31 | September 1956

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Eggers und W. Wetterling

Bericht über Berechnungen zum Wellenwiderstand von Schiffen auf der elektronischen Rechenanlage G 2 des Max-Planck-Instituts in Göttingen

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht über Berechnungen zum Wellenwiderstand von Schiffen auf der elektronischen Rechenanlage G 2 des Max-Planck-Instituts in Göttingen.

Von K. Eggers und W. Wetterling.

(Ergänzung zum TMB Report 886, 1935 : G.P. Weinblum : A Systematic Evaluation of Michells Integral)

Hamburg, 1.9.1956

Bericht über Berechnungen zum Wellenwiderstand von Schiffen auf der elektronischen Rechenanlage G 2 des Max-Planck-Instituts in Göttingen

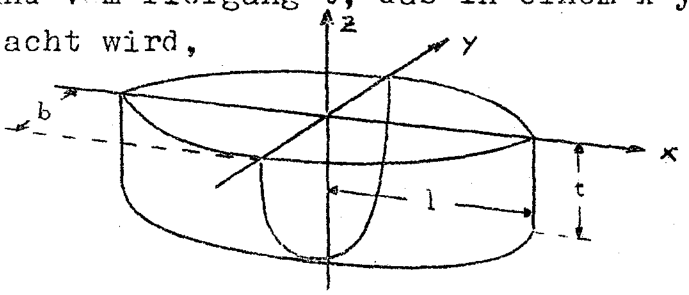
Die im Folgenden beschriebenen Rechnungen wurden im Rahmen der Arbeiten von Herrn Prof. Dr. ing. G. Weinblum, Hamburg, im Auftrag und mit der Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft in der Zeit von März 1955 bis Januar 1956 vorbereitet und ausgeführt. Daß die Arbeiten überhaupt erfolgreich bewältigt werden konnten, ist vor allem auch Herrn Prof. Dr. Biermann, Göttingen, und seinen Mitarbeitern auf Grund der Großzügigkeit bei der Ueberlassung der Rechenanlage und der Unterstützung bei der Vorbereitung und Durchführung der Rechnungen zu verdanken.
Es handelte sich bei diesen Arbeiten in erster Linie um die Auswertung des sog. „Michell-Integrals" für den Wellenwiderstand schmaler Schiffe. Der Auftrag der Deutschen Forschungsgemeinschaft hatte zum Inhalt die Berechnung gewisser Hilfsfunktionen, die es gestatten, das Michell-Integral für eine bestimmte Klasse von Schiffen zu berechnen.
Während der Vorbereitung dieser Rechnungen ergab sich der Wunsch nach der Behandlung einer weiteren, hiermit im Zusammenhang stehenden Aufgabe, nämlich der Bestimmung der genauen Formen der untersuchten Schiffskörper. Da dieses zweite Problem hinsichtlich der Programmierung weniger Schwierigkeiten bot, wurde es zeitlich vor dem Hauptproblem in Angriff genommen. So war den Bearbeitern dieses Forschungsauftrages die Möglichkeit gegeben, sich mit der Technik des Arbeitens an der G2 vertraut zu machen. Dieses zweite Problem soll im folgenden I. Abschnitt behandelt werden, sodann im II. Abschnitt

das Hauptproblem, die Berechnung der Hilfsfunktionen zum Michell-Integral. In beiden Fallen soll naher behandelt werden:

1. Die Herleitung des zugrunde liegenden mathematischen Sachverhalts.
2. Die Programmierung und praktische Durchführung der Rechnung.
3. Die Ergebnisse und ihre Verwertung.
4. Vorschlage zur Verbesserung und Erweiterung des Verfahrens für den Fall, daß ähnliche Rechnungen noch einmal ausgeführt werden sollen.

I. Bestimmung der Schiffsformen

1. Man geht bei der Behandlung eines Schiffes von der Lange $L = 2 \cdot l$, Breite $B = 2 \cdot b$ und vom Tiefgang t, das in einem x-y-z-Koordinatensystem liegend gedacht wird,



zunachst über zu neuen Koordinaten ξ, η, ζ, in welchen das Schiff die halbe Lange 1, den Tiefgang $k = t/l = 2t/L$ und die Breite b/l hat. Alsdann ersetzt man das Schiff durch einen Umströmungskörper, der bei der Ueberlagerung einer homogenen Strömung in ξ-Richtung und einer von einer Quell-Senken-Verteilung der Intensitat $m(\xi,\zeta)$ über das in der Mittschiffsebene liegende Rechteck

(1) $$\begin{aligned} -1 \leqq \xi \leqq 1 \\ -k \leqq \zeta \leqq k \end{aligned}$$

ausgehenden Potentialstromung entsteht. Wenn dann die Gesamtergiebigkeit des Quellsystems gleich 0 ist

(2) $$\int_{-k}^{k} \int_{-1}^{1} m(\xi,\zeta)\, d\xi\, d\zeta = 0 \,,$$

ferner Symmetrie bezüglich der ξ-Aehse besteht

(3) $$m(\xi,-\zeta) = m(\xi,\zeta)$$

und außerdem etwa für $0 < \xi$ nur Quellen, für $\xi < 0$ nur Senken angenommen werden

$$m(\xi,\zeta) \geqq 0 \quad \text{für} \quad \xi > 0$$
$$m(\xi,\zeta) \leqq 0 \quad \text{für} \quad \xi < 0 \quad ,$$

erhält man einen vorderen Staupunkt bei

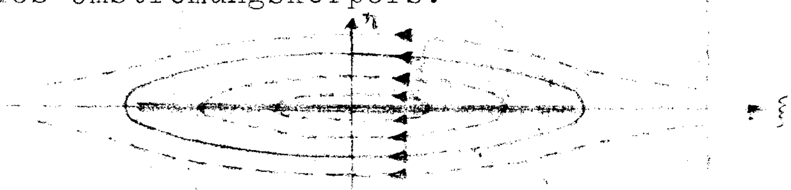
$$\xi_0 = 1 + \varepsilon_0 \qquad (\varepsilon_0 > 0), \eta = 0, \zeta = 0 \ .$$

Die von diesem Staupunkt senkrecht zur ξ-Achse ausgehenden Stromlinien treffen sich wegen (2) wieder in einem hinteren Staupunkt

$$\xi_1 = -1 - \varepsilon_1 \qquad (\varepsilon_1 > 0), \eta = 0, \zeta = 0$$

und bilden einen geschlossenen Körper, der wegen (3) symmetrisch zur ξ-η-Ebene (Ebene der Schwimmwasserlinie) ist. Der Schiffskörper wird dann dargestellt durch eine der beiden spiegelbildlichen Hälften des Umströmungskörpers.

Querschnitt
(ζ=0)



Ferner ist ein solcher Umströmungskörper stets symmetrisch zur ξ-ζ-Ebene(Mittschiffsebene. Schließlich ist der Körper symmetrisch zur η-ζ-Ebene (Hauptspantebene), falls

$$m(\xi,\zeta) = - m(-\xi,\zeta)$$

ist (symmetrische Schiffe). In diesem Fall ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$.

Die Aufgabe, zu gegebener Quellverteilung den zugehörigen Umströmungskörper zu berechnen, ist für den einfachen Fall

$$m(\xi,\zeta) = a \cdot \xi \qquad a = \text{const.}$$

bei Inui (A new Theory of Wave Making Resistance Based on the exact conditions of the surface of ships) behandelt worden. Das dort angewandte Verfahren ist in den hier zu beschreibenden Arbeiten zunächst auf den Fall einer Intensitätsverteilung, die in ζ-Richtung konstant, in ξ-Richtung beliebig ist, erweitert worden:

$$m(\xi,\zeta) = n(\xi) \quad ,$$

wobei wegen der Ersetzung gewisser Integrale über ξ durch Summen nach den Gauß'schen Quadraturformeln vorauszusetzen ist, daß die Ableitungen von $n(\xi)$ bis zu genügend hoher Ordnung existieren und so klein sind, daß diese Ersetzung sinnvoll bleibt. Das ist bei den praktisch interessierenden und bisher behandelten Fällen, in denen $n(\xi)$ ein Polynom ist

$$n(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \xi^i \quad ,$$

selbstverständlich der Fall.

Das Potential, das der oben beschriebenen Strömung entspricht, ist im Aufpunkt (x,y,z) (nicht zu verwechseln mit den Koordinaten der Fig. auf S. 2)

$$\phi(x,y,z) = \frac{V}{4\pi} \int_{-k}^{k} \int_{-1}^{1} \frac{m(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2}} - V\cdot x$$

(V = Schiffsgeschwindigkeit, kann hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu 1 angenommen werden).

Die Stromlinien haben in jedem Punkt die Richtung des Vektors

$$-\operatorname{grad} \phi = -\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right\} = \{u,v,w\}$$

Wenn also $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ die Parameterdarstellung einer solchen Stromlinie ist, erhält man diese, indem man folgendes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung als Anfangswertaufgabe, ausgehend von einem beliebigen Punkt der Stromlinie, integriert:

(4) $$\frac{dx(s)}{ds} = \mathfrak{u}, \quad \frac{dy(s)}{ds} = \mathfrak{v}, \quad \frac{dz(s)}{ds} = \mathfrak{w}$$

Insbesondere erhält man den Umströmungskörper, wenn man diejenigen Stromlinien untersucht, die vom vorderen Staupunkt $(1+\varepsilon_0,0,0)$ ausgehen, welchen man aus der Gleichung

$$u(1+\varepsilon_0,0,0) = 0$$

berechnet.

