

322 | September 1975

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

W.H.Isay

Zur Berechnung instationärer  
transsonischer Druckfelder mit  
Stößen bei gashaltigen  
Wasserströmungen

**TUHH**

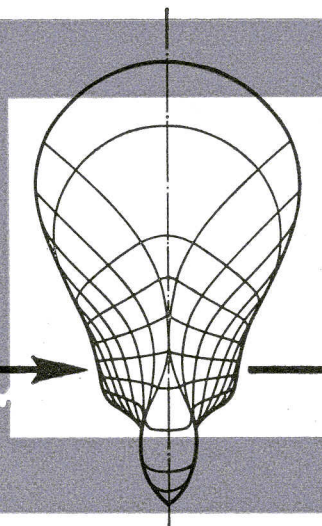
*Technische Universität Hamburg-Harburg*

Zur Berechnung instationärer transsonischer Druckfelder mit Stößen bei gashaltigen  
Wasserströmungen

W.H. Isay, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1975

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg  
<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU  
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Zur Berechnung instationärer transsonischer  
Druckfelder mit Stößen bei gashaltigen  
Wasserströmungen

W.H. Isay

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 322

Zur Berechnung instationärer  
=====  
transsonischer Druckfelder mit  
=====  
Stößen bei gashaltigen  
=====  
Wasserströmungen  
=====

Von W. H. Isay

Hamburg , September 1975



## 1. Einleitende Betrachtungen

Die Untersuchung der Druckfelder gashaltiger Wasserströmungen gewinnt zunehmend an Bedeutung für die Anwendungen wie etwa die Vorhersage des Kavitationsverhaltens von Schiffspropellern. Bei gashaltigem Wasser kann infolge der starken Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom Druckfeld die örtliche Machzahl an der Saugseite eines Propellerflügels durchaus um zwei Grössenordnungen höher sein als in der Zuströmung oder auf der Druckseite. Es liegt dabei in der Regel ein transsonisches Strömungsfeld vor; dieses darf in den meisten Bereichen als inkompressibel angesehen werden, und wesentliche Abweichungen vom inkompressiblen Zustand treten nur in den lokalen Überschallgebieten und deren unmittelbaren Umgebung auf. Dabei sind die Stösse von entscheidendem Einfluss. Diese Zusammenhänge sind zwar aus einigen kürzlich veröffentlichten Untersuchungen [1],[2],[3] bekannt, in denen die Druckfelder gashaltiger Wasserströmungen an Tragflügeln und Propellern berechnet werden. Jedoch wurde auf eine ganz allgemeine Diskussion der Stösse und ihrer Gesetzmässigkeiten verzichtet und nur der spezielle Anwendungsfall behandelt. So ist auch grundsätzlich vorausgesetzt, daß die Verweilzeit der Strömungsteilchen im Stossbereich vernachlässigbar klein sei im Verhältnis zu der für den instationären Charakter des Strömungsfeldes massgebenden Zeitperiode. Diese für die behandelten Probleme zutreffende Annahme dürfte bei wichtigen Anwendungen nicht mehr erfüllt sein; beispielsweise dann, wenn der instationäre Charakter des Strömungsfeldes durch eine hochfrequente Dynamik von Kavitationsblasen geprägt wird. Aus diesem Grund und wegen der grossen allgemeinen Bedeutung der Stösse für das Druckfeld transsonischer gashaltiger Wasserströmungen sollen in der vorliegenden Arbeit die Eigenschaften und Gesetze solcher Stösse sowie die zu ihrer Berechnung anzuwendenden Methoden behandelt werden.

Bei den bisherigen Untersuchungen [1],[2],[3] erwies es sich als notwendig, in Anbetracht der sehr komplexen physikalischen Vorgänge eine Reihe von Vereinfachungen einzuführen, um mit einem überschaubaren Aufwand zu Ergebnissen zu gelangen.

So wird die Relativbewegung der Gaskeime und Dampfblasen gegenüber dem umgebenden Wasser vernachlässigt; dieses ist naheliegend ange-



sichts der kleinen Gasmasse im Verhältnis zu der umgebenden Wassermasse. Ausserdem basieren die genannten Arbeiten auf der Voraussetzung, dass das örtliche Verhältnis  $\mu = M_g/M_w$  von Gasmasse zu Wassermasse ebenso wie das örtliche Volumverhältnis  $\alpha = V_g/V_w$  eindeutige Funktionen des Druckes  $p$  sind. Es wird ein ungehemmtes thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt derart, daß die Reaktion der Blasen auf das äussere Druckfeld quasi unendlich schnell erfolgt; die durch den Einfluss der Blasendynamik bedingten in Wirklichkeit endlichen Reaktionszeiten bleiben unberücksichtigt. Alle Zähigkeitseffekte des Mediums werden ausserdem vernachlässigt. Mit  $\rho_g$  als Gasdichte und der (als konstant angenommenen) Dichte  $\rho_w$  des reinen Wassers besteht dann der Zusammenhang

$$(1) \quad \alpha/\mu = \rho_w/\rho_g.$$

Für die Gemischdichte  $\rho = (M_g + M_w)/(V_g + V_w)$  folgt wegen  $\mu \ll 1$  in guter Näherung die Relation

$$(2) \quad \rho = \rho_w \frac{1}{1 + \alpha(\rho)}.$$

Es handelt sich also um eine barotrope Strömung. Diese lässt sich ausserhalb der Stossbereiche als Potentialströmung behandeln. Es ist zweckmässig, unter  $\phi$  das Geschwindigkeitspotential der durch den betrachteten Propeller oder Tragflügel bedingten Störströmung zu verstehen. Für das Geschwindigkeitsfeld im ruhenden Absolutsystem wird der Ansatz<sup>\*)</sup>

$$(3) \quad w = w_x u_\infty + \text{grad } \phi$$

gemacht. In vielen Fällen, so bei schwach belasteten Propellern oder schlanken Flügeln kann

$$(3') \quad u_\infty^2 \gg (\text{grad } \phi)^2$$

angenommen werden.

Aus (2) folgt für die örtliche Schallgeschwindigkeit  $c$  die Relation

$$(4) \quad \frac{1}{c^2} = - \frac{\rho_w}{(1 + \alpha)^2} \frac{d\alpha}{dp}.$$

Wenn wir davon ausgehen, daß der Gasdruck  $p_g$  in den Blasen mit dem umgebenden Wasserdruck  $p$  übereinstimmt, also Einflüsse der Blasen-

<sup>\*)</sup> Wir bezeichnen mit  $w$  die Einheitsvektoren, also z.B.  $w_x$  in x-Richtung. Der Index „ $\infty$ “ kennzeichnet den Zustand in grossem Abstand von dem betrachteten Strömungskörper, also in der Zuströmung.

Mit  $u$  wird hier die x-Komponente der Geschwindigkeit bezeichnet. In Abschnitt 2 hat  $u$  eine andere Bedeutung.

dynamik vernachlässigen, so liefert die Thermodynamik  $p = p_v + p_L$ , mit  $p_v$  und  $p_L$  als den Partialdrücken von Dampf und Luft. Setzen wir für beide Gasphasen ideale Zustandsgleichungen voraus, also

$p_v (V_v + V_L) = M_v R_v T$ ,  $p_L (V_v + V_L) = M_L R_L T$ ,  
so liefert eine elementare Zwischenrechnung mit  $\rho_G = (M_v + M_L) / (V_v + V_L)$  als Gasdichte

$$(5) \quad p = \rho_G R_L \frac{1 + \mu^* R_v / R_L}{1 + \mu^*} T.$$

In Gl.(5) sind  $R_v$  und  $R_L$  die beiden spezifischen Gaskonstanten und  $\mu^* = \frac{M_v}{M_L}$  das Gasmassenverhältnis. ( $R_v / R_L = 1,61$ ).

Die innere Energie  $e$  (pro Masseneinheit) der Strömung ist gegeben durch

$$(6) \quad e = \frac{\varepsilon_w}{R_L} \frac{1 + \mu^*}{1 + \mu^* R_v / R_L} \frac{p}{\mu} \frac{\alpha}{\rho_w}; \quad \frac{\alpha}{\rho_w} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_w}.$$

Unter Berücksichtigung der Relationen

$$\mu = \mu_L (1 + \mu^*) ; \quad \mu_L = M_L / M_w ; \quad \mu^* \frac{R_v}{R_L} = \frac{p_v}{p - p_v},$$

nimmt (6) auch die Form an

$$(7) \quad e = \frac{\varepsilon_w}{R_L} \frac{p - p_v}{\mu_L} \frac{\alpha}{\rho_w} = \frac{\varepsilon_w}{R_L} \frac{p - p_v}{\mu_L} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_w} \right).$$

Mit  $\varepsilon_w$  ist die spezifische Wärme des Wassers bezeichnet.  $\frac{R_L}{\varepsilon_w} = 0,07$ . In sehr guter Näherung darf bei gashaltigem Wasser isotherme Zustandsänderung vorausgesetzt werden. Aus (5) ergibt sich unter Berücksichtigung von (1):

$$(8) \quad \frac{\alpha}{\alpha_\infty} = \frac{p_\infty - p_v}{p - p_v} \frac{\mu_L(p)}{\mu_{L\infty}} = \frac{p_\infty}{p} \frac{\mu_L(p)}{\mu_{L\infty}} \frac{1 + \mu^* R_v / R_L}{1 + \mu_\infty^* R_v / R_L}.$$

In Gl.(8) ist die Abhängigkeit des Massenverhältnisses  $\mu_L$  der ungelösten Luft im Wasser vom Druckfeld  $p$  noch unbekannt. In Anbetracht einer ganzen Anzahl komplizierter physikalischer Effekte, die auf den freien Luftgehalt Einfluss haben, ist  $\mu_L(p)$  schwer theoretisch zu bestimmen. Es liegt daher nahe, an die Stelle der Relation (8) die übersichtliche Näherungsformel

$$(9) \quad \frac{\alpha}{\alpha_\infty} = \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{1+\lambda} \quad (\lambda \geq 0),$$

zu setzen, welche auch durch Messungen einigermaßen gut bestätigt wird. [4]. (vgl. Abb. 1).  $\mu_L$  nimmt auf jeden Fall zu, wenn der Druck absinkt. Gl.(9) wurde bei allen bisherigen [1],[2],[3]

Untersuchungen verwendet. Aus Formel (7) für die innere Energie folgt mit  $c^2 = (\frac{p}{\rho} - \frac{\partial e}{\partial \rho}) / \frac{\partial e}{\partial p}$ , und unter Berücksichtigung der Abschätzung  $\mu \ll 1$  wieder die Beziehung (4).

Eine weitere Verbesserung der Theorie in thermodynamischer und blasendynamischer Hinsicht wäre denkbar, wenn die Reaktion der Keime und Blasen auf das äussere Druckfeld genauer erfasst würde. Man ginge damit von der Voraussetzung ab, daß die Veränderung des Gasvolumens sich unendlich schnell dem äusseren Druckfeld anpasst. Es tritt dann ein zeit- und ortsabhängiger Unterschied zwischen dem Gasdruck  $p_g$  und dem äusseren Strömungsdruck  $p$  auf. Eine solche Strömung ist nicht mehr barotrop und es entfällt die Möglichkeit, wie in Ansatz (3) ein Geschwindigkeitspotential einzuführen. Durch eine Aufgabe der Potentialströmung würde jedoch die ohnehin aufwendige Theorie in unvertretbarem Masse kompliziert und numerische Ergebnisse wären kaum noch zu gewinnen. Es erscheint aber möglich, durch geeignete räumliche Mittelungsverfahren wieder zu einer quasi-barotropen Strömung zu kommen. Schwierigkeiten bereitet auch eine geeignete Erfassung des dynamischen Verhaltens der nicht kugelsymmetrischen Viel-Blasen-Strömung. Die bekannte Gleichung für die Dynamik einer kugelsymmetrischen Einzelblase kann hier höchstens in roher Näherung zur Beschreibung der Reaktion einer hypothetischen „mittleren“ Blase verwendet werden. Diese Probleme sollen künftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Unter Verwendung der Gln.(2),(3),(4) und (9) führen die Erhaltungssätze von Masse und Impuls in ihrer Differentialgleichungsform und bezogen auf das ruhende Absolutsystem bekanntlich [2],[3] auf die beiden Relationen

$$(10) \quad \square \phi = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \ln(1 + \alpha(\rho)) + \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty c_\infty^2} \phi \right];$$

$$(11) \quad \phi = 1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_\infty}{\rho} u_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Dabei ist  $\square$  der Wellengleichungsdifferentialoperator

$$\square \equiv \left( 1 - \frac{u_\infty^2}{c_\infty^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2u_\infty}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

und  $\phi$  die sogenannte Druckfunktion, definiert durch

$$(12) \quad \phi \equiv \frac{\rho}{\rho_\infty} + \frac{1}{\rho_\infty} \int_{\rho_\infty}^{\rho} \alpha(\rho') d\rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty} + \frac{\alpha_\infty}{\lambda} \left( 1 - \frac{\rho_\infty^\lambda}{\rho^\lambda} \right).$$



Die Gleichungen (10) und (11) gelten in den stossfreien Gebieten des Strömungsfeldes und stellen ein simultanes nichtlineares System zur Berechnung von Geschwindigkeits- und Druckfeld dar. Die Lösung ist unter Berücksichtigung der Tatsache zu bestimmen, daß Druck, Geschwindigkeit und Dichte an gewissen Flächen im Raum Diskontinuitäten aufweisen. Als derartige Diskontinuitätsflächen treten einerseits die Oberflächen der Strömungskörper also etwa die Propellerflügel auf; zum anderen sind es die Stossflächen, die stromabwärts den Rand der lokalen Überschallbereiche bilden.

Die Intensität der an den Flügelblättern auftretenden Diskontinuitäten ergibt sich aus den üblichen Strömungsrandbedingungen für das Auftriebs- und Verdrängungsproblem. [5]. Die Diskontinuitäten an den Stossflächen sind aus den in Abschnitt 2 noch eingehend zu besprechenden Stossrelationen zu bestimmen.

Die Lösungsmethode für Gl.(10) besteht darin, die Gleichung mit Hilfe der bekannten [6] Auflösungsformel für inhomogene Wellengleichungen unter Berücksichtigung von (11) in eine nichtlineare Integralgleichung für die Druckfunktion  $\phi$  überzuführen. Letztere kann iterativ bestimmt werden. Die nichtlineare rechte Seite von Gl.(10) wird dabei als eine Art Volumquelle behandelt. Die vollständige Lösung von (10) als inhomogener Wellengleichung enthält ausser einem Volumintegral über die Inhomogenität noch Oberflächenintegrale über die Berandungen des Strömungsfeldes. Letztere schliessen diejenigen Gebiete aus, in denen Druck und Geschwindigkeit nicht mehr stetig differenzierbar sind, wie dieses zur Lösung der Wellengleichung erforderlich ist. Im vorliegenden Fall sind dieses die Flügel und die Stossbereiche, die in dem mathematischen Modell als infinitesimal dick und somit als Diskontinuitätsflächen angesehen werden können. Wegen der entgegengesetzten Normalenrichtung auf beiden Seiten einer solchen Fläche fallen die stetigen Oberflächenanteile von Druck und Geschwindigkeit heraus und als Belegung bleiben nur die Diskontinuitäten von  $\phi$ ,  $\phi$  und dessen Ableitungen übrig. Sie lassen sich durch geeignete Superposition von Quellen und Dipolen als Lösungen der homogenen Wellengleichung  $\square \phi = 0$  darstellen. Da deren Lösungen ohne wesentliche Schwierigkeiten für beliebig beschleunigt bewegte Singularitäten angegeben werden können, [2],[3],[5],[7], lassen sich auf diese Art

die für die Anwendung wesentlichen Fälle erfassen. Ein Beispiel dafür ist der Stoss auf der Saugseite eines rotierenden Propellerflügels, der relativ zum Blatt noch Schwingungen um eine mittlere Lage ausführt; letztere können sowohl durch die Anstellwinkeländerung beim Flügelumlauf (infolge des inhomogenen Nachstromfeldes) als auch durch periodische Grenzschichtablösung hinter dem Stoss bedingt sein.

Während die Berechnung etwa der Druckdiskontinuität am rotierenden Propellerflügel aus der konventionellen Strömungsrandbedingung [5] [8] keine prinzipiellen Probleme aufwirft, bedarf die Formulierung der Stossgleichungen für Druck, Geschwindigkeiten und Dichte bei beschleunigt bewegten Stossflächen in hochfrequent instationärer Strömung (etwa bedingt durch Blasenschwingungen) einiger Überlegungen; diese stellen wir nachfolgend zusammen.

