r \right]_{\xi=x_1} d\eta. \quad (27)$$

In (\mathfrak{B}) ist $\Delta \psi' = 0$, und $\Delta \phi$ durch die zu lösende Differentialgleichung (21) bestimmt. Unter Berücksichtigung von (23) bis (27) nimmt die GREENSche Formel (22) als Lösung von (21) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} 2\pi \phi &= \int_{-a}^a \left[\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \ln r - \partial(\phi) \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} d\xi + \int_0^{l_1} \left[\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \ln r - \partial(\phi) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} \right]_{\xi=x_1} d\eta + \\ &+ \iint_{(\mathfrak{B})} u_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left[1 + \alpha_\infty \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{1+\lambda} \right] \ln r \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (28)$$

Für die Berechnung des Druckfeldes und die Erfüllung der Strömungsrandbedingung am Flügel benötigen wir die Ableitungen $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ des Potentials (28). Diese lassen sich mit Hilfe der Integralformeln

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \partial(\Phi) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x \partial \eta} d\xi &= \int_{-a}^a \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} d\xi, & \int_{-a}^a \partial(\Phi) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y \partial \eta} d\xi &= - \int_{-a}^a \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} d\xi; \\ \int_0^{l_1} \partial(\Phi) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x \partial \xi} d\eta &= 0; & \int_0^{l_1} \partial(\Phi) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y \partial \xi} d\eta &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

in eine übersichtlichere Form bringen.²⁾ Dafür ersetzen wir gemäß Gleichung (20) außerdem noch $\partial\Phi/\partial x$ durch \wp ; es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \wp &= 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \partial(\wp)_{\eta=0} \frac{y d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\varrho_W u_\infty}{p_\infty} \int_{-a}^a \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_1} \partial(\wp)_{\xi=x_1} \frac{(x-x_1) d\eta}{(x-x_1)^2 + (y-\eta)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\varrho_W u_\infty^2}{p_\infty} \int \int_{(2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left[1 + \alpha_\infty \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{\lambda+1} \right] \frac{(x-\xi) d\xi d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \frac{p_\infty}{\varrho_W u_\infty^2} \int_{-a}^a \partial(\wp)_{\eta=0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{u_\infty} \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \frac{y d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \frac{p_\infty}{\varrho_W u_\infty^2} \int_0^{l_1} \partial(\wp)_{\xi=x_1} \frac{(y-\eta) d\eta}{(x-x_1)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{1}{2\pi} \int \int_{(2)} \ln \left[1 + \alpha_\infty \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{\lambda+1} \right] \frac{(y-\eta) d\xi d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Eine Betrachtung der Gleichungen (30) und (31) zeigt, daß sie in Form der jeweils ersten beiden Integrale über den Bereich $-a \leq \xi \leq a$ der Profilschne genau die Terme enthalten, welche auch bei reinem Wasser ohne Gasgehalt vorhanden wären. Man braucht nur zu bedenken, daß

$$\begin{aligned} \partial(\wp)_{\eta=0} &= - \frac{\varrho_W u_\infty}{p_\infty} \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = - \frac{\varrho_W u_\infty}{p_\infty} \gamma(x), \\ \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{\eta=0} &= 2u_\infty Y_D'(x), \end{aligned} \quad (32)$$

ist mit $\gamma(x)$ als Wirbeldichte und $Y_D(x)$ als Profildickenlinie. Die weiteren Terme in Gleichung (30) und (31) sind durch die Kompressibilität des gashaltigen Wassers bedingt. Die Doppelintegrale über (2) geben den Einfluß der nichtlinearen rechten Seite von Gleichung (21) wieder und treten auch dann auf, wenn das Strömungsfeld überall Unterschallzustand behält. Die beiden Integrale über eine bei $x = x_1$ im Bereich $0 \leq y \leq l_1$ verlaufende Stoßlinie sind natürlich nur dann vorhanden, wenn ein lokales mit einem Verdichtungsstoß abgeschlossenes Überschallgebiet auf der Profilsaugseite vorliegt. Aus (30) und (31) ergibt sich die interessante Tatsache, daß sich der Einfluß eines Verdichtungsstoßes auf das Strömungsfeld mathematisch als Senkenverteilung der Stärke

$$q_{\text{Stoß}} = -u_\infty \partial(\wp)_{x=x_1} \frac{p_\infty}{\varrho_W u_\infty^2} = \partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=x_1} \quad (33)$$

auf der Stoßlinie $0 \leq y \leq l_1$ darstellen läßt. Diese letztere Aussage gilt übrigens, wie man zeigen kann, auch für instationäre Strömungsfelder.

Die Relation (30) stellt eine nichtlineare Integralgleichung zur Berechnung des Druckfeldes $p(x, y)$ in der Umgebung eines Flügelprofils in gashaltiger Wasserströmung dar. Der Zusammenhang zwischen p und der Druckfunktion \wp ist dabei durch Formel (19) gegeben.³⁾

²⁾ Beweis der Formeln (29) durch partielle Integration und folgende Tatsachen: Die Diskontinuitäten müssen an den Enden der Integrationsbereiche verschwinden; $\ln r$ genügt der LAPLACESchen Gleichung; längs der Stoßlinie ist $\partial\Phi/\partial\eta = 0$.

³⁾ Die Umkehrung der Formel (19), also die Berechnung von p/p_∞ bei bekanntem \wp -Wert muß für allgemeine λ -Werte numerisch erfolgen; speziell bei $\lambda = 1$ ergibt sich explizit

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{1}{2} (\wp - \alpha_\infty) + \sqrt{\alpha_\infty + \frac{1}{4} (\wp - \alpha_\infty)^2}.$$

Für die praktisch vorkommenden Werte $\alpha_\infty \approx 10^{-4}$ ist der Unterschied zwischen \wp und p/p_∞ schon für $p/p_\infty \geq 0,05$ recht unbedeutend, so gilt:

$$\alpha_\infty = 10^{-4}; \quad p/p_\infty = 0,050; \quad \wp = 0,048.$$

Die Lösung der Integralgleichung (30) erfolgte mit einem Iterationsverfahren, beginnend mit dem inkompressiblen Druckfeld p_0 . Letzteres ist lediglich durch die ersten beiden Integralterme in Gleichung (30) bestimmt und kann nach Vorgabe von Dickenlinie Y_D , Skelottlinie Y_S und Anstellwinkel δ_0 nach den bekannten Methoden der Profiltheorie für inkompressible Strömung [7] leicht berechnet werden.⁴⁾

Bei entsprechend großen Anstellwinkeln δ_0 oder Zuströmgeschwindigkeiten u_∞ können sich dabei örtlich auch negative Druckwerte ergeben. Es ist dann physikalisch realistisch und wie sich gezeigt hat auch für die numerische Durchführung des Iterationsverfahrens zweckmäßig, alle Druckwerte p , welche kleiner als der Dampfdruck p_v sind, auf diesen Wert p_v heraufzukorrigieren. Unter Verwendung des so bestimmten inkompressiblen Druckfeldes $p_0(x, y)$ bzw. $\phi_0(x, y)$ läßt sich das Doppelintegral über den Bereich (2) in Formel (30) berechnen.⁵⁾ Es liefert einen Beitrag zum Feld, den wir mit $\phi_{ff}^{(0)}$ bezeichnen wollen.

Auf Grund der damit vorliegenden Druckfunktion $\phi_0 + \phi_{ff}^{(0)}$ und des zugehörigen Druckfeldes läßt sich feststellen, ob und in welchen Bereichen Überschallzustand auftritt. Dazu braucht ja mit Hilfe der Schallgeschwindigkeit c gemäß Formel (10) nur die örtliche MACHzahl

$$M = M_n = \frac{1}{c} \left(u_\infty + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{u_\infty}{c} \left[1 + \frac{p_\infty}{\rho_w u_\infty^2} (1 - \phi) \right] \quad (34)$$

jedes Feldpunktes (x, y) ausgerechnet zu werden. Die y -Komponente der Geschwindigkeit hat dabei effektiv keinen Einfluß.

Wenn im Strömungsfeld überall Unterschallzustand herrscht, so stellt

$$\phi^{(1)} = \phi_0 + \phi_{ff}^{(0)}$$

bereits die erste Näherung für die Druckfunktion der gashaltigen Wasserströmung dar.

Tritt dagegen ein lokales⁶⁾ Gebiet mit Überschallzustand auf, das mit einem Verdichtungsstoß abgeschlossen wird⁷⁾, so muß noch der Anteil des Stoßintegrals in Gleichung (30) bei der Berechnung der Druckfunktion ϕ berücksichtigt werden. Eine erste Näherung für die Stoßlänge ergibt sich aus der Erstreckung des Überschallgebietes von $\phi_0 + \phi_{ff}^{(0)}$ in y -Richtung, wir bezeichnen sie mit $l^{(1)}$.

Die Stoßstärke $\partial(\phi)_{x=x_1}$ läßt sich aus den Stoßgleichungen (17) und (18) bestimmen, wenn der Zustand vor dem Stoß bekannt ist. In der Regel wird man in guter Näherung davon ausgehen können, daß $\tilde{p} \approx p_v$, also gleich dem Dampfdruck ist. Der zugehörige Wert von $\tilde{\phi}$ folgt aus Gleichung (19). Mit $\hat{\alpha}/\tilde{\alpha}$ aus Gleichung (18) und wegen $\hat{\phi} = \tilde{p}/p_\infty$ folgt:

$$\partial(\phi)_{x=x_1} = \hat{\phi} - \tilde{\phi} = \frac{\tilde{p}}{p_\infty} \frac{\tilde{M}^2}{1 + \lambda} \left(1 - \frac{\hat{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) + \frac{\alpha_\infty}{\lambda} \left[\left(\frac{p_\infty}{\tilde{p}} \right)^\lambda - 1 \right]. \quad (35)$$

\tilde{M} ist die MACHzahl des Strömungszustands vor dem Stoß und ergibt sich aus Gleichung (34).

Es bleibt nun noch die Lage $x = x_1$ des Stoßes am Profil zu bestimmen. Diese Aufgabe ist bereits für die schallnahe Gasströmung mehrfach diskutiert worden (vgl. z. B. [9], [10]).

