

**Kombinatorik**



## Abzählende Kombinatorik

---

Die elementare Kombinatorik beschäftigt sich mit der Abzählung von Konfigurationen einer endlichen Menge von Objekten unter Nebenbedingungen. In diesem Kapitel wird die elementare Kombinatorik fortgesetzt, wobei die Nebenbedingungen durch Symmetrien auf den Konfigurationen beschrieben werden. Die Untersuchungen gipfeln im so genannten Abzählungstheorem von Pólya. Abzählen lassen sich damit unter anderem Graphen, Perlenketten, Schaltfunktionen, Inzidenzstrukturen und chemische Isomere.

### 25.1 Gruppenoperationen

Sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $G$  eine Gruppe. Eine Gruppe  $G$  operiert auf  $X$ , wenn es eine Abbildung  $G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto gx$  gibt mit folgenden Eigenschaften

- $(gh)x = g(hx)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$ ,
- $ex = x$  für alle  $x \in X$ .

Es operiere  $G$  auf  $X$ . Zwei Elemente  $x, y \in X$  heißen  $G$ -äquivalent, kurz  $x \equiv_G y$ , wenn es ein Element  $g \in G$  gibt mit  $gx = y$ .

**Satz 25.1.** *Die Relation  $\equiv_G$  ist eine Äquivalenz auf  $X$ .*

*Beweis.* Seien  $x, y, z \in X$ . Wegen  $ex = x$  ist  $x \equiv_G x$ . Sei  $x \equiv_G y$ , also  $y = gx$  für ein  $g \in G$ . Dann ist  $g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$  und somit  $y \equiv_G x$ . Seien  $x \equiv_G y$  und  $y \equiv_G z$ , also  $y = gx$  und  $z = hy$  für gewisse  $g, h \in G$ . Dann folgt  $z = hy = h(gx) = (hg)x$ , mithin  $x \equiv_G z$ .  $\square$

Die Äquivalenzklassen  $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ ,  $x \in X$ , heißen auch *Bahnen von  $G$  auf  $X$* . Für die Menge aller Bahnen von  $G$  auf  $X$  schreiben wir

$$X_G = \{G(x) \mid x \in X\}. \quad (25.1)$$

Die Menge aller Bahnen von  $G$  auf  $X$  bildet nach Satz 5.5 eine Partition von  $X$ . Besteht diese Partition aus einer einzigen Bahn, d. h.,  $X_G = \{X\}$ , dann heißt die Gruppenoperation *transitiv*.

Sei  $x \in X$ . Der *Stabilisator von  $x$  in  $G$*  ist die Menge

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}. \quad (25.2)$$

**Lemma 25.2.** *Es operiere  $G$  auf  $X$ . Für jedes  $x \in X$  ist der Stabilisator  $G_x$  eine Untergruppe von  $G$ .*

*Beweis.* Seien  $g, h \in G_x$ , also  $gx = x = hx$ . Dann ist  $h^{-1}x = h^{-1}(hx) = (h^{-1}h)x = ex = x$  und somit  $h^{-1} \in G_x$ . Es folgt  $(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = gx = x$  und mithin  $gh^{-1} \in G_x$ . Mit dem Untergruppenkriterium folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 25.3. (Fundamentallemma)** *Es operiere  $G$  auf  $X$ . Für jedes  $x \in X$  gilt*

$$|G| = |G(x)| \cdot |G_x|. \quad (25.3)$$

*Beweis.* Für die Abbildung  $G(x) \rightarrow G/G_x : gx \mapsto gG_x$  gilt

$$gx = hx \iff (g^{-1}h)x \in G_x \iff gG_x = hG_x, \quad g, h \in G, x \in X.$$

Wird diese Äquivalenz von links nach rechts gelesen, so folgt, dass die Zuordnung  $gx \mapsto gG_x$  rechtseindeutig und somit eine Abbildung ist. Wird diese Äquivalenz von rechts nach links gelesen, dann erhellt sich, dass die Zuordnung  $gx \mapsto gG_x$  injektiv ist. Diese Abbildung ist definitionsgemäß surjektiv und deshalb bijektiv. Mit dem Satz von Lagrange folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 25.4.** *Es operiere  $G$  auf  $X$ . Die Abbildung*

$$\psi : G \rightarrow S_X : g \mapsto \bar{g}, \quad \bar{g} : x \mapsto gx, \quad (25.4)$$

*ist ein Homomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $g \in G$ . Die Abbildung  $\bar{g}$  ist injektiv, denn für  $x, y \in X$  folgt aus  $gx = gy$  per definitionem  $y = ey = (g^{-1}g)y = g^{-1}(gy) = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$ . Die Abbildung  $\bar{g}$  ist nach Satz 6.8 sogar bijektiv, also  $\bar{g} \in S_X$ . Für  $g, h \in G$  und  $x \in X$  gilt definitionsgemäß  $\overline{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = \bar{g}(hx) = \bar{g}(\bar{h}(x)) = (\bar{g}\bar{h})(x)$ . Mithin ist  $\psi$  ein Homomorphismus.  $\square$

Der obige Homomorphismus  $\psi$  heißt *Permutationsdarstellung von  $G$  auf  $X$* . Die Abbildung  $\bar{g} : X \rightarrow X$  wird als die *von  $g$  induzierte Permutation auf  $X$*  bezeichnet und die Gruppe  $\overline{G} = \psi(G)$  heißt *induzierte Permutationsgruppe von  $G$  auf  $X$* .

Beispiele 25.5. • Die natürliche Operation von  $S_X$  auf  $X$  ist

$$S_X \times X \rightarrow X : (\pi, x) \mapsto \pi(x). \quad (25.5)$$

Die induzierte Permutation  $\bar{\pi} : x \mapsto \pi(x)$  stimmt mit der Permutation  $\pi$  überein, d. h., die zugehörige Permutationsdarstellung ist die identische Abbildung.

- Die Gruppe  $G$  operiert auf sich selbst durch

$$G \times G \rightarrow G : (g, x) \mapsto gx. \quad (25.6)$$

Nach Satz 15.21 ist diese Operation transitiv und der Stabilisator eines Gruppenelements ist die triviale Gruppe  $\{e\}$ . Die Permutationsdarstellung  $\psi : g \mapsto \bar{g}$  besteht aus allen Linksmultiplikationen  $\bar{g} : h \mapsto gh$ .

- Die Gruppe  $G$  operiert auf sich selbst vermöge

$$G \times G \rightarrow G : (g, x) \mapsto gxg^{-1}. \quad (25.7)$$

Die Bahnen dieser Operation sind die *Konjugiertenklassen* der Gruppenelemente

$$G(x) = C^G(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}, \quad x \in X. \quad (25.8)$$

Die Stabilisatoren sind die *Normalisatoren* der Gruppenelemente

$$G_x = C_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}, \quad x \in X. \quad (25.9)$$

Mit dem Fundamentallemma folgt  $|G| = |C^G(x)| \cdot |C_G(x)|$ . Die Permutationsdarstellung ordnet jedem Gruppenelement  $g \in G$  die *Konjugation*  $\bar{g} : x \mapsto gxg^{-1}$  zu.

- Ist  $U$  eine Untergruppe von  $G$ , dann operiert  $G$  auf der Menge aller Linksnebenklassen  $G/U$  durch

$$G \times G/U \rightarrow G/U : (g, xU) \mapsto gxU. \quad (25.10)$$

Diese Operation ist transitiv. Der Stabilisator von  $xU$  ist die zu  $U$  *konjugierte Untergruppe*  $xUx^{-1}$ .

## 25.2 Das Lemma von Burnside

Es operiere  $G$  auf  $X$ . Sei  $X_G = \{O_1, \dots, O_r\}$  die Menge aller Bahnen von  $G$  auf  $X$ . Im Folgenden benötigen wir die Menge aller *Fixpunkte* von  $g \in G$  unter der Operation, also

$$X_g = \{x \in X \mid gx = x\}. \quad (25.11)$$

Es gilt definitionsgemäß  $x \in X_g$  genau dann, wenn  $g \in G_x$ .

Sei  $R$  ein kommutativer Ring, der den Körper der rationalen Zahlen als Unterring enthält. Sei  $w : X \rightarrow R$  eine auf den Bahnen konstante Abbildung. Dann kann das *Gewicht* einer Bahn  $O \in X_G$  durch einen beliebigen Bahnrepräsentanten festgelegt werden

$$w(O) = w(x), \quad x \in O. \quad (25.12)$$

**Satz 25.6. (Burnside)** *Operiert  $G$  auf  $X$ , dann gilt*

$$\sum_{g \in G} w(O_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X_g} w(x) = \frac{1}{|\overline{G}|} \sum_{\overline{g} \in \overline{G}} \sum_{x \in X_{\overline{g}}} w(x). \quad (25.13)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X_g} w(x) &= \sum_{x \in X} \sum_{g \in G_x} w(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{x \in O_i} \sum_{g \in G_x} w(x) \\ &= \sum_{i=1}^r w(O_i) \sum_{x \in O_i} \sum_{g \in G_x} 1 = \sum_{i=1}^r w(O_i) |G| \\ &= |G| \sum_{i=1}^r w(O_i). \end{aligned}$$

Dabei folgt die vorletzte Beziehung aus dem Fundamentallemma. Die zweite Gleichung ergibt sich anhand der Permutationsdarstellung  $\psi : G \rightarrow \overline{G}$ .  $\square$

Diese Aussage war offenbar schon Augustin Cauchy (1789-1857) sowie Georg Frobenius (1849-1917) bekannt, bevor sie William Burnside (1852-1927) wiederentdeckt hatte. Sie wird manchmal Cauchy-Frobenius-Lemma genannt, manchmal auch "The lemma that is not Burnside's!". Die originäre Form von Burnside's Lemma ergibt sich für  $R = \mathbb{Q}$  und  $w(x) = 1$  für alle  $x \in X$ .

**Korollar 25.7.** *Es operiere  $G$  auf  $X$ . Für die Anzahl der Bahnen von  $G$  auf  $X$  gilt*

$$|X_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|. \quad (25.14)$$

Die Anzahl der Bahnen von  $G$  auf  $X$  entspricht also der durchschnittlichen Anzahl der Fixpunkte der Elemente von  $G$ .