## 2. Die Stossgleichungen

Wegen der mangelnden Differenzierbarkeitseigenschaften im Stossbereich gehen wir von den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie in ihrer Integralform aus. Hier kann zunächst auf die bekannten Lehrbücher, etwa [9], [10], verwiesen werden. Danach lauten die Erhaltungssätze für ein raumfestes Bezugssystem für die Masse

$$(13) \quad \int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{(F)} \rho (w n) dF ;$$

für den Impuls

$$(14) \quad \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) dV = - \int_{(F)} \rho w (w n) dF - \int_{(F)} p n dF ;$$

und für die Energie

$$(15) \quad \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} w^2 \right) dV = - \int_{(F)} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} w^2 + p \right) (w n) dF .$$

Die Relationen (13) bis (15) beziehen sich auf ein mit der absoluten Geschwindigkeit  $w$  bewegtes Volumenelement  $(V)$ , das während des Bewegungsvorgangs immer aus den gleichen Materieteilchen besteht. Das Volumintegral liefert dabei den Anteil der lokalen Änderung der Feldfunktionen; das Oberflächenintegral ist durch die Verschiebung der Fläche mit der Strömungsgeschwindigkeit  $w$  bedingt. Es erfasst also die räumliche Änderung der Feldfunktionen.

Der allgemeinste in der Propellerströmung auftretende Fall ist bei einem Stoss gegeben, der (etwa um die x-Achse des ruhenden Systems) im Uhrzeigersinn eine ungleichförmige Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega(t)$  ausführt und zugleich in x-Richtung eine schwingungsförmige Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit  $-u_x(t) = -u_x(t)$  macht. Die Stossfläche bewegt sich also gegenüber\*) dem ruhenden System mit der Geschwindigkeit  $-\vec{u}$ , und es gilt

$$(16) \quad \vec{u} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} + u_x(t) \vec{e}_x.$$

Betrachten wir nun zunächst den Impulssatz (14).

Die bezüglich des ruhenden Systems lokale Änderung  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u})$  des Vektors  $\rho \vec{u}$  stellt sich vom mitbewegten System des Stosses aus als totale Änderung dar; es gilt also zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) \triangleq \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + (\vec{u} \operatorname{grad}) \rho \vec{u};$$

dabei bezeichnen wir mit  $\partial/\partial t$ , die lokale Änderung bezüglich des bewegten Systems. Ausserdem ist noch zu berücksichtigen, daß sich die Einheitsvektoren  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$  vom ruhenden System aus mit der Zeit in ihrer Richtung verändern. Unter Berücksichtigung der Relation

$$(17) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega(t)$$

ergibt sich

$$(18) \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial t} = -\omega \vec{e}_3; \quad \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial t} = +\omega \vec{e}_2.$$

Mit (18) wird  $\rho v_2 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial t} + \rho v_3 \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial t} = \rho \vec{u} \times \vec{\omega}$ ,

und somit erhalten wir endgültig für die Umrechnung auf das mitbewegte System

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + (\vec{u} \operatorname{grad}) \rho \vec{u} + \rho \vec{u} \times \vec{\omega}.$$

Der Impulssatz im mitbewegten System lautet also:

---

\*) Wir haben im ruhenden System die Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  und die Koordinaten  $x, y, z$ ; in dem mit dem Stoss bewegten System die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  und die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . (Abb. 2). Zwischen der Absolutgeschwindigkeit  $\vec{u}$  und der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}_0$  relativ zum Stoss besteht die Relation  $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}$ . Jeder Vektor kann in beiden Systemen dargestellt werden, z.B.

$$\vec{u} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3.$$

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3.$$

Da die Drehung um die x-Achse erfolgt, ist  $\vec{e}_x = \vec{e}_1$ ;  $v_x = v_1$ . Mit  $\varphi$  wird der Polarwinkel in der y-z-Ebene bezeichnet.

$\vec{n}$  ist der Normaleneinheitsvektor der betrachteten Oberflächen.



$$(20) \quad \int_{(V)} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + (\tilde{u} \operatorname{grad}) \rho w + \rho w \times \vec{\omega} \right) dV = \\ = \int_{(F)} \rho w (w n) dF - \int_{(F)} p n dF .$$

Ganz entsprechend können die Erhaltungssätze für Masse und Energie im mitbewegten System formuliert werden. Die Umrechnung ist noch insofern einfacher, als es sich dabei um skalare Grössen handelt und die Berücksichtigung der Richtungsänderung der Einheitsvektoren entfällt. Man erhält so im mitbewegten System für den Massenerhaltungssatz

$$(21) \quad \int_{(V)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \tilde{u} \operatorname{grad} \rho \right) dV = - \int_{(F)} \rho (w n) dF ,$$

und für die Energiegleichung

$$(22) \quad \int_{(V)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} w^2 \right) + \tilde{u} \operatorname{grad} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} w^2 \right) \right) dV = \\ = - \int_{(F)} \left( \rho e + \frac{\rho}{2} w^2 + p \right) (w n) dF .$$

Mit einer relativ elementaren Rechnung<sup>\*)</sup> ergibt sich aus (20), (21) und (22) die Differentialgleichungsform der Erhaltungssätze von Impuls, Masse und Energie im mitbewegten System.<sup>\*\*)</sup>

Für die Gewinnung der Stossrelationen ist es zweckmässig, im mitbewegten System von den bisher verwendeten kartesischen Koordinaten mit den Einheitsvektoren  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$  zu einem in der Regel krummlinigen örtlichen Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_u$  überzugehen. Dabei gibt  $\mathcal{H}_n$  die Richtung normal zum Stossbereich, bzw. genauer gesagt normal zur Stossfläche an, während  $\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_u$  die beiden tangentialen Richtungen kennzeichnen. (vgl. Abb. 3).

Wir wenden nun die Erhaltungssätze (20), (21), (22) auf den Stossbereich an. Dieser ist dadurch definiert, daß die Strömungsgrössen Geschwindigkeit, Druck und Dichte in der durch  $\mathcal{H}_n$  charakterisierten Richtung auf einem sehr kleinen Intervall  $h$  starke Änderungen er-

<sup>\*)</sup> Unter Berücksichtigung der Formeln:  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \vec{\omega} \times \mathcal{H} + \dot{\mathcal{U}}_1 \mathcal{H}_1$ ;  
 $(\tilde{u} \operatorname{grad}) w = \operatorname{grad}(\tilde{u} w) - \tilde{u} \times \operatorname{rot} w - w \times \operatorname{rot} \tilde{u} - (w \operatorname{grad}) \tilde{u}$ ;  
 $\tilde{u} \times \operatorname{rot} \tilde{u} = \operatorname{grad} \tilde{u}^2 = 2 \tilde{u} \times \vec{\omega} = -2 \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathcal{H})$ ;  
 $(w \operatorname{grad}) \tilde{u} = \vec{\omega} \times w$ ;

<sup>\*\*) Diese Form wird in den Lehrbüchern der Mechanik in der Regel aus den entsprechenden Differentialgleichungen im ruhenden System abgeleitet.</sup>

fahren, während diese in den anderen Richtungen auf entsprechend kleinen Intervallen infinitesimal bleiben; mit anderen Worten: In  $\mathcal{M}_I$  und  $\mathcal{M}_{II}$ -Richtung sollen sämtliche Ableitungen der Strömungsgrößen beschränkt sein. Über die lokale zeitliche Änderung von Geschwindigkeit, Druck und Dichte im Stossbereich ist damit noch nichts ausgesagt. Dieser Stossbereich kann als ein in  $\mathcal{M}_n$ -Richtung dünnes schichtartiges Volumelement (Schichtdicke  $h$ ) angesehen werden, dessen Oberfläche orthogonal zu  $\mathcal{M}_n$  wir mit  $(F)$  bezeichnen. Ausserdem wollen wir den Zustand vor dem Stoss (stromaufwärts) durch „~“ und dahinter (stromabwärts) mit „^“ kenntlich machen. In sehr guter Näherung kann davon ausgegangen werden, daß sich die Bewegungsgeschwindigkeit  $\check{u}$  des Stossbereichs in  $\mathcal{M}_n$ -Richtung innerhalb der Schichtdicke  $h$  nicht ändert. Dann wird \*)

$$(23) \quad \int_{(V)} \check{u} \operatorname{grad} \varphi dV = \int_{(V)} \left( \frac{1}{g_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} u_n + \frac{1}{g_I} \frac{\partial \varphi}{\partial x_I} u_I + \right. \\ \left. + \frac{1}{g_{II}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{II}} u_{II} \right) g_n g_I g_{II} dx_n dx_I dx_{II} \approx \\ \approx \int_{(F)} \left( \hat{\varphi} \hat{u}_n - \tilde{\varphi} \tilde{u}_n + h \frac{u_I}{g_I} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_I} \right)_m + h \frac{u_{II}}{g_{II}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{II}} \right)_m \right) dF.$$

Wegen der vorausgesetzten Beschränktheit aller Ableitungen nach  $x_I$  und  $x_{II}$  sowie in Anbetracht des sehr kleinen  $h$ -Wertes sind die letzten beiden Terme in dem Oberflächenintegral (23) zu vernachlässigen. (...) <sub>m</sub> bezeichnet einen räumlichen Mittelwert genommen über die Schichtdicke  $h$ . Analog erhalten wir

$$(24) \quad \int_{(V)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV \approx h \int_{(F)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_m dF;$$

aber anders als bei den entsprechenden Gliedern in (23) darf die rechte Seite von (24) nicht als von vorn herein vernachlässigbar angesehen werden. Dazu bedarf es noch einer Aussage über die für den instationären Charakter der Strömung massgebenden Frequenzen.

\*) Wir beschränken uns hier auf orthogonale Koordinaten. Es ist zweckmässig, das schichtartige Stossvolumen durch  $\mathcal{M}(x_n, x_I, x_{II}) = \mathcal{M}_n x_n + \mathcal{M}_F(x_I, x_{II})$  zu beschreiben.  $\mathcal{M}_F$  gibt die Fläche  $(F)$ . Es gilt dann  $dF = g_I g_{II} dx_I dx_{II}$ . Ausserdem ist

$$g_n = \left| \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_n} \right| \approx 1; \quad g_I = \left| \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_I} \right|; \quad g_{II} = \left| \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_{II}} \right|.$$

Mit dieser Darstellung darf im ganzen Stossbereich  $x_n \approx 0$  angenommen werden.

Aus (21) folgt mit (23), (24) unter Berücksichtigung von  $u = u + \tilde{u}$  die erste Stossrelation:

$$(25) \quad \tilde{\rho} \tilde{w}_n - \hat{\rho} \hat{w}_n = h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t}, \right)_m .$$

Bei der Umformung des Impulssatzes (20) kann ähnlich vorgegangen werden. Wieder bleibt bei der Umformung des Volumintegrals in das Oberflächenintegral nur der Anteil mit der Ableitung normal zur Stossfläche zu berücksichtigen, während die übrigen Richtungen vernachlässigbar kleine Terme liefern. Denn auf jeden Fall ist  $h$  sehr klein im Verhältnis zu den Flügelabmessungen. ( $h/R_0 \ll 1$ ,  $R_0$  Propellerradius). Aus diesem Grunde ist auch der Term

$$\int_{(V)} \rho u \times \vec{\omega} dV \approx \frac{h}{R_0} \int_{(F)} \rho u \times \vec{\omega} R_0 \cdot dF$$

im Impulssatz zu vernachlässigen.

Wir berücksichtigen ferner, daß die Stossbewegung  $\tilde{u}(t)$  bei den für die Anwendung wesentlichen Problemen einen niederfrequenten Charakter hat. Dann können alle Terme der Form

$$\sim h \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t},$$

als von höherer Ordnung klein weggelassen werden. Unter diesen Voraussetzungen liefert eine längere elementare Rechnung aus (20) und (22) die folgenden weiteren Stossrelationen:

$$(26) \quad \tilde{\rho} \tilde{w}_n^2 - \hat{\rho} \hat{w}_n^2 + \tilde{p} - \hat{p} = h \left( \frac{\partial (\rho w_n)}{\partial t}, \right)_m ;$$

$$(27) \quad \tilde{\rho} \tilde{w}_n \tilde{w}_I - \hat{\rho} \hat{w}_n \hat{w}_I = h \left( \frac{\partial (\rho w_I)}{\partial t}, \right)_m ;$$

$$(28) \quad \tilde{\rho} \tilde{w}_n \tilde{w}_{II} - \hat{\rho} \hat{w}_n \hat{w}_{II} = h \left( \frac{\partial (\rho w_{II})}{\partial t}, \right)_m ;$$

$$(29) \quad \tilde{\rho} \tilde{e} \tilde{w}_n - \hat{\rho} \hat{e} \hat{w}_n + \frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{w}_n \tilde{u}^2 - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{w}_n \hat{u}^2 + \\ + \tilde{p} \tilde{w}_n - \hat{p} \hat{w}_n = h \left( \frac{\partial}{\partial t}, (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) \right)_m .$$

Die Formeln (25) bis (29) stellen die gesuchten Berechnungsgleichungen für beschleunigt bewegte Stöße in hochfrequent instationärer Strömung dar. Bei niederfrequenten Problemen sind die rechten Seiten vernachlässigbar klein und werden gleich Null gesetzt. Die Gln. (25) bis (29) zeigen ferner, daß massgebend für die Vorgänge die Relativgeschwindigkeit  $u$  der Strömung gegenüber dem Stoss ist. In guter Näherung sind noch weitere Vereinfachungen möglich. So hat sich im Rahmen der bisherigen [1], [2], [3] Untersuchungen niederfrequenter und stationärer Strömungen gezeigt, daß in dem



Energiesatz (29) die Glieder mit der inneren Energie  $e$  den weit-  
aus überwiegenden Anteil liefern. Gehen wir von dieser Konzeption  
aus, so folgt aus (29) zunächst

$$\tilde{\rho} \tilde{w}_n \tilde{e} - \hat{\rho} \hat{w}_n \hat{e} = h \left( \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} \right)_m$$

und unter Verwendung von (25) und Vernachlässigung von sehr klei-  
nen Termen der Art  $h[(e)_m - \hat{e}]$  erhalten wir:

$$(30) \quad \tilde{e} - \hat{e} = \frac{h}{\tilde{w}_n} \frac{(\rho)_m}{\tilde{\rho}} \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right)_m.$$

Für die Beurteilung der Grösse von  $\frac{\partial e}{\partial t}$ , muss man bedenken, daß  $e = \epsilon_w T$  ist, also Schwankungen von  $e$  zugleich Temperaturschwankungen darstellen. In Anbetracht der Tatsache, daß die Vorgänge in sehr guter Näherung als isotherm angesehen werden können, liegt es nahe,  $\left( \frac{\partial e}{\partial t} \right)_m = 0$  zu setzen. Gl.(30) vereinfacht sich dann zu  $\tilde{e} = \hat{e}$  oder wegen (7), (8) und (9) zu

$$(31) \quad \tilde{\alpha} / \hat{\alpha} = (\hat{\rho} / \tilde{\rho})^{1+\lambda}.$$

In vielen Fällen dürfte es ausreichen, bei einer weiteren Umformung der Stossrelationen alle Quadrate von  $h$  und alle Glieder der Grös-  
senordnung  $h(\tilde{w}_r - (w_r)_m)$  zu vernachlässigen. Damit vereinfachen sich die Gln. (26), (27), (28) zu

$$(32) \quad \hat{\rho} - \tilde{\rho} = \tilde{\rho} \tilde{w}_n (\tilde{w}_n - \hat{w}_n) - h \left( \rho \frac{\partial w_n}{\partial t} \right)_m ;$$

$$(33) \quad \tilde{w}_r - \hat{w}_r = h \frac{(\rho)_m}{\tilde{\rho}} \frac{1}{\tilde{w}_n} \left( \frac{\partial w_r}{\partial t} \right)_m ;$$

$$(34) \quad \tilde{w}_n - \hat{w}_n = h \frac{(\rho)_m}{\tilde{\rho}} \frac{1}{\tilde{w}_n} \left( \frac{\partial w_n}{\partial t} \right)_m.$$

Bei einer hochfrequent instationären Strömung hat auch die Tangen-  
tialgeschwindigkeit am Stoss einen Sprung.

Durch Gl.(31) ist wegen (2) auch ein direkter Zusammenhang zwi-  
schen  $\hat{\rho}$  und  $\tilde{\rho}$  gegeben. Es liegt nahe, für die weitere Berechnung

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_m = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} ; \quad \left( \frac{\partial w_n}{\partial t} \right)_m = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{w}_n}{\partial t} ; \text{ usw}$$

zu setzen; zumindest solange man keine genauere Einsicht in die  
Struktur der Strömung im Stossbereich hat. In der Regel kann man  
davon ausgehen, daß der Strömungszustand „ $\sim$ “ vor dem Stoss voll-  
ständig bekannt ist.