Eine physikalisch korrekte Lösung ergibt sich aus der Bedingung, daß der durch den Verdichtungsstoß am Profil hervorgerufene Druckwiderstand gleich demjenigen Widerstand sein muß, der der Entropiezunahme im Verdichtungsstoß entspricht. In reibungsfreier Unterschallströmung verschwindet ja bekanntlich der Druckwiderstand eines Profils. Jedoch bereitet die genügend genaue Berechnung des Druckwiderstands in Abhängigkeit von möglichen Stoßlagen x_1 erhebliche numerische Schwierigkeiten. Daher wird in der Gasdynamik meist eine mehr heuristische Methode zur Bestimmung des x_1 -Wertes angewendet; zum Beispiel die Festlegung, daß das Druckfeld hinter dem Stoß wieder mit der auf Grund der PRANDTL'schen Regel für Unterschallströmung ermittelten Verteilung übereinstimmen soll [10]. Auch wir verwenden hier eine ähnliche heuristische Methode: Und zwar wird die Stoßlinie so gelegt, daß vor dem Stoß in der Nähe der Profilsaugseite, also für $x \leq x_1$ und $y \geq 0$, überall entweder etwa Dampfdruck p_v oder der sich sonst auf Grund des Feldes $\phi_0 + \phi_{ff}^{(0)}$ ergebende Minimaldruck $p_{\min} > p_v$ herrscht. Die numerische Auswertung hat gezeigt, daß dieses Kriterium eine recht

⁴⁾ Aus Y_S und δ_0 folgt ja unmittelbar die Wirbeldichte γ , also wegen (32) auch $\partial(\phi)_0$. Für Aufpunkte am Profil, also $y = 0$ muß in unmittelbarer Umgebung der Vorderkante bei $x \geq -a$ die Tangentialgeschwindigkeit $u_\infty + \partial\phi/\partial x$ noch wie üblich [7] mit dem RIEGELSFaktor $[1 + Y_D'^2]^{-1}$ korrigiert werden.

⁵⁾ Für die Auswertung des Doppelintegrals in Formel (30) hat es sich als zweckmäßig erwiesen, zuerst bei konstantem $\eta = \eta_n$ über ξ zu integrieren und dann die einzelnen Teilintegrale über n zu summieren. Für $\eta_n = y$ tritt bei der Integration über ξ bei $\xi = x$ eine Singularität auf, die sich als CAUCHY'scher Hauptwert integrieren läßt.

Es zeigt sich im übrigen, daß nur die Bereiche niedrigen Drucks auf der Saugseite in der näheren Umgebung des Profils einen Beitrag von Bedeutung zum Wert des Doppelintegrals liefern. Dadurch kann der Integrationsbereich relativ klein gehalten werden.

⁶⁾ In einem Abstand vom Profil herrscht auf jeden Fall Unterschallzustand. Denn bei normalem Atmosphärendruck ist der Gasvolumengehalt dort gering, $\alpha_\infty < 10^{-3}$ und die zugehörige Schallgeschwindigkeit $c_\infty > 200$ m/sec. Eine so hohe Anströmgeschwindigkeit u_∞ wird von Strömungskörpern im Wasser aber bei weitem nicht erreicht.

⁷⁾ Aus der Gasdynamik ist bekannt, daß ein stoßfreier Übergang von Überschall- zu Unterschallzustand ohne zusätzliche Strömungsbeeinflussung als stabiler Vorgang nicht möglich ist [8]. Auch in der gashaltigen Wasserströmung werden, wie Experimente zeigen, Überschallgebiete durch Verdichtungsstöße abgeschlossen. [11].

genaue Aussage über die Stoßlage $x = x_1$ liefert.⁸⁾ Damit ist auch der Anteil des Stoßes zum Feld \wp ermittelt; wir wollen diesen mit der Abkürzung \wp_{st} bezeichnen.

Der Ausdruck

$$\wp^{(1)} = \wp_0 + \wp_{ff}^{(0)} + \wp_{st}^{(0)}$$

stellt somit die erste Näherung für die gesuchte Druckfunktion beim Auftreten eines lokalen Überschallgebietes dar.

Wenn wir zunächst die Frage zurückstellen, inwieweit die Strömungsrandbedingung am Profil auch in der gashaltigen Strömung noch erfüllt ist, (für die inkompressible Strömung war dieses ja durch die entsprechende Festlegung von $\partial(\wp)_{y=0}$ der Fall; vgl. auch Ziff. 4), so können in ganz analoger Weise weitere Näherungen in der Form

$$\wp^{(n)} = \wp_0 + \wp_{ff}^{(n-1)} + \wp_{st}^{(n-1)} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

berechnet werden. Dabei ist jeweils im Doppelintegral das Druckfeld der vorhergehenden Näherung einzusetzen. Außerdem sind nach den gleichen Kriterien wie bei der Ausgangsnäherung die Stoßlänge l_1 , Stoßlage x_1 und Stoß-Stärke $\partial(\wp)_{x=x_1}$ jedesmal neu zu überprüfen. Das Iterationsverfahren wird abgebrochen, wenn zwei aufeinander folgende Näherungen sich effektiv nicht mehr unterscheiden.

4. Die Strömungsrandbedingung am Flügelprofil

Bei der Beschreibung des Iterationsverfahrens zur Berechnung des Druckfeldes haben wir in Ziff. 3 eine Untersuchung der Strömungsrandbedingung am Profil bewußt zurückgestellt, um den Gedankengang nicht zu sehr zu komplizieren. Die in diesem Zusammenhang notwendigen Überlegungen sollen nun nachgeholt werden.

Unter Berücksichtigung des Gasgehaltes im Wasser, also mit $\frac{1}{u_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0}$ gemäß Formel (31) und Beachtung der Relation (32), lautet die Randbedingung:

$$-u_\infty Y'_s(x) + u_\infty(\delta_0 + \delta_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi. \quad (36)$$

In Gl. (36) ist $Y_s(x)$ die Profilskelettlinie und δ_a eine Abkürzung für die durch die Kompressibilität gashaltigen Wassers einschließlich Verdichtungsstoß gegenüber der klassischen Form für inkompressible Strömung zusätzlich auftretenden Terme, nämlich

$$\delta_a = \frac{1}{2\pi} \frac{p_\infty}{\rho_W u_\infty^2} \int_0^{l_1} \frac{\partial(\wp)_{x=x_1} \eta d\eta}{(x - x_1)^2 + \eta^2} - \frac{1}{2\pi} \iint_{(\wp)} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \left[1 + \alpha_\infty \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{\lambda+1} \right] \frac{\eta d\eta d\xi}{(x - \xi)^2 + \eta^2}. \quad (37)$$

In der Regel wird man davon auszugehen haben, daß die Skelettlinie des Profils fest vorgegeben ist. Machen wir dann für die Wirbeldichte γ den Ansatz

$$\gamma(x) = \gamma_0(x) + \gamma_a(x)$$

mit γ_0 als der Verteilung für inkompressible Strömung, so erhalten wir für die Berechnung der Zusatzzirkulation γ_a die Integralgleichung

$$u_\infty \delta_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi. \quad (38)$$

δ_a kann als eine Art zusätzlicher, durch die Kompressibilität bedingter Anstellwinkel interpretiert werden, der allerdings über die Profiltiefe stark veränderlich ist.

Bei numerischen Untersuchungen und Abschätzungen hat sich gezeigt, daß der erste durch den Stoß bedingte Term in (37) den wesentlichen Anteil von δ_a liefert, während das Doppelintegral nur einen unbedeutenden Einfluß hat. Im Rahmen dieser Betrachtung können wir unbedenklich $\partial(\wp)_{x=x_1}$ als konstant annehmen und erhalten so

$$\delta_a \approx \frac{1}{4\pi} \frac{p_\infty}{\rho_W u_\infty^2} \partial(\wp)_{x_1} \ln \left(1 + \frac{l_1^2}{(x - x_1)^2} \right). \quad (39)$$

⁸⁾ Der Wert \wp_{st} des Stoßintegrals in Gl. (30) fällt bei festem y ($0 < y < l_1$) mit zunehmendem x für $x < x_1 - 0$ laufend ab und erreicht bei $x = x_1 - 0$ sein Minimum. Am Stoß nimmt \wp_{st} sprunghaft um den Wert $\partial(\wp)_{x_1}$ zu und fällt hinter dem Stoß für $x > x_1 + 0$ wieder kontinuierlich ab. Auf Grund dieser Eigenschaften ist es möglich, x_1 so festzulegen, daß in guter Näherung in einem gewissen Bereich $x \leq x_1$ vor dem Stoß $\wp_0 + \wp_{ff}^{(0)} + \wp_{st}^{(0)} \approx \wp_0$ bzw. $\approx \wp_{Min}$ bleibt. (Vgl. auch die Ergebnisse der Beispiele in Ziff. 5.)

Es zeigt sich⁹⁾, daß die Funktion δ_α nur in einem im Verhältnis zur Profiltiefe kleinen Bereich um die Stelle $x = x_1$ herum überhaupt merkbare Werte annimmt. Für $x = x_1$ wird δ_α logarithmisch singular¹⁰⁾, bleibt aber quadratisch integrierbar. Infolgedessen existiert die Lösung der Integralgleichung (38). Ihre effektive und genaue Berechnung stößt aber wegen der sehr langsamen Konvergenz einer FOURIERSchen Reihenentwicklung für die Funktion δ_α auf große Schwierigkeiten.

