

475 | Juni 1987

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Martin Steindor

Berechnung der Profilkavitation mit der Theorie für Kavitationsblasen in asymmetrischen Druckfeldern und in Vielblasensystemen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Berechnung der Profilkavitation mit der Theorie für Kavitationsblasen in asymmetrischen Druckfeldern und in Vielblasensystemen

M. Steindor, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1987

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 475

Berechnung der Profilkavitation
mit der Theorie für Kavitationsblasen
in asymmetrischen Druckfeldern
und in Vielblasensystemen

von

Martin Steindor

Juni 1987

ISBN 3 - 89220 - 475 - 6

Copyright Institut für Schiffbau
 Universität Hamburg
 Lammersbeth 90
 D-2000 Hamburg 60

Berechnung der Profilkavitation mit der Theorie für Kavitationsblasen in asymmetrischen Druckfeldern und in Vielblasensystemen

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt das Auftreten von Kavitationserscheinungen an Tragflügelprofilen. Im ersten Teil wird anhand des Aufweitungsvorganges einer einzelnen Blase im inkompressiblen Medium die Frage diskutiert, in wieweit die in der klassischen Blasendynamik übliche Annahme eines homogenen anregenden Druckfeldes im Außenraum ihre Gültigkeit hat angesichts des an der Profilverderrkante auftretenden starken Druckgradienten. Auch wenn die Annahme einer kugelsymmetrischen Blasenform beibehalten wird, führt die Umströmung der Blase zu einer Modifikation des die Volumenänderung hervorrufenden Druckfeldes. Es stellt sich heraus, daß diese Modifikation im wesentlichen durch den starken Druckgradienten hervorgerufene Relativgeschwindigkeit der Blase zur Strömung bedingt ist. Bei keimhaltigem Wasser dürften diese Druckgradienten wegen des Zugspannungsabbaues erheblich unter denen im inkompressiblen Fall liegen; die Relativgeschwindigkeit der Blase zum Wasser und die damit verbundene Modifikation des Druckfeldes ist dann erheblich geringer.

Kavitationsvorgänge unter Berücksichtigung des Keimgehaltes sind Gegenstand des Zweiten Teiles der Arbeit. Bislang gibt es zwei Methoden zur Beschreibung des Kavitationsvorganges an Profilen. In der Profiltheorie wird das Gebiet, in welchem der Profildruck unter dem Dampfdruck liegt, mit dem Kavitationsgebiet gleichgesetzt. Die Umströmung dieses Gebietes wird mit einer zusätzlichen Quell- und Wirbelbelegung realisiert; auf diese Weise wird das Kavitationsgebiet iterativ bestimmt. Die Methode erlaubt mithilfe eines empirischen Ansatzes (Nishiyama-Bedingung) auch die Bestimmung der vertikalen Ausdehnung der Schicht, berücksichtigt aber nicht den eigentlichen physikalischen Vorgang des Aufweitung, insbesondere die Rolle der Keimverteilung. Dies wird von Chao /8/ berücksichtigt, indem die Ausdehnung des Kavitationsgebietes mithilfe der Blasendynamik unter empirischer Berücksichtigung des Zugspannungsabbaues berechnet wird.

Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, die in /8/ entwickelte Methode zu erweitern. Es sollen anstelle von einzelblasen Blasencluster als Ganzes untersucht werden, deren Form allerdings willkürlich vorgegeben ist. Auf diese Weise soll dem Zusammenwachsen der Blasen Rechnung getragen und eine Berechnung der vertikalen Ausdehnung der Kavitationsschicht ermöglicht werden.

Die Ergebnisse wurden mit denen nach der Methode in /8/ erhaltenen, und, was die Schichtdicke angeht, mit der in der Profiltheorie gebräuchlichen Nishiyama-Bedingung verglichen. Es hat sich gezeigt, daß die Ergebnisse für die Schichtdicke erheblich unterhalb der nach der Nishiyama-Bedingung ermittelten Werten liegen. Als Resultat dieses Versuches muß gesagt werden, daß die dargestellte Methode im Vergleich zu bereits existierenden Ansätzen keine Verbesserung darstellt. Die Clustertheorie hat sich jedoch zur Verbesserung des Ansatzes für den Zusammenfall der Kavitationsschicht als brauchbar erwiesen. Dabei wurde das Kavitationsgebiet auf der Strecke, entlang der es zusammenfällt, als ebenes Cluster modelliert. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, daß er für beliebige Profillängen gültig ist, also Maßstabsbetrachtungen zulässt (siehe hierzu auch /17/, Kap. IV.5 und /1/, Kap. 28).

Computation of Cavitation on foils, using the theory of Cavitation Bubbles in asymmetrical pressure fields and of multi-bubble-systems

Abstract

The topic of the present paper are cavitation phenomena on hydrofoils. In the first part there is discussed, with regard to the growing of a single bubble in incompressible liquid, the validity of the classical assumption of a homogenous pressure field surrounding a bubble, in view of the high pressure gradient near the nose of the foil. Even if the assumption of spherical symmetrical shape of the bubble is kept on, the flow around the bubble leads to a modification of the pressure field, causing the motion of the bubble wall. The main result is, that this modification is principal due to the relative motion between the bubble and the fluid, caused by the pressure gradient. In a fluid with normal particle concentration this pressure gradients will be much smaller than in pure liquid because of the reduction of tensile stresses; so the relative motion between water and bubble and therefore the modification of the pressure field also will be much smaller.

Cavitation processes with respect to the particle concentration are the subject of the second part. Till now there are two methods of describing the cavitation process on foils. In the singularity methods the region, in which the incompressible calculated pressure is lower than the equilibrium vapor pressure, is assumed to be the cavitation region. The flow around this region is described by additional sources and vortices; the cavitation region is calculated stepwise in this way. This Method makes possible also the computation of the thickness of the sheet by using the Nishiyama-Condition /1/, but does not take into account the real physical process of the growing of the sheet, especially the role of the particle distribution. This is done by Chao /8/ by computing the cavitation region using the theory of bubble dynamics with respect to the reduction of tensile stresses.

The present paper presents the attempt to extend the in /8/ developed method. Instead of single bubbles there are researched whole clusters of bubbles, whose initial shape, however, must be defined in an arbitrary way. In this way the growing-together of the bubbles will be taken into account, and the computation of the vertical extension of the sheet will be possible. The results are compared with those maintained by the method of Chao, and, with regard to the thickness of the sheet, by the Nishiyama-condition. It has turned out that the results for the cavity thickness are considerable lower than the empirical results according to the Nishiyama- condition. So the result of this attempt is, that the presented Method means no improvement related to earlier attempts.

The theory of clusters was shown to be useful, however, for the description of the collapse of the sheet. The cavitation region along the extent of its collapse is treated as a plane cluster. The advantage of this model is that its validity does not depend on the length of the foil; especially it makes possible the consideration of scale effects (see also /16/, Chap. IV,5 and /1/, Chap. 28).

Inhaltsverzeichnis

1) Einleitung	S.1
2) Verhalten einer einzelnen Blase im Druckfeld eines Tragflügelprofils	S.3
3) Verhalten von Mehrblasensystemen im Druckfeld eines Tragflügelprofils	S.15
a) Beschreibung der Methode nach der Blasendynamik	S.17
b) Beschreibung des Kavitationsvorganges durch die Betrachtung von Blasenclustern	S.18
b1) Gleichungen für die Volumenänderung eines halbkugelförmigen Clusters	S.19
b2) Gleichungen für die Volumenänderung eines zylinderförmigen Clusters	S.22
4) Ansatz für die Beschreibung des Zusammenfalls der Kavitationsschicht unter Berücksichtigung von Maßstabsteffekten	S.26
Litteraturverzeichnis	S.26
Anhang: Erläuterungen zur Berechnung der Integrale in (2.8)	
Abbildungen 1-17	

1) Einleitung

Unter Kavitation versteht man die Bildung gasgefüllter Hohlräume in Flüssigkeiten, z.B. Wasser. Ihre Ursache ist die Verdampfung des Fluids bzw. das Freiwerden der gelösten Luft infolge einer Verminderung des Flüssigkeitsdrucks. Kavitation tritt daher insbesondere da auf, wo in technischen Strömungen Zugspannungen entstehen, z.B. an der Saugseite von Propellerblättern. Das Entstehen von Gasblasen bedingt ein Aufreißen des Molekülverbandes des Wassers. In keimfreiem Wasser wären die dafür erforderlichen Zugspannungen allerdings unrealistisch hoch. Berechnungen zeigen /1/, daß bei für Keimbildungsraten von $1\text{cm}^{-3}\text{sec}^{-1}$ sich ergebenden Radien von 10^{-7} cm eine Zugspannung der Größenordnung von 10^3 bar notwendig wäre. Voraussetzung für das Auftreten von Kavitation unter realistischen Bedingung ist daher das Vorhandensein von Störstellen in der Molekularstruktur des Wassers, z.B. Feststoffkeime. Von der Größe und der Anzahl dieser Verunreinigungen sowie vom gelösten Luftgehalt hängt die Zugfestigkeit des Wassers ab. Auf den Effekt der Herabsetzung der Zugfestigkeit wird in Teil 3) eingegangen. In Teil 2) wird zunächst der Fall einer einzelnen Blase in einem inkompressiblen Fluid betrachtet; wir gehen dabei von folgenden Voraussetzungen aus.

Bei der Berechnung der durch die Blasenwandbewegung induzierten Strömung in der Umgebung der Blase kann der Einfluß des Massenflusses durch die Blasenwand infolge Verdampfung oder Diffusion auf die Strömung vernachlässigt werden. Was die Verdampfung anbetrifft, so läßt sich zumindest bei termischem Gleichgewicht an der Blasenwand zeigen /1/, daß die dadurch bedingte Volumenänderung des Fluids und damit der Einfluß auf das Strömungsfeld vernachlässigbar klein sind. Auch die Diffusion der Luft durch die Blasenwand infolge der Abweichungen vom Sättigungsdruck spielt kaum eine Rolle, weil dieser Vorgang im Vergleich zu den Aufweitungs- und Zusammenfallsvorgängen in Profilströmungen sehr langsam ist.

Die Kompressibilität des Wassers spielt in der letzten Phase des Blasenzusammenfalls eine Rolle, da dann die Blasenwandgeschwindigkeit die Größenordnung der Schallgeschwindigkeit des Wassers erreichen kann. Da wir auf eine genaue Untersuchung dieses Falles verzichten werden und bei Vernachlässigung der Kompressibilität bei radialer Strömung auch der Zähigkeitseinfluß verschwindet, kann das Strömungsfeld als Potentialfeld einer im Blasenmittelpunkt liegenden Quelle der Stärke $Q = \frac{d}{dt}(\frac{4\pi}{3}R^3)$ angesehen werden, so daß für das Potential gilt

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r} = -\frac{R^2 \dot{R}}{r} \quad (1.1)$$

Die zeitliche Änderung des Radius ist dann gegeben durch die Bernoulli'sche Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}_{r=R} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2_{r=R} + \frac{P(R)}{\varrho} = \frac{P_\infty}{\varrho} \quad (1.2)$$

Der Druck an der Blasenwand $P(R)$ bestimmt sich bei Vernachlässigung einer Strömung durch die Blasenwand aus dem Gasdruck und der Oberflächenspannung. Das Gas innerhalb der Blase wird in der klassischen Blasendynamik als räumlich homogenes, ideales Gas angenommen, d.h. der Zustand des Gases hängt nur vom Volumen der Blase selbst ab. Auch diese Annahme ist für große Blasenwandgeschwindigkeiten nicht mehr realistisch. In Bezug auf Einzelheiten muß hier auf /1/ verwiesen werden. Wir werden im folgenden von einem homogenen Gas innerhalb der Blase ausgehen, da eine genaue Untersuchung der letzten Phase des Blasenzusammenfalls nicht von Interesse sein wird. Mit $P(R) = P_{L0}(R_0/R)^3 + P_v - 2\sigma/R$ * folgt schließlich die Differentialgleichung für die Blasenwandbewegung:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P_{L0}(R_0/R)^3 + P_v}{\varrho} - \frac{2\sigma}{\varrho R} - \frac{P_\infty}{\varrho} \quad (1.3)$$

* Streng genommen müßte auch bei inkompressibler radialer Strömung die Zähigkeit mit berücksichtigt werden. Zwar heben sich wegen der Divergenz- und Rotationsfreiheit die zähigkeitsbedingten Spannungsterme weg, jedoch nicht an der Phasentrennfläche. Daher muß der Ausdruck für den Druck an der Blasenwand eigentlich lauten $P(R) = P_{L0}(R_0/R)^3 + P_v - 2\sigma/R - 4\mu \dot{R}/R$. Wir werden diesen Term vernachlässigen, da er nur in der letzten Phase des Zusammenfalls eine Rolle spielt. Für seine nähere Begründung kann auf /1/ und /18/, /19/, Kap. 4 verwiesen werden.

Diese Gleichung gilt offenbar nur für ein kugelsymmetrisches Druckfeld in der Umgebung der Blase, d.h. allenfalls noch für /1/

$$\left(\frac{R}{P}\nabla P\right)^2 \ll 1 \quad (1.4)$$

In Teil 2) der Arbeit soll von dieser Näherung abgegangen werden und die Wirkung des Druckgradienten auf das Verhalten der Blase in die Berechnung mit einbezogen werden.

2) Verhalten einer einzelnen Blase im Druckfeld eines Tragflügelprofils

Wir betrachten im folgenden eine mit der Strömung an einem Tragflügel vorbeigeführte Blase. Dabei ist die durch das Tragflügelpotential induzierte Beschleunigung der Blase zu untersuchen, sowie ihre durch die Änderung des Druckfeldes bedingte Volumenänderung, insbesondere die auf der Saugseite des Profils evtl. entstehende instabile Aufweitung.

Ein Druckgradient in der Grundströmung bewirkt eine resultierende Kraft auf den Blasenmittelpunkt. Zur Rayleigh-Plesset-Gleichung muß man daher noch eine Bewegungsgleichung für den Blasenmittelpunkt aufstellen, um das Verhalten der Blase vollständig beschreiben zu können. Für einen in einem Fluid befindlichen Partikel gilt allgemein:

$$\frac{d}{dt_P}(m_P \vec{v}) + \frac{d}{dt_P}(m_h(\vec{v} - \vec{u})) = - \int_V \nabla P dV_p + \vec{R}, \quad (2.1)$$

wobei \vec{v} die Geschwindigkeit des Partikels, \vec{u} die Geschwindigkeit der Grundströmung ohne Modifikation durch den Partikel, m_P die Masse des Partikels und m_h die hydrodynamische Masse ist, d.h. die infolge der Verdrängung des Wassers durch den Partikel entstehende scheinbare Masse. Der Operator $\frac{d}{dt_P} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ bezeichnet die totale Zeitableitung, bezogen auf den Partikel. \vec{R} ist die infolge der Viskosität auftretende Widerstandskraft. Diese ist nach [6], [7] für schleichende Strömungen, d.h. bei Vernachlässigung der Trägheitskräfte, im Falle eines kugelförmigen Teilchens gegeben durch die Stokes'sche Formel

$$\vec{R} = 6\pi\mu R(\vec{v} - \vec{u}). \quad (2.2)$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Formel ist durch Johnson und Hsieh [1], [10] erweitert worden auf Fälle grösserer Reynoldszahlen $Re = 2 \frac{|\vec{v} - \vec{u}| R}{\nu}$ durch Multiplikation mit einem empirischen Korrekturfaktor, so daß

$$\vec{R} = 6\pi\mu R(\vec{v} - \vec{u})(1 + 0.197 Re^{0.63} + 2.6 \cdot 10^{-4} Re^{1.38}). \quad (2.3)$$

Untersucht man die Volumenaänderung einer Blase im Verlaufe ihrer Trajektorie z.B. an einem Tragflügelprofil, so stellt sich die Frage, was für ein resultierendes Druckfeld sich infolge der Reaktion der Blase auf das Strömungsfeld in ihrer Umgebung ergibt. Für die Druckverteilung an der Wand einer in einer homogenen Anströmung in Richtung der Polarachse befindlichen Kugel ergibt die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung unter Vernachlässigung der Trägheitsglieder nach [6]:

$$P = P_\infty - \frac{3}{2}\mu U \cos \vartheta \frac{1}{R_0} \quad (2.4)$$

Bei Mittlung über die Blasenoberfläche verschwindet die rechte Seite, so daß diese Druckverteilung für die Volumenänderung der Blase nicht signifikant ist. Setzt man voraus, daß mangels oberflächenaktiver Stoffe die Haftbedingung an der Blasenwand nicht erfüllt werden muß, so kann die Umströmung der Blasenwand näherungsweise potentialtheoretisch berechnet werden. Für den Fall großer Reynoldszahlen wird in einer Arbeit von Moore [11] gezeigt, daß dann bis auf einen kleinen Bereich am hinteren Staupunkt die Umströmung der Blase nach der Grenzschichttheorie berechnet werden kann, wenn auf der Blasenwand anstelle der Haftbedingung die Bedingung des Verschwindens der Tangentialspannungen gilt. Die Haftbedingung kann allerdings nur dann vernachlässigt werden, wenn sich keine Feststoffe an der Phasengrenzfläche absetzen.

Bei Vorhandensein dieser oberflächenaktiven Stoffe liegen die Verhältnisse nicht mehr so einfach [11], [12]. Da dann die Haftbedingung an der Blasenwand gilt, kommt es wie bei einer festen Kugel in der Nähe des Äquators zur Grenzschichtablösung und zur Totwasserbildung, da wegen des Energieverlustes durch Reibung die kinetische Energie des Fluids für eine weitere Umströmung der Kugel bis in die Nähe des hinteren Staupunktes nicht mehr ausreicht. Auf eine genaue Untersuchung soll an dieser Stelle verzichtet werden; wir beschränken uns hier darauf, beide Extremfälle, d.h. das Umgebungsdruckfeld ohne den Einfluß der Umströmung der Blase und das sich bei potentialtheoretischer Umströmung ergebende Druckfeld als anregendes Druckfeld für die Blasen aufweitung anzunehmen und die Resultate zu vergleichen. Eine durch

das Druckfeld bedingten Abweichung der Blasenform von der Kugelsymmetrie soll hier nicht berücksichtigt werden.

Die Translation des Blasen wird beschrieben durch den Impulssatz. Dabei können wir die Masse des in der Blase befindlichen Gases gegen die Masse des durch die Blasenbewegung verdrängten Wassers vernachlässigen. Für kugelförmige Körper beträgt diese hydrodynamische Masse $/1/$

$$m_h = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho_w$$

Damit gilt die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung des o.e. empirischen Widerstandsterms:

$$\frac{d}{dt_B} \left(\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho_w (\vec{v} - \vec{u}) \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 (-\nabla P) - 6\pi\mu(\vec{v} - \vec{u})R(1 + 0.197Re^{0.63} + 2,6 \cdot 10^{-4} Re^{1,38}) \quad (2.5)$$

, wobei $\nabla P = -\varrho_w \frac{d\vec{u}}{dt} = -\varrho_w \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \varrho_w (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ der Druckgradient in der Grundströmung ist.

Die Profilströmung wird nach der Singularitätenmethode berechnet, d.h. der Anstellwinkel und die Profilwölbung werden durch eine Wirbelbelegung, der Dickeneinfluß durch eine Belegung mit Quell- und Senkenfäden auf der Profillehne realisiert (Abb. 1). Die Spannweite wird dabei als unendlich angenommen, d.h. der Einfluß der Spitzenwirbel wird vernachlässigt. Für Einzelheiten der Profiltheorie muß auf $/3/$ verwiesen werden.

Das Gesamtpotential, das durch ein mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmtes Profil erzeugt wird, ist dann

$$\Phi = u_0 x + \beta u_0 y + \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a q(\xi) \ln(y^2 + (x - \xi)^2) - 2\gamma \arctan \frac{y}{x - \xi} d\xi \quad (2.6)$$

Für ein Joukowsky-Profil, das wir hier betrachten, ist nach $/3/$ mit $\xi := -a \cos \tau$

$$\begin{aligned} \gamma &= 2u_0 \left(\beta \cot \frac{\tau}{2} + 2 \frac{\varepsilon}{a} \sin \tau \right) \\ q &= 2u_0 B_0 \left(\cot \frac{\tau}{2} - 2 \sin \tau \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Daraus ergibt sich das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= u_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q \frac{x - \xi}{y^2 + (x - \xi)^2} + \gamma \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi + u_0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= u_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} - \gamma \frac{x - \xi}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi + \beta u_0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{(y^2 + (x - \xi)^2)^2} - \gamma \frac{2y(x - \xi)}{(y^2 + (x - \xi)^2)^2} d\xi \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q \frac{2y(x - \xi)}{(y^2 + (x - \xi)^2)^2} + \gamma \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{(y^2 + (x - \xi)^2)^2} d\xi \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial u_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Damit kann die Bewegungsgleichung aufgestellt werden; mit $\nu := \frac{\mu}{\varrho_w}$, $\frac{d}{dt_B} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt_B} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} (2u_x + v_x) + \frac{\partial u_x}{\partial y} (2u_y + v_y) - 3 \frac{\dot{R}}{R} (v_x - u_x) - \frac{9\nu}{R^2} (v_x - u_x) (1 + 0.197Re^{0.63} + 2,6 \cdot 10^{-4} Re^{1,38}) \\ \frac{dv_y}{dt_B} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} (2u_x + v_x) + \frac{\partial u_y}{\partial y} (2u_y + v_y) - 3 \frac{\dot{R}}{R} (v_y - u_y) - \frac{9\nu}{R^2} (v_y - u_y) (1 + 0.197Re^{0.63} + 2,6 \cdot 10^{-4} Re^{1,38}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Bewegungsgleichung hängt offensichtlich von der durch das Profildruckfeld induzierten Volumenänderung der Blase ab. Die durch die Bewegung der Blasenwand induzierte Strömung realisiert sich unter der Voraussetzung, daß die Blase kugelsymmetrisch bleibt, durch eine zeitabhängige Punktquelle im Blasenmittelpunkt. Zum Potential der Grundströmung ist dann noch der Term

$$\Phi_B = \frac{-R^2 \dot{R}}{r} \quad (2.10)$$

zu ergänzen, wenn wir zunächst jede weitere Modifikation des Strömungsfeldes durch die Blase vernachlässigen. ('r' ist hier die Entfernung des Aufpunktes vom Blasenmittelpunkt).