Wir eliminieren mit Hilfe von Gl.(25) die Geschwindigkeit  $\hat{w}_n$  aus  
Formel (32) und erhalten nach elementarer Zwischenrechnung unter

Vernachlässigung quadratischer Terme in  $h$  sowie sonstiger Anteile entsprechender Größenordnung

$$(35) \quad \hat{p} - \tilde{p} = \tilde{q}^2 \tilde{w}_\infty^2 \left( \frac{1}{\tilde{q}} - \frac{1}{\hat{q}} \right) - \frac{h}{2} (\tilde{q} + \hat{q}) \frac{\partial \tilde{w}_\infty}{\partial t} + h \tilde{w}_\infty \frac{\partial \hat{q}}{\partial t}, \quad ;$$

mit

$$(35') \quad \frac{1}{\hat{q}} = \frac{1}{\tilde{q}} \left[ 1 + \tilde{\alpha} \frac{\tilde{p}^{1+\lambda}}{\hat{p}^{1+\lambda}} \right] (1 + \tilde{\alpha})^{-1}.$$

Aus den Gleichungen (35), (35') lässt sich der Druck  $\hat{p}$  hinter dem Stoss berechnen. Genau genommen stellt (35) eine Differentialgleichung für  $\hat{p}$  dar. Sie kann jedoch iterativ gelöst werden, da der von  $h$  abhängige Anteil in der Regel nur den Charakter eines Korrekturgliedes haben dürfte.

Mit  $\hat{p}$  ist auch  $\hat{q}$  berechnet, und aus den Gln. (25), (33), (34) ergeben sich dann ebenfalls iterativ die Geschwindigkeiten  $\hat{w}_\infty, \hat{w}_r, \hat{w}_\sigma$  hinter dem Stoss.

### 3. Abschätzung der Stossdicke

Für die Berechnung von Strömungsfeldern unter Berücksichtigung der oben behandelten Stossrelationen ist es erforderlich, eine Aussage über die Dicke  $h$  des Stossbereichs zu erhalten. Nur dann lässt sich auch in Zusammenhang mit den für den Strömungsvorgang massgebenden Frequenzen beurteilen, ob die von  $h$  abhängigen Terme in den Formeln (25) sowie (32) bis (35) berücksichtigt werden müssen.

Um eine solche Abschätzung für  $h$  zu erhalten, muss ähnlich wie in der Gasdynamik [9] von dem Modell der reibungsfreien Strömung abgegangen werden. Ausserdem ist zu beachten, daß die Strömungsteilchen sich beim Durchgang durch den Stossbereich in Anbetracht ihrer extrem kurzzeitigen Zustandsänderungen nicht mehr im thermodynamischen Gleichgewicht befinden und daher Relaxation auftritt.

Nach einer aus der Gasdynamik bekannten Methode [9] beschreiben wir die Wirkung der thermodynamischen Relaxation näherungsweise durch einen zusätzlichen Zähigkeitsparameter  $\sqrt{\nu}$ . Dieses ist möglich, da sowohl Viskosität als auch Relaxation Dämpfungswirkungen hervorrufen. Für die Berechnung der Relaxationszähigkeit vergleichen wir die eindimensionale Ausbreitung schwacher Störungen in  $x$ -Richtung

als ebene gedämpfte Wellen in einem Medium der Viskosität  $\nu_*$  mit dem gleichen Vorgang in einem Medium mit der Relaxationszeit  $\tau_R$ . Im ersten Fall erhalten wir aus Kontinuitätsgleichung und Impuls= satz mit  $c_o^2 = (\frac{d\rho}{d\rho})_o$  für die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  in  $x$ - Richtung die Gleichung (Abb.4)

$$(36) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_* \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}.$$

Ein Lösungsansatz als ebene Welle mit der komplexen Wellenzahl  $\kappa$

$$(37) \quad u \sim e^{i(\omega_o t - \kappa x)}$$

liefert unmittelbar:

$$(38) \quad \kappa^2 = \frac{\omega_o^2}{c_o^2} \frac{1}{1 + i \nu_* \omega_o / c_o^2}.$$

Andererseits kann die Differentialgleichung für die eindimensio= nale Schallausbreitung unter Berücksichtigung einer endlichen Re= laxationszeit  $\tau_R$ , [9], mit dem Ansatz (37) gelöst werden. Diese lautet

$$(36') \quad \tau_R \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{c}_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

und man erhält

$$(38') \quad \kappa^2 = \frac{\omega_o^2}{c_o^2} \frac{1 + i \omega_o \tau_R}{1 + i \omega_o \tau_R \bar{c}_o^2 / c_o^2}.$$

In (38') bezeichnen  $c_o$  und  $\bar{c}_o$  die Schallgeschwindigkeiten des un= gehemmten und des gefrorenen thermodynamischen Gleichgewichts. Durch Gleichsetzen der Dämpfungsglieder von (38) und (38') folgt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für gahaltiges Wasser nach (8) und (9)  $\bar{c}_o^2 / c_o^2 = 1 + \lambda^*$  angenommen werden kann:

$$(39) \quad \frac{\nu_* \omega_o / c_o^2}{1 + (\nu_* \omega_o / c_o^2)^2} = \frac{\lambda \omega_o \tau_R}{1 + (1 + \lambda)^2 \omega_o^2 \tau_R^2}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (39) ist stets kleiner als  $1/2$ ; sein Maximalwert für  $\omega_o \tau_R (1 + \lambda) = 1$  beträgt:  $0,5 \lambda (1 + \lambda)^{-1}$ .

Bei der Lösung der quadratischen Gleichung (39) für  $\nu_*$  kann die Wurzel in einer Reihe entwickelt werden, von der nur das erste Glied berücksichtigt werden braucht. Man erhält so

$$\nu_* = \frac{\lambda c_o^2 \tau_R}{1 + (1 + \lambda)^2 \omega_o^2 \tau_R^2}.$$

---

\*) Im gefrorenen thermodynamischen Gleichgewicht sind sowohl  $\mu^*$  als auch  $\mu_c$  als konstant, also unabhängig vom Druck anzusehen.  $\lambda = 0$ .



Da wir im Rahmen dieser Abschätzung die Vorgänge im Stoss durch eine Welle beschreiben, so erscheint es sinnvoll, für die halbe Wellenlänge  $\frac{\pi c_0}{\omega_0}$  die Stossbreite  $h$  einzusetzen. Da im Stoss die Strömung vom Überschall zum Unterschallzustand übergeht, ist als mittlere Machzahl  $M_0 = \frac{W_m}{c_0} = 1$  zu nehmen. Dann folgt endgültig

$$(40) \quad v_* = \frac{\lambda W_m^2 \tau_R}{1 + (1+\lambda)^2 \pi^2 W_m^2 \tau_R^2 / \ell^2}.$$

Für die nun durchzuführende Abschätzung der Stossbreite  $h$  reicht es aus, eine eindimensionale stationäre Strömung mit der Geschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung durch einen senkrecht zur Strömungsrichtung verlaufenden Stossbereich zu betrachten. Dann lauten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie mit  $-\tau \frac{dT}{dx}$  als Wärmestrom und  $\nu$  als echter kinematischer Zähigkeit [9]:

$$(41) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho u) &= 0; \quad \frac{d}{dx}(\rho u^2 + p - \rho(\frac{4}{3}\nu + \nu_*) \frac{du}{dx}) = 0; \\ \rho u \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}u^2 + e + \frac{p}{\rho}) &= \frac{d}{dx}(\rho(\frac{4}{3}\nu + \nu_*) u \frac{du}{dx} + \tau \frac{dT}{dx}). \end{aligned}$$

Wir integrieren die Relationen (41) in der Weise, daß als Ausgangswerte diejenigen des Zustands „ $\sim$ “ vor dem Stoss genommen werden. Dabei behandeln wir den Strömungsvorgang in dem sehr dünnen Stossbereich als endlich ausgedehnt; daher ist es zweckmässig, dem Zustand vor dem Stoss die Koordinate  $x/h \rightarrow -\infty$  und entsprechend dem Zustand hinter dem Stoss (also „ $\wedge$ “) den Wert  $x/h \rightarrow +\infty$  zuzuordnen. Wie üblich ist davon auszugehen, daß der Zustand vor dem Stoss bekannt ist. (vgl. Abb. 4).

Durch Integration und elementare Umformung unter Berücksichtigung der in guter Näherung gültigen Beziehung  $e = \varepsilon_w T$  ( $\varepsilon_w$  spez. Wärme des Wassers) folgt aus (41):

$$(42) \quad \rho_w(\frac{4}{3}\nu + \nu_*) \frac{du}{dx} = p - \tilde{p} + \tilde{\rho} \tilde{u}(u - \tilde{u});$$

$$(43) \quad \frac{\tau}{\tilde{\rho} \tilde{u}} \frac{dT}{dx} = \varepsilon_w(T - \tilde{T}) - \frac{1}{2}(u - \tilde{u})^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}(\frac{u}{\tilde{u}} - 1).$$

Für  $x \rightarrow \pm\infty$  ist sowohl  $\frac{du}{dx} = 0$ , als auch  $\frac{dT}{dx} = 0$ .

In Gl. (42) wurde zur Vereinfachung noch bei dem Zähigkeitsglied  $\rho \approx \rho_w$  gesetzt.

Bei der bisherigen Behandlung der Stossgleichungen wurde der Energiesatz zu der Relation  $\hat{e} = \tilde{e}$  vereinfacht, da die innere

Energie die anderen Anteile überwiegt. Ein entsprechendes Vorgehen führt hier an Stelle von (43) zu der vereinfachten Relation

$$(43') \quad 5 \frac{dT}{dx} = \tilde{p} \tilde{u} \varepsilon_w (T - \tilde{T}) .$$

Löst man diese Differentialgleichung mit den beiden notwendigen Bedingungen:  $x \rightarrow \pm \infty : T = \hat{T} = \tilde{T}$ , so ergibt sich, daß die Temperatur im gesamten Stossbereich konstant bleibt.

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (2) und (9) für den Stossbereich die Beziehung

$$(44) \quad \left( \frac{\tilde{p}}{\rho} \right)^{1+\lambda} = \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} = \frac{u}{\tilde{u}} \left( \frac{1}{\tilde{\alpha}} + 1 \right) - \frac{1}{\tilde{\alpha}} .$$

Mit (44) und

$$\alpha = \frac{\rho_w}{\rho} \frac{u}{\tilde{u}} - 1$$

lässt sich die Differentialgleichung (42) auf das Volumverhältnis  $\alpha(x)$  umschreiben. Führen wir noch mit (4) und (9) die Schallgeschwindigkeit  $\tilde{c}$  der Strömung vor dem Stoss ein, also

$$\tilde{c}^2 = \frac{\tilde{p}}{\rho_w \tilde{\alpha} (1+\lambda)} ,$$

so nimmt (42) die Form an

$$(45) \quad \frac{\rho_w \tilde{u}}{\tilde{p}} \frac{\frac{4}{3} v + v_*}{1+\tilde{\alpha}} \frac{d\alpha}{dx} = \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} - 1 + \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{c}^2} \frac{1}{1+\lambda} \left( \frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} - 1 \right) .$$

Es ist zweckmässig, in Gl.(45) noch die Machzahl vor dem Stoss durch das Volumverhältnis  $\hat{\alpha}$  hinter dem Stoss zu ersetzen. Nach den bekannten [1],[2],[3] quasistationären Stossungleichungen gilt

$$\left( \tilde{\alpha} / \hat{\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} = 1 + \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{c}^2} \frac{1}{1+\lambda} \left( 1 - \hat{\alpha} / \tilde{\alpha} \right) ,$$

und mit  $x = \ell \cdot \xi$  ( $\ell$  = Flügeltiefe) folgt an Stelle von (45):

$$(46) \quad \frac{1}{1+\tilde{\alpha}} \frac{\rho_w \tilde{u}^2}{\tilde{p}} \frac{\frac{4}{3} v + v_*}{\tilde{u} \ell} \frac{d\alpha}{d\xi} = \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} - 1 - \left[ \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\hat{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} - 1 \right] \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\tilde{\alpha} - \hat{\alpha}} .$$

In der Gasdynamik [9] wird üblicherweise die Stossbreite durch die Relation

$$h/\ell = (\hat{u} - \tilde{u}) \left( \frac{du}{d\xi} \right)_*^{-1}$$

abgeschätzt. Für gashaltiges Wasser haben wir demnach

$$(47) \quad \frac{h}{\ell} = (\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}) \left( \frac{d\alpha}{d\xi} \right)_* .$$

Dabei ist die Ableitung  $\left( \frac{d\alpha}{d\xi} \right)_*$  für einen mittleren Wert im Stossbereich zu nehmen. Man kann für  $\alpha_*$  das geometrische Mittel der

Werte vor und hinter dem Stoss verwenden, also

$$(48) \quad \alpha_* = \sqrt{\tilde{\alpha} \hat{\alpha}}.$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, für  $\alpha_*$  den der Machzahl  $u_*/c_* = 1$  entsprechenden Wert zu nehmen. Hier ergibt eine elementare Rechnung

$$(48') \quad (\alpha_*)^{\frac{2+\lambda}{1+\lambda}} = \frac{\tilde{c}^2}{\tilde{u}^2} (\tilde{\alpha})^{\frac{2+\lambda}{1+\lambda}} = \frac{\tilde{\alpha} - \hat{\alpha}}{1+\lambda} \left[ \left( \frac{1}{\tilde{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} - \left( \frac{1}{\hat{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} \right]^{-1}.$$

Für den bei der numerischen Berechnung der Druckfelder an Propellerflügeln [3] meist verwendeten Exponenten  $\lambda = 1$  liefert (48') ein gut mit (48) übereinstimmendes  $\alpha_*$ , nämlich

$$\alpha_* = \sqrt{\tilde{\alpha} \hat{\alpha}} \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}} + \sqrt{\hat{\alpha}}}{2 \sqrt{\alpha_*}} \approx \sqrt{\tilde{\alpha} \hat{\alpha}}.$$

Da die Geschwindigkeitsunterschiede im Stossbereich bei gashaltigen Wasserströmungen relativ gering sind, kann im Rahmen dieser Stossabschätzung  $\tilde{u} \approx w_\infty$  gesetzt werden. Die Reynoldszahl der Strömung ist

$$(49) \quad R_e = \frac{w_\infty \ell}{\nu}.$$

Wir führen nun zur Abkürzung den Stossparameter  $S$  und den Relaxationsparameter  $Z$  ein; und zwar ist

$$(50) \quad S = \frac{\tilde{p}}{\rho_\infty w_\infty^2} \frac{1+\tilde{\alpha}}{(\tilde{\alpha}-\hat{\alpha})^2} \left( \alpha_* - \hat{\alpha} + (\tilde{\alpha} - \alpha_*) \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\hat{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} - (\tilde{\alpha} - \hat{\alpha}) \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_*} \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} \right);$$

und

$$(51) \quad Z = \ell / (w_\infty \tau_R).$$

Mit den Abkürzungen (49) bis (51) und der Relaxationszähigkeit  $\nu_*$  aus (40) liefern Gl.(46),(47) die gesuchte Beziehung zur Abschätzung der Stossdicke  $h$ :

$$(52) \quad \frac{h}{\ell} S' - \frac{4}{3 R_e} = \frac{\lambda Z (\ell/\ell)^2}{Z^2 (\ell/\ell)^2 + \pi^2 (1+\lambda)^2}.$$

Um eine Übersicht über die Lösungen von (52) zu gewinnen, ist es zweckmässig mit  $\bar{X} = Z \ell / \ell$  den Verlauf der beiden Kurven

$$(53) \quad \bar{X} S' - \frac{4}{3} Z / R_e, \quad \text{und} \quad \lambda \bar{X}^2 [\bar{X}^2 + \pi^2 (1+\lambda)^2]^{-1}$$

zu betrachten. Eine elementare Untersuchung zeigt, daß für

nur eine Wurzel von (52) existiert. Zu ihrer Berechnung darf  $Z^2 (\ell/\ell)^2 \ll \pi^2 (1+\lambda)^2$  angenommen werden, und man erhält

$$(54) \quad \frac{h}{\ell} = \frac{\pi^2 (1+\lambda)^2}{2\lambda} \frac{S'}{Z} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16\lambda}{3\pi^2 (1+\lambda)^2} \frac{Z}{R_e S'^2}} \right).$$

Die Relation (54) gilt für die normalen in den Anwendungen vorkommenden Werte von S und Z. \*) Es zeigt sich, daß unter diesen Bedingungen fast immer

$$(55) \quad h/\ell \lesssim 10^{-5}$$

bleibt. Für besonders extreme Fälle muss auf die ursprüngliche Gleichung (52) zurückgegriffen werden. So wird für  $Z \rightarrow \infty$  (keine Relaxation) einfach

$$(56) \quad \frac{h}{\ell} = \frac{4}{3} \frac{1}{S \cdot R_e}.$$

Identifiziert man die Relaxationszeit mit der Durchtrittszeit der Strömungsteilchen durch den Stossbereich, setzt also direkt  $\tau_R = \frac{h}{w_n}$  oder  $Z = 1/h$ , so folgt aus (52)

$$(57) \quad \frac{h}{\ell} = \frac{4}{3} \frac{1}{S \cdot R_e} \left[ 1 - \frac{1}{S} \frac{\lambda}{1 + \pi^2 (1+\lambda)^2} \right]^{-1}.$$

Auch Formel (57) führt auf einen Wert der Grössenordnung (55).