Man kann sich jedoch relativ leicht einen Überblick über den qualitativen Verlauf der Lösung γ_α von (38) verschaffen. Diese muß so geartet sein, daß γ_α praktisch verschwindet, wenn x genügend weit von der singulären Stelle x_1 entfernt ist; in der Umgebung der singulären Stelle $x = x_1$ muß γ_α so beschaffen sein, daß für δ_α die logarithmische Singularität herauskommt. Außerdem ist δ_α überall positiv. Wie man sich leicht klarmacht, würde dieses genau einer Diskontinuität von γ_α bei $x = x_1$ entsprechen, es müßte daher gelten:

$$\gamma_\alpha(x) = \begin{cases} \text{positiv für } x = x_1 - 0, \text{ und schnell auf Null abnehmend für } x < x_1, \\ \text{negativ für } x = x_1 + 0, \text{ und schnell auf Null zunehmend für } x > x_1. \end{cases}$$

Für die tatsächliche numerische Berechnung der Zusatzwirbelbelegung werden wir eine andere nachfolgend erläuterte mehr physikalische Überlegung heranziehen. Dabei zeigt es sich, daß der auf diese Weise ermittelte Funktionsverlauf von $\gamma_\alpha(x)$ qualitativ weitgehend mit der oben gewonnenen Aussage übereinstimmt. Lediglich tritt an die Stelle der mathematischen Diskontinuität bei $x = x_1$ ein steiler Abfall der Funktion γ_α in der Umgebung dieser Stelle (vgl. z. B. Bild 10).

Bei der eben erwähnten durch die physikalischen Eigenschaften des Druckfeldes gestützten Überlegung handelt es sich um folgendes: Im Rahmen der Berechnung des Druckfeldes auf der Profilsaugseite stellt sich (unter Vorwegnahme späterer Ergebnisse) heraus, daß der Einfluß der Kompressibilität sich im wesentlichen auf das Überschallgebiet vor dem Verdichtungsstoß und den Bereich unmittelbar hinter dem Stoß erstreckt. In der direkten Umgebung des Staupunktes an der Vorderkante sowie in dem Gebiet in einigem Abstand (etwa 10% der Flügeltiefe) hinter dem Stoß ist der Strömungszustand absolut inkompressibel. Es erscheint somit logisch, daß das Strömungsfeld auch auf der gesamten Druckseite inkompressiblen Charakter haben muß. Denn bei der hier behandelten stationären ebenen Profilströmung ohne Berücksichtigung des Einflusses der Flügelseitenkanten ist nicht einzusehen, daß sich die Kompressibilität auf der Druckseite in Anbetracht der dortigen kleinen, einer rein inkompressiblen Strömung entsprechenden örtlichen MACHzahlen bemerkbar machen kann.

Die Bedingung, daß das Feld \wp auf der Druckseite des Profils den inkompressiblen Zustand beibehalten muß, läßt sich nun in einfacher Weise zur Bestimmung der Zusatzwirbelbelegung γ_α verwenden. Dazu berechnet man mit dem in Ziff. 3 dargestellten Iterationsverfahren den Verlauf der Druckfunktion $\wp(x, \pm 0)$ auf der Saugseite zunächst unter Beibehaltung des inkompressiblen Ausgangswertes von¹¹⁾

$$\partial(\wp)_{y=0} = -\frac{\rho_\infty u_\infty}{p_\infty} \gamma_0(x) [1 + Y_D'^2]^{-1}. \quad (40)$$

Dabei zeigt es sich, daß durch den Einfluß des Stoßintegrals und Doppelintegrals in (30) das Feld \wp auf der Druckseite, also

$$\wp_*(x, -0) = \wp(x, +0) + \frac{\rho_\infty u_\infty}{p_\infty} \gamma_0(x) [1 + Y_D'^2]^{-1} \quad (41)$$

in der näheren Umgebung der Stoßlage $x = x_1$ doch merklich von der inkompressiblen Verteilung $\wp_0(x, -0)$ abweicht. Die Bedingung

$$\wp_0(x, -0) = \wp(x, -0) \quad (42)$$

läßt sich jedoch durch Einführung der Zusatzbelegung γ_α erfüllen. Es muß dann

$$\wp_0(x, -0) = \wp(x, +0) + \frac{\rho_\infty u_\infty}{p_\infty} \frac{\gamma_0(x) + \gamma_\alpha(x)}{1 + Y_D'^2} \quad (43)$$

sein, und aus (43) und (41) folgt die gesuchte Bestimmungsgleichung für γ_α , welche wir an Stelle der Integralgleichung (38) verwenden:¹²⁾

$$\frac{1}{u_\infty} \gamma_\alpha(x) = -\frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2} (1 + Y_D'^2) [\wp_0(x, -0) - \wp_*(x, -0)]. \quad (44)$$

⁹⁾ Diese Tatsache ergibt sich unmittelbar aus Formel (39), wenn man berücksichtigt, daß in den meisten bei Anwendungen auftretenden Fällen gilt:

$$l_1^2/a^2 \leq 10^{-3}; \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2} \partial(\wp) \leq 0,05.$$

¹⁰⁾ Der Fußpunkt $x = x_1$ und $y = 0$ der Stoßlinie muß streng genommen als eine Art singulärer Punkt aus unseren Betrachtungen ausgenommen werden. Denn dieser Punkt gehört gemeinsam den Randkurven (c_3) und (c_4) (vgl. Bild 2) der bei der Gewinnung von (31) und (30) verwendeten GREENSchen Formel an.

¹¹⁾ Für $y = \pm 0$ ist wie in der Profiltheorie üblich der RIEGELSfaktor zu berücksichtigen.

¹²⁾ Zur Auswertung der Gleichungen (41) und (44) bemerken wir noch: Das Doppelintegral in Formel (30) ist stetig für $y = \pm 0$; auch das Stoßintegral aus (30) bleibt beim Durchgang durch die x -Achse stetig mit Ausnahme des Punktes $x = x_1$. Unter $\wp^*(x_1, -0)$ wollen wir dann das arithmetische Mittel der sich bei $x_1 + 0$ und $x_1 - 0$ ergebenden Werte verstehen.

Abschließend bleibt noch zu prüfen, ob und inwieweit der Einfluß von γ_x das vorher nur mit γ_0 berechnete Feld ϕ auf der Saugseite des Profils verändert. Wie sich gezeigt hat, ist die Abweichung in vielen Fällen unerheblich, gegebenenfalls muß sie mit einer weiteren Iteration gemäß Ziff. 3 berücksichtigt werden.

5. Anwendung und Ergebnisse der Theorie

Bevor die vorgelegte Theorie auf konkrete Beispiele angewendet werden kann, müssen wir uns noch über den Exponenten λ klar werden, der gemäß Gleichung (1) die Abhängigkeit des örtlichen Massenverhältnis μ vom Druckfeld bestimmt. Gleichzeitig ist es auch erforderlich, einen realistischen Wertebereich für das Gasvolumenverhältnis α_∞ der Zuströmung festzulegen.

Wie wir in der Einleitung ausgeführt haben, stellt die Relation (1) nur eine heuristisch angesetzte summarische Näherungsformel dar und wurde nicht auf Grund von Betrachtungen einzelner physikalischer Vorgänge gewonnen. Daher wird man eine genauere Aussage über den Wert von λ erst durch Vergleiche zwischen den Ergebnissen der Theorie und denjenigen eingehender darauf abgestimmter experimenteller Untersuchungen gewinnen können.

Da letztere zur Zeit nur in sehr begrenztem Umfang zur Verfügung stehen [11], müssen wir uns für die numerische Auswertung der Theorie mit einer angenäherten Festlegung von λ begnügen.¹³⁾ Schon auf Grund von rein qualitativen Überlegungen erscheint es unrealistisch, μ als konstant ($\lambda = 0$) anzusetzen, wenn man mit μ sowohl den Anteil der freien Luftmasse als auch denjenigen der bei Bildung von Dampfkavitation entstehenden Dampfmasse beschreiben will (vgl. Einleitung).

Soweit es sich nur um das Massenverhältnis des freien Luftgehalts ohne Dampfkavitation handelt, wird in der Literatur überwiegend von einem konstanten μ -Wert ausgegangen und damit die Schallgeschwindigkeit und andere thermodynamische Größen berechnet (vgl. z. B. [1], [2], [3], [12], [13], [14]).

SIMHAN findet dagegen eine erhebliche Druckabhängigkeit von μ mit einem Verlauf ähnlich dem Potenzgesetz (1), [15]. Auch andere funktionale Zusammenhänge erscheinen denkbar.¹⁴⁾

Nun liegt der Massenanteil an gelöster Luft im Wasser bei normalen Anströmungsdrücken von etwa 1 kp/cm² in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-5} . Der uns interessierende freie Luftgehalt beträgt bei solchen Drücken sicher nur einen kleinen Bruchteil davon; nach den aus der erwähnten Literatur zu entnehmenden Angaben dürfte er ungefähr um zwei Größenordnungen tiefer liegen. Man kann somit etwa

$$10^{-7} \leq \mu_\infty \leq 10^{-6}$$

annehmen. Der realistische Bereich für das Volumverhältnis α_∞ der Anströmung (die ja wegen ihres relativ hohen Druckes in der Regel noch keine Dampfkavitation enthält) wird demnach ungefähr

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \leq \alpha_\infty \leq 10^{-3} \quad (45)$$

sein.

Bezieht man die Dampfkavitation in die Überlegungen ein, so würden sich beim Erreichen von Dampfdruck im Strömungsfeld also für $p \approx p_v = 0,03$ kp/cm², $p_\infty/p \approx 33$ folgende Werte für den Luftvolumengehalt α ergeben:

$$\lambda = 0: \quad \alpha \approx 33\alpha_\infty \quad \text{oder} \quad 1,6 \cdot 10^{-3} < \alpha < 3,3 \cdot 10^{-2};$$

$$\lambda = 1: \quad \alpha \approx 1100\alpha_\infty \quad \text{oder} \quad 0,06 < \alpha < 1,1;$$

$$\lambda = 2: \quad \alpha \approx 36000\alpha_\infty \quad \text{oder} \quad 1,8 < \alpha < 36.$$

Gehen wir im Rahmen dieser heuristischen Betrachtung davon aus, daß für $p \approx p_v$ ein Wasser-Gas-Gemisch vorliegt mit einem Gasvolumenanteil α zwischen 10% und 50%, so ist der Wert $\lambda = 1$ am plausibelsten. Die nachfolgend mitgeteilten Zahlenergebnisse konkreter Profilströmungen wurden daher mit $\lambda = 1$ berechnet. Außerdem liegt der Luftvolumengehalt α_∞ der Zuströmung in dem durch (45) gegebenen Bereich.