*Beispiel 25.8.* Die Gruppe  $G$  operiert auf sich selbst durch Konjugation  $G \times G \rightarrow G : (g, x) \mapsto gxg^{-1}$ . Nach Burnside's Lemma und 25.5 ist die Anzahl der Bahnen gleich der durchschnittlichen Mächtigkeit der *Zentralisatoren*  $Z_G(g) = \{x \in G \mid gxg^{-1} = x\}$  der Gruppenelemente

$$|G_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Z_G(g)|. \quad (25.15)$$

### 25.3 Färbungen

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt im Folgenden eine *Färbung* der Objekte aus  $X$  mit den Farben aus  $Y$ . Jede Operation von  $G$  auf  $X$  kann auf  $X^Y$  fortgesetzt werden.

**Lemma 25.9.** *Operiert  $G$  auf  $X$ , dann operiert  $G$  auf  $Y^X$  folgendermaßen*

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x), \quad g \in G, f \in Y^X, x \in X. \quad (25.16)$$

*Beweis.* Seien  $g, h \in G$ ,  $f \in Y^X$  und  $x \in X$ . Es gilt  $(ef)(x) = f(e^{-1}x) = f(ex) = f(x)$  und

$$\begin{aligned} ((gh)f)(x) &= f((gh)^{-1}(x)) = f((h^{-1}g^{-1})x) = f(h^{-1}(g^{-1}x)) \\ &= (hf)(g^{-1}x) = (g(hf))(x). \end{aligned}$$

□

Die Bahnen der Operation von  $G$  auf  $Y^X$  werden auch *Musterklassen* genannt.

*Beispiel 25.10.* Wir betrachten Perlenketten mit zwei grünen und zwei roten Perlen. Sei  $X = \{1, \dots, 4\}$  die Menge der Knoten eines Quadrats (Abb. 21.5), also die Positionen der Perlen, und  $Y = \{g, r\}$  die Menge der Farben.

Die Färbungen werden im Folgenden als Wörter notiert. Beispielsweise bezeichnet  $rrgr$  diejenige Färbung, bei der die Knoten 1, 2 und 4 rot und der Knoten 3 grün gefärbt sind. Die Menge aller diesbezüglichen Färbungen ist

$$\begin{aligned} X^Y &= \{gggg, gggr, ggrg, ggrr, grgg, grgr, grrg, grrr \\ &\quad rggg, rggr, rgrg, rgrr, rrgg, rrgr, rrrg, rrrr\}. \end{aligned}$$

Als Symmetriegruppe des Quadrats wird die Diedergruppe  $D_4$  betrachtet. Damit sind zwei Färbungen  $D_4$ -äquivalent, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung des Quadrats ineinander übergehen. Für  $f = grgr$  und  $\pi = (1234)$  gilt  $\pi f = rgrg$ , denn  $\pi^{-1} = (1432)$  und somit  $(\pi f)(1) = f(\pi^{-1}(1)) = f(4) = r$ ,  $(\pi f)(2) = f(\pi^{-1}(2)) = f(1) = g$ ,  $(\pi f)(3) = f(\pi^{-1}(3)) = f(2) = r$  und  $(\pi f)(4) = f(\pi^{-1}(4)) = f(3) = g$ . Die zugehörigen Musterklassen lauten

$$\begin{aligned} &\{gggg\}, && \{grgr, rgrg\}, \\ &\{gggr, ggrg, grgg, rggg\}, && \{ggrr, grrg, rggr, rrgg\}, \\ &\{grrr, rgrr, rrgr, rrrg\}, && \{rrrr\}. \end{aligned}$$

### 25.4 Zykelindikatorpolynome

Sei  $G$  eine Permutationsgruppe vom Grad  $n$ . Jede Permutation  $g \in G$  lässt sich nach Abs. 6.4 als Produkt disjunkter Zykeln darstellen. Sei  $l = l(g)$  die Anzahl der disjunkten Zykeln in dieser Darstellung von  $g$  sowie  $l_k = l_k(g)$  die Anzahl der disjunkten Zykeln von  $g$  der Länge  $k$ . Dann gilt

$$l = \sum_{k=1}^n l_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n k \cdot l_k = n. \tag{25.17}$$

Es operiere  $G$  auf  $X$ . Das *Zykelindikatorpolynom* von  $G$  auf  $X$  ist definiert durch

$$P(G, X; z_1, \dots, z_{|X|}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{k=1}^{|X|} z_k^{l_k(\bar{g})}, \tag{25.18}$$

wobei  $z_1, \dots, z_n$  Unbestimmte über dem Körper der rationalen Zahlen seien.

Im Folgenden sei  $G$  eine Permutationsgruppe vom Grad  $n$ , die in natürlicher Weise auf der Menge  $X = \{1, \dots, n\}$  operiere. Nach 25.5 ist dann  $\bar{g} = g$  für jedes  $g \in G$ . Aus Satz 10.17 erhellt sich sofort der folgende

**Satz 25.11.** *Das Zykelindikatorpolynom der symmetrischen Gruppe  $S_n$  lautet*

$$P(S_n, X; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{\prod_k l_k! k^{l_k}} \prod_k z_k^{l_k}, \tag{25.19}$$

wobei über alle  $n$ -Tupel  $(l_1, \dots, l_n)$  nichtnegativer ganzer Zahlen mit der Eigenschaft (25.17) summiert wird.

**Satz 25.12.** *Das Zykelindikatorpolynom der zyklischen Gruppe  $C_n$  lautet*

$$P(C_n, X; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \\ k|n}} \Phi(k) z_k^{n/k}. \tag{25.20}$$

*Beweis.* Die Gruppe  $C_n$  enthält  $\Phi(k)$  Elemente der Ordnung  $k$  und jedes solche Element besteht aus  $n/k$  Zykeln der Länge  $k$ . □

**Satz 25.13.** *Das Zykelindikatorpolynom der Diedergruppe  $D_n$  lautet*

$$P(D_n, X; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2} P(C_n, X; z_1, \dots, z_n) + \begin{cases} \frac{1}{4}(z_2^{n/2} + z_1^2 z_2^{(n-2)/2}) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} z_1 z_2^{(n-1)/2} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{25.21}$$

*Beweis.* Die Drehungen eines regulären  $n$ -Ecks bilden eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $n$  von  $D_n$ . Ist  $n$  ungerade, dann lassen die Spiegelungen jeweils einen Knoten fest. Die restlichen Knoten sind in Transpositionen gepaart. Jede solche Spiegelung liefert einen Beitrag zu  $z_1 z_2^{(n-1)/2}$  und die Anzahl der Spiegelungen ist  $n$ . Ist  $n$  gerade, dann lässt eine Spiegelung entweder zwei oder null Knoten invariant, während die übrigen Knoten in Transpositionen zusammengefasst sind. Eine solche Spiegelungen liefert einen Beitrag zu  $z_2^{n/2}$  bzw.  $z_1^2 z_2^{(n-2)/2}$ . Es gibt gleichviele Spiegelungen jeden Typs, also jeweils  $n/2$ .  $\square$

*Beispiel 25.14.* Die zyklische Gruppe  $C_4$  operiert in natürlicher Weise auf  $X = \{1, \dots, 4\}$ . Für das zugehörige Zykelindikatorpolynom gilt

$$P(C_4, X; z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{4} (z_1^4 + z_2^2 + 2z_4).$$

Das neutrale Element ist vom Typ  $4^1$ , die Zykeln  $(1234)$  und  $(1432)^3 = (1234)$  sind vom Typ  $4^1$  und die Permutation  $(1234)^2 = (13)(24)$  ist vom Typ  $2^2$ .

Die Diedergruppe  $D_4$  operiert in natürlicher Weise auf  $X = \{1, \dots, 4\}$ . Für das diesbezügliche Zykelindikatorpolynom gilt

$$P(D_4, X; z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{8} (z_1^4 + 2z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 2z_4).$$

Die Spiegelungen  $(13)$  und  $(24)$  lassen jeweils zwei Knoten fest und sind vom Typ  $1^2 2^1$ , während die Spiegelungen  $(12)(34)$  und  $(14)(23)$  keinen Knoten invariant lassen und vom Typ  $2^2$  sind.

**Satz 25.15.** *Sei  $G$  eine Permutationsgruppe, die auf einer Menge  $X$  operiere. Die Anzahl der Musterklassen der Operation von  $G$  auf  $Y^X$  ist gleich  $P(G, X; |Y|, \dots, |Y|)$ .*

*Beweis.* In  $P(G, X; |Y|, \dots, |Y|)$  liefert  $g \in G$  den Beitrag  $\prod_{k=1}^{|X|} |Y|^{l_k(\bar{g})} = |Y|^{l(\bar{g})}$ . Sei  $f \in Y^X$ . Die Bedingung  $gf = f$  besagt, dass alle Elemente von  $X$ , die zum selben Zykel von  $\bar{g}$  gehören, die gleiche Farbe tragen. Es gibt  $|Y|$  Möglichkeiten, einen Zykel in  $\bar{g}$  zu färben. Da  $l(\bar{g})$  die Anzahl der Zykeln von  $\bar{g}$  bezeichnet, ist die Anzahl der Färbungen  $f$  mit  $gf = f$  gleich  $|Y|^{l(\bar{g})}$ . Mit dem Lemma von Burnside folgt die Behauptung.  $\square$

*Beispiel 25.16.* Nach 25.14 gilt

$$P(D_4, X; m, \dots, m) = \frac{1}{8} (m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m).$$

Im Falle  $m = 2$  resultieren sechs Musterklassen, wie schon in 25.10 gezeigt.