---

\*) Um Zahlenwerte zu gewinnen bedenken wir, daß an Propellerflügeln die Druckverhältnisse  $\hat{p}/\tilde{p}$  beim Stoss etwa zwischen 5 und 40 liegen. Dabei entspricht der untere Wert auf jeden Fall Modellversuchsbedingungen, während die höheren Drucksprünge bei der Grossausführung auftreten. Nach (31) haben wir es dann mit dem Bereich  $6 \cdot 10^{-4} \lesssim \hat{\alpha}/\tilde{\alpha} \lesssim 0,05$  zu tun, wenn  $\lambda = 1$  gesetzt wird. [1], [3].

Für  $w_n$  ist etwa die Zuströmgeschwindigkeit relativ zum Propellerflügel am Radius  $r = 0,7 R_0$  zugrunde zu legen. Wir setzen ferner  $\tilde{p} = 0,03 \text{ kp/cm}^2$  und wählen für  $\tilde{\alpha}$  einen realistischen Wert, etwa  $\tilde{\alpha} = 0,1$ . Dann ergibt sich beispielsweise

für  $\hat{\alpha}/\tilde{\alpha} \approx 0,05$  mit  $w_n = 14 \text{ m/sec}$  (Modell)  $S = 0,31$  ;

für  $\hat{\alpha}/\tilde{\alpha} \approx 6 \cdot 10^{-4}$  mit  $w_n = 35 \text{ m/sec}$  (Original)  $S = 0,84$ .

Ähnlich können weitere Parameterkombinationen abgeschätzt werden. Es zeigt sich, daß für die wesentlichen praktisch vorkommenden Fälle der Wertebereich  $0,1 \lesssim S \lesssim 1$  angenommen werden kann.

Wir bedenken ferner, daß bei Modellpropellern etwa  $0,003 \lesssim 1/w_n \lesssim 0,01 \text{ sec}$  und für die Grossausführung  $0,03 \lesssim 1/w_n \lesssim 0,1 \text{ sec}$  sein dürfte. (1 ist die Profiltiefe auf dem Radius  $0,7 R_0$ ).

Nehmen wir in Anlehnung an für die Blasendynamik typische Frequenzen (58) als obere Grenze für die Relaxationszeit  $\tau_R$  den Wert  $\sim 10^{-4} \text{ sec}$ , als untere Grenze dagegen den für Gase beobachteten Wert  $\tau_R \approx 10^{-6} \text{ sec}$ , [9], so wird etwa:  $10 \lesssim Z \lesssim 10^5$ .

Sowohl bei S als auch bei Z gelten die höheren Werte für die Originalströmung, die niedrigeren für Modellbedingungen.

Die Reynolds-Zahlen liegen zwischen  $R_e = 10^6$  für Modellversuche und  $R_e = 10^8$  bei der Grossausführung.

Mit diesen Aussagen über die Dicke des Stossbereichs kann auch die Bedeutung der entsprechenden Terme in den Stossgleichungen (25) und (32) bis (35) abgeschätzt werden. Bei Propellerströmungen ist ein hochfrequenter Anteil in vielen Fällen durch Schwingungen von Kavitationsblasen und Gaskeimen bedingt.

Aus der Theorie der Blasenschwingungen (vgl. z.B. [11], [12]) ist bekannt, daß die dabei auftretenden Frequenzen von der Grössenordnung sind

$$(58) \quad \frac{\Omega}{2\pi} \sim \left( \frac{1}{V_B} \right)^{1/3} \left( \frac{p}{\rho_w} \right)^{1/2}.$$

In (58) ist  $V_B$  das Blasenvolumen und  $p$  der Druck in (im Verhältnis zum Blasenradius) grossem Abstand von der Blase. Bedenkt man, daß die für die Propellerkavitation wesentlichen Blasenradien in der Grössenordnung von 0,005 bis 0,1 cm liegen [4], so liefert (58) für die auftretenden Frequenzen einen Bereich von etwa 1 bis 100 KHz.

Wenn man von der Hypothese ausgeht, daß die meisten Blasen aus Keimen entstehen, also die Gesamtanzahl der Blasen und Keime pro Volumbereich näherungsweise konstant bleibt, so ist das Volumen  $V_B$  einer „mittleren“ Blase dieses Bereichs dem Volumverhältnis  $\alpha$  proportional:

$$(59) \quad \frac{V_B}{V_{B\infty}} = \frac{\alpha}{\alpha_\infty} = \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{1+\lambda}.$$

Hinsichtlich der Zeitabhängigkeit sind dann bei  $\alpha$  dem niederfrequenten durch die typische Propellerströmung bedingten Anteil noch hochfrequente Schwingungen des oben erwähnten KHz-Bereichs überlagert. Wegen der im Rahmen dieser Untersuchung getroffenen Voraussetzung eines eindeutigen Zusammenhangs zwischen  $\alpha$  und  $p$  gemäss Gl.(9), (59) bestehen entsprechend auch die anderen Strömungsgrössen Druck und Geschwindigkeit aus niederfrequenten und hochfrequenten Anteilen.

Als Beispiel für die Abschätzung eines von  $h$  abhängigen Terms in den Stossrelationen betrachten wir den Summand  $\frac{h}{2} (\tilde{\varphi} + \hat{\varphi}) \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial t}$  aus Gl.(35). Es wird

$$(60) \quad \frac{h}{2} (\tilde{\varphi} + \hat{\varphi}) \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial t} \approx \rho_w \tilde{w}_n \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial (\Omega t)} \frac{\Omega}{\omega} \frac{h}{\ell} \approx \rho_w \tilde{w}_n \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial (\Omega t)} 10^{-2}.$$

Dabei ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Propellers,  $\Omega$  eine typische Blasenfrequenz; ausserdem ist  $\Omega/\omega \geq 10^3$  und  $\tilde{w}_n \approx \omega \ell$  angenommen. Sicher wird die Amplitude  $|\partial \tilde{w}_n / \partial (\Omega t)|$  des  $\Omega t$ -Anteils



von  $\tilde{w}_m$  als klein gegenüber  $\tilde{w}$  selbst angesehen werden dürfen. Bedenkt man aber, daß auch  $\varphi_w (1/\tilde{\phi} - 1/\hat{\phi}) = \tilde{\alpha} - \hat{\alpha}$ , nur einen kleinen Wert darstellt, so wird klar, daß der h-abhängige Zusatzterm von Gl.(35) zwar wesentlich weniger Bedeutung hat als der Hauptteil, jedoch in gewissen Fällen durchaus zu berücksichtigen sein dürfte. Andererseits wird mit der Abschätzung (60) auch gezeigt, daß die bei der Herleitung von Formel (32) bis (35) vorgenommene Linearisierung der Stossgleichungen bezüglich der h-Glieder auf jeden Fall ausreichend genau ist und diese Gleichungen iterativ gelöst werden können, sofern man Propellerströmungen berechnet.

#### 4. Die Propellerströmung

Als Anwendungsbeispiel für die in Abschnitt 1 dargestellte Theorie soll unter Berücksichtigung der behandelten Stosseigenschaften die Strömung an Propellerflügeln genauer behandelt werden. Wir betrachten einen schwach belasteten Propeller mit N Flügeln mit dem Ansatz (3), (3'). (vgl. Abb. 5 und 6). Die Flügelblätter werden als reguläre Schraubenflächen mit der Steigung  $k_0 = \frac{u_\infty}{\omega}$  angenommen. Der Hauptanströmung  $u_\infty$  kann noch ein räumlich inhomogenes Nachstromfeld (Geschwindigkeitspotential  $\phi_0$ ) überlagert sein, das zu einer niederfrequent instationären Flügelbelastung führt. Ausserdem können bedingt durch Blasenschwingungen (vgl. Abschn. 3, S. 18) im Strömungsfeld hochfrequente Anteile mit einem ganzen Spektrum von Kreisfrequenzen  $\Omega_v$  vorhanden sein. Ohne die physikalische Wirklichkeit wesentlich einzuschränken, dürfen wir sämtliche  $\Omega_v$  als ganzzahlige Vielfache der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Propellers annehmen.\*)

Wird wie üblich die momentane Stellung des n-ten Flügels ( $n=0, 1, \dots, N-1$ ) beim Umlauf durch die Winkelkoordinate  $\varphi_n = \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}$  bezeichnet, ( $\varphi_0 = -\omega t$ ), so lassen sich Druck- und Geschwindigkeitsfeld in Fourier-Reihen nach  $\sqrt{\varphi_0}$  entwickeln. Diese enthalten infolge der Bla-

---

\*) Das bedeutet beispielsweise für einen Modellpropeller mit einer Drehzahl von 25 Hz daß nur Blasenfrequenzen  $\Omega_v/2\pi = 25v$  berücksichtigt werden können, etwa 1025, 1050, ..., 9950, 9975, .... Die dazwischen liegenden Werte müssen entsprechend auf- oder abgerundet werden. Durch diese Annahme ist gesichert, daß sich wie in der konventionellen Propellertheorie [5] die Strömungszustände der einzelnen Flügel nur durch eine Phasenverschiebung unterscheiden.

senschwingungen allerdings sehr hohe Harmonische. Die vom Propeller induzierten Geschwindigkeits- und Druckfelder bestehen aus vier Anteilen.

Die ersten beiden sind bereits aus der konventionellen Propellertheorie [5] bekannt und wurden bei einer neuen Untersuchung [3] für gashaltiges Wasser im Rahmen der allgemeinen Lösungsmethode für solche Strömungen noch einmal abgeleitet. Wir können uns daher hier auf die einfache Mitteilung der Endformeln beschränken und für die Einzelheiten auf [3] und [5] verweisen.

Der Anteil  $\wp_1$  der Druckfunktion (Potential  $\phi_1$ ) entspricht der Verdrängungswirkung der endlichen Flügelprofildicke  $Y_D(r, \chi')$  (vgl. Abb. 10), während die Druckfunktion  $\wp_2$  (Potential  $\phi_2$ ) durch die Belastung der Flügelblätter mit dem Drucksprung  $\partial[\wp_2(r, \chi', \varphi_m)]$  bedingt ist. Es gilt:

$$(61) \quad \wp_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i: \chi_v(s)}^{R_o: \chi_h(s)} \left( u_\infty \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\frac{\partial Y_D(s, \chi)}{\partial \chi} \sqrt{\omega^2 s^2 + u_\infty^2}}{D_n + \frac{\omega r s}{c_\infty} \sin \vartheta_n} d\chi ds$$

$$(62) \quad \wp_2 = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i: \chi_v(s)}^{R_o: \chi_h(s)} \left( s \frac{\partial}{\partial x} - \frac{R_o}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial [\wp_2(s, \chi, \varphi_n^{**})]}{D_n + \frac{\omega r s}{c_\infty} \sin \vartheta_n} d\chi ds.$$

Dabei ist  $\varphi_n^{**}$  eine Abkürzung für das retardierte  $\varphi_n$ , nämlich

$$(63) \quad \varphi_n^{**} = \varphi_n + \frac{\omega D_n}{\beta^2 c_\infty} - \frac{\omega u_\infty}{\beta^2 c_\infty^2} (x - \bar{x}),$$

und ausserdem

$$(64) \quad \begin{aligned} \vartheta_n &= \varphi - \varphi_n^{**} - \chi; \quad \beta^2 = 1 - u_\infty^2 / c_\infty^2; \\ D_n^2 &= (x - \bar{x})^2 + \beta^2 r^2 + \beta^2 s^2 - 2\beta^2 r s \cos \vartheta_n; \end{aligned}$$

Die Schraubenfläche des Propellerflügels ist durch  $\bar{x} = R_o \chi$  gegeben.  $\chi_h, \chi_v$  bezeichnen die Flügelberandung (Abb. 6).

Das Potential  $\phi_1$  ist aus (61) mit (11) direkt zu entnehmen, wenn man bedenkt, daß  $\partial/\partial t = -\omega \partial/\partial \varphi_m$  ist.

Das Potential  $\phi_2$  ergibt sich aus (62) durch Integration der Gl. (11). [3], [5].

Der Potentialanteil  $\phi_4$  ist durch die Inhomogenität der Wellengleichung (10) bedingt. Nach der Kirchhoffschen Lösungsformel ergibt sich (vgl. [3]):

$$(65) \left\{ \begin{aligned} \Phi_4 &= - \frac{1}{4\pi} \iiint_{(\mathcal{L})} \left\{ (u_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} - \omega \frac{\partial}{\partial \varphi_0}) \left[ \ln \left( 1 + \alpha_\infty \frac{\rho_\infty^{1+\lambda}}{\rho^{1+\lambda}} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1+\lambda)\alpha_\infty}{(1+\alpha_\infty)^2} \rho \right] \right\} \cdot \frac{1}{D} \sigma d\sigma d\psi d\xi ; \\ \text{mit} \quad D^2 &= (x-\xi)^2 + \beta^2 z^2 + \beta^2 \sigma^2 - 2\beta^2 z \sigma \cos(\varphi - \psi) . \end{aligned} \right.$$

In dem Integranden von (65) ist die Differentiation nach  $\xi$  vor der  $\varphi_0$ -Retardierung auszuführen. Hinsichtlich des Integrationsgebietes  $(\mathcal{L})$  kann man sich auf die unmittelbare Umgebung des Propellers beschränken, da der Integrand mit zunehmendem Abstand schnell gegen Null geht. Aus (11) folgt die Druckfunktion

$$(65') \quad p_4 = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} \left( \omega \frac{\partial \Phi_4}{\partial \varphi_0} - u_\infty \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} \right) .$$

Wir kommen nun zu dem durch die Stossfläche auf der Saugseite der Propellerflügel bedingten Feldanteil  $\phi_3$  bzw  $p_3$ . Es ist zweckmässig und bei schwach belasteten Propellern ausreichend genau, diese Stossfläche als reguläre Schraubenfläche anzusetzen, die auf einem mittleren Radius  $s_1$  (z.B.  $s_1 = 0,7R_0$ ) senkrecht auf der Flügelfläche steht. (vgl. Abb. 9 sowie die entsprechenden Überlegungen aus [3]). Sie hat die Form

$$(66) \quad \mathcal{H}_{s_1}(s, \chi, \varphi_n) = \left[ k_0 \chi_{s_1}(\varphi_n) + \frac{s_1^2}{k_0^2} (\chi_{s_1}(\varphi_n) - \chi) \right] \mathcal{H}_x + s \cos(\varphi_n + \chi) \mathcal{H}_y + s \sin(\varphi_n + \chi) \mathcal{H}_z .$$

mit

$$k_1 = - \frac{s_1^2}{k_0} = s \tan(\delta_1 - \frac{\pi}{2}) ; \quad s^2 \tan \delta = s_1^2 \tan \delta_1 .$$

$k_1$  ist der Steigungsparameter der Schraubenfläche (66). (Abb. 8). Bei instationärer Flügelbelastung wird der Fusspunkt  $\chi_{s_1}$  der Stossfläche auf dem Flügel von dessen momentaner Winkelstellung  $\varphi_n$  abhängen. Die Stossfläche führt dann ausser der gleichförmigen Rotation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  noch niederfrequente durch das Nachstromfeld bedingte periodische Schwingungen (vgl. Abb. 7) um eine mittlere Lage  $(\chi_{s_1})_0$  aus. In guter Näherung darf vorausgesetzt werden, daß die Amplitude dieser Schwingungen klein ist; und zwar soll

$$(67) \quad \frac{\omega R_0}{c_\infty} \left| \frac{d\chi_{s_1}}{d\varphi_n} \right| \ll 1$$

angenommen werden.