Bei den Beispielen 1 bis 6 handelt es sich um ein ungewölbtes ($Y_s = 0$) Flügelprofil mit der Dickenlinie

$$\frac{1}{a} Y_D = 0,06 \sqrt{1 - (x/a)^2}.$$

Der Druck der Zuströmung ist mit $p_\infty = 1$ kp/cm², der Kavitationsdruck und damit zugleich der überhaupt auftretende Minimaldruck mit $p_v = 0,03$ kp/cm² angenommen. Die einzelnen Beispiele unterscheiden sich durch ihre Anstellwinkel δ_0 , das Volumenverhältnis α_∞ und den Geschwindigkeitsbeiwert der Zuströmung $\varrho_\infty u_\infty^2 / \varrho_\infty$. Letzterer stellt praktisch die reziproke Kavitationszahl dar. Die Werte sind:

$$\text{Beispiel 1: } \delta_0 = 0,020; \quad \alpha_\infty = 10^{-4}; \quad \varrho_\infty u_\infty^2 / p_\infty = 4,0.$$

$$\text{Beispiel 2: } \delta_0 = 0,025; \quad \alpha_\infty = 10^{-4}; \quad \varrho_\infty u_\infty^2 / p_\infty = 4,0.$$

$$\text{Beispiel 3: } \delta_0 = 0,030; \quad \alpha_\infty = 10^{-4}; \quad \varrho_\infty u_\infty^2 / p_\infty = 4,0.$$

$$\text{Beispiel 4: } \delta_0 = 0,025; \quad \alpha_\infty = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}; \quad \varrho_\infty u_\infty^2 / p_\infty = 4,0.$$

$$\text{Beispiel 5: } \delta_0 = 0,025; \quad \alpha_\infty = 2 \cdot 10^{-4}; \quad \varrho_\infty u_\infty^2 / p_\infty = 4,0.$$

$$\text{Beispiel 6: } \delta_0 = 0,030; \quad \alpha_\infty = 10^{-4}; \quad \varrho_\infty u_\infty^2 / p_\infty = 2,25.$$

¹³⁾ Darunter wollen wir eine Beschränkung von λ auf ganze Zahlen verstehen.

¹⁴⁾ In einer persönlichen Mitteilung an die Verfasser gibt H. J. BAITER für $\mu(p)$ ohne Berücksichtigung von Dampfkavitation ein lineares Gesetz an. Es beruht auf der Voraussetzung, daß sich lokal stets Gleichgewicht zwischen gelöster und ungelöster Luft einstellt.

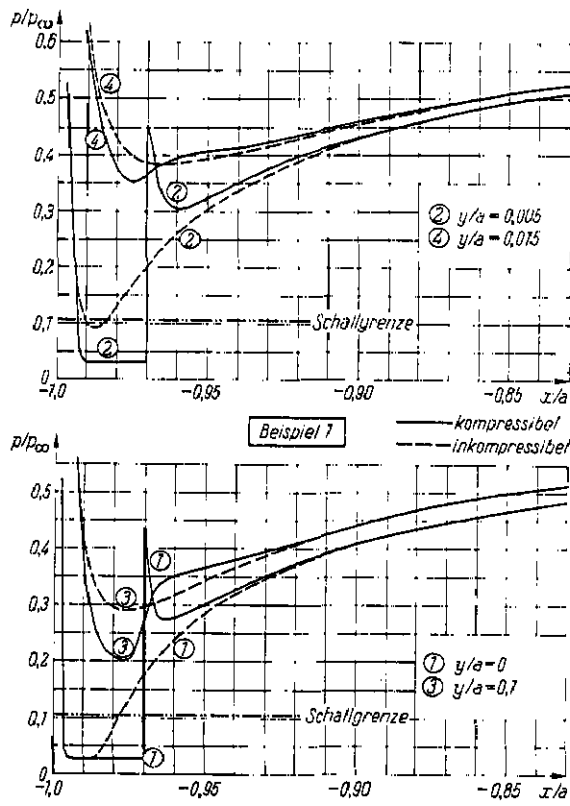


Bild 3

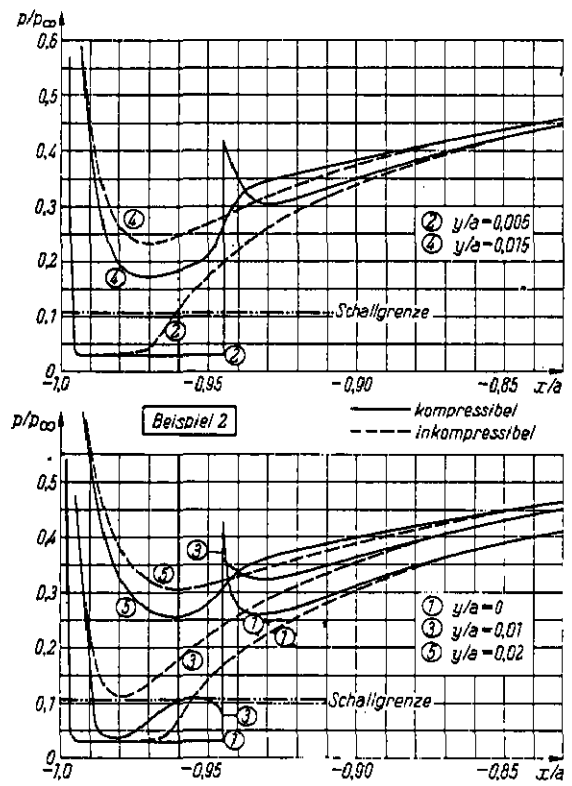


Bild 4

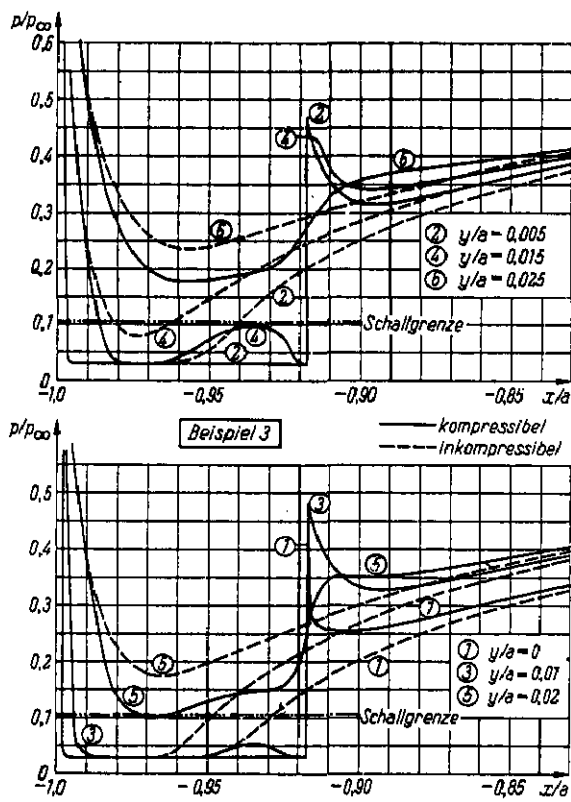


Bild 5

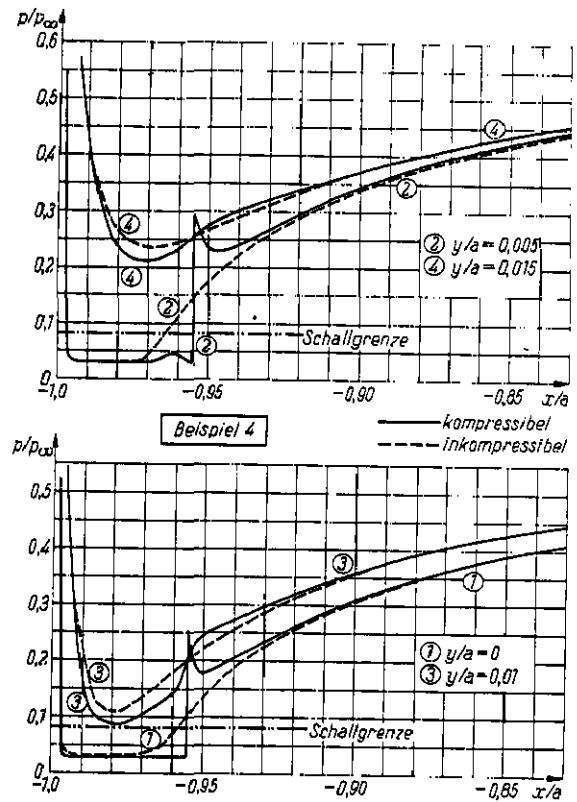


Bild 6

Die inkompressible Strömung um das Profil ist durch die Wirbeldichte

$$\gamma_0 = 2\delta_0 u_\infty \sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

und die Quellen-Senkenbelegung

$$q = 0,06 u_\infty \left[\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right]$$

gekennzeichnet.

Mit Hilfe des in Ziff. 3 beschriebenen Iterationsverfahrens wurde das Druckfeld auf der Profilaugseite ermittelt. In allen Fällen waren drei Iterationsschritte ausreichend, um Konvergenz zu erreichen. Die Ergebnisse sind in den Bildern 3 bis 8 dargestellt. Zum Vergleich ist die Druckverteilung bei inkompressibler Strömung gestrichelt eingezeichnet.