Das für die Volumenänderung der Blase signifikante Druckfeld ergibt sich aus der Bernoulli'schen Gleichung

$$\frac{1}{2}u_0^2(1+\beta^2) + \frac{P_\infty}{\rho_w} = \frac{P(R)}{\rho_w} + \frac{\partial(\Phi_B + \Phi)}{\partial t} \Big|_{r=R} + \frac{1}{2}(\nabla(\Phi_B + \Phi))^2 \Big|_{r=R} \quad (2.11),$$

woraus sich nach Einsetzen der Potentiale die Differentialgleichung für die Blasenwandbewegung ergibt. Zur Berechnung der Ableitungen auf der rechten Seite nehmen wir zweckmäßigerweise eine Transformation in Kugelkoordinaten bezüglich des Blasenmittelpunktes vor:

$$\begin{aligned} x &:= r \sin \vartheta \cos \varphi + x_B \\ y &:= r \sin \vartheta \sin \varphi + y_B \end{aligned} \quad (2.12)$$

mit x_B , y_B als den Koordinaten des Blasenmittelpunktes und r als dem Abstand des Aufpunktes vom Blasenmittelpunkt. Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} &:= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &:= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &:= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \end{aligned}$$

Damit erhält die Bernoulli'sche Gleichung die folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_0^2(1+\beta^2) + \frac{P_\infty}{\rho_w} &= \frac{P(R)}{\rho_w} - R\ddot{R} - 2\dot{R}^2 + \frac{1}{2}[(\dot{R} + u_x \sin \vartheta \cos \varphi + u_y \sin \vartheta \sin \varphi)^2 \\ &\quad + (u_x \cos \vartheta \cos \varphi + u_y \cos \vartheta \sin \varphi)^2 + (u_y \cos \varphi - u_x \sin \varphi)^2] \end{aligned}$$

mit u_x , u_y als den Geschwindigkeitskomponenten der Profilstömung am Orte des Blasenmittelpunktes.

Wegen der Voraussetzung einer kugelsymmetrischen Blasenform und homogener Gasverteilung im Inneren der Blase ist die Gleichung über die Blasenoberfläche zu mitteln. Es folgt dann die Rayleigh-Plesset-Gleichung für eine kugelsymmetrische Blase:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P_{L0}}{\rho_w} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{P_v - P_\infty}{\rho_w} - \frac{2\sigma}{\rho_w R} + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_0^2(1+\beta^2) \quad (2.13)$$

In Gleichung (2.13) wird die Modifikation des Strömungspotentials durch die Blase nur in der Ordnung $O(\frac{1}{r})$ berücksichtigt, das entspricht dem Einfluß der Volumenänderung der Blase. Diese Näherung ist jedenfalls ausreichend, solange die Umströmung der Blase vernachlässigt werden kann. Für starke Beschleunigungen der Strömung, wie sie an der Vorderkante von Profilen auftreten, ist diese Annahme jedoch nicht realistisch, wie man bereits an der Tatsache sieht, daß der Druckgradient in die Beschleunigung der Blase dreifach eingeht. Es erhebt sich dann die Frage nach der für die Blasenwandbewegung signifikanten Druckverteilung. Für kleine Relativgeschwindigkeiten (schleichende Strömung) läßt sich (2.13) ebenfalls noch verwenden, da die durch die Umströmung der Blase entstehende Druckverteilung, wie oben erwähnt, im Mittel über die Blasenoberfläche verschwindet und daher keinen Beitrag in der Bewegungsgleichung für die Blasenwand liefert.

An dieser Stelle soll der Einfluss der rein potentialtheoretischen Druckverteilung auf die Bewegung der Blasenwand untersucht werden, wie sie bei großen Reynoldszahlen in sehr reinem Wasser, d.h. ohne Haftbedingung, herrschen würde. Nach dem Weiss'schen Theorem gilt für das durch eine in einer beliebigen Potentialströmung ruhenden Kugel induzierte Gesamtpotential /5/ mit r, ϑ, φ als den Polarkoordinaten gemäß (2.12):

$$\Phi = \Phi_0(r, \vartheta, \varphi) + \frac{R}{r} \Phi_0\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) - \frac{2}{rR} \int_0^R \Phi_0\left(\frac{\lambda^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) \lambda d\lambda \quad (2.14)$$

wie man anhand der Randbedingung an der Kugeloberfläche und der Laplace Gleichung leicht nachprüft.

Das Weiss'sche Theorem ist nur anwendbar auf denjenigen Anteil des Grundpotentials, der keine Bewegung am Ort des Blasenmittelpunktes induziert. Nun gilt nach dem Mittelwertsatz der Potentialtheorie:

$$\int_V \nabla \Phi dV = \vec{u}_c \cdot \frac{4\pi}{3} R^3,$$

wobei der Index 'c' den Ort des Blasenmittelpunktes bezeichnet, so daß wir das Grundpotential zerlegen können /7/:

$$\Phi_0 \equiv \vec{u}_c \cdot \vec{r} + \tilde{\Phi}_0$$

Die "Reaktion" der Blase auf den 1. Summanden ist das wohlbekannte Dipolpotential; auf den 2. Summanden läßt sich das Weiss'sche Theorem anwenden. Damit wird

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{\Phi}_0(r, \vartheta, \varphi) + \vec{u}_c \cdot \vec{r} + \frac{(\vec{u}_c - \vec{v}) \cdot \vec{r}}{2r^3} R^3 + \frac{R}{r} \tilde{\Phi}_0\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) - \frac{2}{rR} \int_0^R \tilde{\Phi}_0\left(\frac{\lambda^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) \lambda d\lambda \\ &= \Phi_0(r, \vartheta, \varphi) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{2r^3} R^3 + \frac{R}{r} \Phi_0\left(\frac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) - \frac{2}{rR} \int_0^R \Phi_0\left(\frac{\lambda^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) \lambda d\lambda \end{aligned}$$

Einsetzen von (2.6) nach der Transformation nach (2.12) ergibt:

$$\begin{aligned} \Phi &= u_0 \cdot (r \sin \vartheta \cos \varphi + x_B + \beta(r \sin \vartheta \sin \varphi + y_B)) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \left[q(\xi) \ln((r \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2 + (r \sin \vartheta \sin \varphi + y_B)^2) \right. \\ &- 2\gamma(\xi) \arctan \frac{y_B + r \sin \vartheta \sin \varphi}{x_B + r \sin \vartheta \cos \varphi - \xi} \left. \right] d\xi \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r} \int_{-a}^a \left[q(\xi) \ln\left(\left(\frac{R^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi\right)^2 + \left(\frac{R^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi + y_B\right)^2\right) \right. \\ &- 2\gamma(\xi) \arctan \frac{y_B + \frac{R^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi}{x_B + \frac{R^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi - \xi} \left. \right] d\xi \\ &- \frac{2}{rR} \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_{-a}^a \left[q(\xi) \ln\left(\left(\frac{\lambda^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi + y_B\right)^2\right) \right. \\ &- 2\gamma(\xi) \arctan \frac{y_B + \frac{\lambda^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi}{x_B + \frac{\lambda^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi - \xi} \left. \right] d\xi \lambda d\lambda \\ &+ \frac{R^3}{2r^2} ((u_0 - v_x) \sin \vartheta \cos \varphi + (\beta u_0 - v_y) \sin \vartheta \sin \varphi) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nach Integration des letzten Summanden sowie nach Einführung von

$$\begin{aligned} S_1 &:= y_B \sin \varphi + (x_B - \xi) \cos \varphi \\ S_2 &:= y_B \cos \varphi - (x_B - \xi) \sin \varphi \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \left[q(\xi) \ln((r \sin \vartheta \sin \varphi + y_B)^2 + (r \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2) \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma(\xi) \arctan \frac{y_B + r \sin \vartheta \sin \varphi}{r \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi} \right] d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi R \sin \vartheta} \int_{-a}^a q(\xi) \left[S_2 \arctan \frac{S_2 \frac{R^2}{r} \sin \vartheta}{\frac{R^2}{r} \sin \vartheta S_1 + y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_1}{2} \ln \left(\frac{(\frac{R^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi + x - \xi)^2 + (\frac{R^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi + y_B)^2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \right) \right] \\ &\quad - \gamma(\xi) \left[\frac{S_2}{2} \ln \left(\frac{(\frac{R^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi + x - \xi)^2 + (\frac{R^2}{r} \sin \vartheta \sin \varphi + y_B)^2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - S_1 \arctan \frac{S_2 \frac{R^2}{r} \sin \vartheta}{\frac{R^2}{r} \sin \vartheta S_1 + y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \right] d\xi \\ &\quad + u_0(r \sin \vartheta \cos \varphi + x_B) + \beta u_0(r \sin \varphi \sin \vartheta + y_B) \\ &\quad - \frac{R^3}{2r^2} ((v_x - u_0) \sin \vartheta \cos \varphi + (v_y - \beta u_0) \sin \vartheta \sin \varphi) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Ableitungen dieses Potentials gehen in die Bernoulli'sche Gleichung für die Bestimmung des Drucks an der Blasenwand ein, wobei die Zeitableitung im Ruhesystem des Tragflügels auszuführen ist. Die Ableitungen des Potentials sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}_{r=R} = v_x \sin \vartheta \cos \varphi + v_y \sin \vartheta \sin \varphi \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t}_{\tau=R} &= \frac{\dot{R}}{\pi} \sin \vartheta \int_{-a}^a \frac{\gamma S_2 + q(R \sin \vartheta + S_1)}{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2} d\xi \\
&+ \frac{\dot{R}}{2\pi R^2 \sin \vartheta} \int_{-a}^a \arctan \frac{R \sin \vartheta S_2}{R \sin \vartheta S_1 + y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \left\{ \gamma S_1 + q S_2 \right\} d\xi \\
&+ \frac{\dot{R}}{4\pi R^2 \sin \vartheta} \int_{-a}^a \ln \frac{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} (q S_1 - \gamma S_2) d\xi \\
&- \frac{1}{2\pi R^2 \sin^2 \vartheta} \int_{-a}^a \left\{ q[S_2 \cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) + (R \sin \vartheta + S_1)(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)] \right. \\
&+ \gamma[S_1 \cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) + R \sin \vartheta (v_y \sin \varphi + v_x \cos \varphi) + S_2(v_x \sin \varphi - v_y \cos \varphi)] \left. \right\} \\
&\cdot \arctan \frac{R \sin \vartheta S_2}{R \sin \vartheta S_1 + y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ q[S_1 \cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) + R \sin \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) + S_2(v_x \sin \varphi - v_y \cos \varphi)] \right. \\
&- \gamma[S_2 \cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) + (R \sin \vartheta + S_1)(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)] \left. \right\} \\
&\cdot \ln \frac{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi \\
&- \frac{1}{2\pi R \sin \vartheta} \int_{-a}^a (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \left[q \frac{2 \sin^2 \vartheta (S_2^2 + S_1(S_1 + R \sin \vartheta))}{(R \sin \vartheta + S_1)^2 + S_2^2} \right. \\
&- \gamma \frac{2 S_2 R \sin^3 \vartheta}{(R \sin \vartheta + S_1)^2 + S_2^2} \left. \right] d\xi \\
&- \frac{1}{2\pi R \sin \vartheta} \int_{-a}^a \gamma (v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi) d\xi \\
&+ \frac{3}{2} (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \sin^2 \vartheta ((u_0 - v_x) \cos \varphi + (u_0 \beta - v_y) \sin \varphi) \\
&- \frac{1}{2} (v_x (u_0 - v_x) + v_y (u_0 \beta - v_y)) \\
&- \frac{1}{2} R \sin \vartheta (\dot{v}_x \cos \varphi + \dot{v}_y \sin \varphi) - \frac{3}{2} \dot{R} \sin \vartheta ((v_x - u_0) \cos \varphi + (v_y - \beta u_0) \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}_{\tau=R} &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \cos \vartheta \frac{\gamma S_2 + q(S_1 + R \sin \vartheta)}{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2} d\xi \\
&+ \frac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \vartheta} \int_{-a}^a \ln \frac{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \cdot \{q S_1 - \gamma S_2\} d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi R^2 \sin^2 \vartheta} \int_{-a}^a \arctan \frac{R \sin \vartheta S_2}{R \sin \vartheta S_1 + y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \cdot \{q S_2 + \gamma S_1\} d\xi \\
&+ \frac{3}{2} (u_0 \cos \vartheta \cos \varphi + \beta u_0 \cos \vartheta \sin \varphi) - \frac{1}{2} (v_x \cos \vartheta \cos \varphi + v_y \cos \vartheta \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{r=R} &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q S_2 - \gamma(R \sin \vartheta + S_1)}{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2} d\xi \\
&- \frac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \vartheta} \int_{-a}^a \ln \frac{(y_B + R \sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (R \sin \vartheta \cos \varphi + x_B - \xi)^2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \cdot \{q S_2 + \gamma S_1\} d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi R^2 \sin^2 \vartheta} \int_{-a}^a \arctan \frac{R \sin \vartheta S_2}{R \sin \vartheta S_1 + y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \cdot \{q S_1 - \gamma S_2\} d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi R} \int_{-a}^a \frac{\gamma}{\sin \vartheta} d\xi \\
&+ \frac{3}{2} u_0 (\beta \cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{1}{2} (v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Taylor-Entwicklung dieser Ausdrücke für $R/a \ll 1$ führt unter Berücksichtigung von Gliedern bis zur Ordnung $O(R^2/a^2)$ zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=R} &\simeq \frac{3}{4} \frac{\dot{R}}{\pi} \sin \vartheta \int_{-a}^a \frac{\gamma S_2 + q S_1}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \frac{\dot{R} R}{\pi} \sin^2 \vartheta \int_{-a}^a \frac{\frac{5}{6} q (S_2^2 - S_1^2) - \frac{5}{3} \gamma S_1 S_2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi \\
&- \frac{1}{2} R \sin \vartheta (\dot{v}_x \cos \varphi + \dot{v}_y \sin \varphi) - \frac{1}{2} (v_x (u_0 - v_x) + v_y (u_0 \beta - v_y)) \\
&- \frac{3}{2} \dot{R} \sin \vartheta ((v_x - u_0) \cos \varphi + (v_y - \beta u_0) \sin \varphi) \\
&+ \frac{3}{2} (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \sin^2 \vartheta ((u_0 - v_x) \cos \varphi + (u_0 \beta - v_y) \sin \varphi) \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ q [\cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \left(-\frac{1}{2} \frac{S_1}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} + \frac{R \sin \vartheta}{3} \frac{S_1^2 - S_2^2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \right) \right. \\
&+ \frac{v_y y_B + v_x (x_B - \xi)}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} - R \sin \vartheta \frac{S_2 S_1 (v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)}{3(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} + \frac{R \sin \vartheta (S_2^2 - S_1^2)(v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi)}{2(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{v_x \sin \varphi S_2 - v_y \cos \varphi S_1}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \Big] \\
&+ \gamma [\cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \left(-\frac{1}{2} \frac{S_2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} + \frac{2 R \sin \vartheta S_1 S_2}{3(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \right) \\
&+ \frac{v_x y_B - v_y (x_B - \xi)}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} - R \sin \vartheta \frac{S_1 S_2 (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} + \frac{R \sin \vartheta (S_1^2 - S_2^2)(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)}{6(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \\
&- \frac{1}{2} \frac{v_x \sin \varphi S_1 - v_y \cos \varphi S_2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} \Big] \Big\} d\xi \\
&- \frac{\sin^2 \vartheta}{\pi} \int_{-a}^a (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \left\{ -\frac{q S_1 + \gamma S_2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} + R \sin \vartheta \frac{2\gamma S_1 S_2 + q(S_1^2 - S_2^2)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \right\} d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{R}R^2}{2\pi} \sin^3 \vartheta \int_{-a}^a \left\{ -\frac{7}{4} \frac{\gamma S_2 + 3qS_1}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} + 7S_1^2 \frac{\gamma S_2 + qS_1}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} \right\} d\xi \\
& - \frac{R^2 \sin^2 \vartheta}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \frac{(qS_2 - \gamma S_1) \cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) - (qS_1 + \gamma S_2)(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} \cdot S_2 S_1 \right. \\
& + \frac{q(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi) + \gamma(v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} \cdot (S_2 S_1^2 - \frac{1}{3} S_2^3) \\
& + \frac{q(v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) - \gamma(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} \cdot (\frac{1}{3} S_1^3 - S_1 S_2^2) \\
& - \frac{1}{4} \frac{(qS_1 - \gamma S_2) \cos^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) - (qS_2 + \gamma S_1)(v_y \cos \varphi - v_x \sin \varphi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \\
& \left. + \sin^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \left[q \frac{6S_1 S_2^2 - 2S_1^3}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} + \gamma S_2 \frac{2S_2^2 - 6S_1^2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} \right] \right\} d\xi
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=R} & \simeq \frac{3}{2} \dot{R} \sin \vartheta ((u_x - v_x) \cos \varphi + (u_y - v_y) \sin \varphi) - \frac{1}{2} (v_y (u_y - \beta u_0) + v_x (u_x - u_0)) \\
& + \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \cdot ((u_x - v_x) \cos \varphi + (u_y - v_y) \sin \varphi) \\
& + \dot{R} \cdot R \sin^2 \vartheta \frac{5}{6} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \varphi \sin \varphi \right) \\
& - \frac{1}{2} R \sin \vartheta (\dot{v}_x \cos \varphi + \dot{v}_y \sin \varphi) \\
& + R \sin \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cdot (v_y (\frac{\partial u_x}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \varphi) + v_x (\frac{\partial u_x}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial u_x}{\partial y} \sin \varphi)) \\
& + R \sin^3 \vartheta \frac{5}{3} (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \varphi \sin \varphi \right) + O(R^2/a^2)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Die Mittelung der Zeitableitung über die Winkelkoordinaten ergibt

$$\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} \Big|_{r=R} \simeq 0 \tag{2.22}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten und die über die Winkelkoordinaten gemittelten Geschwindigkeits-

quadrate ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{r=R} &\simeq \frac{3}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{qS_2 - \gamma S_1}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \frac{R \sin \vartheta}{\pi} \int_{-a}^a \left\{ \frac{5}{3} \frac{qS_1 S_2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} - \frac{5}{6} \frac{\gamma(S_2^2 - S_1^2)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \right\} d\xi \\
&+ \cos \varphi \left(\frac{3}{2} \beta u_0 - \frac{1}{2} v_y \right) + \sin \varphi \left(\frac{1}{2} v_x - \frac{3}{2} u_0 \right) \\
&+ \frac{1}{2\pi} R^2 \sin^2 \vartheta \int_{-a}^a \left\{ \frac{7}{4} \frac{3\gamma S_1 - qS_2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} + \frac{7S_1^2(qS_2 - \gamma S_1)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} \right\} d\xi \\
&= \left(\frac{3}{2} u_y - \frac{1}{2} v_y \right) \cos \varphi - \left(\frac{3}{2} u_x - \frac{1}{2} v_x \right) \sin \varphi \\
&+ \frac{5}{3} R \sin \vartheta \left[\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(y_B^2 - (x_B - \xi)^2) + 2\gamma y_B(x_B - \xi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi \right. \\
&\left. + \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{2qy_B(x_B - \xi) - \gamma(y_B^2 - (x_B - \xi)^2)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi \right] + O(R^2/a^2)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{r=R} \right)^2 &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{y_B q - \gamma(x_B - \xi)}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \frac{3}{2} \beta u_0 - \frac{1}{2} v_y \right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{q(\xi - x_B) - \gamma y_B}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \frac{1}{2} v_x - \frac{3}{2} u_0 \right)^2 \\
&+ \frac{25}{27} \frac{R^2}{4\pi^2} \left[\left(\int_{-a}^a \frac{q(y_B^2 - (x_B - \xi)^2) + 2\gamma y_B(x_B - \xi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi \right)^2 \right. \\
&\left. + \left(\int_{-a}^a \frac{2qy_B(x_B - \xi) - \gamma(y_B^2 - (x_B - \xi)^2)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R} &\simeq \frac{3}{4\pi} \cos \vartheta \int_{-a}^a \frac{qS_1 + \gamma S_2}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \cos \vartheta \cos \varphi \left(\frac{3}{2} u_0 - \frac{1}{2} v_x \right) + \cos \vartheta \sin \varphi \left(\frac{3}{2} \beta u_0 - \frac{1}{2} v_y \right) \\
&+ \frac{1}{\pi} \cos \vartheta \int_{-a}^a \left[\frac{5}{6} \frac{q(S_2^2 - S_1^2)}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} - \frac{5}{3} \frac{\gamma S_1 S_2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \right] R \sin \vartheta d\xi \\
&+ \frac{R^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ 7S_1^2 \frac{qS_1 + \gamma S_2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^3} - \frac{7}{4} \frac{3qS_1 + \gamma S_2}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} \right\} d\xi \\
&= \left(\frac{3}{2} u_x - \frac{1}{2} v_x \right) \cos \vartheta \cos \varphi + \left(\frac{3}{2} u_y - \frac{1}{2} v_y \right) \cos \vartheta \sin \varphi \\
&+ \frac{5}{3} R \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{1}{2\pi} [(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_{-a}^a \frac{q(y_B^2 - (x_B - \xi)^2) - 2\gamma y_B(x_B - \xi)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi \\
&- 2 \cos \varphi \sin \varphi \int_{-a}^a \frac{2qy_B(x_B - \xi) + \gamma(y_B^2 - (x_B - \xi)^2)}{(y_B^2 + (x_B - \xi)^2)^2} d\xi] + O(R^2/a^2)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)_{r=R}}^2 &\simeq \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma y_B + q(x_B - \xi)}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \frac{3}{2} u_0 - \frac{1}{2} v_x \right)^2 \\
&+ \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma(\xi - x_B) - q y_B}{y_B^2 + (x_B - \xi)^2} d\xi + \frac{3}{2} \beta u_0 - \frac{1}{2} v_y \right)^2 \\
&+ R^2 \frac{5}{27} \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Nach Umformen und Vergleich mit (2.8) folgt