Es ist dann möglich, bei der üblichen [5] Lösung der Wellenglei=

chung für bewegte Quellelemente die  $\varphi_n$ -Retardierung von  $\chi_{s+}(\varphi_n)$  zu vernachlässigen. Um die Diskontinuitäten der Strömungsgrößen an der Stossfläche wiederzugeben, belegen wir die Fläche entsprechend der in Abschnitt 1 erläuterten allgemeinen Methode mit Quellen und mit Dipolen, deren Achsen normal zur Stossfläche liegen. Der Ansatz für den durch eine Stossfläche (66) bedingten Potentialanteil  $\phi_3$  lautet:

$$(68) \quad \phi_3 = - \frac{1}{4\pi} \iint_{(M_{s+})} \left\{ \frac{q(s, \chi, \varphi_n^{**})}{D_n + \frac{\omega_1 s}{c_\infty} \sin \vartheta_n} + \left( \sin \delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos \delta_1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{m(s, \chi, \varphi_n^{**})}{D_n + \frac{\omega_1 s}{c_\infty} \sin \vartheta_n} \right\} \frac{s dx ds}{\sin \delta_1}.$$

$D_n$ ,  $\vartheta_n$  und  $\varphi_n^{**}$  haben die durch Gl.(63), (64) erläuterte Bedeutung; allerdings ist jetzt  $\bar{x} = k_1 x + (k_0 - k_1) \chi_{s+}(\varphi_n)$ .

Um den Charakter von  $\phi_3$  als Lösung der homogenen Wellengleichung (10) zu erhalten, ist die Integration in (68) über feste von der momentanen Flügelstellung  $\varphi_n$  unabhängige Grenzen zu erstrecken. Etwa (vgl. Abb.7):

$$(69) \quad \chi_A \leq \chi \leq \chi_E ; \quad s_A \leq s \leq s_E.$$

Dabei stellen  $\chi_A, \chi_E, s_A$  und  $s_E$  die äussersten Grenzen dar, die von der Stossfläche bei ihrer Schwingungsbewegung  $\chi_{s+}(\varphi_n)$  angenommen werden.

Dennoch lässt sich mit (68) entsprechend der Realität eine in ihrer Ausdehnung und Lage sowie Intensität von der momentanen Flügelstellung  $\varphi_n$  abhängige Stossfläche beschreiben. Wie wir noch sehen werden, können die Diskontinuitäten des Strömungsfeldes an der Stossfläche direkt durch  $q$  und  $m$  dargestellt werden. Ausserhalb der Stossfläche verschwinden  $q$  und  $m$ . Man braucht daher  $q$  und  $m$  nur für  $0 \leq \varphi_n \leq 2\pi$  im Bereich (69) in Fourierreihen der Form

$$(70) \quad q(s, \chi, \varphi_n) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} q_v(s, \chi) e^{i v \varphi_n},$$

entwickeln derart, daß ausserhalb des momentanen Stossflächenbereichs für  $q$  und  $m$  der Wert Null vorgeschrieben wird.

Für den einfacheren Fall der Tragflügelströmung wurde diese Methode bereits erfolgreich numerisch durchgeführt. [2].

Die Aufpunkte auf beiden Seiten der Stossfläche sind durch

$$(71) \quad x = k_1 \chi + (k_0 - k_1) \chi_{s+} + \varepsilon_1 \frac{1}{2} \sin \delta_1 ; \quad \varphi = \varphi_n + \chi + \varepsilon_1 \cos \delta_1$$

mit  $\epsilon_g \delta_1 = u_1 / \omega r$  gegeben. (Abb. 11). Dabei entspricht  $\epsilon_1 > 0$  der Unterschallseite und  $\epsilon_1 < 0$  der Überschallseite des Stosses. Wie eine längere Rechnung zeigt (vgl. den Anhang), gilt für die Diskontinuitäten des Potentials und dessen Ableitung in Normalenrichtung:

$$(72) \quad \begin{aligned} \partial[\phi_3] &= \frac{m(r, \chi^*, \varphi_n)}{1 - (u_1^2 + \omega^2 r^2) / c_\infty^2} ; \\ \partial\left[\frac{\partial\phi_3}{\partial n}\right] &= \frac{q(r, \chi^*, \varphi_n)}{1 - (u_1^2 + \omega^2 r^2) / c_\infty^2} - \frac{2 \dot{m}(r, \chi^*, \varphi_n) \omega \sqrt{u_1^2 + \omega^2 r^2}}{c_\infty^2 (1 - (u_1^2 + \omega^2 r^2) / c_\infty^2)^2} . \end{aligned}$$

$\dot{m}$  bezeichnet die Ableitung nach  $\varphi_n$ .

Wir zeigen nun, daß  $m$  und  $q$  durch die Stossrelationen eindeutig bestimmt sind. Als Ableitungen des Potentials in den tangentialen Richtungen auf der Stossfläche haben wir  $\frac{\partial\phi_3}{\partial \chi}$  und  $\frac{\partial\phi_3}{\partial y_2}$  (vgl. Abb. 8). Bei der Bildung der letzteren Ableitung ist zu bedenken, daß auf der Fläche  $\mathcal{M}_{st}$  gilt

$$\chi(\chi^*) = k_1 \chi^* + (k_0 - k_1) \chi_{st} ; \quad \varphi(\chi^*) = \varphi_n + \chi^* .$$

Also folgt mit  $k_1 = 2 \epsilon_g (-\delta_1)$ :

$$(73) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\phi_3}{\partial y_2} &= -\frac{\sin\delta_1}{r} \frac{\partial\phi_3}{\partial\varphi} + \omega\delta_1 \frac{\partial\phi_3}{\partial\chi} = -\frac{\sin\delta_1}{r} \left( \frac{\partial\phi_3}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\chi^*} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\phi_3}{\partial\chi} \frac{\partial\chi}{\partial\chi^*} \right) = -\frac{\sin\delta_1}{r} \frac{\partial\phi_3}{\partial\chi^*} . \end{aligned}$$

Aus (72) erhalten wir dann die Diskontinuitäten der Tangentialgeschwindigkeit an der Stossfläche:

$$(74) \quad \begin{aligned} \partial\left[\frac{\partial\phi_3}{\partial y_2}\right] &= -\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 r^2}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\chi^*} \frac{m(r, \chi^*, \varphi_n)}{1 - (u_1^2 + \omega^2 r^2) / c_\infty^2} ; \\ \partial\left[\frac{\partial\phi_3}{\partial r}\right] &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{m(r, \chi^*, \varphi_n)}{1 - (u_1^2 + \omega^2 r^2) / c_\infty^2} . \end{aligned}$$

Die Gln. (74) stehen in Übereinstimmung mit den Stossrelationen (33), (34) für die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten. Um das einzusehen, ist zunächst zu bedenken, daß an der Stossfläche  $\mathcal{M}_{st}$  nur der Anteil  $\phi_3$  dieses Strömungsfeldes einen Sprung aufweist, während die übrigen Summanden stetig sind. Es gilt also mit  $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$ :

$$(75) \quad \partial[\phi_3]_{\mathcal{M}_{st}} = \partial[\phi]_{\mathcal{M}_{st}} ; \quad \partial\left[\frac{\partial\phi_3}{\partial n}\right]_{\mathcal{M}_{st}} = \partial\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{\mathcal{M}_{st}} , \text{ usw.}$$

Im Rahmen der Theorie schwach belasteter Propeller darf in Gl. (33)

(34)  $\tilde{w}_n \approx \sqrt{u_1^2 + \omega^2 r^2}$  und  $(\rho)_m / \tilde{\rho} \approx 1$  gesetzt werden. Ausserdem



ist sinngemäss (vgl.S.9.)  $x_I = z$ ,  $x_{II} = -y_2$  und  $x_n = y_1$  (Abb.8). Mit (75) folgt dann

$$(76) \quad \begin{aligned} \hat{w}_I - \tilde{w}_I &= + \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right] = - \frac{h(z)}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \right)_m ; \\ \hat{w}_{II} - \tilde{w}_{II} &= - \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} \right] = + \frac{h(z)}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_2 \partial t} \right)_m , \end{aligned}$$

wenn wir noch beachten, daß in Anbetracht des niederfrequenten Charakters der Stossbewegung  $\tilde{w}$  alle Glieder  $\sim h \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$  weggelassen werden können. (vgl.S.10). Führen wir nun mit

$$(77) \quad \tau_* = h [u_1^2 + \omega^2 z^2]^{-1/2}$$

eine von  $r$  unabhängige Durchtrittszeit  $\tau_*$  der Strömungsteilchen durch den Stossbereich ein, so folgt mit (72) bis (77)

$$(78) \quad \frac{m(z, \chi^*, \varphi_n)}{1 - (u_1^2 + \omega^2 z^2)/c_\infty^2} = - \tau_* \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_m = \frac{\omega \tau_*}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \varphi_n} \right).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß der durch (78) bestimmte  $m$ -Wert mit der Stossrelation (32) der Normalkomponente des Impulssatzes zu vereinbaren ist.

Zunächst ergibt sich aus Gl.(11) mit  $u_\infty \approx u_1$  für die Diskontinuität der Druckfunktion  $p$  an der Stossfläche<sup>\*)</sup>

$$(79) \quad \begin{aligned} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \partial[\rho]_{n_{st}} &= \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \partial[\rho_3] = - \omega \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi} \right] - \\ &- (u_1 + \omega \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n}) \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right] + \omega \partial [\phi_3(\dot{m})] = - \left( \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2} + \right. \\ &+ \frac{u_1 \omega}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n} \left. \right) \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} \right] - \omega \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n} \frac{\omega z}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \frac{\omega m(z, \chi^*, \varphi_n)}{1 - (u_1^2 + \omega^2 z^2)/c_\infty^2} . \end{aligned}$$

Andererseits liefert die Stossgleichung (32) für einen schwach belasteten Propeller mit  $(\rho)_m \approx \rho_\infty$  und<sup>\*)</sup>

$$(80) \quad w_n \approx \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2} + \frac{u_1 \omega}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n} ,$$

unter Berücksichtigung von (75):

<sup>\*)</sup> Mit  $\tan \delta_1 = u_1/\omega z$  ist  $\partial/\partial x = \sin \delta_1 \partial/\partial y_1 + \cos \delta_1 \partial/\partial y_2$ .

Bei schwach belasteten Propellern werden sämtliche Produkte von induzierten Geschwindigkeiten vernachlässigt. Da in vielen Fällen auch  $\omega \partial \bar{x}/\partial \varphi_n$  die Grössenordnung einer vom Propeller induzierten Geschwindigkeit nicht überschreiten dürfte, kann in (79) bis (82) auch auf die Terme mit  $\omega \partial \bar{x}/\partial \varphi_n$  verzichtet werden.  $\partial \bar{x}/\partial \varphi_n = (\bar{x}_0 - \bar{x}_1) dx_{s1}/d\varphi_n$ .

$$(81) \quad \frac{1}{\rho_\infty} \partial[\rho]_{st} = - \left( \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2} + \frac{\omega u_1}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n} \right) \partial \left[ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1} \right] - \tau_* \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1 \partial t} \right)_m.$$

Für  $h$  wurde die Relation (77) eingesetzt;  $y_1$  ist die Koordinate in Richtung normal zur Stossfläche,  $y_2$  tangential zur Stossfläche. (vgl. Abb. 8). Bedenkt man, daß in sehr guter Näherung gilt  $\partial[\rho]_{st} = \rho_\infty \partial[\rho_3]$ , und berücksichtigt ausserdem Gl. (78), so verlangt die Übereinstimmung der Formeln (79) und (81):

$$(82) \quad \omega \frac{\partial m}{\partial \varphi_n} = \frac{\partial m}{\partial y_1} \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2} + \omega \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n} \cos \delta_1 \cdot \frac{\partial m}{\partial y_2}.$$

Die Bedingung (82) ist in der Tat erfüllt; man braucht nur zu bedenken, daß gilt:  $\partial \varphi_n = -\omega \partial t$ ;  $\partial y_1 / \partial t \approx -\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}$ ;  $\partial y_2 / \partial t = \cos \delta_1 \cdot \partial \bar{x} / \partial t$ .

Somit kann die noch unbekannte Belegung  $q$  eindeutig aus Gl. (79) oder (81) bestimmt werden. Man erhält nach einigen Zwischenrechnungen, wenn noch Terme der Ordnung  $\frac{\omega}{c_\infty} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n}$ ,  $(\omega \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n})^2$ , u. s. w. vernachlässigt werden, (vgl. (67), endgültig:

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} q &= - \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} \partial[\rho_3] \left( 1 - \frac{u_1^2 + \omega^2 z^2}{c_\infty^2} \right) \left( \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2} + \frac{u_1 \omega \partial \bar{x} / \partial \varphi_n}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \right)^{-1} + \\ &+ \frac{\omega^2 \tau_*}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi_n^2} \right)_m + \frac{u_1 \omega^3 \tau_*}{\sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varphi_n} \left( \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi_n \partial x} \right)_m - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi_n^2} \right)_m \right); \\ m &= \omega \tau_* \left( \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_n} \right)_m. \end{aligned} \right.$$

Mit den Belegungen  $q$  und  $m$  gemäss (83) ergibt sich das Geschwindigkeitspotential der Stossflächen des N-flügeligen Propellers in der Form

$$(84) \quad \phi_3 = - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{s_A}^{s_E} \int_{\chi_A}^{\chi_E} \left\{ \frac{q(s, \chi, \varphi_n^{**})}{D_n + \frac{\omega^2 s}{c_\infty} \sin \delta_n} + \left( \sin \delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos \delta_1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{m(s, \chi, \varphi_n^{**})}{D_n + \frac{\omega^2 s}{c_\infty} \sin \delta_n} \right\} \frac{s dx ds}{\sin \delta_1};$$

Die zugehörige Druckfunktion ist:

$$(84') \quad \rho_3 = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} \left( \omega \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi_n} - u_\infty \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right).$$

Die Druckfunktion des gesamten Strömungsfeldes ist dann gegeben durch

$$(85) \quad p = 1 - u_{\infty} \varphi_w / p_{\infty} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 .$$

Setzt man die einzelnen Feldanteile (61), (62), (65') und (84') ein, so entsteht aus (85) eine iterativ auflösbare nichtlineare Integralgleichung zur Berechnung der Druckfunktion  $p$ .

Numerische Ergebnisse solcher Druckfeldberechnungen liegen zur Zeit nur für homogen angeströmte, also stationär belastete Propeller vor, ohne Berücksichtigung der hochfrequenten auf Blasenschwingungen beruhenden Anteile des Strömungsfeldes. [3]. Für die Einzelheiten dieser Rechnungen kann auf die genannte Arbeit verwiesen werden. Die Abb. 12 bis 14 zeigen den typischen Verlauf solcher Druckverteilungen auf der Saugseite des Propellerflügels. Dabei handelt es sich um einen Propeller mit folgenden Daten:

$N = 4$  ;  $u_{\infty} / \omega R_0 = 1/4$  ;  $R_1 / R_0 = 0,2$  ;  $\alpha_u = -\alpha_v = 0,4$  ;  $\lambda = 1$  ;  
 $p_{\infty} = 1 \text{ kp/cm}^2$  ;  $p_v = 0,03 \text{ kp/cm}^2$  ;  $\alpha_{\infty} = 10^{-4}$  ;  $\varphi_w \omega^2 R_0^2 / p_{\infty} = 14$  .  
 Schubbelastungsgrad  $C_s = 0,66$  .

Der  $\varepsilon$  -Wert charakterisiert den Abstand der Aufpunkte vom Flügel; es gilt mit  $t_3 \delta = u_{\infty} / \omega r$  :  $x = \frac{u_{\infty}}{\omega} x'' + \varepsilon r \cos \delta$  ;  $\varphi = \varphi_0 + x'' - \varepsilon \sin \delta$  . Ähnlich wie bei den Druckfeldern gashaltiger Wasserströmungen an Tragflügelprofilen [1], [2] treten die wesentlichen Abweichungen vom inkompressiblen Zustand (in Abb. 12 bis 14 gestrichelt gezeichnet) in der Umgebung des Stosses hinter dem lokalen Überschallbereich auf.

Solche Stösse mit ihrem steilen Druckanstieg führen (bei genügender Intensität) zu einem Zusammenfall der Kavitationsblasen oder Kavitationsschichten am Propellerflügel. Diese Erscheinung lässt sich in Gestalt einer scharfen Begrenzung der Kavitationszone auf dem Propellerflügel beobachten. Nach entsprechenden Photographien gezeichnet ist in Abb. 15 für den HSVA-Propeller 1283 bei zwei verschiedenen Kavitationszahlen  $(p_{\infty} - p_v) / (\varphi_w \omega^2 R_0^2)$  eine derartige scharfe Begrenzung des Kavitationsgebietes dargestellt. Für Einzelheiten vgl. [4]. Qualitativ lassen sich diese Beobachtungen durchaus mit Druckverteilungen des in Abb. 12 bis 14 gezeigten Typs in Einklang bringen. Ein quantitativer Vergleich ist nicht möglich, da einerseits das Druckfeld am Flügel des Propellers 1283 nicht ge-

messen wurde und andererseits auch die numerische Rechnung nur für einen Propeller mit anderer Flügelform vorliegt. Ausserdem ist zu bedenken, daß im Rahmen der hier entwickelten linearisierten Theorie der Einfluss der induzierten radialen Geschwindigkeitskomponente auf das Druckfeld vernachlässigt wird. Letzteres kann somit in der Umgebung der Flügelspitzen für  $r/R_0 \gtrsim 0,93$  nicht mehr richtig erfasst werden, denn in diesem Bereich haben die Radialgeschwindigkeiten des Spitzenwirbels erhebliche Bedeutung. [5].