## 25.5 Der Satz von Pólya

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen und  $G$  eine Gruppe, die auf  $X$  operiert. Sei  $R$  ein kommutativer Ring, der den Körper der rationalen Zahlen als Unterring enthält, und  $W : Y \rightarrow R$  eine Abbildung. Das  $W$ -Gewicht der Färbungen in  $Y^X$  ist die Abbildung

$$w : Y^X \rightarrow R : f \mapsto \prod_{x \in X} W(f(x)). \quad (25.22)$$

**Lemma 25.17.** *Jedes  $W$ -Gewicht  $W : Y \rightarrow R$  ist konstant auf den Musterklassen von  $G$  auf  $Y^X$ .*

*Beweis.* Für  $f \in Y^X$  und  $g \in G$  gilt

$$w(f) = \prod_{x \in X} W(f(x)) = \prod_{x \in X} W(f(g^{-1}x)) = \prod_{x \in X} W((gf)(x)) = w(gf),$$

weil mit  $x$  auch  $g^{-1}x$  alle Elemente von  $X$  durchläuft. □

Sei  $\{O_1, \dots, O_r\}$  die Menge aller Musterklassen der Operation von  $G$  auf  $Y^X$ . Nach Lemma 25.17 kann das  $W$ -Gewicht einer Musterklasse  $O$  durch einen beliebigen Repräsentanten festgelegt werden

$$w(O) = w(f), \quad f \in O. \quad (25.23)$$

Der  $W$ -Mustervorrat von  $G$  auf  $Y^X$  ist die Summe der  $W$ -Gewichte aller Musterklassen

$$P(G, X; W) = \sum_{i=1}^r w(O_i). \quad (25.24)$$

Wir wenden uns der zentralen Aussage dieses Kapitels, dem Satz von George Pólya (1887-1985), zu. Er besagt, dass der Mustervorrat mithilfe des Zykelindikatorpolynoms berechnet werden kann.

**Satz 25.18. (Pólya)** *Es operiere eine Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$ . Für den  $W$ -Mustervorrat von  $G$  auf  $Y^X$  gilt*

$$P(G, X; W) = P(G, X; s_1, \dots, s_{|X|}), \quad (25.25)$$

wobei  $s_k$  die  $k$ -te  $W$ -Gewichtssumme bezeichnet

$$s_k = \sum_{y \in Y} W(y)^k, \quad 1 \leq k \leq |X|. \quad (25.26)$$

*Beweis.* Nach dem Lemma von Burnside gilt

$$P(G, X; W) = \sum_{i=1}^r w(O_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in (Y^X)_{\bar{g}}} w(f). \quad (25.27)$$

Eine Färbung  $f : X \rightarrow Y$  liegt in  $(Y^X)_{\bar{g}}$  genau dann, wenn  $f$  konstant auf den Zykeln von  $\bar{g}$  ist. Schreiben wir also  $\bar{g} = \gamma_1 \dots \gamma_l$  als Produkt disjunkter Zykeln, dann folgt

$$\sum_{f \in (Y^X)_{\bar{g}}} w(f) = \sum_{(y_1, \dots, y_l) \in Y^l} \prod_{k=1}^l W(y_k)^{|\gamma_k|}, \quad (25.28)$$

wobei  $|\gamma_k|$  die Länge des Zyklus  $\gamma_k$  bezeichnet. Enthält  $\bar{g}$  genau  $l_k$  Zykeln der Länge  $k$ , dann ergibt sich

$$\sum_{f \in (Y^X)_{\bar{g}}} w(f) = \prod_{k=1}^{|X|} \left( \sum_{y \in Y} W(y)^k \right)^{l_k} = \prod_{k=1}^{|X|} s_k^{l_k} \quad (25.29)$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Die Farben können als Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$  aufgefasst werden, also

$$W : Y \rightarrow \mathbb{Q}[Y] : y \mapsto y, \quad (25.30)$$

wobei  $\mathbb{Q}[Y]$  den Polynomring über  $\mathbb{Q}$  in den Unbestimmten aus  $Y$  bezeichnet. Somit ist das  $W$ -Gewicht  $w(f) = \prod_x f(x)$  einer Färbung  $f$  ein Monom in  $\mathbb{Q}[Y]$ .

Der *Inhalt einer Färbung*  $f \in Y^X$  ist die Abbildung

$$c(f, -) : Y \rightarrow \mathbb{N}_0 : y \mapsto |f^{-1}(y)|. \quad (25.31)$$

Die Zahl  $c(f, y)$  gibt die Vielfachheit an, mit der  $f$  den Wert  $y$  annimmt. Für jede Färbung  $f \in Y^X$  gilt

$$w(f) = \prod_{x \in X} f(x) = \prod_{y \in Y} y^{|f^{-1}(y)|} = \prod_{y \in Y} y^{c(f,y)}. \quad (25.32)$$

Damit erhellt sich der folgende

**Satz 25.19.** *Es operiere eine Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$ . Die Anzahl der Musterklassen von  $G$  auf  $Y^X$ , deren Elemente den gleichen Inhalt wie eine Färbung  $f \in Y^X$  besitzen, ist durch den Koeffizienten des Monoms  $\prod_y y^{c(f,y)}$  im  $W$ -Mustervorrat von  $G$  auf  $Y^X$  gegeben.*

*Beispiel 25.20.* Wir betrachten die natürliche Operation der Diedergruppe  $D_4$  auf der Menge  $X = \{1, \dots, 4\}$ . Nach 25.14 gilt für das zugehörige Zykelindikatorpolynom

$$P(D_4, X; z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{8} (z_1^4 + 2z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 2z_4).$$

Seien  $g$  und  $r$  Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Dann liefern die Gewichte  $W(g) = g$  und  $W(r) = r$  den  $W$ -Mustervorrat

$$\begin{aligned} P(D_4, X; W) &= \frac{1}{8} [(g+r)^4 + 2(g+r)^2(g^2+r^2) + 3(g^2+r^2)^2 + 2(g^4+r^4)] \\ &= g^4 + g^3r + 2g^2r^2 + gr^3 + r^4. \end{aligned}$$

Die Musterklassen entsprechen den unter Drehung und Spiegelung wesentlich verschiedenen Perlenketten mit vier Perlen und zwei Farben. Aus dem Polynom  $P(D_4, X; W)$  lässt sich ersehen, dass es eine Perlenkette gibt mit vier grünen Perlen ( $g^4$ ), eine Perlenkette mit drei grünen Perlen und einer roten Perle ( $g^3r$ ), zwei Perlenketten mit zwei grünen Perlen und zwei roten Perlen ( $2g^2r^2$ ), eine Perlenkette mit einer grünen Perle und drei roten Perlen ( $gr^3$ ) und eine Perlenkette mit vier roten Perlen ( $r^4$ ). Die Anzahl der Musterklassen kann nach Satz 25.15 anhand der Gewichte  $W(g) = W(r) = 1$  berechnet werden

$$P(C_4, X; W) = \frac{1}{8} (2^4 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = 6.$$

## 25.6 Anwendungen

Wir behandeln einige wichtige Anwendungen des Satzes von Pólya. Die Mustervorräte in den Beispielen wurden mit dem Computeralgebrasystem Maple V berechnet.

### Perlenketten

Wir betrachten Perlenketten mit  $n$  Perlen und  $m$  Farben. Sei  $X = \{1, \dots, n\}$  die Menge der Perlen und  $Y = \{1, \dots, m\}$  die Menge der Farben. Die Perlen können als Knoten eines regulären  $n$ -Ecks aufgefasst werden.

Zwei Färbungen in  $Y^X$  sollen gleichwertig sein, wenn sie durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergehen. In diesem Fall operiert die Diedergruppe  $D_n$  auf  $Y^X$ .

*Beispiel 25.21.* Wir betrachten Perlenketten mit vier Perlen und drei Farben: blau (b), grün (g) und rot (r). Das Zykelindikatorpolynom von  $D_4$  auf  $X$  lautet

$$P(D_4, X; z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{8} (z_1^4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + 2z_4).$$

Seien  $b, g$  und  $r$  Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Setzen wir  $W(b) = b$ ,  $W(g) = g$  und  $W(r) = r$ , dann ergibt sich als  $W$ -Mustervorrat

$$P(D_4, X; W) = b^4 + b^3g + b^3r + 2b^2g^2 + 2b^2r^2 + 2b^2gr + bg^3 + 2bg^2r \\ + 2bgr^2 + br^3 + g^4 + g^3r + 2g^2r^2 + gr^3 + r^4.$$

Zwei Färbungen in  $Y^X$  sollen äquivalent sein, wenn sie durch Drehung zur Deckung gebracht werden können. In diesem Fall operiert die zyklische Gruppe  $C_n$  auf  $Y^X$ .

*Beispiel 25.22.* Wir betrachten wiederum Perlenketten mit vier Perlen und drei Farben: blau ( $b$ ), grün ( $g$ ) und rot ( $r$ ). Das Zykelindikatorpolynom von  $C_4$  auf  $X$  lautet

$$P(C_4, X; z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4).$$

Seien  $b, g$  und  $r$  Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Wir setzen  $W(b) = b$ ,  $W(g) = g$  und  $W(r) = r$  und erhalten als  $W$ -Mustervorrat

$$P(C_4, X; W) = b^4 + b^3g + b^3r + 2b^2g^2 + 2b^2r^2 + 3b^2gr + bg^3 + 3bg^2r \\ + 3bgr^2 + br^3 + g^4 + g^3r + 2g^2r^2 + gr^3 + r^4.$$

Beispielsweise gibt es unter  $C_4$  drei inäquivalente Perlenketten mit zwei blauen Perlen sowie einer grünen und einer roten Perle ( $3b^2gr$ ), während es unter  $D_4$  nur zwei derartige inäquivalente Perlenketten gibt ( $2b^2gr$ ).

## Graphen

Wir betrachten Graphen mit der Knotenmenge  $V = \{1, \dots, n\}$ . Jeder solche Graph  $G$  kann als eine Abbildung von  $\binom{V}{2}$  nach  $\{0, 1\}$  aufgefasst werden, wobei diejenigen 2-Teilmengen  $\{u, v\}$ , die auf 1 abgebildet werden, die Kanten in  $G$  bilden. Setzen wir  $X = \binom{V}{2}$  und  $Y = \{0, 1\}$ , dann korrespondiert die Menge aller Graphen mit der Knotenmenge  $V$  zu den Färbungen in  $Y^X$ . Die Graphen in  $Y^X$  werden *markiert* genannt, weil die Knoten durch die Elemente in  $V$  spezifiziert sind.