Für $m(\xi,\zeta) = n(\xi)$ wird mit $V = 1$ und mit

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z-k)^2} \qquad R' = \sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(z+k)^2}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int_{-k}^{k}\int_{-1}^{1}\frac{n(\xi)\cdot(x-\xi)\,d\xi\,d\zeta}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} + 1$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{n(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\left(\frac{z-k}{R}-\frac{z+k}{R'}\right)d\xi + 1$$

(5)

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\int_{-k}^{k}\int_{-1}^{1}\frac{n(\xi)\cdot y\,d\xi\,d\zeta}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} = -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{n(\xi)y}{(x-\xi)^2+y^2}\left(\frac{z-k}{R}-\frac{z+k}{R'}\right)d\xi$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\int_{-k}^{k}\int_{-1}^{1}\frac{n(\xi)(z-\zeta)\,d\xi\,d\zeta}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} n(\xi)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)d\xi$$

Die Integration über ξ wurde nun unter der Verwendung der Gauß'schen Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi = \sum_i g_i f(\xi_i)$$

ausgeführt. Es wurde die Formel mit 16 Integrationspunkten benutzt (Abszissen ξ_i und Gewichte g_i bei Lowan, Davids u. Levenson, Bull. Am. Math. Soc. 48, S. 739). Damit wird

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x} = u = -\sum_i \frac{g_i n(\xi_i)}{4\pi}\,\frac{x-\xi_i}{(x-\xi_i)^2+y^2}\left(\frac{z-k}{R_i}-\frac{z+k}{R_i'}\right)$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v = -\sum_i \frac{g_i n(\xi_i)}{4\pi}\,\frac{y}{(x-\xi_i)^2+y^2}\left(\frac{z-k}{R_i}-\frac{z+k}{R_i'}\right)$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = w = \sum_i \frac{g_i n(\xi_i)}{4\pi}\left(\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_i'}\right)$$

$R_i = R(\xi_i)$

$R_i' = R'(\xi_i)$

Diese Gauss'schen Quadraturformeln wurden weniger wegen ihrer außerordentlichen Genauigkeit gewählt, als deswegen, weil eine solche Quadraturformel erwünscht war, bei der die Abszissen ξ_i an den Intervallenden dichter liegen als in der Intervallmitte. Man kann sich nämlich die Ersetzung der Integrale in (5) durch endliche Summen veranschaulichen als eine Ersetzung der kontinuierlichen Quellverteilung $m(\xi,\zeta) = n(\xi)$ durch eine Anordnung von „Quellstäben" über das Rechteck (1). Es zeigt sich, daß man nach dieser Ersetzung einen vernünftigen Schiffskörper ohne Unebenheiten nur dann erhält, wenn dort, wo die Stromlinien noch in großer Nähe der Quellverteilung verlaufen, nämlich gerade an den Intervallenden, diese Quellstäbe möglichst dicht angeordnet sind.

Mit den so berechneten Größen u, v, w wurde das System von Differentialgleichungen (4) nach der Methode von Runge-Kutta ausgewertet. In Vektorschreibweise mit $\mathfrak{x} = \{x,y,z\}$ und $\mathfrak{u} = \{u,v,w\}$ lautet das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \mathfrak{u}(\mathfrak{x})$$

und die Runge-Kutta-Formeln (mit $\mathfrak{u}_i = \mathfrak{u}(\mathfrak{x}_i)$)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x}_o + h/2\,\mathfrak{u}_o \\ \mathfrak{x}_2 &= \mathfrak{x}_o + h/2\,\mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{x}_3 &= \mathfrak{x}_o + h\,\mathfrak{u}_2 \\ \mathfrak{x}_4 &= \mathfrak{x}_o + h/6(\mathfrak{u}_o+2\mathfrak{u}_1+2\mathfrak{u}_2+\mathfrak{u}_3) \end{aligned}$$

Den so berechneten Punkt $\mathfrak{x}_4$ nimmt man als Anfangspunkt für den nächsten Runge-Kutta-Schritt.

Als Anfangspunkt der Integration konnte nicht der vordere Staupunkt selbst gewählt werden, da dort ja $u = v = w = 0$ ist. Vielmehr wurden als Anfangspunkte gewisse Punkte in der Ebene $\xi = 1$ gewählt. Die Lage dieser Punkte konnte aus der Größe ε_o und einigen weiteren aus der Gestalt der Quellverteilung $m(\xi,\zeta)$ folgenden Größen dadurch, daß man die dreidimensionale Strömung angenähert durch eine zweidimensionale ersetzte, mit hinreichender Genauigkeit so bestimmt werden, daß sie tatsächlich Punkte des Umströmungskörpers waren. Geringe Abweichungen machten sich im Verlauf der Rechnung schon deshalb nicht weiter bemerkbar, weil der Abstand der Stromlinien, wie auch aus der Fig. auf S. 3 erkennbar ist, von $x = 0$ bis $x = 1$ immer geringer wird. Als Schrittweite für das Runge-Kutta-Verfahren wurde gewählt

$$h = \frac{h_k}{|\mathfrak{u}_o|} \qquad \text{mit} \qquad |\mathfrak{u}_o| = \sqrt{u_o^2+v_o^2+w_o^2} \quad ,$$

wobei die h_k
wobei die h_k eine gespeicherte Folge von Zahlen bildeten, beispielsweise:

0,005 0,05 0,05 0,05 0,1 0,1 0,1 ... ,

jeweils eine Zahl h_k für einen vollen Runge-Kutta-Schritt $\mathfrak{x}_o \longrightarrow \mathfrak{x}_4$.

Das hat den Vorteil, daß dann die Variable s etwa der Bogenlänge entspricht.

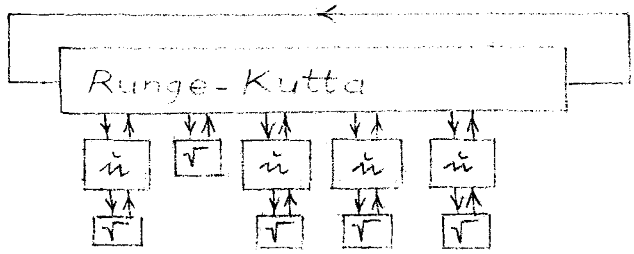
In
$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0 + h_k/2 \cdot \frac{\mathfrak{u}_0}{|\mathfrak{u}_0|}$$
$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_0 + h_k/2 \cdot \frac{\mathfrak{u}_1}{|\mathfrak{u}_0|}$$
$$\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_0 + h_k \cdot \frac{\mathfrak{u}_2}{|\mathfrak{u}_0|}$$
$$\mathfrak{r}_4 = \mathfrak{r}_0 + h_k/6 \cdot \frac{\mathfrak{u}_0 + 2\mathfrak{u}_1 + 2\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3}{|\mathfrak{u}_0|}$$
haben die Vektoren $\frac{\mathfrak{u}_i}{|\mathfrak{u}_0|}$ etwa die Länge 1, die Zuwachsvektoren $\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0$ etwa die Länge h_k bzw. $h_k/2$.

2. Das Rechenprogramm wurde in folgender Weise gegliedert:
a) Eine Hauptroutine (Länge ca. 170 Maschinenbefehle), in der das Runge-Kutta-Verfahren für das vorliegende Differentialgleichungssystem programmiert war. Am Anfang dieser Routine wurden die Anfangswerte x_0, y_0, z_0 benötigt, die entweder als Anfangswerte beim Beginn der ganzen Rechnung oder als Ergebniswerte x_4, y_4, z_4 vom vorherigen Runge-Kutta-Schritt vorhanden waren. Nach Ausführung eines Runge-Kutta-Schrittes begann die Rechnung (über einen Sprungbefehl) wieder am Anfang der Hauptroutine, und der nächste Runge-Kutta-Schritt konnte ausgeführt werden. Die Rechnung wurde von Hand angehalten, wenn das Verfahren (bei symmetrischen Schiffen, die bisher nur behandelt wurden) bis $x = 0$ gelaufen war.
b) In der Hauptroutine wurden an 4 Stellen die Funktionswerte $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ benötigt. Diese wurden in einer Subroutine (Länge: 64 Befehle) Hergestellt. Ueber Sprungbefehle ging die Rechnung während eines Runge-Kutta-Schrittes also viermal auf diese Subroutine über, um dann an deren Ende wieder in die Hauptroutine zurückzuspringen.
c) Schließlich mußte bei der Bildung von u, v, w in der Subroutine (jeweils 32-mal) und bei der Bildung von $|\mathfrak{u}| = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ in der Hauptroutine die Quadratwurzel gebildet werden. Da das Wurzelziehen nicht als selbständiger Befehl in die G 2 eingebaut ist, mußte es als weitere Subroutine (Länge: 27 Befehle) pro-

grammiert werden, und zwar wurde das bekannte Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad \text{für} \qquad x = \sqrt{a}$$

verwendet.
Der Rechnungsgang ist noch einmal in folgendem Schema dargestellt:



An Rechenzeit wurde für einen Runge-Kutta-Schritt ca. 9 min. benötigt.
Das Verfahren wurde an drei Beispielen erprobt, nämlich für folgende Quellverteilungen:

$$\begin{array}{lll} \text{a)}\ n_1(\xi) = 0{,}8\,\xi & & k = 0{,}2 \\ \text{b)}\ n_2(\xi) = 0{,}381(3\xi - 2\xi^3) & \left.\right\} & k = 0{,}1 \\ \text{c)}\ n_3(\xi) = 0{,}49\ (4\xi - 4\xi^3) & & \end{array}$$

Der Fall a) wurde bereits bei Inui in der angegebenen Arbeit behandelt. Bei a) und b) wurden je 5 Stromlinien, bei c) 4 Stromlinien berechnet; man hat so einen hinreichenden Ueberblick über die Gestalt des Umströmungskörpers. Für eine Stromlinie wurden 8 bis 10 Runge-Kutta-Schritte genommen.
Die Genauigkeit der berechneten Werte konnte nicht im einzelnen untersucht werden. Immerhin wäre es möglich, bei einer Wiederholung der Rechnung für andere Quellverteilungen für die beim Runge-Kutta-Verfahren erzielte Genauigkeit einen Anhaltspunkt zu gewinnen, indem man die Rechnung mit den doppelten Schrittweiten wiederholt.

3. Die Ergebnisse werden zur Zeit bearbeitet mit dem Ziel, nach den berechneten Werten Modelle zu bauen, um die diesen Schiffsformen entsprechenden theoretischen Wellenwiderstandswerte mit den Meßwerten vergleichen zu können.
Bemerkenswert ist noch eine Tatsache, die bei der Auswertung der Ergebnisse aufgefallen ist: Bisher sah man als äquivalent an eine Schiffsform

(6) $$\eta = s(\xi, \zeta) = s_1(\xi)s_2(\zeta)$$

und eine Quellverteilung

m(,)

$$m(\xi,\zeta) = C \frac{ds_1(\xi)}{d\xi} s_2(\zeta) \tag{7}$$

Die durchgeführten Rechnungen haben gezeigt, daß einer solchen Quellverteilung im allgemeinen ein Schiffskörper von geometrisch völlig anderer Gestalt als der durch (6) gegebenen entspricht, daß aber die für den Wellenwiderstand in erster Linie bestimmende "Spantflächenkurve" für $s(\xi,\zeta)$ und für die tatsächliche Form des Umströmungskörpers nahezu übereinstimmt, so daß also auch bei Verwendung von Schiffsmodellen nach (6) eine weitgehende Gewähr dafür geboten ist, daß man sinnvolle Messungen des Wellenwiderstandes und Vergleiche mit den theoretischen Werten vornehmen kann.