### 5. Anhang

Es ist nun noch der Beweis für die Diskontinuitätsrelationen (72) an der Stossfläche nachzutragen. Hinsichtlich der grundsätzlichen Methode kann auf die frühere Arbeit [3] verwiesen werden. Offensichtlich kann eine Diskontinuität nur bei dem Summand des Aufpunktflügels vorliegen, den wir mit  $n=0$  bezeichnen. Für die Untersuchung der Sprungrelation ist lediglich der Integrationsbereich in der unmittelbaren Umgebung des Aufpunktes massgebend, also

$$(86) \quad \text{Teil} \iint_{(u, s)} \dots \frac{s dx ds}{\sin \delta_1} = \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} \frac{s ds}{\sin \delta_1} \int_{x^*-\Delta x}^{x^*+\Delta x} \dots dx$$

Die Grundlösung

$$(87) \quad \Lambda = [D_0 + \frac{\omega z s}{c_\infty} \sin \vartheta_0]^{-1}$$

der Wellengleichung für ein Quellelement auf der Stossfläche genügt wegen der Voraussetzung (67) wie früher [3] der Gleichung

$$(88) \quad \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y_1^2} \left( 1 - \frac{u_1^2 + \omega^2 z^2}{c_\infty^2} \right) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y_2^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \right) = 0,$$

mit den Ableitungen normal und tangential zur Fläche (vgl. Abb. 8)

$$(89) \quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \sin \delta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos \delta_1}{z} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = \cos \delta_1 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sin \delta_1}{z} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

An Stelle von  $y_1$  und  $y_2$  können in Gl. (88) auch  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  treten:

$$(89') \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_1} = \sin \delta_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\cos \delta_1}{s} \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_2} = \cos \delta_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\sin \delta_1}{s} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Die Substitution

$$(90) \quad s - z = |\varepsilon_1| z \tau, \quad x - x^* = |\varepsilon_1| \tau$$

liefert nach elementarer Zwischenrechnung für die Aufpunkte (71) in der Umgebung der Stossfläche:

$$(91) \quad x - \bar{x} = |\varepsilon_1| z (\tau \operatorname{ctg} \delta_1 \pm \sin \delta_1); \\ \varphi - \varphi_0 - \chi = |\varepsilon_1| (-\tau \pm \cos \delta_1),$$

mit + für  $\varepsilon_1 > 0$  und - für  $\varepsilon_1 < 0$ . Ferner wird

$$(92) \quad \Lambda = \frac{1}{2|\varepsilon_1|} \left[ 1 + \left( \varepsilon^2 + \frac{\tau^2}{\sin^2 \delta_1} \right) \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right) \right]^{-1/2}$$

In dem für die Diskontinuität massgebenden Integrationsbereich (86) gilt unter Beachtung von  $\delta_1(s) \approx \delta_1(z)$  bis auf Glieder höherer Ordnung in  $\varepsilon_1$ :

$$(93) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} = -\varepsilon_1 \tau \Lambda^3 ;$$

$$\frac{\partial m}{\partial y_1} = \frac{u_1}{c_\infty} \dot{m} \cdot \log \delta_1 \left( \varepsilon_1 \Lambda - \frac{1}{2} \frac{u_1}{c_\infty} \frac{1}{\sin \delta_1} \right) \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right)^{-1}$$

Eine Betrachtung von  $\phi_3$  unter Berücksichtigung der Formeln (91) bis (93) zeigt, daß nur der Anteil von  $\frac{\partial \Lambda}{\partial y_1}$  einen Beitrag zur Diskontinuität liefert, und zwar ist

$$(94) \quad -\frac{1}{4\pi} \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} \frac{s ds}{\sin \delta_1} \int_{x'-\Delta x}^{x'+\Delta x} m \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} dx = \pm \frac{1}{4\pi} m(z, x', \varphi_0) \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon d\tau / \sin \delta_1}{\sqrt{1 + \left( \varepsilon^2 + \frac{\tau^2}{\sin^2 \delta_1} \right) \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right)}}^3 = \pm \frac{1}{2} \frac{m(z, x', \varphi_0)}{1 - \frac{u_1^2 + \omega^2 \tau^2}{c_\infty^2}},$$

mit + für  $\varepsilon_1 > 0$  und - für  $\varepsilon_1 < 0$ . Das ist genau der erste Teil der Behauptung (72).

Aus (94) folgt auch, daß die Ableitung  $\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}$  des Potentials bezüglich der Belegung  $q$  die in (72) angegebene Diskontinuität besitzt. Es bleibt noch der Anteil der Belegung  $m$  an der Diskontinuität von  $\frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}$  zu untersuchen. Zunächst gilt

$$\left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} \right)_{\delta(z)} = - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y_1 \partial \eta_1} = + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \eta_1^2} - \left( \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_1} ;$$

Der Term

$$\left( \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_1}$$

trägt nichts zur Diskontinuität bei weil

$$\sin \delta_1(z) - \sin \delta_1(s) = |\varepsilon_1| \varepsilon \sin \delta_1(z) \cos^2 \delta_1(z) ;$$

$$\frac{1}{2} \cos \delta_1(z) - \frac{1}{5} \cos \delta_1(s) = |\varepsilon_1| \varepsilon \frac{1}{2} \cos^3 \delta_1(z) ,$$

ist und somit der (94) entsprechende Integrand eine schiefsymmetrische Form bezüglich  $\varepsilon$  hat, also Null ergibt. Der Anteil  $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \eta_1^2}$  wird mit Hilfe der Gl.(88) umgeformt. Unter Berücksichtigung der Relationen

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = - \left( \tau^2 - \frac{\omega^2 \tau \varepsilon}{c_\infty^2} \cos \vartheta_0 \right) (1 - \varepsilon \cos \vartheta_0) \Lambda^3 - \frac{\omega \varepsilon}{c_\infty} \sin \vartheta_0 \cdot \Lambda^2 ;$$



$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial \Lambda}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial s^2}$$

folgt, daß nur die Glieder  $\partial^2 \Lambda / \partial \gamma_2^2$  und  $\partial^2 \Lambda / \partial s^2$  etwas zur Diskontinuität beitragen könnten.

Wenn wir nun bezüglich  $\gamma_2$  und  $s$  partiell integrieren, so bleibt zu berücksichtigen, daß zwar  $d\gamma_2 = -\frac{s dx}{\sin \delta_1(s)}$  ist; aber unter Beachtung der umgekehrten Integrationsgrenzen für  $\gamma_2$  und  $x$  das Minuszeichen wieder weggelassen werden kann. Der für die Untersuchung der Diskontinuität wesentliche Anteil des Integrals

$$- \frac{1}{4\pi} \iint m \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{\delta_1(s)} \cdot \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} \right)_{\delta_1(s)} \cdot \frac{s dx ds}{\sin \delta_1(s)}$$

erhält dann folgende Form:

$$(95) \quad - \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \left( \frac{\partial m}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial m}{\partial s} \frac{\partial \Lambda}{\partial s} \right) \left( 1 - \frac{u_1^2 + \omega^2 s^2}{c_\infty^2} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + m \frac{\partial \Lambda}{\partial s} \frac{\sin \delta_1(s)}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{s}{\sin \delta_1(s)} \frac{1}{1 - (u_1^2 + \omega^2 s^2)/c_\infty^2} \right) \right\} \frac{s dx ds}{\sin \delta_1(s)}.$$

Ausser dem Integral (95) ist bei der Berechnung der durch die Belegung  $m$  bedingten Diskontinuität von  $\frac{\partial \phi}{\partial y_1}$  noch der Anteil

$$(96) \quad - \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \Lambda \frac{\partial^2 m}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} \frac{\partial m}{\partial y_1} \right\} \frac{s dx ds}{\sin \delta_1(s)}$$

zu berücksichtigen. Eine Untersuchung unter Verwendung der Relationen (91), (92) zeigt, daß bis auf Terme, welche bei der Integration für  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  verschwinden, in dem für die Diskontinuität wesentlichen Integrationsbereich (86) folgende Beziehungen gelten:

$$(97) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda \frac{\partial^2 m}{\partial y_1^2} &= \frac{u_1}{c_\infty} \dot{m} \Lambda^2 \frac{d\delta_1}{z} \left( 1 + \frac{\varepsilon_1 z}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1} \right) \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right)^{-1}; \\ \frac{\partial m}{\partial s} \frac{\partial \Lambda}{\partial s} &= - \frac{u_1}{c_\infty} \dot{m} \varepsilon_1^2 z^2 \Lambda^4 z d\delta_1 \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right); \\ \frac{\partial m}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_2} &= - \frac{u_1}{c_\infty} \dot{m} \varepsilon_1^2 z^2 \Lambda^4 \frac{z \cos \delta_1}{\sin^3 \delta_1} \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right). \end{aligned} \right.$$

Wir verwenden die Formeln (93) und (97) zur Berechnung der Integrale (95) und (96) in dem Bereich der Diskontinuität. Eine längere aber elementare Rechnung zeigt dann, daß als einziger diskontinuierlicher Term auftritt: \*)

\*) unter Beachtung von  $u_1^2 \cos \delta_1 / \sin^2 \delta_1 = \omega z \sqrt{u_1^2 + \omega^2 z^2}$ .

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\dot{m}(\tau, \chi^*, \varphi_0)}{2\pi\tau} \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{\cos \delta_1}{\sin^2 \delta_1} \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right)^{-1} \cdot \\
 (98) \quad & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \left( \tau^2 + \frac{\tau^2}{\sin^2 \delta_1} \right) \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right) \right]^{-3/2} \frac{d\tau d\delta}{\sin \delta_1} = \\
 & = \pm \dot{m}(\tau, \chi^*, \varphi_0) \frac{\omega}{c_\infty^2} \sqrt{u_1^2 + \omega^2 \tau^2} \left( 1 - \frac{u_1^2}{c_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \delta_1} \right)^{-2},
 \end{aligned}$$

mit - für  $\varepsilon_1 > 0$  und + für  $\varepsilon_1 < 0$ .

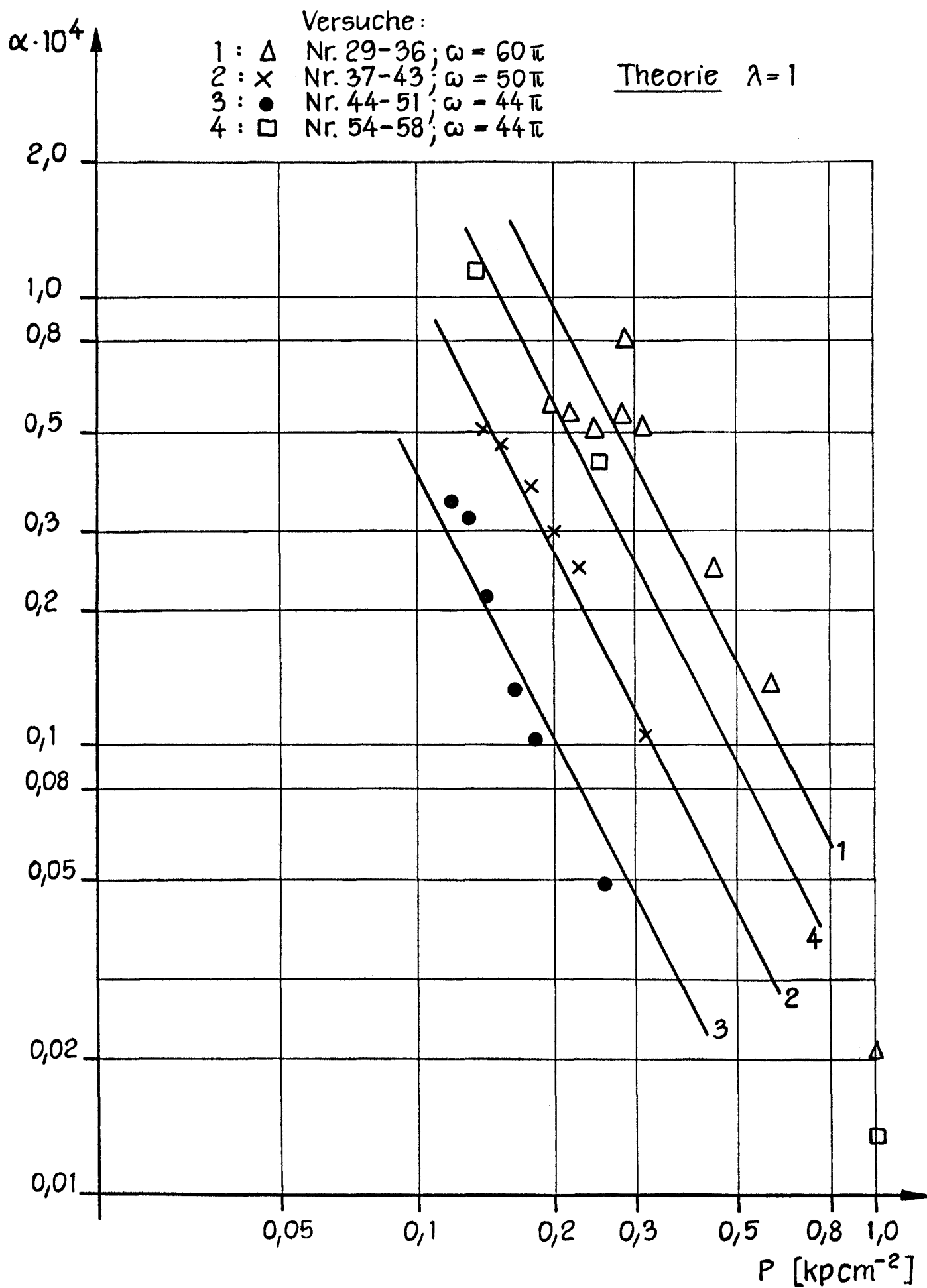
Damit ist die Formel (72) vollständig bewiesen.

-----

Diese Arbeit stellt die vollständige Fassung eines Vortrages auf dem Symposium Transsonicum Göttingen September 1975 dar.

Literatur

- [1] W.H.Isay, Th.Roestel: Berechnung der Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung; Z.angew.Math.Mech. 54 (1974).
- [2] W.H.Isay, Th.Roestel: Die niederfrequent instationäre Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung; Z.angew.Math.Mech. 55 (1975).
- [3] W.H.Isay, Th.Roestel: Das Druckfeld eines Schraubenpropellers in gashaltiger Wasserströmung; Acta Mechanica 21 (1975). Ber.Nr.316 Inst.f.Schiffbau Universität Hamburg (1974).
- [4] A.Keller, E.A.Weitendorf, M.Döhler, G.Ringle: Der Einfluss des ungelösten Gasgehalts auf die Kavitationerscheinungen an einem Propeller und auf die vom Propeller erregten Druckschwankungen; Ber.Nr.321 Inst.f.Schiffbau Universität Hamburg (1975).
- [5] W.H.Isay: Moderne Probleme der Propellertheorie; Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1970.
- [6] J.E.Ffowcs Williams, D.I.Hawkins: Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion; Phil.Trans.Royal Soc. Vol.264 A (1969).
- [7] H.Sockel: Singuläre Lösungen der instationären linearisierten gasdynamischen Gleichung; Z.angew.Math.Mech. 51 (1971).
- [8] W.Bauschke, L.Lederer: Zur numerischen Berechnung der Druckverteilung und der Kräfte an Propellern im Schiffsnachstrom; Ber.Nr.309 Inst.f.Schiffbau Universität Hamburg (1974).
- [9] E.Becker: Gasdynamik; Teubner Verlagsges. Stuttgart 1966.
- [10] J.Zierep: Vorlesungen über theoretische Gasdynamik; Verlag Braun Karlsruhe 1963.  
J.Zierep: Theorie der schallnahen und Hyperschallströmungen; Verlag Braun Karlsruhe 1966
- [11] D.Y.Hsieh: Some analytical aspects of bubble dynamics; Journ.of Basic Engineering 87 (1965).
- [12] A.Shima: The natural frequency of a bubble oscillating in a viscous compressible liquid; Journ.of Basic Engineering 92 (1970).