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  operiert in natürlicher Weise auf  $V$  und somit auf  $\binom{V}{2}$  vermöge

$$S_n \times \binom{V}{2} \rightarrow \binom{V}{2} : (\pi, \{u, v\}) \mapsto \{\pi u, \pi v\}. \quad (25.33)$$

Folglich operiert  $S_n$  auf der Menge aller markierten Graphen mit  $n$  Knoten. Die Bahnen dieser Operation sind die Isomorphismenklassen und die Stabilisatoren sind die Automorphismengruppen dieser Graphen. Diese Bahnen werden auch als *unmarkierte Graphen* mit  $n$  Knoten bezeichnet. Nach dem Fundamentallema ist die Anzahl der Graphen, die zu einem Graphen  $G$  mit der Knotenmenge  $V$  isomorph sind, durch  $n!/|\text{Aut}(G)|$  gegeben, wobei  $\text{Aut}(G)$  die Automorphismengruppe von  $G$  bezeichnet.

Beispiel 25.23. Das Zykelindikatorpolynom von  $S_4$  auf  $V = \{1, \dots, 4\}$  lautet

$$P(S_4, V; z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{24} (z_1^4 + 6z_1^2z_2 + 8z_1z_3 + 3z_2^2 + 6z_4).$$

Im Folgenden wird aber das Zykelindikatorpolynom von  $S_4$  auf  $X = \binom{V}{2}$  benötigt

$$P(S_4, X; z_1, \dots, z_6) = \frac{1}{24} (z_1^6 + 9z_1^2z_2^2 + 8z_3^2 + 6z_2z_4).$$

Beispielsweise induziert die Permutation  $\pi = (12) \in S_4$  die Permutation  $\bar{\pi}$  auf  $X$ , die  $\{1, 2\}$  und  $\{3, 4\}$  invariant lässt sowie  $\{2, 3\}$  auf  $\{1, 3\}$  und  $\{2, 4\}$  auf  $\{1, 4\}$  abbildet. Es folgt  $\bar{\pi} = (\{1, 2\})(\{3, 4\})(\{2, 3\}, \{1, 3\})(\{2, 4\}, \{1, 4\})$ . Also ist  $\bar{\pi}$  vom Typ  $1^22^2$ . Die Anzahl der unmarkierten Graphen mit vier Knoten ist nach Satz 25.15 gleich  $P(S_4, X; 2, \dots, 2) = 11$ .

Seien  $b$  und  $r$  Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Setzen wir  $W(0) = b$  und  $W(1) = r$ , dann ergibt sich als  $W$ -Mustervorrat

$$P(S_4, X; W) = b^6 + b^5r + 2b^4r^2 + 3b^3r^3 + 2b^2r^4 + br^5 + r^6.$$

Mit den Gewichten  $W(0) = 1$  und  $W(1) = r$  erhellt sich eine einfachere erzeugende Funktion

$$P(S_4, X; W) = 1 + r + 2r^2 + 3r^3 + 2r^4 + r^5 + r^6.$$

Der Koeffizient des Monoms  $r^m$  gibt die Anzahl der unmarkierten Graphen mit vier Knoten und  $m$  Kanten an (Abb. 25.1).

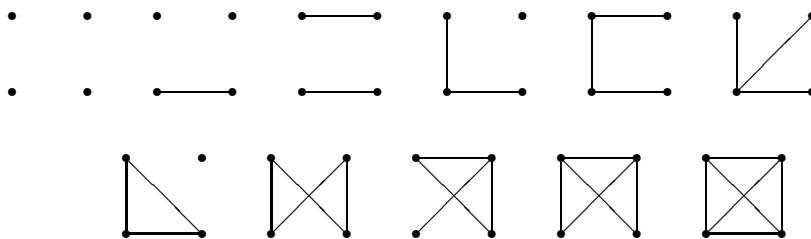


Abb. 25.1. Die unmarkierten Graphen mit vier Knoten.

### Schaltfunktionen

Eine  $n$ -stellige *Schaltfunktion* ist eine Abbildung  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Die symmetrische Gruppe  $S_n$  operiert auf  $X = \{0, 1\}^n$  durch Stellenvertauschung

$$S_n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n : (g, (v_1, \dots, v_n)) \mapsto (v_{g^{-1}(1)}, \dots, v_{g^{-1}(n)}). \quad (25.34)$$

Mit  $Y = \{0, 1\}$  operiert  $S_n$  auf der Menge aller  $n$ -stelligen Schaltfunktionen.

*Beispiel 25.24.* Wir betrachten die Operation der kleinschen Vierergruppe auf der Menge aller vierstelligen Schaltfunktionen. Die kleinsche Vierergruppe ist eine Permutationsgruppe  $V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  vom Grad 4. Das Zykelnindikatorpolynom von  $V_4$  auf  $X = \{0, 1\}^4$  lautet

$$P(V_4, X; z_1, \dots, z_{16}) = \frac{1}{4} (z_1^{16} + 3z_1^4 z_2^6).$$

Das neutrale Element ist vom Typ  $1^{16}$ , während die drei übrigen Permutationen vom Typ  $1^4 2^6$  sind. Beispielsweise induziert die Permutation  $\pi = (12)(34) \in V_4$  die Permutation  $\bar{\pi}$  auf  $X$ , die 0000, 0011, 1100 und 1100 invariant lässt und alle übrigen Elemente von  $X$  in Transpositionen zusammenfasst, nämlich 0100 und 1000, 0010 und 0001, 1010 und 0101, 1001 und 0110, 1110 und 1101 sowie 1011 und 0111. Die Anzahl der vierstelligen,  $V_4$ -symmetrischen Schaltfunktionen ist nach Satz 25.15 gleich  $P(V_4, X; 2, \dots, 2) = 17152$ .

Sei  $y$  eine Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Setzen wir  $W(0) = 1$  und  $W(1) = y$ , dann resultiert als  $W$ -Mustervorrat

$$\begin{aligned} P(V_4, X; W) &= 1 + 7y + 39y^2 + 161y^3 + 494y^4 + 1155y^5 + 2089y^6 + 2965y^7 \\ &\quad + 3330y^8 + 2965y^9 + 2089y^{10} + 1155y^{11} + 494y^{12} + 161y^{13} \\ &\quad + 39y^{14} + 7y^{15} + y^{16}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient des Monoms  $y^m$  gibt die Anzahl der Bahnen von Schaltfunktionen an, die  $m$ -mal die Ausgabe 1 liefern.

### Inzidenzstrukturen

Wir betrachten Inzidenzstrukturen, die durch Punkte und Geraden gebildet werden. Sei  $P = \{1, \dots, p\}$  eine Menge von Punkten und  $L = \{1, \dots, l\}$  eine Menge von Geraden in der euklidischen Ebene. Eine *Inzidenzstruktur* ist eine  $p \times l$ -Matrix  $M = (m_{ij})$ , wobei  $m_{ij} = 1$ , falls der Punkt  $p_i$  auf der Geraden  $l_j$  liegt, und  $m_{ij} = 0$  sonst. Setzen wir  $X = P \times L$  und  $Y = \{0, 1\}$ , dann korrespondieren die Inzidenzstrukturen mit der Punktmenge  $P$  und der Geradenmenge  $L$  zu den Färbungen in  $Y^X$ .

Die symmetrischen Gruppen  $S_p$  und  $S_l$  operieren in natürlicher Weise auf  $P$  bzw.  $L$ . Also operiert das direkte Produkt  $S_p \times S_l$  auf dem kartesischen Produkt  $X = P \times L$  anhand

$$(S_p \times S_l) \times (P \times L) \rightarrow P \times L : ((g, h), (x, y)) \mapsto (gx, hy). \quad (25.35)$$

Damit operiert  $S_p \times S_l$  auch auf der Menge aller Inzidenzstrukturen mit  $p$  Punkten und  $l$  Geraden, wobei  $S_p$  bzw.  $S_l$  die Zeilen bzw. Spalten der  $p \times l$ -Inzidenzmatrizen permutiert.

*Beispiel 25.25.* Das Zykelpolynom von  $G = S_3 \times S_2$  auf  $X$  lautet

$$P(G, X; z_1, \dots, z_6) = \frac{1}{12} (z_1^6 + 3z_1^2 z_2^2 + 4z_2^3 + 2z_3^2 + 2z_6).$$

Beispielsweise induziert die Permutation  $\pi = ((13)(2), (1)(2)) \in G$  die Permutation  $\bar{\pi}$  auf  $X$ , die  $(1, 1)$  auf  $(3, 1)$  sowie  $(1, 2)$  auf  $(3, 2)$  abbildet und  $(2, 1)$  sowie  $(2, 2)$  invariant lässt. Also ist  $\bar{\pi} = ((1, 1)(3, 1))((1, 2)(3, 2))((2, 1))((3, 1))$  vom Typ  $1^2 2^2$ . Nach Satz 25.15 ist die Anzahl der Inzidenzstrukturen mit drei Punkten und zwei Geraden gleich  $P(G, X; 2, \dots, 2) = 13$ . Sei  $y$  eine Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Setzen wir  $W(0) = 1$  und  $W(1) = y$ , so ergibt sich als  $W$ -Mustervorrat

$$P(G, X; W) = 1 + y + 3y^2 + 3y^3 + 3y^4 + y^5 + y^6.$$

Der Koeffizient des Monoms  $y^m$  beschreibt die Anzahl der Bahnen von Inzidenzstrukturen mit  $m$  Beziehungen "Punkt liegt auf Gerade".

### Isomere

Chemische Verbindungen können bei gleicher Summenformel unterschiedliche Molekularstruktur aufweisen. Solche Verbindungen werden *Isomere* genannt.

*Beispiel 25.26.* Benzol ist ein aromatischer Kohlenwasserstoff mit der Summenformel  $C_6H_6$ . Die Kohlenstoffatome sind in Form eines regulären Sechsecks angeordnet und jedes Kohlenstoffatom ist mit einem Wasserstoffatom verbunden (Abb. 25.2). Wir betrachten die Operation der Diedergruppe  $D_6$  auf der

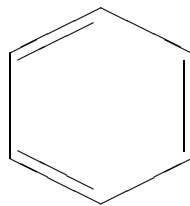


Abb. 25.2. Benzol.