4) Falls das hier beschriebene Verfahren weiter ausgebaut werden sollte, wird man versuchen, allgemeine Quellverteilungen $m(\xi,\zeta)$ statt der speziellen $n(\xi)$ zugrunde zu legen. In diesem Falle müßte man, da andernfalls etwaschon bei $m(\xi,\zeta) = m_1(\xi)m_2(\zeta)$ mit einfachem $m_2(\zeta)$, etwa $m_2(\zeta) = |\zeta|$ die Ausdrücke für u, v, w sehr kompliziert und für die Behandlung auf der elektronischen Rechenmaschine ungeeignet würden, auch die Integrale über ζ nach einer Quadraturformel durch Summen ersetzen. In diesem Falle wären dann allerdings im Verlauf der Rechnung noch wesentlich mehr Wurzeln zu ziehen als bisher. Da das Wurzelziehen auch schon bei dem bisherigen Verfahren den größten Teil der Rechenzeit beanspruchte, wäre zu überlegen, wie man das Wurzelziehen zeitlich so kurz wie möglich gestalten kann, wobei vor allem die Möglichkeit gegeben ist, durch geschicktere Wahl des Anfangswertes für die Iteration einige Iterationsschritte einzusparen.

II. Berechnung der Hilfsfunktionen für das Michell-Integral

1. Für ein Schiff von der Lange L, der Breite B und dem Tiefgang T sei mit

$$x = \frac{L}{2}\xi \qquad y = \frac{B}{2}\eta \qquad z = T\zeta$$

durch

(8) $$\eta = f(\xi,\zeta) = X(\xi)Z(\zeta)$$

die (dimensionslose) Gleichung der Schiffsoberflache gegeben. Der Zusammenhang zur zugehörigen Quellverteilung soll wie in (6) und (7) angenommen werden. Dabei soll also durch

$$X(\xi) = X_s(\xi) + X_a(\xi)$$

die Schwimmwasserlinie gegeben sein, worin $X_s(\xi)$ den zum Hauptspant symmetrischen und $X_a(\xi)$ den zum Hauptspant antisymmetrischen Bestandteil bedeuten. $Z(\zeta)$ gibt die Form des Hauptspants an. Die Schiffsgeschwindigkeit V geht in die folgenden Formeln für den Wellenwiderstand durch den Parameter

$$\gamma_o = \frac{g \cdot L}{2 \cdot V^2}$$

ein, dabei ist g die Erdbeschleunigung. Bezeichnet man schließlich mit ϱ die Dichte des Wassers, so wird der Wellenwiderstand des durch (8) dargestellten Schiffes

$$R(\gamma_o) = \frac{8\varrho g}{\pi} \frac{B^2T^2}{L} R^+(\gamma_o)$$

mit $$R^+(\gamma_o) = \int_{\gamma_o}^{\infty} \varphi(\gamma)[J^{+2}(\gamma) + I^{+2}(\gamma)]\, d\gamma \quad ,$$

wobei $$\varphi(\gamma) = \frac{(\gamma/\gamma_o)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_o)^2 - 1}} \quad ,$$

bedeutet, ferner

$$J^+(\gamma) = \int_0^1 \exp(-k\zeta\gamma^2/\gamma_o)Z(\zeta)d\zeta \int_0^1 \frac{dX_s(\xi)}{d\xi}\sin(\gamma\xi)d\xi$$

$$I^+(\gamma) = \int_0^1 \exp(-k\zeta\gamma^2/\gamma_o)Z(\zeta)d\zeta \int_0^1 \frac{dX_a(\xi)}{d\xi}\cos(\gamma\xi)d\xi \quad .$$

Bei den Berechnungen wurden folgende Funktionen als $X_s(\xi)$, $X_a(\xi)$ und $Z(\zeta)$ zugrunde gelegt:

$$X_s(\xi) = 1 - \Sigma a_n|\xi|^n \qquad n = 2,\ 3,\ 4,\ 6.$$

$$X_a(\xi) = \Sigma b_m\xi^m \qquad m = 1,\ 3,\ 5.$$

$$Z\ (\zeta) = 1 - a\zeta$$

Dann wird

$$R^+(\gamma_o) = \int_{\gamma_o}^{\infty} (E_o-aE_1)^2\left\{[\Sigma na_nM_{n-1}(\gamma)]^2+[\Sigma mb_mN_{m-1}(\gamma)]^2\right\}\varphi(\gamma)d\gamma$$

mit

$$E_s = \int_0^1 \zeta^s\exp(-k\zeta\gamma^2/\gamma_o)d\zeta$$

$$M_i = \int_0^1 \xi^i\sin(\gamma\xi)d\xi$$

$$N_i = \int_0^1 \xi^i\cos(\gamma\xi)d\xi$$

Um nun zu gegebener Schiffsform in einfacher Weise $R^+(\gamma_o)$ zu erhalten, ist es erwünscht, folgende Funktionen zu tabellieren:

$$\mathfrak{M}^{st}_{ij}(k,\gamma_o) = \int_{\gamma_o}^{\infty} \varphi(\gamma)E_sE_tM_iM_jd\gamma \qquad \left\{\begin{array}{l} s,\ t = 0,\ 1 \\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 5 \\ l,\ m = 0,\ 2,\ 4 \end{array}\right.$$

$$\mathfrak{N}^{st}_{lm}(k,\gamma_o) = \int_{\gamma_o}^{\infty} \varphi(\gamma)E_sE_tN_lN_md\gamma$$

Diese Funktionen wurden bei den Arbeiten in Göttingen berechnet, für k = 0,1; 0,2 und für γ_o = 0,5; 1,0; 1,5;... 15,0. Das sind für jeden der 30 Werte des Geschwindigkeitsparameters γ_o 96 uneigentliche Integrale, insgesamt 2880.

2. Bei der Berechnung der Integrale wurde zunächst das Integrationsintervall (γ_o,∞) durch ein endliches Intervall ersetzt,

setzt, indem nur das Integral von γ_0 bis zu einer endlichen oberen Grenze Γ berechnet wurde und das Restintegral von Γ bis ∞ vernachlässigt wurde. Für diesen Rest ließ sich eine Abschätzung angeben. Die obere Grenze Γ wurde so gewählt, daß die Vernachlässigung des Restintegrals keinen Einfluß mehr auf die Genauigkeit der Ergebnisse hatte.

Um dann die Länge des Integrationsintervalles (γ_0, Γ) den Gegebenheiten der G 2 anzupassen, mußte man mit einem geeigneten festen p

$$\gamma = \alpha / p$$

setzen (die G 2 ist eine Maschine mit festem Komma und zulässigem Zahlenbereich $/|x| < 8$). Dann wird

$$\mathfrak{M}^{ij}_{st} = \frac{1}{p^2 \gamma_0} \int_{p\gamma_0}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - (p\gamma_0)^2}} E_s E_t M_i M_j \, d\alpha \quad ,$$

entsprechend $\mathfrak{N}^{st}_{lm}$. Für p konnte durchweg die Zahl 0,04 verwendet werden.

Um den Pol des Integranden bei $\alpha = p\gamma_0$ zu beseitigen, geht man über zu

$$z^2 = \alpha - p\gamma_0 \quad .$$

Dann wird

$$\mathfrak{M}^{ij}_{st} = \frac{2}{p^2 \gamma_0} \int_{0}^{\infty} \frac{(z^2 + p\gamma_0)^2}{\sqrt{z^2 + 2p\gamma_0}} E_s E_t M_i M_j \, dz \quad ,$$

entsprechend $\mathfrak{N}^{st}_{lm}$.

Für M_i und N_i wurden folgende Rekursionsformeln benutzt:

$$(9) \quad \begin{cases} M_i(\gamma) = -\dfrac{\cos\gamma}{\gamma} + \dfrac{i}{\gamma} N_{i-1} & M_0(\gamma) = \dfrac{1 - \cos\gamma}{\gamma} \\[2ex] N_i(\gamma) = \dfrac{\sin\gamma}{\gamma} - \dfrac{i}{\gamma} M_{i-1} & N_0(\gamma) = \dfrac{\sin\gamma}{\gamma} \end{cases}$$

Für E_0 und E_1 erhält man mit $\vartheta = \dfrac{k\gamma^2}{\gamma_0}$

(10) $$E_o = \frac{1 - e^{-\vartheta}}{\vartheta} \qquad\qquad E_1 = \frac{1 - (1+\vartheta)e^{-\vartheta}}{\vartheta^2}$$

sowie die Beziehung

$$\vartheta E_1 = E_o - e^{-\vartheta} \quad ,$$

die zur Kontrolle verwendet wurde.
Für kleine ϑ erhalt man durch (10) Ausdrücke, welche nahezu $\frac{0}{0}$= sind, so daß bei der Berechnung einige Stellen verloren gehen würden. Daher muß man für kleine ϑ bei E_o und E_1 auf die aus (10) sich ergebenden Reihenentwicklungen zurückgreifen:

(11) $$\begin{cases} E_o = \sum\limits_{o}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\vartheta^n}{(n+1)!} \\[2ex] E_1 = \sum\limits_{o}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{(n+2)!} \vartheta^n \end{cases}$$

Als Quadraturformel zur Berechnung der Integrale wurde eine Kombination der Simpsonschen Formel und der "3/8-Regel" gewählt, die bei einem langen Intervall für die Intervallmitte eine Folge von gleichen Gewichten ergibt:

$$\int\limits_{x_o}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{h}{24} [8f_o+31f_1+20f_2+25f_3+24(f_4+f_5+\ldots+f_{N-4})+ \\ +25f_{N-3}+20f_{N-2}+31f_{N-1}+8f_N]$$