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)_{r=R}}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} u_y - \frac{1}{2} v_y \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} v_x - \frac{3}{2} u_x \right)^2 + \frac{25}{27} R^2 \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right) \\
\overline{\left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)_{r=R}}^2 &= \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} u_y - \frac{1}{2} v_y \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} v_x - \frac{3}{2} u_x \right)^2 + \frac{5}{27} R^2 \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Damit erhalten wir durch Einsetzen in die Bernoulli'sche Gleichung (2.11) und Mittlung über die Blasenoberfläche die Bewegungsgleichung für den Blasenradius:

$$\begin{aligned}
\frac{P_\infty}{\varrho_w} + \frac{1}{2} u_0^2 (1 + \beta^2) &= \frac{P(R)}{\varrho_w} + \frac{1}{2} \overline{[\dot{R} + (v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi) \sin \vartheta]^2} + \overline{\left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)^2} + \overline{\left(\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2} + \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \\
&= \frac{P(R)}{\varrho_w} + \frac{1}{2} \left[\dot{R}^2 + \frac{1}{3} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{3}{2} (u_y - \frac{1}{3} v_y)^2 + \frac{3}{2} (\frac{1}{3} v_x - u_x)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{10}{9} R^2 \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right) \right] - R \ddot{R} - 2 \dot{R}^2 \\
R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 &= \frac{P_{L0}}{\varrho_w} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{P_v - P_\infty}{\varrho_w} - \frac{2\sigma}{R \varrho_w} - \frac{1}{2} u_0^2 (1 + \beta^2) + \frac{1}{6} (v_x^2 + v_y^2) \\
&+ \frac{3}{4} (u_x^2 + u_y^2 - \frac{2}{3} (u_y v_y + u_x v_x) + \frac{1}{9} (v_x^2 + v_y^2)) + \frac{5}{9} R^2 \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right) \\
&= \frac{P_{L0}}{\varrho_w} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{P_v - P_\infty}{\varrho_w} - \frac{2\sigma}{R \varrho_w} + \frac{1}{4} ((u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2) \\
&+ \frac{5}{9} R^2 \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2} u_0^2 (1 + \beta^2)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Mit $P(x_B, y_B) =: P_\infty - 1/2 \varrho (u_x^2 + u_y^2) + 1/2 \varrho u_0^2 (1 + \beta^2)$ als dem Profildruck am Orte des Blasenmittelpunktes erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 &= \frac{P_{L0}}{\varrho_w} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{P_v - P(x_B, y_B)}{\varrho_w} - \frac{2\sigma}{R \varrho_w} \\
&+ \frac{1}{4} ((u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2) + \frac{5}{9} R^2 \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Das entspricht der Gleichung für eine Einzelblase, die dem Umgebungsdruck $P(x, y)$ ausgesetzt ist, der ohne ihr Vorhandensein am Orte ihres Mittelpunktes herrschen würde. Der vorletzte Summand stellt die durch die Bewegung der Blase relativ zur Profilstömung hervorgerufene zusätzliche Druckabsenkung an der Blasenwand dar. Er entspricht der Modifikation des Druckfeldes nach dem, die sich auch bei einer Relativgeschwindigkeit der Blase zu einer homogenen Strömung ergeben würde. Der Term der Ordnung $O(R^2/a^2)$ ist offenbar unabhängig von der Relativgeschwindigkeit. Er kann interpretiert werden als die kinetische

Energie der Umströmung einer Kugel in einem inhomogenen Geschwindigkeitsfeld, wenn der Mittelpunkt keine Relativgeschwindigkeit zur Strömung besitzt. Es hat sich allerdings bei Vergleichsrechnungen herausgestellt, daß er bei $R/a \ll 1$ auf den Verlauf der Blasen aufweitung einen vernachlässigbar kleinen Einfluß hat. Man kann daher die Näherung der homogenen Anströmung der Blase auch im Falle einer inhomogenen Profilströmung als ausreichend ansehen. Daher wurde in den aufgeführten numerischen Berechnungen dieser Term vernachlässigt.

Resultate:

Den Resultaten, dargestellt in den Abbildungen 2-6, liegen folgende Parameter zugrunde:

Anströmgeschwindigkeit $u_0 = 13 \text{ m/s}$

Anstellwinkel des Profils $\beta = 0.1$

Wölbung des Profils $\frac{\varepsilon}{a} = 0.05$

Dickenparameter $B_0 = \sqrt{\frac{R_v}{4a}} = 0.07$

Kavitationsbeiwert $\sigma_v = \frac{P_\infty - P_v}{\frac{1}{2} \rho_w u_0^2} = 1.2$

Halbe Profillänge $a = 10 \text{ cm}$

Abbildungen 2 und 3 zeigen die Blasentrajektorien und den Blasenradius im Verlaufe des Vorbeiströmens am Profil. Eine merkliche Abweichung der Trajektorie von der Stromlinie ist offenbar nur bei grösseren Blasenradien zu beobachten, d.h. nach der instabilen Aufweitung. Da die Blasen im Bereich der Profilverdickung ziemlich stark relativ zur Strömung beschleunigt werden - der Druckgradient geht in den Ausdruck für die Beschleunigung mit dem Faktor 2 ein - neigen sich die Blasentrajektorien stärker dem Profil zu als die Stromlinien. Die dann beim Zusammenfall auftretenden großen Radialgeschwindigkeiten und damit die sehr schnelle zeitliche Abnahme der hydrodynamischen Masse der Blase bewirkt zusätzlich eine deutliche Zunahme der Relativgeschwindigkeit zum umgebenden Wasser, was schließlich zum Auftreffen der Blase auf die Profilloberfläche führt. Die Bewegungsgleichungen für die Blasentrajektorie und die Blasenwand sind dann natürlich überfordert.

Die Ablenkung der Blasenbahnen vom Stromlinienverlauf bei großen Radien führt dazu, daß Keime von größerem Anfangsradius, bei denen sich die Ablenkung schon vor Eintritt der Dampfkavitation bemerkbar macht, nicht so große Maximalradien erreichen wie kleinere Keime, die vor der Aufweitung nahezu der Stromlinie folgen, weil erstere aus dem Unterdruckgebiet herausgedrängt werden.

Abbildung 5 zeigt den zeitlichen Verlauf der Funktionen $P_v - P$, wobei

$$-\frac{P}{\rho_w} = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_0^2(1 + \beta^2) - \frac{P_\infty}{\rho_w}$$

bzw. mit Berücksichtigung des Weiss'schen Theorems

$$-\frac{P}{\rho_w} = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_0^2(1 + \beta^2) - \frac{P_\infty}{\rho_w} + \frac{1}{4}((u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2)$$

, welche gemäß (2.13) bzw. (2.24) bei Vernachlässigung von Luftdruck und Oberflächenspannung für die Aufweitung relevant sind. Offenbar ist der Einfluß der Modifikation des Druckfeldes nach dem Weiss'schen Theorem nur sehr gering, macht sich jedoch durch seine Zeitdauer bemerkbar, da die Relativgeschwindigkeit zwischen Blase und Wasser weiter zunimmt. Dadurch kommt es bei Potentialtheoretischer Umströmung der Blase zu einer um etwa 10% stärkeren Aufweitung gegenüber den Ergebnissen ohne Berücksichtigung des Weiss'schen Theorems.

Abbildung 4 zeigt die Druckbeiwerte im Verlauf der Blasentrajektorien (die zugehörigen y/a -Werte sind Abb. 2 zu entnehmen). Im Vergleich dazu ist der Druckbeiwert direkt auf der Profilloberfläche aufgetragen, wie er nach Riegels /3/, /21/ berechnet wird durch

$$c_P = \frac{P_\infty - P(x, y)}{\frac{1}{2} \rho_w u_0^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy_D}{dx}\right)^2} \frac{(u_{x\gamma} + u_{xq} + u_0)^2}{u_0^2} - 1$$

Die effektiven Druckbeiwerte bei Berücksichtigung des Weiss'schen Theorems sind im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht zu unterscheiden.

Die Bewegungsgleichungen für die Blasenwand und die Trajektorie lassen sich übrigens durch die Multiplikation mit $1/u_0$ bzw. a/u_0 auf dimensionslose Form bringen, so daß für die Bewegungsgleichung des Blasenmittelpunktes folgt

$$\frac{d\vec{v}/u_0}{d\frac{u_0 t}{a}} = \frac{2u_x + v_x}{u_0} \frac{\partial \vec{v}/u_0}{\partial x/a} + \frac{v_y + 2u_y}{u_0} \frac{\partial \vec{v}/u_0}{\partial y/a} - 3 \frac{\frac{d(R/a)}{d(u_0 t/a)}}{R/a} \frac{\vec{v} - \vec{u}}{u_0} - \frac{9\nu}{R^2} \frac{\vec{v} - \vec{u}}{u_0} a(1 + 0.197 Re^{0.63} + 2,6 \cdot 10^{-4} Re^{1.38}) \quad (2.9)$$

und für die Bewegungsgleichung für den Blasenradius

$$\frac{R}{a} \frac{d^2 R/a}{d(u_0 t/a)^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d R/a}{d(u_0 t/a)} \right)^2 = \frac{P_{L0}}{u_0^2 \varrho} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{2\sigma}{\varrho R u_0^2} + \frac{P_v - P_\infty}{u_0^2 \varrho} + \frac{1}{2} \frac{u_x^2 + u_y^2}{u_0^2} - \frac{1}{2} (1 + \beta^2), \quad (2.13)$$

hier ohne Berücksichtigung des Weiss'schen Theorems. Hieraus wird klar, daß der Verlauf von R/a entlang der Trajektorie praktisch unabhängig von u_0 und a ist, wenn man den Luftdruck und den Oberflächenspannungsterm vernachlässigt. Das gilt jedenfalls, solange die Blase entweder aufgrund des starken Überwiegens der Reibungskraft nahezu der Stromlinie folgt, oder aber der Reibungsterm vernachlässigbar klein ist. Im ersten Fall fällt die Trajektorie mit der Stromlinie zusammen und hängt damit nur von den dimensionslosen Koordinaten ab, im zweiten Fall würde sich eine davon abweichende Trajektorie ergeben, die ebenfalls nur von den dimensionslosen Koordinaten abhängt, wie man an (2.9) sieht. Die explizite Abhängigkeit von den absoluten Koordinaten entsteht durch die Wirkung des Zähigkeitsterms.

Zu den Ergebnissen kann abschliessend gesagt werden:

Die Reaktion der Blase auf die Profilströmung nach dem Weiss'schen Theorem kann, wie gesagt, vernachlässigt werden bis auf einen der Relativgeschwindigkeit zur Grundströmung proportionalen Term. Dieser ist allerdings wegen der deutlichen Abweichung der Trajektorien von den Stromlinien bedeutsam für den Aufweitungsvorgang. Man muß sich allerdings dabei vor Augen halten, daß diese Abweichung Resultat einer inkompressiblen Betrachtung ist, bei der der Zugspannungsabbau, wie er in keimhaltigem Wasser auftritt, nicht berücksichtigt ist. Außerdem muß bedacht werden, daß von einer näherungsweise potentialtheoretischen Druckverteilung an der Blasenwand nur ausgegangen werden kann, wenn die Haftbedingung dort nicht erfüllt zu werden braucht /11/.

Angesichts der Tatsache, daß die genaue Erklärung des Zugspannungsabbaues noch aussteht, somit auch keine Aussage über die Druckgradienten und die daraus resultierenden Relativbeschleunigungen zwischen Blasen und Wasser gemacht werden können, erscheint es nicht sinnvoll, die oben diskutierten Effekte in der Betrachtung realistischer Fälle zu berücksichtigen. Auf jeden Fall dürfte die Relativgeschwindigkeit und die davon allein abhängige zusätzliche Abminderung des Umgebungsdrucks nach dem Weiss'schen Theorem infolge des Zugspannungsabbaues erheblich niedriger sein als in dem hier betrachteten Fall, weil zum einen die Druckgradienten abgebaut werden, zum anderen die Radien i.A. erheblich unterhalb den hier errechneten Grössen bleiben. Abb. 9 zeigt den Druckverlauf bei Zugspannungsabbau im Vergleich mit der inkompressiblen Rechnung. Man erkennt, daß die Länge des Zugspannungsbereiches im ersten Fall nur einen kleinen Bruchteil derjenigen im inkompressiblen Fall beträgt.

3) Verhalten eines Blasenclusters im Druckfeld eines Tragflügelprofils

Das in 2) beschriebene Verhalten einer Einzelblase gilt nur für ein inkompressibles Fluid in der Umgebung der Blase. Im allgemeinen Falle keimhaltigen Wassers ist die Wechselwirkung mit benachbarten Keimen zu berücksichtigen. Die für inkompressibles Fluid geltenden Zugspannungen können dann nicht mehr als anregende Drücke für die Aufweitung der Blase angenommen werden, da die Druckabsenkung ja im gesamten umgebenden Fluid zum Phasenübergang und damit zur Herabsetzung der Zugfestigkeit führt. Eine endgültige Klärung dieses Phänomens dürfte über das Gebiet der Kontinuumsmechanik hinausgehen.

Aus diesem Grunde bleiben auch die Vorgänge innerhalb eines Gas-Wasser-Gemisches letztlich ungeklärt, in welchem sich die Blasen infolge der Druckabsenkung instabil aufweiten, d.h. der Umgebungsdruck einen Schwellenwert unterschreitet, bei welchem kein Gleichgewichtszustand zwischen dem Gasdruck einerseits und dem Umgebungsdruck und der Oberflächenspannung andererseits mehr möglich ist. Lediglich für Fälle, in denen der Druck über diesem kritischen Druck bleibt, lässt sich das Verhalten des Gemisches analog zur Dynamik der idealen Gase beschreiben [1/], wobei jedoch die Trägheitskräfte vernachlässigt werden, also ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Druck und der Gemischdichte vorausgesetzt wird. Diese Vereinfachung lässt sich bei instabiler Aufweitung auf keinen Fall mehr aufrechterhalten. Damit ist die Berechnung der Dichte- und Druckverteilung innerhalb des Gebietes instabiler Aufweitung an einem Profil derzeit praktisch nicht möglich, da eine Zustandsgleichung für das Gemisch fehlt. Um einen Einblick in das Verhalten von Systemen mehrerer Kavitationsblasen zu erhalten, bietet sich der Weg, ein Mehrblasensystem als Ganzes zu betrachten.

Es hat sich im ersten Teil gezeigt, daß im Falle einzelner Blasen im inkompressiblen Medium deren Trajektorien vor dem Profil nahezu exakt der Stromlinie folgen (jedenfalls wenn sie kleiner als 10^{-3} cm sind), hinter der Vorderkante infolge des starken Druckgradienten vom Verlaufe der Stromlinie abzuweichen und auf der Profilloberfläche aufzutreffen. Auch wenn die genauen Druckverhältnisse in einem Mehrblasensystem nun nicht bekannt sind, so lässt sich doch sagen, daß sich durch die Aufweitung der Blasen der im ersten Teil festgestellte Umlenkungseffekt abschwächt, weil infolge des Zugspannungsabbaues der Druckgradient an der Profilverkante erheblich geringer sein dürfte als im inkompressiblen Falle. Mangels Kenntnis der genauen Vorgänge werden wir daher im gesamten Verlauf unterstellen, dass die Blasentrajektorien mit den Stromlinien der inkompressiblen Strömung zusammenfallen.

Berechnungen der Kavitation nach der Dynamik von Einzelblasen sind bereits von Chao [8/] durchgeführt worden. Im folgenden soll versucht werden, Methode durch die Berücksichtigung der vertikalen Ausdehnung der Kavitationsschicht und des Zusammenwachsens der Blasen zu erweitern. Statt einzelner Blasen soll vom Zeitpunkt ihres Zusammenwachsens an die Volumenänderung eines Blasenclusters als Ganzes betrachtet werden, dessen Inneres als ein homogenes Gas-Wasser-Gemisch im thermodynamischen Gleichgewicht angenommen wird. Diese Annahme bedeutet, daß die Abstrahlung kinetischer Energie durch die Änderung des Gasvolumens an das Fluid innerhalb des Clusters vernachlässigt werden soll, was realistisch ist, wenn der Gasgehalt so groß wird, daß man nicht mehr von der Existenz einzelner Blasen ausgehen kann.

a) Darstellung der Methode nach der Blasendynamik

Wir betrachten das Verhalten von Kavitationsblasen, die in unmittelbarer Nähe der Profilloberfläche der Stromlinie folgend vorbeiziehen. Die Keime in der weiteren Umgebung des Profils bleiben außer Betracht. Das Druckfeld direkt an der Profilloberfläche ist gegeben durch [3/]

$$c_p = \frac{P_\infty - P(x)}{1/2 \rho u_0^2} = \frac{1}{1 + (dy_D/dx)^2} \frac{(u_0 + u_\gamma + u_q)^2}{u_0^2} - 1 \quad (3.1)$$

Für Volumenänderung der Blasen gilt dann die Rayleigh-Plesset-Gleichung

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P(R) - P_\infty}{\rho} \quad (3.2)$$

mit

$$P(R) = P_v + P_{Lo} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{2\sigma}{R}$$

Der Zeitparameter läßt sich mit $dx = u(x)dt$ umrechnen in den Parameter x , so daß wir mit $\dot{R} = u(x) dR/dx$, $\ddot{R} = u^2 d^2 R/dx^2 + u du/dx dR/dx$ die Blasenwandbewegung in Abhängigkeit von x erhalten. P_* ist der unter empirischer Berücksichtigung des Zugspannungsabbaues ermittelte Umgebungsdruck der Blase. Durch Anpassung an experimentell ermittelte Werte für den Beginn der Kavitationsschicht wurde von Chao /8/ folgende Formel dafür ermittelt:

$$P_* = P_v(1 - e^{-\alpha/\alpha_{**}}) + P(x)e^{-\alpha/\alpha_{**}} \quad (3.3)$$

falls $P(x) \leq P_v$ und

$$P_* = P(x)$$

falls $P(x) \geq P_v$ und mit $\alpha_{**} = 0.01$ als empirischen Parameter. $P(x)$ ist hierbei der inkompressibel berechnete Profildruck.

Aus der Erhaltungssatz für die Keime $1/\zeta(1+\alpha) = \zeta_0(1+\alpha_0)$ folgt die Formel für das Gasvolumenverhältnis für den ungelösten Gasgehalt.

$$\frac{\alpha(x)}{1+\alpha_0} \simeq \alpha(x) = \frac{4\pi}{3} \sum_j \zeta_{0j} R_j^3$$

'j' bezeichnet die verschiedenen Klassen der Anfangsradien der Keime, '0' bezeichnet den Zustand der Keime vor der Aufweitung in weiter Entfernung vom Profil.

Die blasendynamische Berechnung wird in /8/ auch für $\alpha > 1$ fortgesetzt, bis der Maximalradius der Einzelblase erreicht ist. Erst bei der Ermittlung des für den Zusammenfall signifikanten Referenzvolumens wird das Zusammenwachsen der Blasen durch einen empirischen Faktor berücksichtigt. Durch Anpassung an Beobachtungen der Ausdehnung der Kavitationsschicht ergab sich für den Radius des für den Zusammenfall maßgeblichen Referenzvolumens

$$R_* = 5.5 \cdot R_{max} ,$$

mit

$$R_{max} = \left[\frac{\alpha_{max}}{\frac{4\pi}{3} \sum_j \zeta_{0j}} \right]^{\frac{1}{3}} ,$$

da der Maximalradius R_{max} nach der Aufweitung kaum vom Anfangsradius der Keime abhängt /1/.