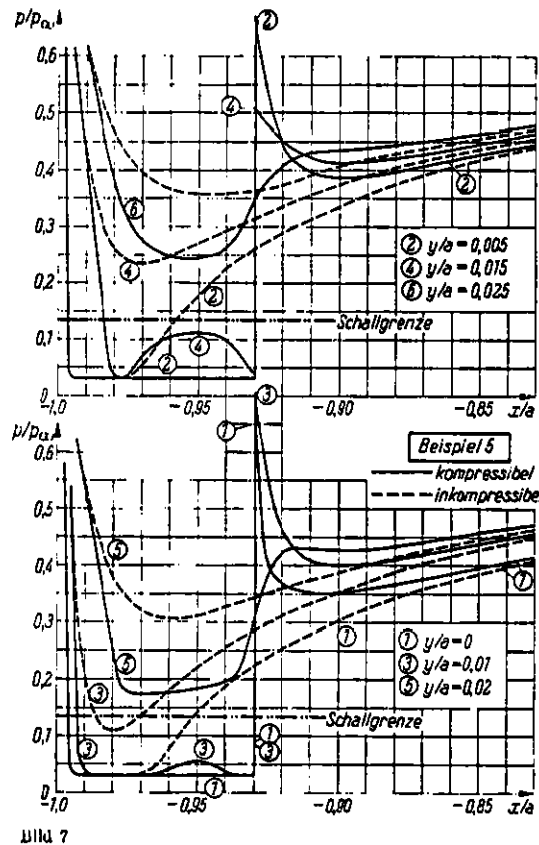


Bild 7

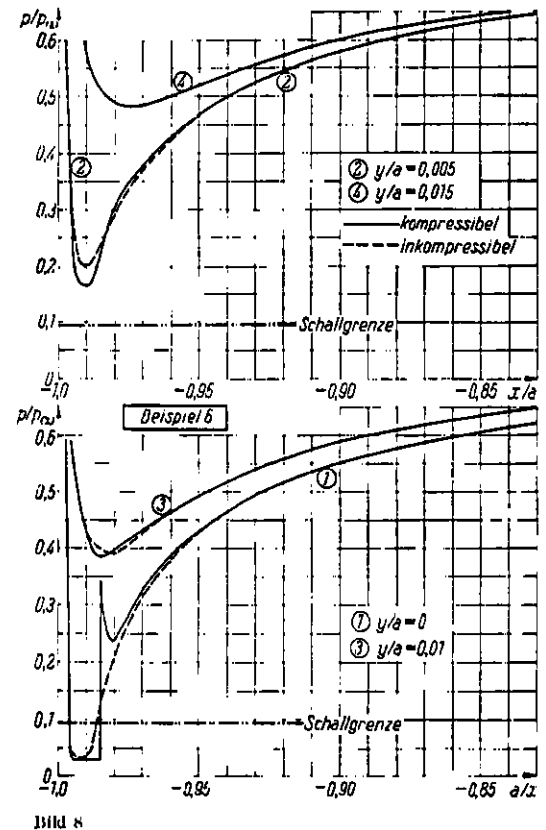


Bild 8

Die erhaltenen Druckverläufe zeigen deutlich, daß der Einfluß der durch den Gasgehalt bedingten Kompressibilität des Wassers sich lediglich auf die Umgebung des mit einem Verdichtungsstoß abgeschlossenen Überschallgebietes beschränkt. Bereits kurz hinter dem Stoß erreicht das Druckfeld wieder seinen inkompressiblen Zustand. Entsprechend ist es in y -Richtung senkrecht zur Profilstruktur. Die Stoßlänge l_1/a bei den einzelnen Beispielen geht aus der nachfolgenden Tabelle hervor:

Beispiel	1	2	3	4	5	6
l_1/a	0,0075	0,0125	0,0175	0,0075	0,0175	0,0025

Nennenswerte Abweichungen vom inkompressiblen Strömungsfeld treten überhaupt nur auf, wenn Überschallzustand erreicht wird. Selbst Beispiel 6 mit dem nur noch schwach ausgeprägten Überschallgebiet hat schon fast inkompressible Druckverteilung. Die Verhältnisse unterscheiden sich also wesentlich von denjenigen einer schallnahen Luftströmung sowohl mit als auch ohne lokales Überschallgebiet. Denn bei letzterer ist ja das gesamte Strömungsfeld auch in großem Abstand von einem eventuell auftretenden Überschallbereich gegenüber dem inkompressiblen Zustand erheblich modifiziert, also die Machzahl überall entsprechend hoch.

Der Grund für dieses verschiedene Verhalten ist folgender: Bei Luft ist die örtliche Schallgeschwindigkeit $\sim \sqrt{T}$, bleibt also im ganzen Strömungsfeld eines schlanken Profils fast konstant. Bei gashaltigem Wasser

sinkt der Wert der Schallgeschwindigkeit in den Unterdruckgebieten am Profil um weit mehr als eine Größenordnung gegenüber dem für die in der Regel noch inkompressible Zuströmung geltenden Wert ab. Da bei einer Strömung um schlanke Flügelprofile (mit Ausnahme der Umgebung des Staupunktes) sich die Geschwindigkeit im ganzen Strömungsfeld nur mäßig verändert, ist durch das Verhalten der Schallgeschwindigkeit auch die Variation der örtlichen MACHzahl und damit der Kompressibilitätseinfluß bestimmt.

Die Ergebnisse der Beispiele 1, 2, und 3 zeigen ferner, daß bei gleicher Geschwindigkeit u_∞ und gleichem Luftvolumengehalt α_∞ der Zuströmung die Ausdehnung des Überschallgebietes und damit die Stoßlänge mit zunehmendem Anstellwinkel δ_0 größer wird. Dagegen bleibt die Stoß-Stärke (der Drucksprung) ungefähr konstant, wenn vor dem Stoß bereits etwa Dampfdruck herrscht.

Durch Vergleich der Druckverteilungen der Beispiele 4, 2 und 5 erhält man einen Überblick, wie sich bei sonst gleichen Parametern eine Änderung des Luftvolumengehaltes α_∞ der Zuströmung auswirkt. Sowohl die Ausdehnung des Überschallgebietes als auch die Stoß-Stärke nehmen mit α_∞ erheblich zu; der Grenzdruck $(p/p_\infty)_{M=1}$, bei dem die Schallgeschwindigkeit erreicht wird, steigt ebenfalls an (vgl. auch Bild 20).

Eine Betrachtung der Resultate von Beispiel 3 und 6 vermittelt einen Eindruck von dem großen Einfluß, den der Beiwert $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty$ (also etwa die reziproke Kavitationszahl) auf die Form des Druckfeldes und die Größe des Überschallgebietes ausübt.

Bild 9 zeigt der Verlauf der Druckverteilung auf der Profildruckseite direkt an der Kontur. Dieser stimmt voraussetzungsgemäß (vgl. Formel (42)) mit dem der inkompressiblen Strömung überein. Schließlich gibt Bild 10 die durch den Einfluß der Kompressibilität und insbesondere des Verdichtungsstoßes bedingte zusätzliche Wirbelbelegung γ_α (bezogen auf die Verteilung γ_0 der inkompressiblen Strömung) wieder. γ_α hat tatsächlich weitgehend den in Ziff. 4 bei der Diskussion der Strömungsrandbedingung vorhergesagten Verlauf.

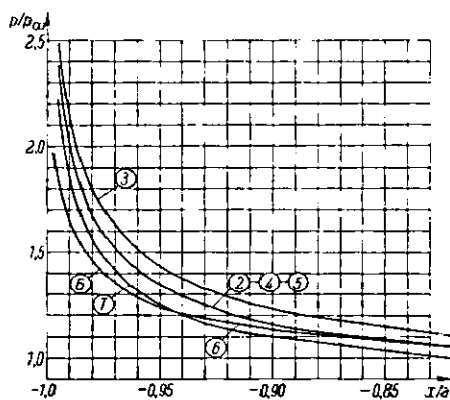


Bild 9. Druckverteilung an der Druckseite, Beispiele 1 bis 6

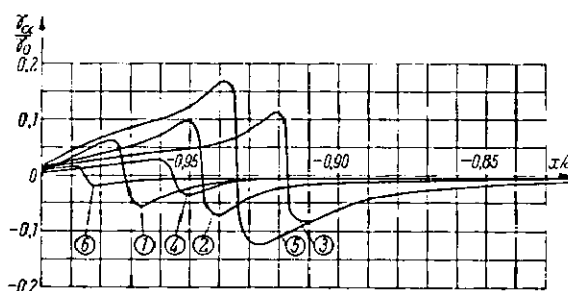


Bild 10. Zusatzzirkulation, Beispiele 1 bis 6

In allen Fällen tritt hinter dem Verdichtungsstoß zunächst ein erheblicher Druckabfall auf. Diese auch als Nachexpansion bezeichnete Erscheinung ist auch bei schallnahen Luftströmungen bekannt und experimentell bestätigt [6], [16].

Die weiteren Beispiele 7 bis 12 beziehen sich auf ein dickeres und zugleich gewölbtes Profil. Und zwar haben die Dickenlinie und die Skelettlinie die Form

$$\frac{1}{a} Y_D = \sqrt{1 - x^2/a^2} \left(0,10 - 0,07 \frac{x}{a} \right); \quad \frac{1}{a} Y_s = 0,065 (1 - x^2/a^2).$$

Die maximale relative Dicke liegt bei $x/a = -0,435$ und beträgt 11,7%.

Der Dampfdruck und damit zugleich der überhaupt auftretende Minimaldruck ist wie vorher $p_v = 0,03 \text{ kp/cm}^2$. Der Druck der Zuströmung wurde für die Beispiele 7 und 10 mit $p_\infty = 1 \text{ kp/cm}^2$ für die Beispiele 8, 9, 11 und 12 mit $p_\infty = 0,5 \text{ kp/cm}^2$ angenommen.¹⁵⁾ Die weiteren Daten sind:

Beispiel 7: $\delta_0 = 0,05$; $\alpha_\infty = 10^{-4}$; $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty = 2,0$.

Beispiel 8: $\delta_0 = 0,05$; $\alpha_\infty = 10^{-4}$; $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty = 2,0$.

Beispiel 9: $\delta_0 = 0,05$; $\alpha_\infty = 4 \cdot 10^{-4}$; $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty = 2,0$.

Beispiel 10: $\delta_0 = 0,00$; $\alpha_\infty = 10^{-4}$; $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty = 3,4$.

Beispiel 11: $\delta_0 = 0,00$; $\alpha_\infty = 10^{-4}$; $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty = 3,4$.

Beispiel 12: $\delta_0 = 0,00$; $\alpha_\infty = 4 \cdot 10^{-4}$; $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty = 3,4$.