Bei der Wahl der Schrittweite bei der Anwendung dieser Quadraturformel war zu berücksichtigen, daß bereits berechnete Werte für die Funktionen M_i und für

$$\frac{1}{p^{3/2}} \frac{(z^2+p\gamma_o)^2}{\sqrt{z^2+2p\gamma_o}} \cdot E_o^2$$

von seinerzeit in Amerika auf IBM-Maschinen (Typ 604) in ähnlicher Weise durchgeführten Rechnungen für die Parameterwerte s, t = 0; 4 vorlagen. Damals war die Integrationsvariable $\overline{z} = z/\sqrt{p}$, und die Schrittweite in $\overline{z}$ war $\overline{h}$ = 0,05. Um diese Werte zu Vergleichen heranziehen zu können, war es zweckmäßig, jetzt als Schrittweite in z $h = \sqrt{p}\cdot\overline{h} = 0{,}2\cdot 0{,}05 = 0{,}01$ zu wählen. Im Laufe der Rechnung

zeigte es sich, daß es für größere Werte von γ_o möglich war, mit dem doppelten oder 1 1/2-fachen dieser Schrittweite zu rechnen. Die Genauigkeit der Rechnung sollte so weit gehen, daß 6 Stellen der Ergebnisse richtig waren. Daraufhin wurde die Wahl der Schrittweite bei den Quadraturformeln und die Wahl der oberen Integrationsgrenze Γ abgestellt (in jedem Fall wurde eine Genauigkeit von 10^{-5} % gefordert), während die Hilfsfunktionen jeweils auf 9 bis 10 Stellen genau berechnet wurden, so daß der auf diese Weise e entstehende Fehler vernachlassigt werden konnte.
Die Funktionen M_i und N_i wurden folgendermaßen hergestellt: Zunachst wurden $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ durch das Anfangsstück ihrer Reihenentwicklung berechnet, nachdem unter Ausnutzung der Periodizitat und der Funktionalgleichungen der trigonometrischen Funktionen γ auf den Bereich $(0,\pi/4)$ reduziert war. Eine Kontrolle dieser Werte für $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ war möglich, indem man $(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma - 1)\cdot 2^{40}$ bildete. Falls diese Zahl größer als 8 wurde und daher eine Bereichsüberschreitung eintrat, wußte man, daß $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ nicht auf ca. 37 Dualstellen, wie es durch die Reihenentwicklung gewährleistet sein sollte, richtig waren.
Aus $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ wurden dann nach den obigen Rekursionsformeln (9) die Funktionen M_i und N_i gebildet. Da die M_i bereits gedruckt vorlagen, war durch Ausdrucken und Vergleichen der Funktionen M_2 und M_5 eine Kontrolle aller dieser Funktionen möglich.
Bei der Berechnung von E_o und E_1 wurden, wie gesagt, für kleine ϑ die Formeln (10) verwendet, für größere ϑ wurde $e^{-\vartheta}$ mittels Reihenentwicklung gebildet, nachdem zuvor unter Ausnutzung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ϑ auf das Intervall (0; 0,4) reduziert war. Schließlich wurden in einfacher Weise die Funktionen

$$\frac{(z^2+p\gamma_o)^2}{\sqrt{z^2+2p\gamma_o}}$$

gebildet.
Auf diese Weise erhielt man samtliche Hilfsfunktionen, die zur Bereitstellung der Integranden von $\mathfrak{M}_{ij}^{st}$ und $\mathfrak{N}_{lm}^{st}$ notwendig waren. Da bei den zu einem Geschwindigkeitsparameter γ_o gehörigen 96 Integralen $\mathfrak{M}_{ij}^{st=}$ und $\mathfrak{N}_{lm}^{st}$ jeweils die gleichen Hilfsfunktionen

auftraten, wurden diese Integrale simultan in folgender Weise gebildet:

Es waren 96 Integrale $\int_o^Z f_n(z)dz \approx \sum_{k=0}^{M} g_k f_n(z_k)$ zu berechnen $(n = 1, 2, \ldots 96)$.

Wenn dann etwa schon die 96 Teilsummen $s_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} g_k f_n(z_k)$ gebildet und in einem Block von Speichern (in diesem Falle Nr. 1520 bis 1657, oktal numeriert) gespeichert waren, wurden die zur Stelle z_{m+1} gehorigen Hilfsfunktionen, wie oben beschrieben, berechnet, aus diesen durch Multiplikation die 96 verschiedenen Integrandenfunktionen $f_n(z_{m+1})$; alsdann wurden diese mit den Gewichten g_{m+1} multipliziert, und es wurde nacheinander

$$g_{m+1} f_n(z_{m+1}) + s_n^{(m)} = s_n^{(m+1)}$$

gebildet und wieder an der gleichen Stelle gespeichert. Dieser Prozeß wurde Schritt für Schritt ausgeführt für $m = 0, 1, 2, \ldots M-1$. So erhielt man schließlich als Näherung für die Integrale die Summen $s_n^{(M)}$.

An dieser Stelle sei noch einiges über die durchgeführten Kontrollen gesagt. Da ja großes Interesse an der Zuverlässigkeit der berechneten Werte besteht, mußten in Anbetracht der recht häufigen Maschinenfehler Rechenkontrollen im Programm vorgesehen werden, die einen Fehler möglichst schnell erkennen ließen. Neben den schon beschriebenen Kontrollen war die folgende sehr wirksam: Bevor $s_n^{(m+1)}$ aus $s_n^{(m)}$ gebildet wurde, speicherte man in einem weiteren Block von Speichern (2020 bis 2157) die $s_n^{(m)}$ ein zweites Mal, damit sie auch noch weiterhin verfügbar waren. Dann wurden die Differenzen $s_n^{(m+1)} - s_n^{(m)}$ gebildet und aufsummiert:

$$S^{(m+1)} = \sum_{n=1}^{96} s_n^{(m+1)} - s_n^{(m)} = \sum_{n=1}^{96} g_{m+1} f_n(z_{m+1}) .$$

Diese Größen wurden ausgedruckt, außerdem wurden ihre zweiten Differenzen $S^{(m+1)} - 2S^{(m)} + S^{(m-1)}$ gebildet und ausgedruckt. Der Verlauf dieser zweiten Differenzen ließ sich((außer am Anfang des Integrationsintervalles, wo unterschiedliche Gewichte g_{m+1} auftraten) durchweg gut übersehen, und falls überhaupt irgendein Fehler unterlief, machte er sich in einem Abweichen dieser zweiten Differenzen von ihrem gut überschaubaren Verlauf bemerkbar. Wenn also bei der Berechnung der $s_n^{(m+1)}$ aus den $g_{m+1}f_n(z_{m+1})$ ein Fehler aufgetreten war, die $s_n^{(m)}$ aber noch richtig waren, konnte man die Rechnung noch einmal an der Stelle beginnen lassen, an der, ausgehend allein von dem Wert z_{m+1} die Funktionswerte $f_n(z_{m+1})$ gebildet wurden. Für das in einem solchen Falle notwendige Zurückschreiben der Werte $s_n^{(m)}$ in die Speicher 1520 bis 1657 wurde eigens ein kleines Unterprogramm aufgestellt, in dem auch $z_m = z_{m+1} - h$ gebildet wurde, so daß dann ohne großen Zeitverlust die Rechnung an der zurückliegenden Stelle wieder beginnen konnte.

Im übrigen bestand das für diese Rechnung aufgestellte Programm nur aus einer Hauptroutine von ca. 650 Befehlen, die die Durchführung eines Schrittes $s_n^{(m)} \longrightarrow s_n^{(m+1)}$ bewerkstelligte und nach deren Ablauf die Rechnung über einen Sprungbefehl wieder an den Anfang der gleichen Routine zurückgeführt wurde, um den Schritt $s_n^{(m+1)} \longrightarrow s_n^{(m+2)}$ auszuführen usf. Nach Ausführung der notwendigen Anzahl von Schritten wurde durch einen mit einem Maschinenschalter von Hand wirksam gemachten Entscheidungsbefehl statt des Sprunges an den Anfang des Programmes ein gesonderter Programmteil durchlaufen, in dem die Inhalte der Speicher 1520 bis 1657 ausgedruckt wurden, also die endgültigen Summen, die als Näherungen für die Integrale angesehen wurden. Für die Richtigkeit hatte man hier einen weitere Kontrolle: Von den je 96 berechneten Integralen waren 20 schon bei den Berechnungen in Amerika hergestellt worden, so daß man auch hier die neuen Werte mit den alten vergleichen konnte. Die für einen Schritt $s_n^{(m)} \longrightarrow s_n^{(m+1)}$ benötigte Rechenzeit betrug ca. 70 sec. (von den 650 Befehlen des Programms wurde ein größerer Teil über Sprungbefehle mehrere Male durchlaufen). Für die Bildung eines Blocks von 96 Integralen wurden 125 bis 200 Summationsschritte benötigt, je nach dem Wert des Geschwindigkeitsparameters γ_o.

3. Die Ergebnisse sind in Tabellen am Schluß des Berichts beigefügt.

4. Falls eine Wiederholung der Rechnung für andere Parameterwerte erforderlich werden sollte, wäre zu erwägen, statt des doch recht plumpen Verfahrens der Ersetzung der uneigentlichen Integrale durch Summen, das dadurch nahelag, daß die bisherigen Berechnungen in USA ebenfalls nach dieser Methode durchgeführt wurden, und bei dem nur durch die Möglichkeit der simultanen Summation, wie sie oben beschrieben ist, die Rechenzeit auf ein ertragliches Maß herabgesetzt werden konnte, ein anderes Verfahren zu wählen. Man kann nämlich die Funktionen $\mathfrak{M}_{ij}^{st}$ und $\mathfrak{N}_{lm}^{st}$ auf Linearkombinationen der Funktionen

$$K_n = \int_1^\infty \frac{\cos(\mu\gamma_o x)\ \exp(-\nu k x^2 \gamma_o)}{x^n \sqrt{x^2-1}}\, dx \qquad \begin{aligned} \mu &= 0,\ 1,\ 2 \\ \nu &= 0,\ 1,\ 2 \\ n &= 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \\ &\ldots,\ 16 \end{aligned}$$

$$M_{n+1} = \int_1 \frac{\sin(\mu\gamma_o x)\ \exp(-\nu k x^2 \gamma_o)}{x^{n+1} \sqrt{x^2-1}}\, dx$$

zurückführen. K_n und M_{n+1} als Funktionen von γ_o genügen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. bzw. 3. Ordnung, z.B. für $\nu \neq 0$ dem System

$$K_n'' = \left(\frac{n-2}{2\gamma_o} - \nu k + \frac{\mu^2}{4\nu k}\right)K_n' + \left(\frac{(n-1)\nu k}{2\gamma_o} - \frac{\mu^2(n+1)}{4\gamma_o \nu k} + \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^4}{4\nu^2 k^2}\right)K_n$$

$$+ \left(\frac{\mu(n+1)}{4\gamma_o \nu k} - \frac{\mu^3}{4\nu^2 k^2}\right)M_{n+1}' + \frac{3\mu n}{4\gamma_o}M_{n+1}$$

$$M_{n+1}'' = \left(\frac{n-1}{2\gamma_o} - \nu k - \frac{\mu^2}{2\nu k}\right)M_{n+1}' + \left(-\frac{\mu(n-1)}{2\gamma_o} + \frac{\mu\nu k}{2} + \frac{\mu^3}{2\nu k}\right)K_n$$