Propeller 1283  
Gasvolumenverhältnis  $\alpha(P)$

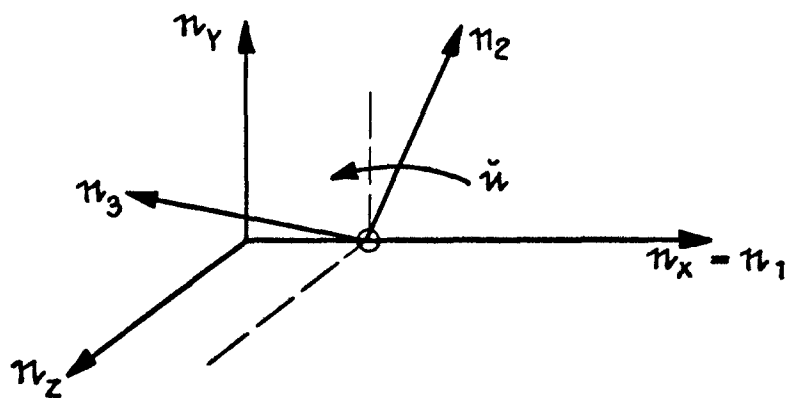


Abb. 2

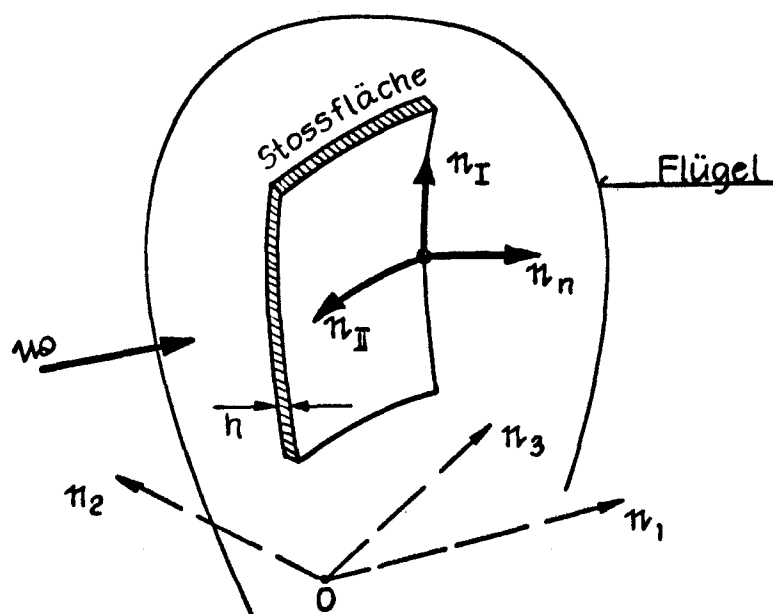


Abb. 3

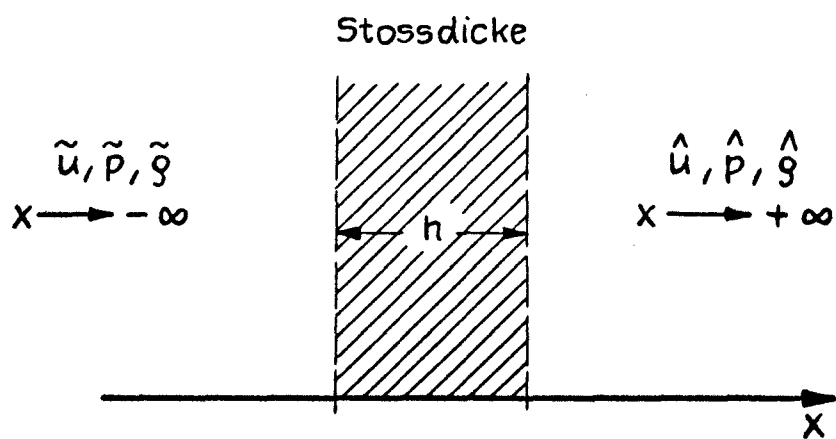


Abb. 4



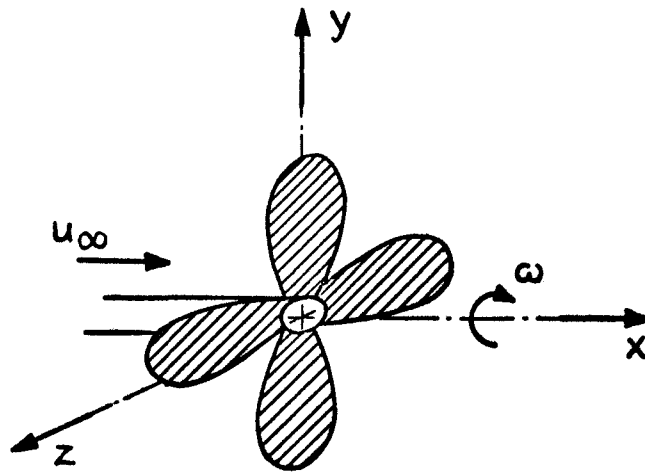


Abb. 5

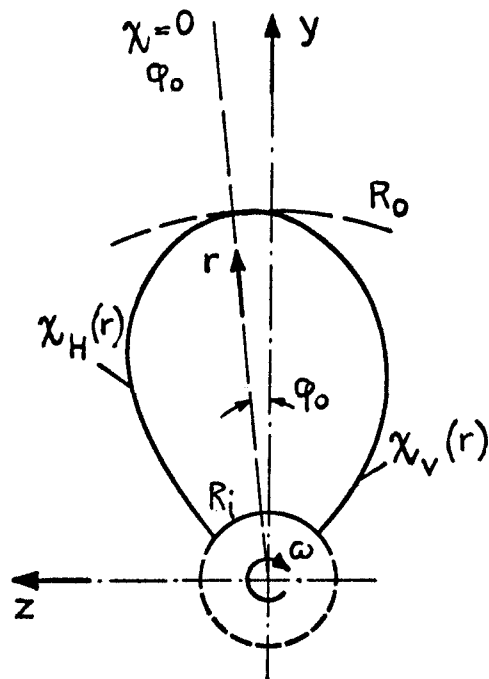


Abb. 6

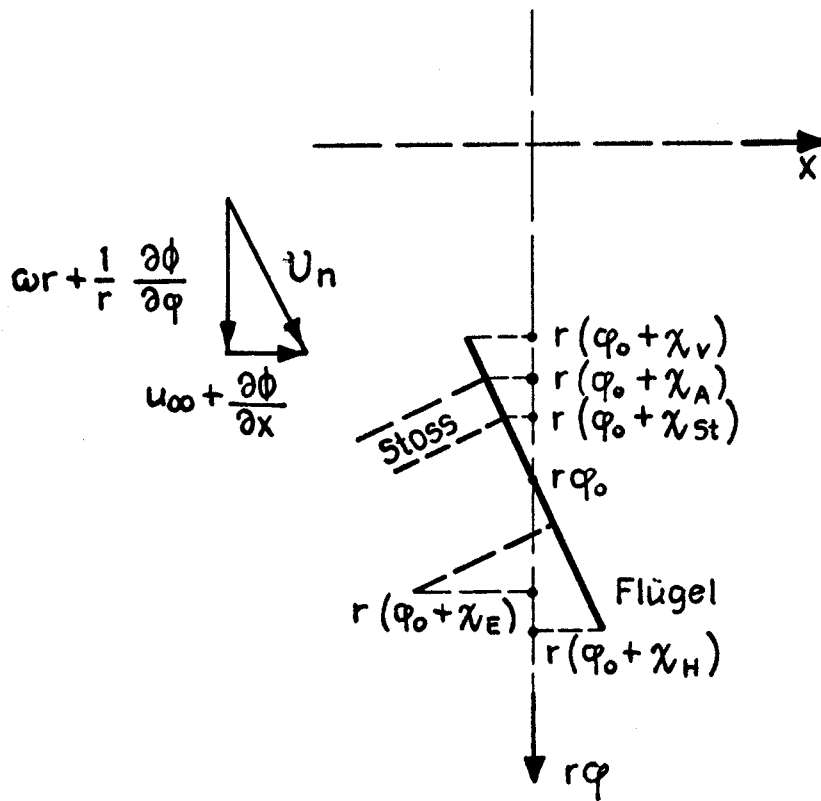


Abb. 7

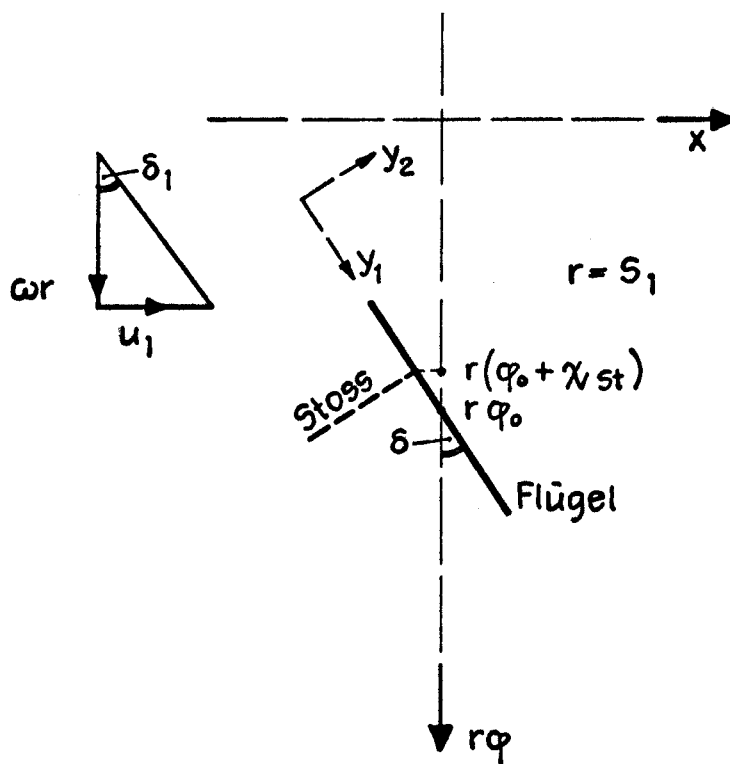


Abb. 8

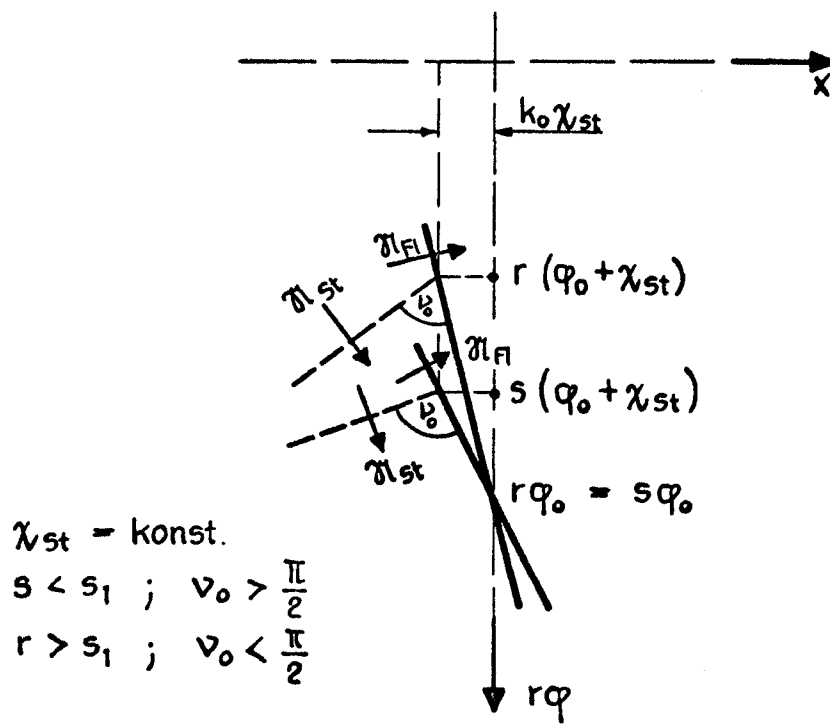


Abb. 9

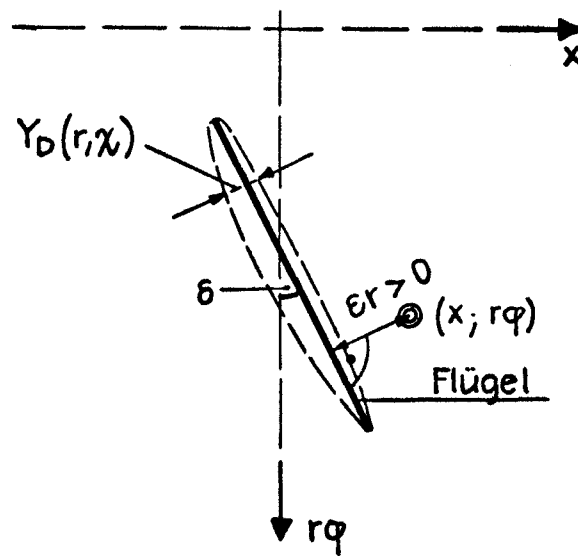


Abb. 10

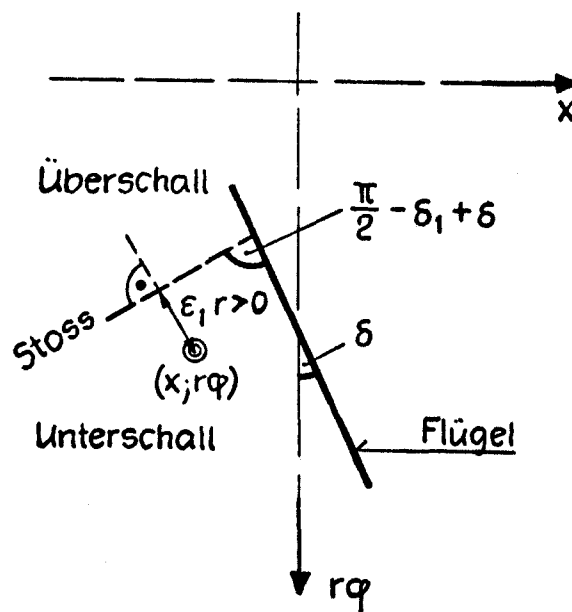
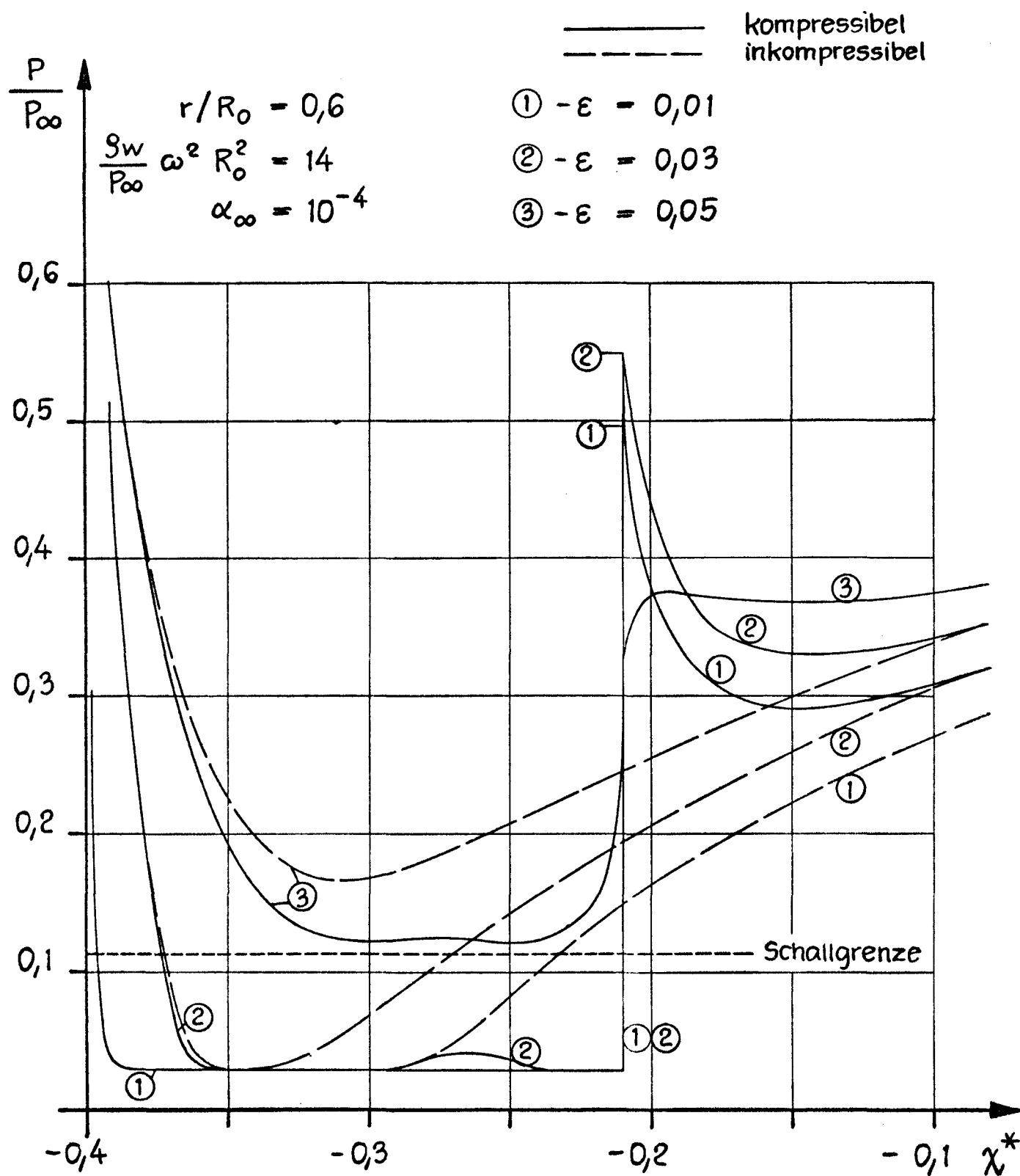
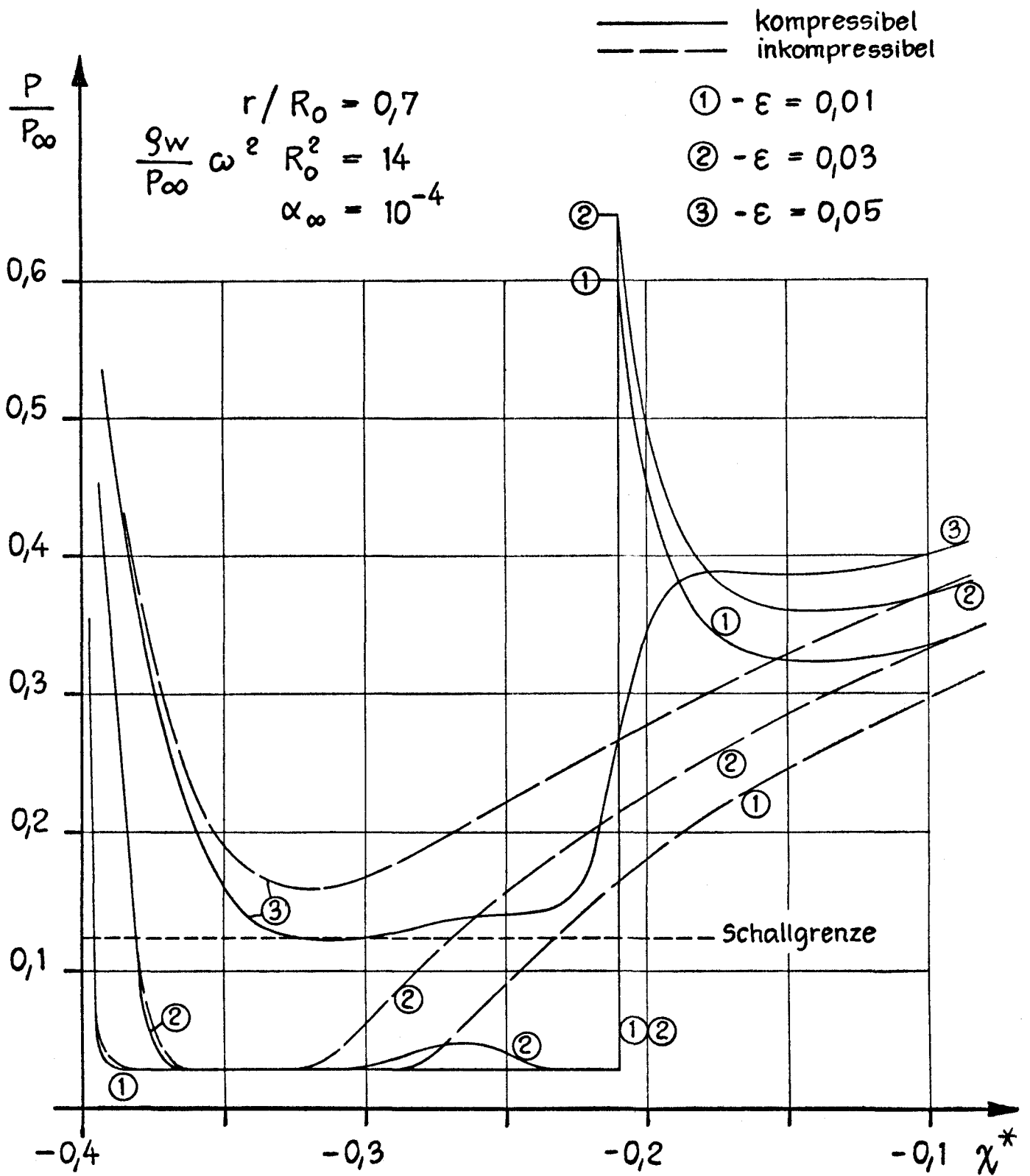


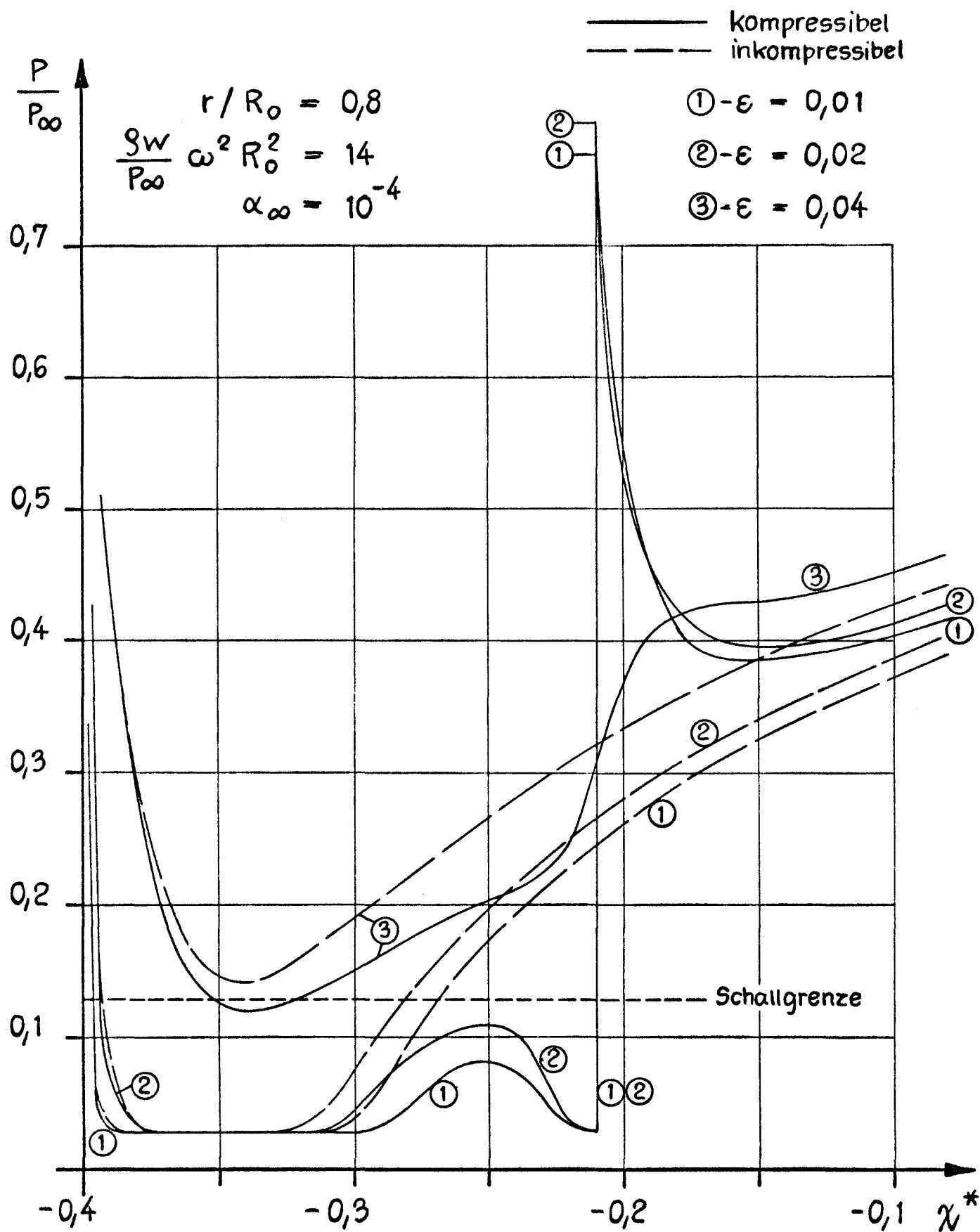
Abb. 11



Beispiel



Beispiel



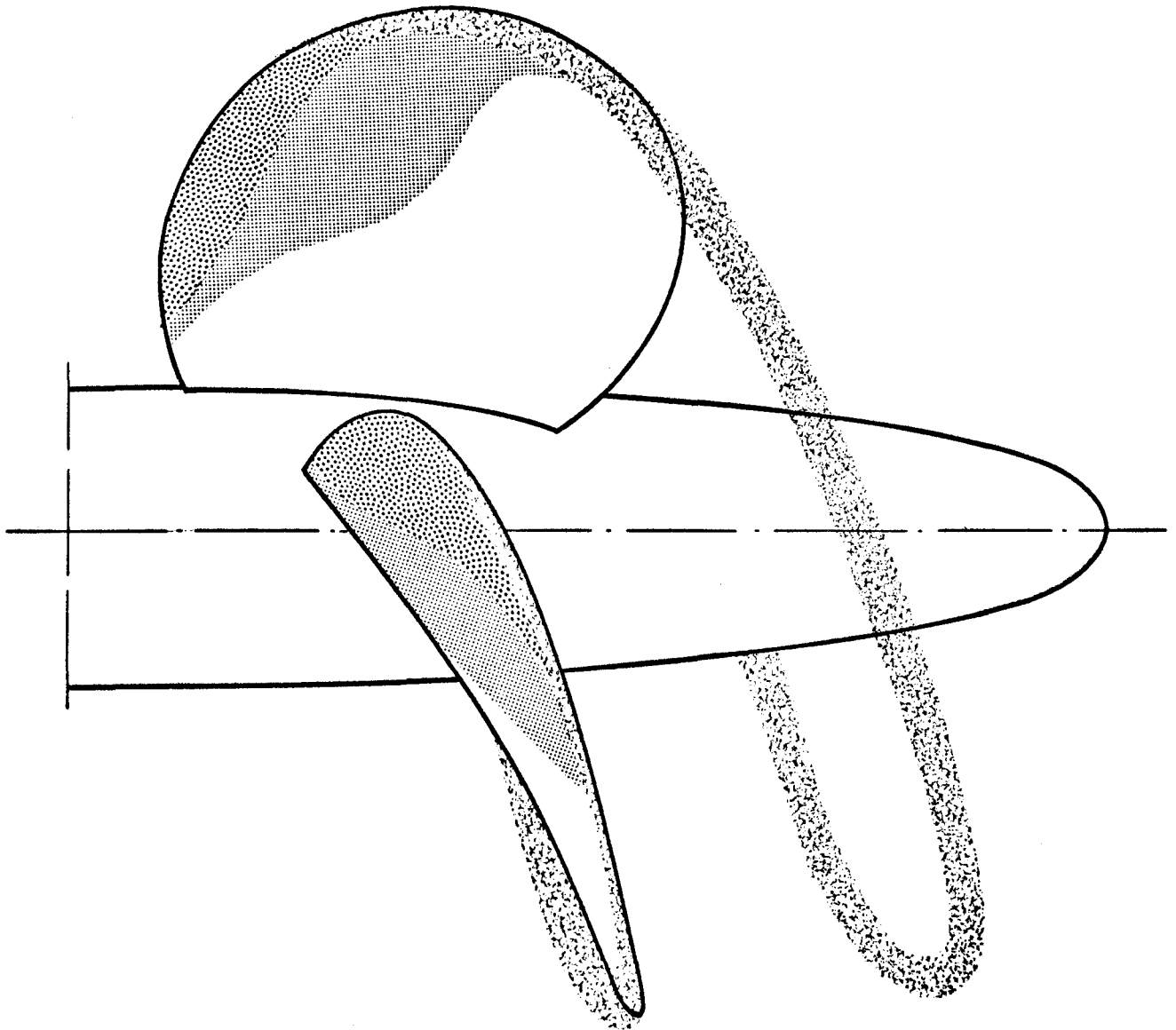
Beispiel

$$N = 3$$

$$\omega = 44\pi$$

$$u_{\infty} / \omega R_0 = 0,23$$

$$\sigma = \frac{P_{\infty} - P_v}{\rho_w \omega^2 R_0^2}$$



Spitzenwirbel :



Schichtkavitation :



$$\sigma = 0,079$$



$$\sigma = 0,053$$

Kavitation am Propeller 1283

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt eine Übersicht über die strömungsmechanischen und thermodynamischen Grundlagen zur Berechnung der Druckfelder gashaltiger Wasserströmungen in der Umgebung von Propellern und Tragflügeln. Als Gasgehalt wird dabei zusammenfassend die im Wasser enthaltene ungelöste Luft und der auf Kavitation beruhende Wasserdampf bezeichnet. Für die Gewinnung einer übersichtlichen Theorie erweist es sich als zweckmässig und möglich, einige Vereinfachungen einzuführen. Hierzu gehört insbesondere die Voraussetzung eines direkten Zusammenhanges zwischen dem Gasvolumenanteil und dem Druck in der Strömung. Damit darf ausserhalb der Stossbereiche Potentialströmung angenommen werden und die Differentialgleichung zur Berechnung des Druckfeldes lässt sich als Wellengleichung mit nichtlinearem Anteil auffassen. Sie kann in eine iterativ auflösbare nichtlineare Integralgleichung transformiert werden. Der Einfluss der Stösse ist durch beschleunigt bewegte Diskontinuitätsflächen zu erfassen.

Der instationäre Charakter der Strömung ist durch die Rotation der Flügel, die Anstellwinkeländerungen (etwa infolge des Schiffsnachstroms) sowie die Schwingungen von Kavitationsblasen bedingt.

Während die ersten beiden Effekte einen niederfrequenten Charakter haben, (unter 150 Hz) liegen die für die Blasendynamik massgebenden Frequenzen im KHz-Bereich (bis 100 KHz).