Der Luftpartialdruck innerhalb des Referenzvolumens zu Beginn des Zusammenfalls ergibt sich folgendermaßen:

$$\varrho_L = \frac{M_L}{V_G + V_W}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung für die Luftmasse

$$\varrho_L(1+\alpha) = \varrho_{L0}(1+\alpha_0) \simeq \varrho_{L0}$$

und der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$P_L = R_L T \varrho_L \frac{1+\alpha}{\alpha}$$

folgt schließlich

$$P_L = R_L T \varrho_{L0} / \alpha = P_{L0} \frac{\alpha_0}{\alpha} ,$$

und unter der Voraussetzung, daß in großer Entfernung vor dem Profil an der Blasenwand Gleichgewicht besteht

$$P_L = \frac{4\pi}{3\alpha} \sum_j \zeta_{0j} R_{0j}^3 (P_\infty - P_v + \frac{2\sigma}{R_{0j}}) \quad (3.4)$$

mit P_∞ als dem Druck in großer Entfernung vor dem Profil

b) Beschreibung des Kavitationsvorganges durch Betrachtung von Blasenclustern

Im folgenden soll versucht werden, die oben dargelegte Methode zu erweitern. Das Kavitationsgebiet soll in seiner gesamten vertikalen Ausdehnung erfaßt werden, nicht nur in unmittelbarer Nähe der Profilloberfläche. Außerdem wird der Tatsache Rechnung getragen, daß die Rayleigh-Plesset-Gleichung für die Bewegung einer einzelnen Blase nach dem Zusammenwachsen der Blasen bei $\alpha \simeq 1$ ihre Gültigkeit verliert. Das Kavitationsgebiet besteht dann aus einem Gemisch aus Wasser und Dampf, dessen genaues Verhalten nicht bekannt ist. Um dennoch Aussagen über seine Ausdehnung machen zu können, bietet sich die Möglichkeit, ein Blasencluster als Ganzes im Druckfeld des Tragflügels zu betrachten, dessen Geometrie allerdings von vornherein vorzugeben ist. Eine gewisse Willkür ist an dieser Stelle leider unvermeidbar. Die vertikale Ausdehnung des Clusters wird durch die oberste Stromlinie bestimmt, entlang der sich die Blase überhaupt noch instabil aufweitet.

Wir betrachten zunächst die Aufweitung von einzelnen Blasen im Gebiet zwischen der obersten Stromlinie und der Profilloberfläche bzw. derjenigen Stromlinie, die gerade noch oberhalb des Profils verläuft. Für die Trajektorien wird aus o.g. Gründen angenommen, daß sie mit den Stromlinien der inkompressiblen Strömung zusammenfallen. Die Keimradien in großer Entfernung vom Profil seien der Einfachheit halber als einheitlich angenommen.

Auf den jeweiligen Trajektorien weiten sich die Keime zu verschiedener Größe auf, da sie verschiedenen zeitlichen Druckverläufen ausgesetzt sind. Um das zu berücksichtigen, wird der Kavitationsbereich in Radienklassen unterteilt, die den innerhalb dieses Bereiches verlaufenden Stromlinien zugeordnet werden (Abb.7). Mit der - mit $dx = u(x, y(x))dt$ auf den Parameter x umzurechnenden - Rayleigh-Plesset-Gleichung erhalten wir die Blasenradien $R(x, y_j) := R_j(x)$ auf der j -ten Stromlinie.

Das Fluid in der Umgebung der Einzelblase wird wie in a) als homogenes Gas-Wasser-Gemisch angenommen mit dem Gasvolumenverhältnis *

$$\alpha(x, y_j) = \alpha_j(x) = \frac{4\pi}{3} R_j^3 \zeta_0$$

Nach Umrechnung auf den Parameter x erhalten wir die Rayleigh-Plesset-Gleichung in der Form

$$Ru_j^2 \frac{d^2 R_j}{dx^2} + Ru_j \frac{du_j}{dx} \frac{dR_j}{dx} + \frac{3}{2} \left(u_j \frac{dR_j}{dx} \right)^2 = \frac{P(R_j) - P_*}{\rho} \quad (3.5)$$

mit

$$P_* = P_v(1 - e^{-\alpha_j/\alpha_{**}}) + P(x, y_j)e^{-\alpha_j/\alpha_{**}} \quad (3.3)$$

und $u_j = u(x, y_j)$ als x -Komponente der Geschwindigkeit. Diese Aufweitungsrechnung wird soweit durchgeführt, bis entlang einer der Trajektorien an einer Stelle $x = x_{cl}$ gilt $\alpha \geq 1$, was das Zusammenwachsen der Blasen bedeutet. Danach wird um das Gebiet um x_{cl} herum ein Volumen definiert, dessen vertikale Ausdehnung sich von der Profilloberfläche bis zur obersten Stromlinie erstreckt. Da außer im Bereich der Profilvorderkante die Geschwindigkeit entlang der Profilkontur nur schwach von dem Abstand der Stromlinie von der Profilloberfläche abhängt, können wir in guter Näherung für die Geschwindigkeit des Clusters die profiltheoretisch ermittelte Geschwindigkeit $u = u_0 \sqrt{1 + c_p}$ mit c_p aus der Formel (3.1).

Ansonsten wird bei der Berechnung der Volumenänderung des Clusters von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

1. Die in dem Referenzvolumen enthaltene Wassermenge bleibt während des ganzen Vorganges konstant, d.h. die Volumenänderung des Clusters entspricht der des Gasvolumens im Cluster. Damit gilt die Relation /9/

$$\frac{V_{cl}}{V_{cl0}} = \frac{1 + \alpha_{cl}}{1 + \alpha_{cl0}} \simeq \frac{\rho_0}{\rho} \quad (M_{gas} \ll M_{wasser}) \quad (3.6)$$

2. Die für das Referenzvolumen festgelegte Form bleibt während des weiteren Aufweitungs- und Zusammenfallsvorganges erhalten. Betrachtet werden soll also nur die Volumenänderung des Clusters, nicht seine Verformung.

* Die Formel für das Gasvolumenverhältnis ist abgeleitet vom Blasenhaltungssatz, der eine kompressible Strömung voraussetzt. Insoweit stellt sie einen Widerspruch zur Annahme dar, daß die Blasen der inkompressiblen Strömung folgen. Der Mangel muß aus o.g. Gründen in Kauf genommen werden.

3. Innerhalb des Clusters herrscht ansonsten ein homogenes Gas-Wasser- gemisch im thermodynamischen Gleichgewicht; der Druck an der Begrenzungsfläche des Clustervolumens ist damit gleich dem Gasdruck $P_v + P_L$. Das bedeutet, daß innerhalb des Clusters der Einfluß der Trägheitskräfte vernachlässigt wird, was realistisch ist für einen relativ großen Gasgehalt.

Die für die Berechnung des Verhaltens der Clusters geltenden Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt der Definition des Clustervolumens lauten folgendermaßen:

1. Das Gasvolumenverhältnis in dem Volumen ergibt sich aus dem Mittelwert der aus den Aufweitungs- vorgängen entlang den einzelnen Trajektorien ermittelten lokalen Gasvolumenverhältnisse:

$$\alpha_{cl} = \frac{4\pi}{3N} \zeta_0 \sum_{j=1}^N R_j^3 \quad (3.7)$$

2. Mit der Bedingung $V_w = const.$ (s.o.) folgt aus der von den Aufitungsgeschwindigkeiten der Einzel- blasen die zeitliche Volumenänderung des Clusters:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{cl}}{dt} &= \frac{dV_g}{dt} = V_w \cdot \frac{d\alpha_{cl}}{dt} \\ &= \frac{V_{cl}}{1 + \alpha_{cl}} \frac{d\alpha_{cl}}{dt} \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit α_{cl} wie in (3.9) und $\frac{d\alpha_{cl}}{dt} = \frac{4\pi}{N} \zeta_0 \sum_{j=1}^N R_j^2 \dot{R}_j$

3. Der Luftdruck im Cluster im Übergangszeitpunkt ist nach den in Teil a) angeführten Überlegungen gegeben durch (3.5) mit $\alpha = \alpha_{cl}$.

b1) Gleichung für das Volumenänderung eines halbkugelförmigen Clusters

Wir betrachten zunächst ein halbkugelförmiges Referenzvolumen mit dem Anfangsradius gleich dem Abstand zwischen Profiloberfläche und oberster Stromlinie, $a = y_{max}(x_{cl}) - y_D(x_{cl})$ und dem Mittelpunkt bei an der Stelle $x = x_{cl}$, wo die Blasen beginnen, zusammenzuwachsen (Abb.8).

Im Ruhesystem des Clustermittelpunktes erzeugt die Volumenänderung des Clusters radialsymmetrisches Geschwindigkeitsfeld, welches realisiert wird durch eine im Mittelpunkt des Clusters gelegene Punk- quelle. Deren Potential ist

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} . \quad (3.9)$$

Die Randbedingung an der Clusterwand

$$v_r|_{r=a} = \dot{a} ,$$

da die oben getroffene Voraussetzung $V_w = const.$ bedeutet, daß jeglicher Massenfluß durch die Begren- zungsfläche des Clusters ausgeschlossen wird, da wir hier keine Relativbewegung zwischen Gas und Wasser berücksichtigen. Für die Quellstärke ergibt sich damit:

$$\dot{a} = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow Q = 4\pi a^2 \dot{a} = 2 \frac{dV_{cl}}{dt} \quad (3.10)$$

Im Ruhesystem des Clusters verhält sich dieses in Bezug auf seine Volumenänderung wie in einem Strömungsfeld mit zeitabhängigen, räumlich konstanten Umgebungsdruck. Der Impulssatz

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

führt dann auf

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{P(a) - P(t)}{\rho} \quad (3.11)$$

Nach Erreichen des Maximalradius läßt sich bei Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit des Umgebungsdrucks für die Zusammenfallszeit folgend näherungsformel angeben:

$$t_z = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{P - P_V}} a_0 \int_{(1-\beta_0)^{\frac{1}{3}}}^1 \sqrt{\frac{z^3}{1-z^3}} dz$$

Für $P(t)$ kann in guter Näherung der Profildruck auf der Profilloberfläche nach (3.1) genommen werden. Im Zugspannungsgebiet ist allerdings der infolge des hohen Gasgehalt in der Umgebung des Clusters der Zugspannungsabbau zu berücksichtigen. Da davon ausgegangen werden kann, daß im ganzen Medium gilt $\alpha \gg \alpha_{**}$, kann wegen des exponentiellen Abfalles der Zugspannung mit dem Gasgehalt $P(t) \simeq P_v$ gesetzt werden, solange der Profildruck nach (3.1) den Dampfdruck unterschreitet.

$P(a)$, der Druck an der Wand des Clusters, ist nach Voraussetzung gleich $P_v + P_{L0} \frac{\alpha_0}{\alpha}$, wobei aus (3.6) noch folgt

$$\alpha = \frac{a^3}{a_0^3} (1 + \alpha_0) - 1 ;$$

'0' bezeichnet den Zeitpunkt des Überganges zum Clusterbetrachtung. Für die zeitliche Änderung des Clusterradius ergibt sich aus (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{dV_{cl}}{dt} &= 2\pi a^2 \dot{a} = \frac{2\pi a^3}{3} \frac{1}{1 + \alpha_{cl}} \frac{d\alpha_{cl}}{dt} \\ \dot{a} &= \frac{a}{3} \frac{1}{1 + \alpha_{cl}} \frac{d\alpha_{cl}}{dt} \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit α_{cl} , $d\alpha_{cl}/dt$ wie in (3.10)

b2) Gleichung für die Volumenänderung des zylinderförmigen Clusters

Wir untersuchen das Verhalten eines halbzylinderförmigen auf der Profilloberfläche aufliegenden Clusters in der Mitte des Profils, d.h. bei $z = 0$. Das Cluster erstrecke sich in z -Richtung von $z = -B$ bis $z = B$ und habe wie im Falle der Halbkugel den Radius $a = y_{max} - y_D$; es gelte $B \gg A$, und $B \gg a$ (a =Clusterradius) (Abb. 8). Unter dieser Voraussetzung kann das Strömungsfeld an der Stelle $z=0$ näherungsweise als 2-dimensionales radialsymmetrisches Feld in der x - y -Ebene angesetzt werden; die z -Komponente verschwindet aus Symmetriegründen. Ein solches Feld wird durch einen in der Mitte des Clusterquerschnittes sich in z -Richtung erstreckenden Quellfaden realisiert mit dem Potential

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-B}^B \frac{q(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta \quad (3.13)$$

mit $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y_D(x'))^2}$, wobei x' die x -Koordinate des Clustermittelpunktes und y_D die Dicke des Profils ist.

Wenn B genügend groß ist, kann das Strömungsfeld im mittleren Bereich des Clusters als konstant in z -Richtung angenommen werden. Daher wird bei der Integration über die z -Ausdehnung des Clusters die Quellbelegung q als von ζ unabhängig angenommen. Ihre Stärke ergibt sich aus der Erfüllung der Randbedingung auf der Clusterwand bei $z = 0$ für diesen Potentialanteil:

$$\dot{a} = V_r|_{r=a} = \frac{1}{4\pi} \int_{-B}^B \frac{qr}{\sqrt{r^2 + \zeta^2}^3} d\zeta = \frac{q}{4\pi} \frac{\zeta}{r\sqrt{r^2 + \zeta^2}} \Big|_{-B}^B = \frac{q}{2\pi} \frac{B}{r\sqrt{r^2 + B^2}}$$

bei $z=0$. Daraus ergibt sich für die Quellstärke:

$$q = 2\pi a \dot{a} \frac{\sqrt{a^2 + B^2}}{B} \simeq 2\pi a \dot{a}$$

Wir gehen wieder davon aus, daß sich das Referenzvolumen beim Vorbeiziehen am Profil wie ein ruhendes Cluster verhält, das einem zeitabhängigen Druckfeld ausgesetzt ist. Der Impulssatz führt für $B \ll a$ dann auf

$$\begin{aligned} \frac{P(t) - P(a)}{\varrho} = & -\frac{1}{2} a \ddot{a} \ln \frac{2B^2 + 2B\sqrt{a^2 + B^2} + a^2}{a^2} \\ & + \frac{\dot{a}^2}{2} \left[1 - \ln \frac{2B^2 + 2B\sqrt{a^2 + B^2} + a^2}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Für den Zusammenfall lässt sich diese Gleichung unter Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit des Außendrucks geschlossen lösen. Man erhält für die Zusammenfallszeit

$$t_z = \sqrt{\frac{\varrho}{P - P_V}} a_0 \int_{\sqrt{1-\beta_0}}^1 \sqrt{\frac{z^2 \ln \frac{2B}{a_0 z}}{1 - z^2}} dz$$

Für $P(t)$ gelten die gleichen Bedingungen wie im Falle des halbkugelförmigen Clusters. Der Luftdruck im Übergangszeitpunkte wird wieder berechnet wie in (3.5); womit sich für den Druck an der Begrenzungsfläche ergibt

$$P(a) = P_v + P_{L0} \frac{\alpha_0}{\alpha}$$

und mit (3.6) folgt der Zusammenhang zwischen Clustervolumen und Gasvolumenverhältniss:

$$\alpha = \frac{a^2}{a_0^2} (1 + \alpha_0) - 1 .$$

Die Anfangsbedingung für die zeitliche Änderung des Clustervolumens lautet in diesem Falle

$$\begin{aligned} \frac{dV_{cl}}{dt} = 2B \cdot \pi a \dot{a} = 2B \frac{\pi a^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_{cl}} \frac{d\alpha_{cl}}{dt} \\ \dot{a} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{1 + \alpha_{cl}} \frac{d\alpha_{cl}}{dt} \end{aligned} \quad (3.15)$$

mit α_{cl} , $d\alpha_{cl}/dt$ nach (3.6), (3.7).

Anmerkung zu den Ergebnissen:

Den Resultaten (Abb. 9-13) liegen die Parameter für das Profil 1 zugrunde, sofern in den Zeichnungen nichts anderes angegeben ist:

Anströmgeschwindigkeit $u_0 = 13 \text{ m/s}$

Anstellwinkel des Profils $\beta = 0.1$

Wölbung des Profils $\frac{\epsilon}{a} = 0.05$

Dickenparameter $B_0 = \sqrt{\frac{R_v}{4a}} = 0.07$

Kavitationsbeiwert $\sigma_v = \frac{P_\infty - P_v}{1/2 \varrho_w u_0^2} = 1$

Halbe Profillänge $a = 10 \text{ cm}$

Keimdichte $\zeta_0 = 100 \text{ cm}^{-3}$

Abb. 9 zeigt die Druckverteilung für Profil 1 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Die Ergebnisse der blasendynamischen Rechnung nach /8/ für die Ausdehnung der Kavitationsschicht (Abb. 10-12) entsprechen den aus der Erfahrung bekannten Werten, wonach die Kavitationsschicht etwa doppelt so lang ist wie der durch inkompressible Rechnung ermittelte Zugspannungsbereich auf der Profilloberfläche. Die Ergebnisse der Clustermodelle lassen hinsichtlich der Ausdehnung des Kavitationsbereichs starke Abweichungen voneinander erkennen.

Aus den Abbildungen ersieht man, daß die Übereinstimmung des kugelsymmetrischen Modells mit den Ergebnissen der blasendynamischen Rechnung umso besser wird, je grösser der Dampfdruckbereich ist; das Resultat für die Ausdehnung des zylinderförmigen Clusters für die Ausdehnung des Kavitationsbereich ist

dann unrealistisch hoch. Umgekehrt befindet sich bei sehr kurzem Dampfdruckgebiet das zylinderförmige Cluster in besserer Übereinstimmung mit der an Beobachtungen angepaßten blasendynamischen Rechnung. Daher muß gesagt werden, daß das Clustermodell im Vergleich zur Methode von Chao keine Verbesserung darstellt, da die Übereinstimmung der beiden Modelle mit den an Beobachtungen angepaßten Ergebnissen der Blasendynamischen Methode von den Eingangsparametern abhängt.

Die Keimdichte hat in allen Modellen nur einen sehr geringen Einfluß auf den Kavitationsvorgang.

Problematisch ist auch die Ermittlung der vertikalen Ausdehnung der Kavitationsschicht nach dieser Methode. Die gestrichelten Linien in den Abbildungen 13 und 14 zeigen die durch die Nishiyama-Bedingung /1/

$$\frac{2\eta}{2A} = 2 \cdot \beta \left(\frac{x_E + A}{2A} \right)$$

gegebenen maximalen Schichtdicken 2η in Abhängigkeit von $(x + A)/2A$. Diese in der Profiltheorie benutzte empirisch gut bestätigte Formel geht von der Vorstellung aus, daß die Mittellinie der Kavitationsschicht Stromlinie sein soll. Die nach dem Clustermodell ermittelten Schichtdicken liegen hingegen im Vergleich dazu erheblich zu niedrig.

Dazu muß gesagt werden, daß die Berechnungen auf groben Näherungen beruhen, die sich gerade hinsichtlich der Dicke auf das Ergebnis entscheidend auswirken. In der Zuströmung wurden die Stromlinien der inkompressiblen Strömung als Blasentrajektorien angenommen, was, wie oben dargestellt, angesichts des Gasgehaltes problematisch ist. Damit ist aber auch die Bestimmung der vertikalen Ausdehnung des Clusters im Zeitpunkt des Überganges zur Clusterbetrachtung und die Anfangsbedingung für dessen zeitliche Volumenänderung, die ja zur Vertikalen Ausdehnung im Übergangszeitpunkt proportional ist, mit großer Unsicherheit behaftet.

Darüberhinaus ist in dieser Rechnung nicht berücksichtigt, daß der Aufweitungsprozess eine Rückwirkung auf die Zuströmung haben dürfte. Die Druckverteilung, der die Keime in der Zuströmung vor dem vollständigen Abfall der Zugspannung auf Dampfdruck ausgesetzt sind, wird unter Berücksichtigung der Aufweitung vorangehender Blasen nicht mehr dieselbe sein wie im inkompressiblen Fall.

Diese Tatsachen dürften der Hauptgrund für die erhebliche Unsicherheit dieser Theorie hinsichtlich der Bestimmung der Schichtdicke sein. Eine Vergleichsrechnung, bei der die Berechnung der Stromlinien vor dem Übergang zur Clustergeometrie durch die Methode der konformen Abbildung anstelle der Singularitätenmethode durchgeführt wurde, brachte keine nennenswerte Verbesserung der Ergebnisse.

Es muß gesagt werden, daß das Ziel dieses Ansatzes, nämlich einen Aufschluß über die vertikale Ausdehnung der Kavitationsschicht zu geben bei gleichzeitiger Berücksichtigung des Aufweitungsprozesses der einzelnen Keime, zu keinen befriedigenden Resultaten geführt hat.