Menge  $X = \{1, \dots, 6\}$  der Ecken des regulären Sechsecks. Das zugeordnete Zykelindikatorpolynom lautet

$$P(D_6, X; z_1, \dots, z_6) = \frac{1}{12}(z_1^6 + z_2^2 + 2z_3^2 + z_6^1 + 3z_2^3 + 3z_1^2 z_2^2).$$

Isomere von Benzol entstehen etwa dadurch, indem einige Wasserstoffatome durch Chloratome ersetzt werden. Dies entspricht einer Färbung der Knoten des regulären Sechsecks mit zwei Farben. Seien  $c$  und  $w$  Unbestimmte über  $\mathbb{Q}$ . Dann liefern die Gewichte  $W(c) = c$  und  $W(w) = w$  den  $W$ -Mustervorrat

$$P(D_4, X; W) = c^6 + c^5 w + 3c^4 w^2 + 3c^3 w^3 + 3c^2 w^4 + c w^5 + w^6.$$

Also gibt es etwa drei Isomere von Benzol, die zwei Chloratome enthalten ( $3c^2 w^4$ ).

## Selbsttestaufgaben

**25.1.** Diskutiere die Operation  $(g, x) \mapsto x + gv$  der additiven Gruppe  $G = \mathbb{R}$  auf der euklidischen Ebene  $X = \mathbb{R}^2$ , wobei  $v \in \mathbb{R}^2$  ein fester Vektor sei.

**25.2.** Betrachte die Operation  $(g, z) \mapsto e^{ig}z$  der additiven Gruppe  $G = \mathbb{R}$  auf  $X = \mathbb{C}$ .

**25.3.** Untersuche die Operation  $((a, b), (x, y)) \mapsto (a + x, b + y)$  der additiven Gruppe  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  auf der euklidischen Ebene  $X = \mathbb{R}^2$ .

**25.4.** Ein Würfel ist ein Graph mit acht Ecken und acht Kanten. Berechne die Ordnung der Automorphismengruppe des Würfels anhand des Fundamentallemmas.

**25.5.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $U$  eine Untergruppe von  $G$ . Betrachte die Operation  $(h, Y) \mapsto hYh^{-1}$  von  $G$  auf  $X = \{gUg^{-1} \mid g \in G\}$ . Zeige, dass die Anzahl der konjugierten Untergruppen von  $U$  gleich dem Index des Normalisators von  $U$  in  $G$  ist.

**25.6.** Betrachte Perlenketten mit zwei grünen und zwei roten Perlen. Berechne die Musterklassen unter der durch die zyklische Gruppe  $C_4$  gegebenen Symmetrie. Vergleiche das Ergebnis mit Beispiel 25.10.

**25.7.** Zeige, dass für das Zykelindikatorpolynom der alternierenden Gruppe  $A_n$  gilt

$$P(A_n, X; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \sum \frac{n![1 + (-1)^{l_2 + l_4 + \dots}]}{\prod_k l_k! k^{l_k}} \prod_k z_k^{l_k},$$

wobei über alle  $n$ -Tupel  $(l_1, \dots, l_n)$  nichtnegativer ganzer Zahlen mit der Eigenschaft (25.17) summiert wird.

**25.8.** Stelle das Zykelindikatorpolynom von  $C_4$ ,  $D_5$ ,  $S_4$  und  $A_4$  auf.

**25.9.** Bestimme die Musterklassen von Perlenketten mit fünf Perlen und zwei Farben.

**25.10.** Ermittle alle unmarkierten Graphen mit fünf Knoten.

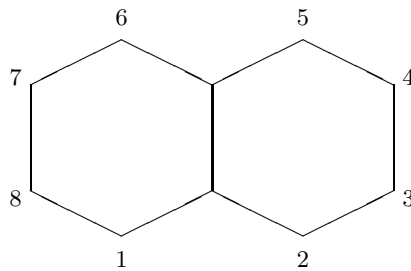
**25.11.** Berechne die Musterklassen der vierstelligen,  $C_4$ -symmetrischen Schaltfunktionen.

**25.12.** Ermittle die Musterklassen der Inzidenzstrukturen mit drei Punkten und drei Geraden.

**25.13.** Naphthalin ist ein weißer Feststoff mit der Summenformel  $C_{10}H_8$  (Abb. 25.3).

Tetramethylnaphthalin entsteht aus Naphthalin, indem vier Wasserstoffatome von Naphthalen durch Methylgruppen ( $CH_3$ ) ersetzt werden. Wie viele Isomere von Tetramethylnaphthalin gibt es?

Wie viele Isomere von Naphthalin gibt es, in denen zwei Wasserstoffatome durch Hydroxylgruppen ( $OH$ ) und zwei Wasserstoffatome durch Carboxylgruppen ( $COOH$ ) substituiert werden?



**Abb. 25.3.** Naphthalin.

## Existenzielle Kombinatorik

---

Zu den grundlegenden Werkzeugen der existenziellen Kombinatorik gehört das Schubfachprinzip. Dieses Prinzip erfährt in der so genannten Ramsey-Theorie eine kombinatorische Verallgemeinerung. Wir beleuchten einige wichtigste Resultate der Ramsey-Theorie und behandeln eine Anwendung in der Kommunikationstechnik.

### 26.1 Schubfachprinzip

Wir greifen das Schubfachprinzip aus Abs. 9.3 nochmals auf.

**Proposition 26.1. (Taubenschlagprinzip)** *Wenn  $k + 1$  Tauben in  $k$  Taubenschläge fliegen, dann gibt es mindestens einen Taubenschlag, in den zwei oder mehr Tauben fliegen.*

Wenn  $n + 1$  Zahlen aus der Menge  $\{1, \dots, 2n\}$  gezogen werden, dann gibt es wenigstens zwei Zahlen, deren Summe  $2n + 1$  ist.

*Beweis.* Die Zahlen in  $\{1, \dots, 2n\}$  werden so gepaart, so dass die Summe jedes Paares  $2n + 1$  ist, nämlich  $(1, 2n), (2, 2n - 1), \dots, (n, n + 1)$ . Bei  $n + 1$  gezogenen Zahlen bilden nach dem Taubenschlagprinzip wenigstens zwei Zahlen ein Paar.  $\square$

Es gibt eine natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung aus Einsen besteht und die durch 1999 teilbar ist.

*Beweis.* In der Zahlenfolge  $1, 11, \dots, \overbrace{11 \dots 1}^{2000}$  gibt es nach dem Taubenschlagprinzip wenigstens zwei Zahlen, die bei Division durch 1999 denselben Rest lassen. Die Differenz dieser Zahlen ist durch 1999 teilbar und hat die Form  $11 \dots 1 \cdot 10^k$  für ein  $k \geq 1$ . Da  $10^k$ ,  $k \geq 1$ , und 1999 teilerfremd sind, ist der erste Faktor die gesuchte Zahl.  $\square$

**Proposition 26.2. (Verallgemeinertes Taubenschlagprinzip)** Wenn  $m$  Tauben in  $k$  Taubenschläge fliegen, dann gibt es einen Taubenschlag, in den mindestens  $\lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor + 1$  Tauben fliegen.

*Beweis.* Angenommen, in jeden Taubenschlag würden höchstens  $\lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor$  Tauben fliegen. Dann ist die Anzahl der Tauben widersprüchlicherweise  $k \lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor \leq m - 1$ .  $\square$

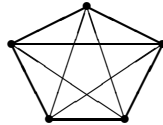
In einer Gruppe von 37 Menschen gibt es mindestens vier, die im gleichen Monat geboren sind.

*Beweis.* Nach dem verallgemeinerten Taubenschlagprinzip gilt  $\lfloor (37-1)/12 \rfloor + 1 = 4$ .  $\square$

## 26.2 Klassische Ramsey-Theorie

Die Ramsey-Theorie liefert eine kombinatorische Verallgemeinerung des Taubenschlagprinzips. Sie wurde nach ihrem Begründer, Frank Ramsey (1903-1930), benannt.

Sei  $G$  ein Graph. Eine 2-Färbung von  $G$  ist eine Abbildung, die jeder Kante in  $G$  eine von zwei Farben zuordnet (Abb. 26.1). Im Folgenden werden bei 2-Färbungen die Farben rot und blau verwendet. Ein Graph  $G$  heißt *rot* bzw. *blau*, wenn jede Kante in  $G$  rot bzw. blau ist.



**Abb. 26.1.** Eine 2-Färbung (dicke und dünne Kanten) von  $K_5$ .

Seien  $p$  und  $q$  natürliche Zahlen. Die *Ramsey-Zahl*  $R(p, q)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n \geq 1$ , so dass jede 2-Färbung von  $K_n$  einen roten  $K_p$  oder einen blauen  $K_q$  enthält. Im Folgenden wird  $p, q \geq 2$  vorausgesetzt und angenommen, dass jeder  $K_1$  sowohl rot als auch blau ist.

**Satz 26.3. (Ramsey)** Zu jedem Paar natürlicher Zahlen  $p, q \geq 2$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $R(p, q) = n$ .

Diese Aussage wird mithilfe der Sätze 26.5 und 26.10 bewiesen.

**Satz 26.4.** Die Ramsey-Zahl  $R(p, q)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so dass jeder Graph  $G$  der Ordnung  $n$  eine Clique der Ordnung  $p$  oder eine unabhängige Knotenmenge der Mächtigkeit  $q$  besitzt.

**Satz 26.5.** Für alle natürlichen Zahlen  $p, q \geq 2$  gilt  $R(p, q) = R(q, p)$  und  $R(2, p) = p = R(p, 2)$ .

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus der Definition. Jeder 2-gefärbte Graph  $K_p$  enthält entweder eine rote Kante, also einen roten  $K_2$ , oder ist blau. Somit ist  $R(p, 2) \leq p$ . Andererseits ist definitionsgemäß  $R(p, 2) \geq p$ .  $\square$

Die Ramsey-Zahl  $R(3, 3)$  beschreibt die kleinste Anzahl von Leuten dergestalt, dass sich entweder drei Leute untereinander kennen oder drei Leute untereinander fremd sind.