$$+ \frac{3\mu}{2} K_n' + \frac{\mu\nu k}{2\gamma_o} M_{n+1} \quad .$$

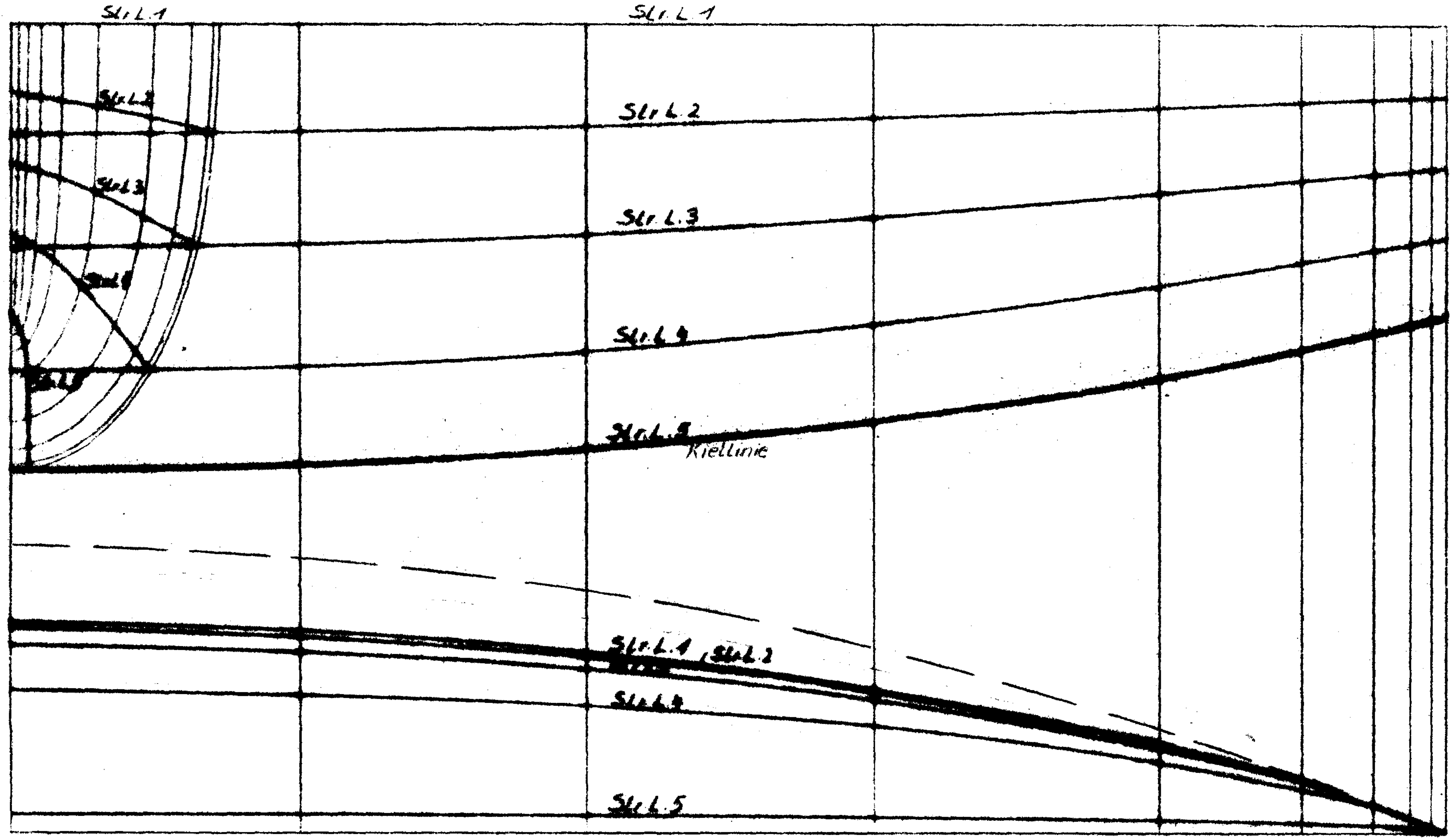
Im Fall $\mu = 0$ entartet dieses System zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung für K_n.

Für $\nu = 0$, $\mu \neq 0$ genügt M_{n+1} der Differentialgleichung 3. Ordnung

$$M_{n+1}''' = \frac{n-1}{\gamma_o} M_{n+1}'' - \mu^2 M_{n+1}' + \frac{\mu^2 n}{\gamma_o} M_{n+1}$$

und schließlich ist für $\mu = \nu = 0$ $M_{n+1} = 0$, K_n = const. und einfach zu berechnen.
Diese Differentialgleichungen lassen sich als Anfangswertaufgaben ausgehend von $\gamma_0 = 0$ numerisch auswerten. Zwar liegt bei $\gamma_0 = 0$ eine Singularität der Differentialgleichungen. Da man aber auch die höheren Ableitungen K_n'', M_{n+1}''', M_{n+1}'' bei $\gamma_0 = 0$ kennt, kann man die Integration trotzdem ausführen, etwa nach dem Runge-Kutta-Verfahren, indem man an der Stelle $\gamma_0 = 0$ diese Ableitungen nicht aus der Differentialgleichung berechnet, sondern die bekannten Werte nimmt. Die K_n und M_{n+1} für verschiedene Werte von n hängen außerdem durch Rekursionsformeln zusammen, so daß man nur wenige Anfangswertaufgaben numerisch lösen muß.
Hat man erst die K_n und M_{n+1}, so erhält man über gewisse Zwischenfunktionen die $\mathfrak{M}_{ij}^{st^n}$ und $\mathfrak{N}_{lm}^{st}$ als Linearkombinationen dieser Funktionen, wobei die Koeffizienten fnoch von der Form $\frac{1}{k^{\varrho}\gamma_0^{\sigma}}$ (ϱ, σ ganze Zahlen) sind. Die Anzahl der Summanden in diesen Linearkombinationen beträgt zwischen 3 und 66.
Bei einem Versuch, die Differentialgleichungen nach Runge-Kutta auszuwerten, war das Verfahren bei den einzelnen Differentialgleichungen ohne weiteres durchführbar, während das System bei $\gamma_0 = 0$ einige Schwierigkeiten machte. Aber auch diese lassen sich anscheinend durch die Wahl einer genügend kleinen Schrittweite überwinden.

Bei der Durchführung dieser Arbeiten hat sich die G 2 dank ihrem sehr flexiblen Befehlscode (Sprungbefehle, Entscheidungsbefehle, Adressenänderunge) als sehr geeignet für die Schnelle Bewältigung solcher umfangreicher Probleme erwiesen. Die durch die Entstehungsgeschichte der Maschine bedingten recht häufigen Rechenfehler machten zwar Schwierigkeiten, die aber nicht unüberwindlich waren und vor denen man sich nach genügender Einarbeitung in die Programmierungs- und Arbeitstechnik an der G 2 weitgehend schützen konnte.
Dieser Bericht bedeutet keinen endgültigen Abschluß der Arbeiten. Einmal sollen die gewonnenen Ergebnisse weiter verwertet werden, zum andern wäre es für den Fall, daß weitere Rechnungen notwendig werden, interessant, zu untersuchen, ob sich die bei beiden beschriebenen Problemkreisen gegebenen Winke für die weiterführende bzw. rationellere Gestaltung der Rechnung verwirklichen lassen.

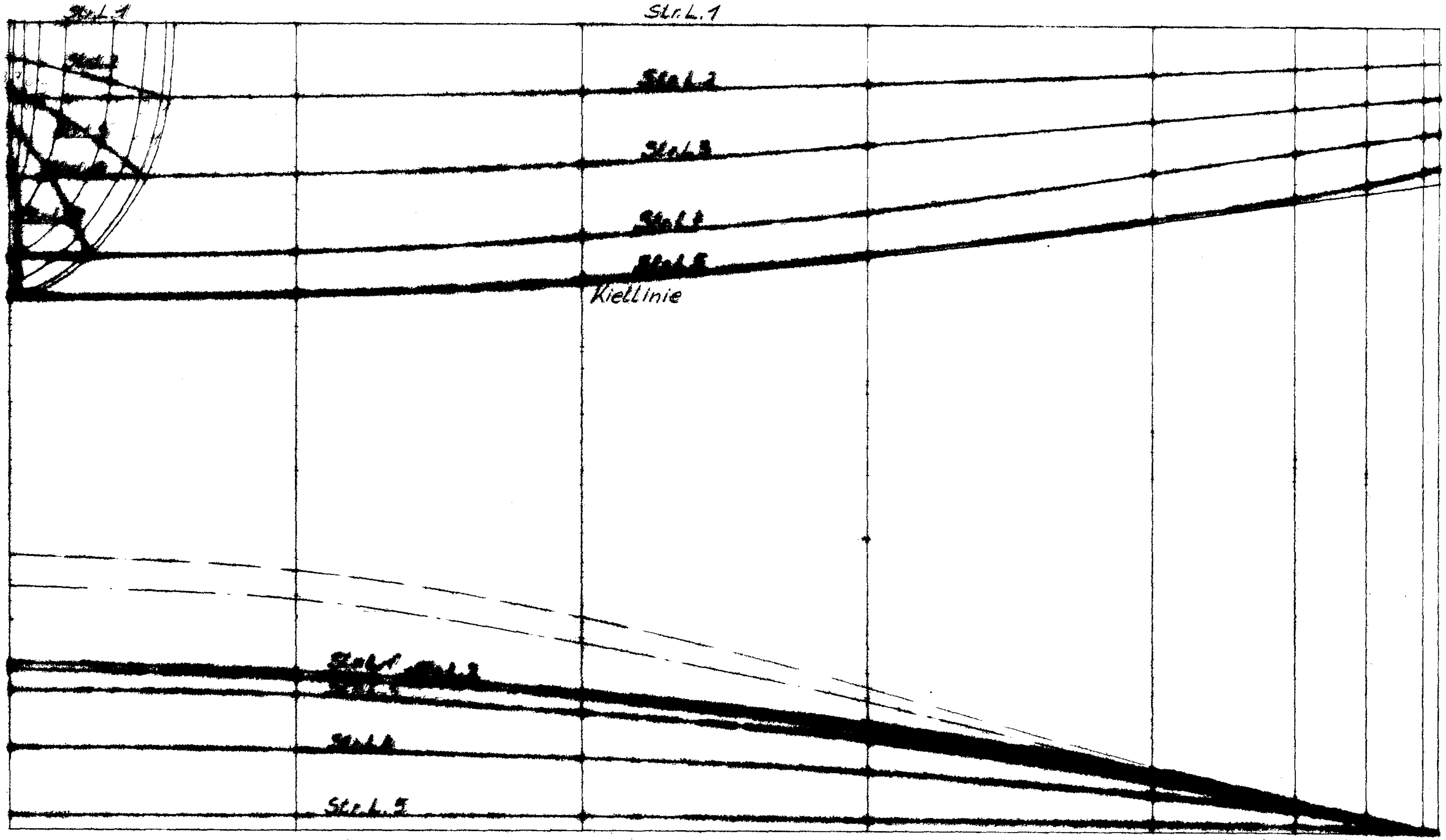


1 Schiff (S202 nach Inui) $n(\xi) = 2\,0{,}4\xi$ $k = 0{,}2$

– – – Wasserlinie = 1. [illegible] nach alter Theorie — Errechnete Übergeschwindigkeit im ⊄:

——— 2. Spantflächenlänge — [illegible] V (Slr L 1) ; 0,0548 V (Kiel)

$\frac{S\Delta}{L^3}$ = 0,0[illegible] , nach alter Theorie [illegible]



<u>2. Schiff</u> $n(\xi) = 0.381(3\xi - 2\xi^3)$ $k = 0.1$

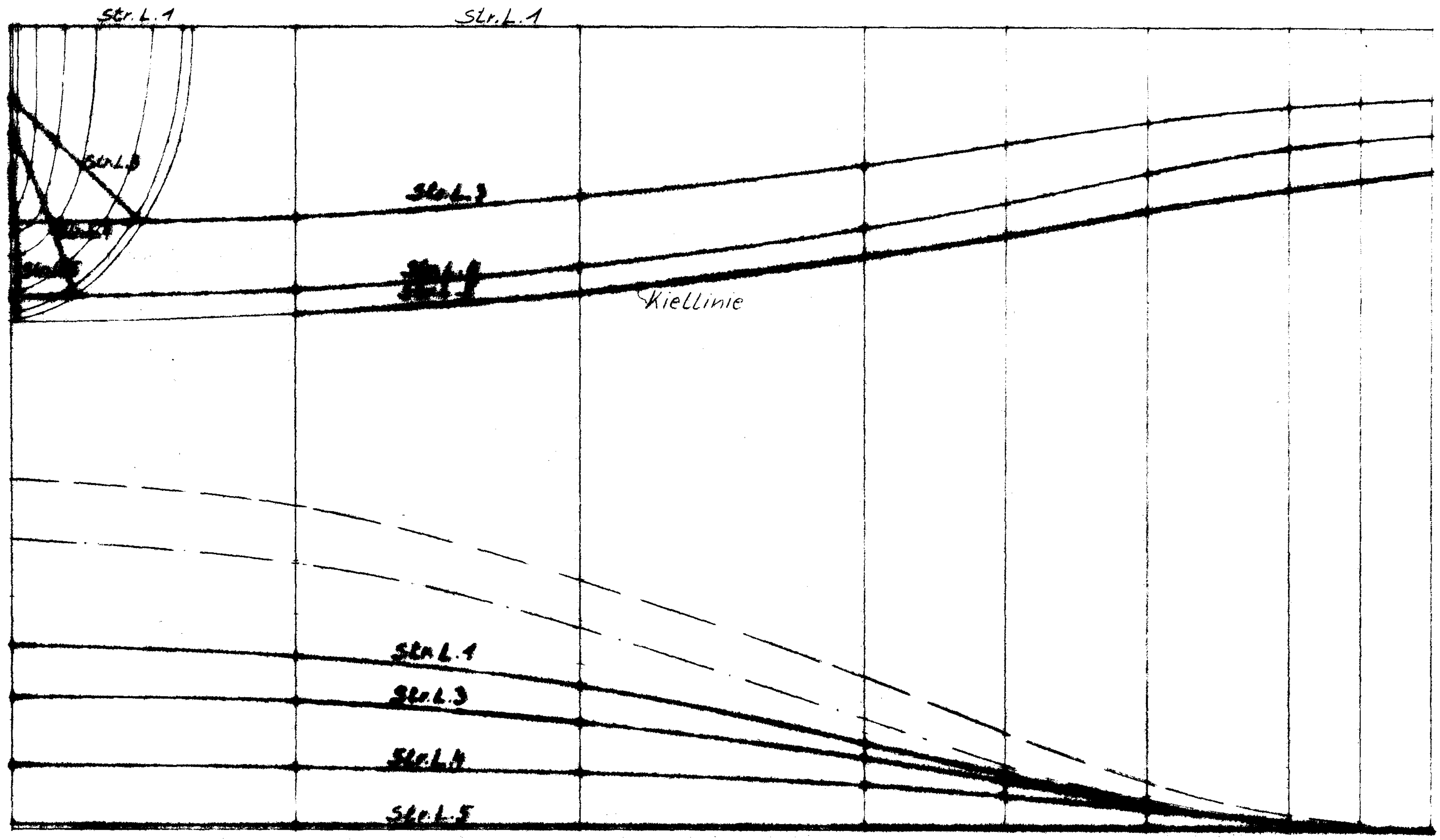
Wasserlinien = 10 Spantfläche / Länge n. alter Theorie

10 Spantfläche / Länge

$\frac{8\Delta}{l^2} = 0.020$, nach alter Theorie 0.023

Errechnete Übergeschwindigkeit im ϕ

0.0095·V (Str. L. 1) ; 0.0084·V (Kiel)



3. Schiff $n(\xi) = 0.489(4\xi - 4\xi^3)$ $k = 0.1$

— — — Wasserlinie = 10 Spantfläche / Länge n. alter Theorie

— · — · — = 10 Spantfläche / Länge

Errechnete Übergeschwindigkeit im ⊄:

$0.01216 \cdot V$ (Str. L. 1) ; $0.00930 \cdot V$ (Kiel)

$\frac{8\Delta}{L^3} = 0.021$, nach alter Theorie 0.029

Bemerkungen zu den Tabellen

Die Anordnung der Werte $\mathfrak{M}^{st}_{ij}(k,\gamma_o)$ und $\mathfrak{N}^{st}_{lm}(k,\gamma_o)$ ist aus folgendem Schema zu ersehen:

$\gamma_o =$

		k = o.1			k = o.2		
		s,t =					
		o o	o l	l l	o o	o l	l l
i,j =	l l						
	l 2						
	l 3						
	l 5						
	2 2						
	2 3		$\mathfrak{M}^{ol}_{23}$				
	2 5						
	3 3						
	3 5						
	5 5						
l,m =	o o						
	o 2						
	o 4					$\mathfrak{N}^{ol}_{o4}$	
	2 2						
	2 4						
	4 4						

Eine Reihe von Werten fehlt noch in diesen Tabellen. Diese Werte sind zwar berechnet worden, es wurden aber nachträglich Rechenfehler festgestellt, so dass eine nochmalige Rechnung erforderlich ist, ehe die Tabellen vervollständigt werden können.

$\gamma_0 = 0.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.7218522	0.3043275	0.1309414	0.3953037	0.1532041	0.0070811
1 2	0.5035668	0.2128331	0.0920788	0.2800053	0.1087891	0.0051074
1 3	0.3813951	0.1616916	0.0702734	0.2147404	0.0840050	0.0039723
1 5	0.2521877	0.1075794	0.0470842	0.1447279	0.0572075	0.0027318
2 2	0.3590516	0.1507648	0.0652781	0.2005862	0.0780813	0.0036888
2 3	0.2760117	0.1155615	0.0501057	0.1550091	0.0604938	0.0028718
2 5	0.1859128	0.0777644	0.0338222	0.1054562	0.0413710	0.0019776
3 3	0.2143647	0.0891285	0.0386152	0.1204217	0.0469767	0.0022373
3 5	0.1462791	0.0604541	0.0262027	0.0824747	0.0322225	0.0015421
5 5	0.1016166	0.0414251	0.0179012	0.0569803	0.0221874	0.0010643
0 0	1.9714336	0.9241552	0.4369659	1.5137729	0.6884790	0.0299841
0 2	0.4958241	0.2290851	0.1086556	0.3935498	0.1814398	0.0075855
0 4	0.2529626	0.1171484	0.0559955	0.2077972	0.0970306	0.0039662
2 2	0.2309263	0.0924857	0.0396641	0.1405176	0.0579594	0.0021919
2 4	0.1457066	0.0568336	0.0238763	0.0839829	0.0336614	0.0012262
4 4	0.0973605	0.0367371	0.0150579	0.0524146	0.0201669	0.0007067

$\gamma_0 = 1.0$

$\gamma_0 = 1.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.5556445	0.2550943	0.1183274	0.3912974	0.1712943	0.0188295
1 2	0.3869448	0.1762777	0.0814688	0.2709645	0.1184034	0.0129456
1 3	0.2914575	0.1321817	0.0609941	0.2038830	0.0890803	0.0097080
1 5	0.1899076	0.0858041	0.0395875	0.1333608	0.0583825	0.0063418
2 2	0.2827782	0.1267663	0.0579792	0.1928873	0.0833998	0.0090053
2 3	0.2198706	0.0976236	0.0443945	0.1478859	0.0635706	0.0068110
2 5	0.1489330	0.0654941	0.0296362	0.0990290	0.0423627	0.0045004
3 3	0.1746005	0.0765247	0.0345088	0.1148595	0.0488967	0.0051830
3 5	0.1214062	0.0524784	0.0234731	0.0781850	0.0329628	0.0034527
5 5	0.0872783	0.0369895	0.0163441	0.0543638	0.0225529	0.0023247
0 0	0.6163424	0.2878539	0.1357791	0.4698096	0.2130081	0.0218125
0 2	0.1376444	0.0576561	0.0250051	0.0812504	0.0328890	0.0028042
0 4	0.0561765	0.0213564	0.0085771	0.0268234	0.0094852	0.0005599
2 2	0.1542031	0.0628653	0.0263026	0.0766734	0.0276585	0.0025492
2 4	0.1067316	0.0430329	0.0179182	0.0522862	0.0186261	0.0017534
4 4	0.0801843	0.0318195	0.0131535	0.0387846	0.0136747	0.0013137

$\gamma_0 = 2.0$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.4597250	0.2118821	0.0985843	0.3270135	0.1437313	0.0196911
1 2	0.3174263	0.1447621	0.0669137	0.2221538	0.0970373	0.0131642
1 3	0.2369551	0.1073012	0.0494066	0.1643730	0.0715531	0.0096458
1 5	0.1517240	0.0681661	0.0312818	0.1045850	0.0454192	0.0060798
2 2	0.2332477	0.1044570	0.0476467	0.1570860	0.0675186	0.0089956
2 3	0.1814520	0.0803263	0.0363517	0.1195016	0.0508604	0.0066991
2 5	0.1223135	0.0534495	0.0239975	0.0787985	0.0331991	0.0043175
3 3	0.1450691	0.0632957	0.0283481	0.0926718	0.0388875	0.0050477
3 5	0.1011974	0.0434235	0.0192360	0.0626362	0.0258793	0.0033048
5 5	0.0737408	0.0309541	0.0135093	0.0437148	0.0176578	0.0022090
0 0	0.2910034	0.1320103	0.0607752	0.2019465	0.0879883	0.0113652
0 2	0.0719758	0.0270771	0.0104612	0.0273643	0.0076563	0.0005658
0 4	0.0271419	0.0078718	0.0021340	0.0023935	-0.0020661	-0.0005645
2 2	0.1474806	0.0618199	0.0264750	0.0775975	0.0289977	0.0036628
2 4	0.1065365	0.0443715	0.0189922	0.0564483	0.0211922	0.0027200
4 4	0.0829751	0.0341463	0.0145422	0.0438720	0.0164618	0.0021222