4) Ansatz für die Beschreibung des Zusammenfalles der Kavitationsschicht unter Berücksichtigung von Maßstabseffekten.

Die in Teil 3) durchgeführten Rechnungen zeigen, daß die Modellierung des ganzen Kavitationsvorganges durch Blasencluster im Hinblick auf die Dicke und die Längenausdehnung der Schicht zu keinen befriedigenden Resultaten führt. Es hat sich herausgestellt, daß dieser Ansatz gegenüber der Methode von Chao keine Verbesserung darstellt.

Der bei der blasendynamischen Methode gebräuchliche Ansatz für die Zusammenfallsstrecke, bei dem das Kavitationsvolumen zu Beginn des Zusammenfalls durch einen empirischen Faktor an die beobachtete Zusammenfallsstrecke angepaßt wird, hat allerdings den Nachteil, daß der Faktor je nach Längenausdehnung neu bestimmt werden muß, für die Betrachtung von Maßstabseffekten also ungeeignet ist, wie folgende Betrachtung aus /1/ zeigt (siehe auch /16/).

Die Rayleigh-Plesset-Gleichung in dimensionslosen Koordinaten lautet mit dem Luftdruck $P_L = (P_{\infty,0} - P_v + 2\sigma/R_0)(R_0/R)^3$, $X = (x + A)/2A$ und $\sigma_v = (P_{\infty,0} - P_v)/(\frac{1}{2}\rho u_0^2)$ unter Berücksichtigung des Zugspannungsabbaues nach (3.3)

$$\frac{R}{2A} \frac{d^2(R/A)}{dX^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{d(R/A)}{dX} \right)^2 = (c_p - \sigma_v) e^{-\alpha/\alpha_{**}} - \frac{4\sigma}{\rho u_0^2 R} + \frac{R_0^3}{R^3} \left(\sigma_v + \frac{4\sigma}{\rho u_0^2 R} \right)$$

Wir betrachten der Einfachheit halber nur eine Radianklasse. Dann folgt mit $\alpha = 4\pi/3 \zeta_0 R^3$

$$\begin{aligned} \alpha^{1/3} \frac{d^2 \alpha^{1/3}}{dX^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d\alpha^{1/3}}{dX} \right)^2 &= 2(A^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \zeta_0)^{2/3} (c_p - \sigma_v) e^{-\alpha/\alpha_{**}} \\ &\quad - 2(A^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \zeta_0)^{2/3} \left(\frac{4\sigma}{\rho u_0^2 R_0} ((\alpha_0/\alpha)^{1/3} - \alpha_0/\alpha) - \sigma_v \alpha_0/\alpha \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aus der Forderung $\alpha(X)_{orig} = \alpha(X)_{mod}$ folgt

$$(A^3 \zeta_0)_{orig} = (A^3 \zeta_0)_{mod}$$

Nur, wenn die letztere Forderung erfüllt ist, kann, sofern man von der Oberflächenspannung und dem Luftdruck absieht, die Ähnlichkeitsbedingung auch für den Radius erfüllt werden. In diesem Fall ist der Ansatz in /8/ für den Zusammenfall mit der gleich Konstante κ für beliebige Profillängen verwendbar.

In der Regel ist die Ähnlichkeitsbedingung für die Keimdichte jedoch stark verletzt. Realistischer ist es, von gleicher Keimzahl beim Original und Modell auszugehen. Für diesen Fall ergibt die Lösung der Differentialgleichung (4.1) mit der vereinfachenden Annahme $c_p = \text{const}$ und unter Vernachlässigung von Luftdruck und Oberflächenspannung für den Zustand fortgeschrittener Aufweitung

$$\frac{\alpha_{org}}{\alpha_{mod}} = \left(\frac{A_{org}}{A_{mod}} \right)^{6/5}, \quad (4.2)$$

und damit

$$\frac{(R/A)_{mod}}{(R/A)_{org}} = \left(\frac{A_{org}}{A_{mod}} \right)^{3/5}$$

Während also bei fortgesetzter Aufweitung das Gasvolumenverhältnis im Modellfall erheblich niedriger als im Originalfall ist, gilt für den bezogenen Radius R/A genau das umgekehrte. Das heißt, obwohl unter Originalbedingungen das maximale Gasvolumenverhältnis größer ist als im Modellfall, würde die bezogene Zusammenfallsstrecke wesentlich kürzer, sofern der Faktor $\kappa = 5.5$ beibehalten wird. Es ist jedoch angesichts des Zusammenwachsens der Blasen anzunehmen, daß die Zusammenfallszeit (und damit die Zusammenfallsstrecke) eine monotone Funktion des Gasvolumens im Kavitationsgebiet ist. Daher liegt es nahe, als Maß für die Zusammenfallsstrecke an Stelle des maximalen Radius einer Einzelblase eine Größe zu wählen, die vom Gasvolumenverhältnis und der Schichtdicke des gesamten Kavitationsgebietes abhängt.

In diesem Teil soll versucht werden, das Kavitationsvolumen im Bereich des Zusammenfalls durch einen ebenen Schichtcluster zu modellieren, dessen Länge genau der Zusammenfallsstrecke entspricht. Das Cluster erstreckt sich entlang der Profilsparweite bis ins Unendliche. Für die Verhältnisse innerhalb des Clusters werden folgende Annahmen gemacht.

1. Der Wasseranteil des Clusters bleibt während des Zusammenfallsvorganges konstant, d.h. $\frac{dV_{wt}}{dt} = \frac{dV_g}{dt}$. Dann gilt auch die Beziehung zwischen der Schichtdicke Y und dem Gasvolumenverhältnis $\frac{Y}{Y_0} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha_0}$.
2. Im Cluster herrsche ein homogenes Gas-Wasser-Gemisch im thermodynamischen Gleichgewicht, d.h. die Verhältnisse im Cluster und damit auch an der Clusterwand sind nur von der Zeit abhängig. Der Druck im Cluster ist dann gleich dem Gasdruck $P = P_L + P_v$.
3. Die Form des Clusters bleibt während des Zusammenfalls unverändert.

Die Anfangsbedingung zu Beginn des Zusammenfalls ergeben sich folgendermaßen:

1. Die Schichtdicke wird nach der Nishiyama-Bedingung $Y_0 = \eta_E = \beta_0(C_E + A)_v$ festgelegt; η ist dabei die halbe maximale Schichtdicke und $(C_E + A)_v$ ist die doppelte Strecke, auf der in inkompressibler Strömung Zugspannung herrschen würde. Dieser Ansatz für die Dicke der Kavitationsschicht beruht auf den Ergebnissen der Profiltheorie, wonach die Aufweitungsstrecke der Schicht etwa doppelt so lang wie das inkompressibel berechnete Zugspannungsgebiet ist. Vergleichende Berechnungen haben ergeben, daß dieser Wert für die mittlere Schichtdicke entlang der Zusammenfallsstrecke die beste Übereinstimmung mit der blasendynamischen Rechnung bei einer Profillänge von 20cm liefert.
2. Das Gasvolumenverhältnis zu Beginn des Zusammenfalls wird bestimmt durch den nach der blasendynamischen Methode errechneten maximalen Wert. Die entsprechende x-Koordinate bezeichnet zugleich den Beginn der Zusammenfallsstrecke. Es ist hier darauf hinzuweisen, daß die Bestimmung dieses Punktes mit Unsicherheiten verbunden ist. Zum einen bedeutet die Fortsetzung der Aufweitungsrechnung nach der Rayleigh-Plesset-Gleichung für Einzelblasen nach deren Zusammenwachsen eine nur ungenaue Erfassung der durch die Verdrängung des Wassers aufgebauten Trägheitskräfte, die allerdings entscheidend dafür sind, wie weit sich die Aufweitung auch nach Wiederanstieg des Drucks über den Dampfdruck noch fortsetzt. Außerdem ist die Wirkung des Zusammenfalls auf das Druckfeld in der Umgebung mit der Strömung herankommender, sich noch aufweitender Keime nicht berücksichtigt.

Bei der durch die Volumenänderung des Clusters induzierten Geschwindigkeit wird nur die y-Komponente berücksichtigt, was realistisch ist für $Y/L \ll 1$ ($2L$ =Länge des Clusters) /9/. Für die Volumenänderung des Clusters gilt dann die Differentialgleichung /9/

$$\ddot{Y} - \frac{\dot{Y}^2}{2} \frac{(\arctan \frac{L}{Y})^2}{\int_Y^\infty (\arctan \frac{L}{y})^2 dy} = \frac{P(Y) - P(t)}{\rho} \frac{\pi^2}{2} \left[\int_Y^\infty (\arctan \frac{L}{y})^2 dy \right]^{-1} \quad (4.3)$$

Integration unter Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit des Umgebungsdrucks $P(t)$ sowie des Luftpartialdrucks führt zum Ausdruck für die Zusammenfallszeit

$$t_z = \frac{\sqrt{2\rho}}{\pi} \int_{Y_E/Y_0}^1 \left[\int_{Y_0 z/L}^\infty (\arctan \frac{1}{\eta})^2 d\eta \right]^{1/2} \sqrt{Y_0 L} [(P_v - P(t))(z - 1)]^{-1/2} dz \quad (4.4)$$

Mit

$$\arctan \frac{1}{\eta} = \int_0^\infty e^{-\lambda \eta} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \simeq \frac{\pi}{2} e^{-2/3 \eta}$$

folgt

$$\int_{Y_0 z/L}^\infty \left(\frac{\pi}{2} e^{-2/3 \eta} \right)^2 d\eta = \frac{\pi^2}{4} \frac{3}{4} e^{-\frac{4}{3} \frac{Y_0 z}{L}}$$

, so daß, wenn $Y_0/L \ll 1$ ist und für das Gasvolumenverhältnis am Ende des Zusammenfalles gilt $\alpha_E \ll 1$ schließlich für die Zusammenfallszeit folgt /1/, /9/

$$t_z = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{P - P_v} Y_0 L \cdot \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0}} \quad (4.5).$$

Mit $u\Delta t = \Delta x$ läßt sich bei $u \simeq \text{const}$ die Zusammenfallszeit auf die Zusammenfallsstrecke umrechnen:

$$\Delta x_z = \sqrt{3 \frac{1+c_p}{\sigma_v - c_p} Y_0 L \cdot \frac{\alpha_0}{1+\alpha_0}}.$$

Nach Voraussetzung soll die Ausdehnung des Clusters in x-Richtung gleich der Zusammenfallsstrecke sein, also $\Delta x_z = 2L$. Mit der oben erwähnten Nishiyama-Bedingung für Y_0 erhalten wir dann

$$\Delta x_z = \frac{3}{2} \frac{1+c_p}{\sigma_v - c_p} \beta_0 (C_E + A) \cdot \frac{\alpha_0}{1+\alpha_0} \quad (4.6)$$

Wegen des ungefähr linearen Verlaufes des Druckbeiwertes im Zusammenfallsgebietes ist als anregender Druckbeiwert für den Zusammenfall der Wert für c_p in der Mitte des ebenen Clusters zu nehmen.

Zu den Ergebnissen: In den Abbildungen 10-12 ist jeweils das Ende des Kavitationsgebietes eingetragen, welches nach dem oben dargestellten Clustermodell berechnet wurde. Es liegt etwas hinter dem nach der in a) dargestellten Methode berechneten Schichtende; außerdem wird aus Abb. 11 klar, daß die Zusammenfallsstrecke des Cluster mit der Keimdichte bei sonst gleichen Bedingungen zunimmt. Hingegen erhält man nach dem Methode von Chao eine geringere Ausdehnung der Schicht bei höherer Keimdichte, da die Zusammenfallsstrecke sich nach dem Maximalradius einer Einzelblase richtet. Dieser ist jedoch wegen des Zugspannungsabbaues bei hoher Keimdichte geringer.

Abb. 15 bis 17 zeigen den Verlauf des Gasgehaltes unter Berücksichtigung von Maßstabeffekten an einem Joukowski-Profil, dem die Parameter für Profil 2 zugrunde liegen:

Anstellwinkel $\beta_0 = 0.06$

Dickenparameter $B_0 = 0.035$

Wölbung $\epsilon/a = 0.02$

Kavitationsbeiwert $\sigma_v = 0.4$

Es wurden für 3 Fälle Maßstabeffekte untersucht, und zwar für 2 Keimverteilungen:

Keimdichte [cm ⁻³]:	200	100	50
Keimvert. 1 [cm]:	10 ⁻⁴	4 · 10 ⁻⁴	8 · 10 ⁻⁴
Keimvert. 2 [cm]:	3 · 10 ⁻⁴	5 · 10 ⁻⁴	9 · 10 ⁻⁴

Die 3 Fälle sind:

- 1) Original: Profillänge 200 cm, $u_0 = 25,7$ m/s
- 2) Modell, Maßstabsfaktor 20, Profillänge 10 cm, $u_0 = 22$ m/s; das entspricht einer Propellerdrehzahl von 25 Hz, genommen beim Radius $R = 2.8/20$ cm = 0.14 cm
- 3) Froude-Drehzahl: Hierbei wird das Ähnlichkeitsgesetz bezüglich der Schwerkraftwirkung berücksichtigt:

$$\left(\frac{u_0}{\sqrt{A}} \right)_{\text{modell}} = \left(\frac{u_0}{\sqrt{A}} \right)_{\text{original}}$$

also $u_0 = 5,75$ m/s.

Außerdem ist das nach dem Clustermodell berechnete Ende der Kavitationsschicht für alle diese Fälle eingezeichnet. Die beiden oberen Kurven zeigen den Verlauf im Original- und im Modellfall bei hoher Anströmgeschwindigkeit. Die unterste Kurve auf den Abbildungen gibt das Verhalten bei Froude-Drehzahl wieder; die zweituntersten Kurven in beiden Abbildungen sind das Ergebnis von Vergleichsrechnungen, bei denen den Keimverteilungen 1 und 2 jeweils 50 Keime mit $R_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ cm hinzugefügt werden soll.

Man erkennt, daß der Verlauf des Gasgehaltes beim Modell mit hoher Anströmgeschwindigkeit und bei Original bei beiden Keimverteilungen praktisch identisch ist; bei Froude-Drehzahl liegt der Gasgehalt für beide Keimverteilungen erheblich niedriger als beim Modell, was auf die Wirkung der Oberflächenspannung zurückzuführen ist. Die Existenz zusätzlicher großer Keime hat auf den Kavitationsverlauf offenbar nur geringen Einfluß. Der Gasgehalt bei Froude-Drehzahl liegt bei Keimverteilung 1 etwas niedriger als bei Keimverteilung 2, da Keime mit $R_0 \leq 10^{-4}$ nicht mehr instabil aufgeweitet werden.

Das nach dem Clustermodell ermittelte Ende der Kavitationsschicht unterscheidet sich im Modell- und Originalfall erwartungsgemäß nur wenig; die Zusammenfallsstrecke ist im Modellfall etwas kürzer als beim Original. Dieses Ergebnis wird unmittelbar aus Formel (4.6) klar. Die Verletzung der Ähnlichkeitsbedingung

für die Keimverteilung macht sich für den Zusammenfall insoweit etwas bemerkbar, daß die Zusammenfallsstrecke sich im Originalfall sowohl wegen des höheren Gasgehaltes verlängert, als auch wegen des niedrigeren Umgebungsdrucks, da der Zusammenfall beim Original bezogen auf die Profillänge etwas früher einsetzt als beim Modell.

Anhang

Erläuterung zur Berechnung der Integrale in Gleichung (2.8)

Die Integrale über die Singularitätenbelegung in Formel (2.8) lassen sich mit der Residuenmethode wie folgt lösen. Mit der Transformation $\xi = -a \cos \tau$ und $\cot \frac{\tau}{2} = \frac{1+\cos \tau}{\sin \tau}$, sowie $B = y/a$, $A = -x/a$ folgt

$$u_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2u_0 \left[\frac{(B_0(1 + \cos \tau - 2 \sin^2 \tau)(A - \cos \tau))}{B^2 + (A - \cos \tau)^2} + \frac{(\beta(1 + \cos \tau) + 2\varepsilon/a \sin^2 \tau)B}{B^2 + (A - \cos \tau)^2} \right] d\tau$$

Wir bilden die Profilschne durch die Transformation $z =: e^{i\tau}$ auf den Einheitskreis in der komplexen Ebene ab. Mit $dz = izd\tau$ folgt dann für das erste Teilintegral

$$I := \int_0^\pi \frac{1 + \cos \tau}{B^2 + (A - \cos \tau)^2} d\tau = \frac{1}{2} \oint \frac{1 + 1/2 (z + z^{-1})}{B^2 + (A - 1/2 (z + z^{-1}))^2} \frac{dz}{i}$$

Die Nullstellen des Nenners liegen bei

$$z_{1,2} = A \pm iB \pm \sqrt{(A \pm iB)^2 - 1}$$

mit $\cosh \Omega := A + iB$ lässt sich schreiben

$$z_{1,2} = \cosh \Omega \pm \sinh \Omega = e^{\pm \Omega}$$

Nach dem Residuensatz gilt

$$I = 2\pi i [\text{Resf}(z)_{z=z_n} + \text{Resf}(z)_{z=\bar{z}_n}]$$

mit $n = 1$, falls $|z_1| < 1$, $n = 2$, falls $|z_1| < 1$. Der Fall $|z_1| = |z_2| = 1$ entspricht in der Ursprungsebene einem Punkt direkt auf der Singularitätenbelegung; kann also ausgeschlossen werden. Damit folgt nach Faktorisieren des Nenners von I für $|z_1| < 1$:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \cdot 2\Re \left(\frac{2z + z^2 + 1}{(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)} \right)_{z=z_1} \\ &= 4\pi \Re \frac{2e^\Omega + e^{2\Omega} + 1}{(e^\Omega - e^{\bar{\Omega}})(e^\Omega - e^{-\Omega})(e^\Omega - e^{-\Omega})} \\ &= 4\pi \Re \frac{e^\Omega(2 \cosh \Omega + 2)}{2 \sinh \Omega e^\Omega (2 \cosh \Omega - 2 \cosh \bar{\Omega})} \\ &= 2\pi \Re \frac{A + iB + 1}{2iB \sqrt{(A + iB)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

und für $|z_2| < 1$ folgt entsprechend

$$I = -2\pi \Re \frac{A + iB + 1}{2iB \sqrt{(A + iB)^2 - 1}}$$

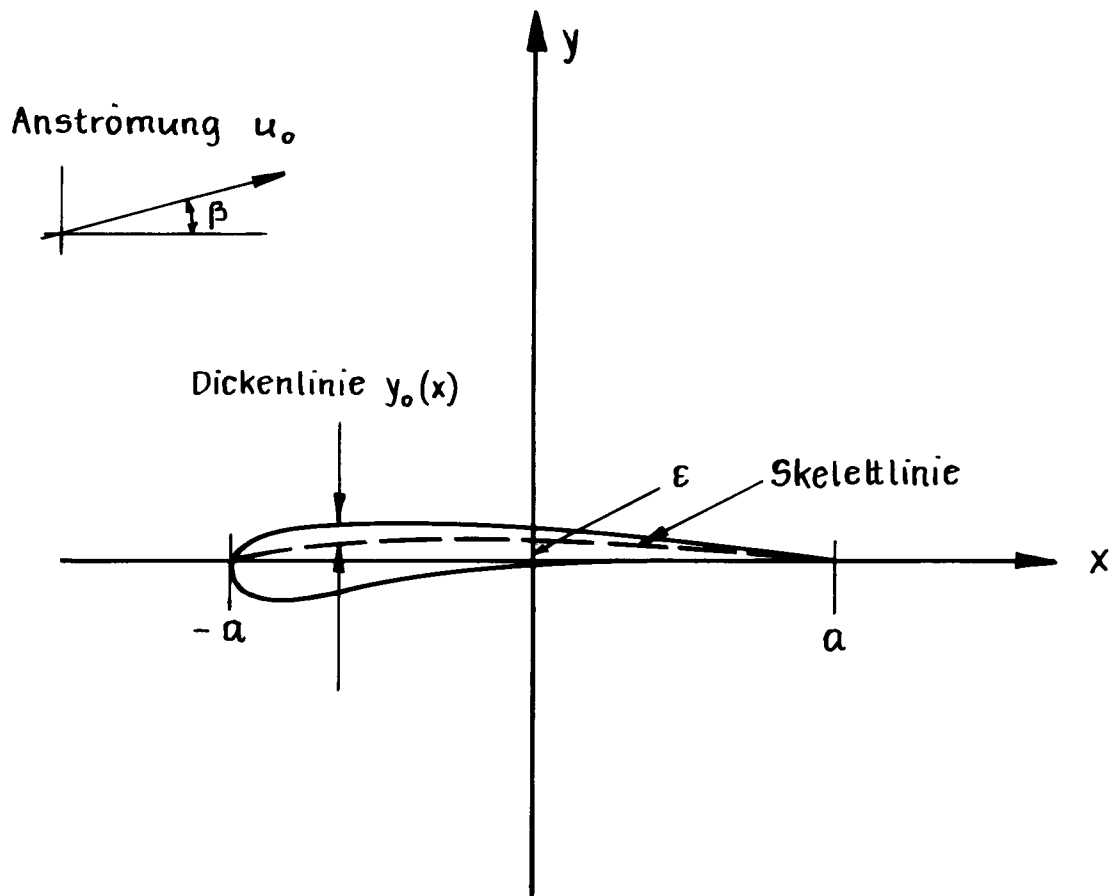
Alle anderen Integrale lassen sich mit der gleichen Transformation lösen. Als Resultat erhalten wir für (2.8) mit

$$\begin{cases} K=1, & \text{falls } |z_1| < 1 \\ K=-1, & \text{falls } |z_2| < 1 \end{cases}$$