¹⁵⁾ Ähnliche Verhältnisse liegen bei den von STIMAN [11] durchgeführten Versuchen mit einem entsprechenden Flügelprofil vor. Dort wird das Wasser von einem Ruhedruck p_0 mit $u_0 = 0$ auf die Zuströmgeschwindigkeit u_∞ mit dem zug. Druck p_∞ beschleunigt. Die Beispiele 8, 9 entsprechen den Daten: $p_0 = 1 \text{ kp/cm}^2$; $p_\infty = 0,5 \text{ kp/cm}^2$; $u_\infty = 10 \text{ m/sec}$. Die Beispiele 11, 12 entsprechen den Werten: $p_0 = 1,35 \text{ kp/cm}^2$; $p_\infty = 0,5 \text{ kp/cm}^2$; $u_\infty = 13 \text{ m/sec}$. Der Luftvolumengehalt im Ruhedruck α_0 beträgt 10^{-4} für die Beispiele 9 und 12 und $0,25 \cdot 10^{-4}$ für die Beispiele 8 und 11, wenn auch für die Beschleunigung aus dem Ruhedruck heraus Gleichung (1) mit $\lambda = 1$ zugrunde gelegt wird.

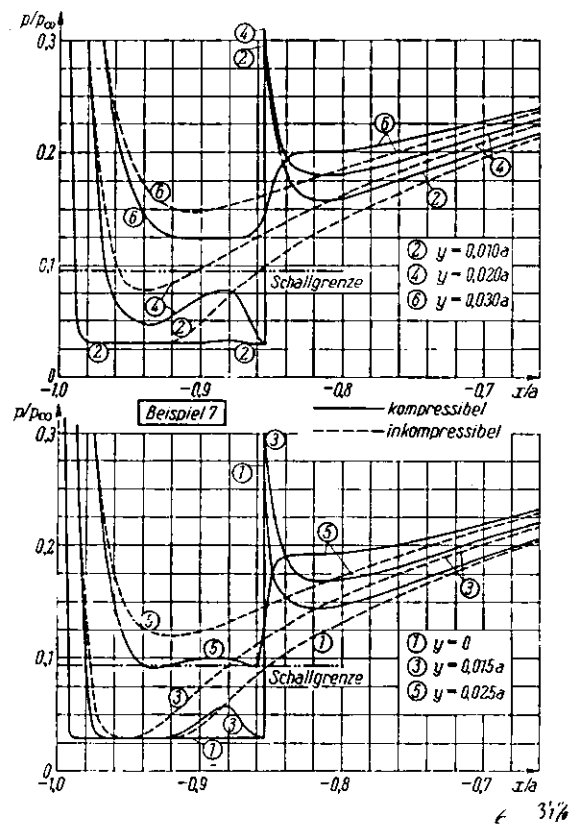


Bild 11

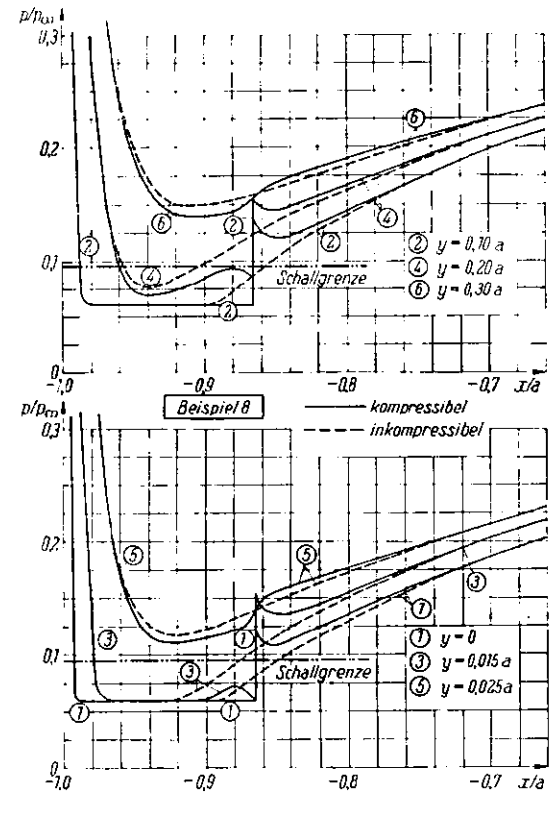


Bild 12

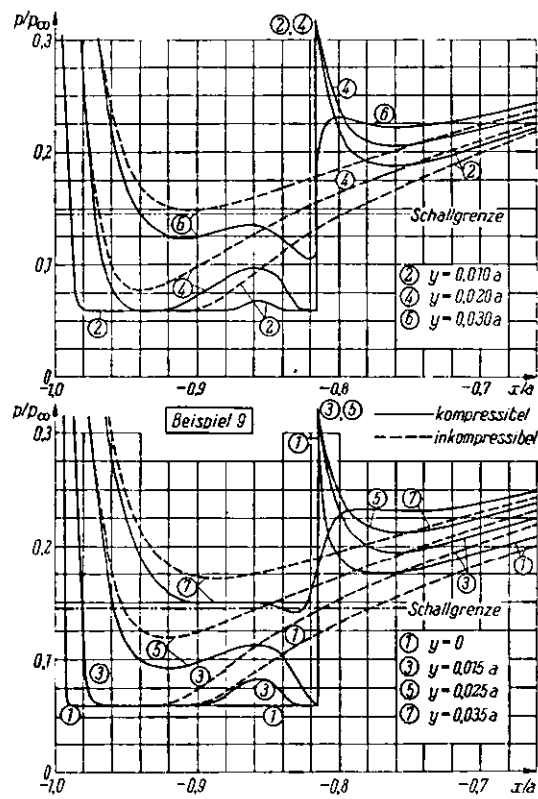


Bild 13

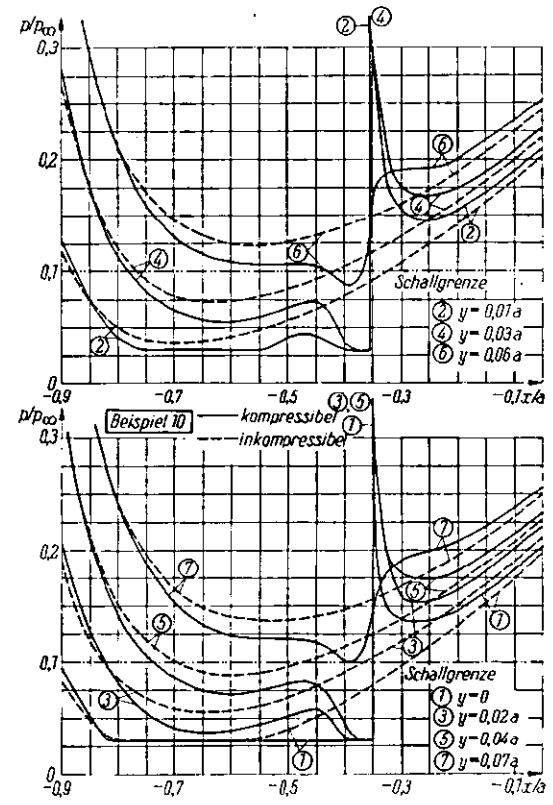


Bild 14

Die inkompressible Strömung um das Profil ist durch die Wirbeldichte

$$\gamma_0 = 2u_\infty \left[\delta_0 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + 0,13 \sqrt{1 - (x^2/a^2)} \right]$$

und die Quellen-Senkenbelegung

$$q = u_\infty \left[0,17 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - 0,03 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - 0,28 \sqrt{1 - (x^2/a^2)} \right]$$

bestimmt.

Die Ergebnisse für den Verlauf der Druckverteilung auf der Profilsaugseite sind in den Bildern 11 bis 16 dargestellt. Die inkompressiblen Druckwerte sind zum Vergleich wieder gestrichelt mit eingetragen. Die Stoßlängen l_1/a sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

Beispiel	7	8	9	10	11	12
l_1/a	0,0225	0,0225	0,030	0,050	0,045	0,090

Die bereits bei der Diskussion der Ergebnisse von Beispiel 1 bis 6 hervorgehobenen Eigenschaften des Druckfeldes sind grundsätzlich auch bei den neuen Beispielen 7 bis 12 vorhanden; wir brauchen daher im folgenden nur noch auf einige physikalische Besonderheiten hinweisen.

So ist es verständlich, daß bei dem (gegenüber Beispiel 1 bis 6) dickeren und außerdem gewölbten Profil für Anstellwinkel $\delta_0 = 0,05$ ausgeprägte Überschallzustände schon bei dem relativ kleinen Beiwert $\frac{\rho_W u_\infty^2}{p_\infty} = 2$ auftreten. Das lokale Überschallgebiet ist sowohl stromabwärts als auch senkrecht zum Profil weiter ausgedehnt. (Beispiel 7 bis 9). Ohne Anstellwinkel, also für $\delta_0 = 0$, wäre die Strömung für $\frac{\rho_W u_\infty^2}{p_\infty} = 2$ noch rein inkompressibel; erst oberhalb von $\frac{\rho_W u_\infty^2}{p_\infty} = 3$ (für Beispiel 10 bis 12 wurde der Wert 3,4 gewählt) treten lokale Überschallgebiete auf, deren Ausdehnung dann allerdings wesentlich größer ist als bei dem entsprechenden Fall mit Anstellwinkel. Letztere Tatsache ist durch das stärkere radiale Druckgefälle der durch den Einfluß des Anstellwinkels gekrümmten Stromlinien bedingt.