$\gamma_0 = 2.5$

$\gamma_0 = 3.0$

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.2040405	0.0916392	0.0417164	0.1335586	0.0564910	0.0103229
1	2	0.1372339	0.0601252	0.0268489	0.0846667	0.0348091	0.0061620
1	3	0.0991609	0.0425484	0.0187066	0.0584420	0.0234634	0.0040452
1	5	0.0590003	0.0244796	0.0105063	0.0324930	0.0125512	0.0020716
2	2	0.1083821	0.0462161	0.0201572	0.0618804	0.0243979	0.0041249
2	3	0.0871182	0.0364626	0.0156623	0.0474233	0.0181738	0.0029787
2	5	0.0598114	0.0244161	0.0102910	0.0307678	0.0113635	0.0017904
3	3	0.0745257	0.0306792	0.0129949	0.0388180	0.0144585	0.0022996
3	5	0.0551522	0.0222196	0.0092588	0.0273756	0.0098634	0.0015161
5	5	0.0444293	0.0175656	0.0072182	0.0212236	0.0074247	0.0011141
0	0	0.0986017	0.0413223	0.0177002	0.0519567	0.0194315	0.0032446
0	2	0.1041250	0.0440876	0.0190606	0.0564676	0.0215024	0.0037046
0	4	0.0674759	0.0280832	0.0120301	0.0359785	0.0135625	0.0023373
2	2	0.1758860	0.0777366	0.0348539	0.1080490	0.0442111	0.0080431
2	4	0.1265967	0.0555001	0.0247862	0.0773070	0.0315526	0.0057297
4	4	0.0964578	0.0416983	0.0184543	0.0576361	0.0232728	0.0041790

$\gamma_0 = 3.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.1075767	0.0464205	0.0204337	0.0627575	0.0250098	0.0048467
1 2	0.0772809	0.0321540	0.0137135	0.0407752	0.0153015	0.0027539
1 3	0.0579097	0.0233589	0.0097030	0.0282313	0.0100301	0.0016805
1 5	0.0355035	0.0135759	0.0053885	0.0152118	0.0048522	0.0006915
2 2	0.0730644	0.0299424	0.0125716	0.0364084	0.0131305	0.0022460
2 3	0.0640023	0.0259183	0.0107736	0.0309142	0.0107137	0.0018135
2 5	0.0477758	0.0190068	0.0077998	0.0222662	0.0076272	0.0012335
3 3	0.0601923	0.0242649	0.0100519	0.0287847	0.0100641	0.0016682
3 5	0.0485165	0.0193598	0.0079714	0.0228801	0.0079113	0.0013066
5 5	0.0422935	0.0167800	0.0068949	0.0199487	0.0068991	0.0011529
0 0	0.1156898	0.0499090	0.0219124	0.0660097	0.0259243	0.0050659
0 2	0.1312318	0.0574106	0.0255164	0.0780899	0.0314031	0.0062812
0 4	0.0865304	0.0373921	0.0165120	0.0508716	0.0203364	0.0040568
2 2	0.1695241	0.0752854	0.0338715	0.1051341	0.0432159	0.0087969
2 4	0.1184680	0.0520302	0.0232508	0.0723059	0.0294952	0.0059609
4 4	0.0882126	0.0380879	0.0168173	0.0521248	0.0209138	0.0041529

$\gamma_0 = 4.0$

$\gamma_0 = 4.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.0588411	0.0240620	0.0100704	0.0287926	0.0102329	0.0020547
1 2	0.0656739	0.0271855	0.0114949	0.0330661	0.0119896	0.0024799
1 3	0.0611901	0.0291171	0.0106975	0.0308948	0.0112254	0.0023378
1 5	0.0480916	0.0197433	0.0083240	0.0242097	0.0087793	0.0018389
2 2	0.0802276	0.0338269	0.0145252	0.0422643	0.0158036	0.0034070
2 3	0.0774214	0.0326880	0.0140641	0.0411220	0.0154508	0.0033653
2 5	0.0632898	0.0266302	0.0114510	0.0337070	0.0126885	0.0027856
3 3	0.0761248	0.0321870	0.0138744	0.0407465	0.0153873	0.0033803
3 5	0.0637546	0.0268535	0.0115614	0.0341459	0.0129023	0.0028492
5 5	0.0551931	0.0231863	0.0099228	0.0294257	0.0110899	0.0024498
0 0	0.1089974	0.0474297	0.0209504	0.0631946	0.0250354	0.0058343
0 2	0.0976416	0.0423226	0.0186492	0.0563204	0.0222538	0.0051709
0 4	0.0590514	0.0249325	0.0107874	0.0324922	0.0125013	0.0028237
2 2	0.0922903	0.0397961	0.0174640	0.0526275	0.0206651	0.0047610
2 4	0.0610799	0.0256385	0.0110257	0.0329505	0.0125265	0.0027774
4 4	0.0470106	0.0191888	0.0080817	0.0237508	0.0086530	0.0018125

$\gamma_0 = 5.0$

1 1	0.0716961	0.0301502	0.0129169	0.0375198	0.0139615	0.0032099
1 2	0.0795321	0.0337443	0.0145624	0.0425042	0.0160283	0.0037520
1 3	0.0738513	0.0312879	0.0134966	0.0394989	0.0149043	0.0034997
1 5	0.0578418	0.0243484	0.0104711	0.0307934	0.0115875	0.0027259
2 2	0.0904045	0.0387017	0.0168222	0.0493381	0.0188465	0.0044863
2 3	0.0849444	0.0363238	0.0157842	0.0464010	0.0177368	0.0042334
2 5	0.0676206	0.0287518	0.0124590	0.0367703	0.0140191	0.0033492
3 3	0.0807510	0.0344770	0.0149702	0.0440803	0.0168454	0.0040247
3 5	0.0654924	0.0277772	0.0120155	0.0354798	0.0134986	0.0032186
5 5	0.0547716	0.0230235	0.0099009	0.0292707	0.0110456	0.0026144
0 0	0.0733577	0.0311545	0.0134858	0.0399306	0.0152463	0.0036396
0 2	0.0598426	0.0250356	0.0107115	0.0315618	0.0118196	0.0027522
0 4	0.0350275	0.0139525	0.0057421	0.0166892	0.0058277	0.0012343
2 2	0.0538006	0.0222374	0.0094003	0.0274527	0.0100488	0.0022631
2 4	0.0378662	0.0150494	0.0061656	0.0177060	0.0060919	0.0012505
4 4	0.0340487	0.0133207	0.0053782	0.0152562	0.0050685	0.0009782

$\gamma_0 = 5.5$

$\gamma_0 = 6.0$

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 2
1	1	0.0647322	0.0272311	0.0116554	0.0336672	0.0124739	0.0031978
1	2	0.0644121	0.0271172	0.0116159	0.0335856	0.0124640	0.0032040
1	3	0.0566220	0.0236762	0.0100929	0.0291792	0.0107479	0.0027399
1	5	0.0411993	0.0169438	0.0071410	0.0206709	0.0074797	0.0018716
2	2	0.0644551	0.0271502	0.0116367	0.0336704	0.0125106	0.0032225
2	3	0.0570873	0.0238808	0.0101838	0.0294529	0.0108570	0.0027709
2	5	0.0421971	0.0173581	0.0073154	0.0211669	0.0076583	0.0019149
3	3	0.0514758	0.0213721	0.0090615	0.0261724	0.0095560	0.0024093
3	5	0.0393957	0.0160712	0.0067265	0.0194085	0.0069353	0.0017033
5	5	0.0321619	0.0128760	0.0053104	0.0152772	0.0053164	0.0012592
0	0	0.0313561	0.0121823	0.0048705	0.0135911	0.0043867	0.0008915
0	2	0.0311154	0.0120878	0.0048315	0.0134534	0.0043315	0.0008741
0	4	0.0272400	0.0105049	0.0041775	0.0116416	0.0037076	0.0007363
2	2	0.0364420	0.0144262	0.0058599	0.0163996	0.0054638	0.0011736
2	4	0.0366050	0.0146009	0.0059754	0.0168126	0.0056942	0.0012633
4	4	0.0401891	0.0162528	0.0067320	0.0190660	0.0066218	0.0015345

$\gamma_0 = 6.5$

		o o	o 1	1 1	o o	o 1	1 1
1	1	o.o437572	o.o178816	o.oo74721	o.o2131o4	o.oo75495	o.oo19o65
1	2	o.o418312	o.o17o45o	o.oo71o76	o.o2o2742	o.oo71575	o.oo18oo1
1	3	o.o362588	o.o14594o	o.oo6o268	o.o171627	o.oo59549	o.oo14617
1	5	o.o258965	o.o1o1186	o.oo4o835	o.o116175	o.oo38639	o.ooo8936
2	2	o.o4o31o4	o.o163749	o.oo68123	o.o194297	o.oo68321	o.oo17o94
2	3	o.o354641	o.o142327	o.oo58636	o.o166883	o.oo57647	o.oo14o56
2	5	o.o261497	o.o1o1999	o.oo41o86	o.o11672o	o.oo38659	o.ooo8867
3	3	o.o322996	o.o128199	o.oo52323	o.o148449	o.oo5o352	o.oo11942
3	5	o.o254262	o.oo98463	o.oo39385	o.o111394	o.oo36314	o.ooo8o75
5	5	o.o223585	o.oo85162	o.oo3358o	o.oo94615	o.oo29898	o.ooo628o
o	o	o.o357157	o.o142279	o.oo57962	o.o162o93	o.oo54281	[illegible]
o	2	o.o386297	o.o155493	o.oo63927	o.o179442	o.oo6122o	o.oo1439o
o	4	o.o364147	o.o147o38	o.oo6o68o	o.o171111	o.oo58888	o.oo141o5
2	2	o.o445997	o.o181816	o.oo75551	o.o212876	o.oo74163	o.oo18o36
2	4	o.o441412	o.o18o732	o.oo75428	o.o213353	[illegible]	o.oo18565
4	4	o.o452198	o.o18597o	o.oo7793o	o.o2211o2	o.oo78398	o.oo1969o