Es erweist sich daher als notwendig, die Stossrelationen für beschleunigt bewegte Stossbereiche bei hochfrequent instationärer Strömung zu behandeln. Auch eine Abschätzung für die Grössenordnung der Stosssdicke ist in diesem Zusammenhang wesentlich; sie ergibt sich unter Berücksichtigung von Zähigkeits- und Relaxationseinflüssen.

Die entwickelte Theorie wird zur Berechnung der Strömung um rotierende Propellerflügel angewendet und ein numerisches Beispiel diskutiert. Bei dem Vergleich der theoretischen Aussagen mit experimentellen Beobachtungen zeigt sich eine zumindest qualitativ befriedigende Übereinstimmung.



## Summary

The paper gives a review of the hydrodynamic and thermodynamic foundations to calculate the pressure field near propellers and hydrofoils in water with gas content. We summarize as gas content the free air in the water and the vapour occurring from cavitation. In order to obtain a practicable theory it is reasonable and possible, to introduce some simplifications. Especially we assume, that the volume-ratio of gas to water only depends on the local pressure. Then outside of the shock-regions we can treat the problem as a potential flow. The differential-equation to calculate the pressure field is obtained as a wave-equation with a non-linear term; it can be transformed into a non-linear integral-equation, which may be treated by an iterative procedure. The influence of shocks on the pressure field is represented by accelerated moving discontinuity-surfaces.

The unsteady character of the flow is caused by the rotation of the blades, the fluctuations of the angle of attack (due to hull wake) and the oscillations of cavitation bubbles. While the first and the second effect is of low frequency (below 150 Hz), it must be seen that the bubble-dynamics belong to the KHz-range (up to 100 KHz).

Therefore it is necessary, to treat the shock equations for accelerated moving shocks in an unsteady flow of high frequency. In connection with the shock-relations it was important, to get an approximate impression of the shock-thickness taking in account the effects of viscosity and relaxation.

The theory developed here has been adopted to calculate the flow around rotating propeller-blades. The results of a numerical example are discussed. A comparison between theoretical results and experimental observations shows an at least qualitative reasonable agreement.