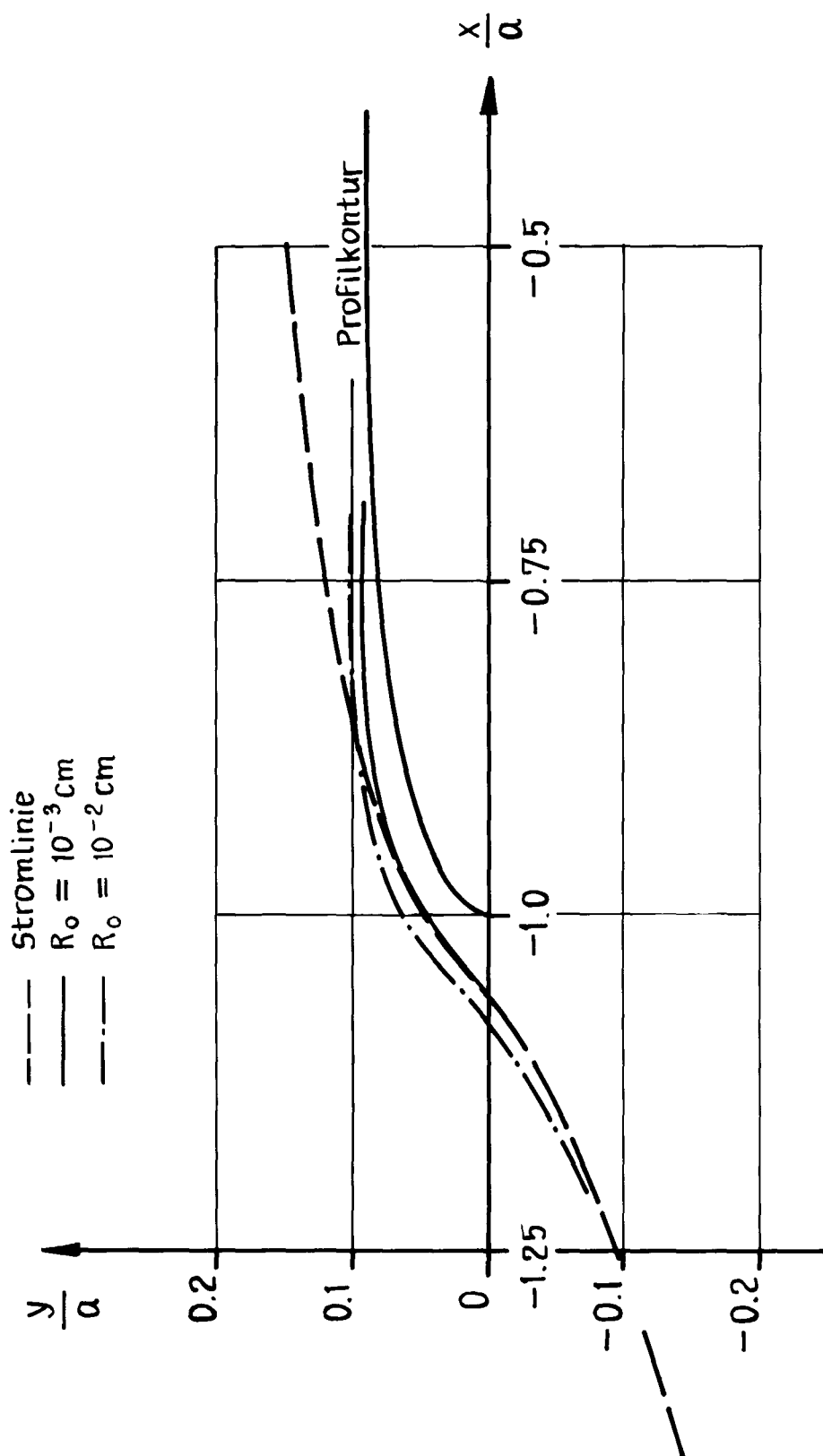
$$\begin{aligned}
u_x &= u_0 B_0 \left[K \Re \frac{A + iB + 1}{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} + 2K \Re \sqrt{(A + iB)^2 - 1} + 2A - 1 \right] \\
&+ u_0 \left[\beta K \Re \frac{A + iB + 1}{i\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} - \frac{2\varepsilon}{a} (B + K \Re \frac{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}}{i}) \right] + u_0 \\
u_y &= u_0 B_0 \left[K \Re \frac{A + iB + 1}{i\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} - B - K \Re \frac{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}}{i} \right] \\
&- u_0 \beta \left[\frac{A + iB + 1}{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} + 1 \right] + u_0 \frac{\varepsilon}{a} \left[A + K \Re \sqrt{(A + iB)^2 - 1} \right] \\
\frac{\partial u_x}{\partial x} &= 2u_0 B_0 \left[K \Re \frac{A + iB + 1}{2\sqrt{(A + iB)^2 - 1}^3} - K \Re \frac{A + iB}{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} - 1 \right] \\
&+ u_0 \beta \cdot \left[K \Re \frac{A + iB + 1}{i\sqrt{(A + iB)^2 - 1}^3} \right] + u_0 \frac{2\varepsilon}{a} \cdot K \Re \frac{A + iB + 1}{i\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} \\
\frac{\partial u_x}{\partial y} &= u_0 B_0 \cdot \left[K \Re \frac{A + iB + 1}{i\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} - 2 \cdot K \Re \frac{A + iB + 1}{i\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} \right] \\
&+ u_0 \beta K \Re \frac{A + iB + 1}{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}^3} + u_0 \frac{2\varepsilon}{a} \left[K \Re \frac{A + iB}{\sqrt{(A + iB)^2 - 1}} + 1 \right]
\end{aligned}$$

bestimmen die dann mit ϵ bezeichnete
Wölbung

ϵ/a = Wölbung des Profils , β = Anstellwinkel



Blasenbahnen am Profil



Blasenradien im Verlauf der Bahnkurve

- ① $R_o = 10^{-3} \text{ cm}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{---} \text{ Umgebungsdruck gem. Weiss'schem Theorem} \\ \text{---} \text{ Umgebungsdruck der unmodifizierten Grundströmung} \end{array} \right.$
- ② $R_o = 10^{-2} \text{ cm}$

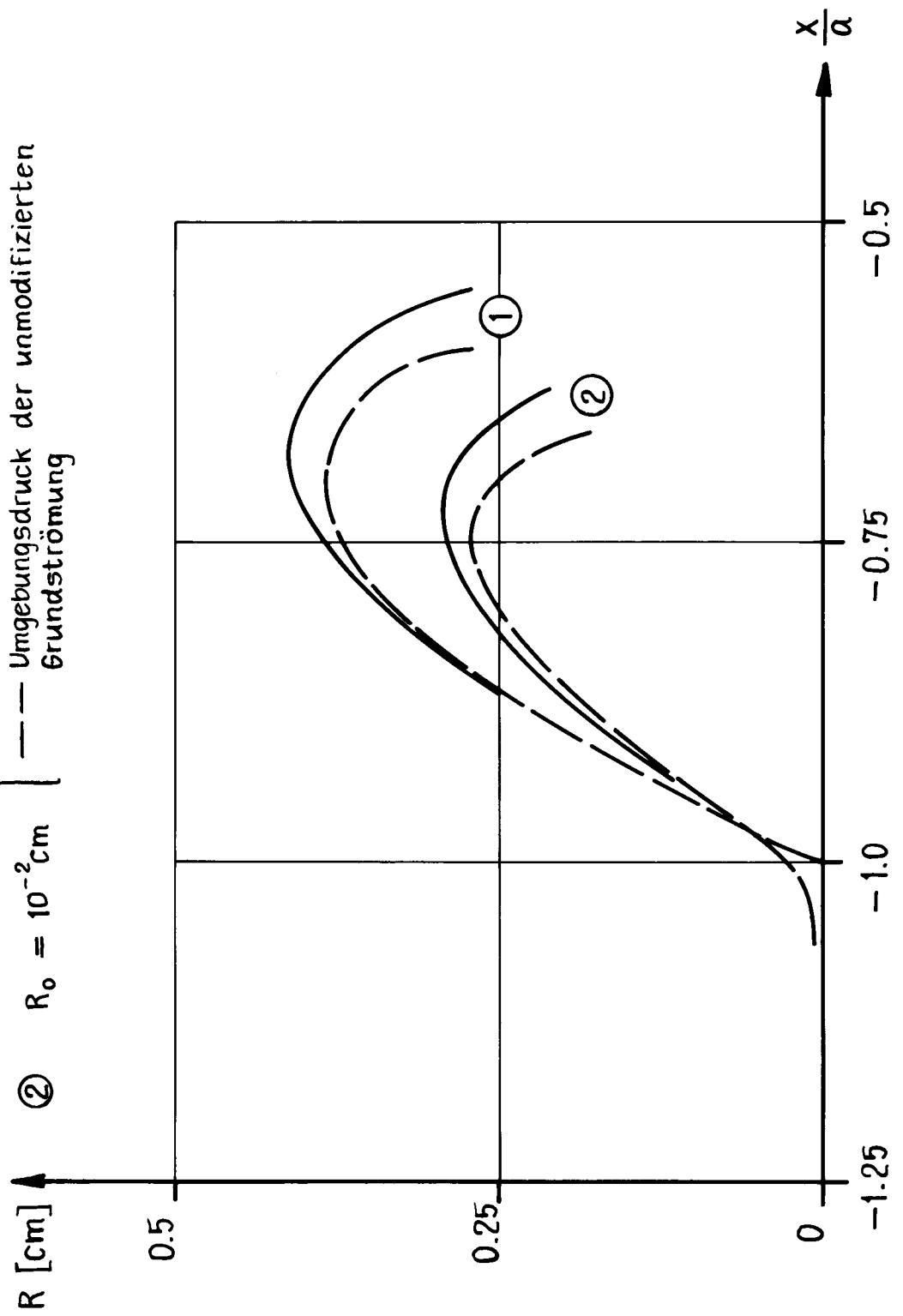


Abb. 3

Druckbeiwert im Verlauf der Blasenbahnen im Vergleich zu dem Druckbeiwert auf dem Profil nach der Profiltheorie

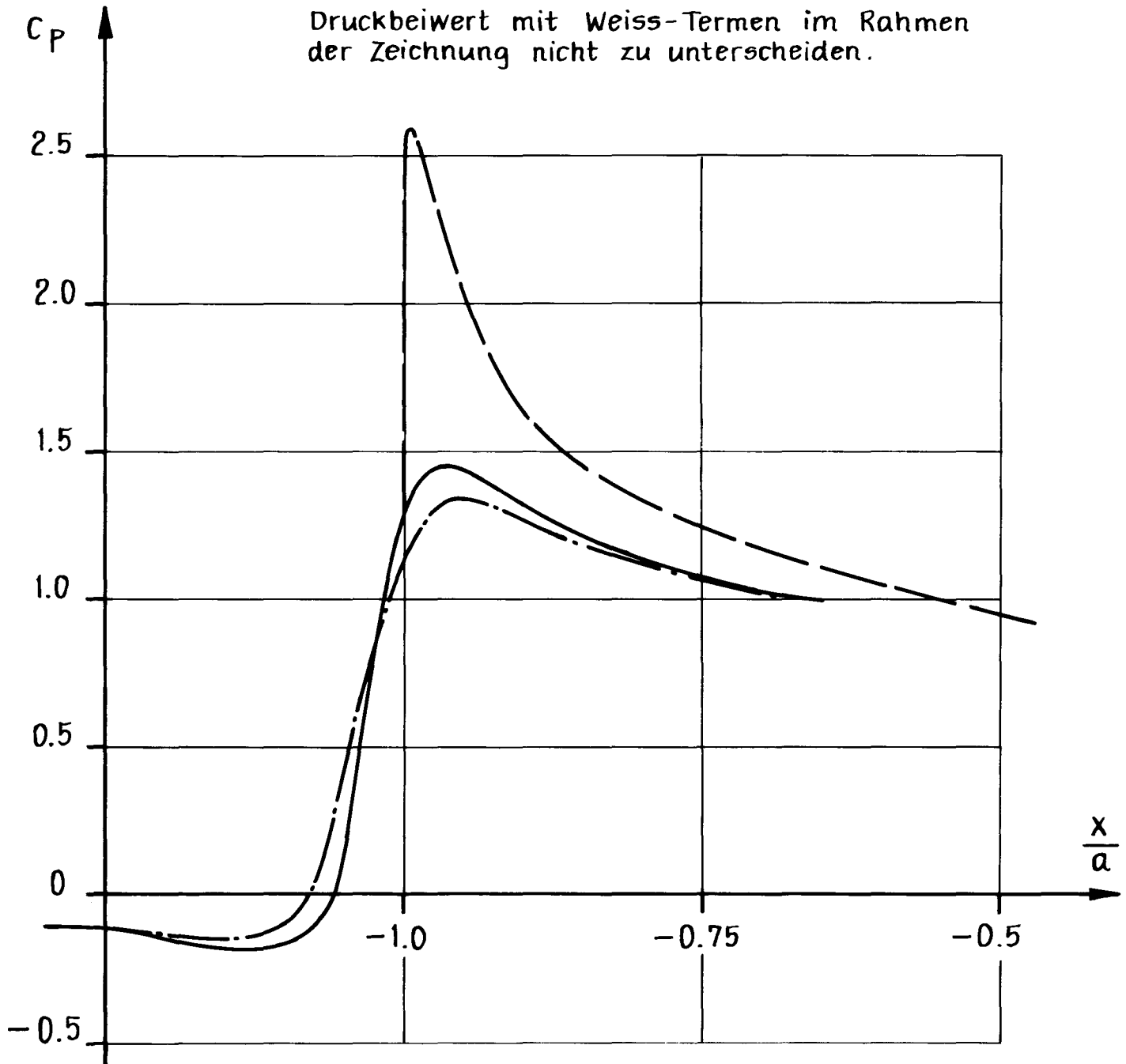
— — — Profildruckbeiwert

Druckbeiwert auf der Blasenbahn ohne Weiss-Terme

— bei $R_0 = 0.001$ cm Anfangsradius

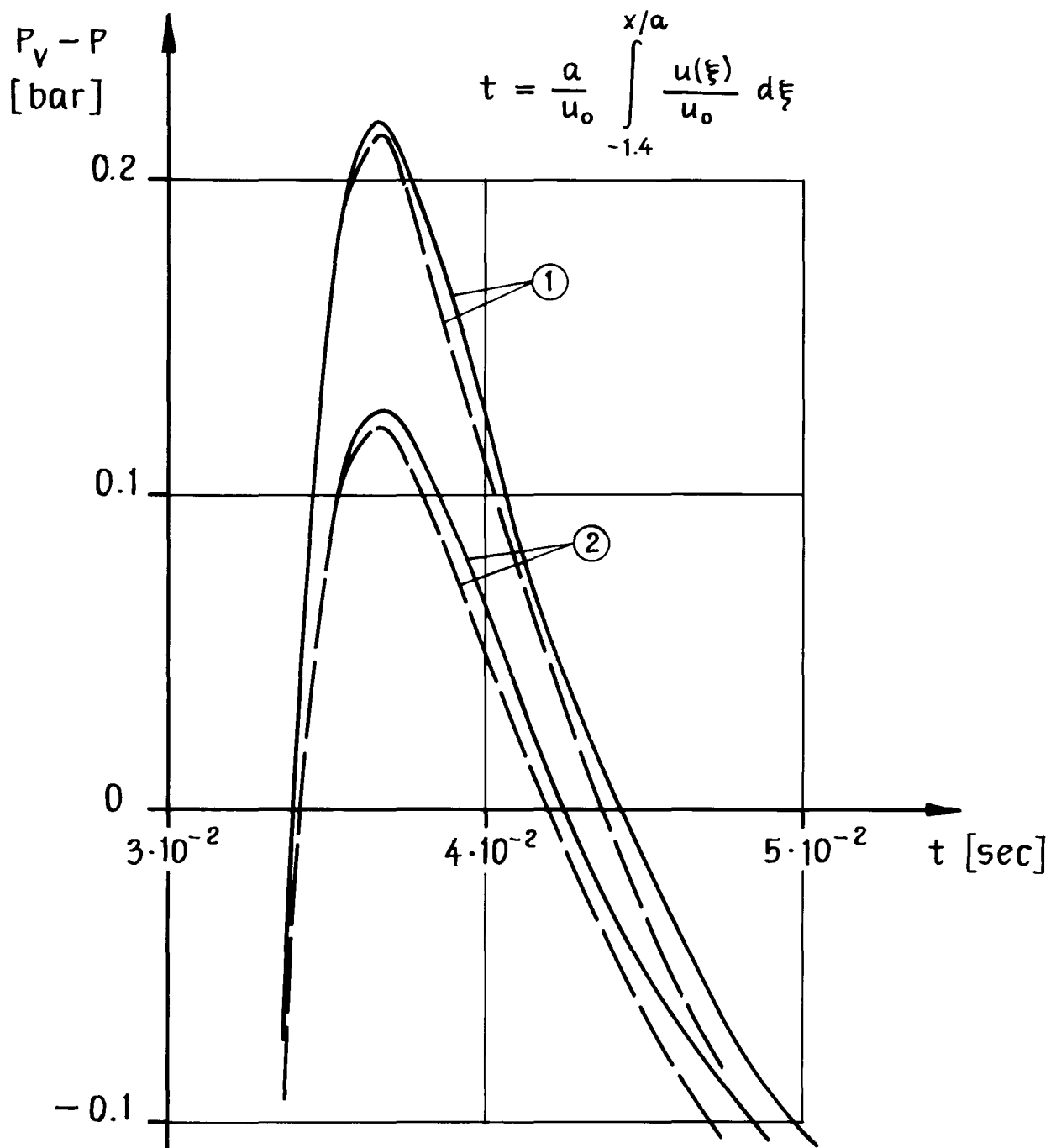
-.- $R_0 = 0.01$ cm — — —

Druckbeiwert mit Weiss-Termen im Rahmen der Zeichnung nicht zu unterscheiden.



Absolute Druckverteilung im Bereich der Blasen-
aufweitung; aufgetragen gegen die absolute Zeit,
für Blasenbahnen mit $R_o = 10^{-3} \text{ cm}$ und $R_o = 10^{-2} \text{ cm}$.