**Satz 26.6.** Es gilt  $R(3, 3) = 6$ .

*Beweis.* Die 2-Färbung von  $K_5$  in Abb. 26.1 enthält keinen roten bzw. blauen  $K_3$ . Also ist  $R(3, 3) > 5$ . Wir betrachten eine 2-Färbung von  $K_6$  und wählen einen Knoten  $v$  in  $K_6$ . Nach dem Taubenschlagprinzip gibt es mindestens drei mit  $v$  inzidierende Kanten, die rot bzw. blau sind. O.B.d.A. nehmen wir an, dass mindestens drei dieser Kanten rot sind. Seien  $vw$ ,  $vx$  und  $vy$  rote Kanten in  $K_6$ . Ist der von den Knoten  $w$ ,  $x$  und  $y$  aufgespannte Teilgraph blau, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es eine rote Kante, die zwei der Knoten  $w$ ,  $x$  und  $y$  verbindet. O.B.d.A. sei die Kante  $wx$  rot. Dann ist der von  $v$ ,  $w$  und  $x$  aufgespannte Teilgraph rot.  $\square$

Die Ramsey-Zahlen sind schwer zu berechnen. Hier ist die Liste der bis dato bekannten Ramsey-Zahlen

$$\begin{aligned} R(2, p) &= p, \quad p \geq 2, \\ R(3, 3) &= 6, \quad R(3, 4) = 9, \quad R(3, 5) = 14, \quad R(3, 6) = 18, \\ R(3, 7) &= 23, \quad R(3, 8) = 28, \quad R(3, 9) = 36, \\ R(4, 4) &= 18, \quad R(4, 5) = 25. \end{aligned} \quad (26.1)$$

Es wird berichtet, dass Paul Erdős (1913-1996) über die Schwierigkeit, Ramsey-Zahlen zu berechnen, in einem Gleichnis referierte: Wenn Aliens auf die Erde kämen und die Herausgabe der Zahl  $R(5, 6)$  verlangten oder die Menschheit ausgelöscht würde, dann sollte die Menschheit alles daran setzen,  $R(5, 6)$  zu berechnen. Wenn die Aliens aber die Herausgabe der Zahl  $R(6, 6)$  verlangten, dann sollte die Menschheit alles daran setzen, die Aliens zu vernichten.

**Satz 26.7.** Für alle natürlichen Zahlen  $p, q \geq 3$  gilt

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1). \quad (26.2)$$

*Beweis.* Seien  $R(p-1, q)$  und  $R(p, q-1)$  endlich, der Beweis hierfür wird in Satz 26.10 erbracht. Sei  $n = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ . Wir betrachten eine 2-Färbung von  $K_n$ . Sei  $v$  ein Knoten in  $K_n$ . Da  $v$  mit  $n-1$  Kanten inzidiert, befinden sich darunter entweder mindestens  $n_1 = R(p-1, q)$  rote Kanten oder mindestens  $n_2 = R(p, q-1)$  blaue Kanten. O.B.d.A. nehmen wir an, dass es mindestens  $n_1$  rote Kanten gibt, die mit  $v$  inzidieren. Wir betrachten

denjenigen Teilgraphen von  $K_n$ , der von diesen  $n_1$  zu  $v$  adjazenten Knoten aufgespannt wird. Dieser  $K_{n_1}$  enthält definitionsgemäß einen blauen  $K_q$  oder einen roten  $K_{p-1}$ , wobei letzterer mit  $v$  einen roten  $K_p$  bildet. Also folgt  $R(p, q) \leq n$ .  $\square$

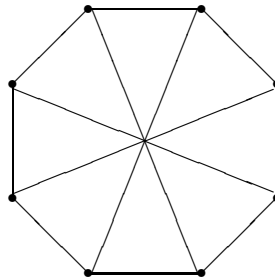
**Korollar 26.8.** *Seien  $p, q \geq 3$  natürliche Zahlen. Sind  $R(p, q - 1)$  und  $R(p - 1, q)$  gerade, dann gilt*

$$R(p, q) \leq R(p - 1, q) + R(p, q - 1) - 1. \quad (26.3)$$

*Beweis.* Sei  $n = R(p - 1, q) + R(p, q - 1) - 1$ . Es wird angenommen, dass  $K_n$  weder einen roten  $K_p$  noch einen blauen  $K_q$  enthält. Dann ist jeder Knoten  $v$  in  $K_n$  mit den übrigen  $n - 1$  Knoten durch  $R(p - 1, q) - 1$  rote Kanten und  $R(p, q - 1) - 1$  blaue Kanten verbunden. Angenommen, es gäbe einen Knoten  $v$ , der mit mindestens  $m = R(p - 1, q)$  roten Kanten inzidiert. Dann betrachten wir denjenigen Graphen, der von allen zu  $v$  durch eine rote Kante adjazenten Knoten aufgespannt wird. Dieser  $K_m$  enthält definitionsgemäß einen roten  $K_{p-1}$ , der widersprüchlicherweise mit  $v$  einen roten  $K_p$  in  $K_n$  bildet. Für die blauen Kanten verläuft das Argument analog. Also ist die Gesamtzahl der roten Kanten gleich  $n(R(p - 1, q) - 1)/2$  und die Gesamtzahl der blauer Kanten gleich  $n(R(p, q - 1) - 1)/2$ . Da beide Zahlen ganz sind, können  $R(p - 1, q)$  und  $R(p, q - 1)$  nicht beide gerade sein. Mit der Kontraposition folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 26.9.** *Es gilt  $R(3, 4) = 9$ .*

*Beweis.* Der Graph der Ordnung 8 in Abb. 26.2 enthält weder einen  $K_3$  noch eine 4-elementige unabhängige Menge. Nach Satz 26.4 ist also  $R(3, 4) \geq 9$ . Andererseits folgt mit den Sätzen 26.5, 26.6 und 26.8, dass  $R(3, 4) \leq R(3, 3) + R(2, 4) - 1 = 9$ .  $\square$



**Abb. 26.2.** Ein Graph  $G$ , der der Bedingung  $R(3, 4) \geq 9$  genügt.

**Satz 26.10.** Für alle natürlichen Zahlen  $p, q \geq 3$  gilt

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}. \quad (26.4)$$

*Beweis.* Die Ungleichung gilt für  $p = 2$  oder  $q = 2$ . Seien  $p, q \geq 3$  und die Ungleichung (26.4) gelte für natürlichen Zahlen  $p'$  und  $q'$  mit  $p', q' \geq 2$  und  $p' + q' < p + q$ . Dann folgt mit den Sätzen 10.2 und 26.7

$$\begin{aligned} R(p, q) &\leq R(p-1, q) + R(p, q-1) \\ &\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} = \binom{p+q-2}{p-1}. \end{aligned}$$

□

### 26.3 Untere Schranken

Untere Schranken für Ramsey-Zahlen werden anhand eines aus der Theorie der Zufallsgraphen entlehnten, probabilistischen Ansatzes hergeleitet.

**Satz 26.11.** Sind  $p \geq 2$  und  $n \geq p$  natürliche Zahlen mit  $\binom{n}{p} 2^{1-\binom{p}{2}} < 1$ , dann gilt  $R(p, p) > n$ .

*Beweis.* Es wird eine zufällige 2-Färbung von  $K_n$  betrachtet, wobei die Farbe jeder Kante durch einen fairen Münzwurf bestimmt wird. Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kante  $uv$  rot ist, gilt also

$$P\{uv \text{ ist rot}\} = \frac{1}{2}. \quad (26.5)$$

Es wird angenommen, dass die Zufallsexperimente für die Färbung der Kanten voneinander unabhängig sind. Es gibt  $2^{\binom{n}{2}}$  derartige Färbungen von  $K_n$  und jede solche Färbung hat die Wahrscheinlichkeit  $2^{-\binom{n}{2}}$ . Für jede  $p$ -elementige Knotenteilmenge  $U$  von  $K_n$  bezeichne  $E_U$  das Ereignis, dass der von  $U$  aufgespannte vollständige Teilgraph entweder rot oder blau ist. Für die Wahrscheinlichkeit von  $E_U$  gilt

$$P\{E_U\} = \frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} = 2^{1-\binom{p}{2}}, \quad (26.6)$$

weil es zwei monochromatische Färbungen des Teilgraphen gibt und die Gesamtzahl aller Färbungen des Teilgraphen  $2^{\binom{p}{2}}$  ist. Dass irgendeine  $p$ -elementige Kantenteilmenge von  $K_n$  entweder rot oder blau ist, wird durch das Ereignis  $\bigcup_{|U|=p} E_U$  beschrieben. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt

$$P\left\{\bigcup_{|U|=p} E_U\right\} \leq \sum_{|U|=p} P\{E_U\} = \binom{n}{p} 2^{1-\binom{p}{2}} < 1. \quad (26.7)$$

wobei die erste Ungleichung eine grundlegende wahrscheinlichkeitstheoretische Identität ist und die letzte Ungleichung durch vollständige Induktion folgt. Diese Ungleichung impliziert, dass es eine 2-Färbung von  $K_n$  gibt, die im Komplement des obigen Ereignisses liegt. Diese 2-Färbung enthält keinen monochromatischen  $K_p$ , woraus  $R(p, p) > n$  folgt.  $\square$

Diese untere Schranke ist nicht scharf. Beispielsweise liefert obige Schranke  $R(5, 5) > 11$ , während bekannt ist, dass  $R(5, 5)$  zwischen 43 und 49 liegt.

**Satz 26.12.** *Seien  $p, q \geq 2$  natürliche Zahlen. Gibt es eine Zahl  $l$  mit  $0 \leq l \leq 1$  und*

$$\binom{n}{p} l^{\binom{p}{2}} + \binom{n}{q} (1-l)^{\binom{q}{2}} < 1, \quad (26.8)$$

dann gilt  $R(p, q) > n$ .