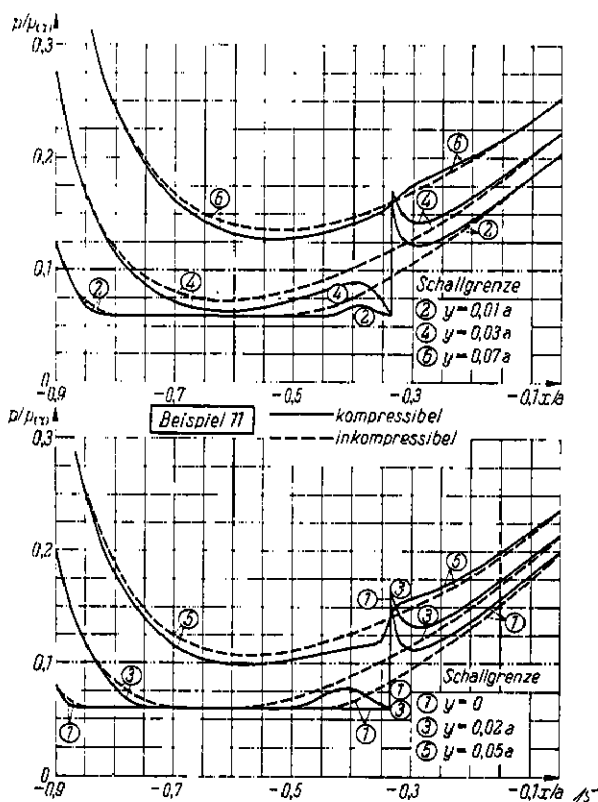


Bild 15

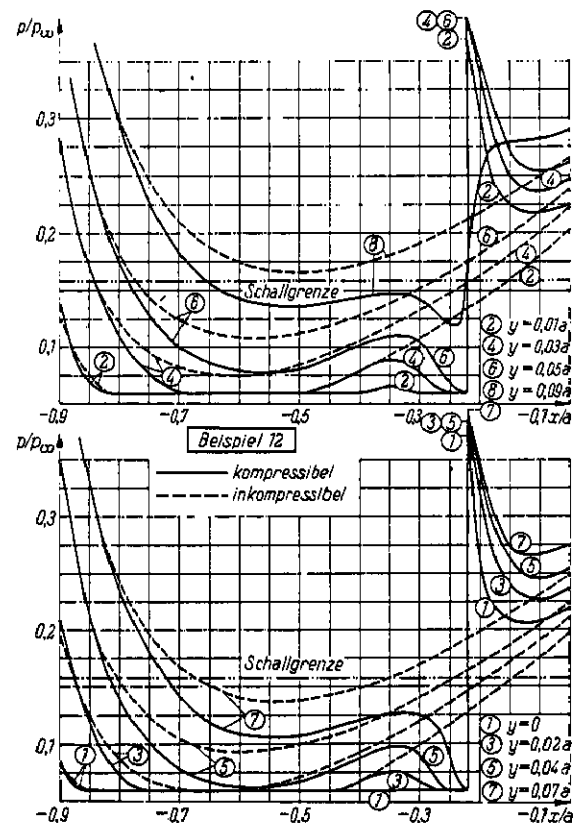


Bild 16

Ein Vergleich von Beispiel 8 mit 9 sowie von 11 mit 12 zeigt wieder starken Einfluß des Gasvolumenanteils α_∞ der Zuströmung.

Eine Betrachtung der Beispiele 7 und 9 sowie 10 und 12 mit dem jeweils gleichen Beiwert $\rho_w u_\infty^2 / p_\infty$ und übereinstimmendem α -Wert für $p = 1 \text{ kp/cm}^2$ gemäß Formel (7) zeigt: Wenn bereits bei $p = 1 \text{ kp/cm}^2$ die Zuströmgeschwindigkeit zum Profil vorhanden ist, (Beispiel 7 und 10), so wird die Stoß-Stärke größer aber die Ausdehnung des Überschallgebietes kleiner als wenn bei $p = 1 \text{ kp/cm}^2$ noch Ruhezustand herrscht und die Zuströmgeschwindigkeit u_∞ erst bei dem niedrigeren Druck $p = 0,5 \text{ kp/cm}^2$ erreicht ist; (Beispiel 9 und 12).

Geht man andererseits von gleichen α_∞ -Werten und gleichen Kavitationszahlen (d. h. etwa auch gleichem $\rho_w u_\infty^2 / p_\infty$) für den Zuströmzustand p_∞, u_∞ aus, so bleibt die Ausdehnung eines etwa auftretenden Überschallgebietes annähernd konstant, während die Stoßstärke mit zunehmendem p_∞ , bzw. u_∞ erheblich zunimmt. Dieses geht aus einem Vergleich von Beispiel 7 mit 8 sowie von 10 mit 11 hervor. Die Energie der Zuströmung ist ja auch bei 8 bzw. 11 wesentlich niedriger als bei 7 bzw. 10.

Hinter dem Verdichtungsstoß tritt auch bei Beispiel 7 bis 12 die bekannte Nachexpansion (also Druckabfall) auf.

In Bild 17 ist die Druckverteilung am Profil auf dessen Druckseite dargestellt. Wie in Ziffer 4 dargelegt wurde, ist sie mit derjenigen der inkompressiblen Strömung identisch. Die Bilder 18 und 19 zeigen die durch den Einfluß der Kompressibilität einschließlich des Verdichtungsstoßes bedingte zusätzliche Zirkulationsverteilung γ_a und zwar bezogen auf die Belegung γ_0 des Profils bei inkompressibler Strömung. Der Verlauf von γ_a entspricht wieder weitgehend den Überlegungen aus Ziffer 4.

Unabhängig von den oben diskutierten Ergebnissen der behandelten speziellen Beispiele 1 bis 12 kommen wir nun noch zu einigen allgemeineren Betrachtungen.

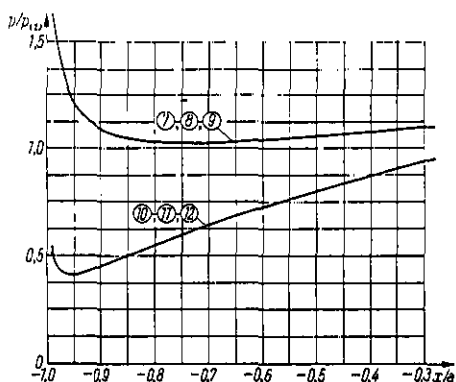


Bild 17. Druckverteilung an der Druckseite, Beispiele 7 bis 12

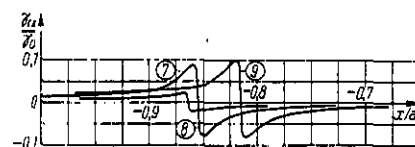


Bild 18. Zusatzzirkulation, Beispiele 7-9

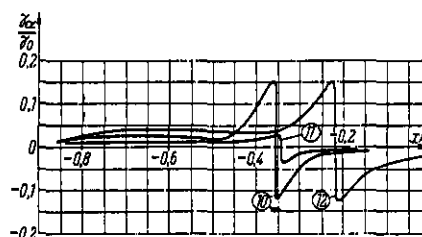


Bild 19. Zusatzzirkulation, Beispiele 10-12

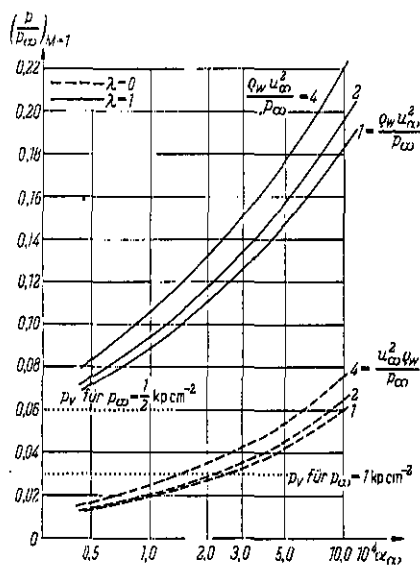


Bild 20

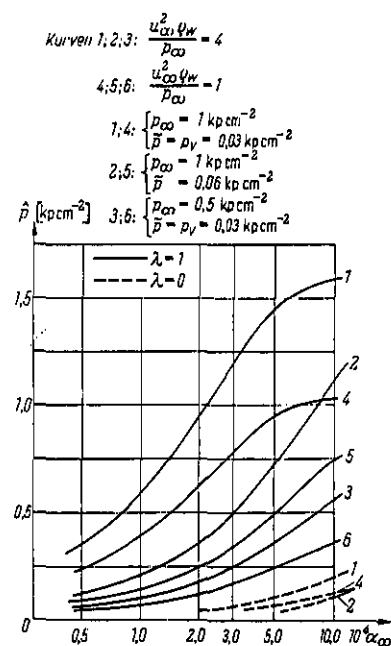


Bild 21

In Bild 20 ist in Abhängigkeit von den Zuströmungsparametern α_∞ und $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty$ der Druck $(p/p_\infty)_{M=1}$ dargestellt, bei dem im Strömungsfeld Überschallzustand erreicht wird. Dieser Druck wächst verständlicherweise mit den beiden genannten Parametern. Zum Vergleich sind gestrichelt diejenigen Werte eingezeichnet, welche sich für ein konstantes Massenverhältnis ($\lambda = 0$) ergeben würden. Man erkennt, daß sich im Gegensatz zu experimentellen Beobachtungen [11] nur ganz schwache Überschallzustände ausbilden würden, wenn $\lambda = 0$ angenommen wird.

Bild 21 zeigt den aus den allgemeinen Stoßgleichungen (17) und (18) berechneten Druck \hat{p} hinter dem Verdichtungsstoß in Abhängigkeit vom Gasvolumengehalt der Zuströmung α_∞ und einigen weiteren Parametern. Aus den dargestellten Ergebnissen erkennt man: \hat{p} steigt mit zunehmendem α_∞ und bei festem Zuströmdruck p_∞ auch mit wachsender Geschwindigkeit u_∞ . Sinkt der Druck vor dem Stoß nicht auf den Dampfdruck ab, bleibt also $\tilde{p} > p_v = 0,03$, so ist verständlicherweise auch \hat{p} entsprechend kleiner als für $\tilde{p} = p_v$. Vergleicht man andererseits Strömungsvorgänge, bei denen jeweils vor dem Stoß Dampfdruck erreicht wird, so ergibt sich: Bei gleichem α_∞ und gleicher Kavitationszahl bzw. gleichem Beiwert $\rho_W u_\infty^2 / p_\infty$ sinkt die Stoß-Stärke ($\hat{p} - \tilde{p}$) mit abnehmendem p_∞ -Wert erheblich. Es ist für den Stoß wesentlich, ob bei gleicher Kavitationszahl und gleichem Gasvolumengehalt von hoher oder niedriger Strömungsenergie ausgegangen wird.

Korrigiert man jedoch bei Verkleinerung des p_∞ -Wertes den Gasvolumengehalt α_∞ entsprechend Gleichung (7) und hält außerdem nicht die Kavitationszahl, sondern die Zuströmgeschwindigkeit konstant, so bleibt die Stoß-Stärke ($\hat{p} - \tilde{p}$) annähernd konstant.