- | | | |
|---|----------------------------|--|
| ① | $R_o = 10^{-3} \text{ cm}$ | $\left\{ \begin{array}{l} \text{---} \text{ Umgebungsdruck gem.} \\ \text{Weiss'schem Theorem} \\ \text{---} \text{ Umgebungsdruck der} \\ \text{unmodifizierten Grundströmung} \end{array} \right.$ |
| ② | $R_o = 10^{-2} \text{ cm}$ | |



Absolute Druckverteilung, errechnet nach Riegels
für das Beispiel mit $u_0 = 13 \text{ m/sec}$

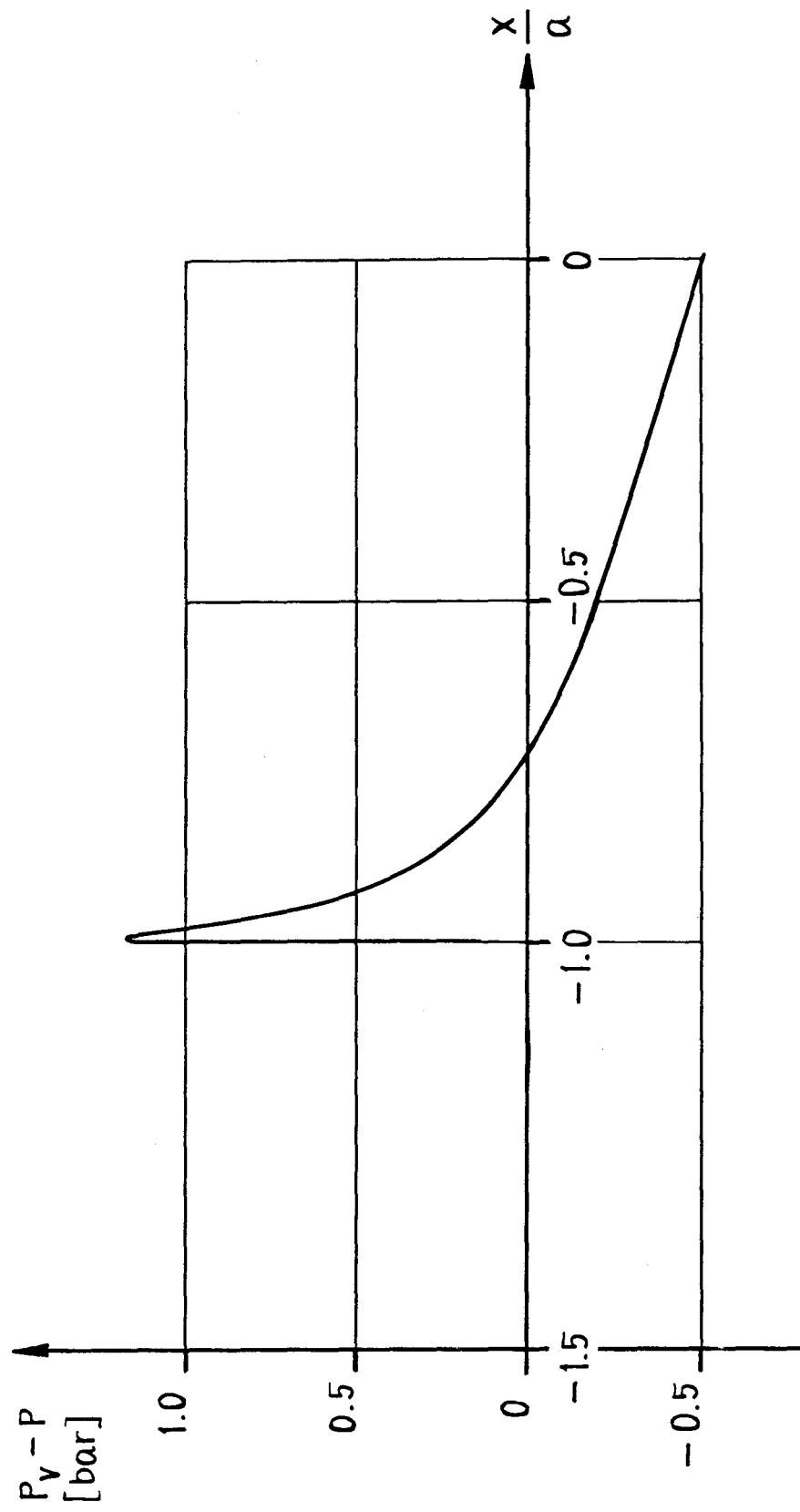
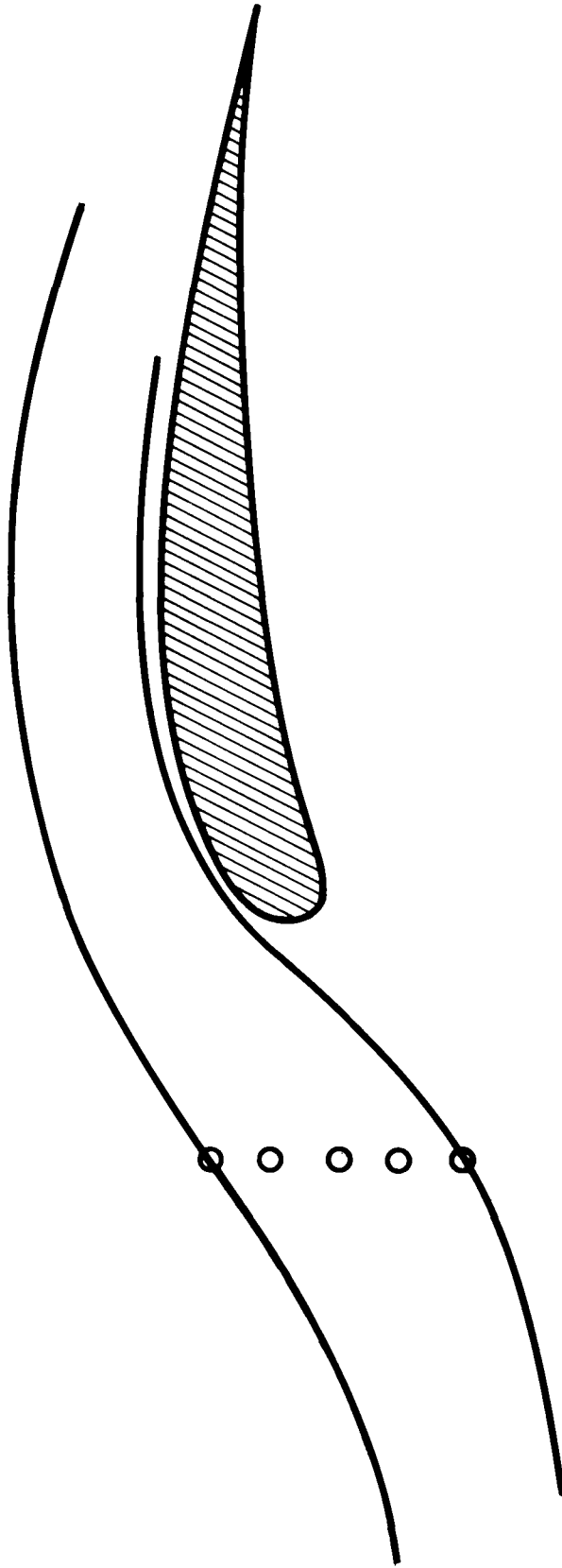
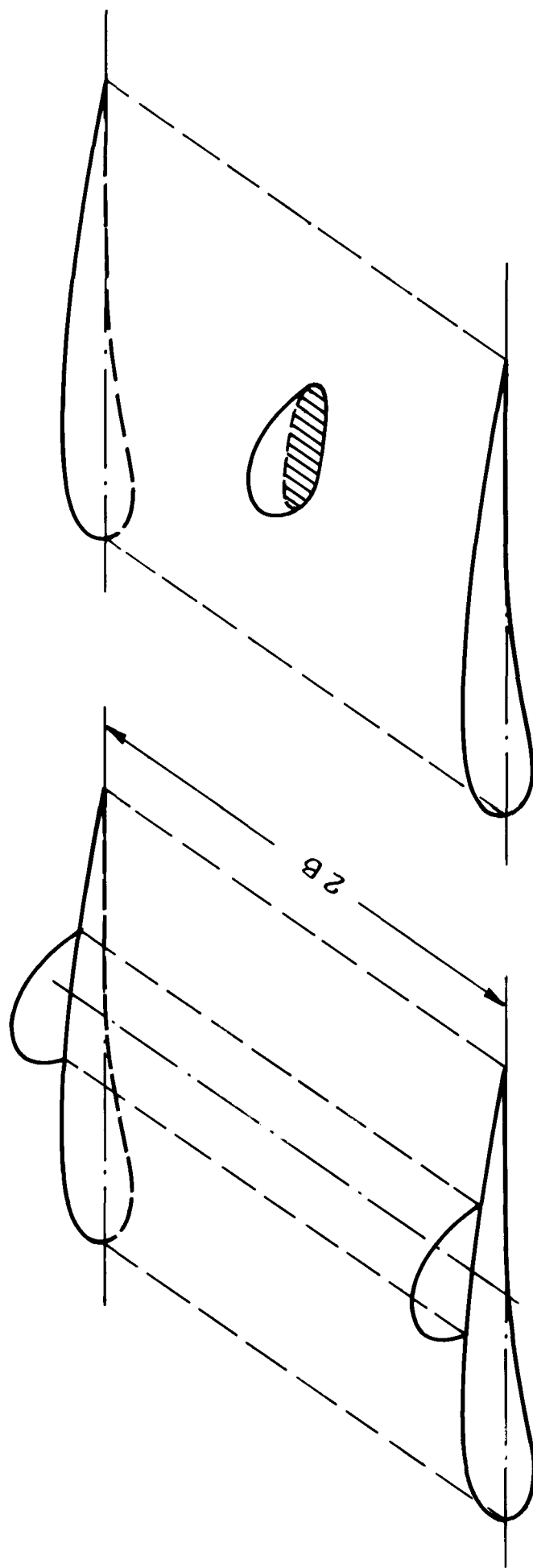


Abb. 6

TRAJEKTORIEN DER EINZELBLASEN



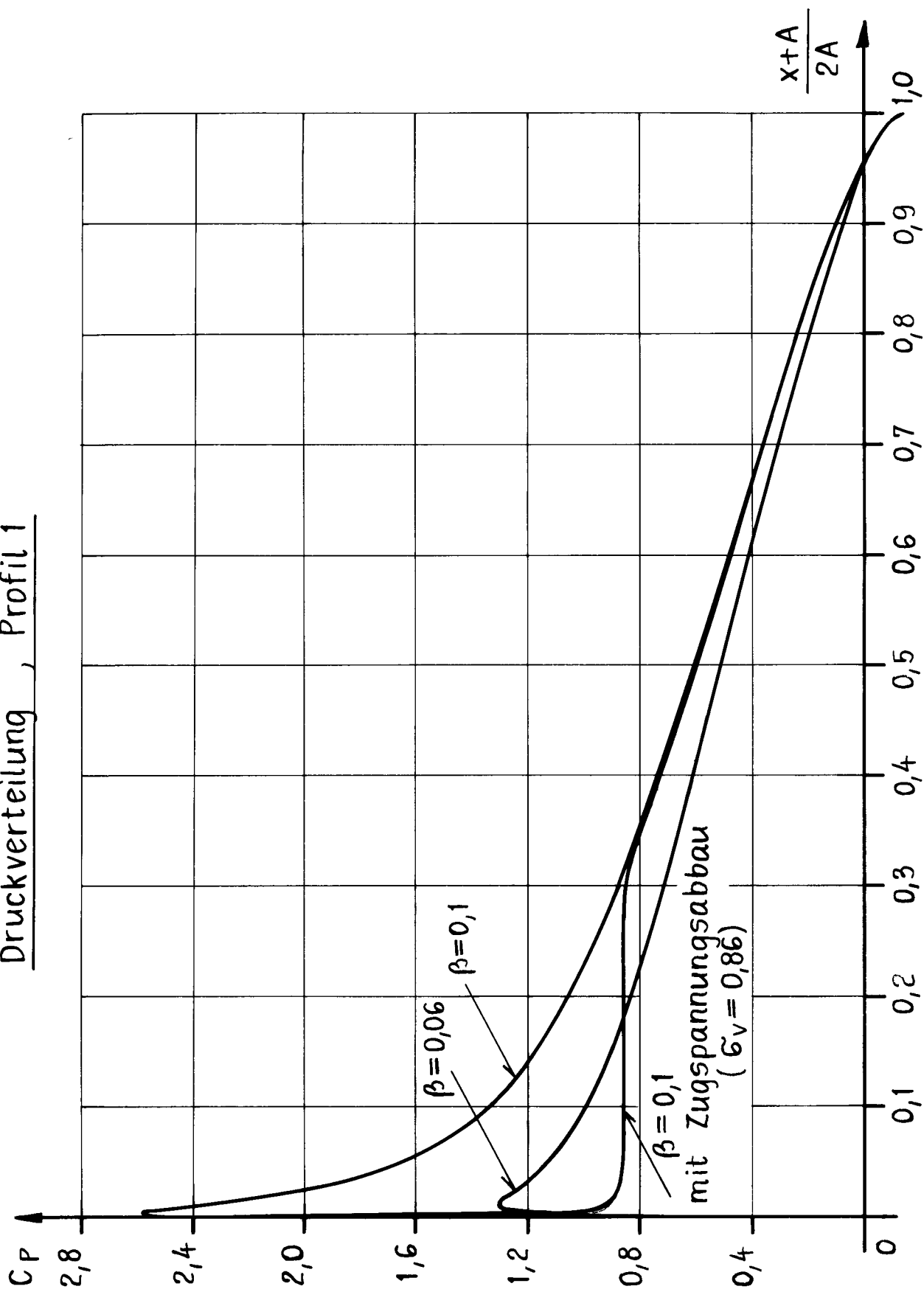
GEOMETRISCHE FORM DES BLASENCLUSTERS



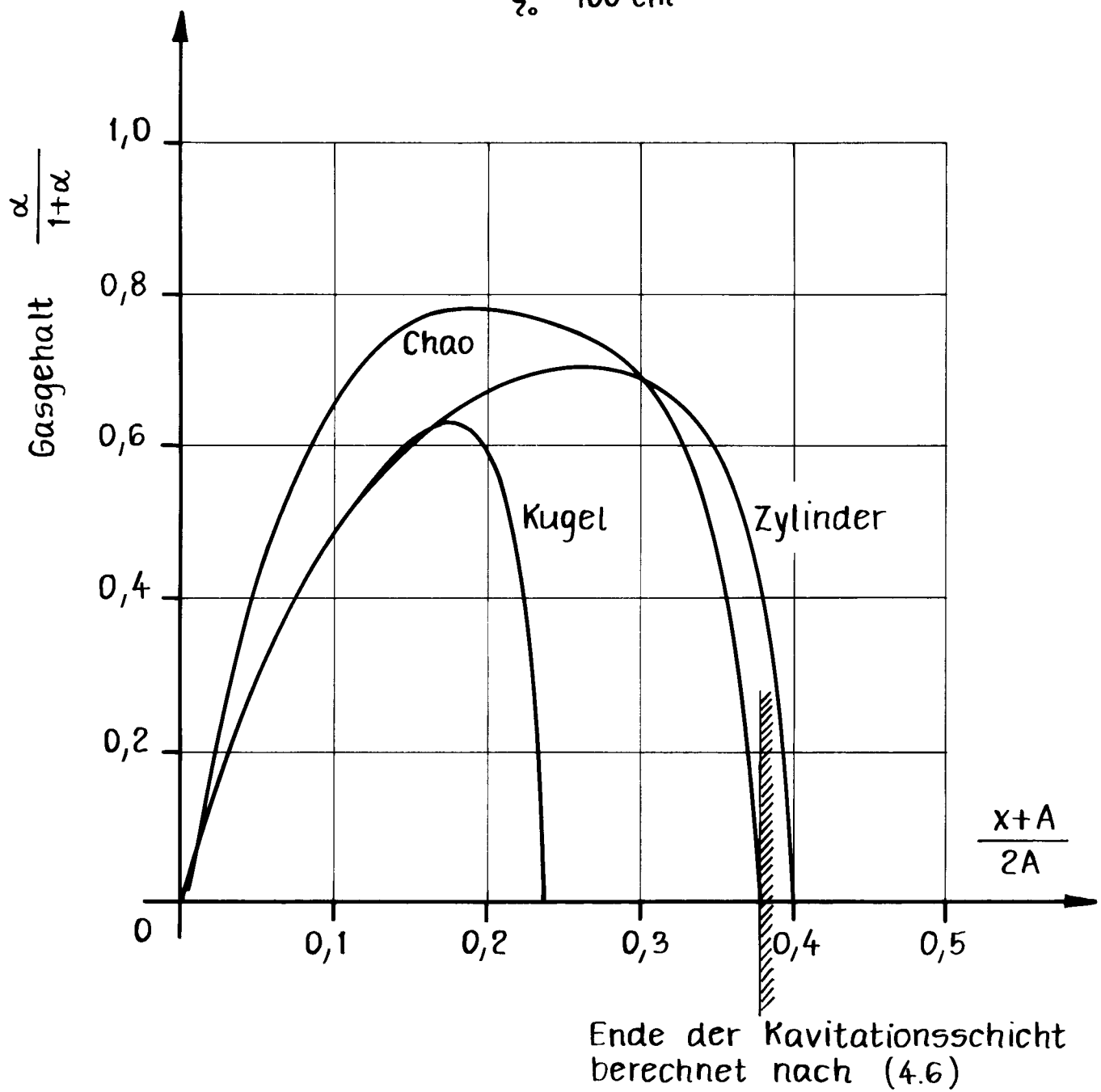
HALB - ZYLINDER

HALB - KUGEL

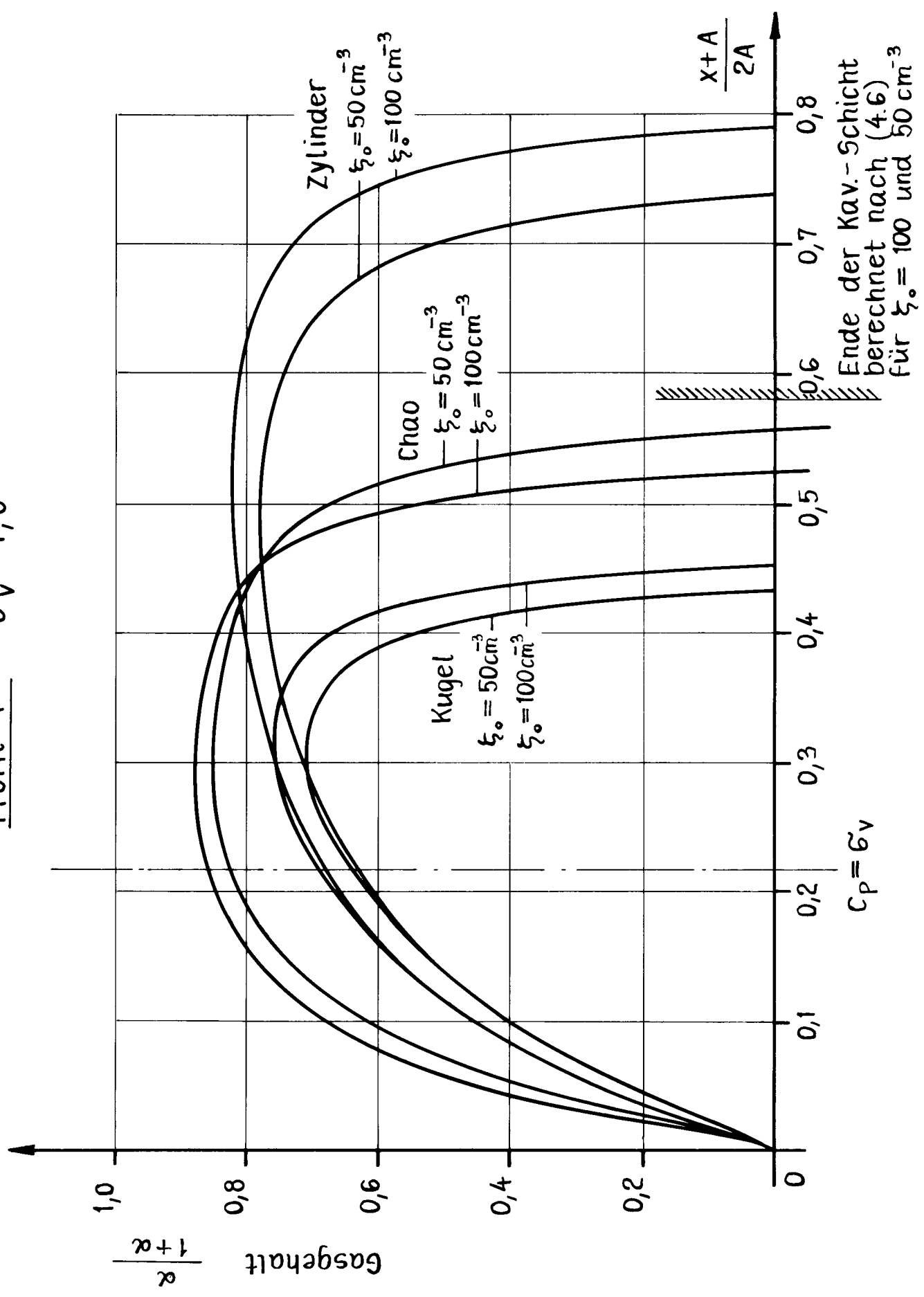
Druckverteilung , Profil 1



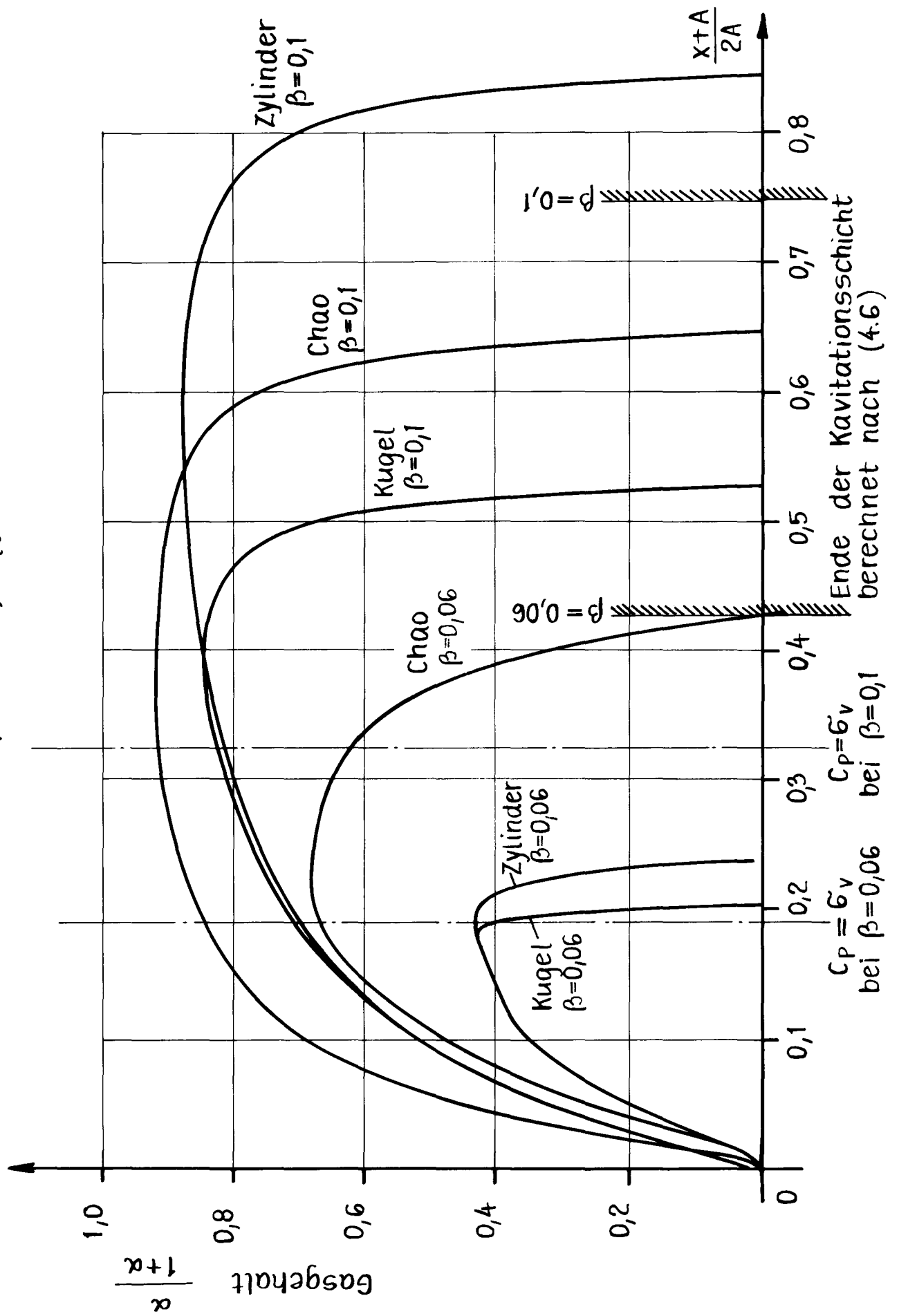
Profil 1 : $\beta = 0,1$; $\sigma_v = 1,2$;
 $\xi_0 = 100 \text{ cm}^{-3}$