*Beweis.* Der Beweis verläuft wie im Satz 26.11, wobei (26.5) ersetzt wird durch

$$P\{uv \text{ ist rot}\} = l. \quad (26.9)$$

Für jede  $p$ -elementige Knotenteilmenge  $U$  von  $K_n$  bezeichne  $R_U$  bzw.  $B_U$  das Ereignis, dass der von  $U$  aufgespannte vollständige Teilgraph rot bzw. blau ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} P\left\{\bigcup_{|U|=p} R_U \cup \bigcup_{|V|=q} B_V\right\} &\leq P\left\{\bigcup_{|U|=p} R_U\right\} + P\left\{\bigcup_{|V|=q} B_V\right\} \\ &\leq \sum_{|U|=p} P\{R_U\} + \sum_{|V|=q} P\{B_V\} \\ &= \binom{n}{p} l^{\binom{p}{2}} + \binom{n}{q} (1-l)^{\binom{q}{2}} < 1. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung impliziert, dass es eine 2-Färbung von  $K_n$  gibt, die im Komplement des obigen Ereignisses liegt. Diese 2-Färbung enthält weder einen roten  $K_p$  noch einen blauen  $K_q$ . Folglich ist  $R(p, q) > n$ .  $\square$

## 26.4 Verallgemeinerte Ramsey-Theorie

Die Ramsey-Theorie wird dahingehend verallgemeinert, dass  $r$ -Teilmengen einer Menge,  $r \geq 1$ , betrachtet werden.

Seien  $p, q$  und  $r$  natürliche Zahlen. Für jede endliche Menge  $X$  bezeichne  $X^{(r)}$  die Menge aller  $r$ -Teilmengen von  $X$ . Eine 2-Färbung von  $X^{(r)}$  ist eine

Abbildung, die jedem Element von  $X^{(r)}$  eine von zwei Farben, rot oder blau, zuordnet. In einer 2-Färbung von  $X^{(r)}$  heißt eine Teilmenge  $Y$  von  $X$  rot bzw. blau, wenn jedes Element von  $Y^{(r)}$  rot bzw. blau ist.

Die *Ramsey-Zahl*  $R(p, q; r)$  sei die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so dass es eine  $n$ -elementige Menge  $X$  mit der Eigenschaft gibt, dass jede 2-Färbung von  $X^{(r)}$  eine rote  $p$ -Teilmenge oder eine blaue  $q$ -Teilmenge von  $X$  enthält.

Aus den Definitionen ergibt sich für alle natürlichen Zahlen  $p, q \geq 2$

$$R(p, q) = R(p, q; 2). \tag{26.10}$$

**Satz 26.13.** *Für alle natürlichen Zahlen  $p$  und  $q$  gilt*

$$R(p, q; 1) = p + q - 1. \tag{26.11}$$

*Beweis.* Sei  $X$  eine aus  $p+q-1$  Elementen bestehende Menge. Wird die Menge aller 1-Teilmengen von  $X$  in disjunkte Mengen  $Y$  und  $Z$  zerlegt, dann folgt entweder  $|Y| \geq p$  oder  $|Z| \geq q$ . Somit ist  $R(p, q; 1) \leq p + q - 1$ . Andererseits sind die 1-Teilmengen einer Menge mit  $p + q - 2$  Elementen in disjunkte Teilmengen  $Y$  und  $Z$  mit  $|Y| = p - 1$  und  $|Z| = q - 1$  zerlegbar. Folglich ist  $R(p, q; 1) \geq p + q - 1$ .  $\square$

Diese Aussage verdeutlicht, dass die Ramsey-Theorie das Taubenschlagprinzip verallgemeinert.

**Satz 26.14.** *Für alle natürlichen Zahlen  $p, q$  und  $r$  mit  $p \geq r$  und  $q \geq r$  gilt*

$$R(p, r; r) = p \quad \text{und} \quad R(r, q; r) = q. \tag{26.12}$$

*Beweis.* Wir betrachten eine beliebige 2-Färbung einer  $p$ -elementigen Menge  $X$ . Entweder ist  $X$  rot oder  $X^{(r)}$  enthält ein blaues Element. Dieses blaue Element  $Y$  ist eine  $r$ -Teilmenge von  $X$ , für die  $Y^{(r)} = \{Y\}$  gilt. Somit besitzt  $X$  eine blaue  $r$ -Teilmenge  $Y$ .  $\square$

**Satz 26.15.** *Seien  $p, q$  und  $r$  natürliche Zahlen mit  $1 < r < \min\{p, q\}$ . Dann ist  $R(p, q; r)$  endlich und es gilt*

$$R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1. \tag{26.13}$$

*Beweis.* Sei  $X$  eine Menge mit  $R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$  Elementen. Wir betrachten eine beliebige 2-Färbung von  $X^{(r)}$ , wählen ein beliebiges  $x \in X$  und erklären eine 2-Färbung der  $(r-1)$ -Teilmengen von  $Y = X \setminus \{x\}$  dadurch, dass  $\mu \in Y^{(r-1)}$  mit der Farbe von  $\{x\} \cup \mu \in X^{(r)}$  gefärbt wird. Da  $Y$  aus  $R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1)$  Elementen besteht, kann angenommen werden, dass  $Y$  eine rote  $R(p-1, q; r)$ -Teilmenge  $Z$  besitzt.

Die obige 2-Färbung von  $X^{(r)}$  liefert wegen  $X^{(r)} \supseteq Z^{(r)}$  eine 2-Färbung von  $Z^{(r)}$ . Birgt  $Z$  eine blaue  $q$ -Teilmenge, dann sind wir fertig. Andernfalls enthält  $Z$  eine rote  $(p-1)$ -Teilmenge  $Z'$ , so dass per definitionem  $Z' \cup \{x\}$  eine rote  $p$ -Teilmenge von  $X$  ist.

Wir können annehmen, dass die Ramsey-Zahlen  $R(p, q; r-1)$ ,  $R(p-1, q; r)$  und  $R(p, q-1; r)$  für alle  $p$  und  $q$  endlich sind. Dann zeigt die Ungleichung (26.13), dass auch  $R(p, q; r)$  endlich ist.  $\square$

Es gibt eine weitere Verallgemeinerung der klassischen Ramsey-Theorie. Sei  $G$  ein Graph und  $t$  eine natürliche Zahl. Eine  $t$ -Färbung von  $G$  ist eine Abbildung, die jeder Kante in  $G$  eine von  $t$  Farben zuordnet.

Seien  $p_1, \dots, p_t \geq 2$  natürliche Zahlen. Die *Ramsey-Zahl*  $R(p_1, \dots, p_t)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so dass es zu jeder  $t$ -Färbung von  $K_n$  einen Index  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , derart gibt, dass  $K_n$  einen in der Farbe  $i$  gefärbten Teilgraphen  $K_{p_i}$  enthält. Es kann gezeigt werden, dass die Ramsey-Zahlen  $R(p_1, \dots, p_t)$  existieren.

**Satz 26.16.** *Es gilt  $R(3, 3, 3) = 17$ .*

*Beweis.* Es gibt eine 3-Färbung von  $K_{16}$ , die keinen monochromatischen  $K_3$  enthält. Also ist  $R(3, 3, 3) \geq 17$ .

Wir betrachten eine beliebige 3-Färbung von  $K_{17}$ . Sei  $v$  ein Knoten in  $K_{17}$ . Nach dem Taubenschlagprinzip gibt es mindestens sechs mit  $v$  inzidierende Kanten, die dieselbe Farbe tragen. Seien die Kanten  $vv_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , rot. Ist eine der Kanten  $v_i v_j$  ebenfalls rot, dann besitzt  $K_{17}$  einen roten  $K_3$ . Andernfalls weisen nach dem Taubenschlagprinzip wenigstens drei der fünf Kanten  $v_1 v_i$ ,  $2 \leq i \leq 6$ , dieselbe Farbe auf. Seien die Kanten  $v_1 v_2$ ,  $v_1 v_3$  und  $v_1 v_4$  blau. Ist eine der Kanten  $v_2 v_3$ ,  $v_2 v_4$  oder  $v_3 v_4$  ebenfalls blau, dann birgt  $K_{17}$  einen blauen  $K_3$ . Andernfalls sind diese Kanten grün und  $K_{17}$  enthält einen grünen  $K_3$ .  $\square$

Diese beiden Verallgemeinerungen der klassischen Ramsey-Theorie legen eine gemeinsame Generalisierung nahe, in der Ramsey-Zahlen  $R(p_1, \dots, p_t; r)$  definiert werden. Es kann gezeigt werden, dass diese Ramsey-Zahlen existieren.

## 26.5 Graphische Ramsey-Theorie

Die graphische Ramsey-Theorie ist eine weitere Verallgemeinerung der klassischen Ramsey-Theorie.

Seien  $G$  und  $H$  Graphen. Die *Ramsey-Zahl*  $R(G, H)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so dass jede 2-Färbung von  $K_n$  einen zu  $G$  isomorphen, roten Teilgraphen oder einen zu  $H$  isomorphen, blauen Teilgraphen enthält. Über die graphischen Ramsey-Zahlen ist so wenig bekannt wie über die klassischen Ramsey-Zahlen.

Aus den Definitionen ergibt sich für alle natürlichen Zahlen  $p, q \geq 2$

$$R(p, q) = R(K_p, K_q). \quad (26.14)$$

**Satz 26.17.** *Ist  $G$  ein Graph der Ordnung  $p$  und  $H$  ein Graph der Ordnung  $q$ , dann gilt*

$$R(G, H) \leq R(p, q). \quad (26.15)$$

*Beweis.* Sei  $n = R(p, q)$ . Wir betrachten eine beliebige 2-Färbung von  $K_n$ . Definitionsgemäß enthält  $K_n$  einen roten  $K_p$  oder einen blauen  $K_q$ . Nach Voraussetzung ist  $G$  ein Teilgraph von  $K_p$  und  $H$  ein Teilgraph von  $K_q$ . Also ist  $G$  rot oder  $H$  blau, woraus  $R(G, H) \leq n$  folgt.  $\square$

*Beispiel 26.18.* Sei  $L_3$  eine Kette der Ordnung 3 (siehe Abb. 26.4). Mit 26.6 und 26.17 sowie (26.14) folgt  $R(L_3, L_3) \leq 6$ . Jede 2-Färbung von  $K_3$  enthält einen monochromatischen  $L_3$ , woraus sich  $R(L_3, L_3) \leq 3$  ergibt. Andererseits ist sicherlich  $R(L_3, L_3) \geq 3$ , mithin  $R(L_3, L_3) = 3$ .

**Satz 26.19.** *Für alle Graphen  $G$  und  $H$  gilt*

$$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(\alpha(H) - 1) + 1, \quad (26.16)$$

wobei  $\alpha(H)$  die Mächtigkeit der größten Zusammenhangskomponente von  $H$  bezeichnet.