Vergleicht man die in Bild 21 enthaltenen aus den Stoßgleichungen (17), (18) berechneten \hat{p} -Werte mit den Drücken \hat{p} direkt hinter dem Stoß bei den Profilströmungen der Beispiele 1 bis 12 in den Bildern 3 bis 8 und 11 bis 16, so wird man feststellen, daß letztere \hat{p} -Werte etwas kleiner sind, als Bild 21 angibt. Der Grund hierfür ist folgender:

Bei dem in Ziffer 3 dargelegten Iterationsverfahren zur Berechnung des Profildruckfeldes wird die Stoß-Stärke $\partial(\phi)$ aus Gleichung (35) entsprechend den Stoßrelationen bestimmt. Das Stoßintegral ϕ_{st} in Gleichung (30) hat am Stoß bei $x = x_1 \mp 0$ die Diskontinuität $\mp \partial(\phi)/2$ mit einem steilen Abfall vor und hinter dem Stoß. Bei der in Ziffer 3 erläuterten Einfügung des Stoßintegrals in das Feld ϕ geht ein Teil der Diskontinuität dadurch verloren, daß unmittelbar vor dem Stoß ein negatives ϕ , bzw. ein Wert $p < p_v$ entsteht, welcher entsprechend der in Ziffer 3 erläuterten Korrektur auf p_v heraufgesetzt wird. Man könnte natürlich die aus (35) errechnete Diskontinuität soweit erhöhen, daß der \hat{p} -Wert aus Bild 21 auch im Feld der Profilströmungen angenommen wird. Die sich dabei ergebenden Druckverläufe hinter dem Stoß wären denjenigen aus den Bildern 3 bis 8 und 11 bis 16 sehr ähnlich, nur etwas nach oben verschoben.

Wir haben jedoch aus folgendem Grund von einem solchen Verfahren abgesehen: Einmal wäre damit der Stoßeinfluß in einem Abstand von der Stoßlinie überbewertet. Zum anderen ist aus der schallnahen Aerodynamik bekannt, daß die wirklich hinter einem Verdichtungsstoß auftretenden Drücke stets kleiner sind, als sie durch die idealisierten Gleichungen für einen senkrechten Stoß ohne Reibungseinfluß vorhergesagt werden [10].

Es erschien daher sinnvoll, die sich bei dem Rechenverfahren aus Ziffer 3 ergebende Abminderung von \hat{p} gegenüber den Werten aus Bild 21 von etwa 20 bis 25% nicht zu korrigieren.

Leider stehen sichere Meßwerte über die wirkliche Stoß-Stärke in gashaltigem Wasser noch nicht zur Verfügung.

6. Vergleich mit Experimenten

Für einen Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit Experimenten können aus der uns bekannt gewordenen Literatur nur die Schalldruckmessungen von SIMHAN [11] an Tragflügelprofilen in gashaltigem Wasser herangezogen werden (vgl. Fußnote ¹⁵). Bezüglich der Zuströmung und der Profilform sind die Beispiele 9 und 12 etwa mit den SIMHANSchen Untersuchungen bei den Anstellwinkeln $\delta_0 = 0^\circ$ und 3° vergleichbar. Die hier theoretisch berechnete Druckverteilung auf der Profilsaugseite mit dem Verdichtungsstoß entspricht ungefähr den Beobachtungen von SIMHAN bei den Kavitationsbeiwerten¹⁶⁾

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2} \rho_W u_\infty^2} = 0,73 \text{ für } \delta_0 = 0^\circ \text{ und } \sigma = 1,11 \text{ für } \delta_0 = 3^\circ = 0,05.$$

Die Werte der berechneten Beispiele sind $\sigma = 0,56$ für $\delta_0 = 0^\circ$ und $\sigma = 0,94$ für $\delta_0 = 3^\circ$.

Zwar stimmt der Anstieg des Kavitationsbeiwerts mit wachsendem Anstellwinkel zwischen Theorie und Experiment überein, und auch die Beiwerte σ haben etwa die gleiche Größe; für einen wirklichen quantitativen Vergleich fehlen jedoch in der SIMHANSchen Untersuchung genaue Angaben über den Gasvolumengehalt α_∞ der Zuströmung und die Stärke ($\hat{p} - p_v$) des Verdichtungsstoßes.

Außerdem ist zu bedenken, daß in Wirklichkeit keine vollkommen stationäre Strömung auftritt, wie wir sie hier vorausgesetzt haben. Denn einmal sind durch die bereits erwähnte Grenzschichtablösung erhebliche

instationäre Druckschwankungen bedingt, die sich auch auf die Lage des Stoßes auswirken.¹⁶⁾ ¹⁷⁾ Zum anderen erzwingt der im Verdichtungsstoß auftretende Druckanstieg den Zusammenfall der Kavitationsblasen des Überschallbereichs. Hierdurch werden hochfrequente im Kilohertz-Bereich liegende Druckwellen und entsprechende Oszillationen des Verdichtungsstoßes ausgelöst.

Bedenkt man diese hier nur kurz angedeuteten Probleme und die Schwierigkeiten ihrer sachgerechten Behandlung, so wird klar, daß die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie nur als ein erster Schritt zur Berechnung der gashaltigen Wasserströmung um Tragflügelprofile angesehen werden kann. Dieses gilt nicht zuletzt auch in Anbetracht der sonstigen strömungsmechanischen und thermodynamischen Vereinfachungen welche in der vorliegenden Theorie enthalten sind (vgl. Ziffer 1).

Literatur

- 1 CAMPBELL, I. J. and PITCHER, A. S., Shock waves in a liquid containing gas bubbles, Proc. Royal Society Ser. A **243**, 534 (1958).
- 2 WIEGHARDT, K., Kompressibilitätseffekte in Wasser mit freiem Luftgehalt, Schiffstechnik **14**, 24 (1967).
- 3 DENK, V., LEISINGER, K. F. und GROTE, H. E., Theoretische und experimentelle Untersuchungen von Gas-Flüssigkeits-Zweiphasengemischen, Luftfahrttechnik-Raumfahrttechnik **16**, 158 (1970).
- 4 ISAY, W. H., Zur Hydroakustik von Propellern in lufthaltigem Wasser, Schiffstechnik **18**, 46 (1971).
- 5 ISAY, W. H., Kompressible Strömungen (Ideale Gase, Wasser, lufthaltiges Wasser), Vorlesungsmanuskript Nr. 5 Institut für Schiffbau Hamburg, Februar 1973.
- 6 ZIEREP, J., Theorie der schallnahen und Hyperschallströmungen, Verlag Braun, Karlsruhe 1966.
- 7 SCHLICHTING, H. und TRÜCKENBRODT, E., Aerodynamik des Flugzeuges 1, Aerodynamik des Tragflügels Teil I, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.
- 8 MEIER, G. and HILLER, W., An experimental investigation of unsteady transsonic flow by high-speed interferometric photography, AGARD Conference Proc. Transonic Aerodynamics, Sept. 1968.
- 9 ROTTA, J., Druckverteilungen an symmetrischen Flügelprofilen bei schallnaher Anströmung, Jahrbuch 1959 der WGL, S. 102.
- 10 THOMAS, F., Die Ermittlung der Schüttelgrenzen von Tragflügeln im transsonischen Geschwindigkeitsbereich, Jahrbuch 1966 der WGLR, S. 126.
- 11 SIMHAN, K. K., ERDMANN, H., MORSBACH, M., QUINKERT, R. und SUDHOF, H., Untersuchungen über die mit der Geräuscherzeugung durch den Propeller, insbesondere mit der Kavitation verbundenen akustischen Probleme, Arbeitsabschnitt IV. Bericht des Battelle-Instituts Frankfurt Februar 1973.
- 12 VAN WIJNGAARDEN, L., On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles, Journ. of Fluid Mech. **33**, 465 (1968).
- 13 VAN WIJNGAARDEN, L., The mechanical behaviour of gas-bubbles in liquids and its effect on the dynamics of liquid-bubble mixtures, Vortrag GAMM-Tagung Delft 1970.
- 14 CRESPO, A., Sound and shock-waves in liquids containing bubbles. The Physics of Fluids **12**, 2274 (1969).
- 15 SIMHAN, K. K., Ein Beitrag zu Strömungsvorgängen in gashaltigen Flüssigkeiten, Diss. Technische Hochschule Aachen 1970.
- 16 ACKERET, J., FELDMANN, F. und ROTT, N., Untersuchungen an Verdichtungsstößen in schnell bewegten Gasen, Mitteilungen aus dem Inst. für Aerodynamik der ETH Zürich Nr. 10 (1946).
- 17 REDECKER, G., Die Berechnung der Schüttelgrenze von Pfeilflügeln; Zeitschr. f. Flugwiss. **21**, 345 (1973).

Die Mittel für die vorliegende Untersuchung wurden in dankenswerter Weise durch einen Forschungsauftrag im Rahmen des Forschungsprogramms der Gruppe Hydroakustik der Fraunhofer-Gesellschaft München-Ottobrunn bereitgestellt. Die numerischen Rechnungen wurden im Rechenzentrum des Deutschen Elektronensynchrotrons Hamburg durchgeführt. Die Verfasser möchten auch hierfür ihren Dank aussprechen.

Eingereicht am 12. 12. 1973

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. W. H. ISAY und Dr. Th. ROESTEL, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Hamburg 60, Lämmerlieth 90, BRD

¹⁶⁾ Die angegebenen σ -Werte entsprechen nach SIMHAN etwa dem Zustand einer noch gerade anliegenden Profilvergängerung hinter dem Stoß. Mit weiter abnehmenden Kavitationsbeiwerten würde der Druckanstieg im Stoß so zunehmen, daß sich die Grenzschicht dahinter ablöst. Der voll abgelöste Zustand ist nach Messungen von SIMHAN erreicht bei $\sigma = 0,42$ für $\delta_0 = 0^\circ$ und $\sigma = 0,48$ für $\delta_0 = 3^\circ$.

¹⁷⁾ Diese Druckschwankungen sind die Ursache für den aus der transsonischen Aerodynamik bekannten und gefürchteten „Schüttelvorgang“ bei Flugzeugtragflügeln [10], [17]. Eine rein theoretische Erfassung dieser Vorgänge stößt noch auf sehr große Schwierigkeiten.