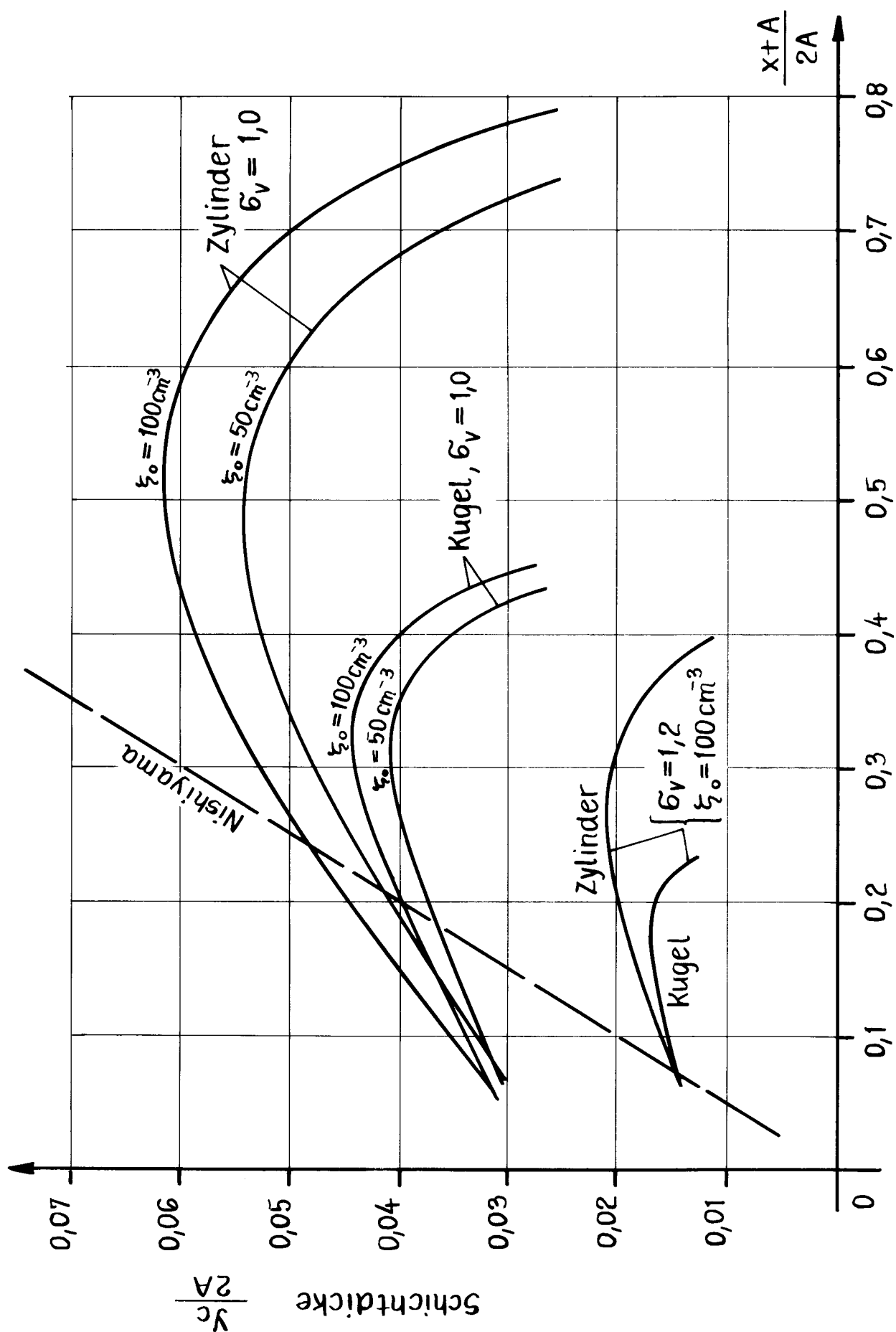


Profil 1: $\zeta_v = 1,0$

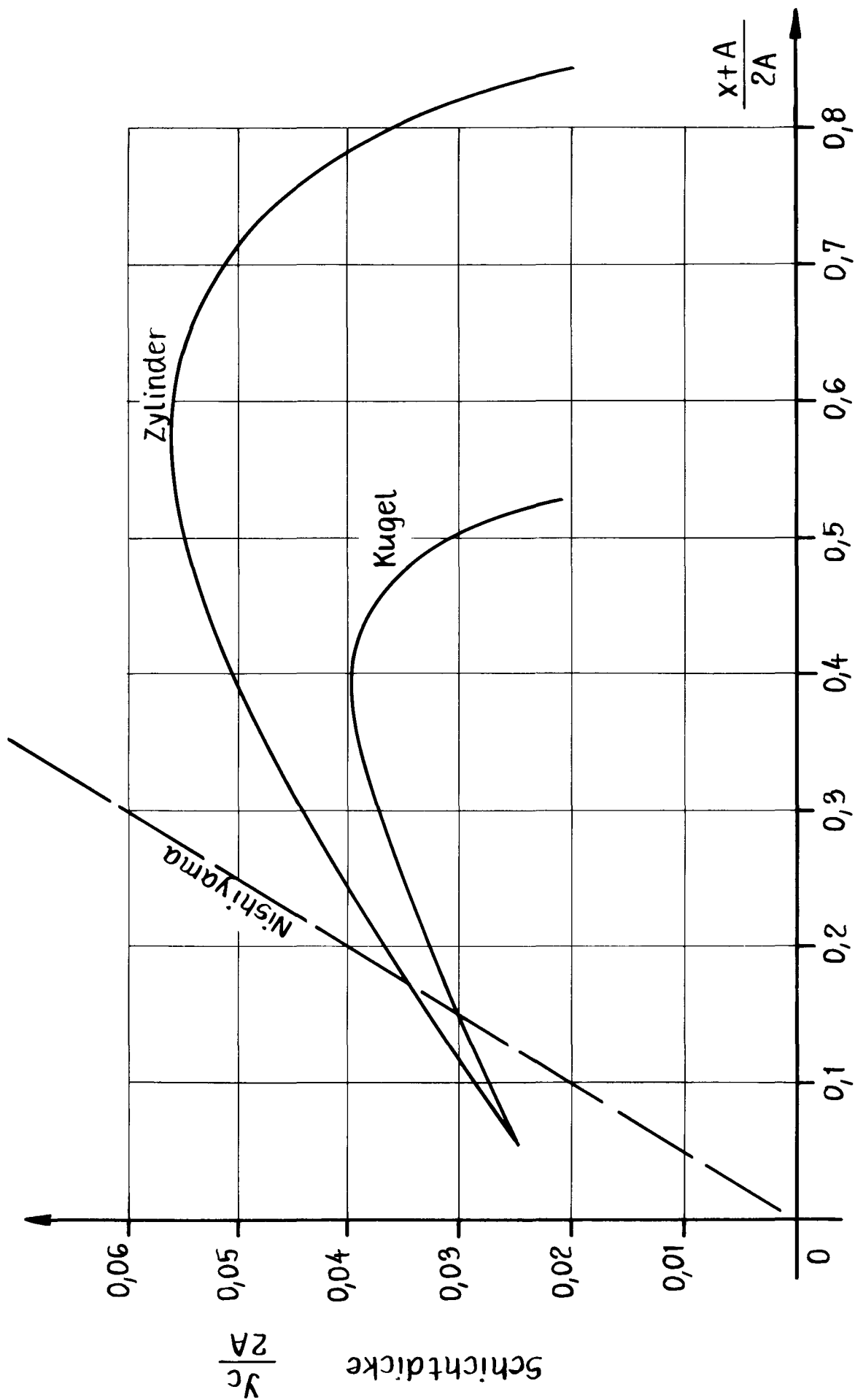


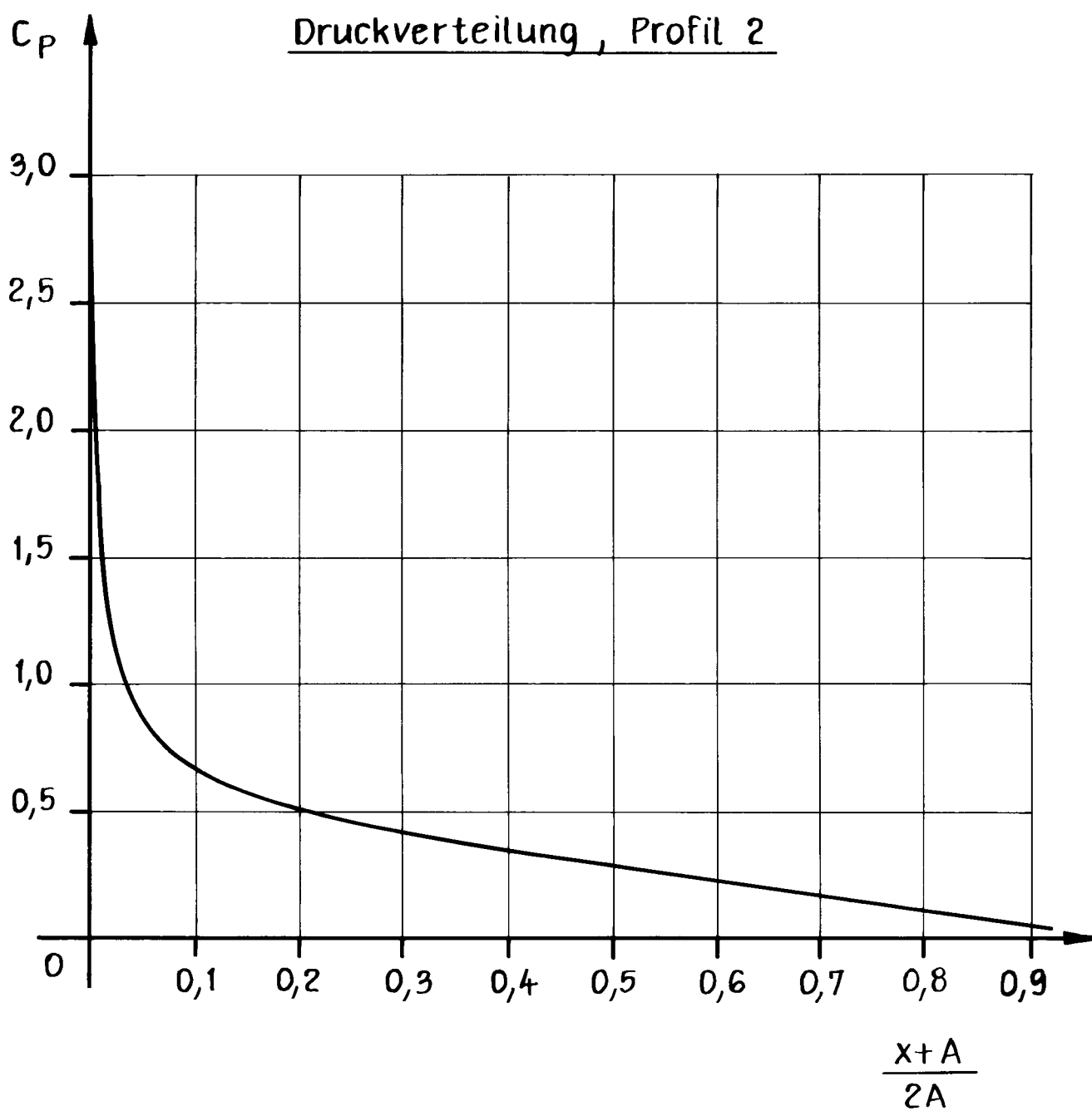
Profil 1 : $\bar{c}_v = 0,86$; $\zeta_o = 100 \text{ cm}^{-3}$



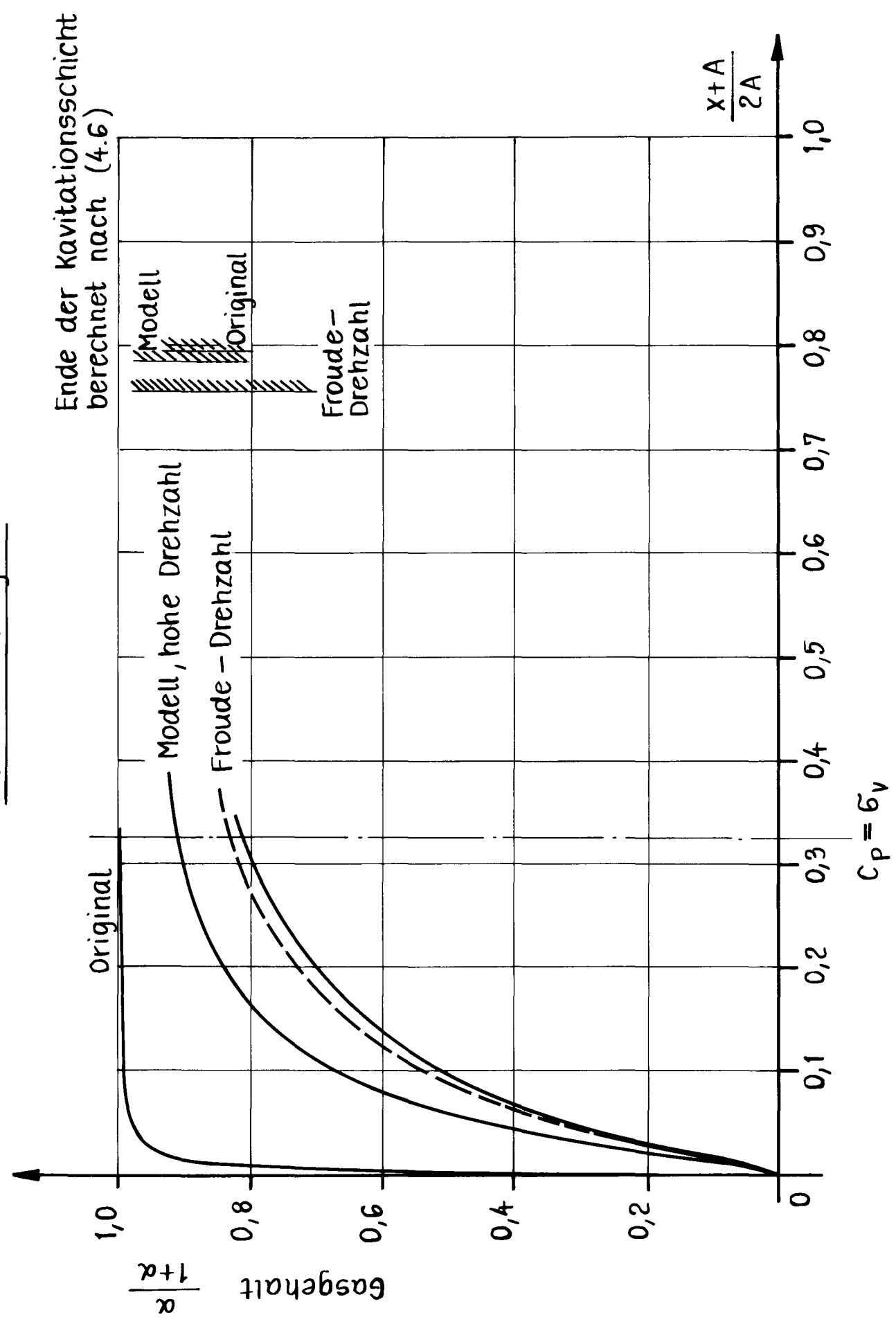


Profil 1 : $\beta = 0,1$; $\bar{\epsilon}_v = 0,86$; $\xi_o = 100 \text{ cm}^{-3}$

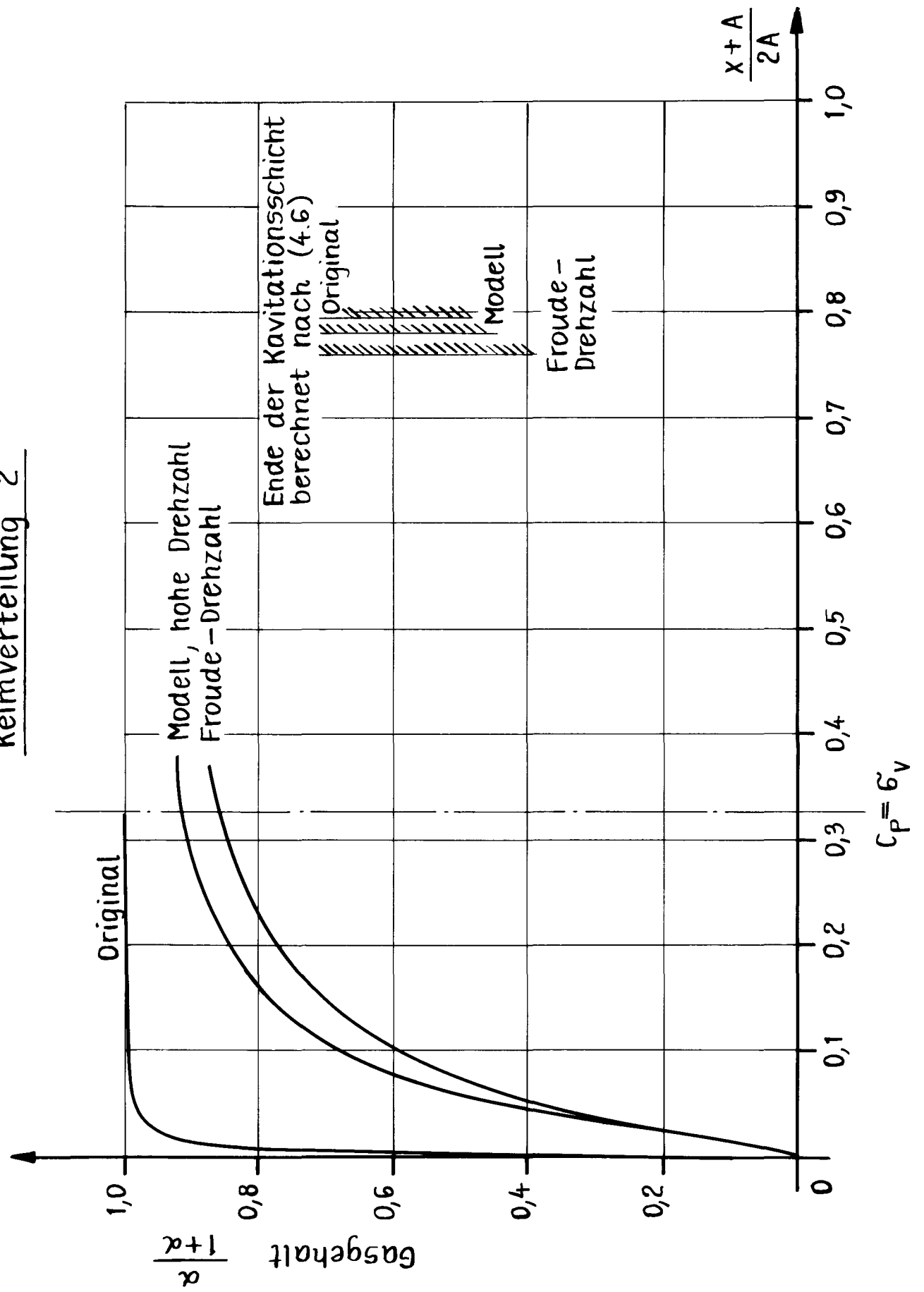




Keimverteilung 1



Keimverteilung 2



Zum Modell des Schichtclusters