*Beweis.* Wir setzen  $m = \chi(G) - 1$  und  $n = \alpha(H) - 1$ . Der Graph  $K_{mn}$  besteht aus  $m$  Kopien von  $K_n$ . Wir betrachten eine 2-Färbung von  $K_{mn}$ , in der in jeder Kopie von  $K_n$  alle Kanten rot seien. Alle übrigen Kanten seien blau. In jedem blauen Teilgraphen von  $K_{mn}$  sind die Knoten mit  $m$  Farben (im Sinne einer Knotenfärbung) färbbar. Wegen  $m < \chi(G)$  kann ein solcher Teilgraph keine blaue Kopie von  $G$  beinhalten. In jedem roten Teilgraphen von  $K_{mn}$  hat die größte Zusammenhangskomponente höchstens  $n$  Knoten. Wegen  $n < \alpha(H)$  kann ein derartiger Teilgraph keine rote Kopie von  $H$  enthalten.  $\square$

Die graphischen Ramsey-Zahlen lassen sich ebenfalls verallgemeinern. Seien  $G_1, \dots, G_t$  Graphen und sei  $t$  eine natürliche Zahl. Die *Ramsey-Zahl*  $R(G_1, \dots, G_t)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n$ , so dass es zu jeder  $t$ -Färbung von  $K_n$  einen Index  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , dergestalt gibt, dass  $K_n$  einen zu  $G_i$  isomorphen Teilgraphen enthält, der mit der Farbe  $i$  gefärbt ist. Es kann gezeigt werden, dass die Ramsey-Zahlen  $R(G_1, \dots, G_t)$  existieren.

## 26.6 Anwendung in der Kommunikationstechnik

Wir untersuchen die Übertragung von Nachrichten durch einen gestörten Kanal (Abb. 17.1). Einem solchen Kanal ist ein *Konfusionsgraph* zugeordnet, dessen Knoten den Buchstaben des Übertragungsalphabets  $\Sigma$  entsprechen. Die Kanten eines Konfusionsgraphen verbinden zwei Buchstaben, wenn durch einen Übertragungsfehler der eine gesendet und der andere empfangen werden kann. Um Übertragungsfehler auszuschließen, wird ein *unzweideutiges*

Alphabet gesucht. Ein solches Alphabet korrespondiert zu einer unabhängigen Knotenmenge im Konfusionsgraphen. Die Mächtigkeit einer maximalen unabhängigen Knotenmenge in einem Graphen  $G$  wird mit  $\beta(G)$  bezeichnet.

Beispielsweise zeigt die Abb. 26.3 einen Konfusionsgraphen  $G$ , in dem das Zeichen  $a$  bei der Übertragung durch einen gestörten Kanal in das Zeichen  $b$  oder  $e$  umgewandelt werden kann (und umgekehrt). Eine maximale unabhängige Knotenmenge in  $G$  ist etwa  $\{a, c\}$ , also ist  $\beta(G) = 2$ .

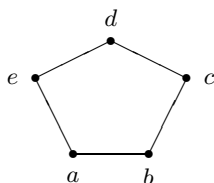


Abb. 26.3. Ein Konfusionsgraph  $G$ .

Ein größeres unzweideutiges Alphabet wird anhand von Bigrammen des Übertragungsalphabets erhalten. Der zugehörige Konfusionsgraph erweist sich dabei als das Normalprodukt des ursprünglichen Konfusionsgraphen. Seien  $G = (V, E)$  und  $H = (W, F)$  Graphen. Das Normalprodukt von  $G$  und  $H$  ist ein Graph  $G \cdot H$  mit der Knotenmenge  $V \times W$ , in dem Knoten  $(v_1, w_1)$  und  $(v_2, w_2)$  adjazent sind, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist (Fig. 26.4)

- $v_1 v_2 \in E$  und  $w_1 w_2 \in F$ ,
- $v_1 = v_2$  und  $w_1 w_2 \in F$ ,
- $v_1 v_2 \in E$  und  $w_1 = w_2$ .

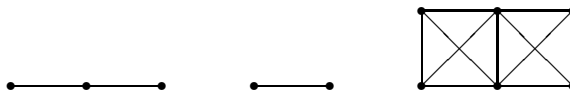


Abb. 26.4. Die Ketten  $L_3$  und  $L_2$  und das Normalprodukt  $L_3 \cdot L_2$ .

Als Übertragungsalphabet werden Bigramme über dem ursprünglichen Übertragungsalphabet  $\Sigma$  betrachtet. Im Konfusionsgraphen in Abb. 26.3 liefern die vier Bigramme  $aa, ac, ca$  und  $cc$  ein unzweideutiges Alphabet, weil sie eine unabhängige Menge in  $G \cdot G$  bilden. Ist  $G$  der Konfusionsgraph eines gestörten Kanals für das Übertragungsalphabet  $\Sigma$ , dann ist  $G \cdot G$  der Konfusionsgraph für  $\Sigma^2$ .

**Satz 26.20.** Für beliebige Graphen  $G$  und  $H$  gilt

$$\beta(G \cdot H) \leq R(\beta(G) + 1, \beta(H) + 1) - 1. \quad (26.17)$$

*Beweis.* Sei  $n = R(\beta(G) + 1, \beta(H) + 1)$ . Angenommen, es wäre  $\beta(G \cdot H) \geq n$ . Sei  $U$  eine  $n$ -elementige, unabhängige Knotenmenge in  $G \cdot H$ . Seien  $(v_1, w_1)$  und  $(v_2, w_2)$  Knoten in  $U$ . Da  $U$  unabhängig ist, gilt entweder  $v_1 \neq v_2$  und  $v_1 v_2 \notin E$  oder  $w_1 \neq w_2$  und  $w_1 w_2 \notin F$ . Wir betrachten den vollständigen Graphen der Ordnung  $n$ , der durch die Knoten in  $U$  aufgespannt wird. Auf diesem  $K_n$  wird eine 2-Färbung definiert, so dass eine mit  $(v_1, w_1)$  und  $(v_2, w_2)$  inzidierende Kante rot bzw. blau sei, wenn die erste bzw. zweite Bedingung gilt. Definitionsgemäß birgt  $K_n$  einen roten  $K_p$ ,  $p = \beta(G) + 1$ , oder einen blauen  $K_q$ ,  $q = \beta(H) + 1$ . Wir nehmen an, dass  $K_n$  einen roten  $K_p$  enthält. Dann ist die Menge aller Knoten  $v$  dergestalt, dass  $(v, w)$  ein Knoten in  $K_p$  ist, unabhängig in  $G$ . Diese Menge hat widersprüchlicherweise  $p = \beta(G) + 1$  Knoten. Ähnliches gilt für den blauen  $K_q$ .  $\square$

Für den Konfusionsgraphen  $G$  in Abb. 26.3 gilt nach den Sätzen 26.6 und 26.20

$$\beta(G \cdot G) \leq R(3, 3) - 1 = 5.$$

Andererseits bilden die Bigramme  $aa, bc, ce, db$  und  $ed$  eine unabhängige Knotenmenge in  $G \cdot G$ , woraus  $\beta(G \cdot G) = 5$  folgt.

## Selbsttestaufgaben

**26.1.** Wie viele Leute sind nötig, damit mindestens zwei davon am selben Tag eines Jahres Geburtstag haben?

**26.2.** Ein Möbelhersteller baut mindestens einen Schrank pro Tag über eine Periode von 30 Tagen. Er stellt nicht mehr als 1.5 Schränke pro Tag her. Zeige, dass er an mindestens 14 konsekutiven Tagen genau einen Schrank baut.

**26.3.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Zeige, dass

$$\beta(G) = \frac{|V|}{\chi(G)},$$

wobei  $\beta(G)$  die Mächtigkeit einer maximalen unabhängigen Knotenmenge in  $G$  bezeichne.

**26.4.** (Erdős, Szekeres) Sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  eine Folge ganzer Zahlen. Eine *Teilfolge der Länge  $m$  von  $x$*  ist eine Folge  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ . Zeige, dass es in einer Folge von  $n^2 + 1$  verschiedenen, ganzen Zahlen entweder eine aufsteigende Teilfolge der Länge  $n + 1$  oder eine absteigende Teilfolge der Länge  $n + 1$  gibt.

**26.5.** Wie viele 2-Färbungen von  $K_4$  gibt es?

**26.6.** Seien  $p, p', q, q'$  ganze Zahlen mit  $2 \leq p' \leq p$  und  $2 \leq q' \leq q$ . Zeige, dass  $R(p', q') \leq R(p, q)$ .

**26.7.** Zeige, dass  $R(3, 5) = 14$ .

**26.8.** Finde obere Schranken für  $R(5, 5)$  und  $R(5, 6)$ .

**26.9.** Zeige, dass

$$R(p_1 + 1, \dots, p_t + 1; 2) \leq \binom{p_1 + \dots + p_t}{p_1, \dots, p_t}.$$

**26.10.** Bestimme  $R(L_3, L_4)$  und  $R(L_4, L_4)$ .

**26.11.** Sei  $T_m$  ein Baum der Ordnung  $m$ . Zeige, dass  $R(T_m, K_n) = 1 + (m - 1)(n - 1)$ .

**26.12.** Sei  $C_n$  ein einfacher Kreis der Ordnung  $n$ . Zeige, dass  $R(C_4, C_4) = 6$ .

**26.13.** Eine Menge von Punkten in der euklidischen Ebene sind in *allgemeiner Lage*, wenn keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Zeige, dass es unter fünf Punkten in allgemeiner Lage stets vier Punkte gibt, die ein konvexes Rechteck aufspannen.

**26.14.** Seien  $m$  Punkte der euklidischen Ebene in allgemeiner Lage dergestalt, dass je vier dieser Punkte ein konvexes Viereck bilden. Zeige, dass alle  $m$  Punkte ein konvexes  $m$ -Eck bilden.

**26.15.** (Erdős, Szekeres) Sei  $m \geq 4$ . Zeige, dass es eine Zahl  $N_m$  gibt, sodass, falls  $n \geq N(m)$  Punkte der euklidischen Ebene in allgemeiner Lage gegeben sind, dann  $m$  dieser Punkte ein konvexes  $m$ -Eck bilden.