$\gamma_0 = 7.0$

		o o	o 1	1 1	o o	o 1	1 1
1	1	o.o268o94	o.o1o3872	o.oo41453	o.o1162o6	o.oo37532	o.ooo85o6
1	2	o.o254545	o.oo98o27	o.oo38922	o.o1o9o59	o.oo34861	o.ooo7762
1	3	o.o23o596	o.oo8762o	o.oo34377	o.oo96o28	o.oo299o1	o.ooo6325
1	5	o.o1798o7	o.oo66277	o.oo2533o	o.oo7o637	o.oo2o735	o.ooo3889

$\gamma_0 = 7.5$

		o o	o 1	1 1	o o	o 1	1 1
1	1	0.0214649	0.0080607	0.0031220	0.0086348	0.0025989	0.0005273
1	2	0.0212715	0.0079868	0.0030935	0.0085579	0.0025771	0.0005237
1	3	0.0213029	0.0080143	0.0031095	0.0085973	0.0025955	0.0005292
1	5	0.0193967	0.0072733	0.0028176	0.0078093	0.0023510	0.0004788
2	2	0.0214766	0.0080779	0.0031340	0.0086753	0.0026218	0.0005374
2	3	0.0220426	0.0083314	0.0032460	0.0089798	0.0027365	0.0005692
2	5	0.0208065	0.0078685	0.0030706	0.0085144	0.0026053	0.0005486
3	3	0.0234071	0.0089258	0.0035042	0.0096919	0.0030002	0.0006425
3	5	0.0230744	0.0088445	0.0034911	0.0096791	0.0030325	0.0006670
5	5	0.0240066	0.0092866	0.0036966	0.0102716	0.0032766	0.0007470
0	0	0.0422156		0.0071176	0.0199051	0.0069033	0.0017932
0	2	0.0410605	0.0166918	0.0069202	0.0193774	0.0067014	0.0017520
0	4	0.0143800	0.0143009	0.0059086	0.0165873	0.0057078	0.0014879
2	2	0.0407834	0.0165638	0.0068627	0.0192266	0.0066444	0.0017370
2	4	0.0359762	0.0145184	0.0059904	0.0168093	0.0057711	0.0014990
4	4	0.0325956	0.0130632	0.0053615	0.0150582	0.0051239	0.0013165

$\gamma_0 = 8.0$

		o o	o 1	1 1	o o	o 1	1 1
1	1	0.0253171	0.0097639	0.0038660	0.0106632	0.0033546	0.0007668
1	2	0.0255964	0.0098960	0.0039274	0.0108416	0.0034282	0.0007922
1	3	0.0264470	0.0102811	0.0040996	0.0113198	0.0036131	0.0008489
1	5	0.0250437	0.0097567	0.0039018	0.0108026	0.0034711	0.0008287
2	2	0.0261336	0.0101321	0.0040311	0.0111355	0.0035403	0.0008271
2	3	0.0272728	0.0106362	0.0042528	0.0117496	0.0037721	0.0008962
2	5	0.0262329	0.0102567	0.0041135	0.0113910	0.0036818	0.0008883
3	3	0.0287935	0.0112996	0.0045415	0.0125487	0.0040694	0.0009833
3	5	0.0281279	0.0110712	0.0044640	0.0123602	0.0040362	0.0009900
5	5	0.0281147	0.0111001	0.0044892	0.0124495	0.0040916	0.0010168
0	0	0.0325924	0.0129962	0.0053002	0.0147571	0.0049415	0.0012741
0	2	0.0298714	0.0118346	0.0048034	0.0133887	0.0044466	0.0011348
0	4	0.0244701	0.0095610	0.0038417	0.0107408	0.0035050	0.0008753
2	2	0.0282112	0.0111027	0.0044821	0.0124949	0.0041092	0.0010336
2	4	0.0240353	0.0093316	0.0037280	0.0104114	0.0033595	0.0008227
4	4	0.0215009	0.0082418	0.0032584	0.0091052	0.0028793	0.0006827

[illegible]$_0$ = 8.5

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.0301119	0.0118565	0.0047718	0.01312[illegible]9	0.00425[illegible]5	0.0010617
1	2	0.0299767	0.0118092	0.0047556	0.0130931	0.0042543	0.0010646
1	3	0.0303469	0.0119867	0.0048382	0.0133246	0.0043488	0.0010966
1	5	0.0279155	0.0110153	0.0044467	0.0122752	0.0040106	0.0010172
2	2	0.0300090	0.0118271	0.0047650	0.0131259	0.0042703	0.001071[illegible]
2	3	0.0305202	0.0120598	0.0048696	0.0134167	0.0043834	0.00110[illegible]
2	5	0.0283403	0.0111854	0.0045160	0.0124680	0.0040756	0.001035[illegible]
3	3	0.0311847	0.0123533	0.0049985	0.0137743	0.0045182	0.00114[illegible]
3	5	0.0291826	0.0115455	0.0046702	0.0128934	0.0042298	0.0010803
5	5	0.0277354	0.0109533	0.0044266	0.0122394	0.0040110	0.0010255
0	0	0.0210449	0.0080209	0.0031497	0.0087418	0.0027218	0.0006445
0	2	0.0189113	0.0071119	0.0027[illegible]	0.00[illegible]	0.002[illegible]	0.0005325
0	4	0.0154912	0.0056817	0.0021680	0.0060576	0.0017716	0.0003767
2	2	0.0180434	0.0067222	0.0025879	0.0071974	0.0021500	0.0004720
2	4	0.0159431	0.0058464	0.0022203	0.0061865	0.0017941	0.0003722
4	4	0.0152734	0.0055741	0.0021060	0.0056554	0.0016767	0.0003362

[illegible]$_0$ = 9.0

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.0293195	0.0115336	0.0046344	0.0127183	0.0041081	0.0014572
1	2	0.0285073	0.0111958	0.0044937	0.0123417	0.0039797	0.0010146
1	3	0.0280372	0.0110130	0.0044220	0.0121512	0.0039217	0.0010022
1	5	0.0247109	0.0097458	0.0038649	0.0106506	0.0034203	0.000[illegible]713
2	2	0.0278618	0.010[illegible]233	0.0043788	0.0120334	0.0038722	0.000[illegible]850
2	3	0.0275062	0.0107845	0.0043242	0.0118887	0.003[illegible]280	0.000[illegible]756
2	5	0.0244838	0.00[illegible]5472	0.0038417	0.0105151	0.0033663	0.000[illegible]530
3	3	0.0[illegible]72445	0.0097834	0.0039008	0.0117809		0.00096[illegible]4
3	5	0.0244281	0.0095227	0.0038042	0.0104889	0.0033573	0.0008516
5	5	0.0223114	0.0086426	0.0034370	0.0094966	0.0030158	0.0007579
0	0	0.0148306	0.0053699	0.0020127	0.0055954	0.0015729	0.000[illegible]
0	2	0.0143864	0.0051838	0.0019341	0.00[illegible]	0.0014942	0.000[illegible]
0	4	0.0131178	0.0046836	0.0017342	0.0048318	0.0013198	0.0002454
2	2	0.0150933	0.0054688	0.0020495	0.0056804	0.0015922	0.0003119
2	4	0.0148724	0.0057385	0.0020262	0.0050148	0.0015792	0.0003115
4	4	0.015[illegible]24	0.0057385	0.0021727	0.00600[illegible]	0.0017207	0.0003522

$\gamma_0 = 9.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.0226789	0.0087283	0.0034442	0.0094603	0.0029504	0.0007341
1 2	0.0216160	0.0082838	0.0032581	0.0089604	0.0027780	0.0006857
1 3	0.0207272	0.0079227	0.0031106	0.0085649	0.0026473	0.0006513
1 5	0.0176057	0.0066508	0.0025891	0.0071626	0.0021803	0.0005263
2 2	0.0207658	0.0079241	0.0031060	0.0085511	0.0026345	0.0006443
2 3	0.0200250	0.0076214	0.0029818	0.0082177	0.0025233	0.0006146
2 5	0.0172908	0.0065048	0.0025230	0.0069831	0.0021105	0.0005032
3 3	0.0193989	0.0073630	0.0028749	0.0079312	0.0024265	0.0005881
3 5	0.0169509	0.0063595	0.0024612	0.0068174	0.0020518	0.0004860
5 5	0.0153011	0.0056766	0.0021773	0.0060514	0.0017902	0.0004128
0 0	0.0156111	0.0057091	0.0021547	0.0059454	0.0016896	0.0003498
0 2	0.0163869	0.0060408	0.0022958	0.0063223	0.0018226	0.0003881
0 4	0.0161552	0.0059798	0.0022823	0.0062866	0.0018287	0.0003973
2 2	0.0179466	0.0066884	0.0025652	0.0070449	0.0020690	0.0004561
2 4	0.0183396	0.0068772	0.0026526	0.0072811	0.0021633	0.0004881
4 4	0.0192850	0.0072846	0.0028273	0.0077528	0.0023329	0.0005390

$\gamma_0 = 10.0$

$\gamma_0 = 10.5$

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.0109172	0.0038119	0.0013810	0.0038789	0.0010138	0.0001898
1	2	0.0108630	0.0037884	0.0013705	0.0038487	0.0010050	0.0001855
1	3	0.0105845	0.0036812	0.0013289	0.0037369	0.0009685	0.0001773
1	5	0.0098088	0.0033880	0.0012164	0.0034327	0.0008789	0.0001566
2	2	0.0110174	0.0038483	0.0013938	0.0039076	0.0010192	0.0001883
2	3	0.0108849	0.0037983	0.0013751	0.0038573	0.0010048	0.0001853
2	5	0.0104121	0.0036265	0.0013110	0.0036821	0.0009562	0.0001752
3	3	0.0108680	0.0037947	0.0013742	0.0038545	0.0010051	0.0001858
3	5	0.0106325	0.0037151	0.0013469	0.0037776	0.0009871	0.0001833
5	5	0.0108952	0.0038319	0.0013977	0.0039092	0.0010344	0.0001973
0	0	0.0206749	0.0078460	0.0030481	0.0082932	0.0024915	0.0006005
0	2	0.0206343	0.0078382	0.0030481	0.0083004	0.0024976	0.0006049
0	4	0.0193943	0.0073554	0.0028587	0.0077929	0.0023447	0.0005691
2	2	0.0208426	0.0097232	0.0030829	0.0083908	0.0025299	0.0006148
2	4	0.0198296	0.0075235	0.0029245	0.0079719	0.0023999	0.0005833
4	4	0.0191000	0.0072301	0.0028063	0.0076603	0.0023004	0.0005581

$\gamma_0 = 11.0$

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.0117163	0.0041431	0.0015152	0.0042151	0.0011201	0.0002197
1	2	0.0121074	0.0043033	0.0015806	0.0043857	0.0011756	0.0002343
1	3	0.0120928	0.0043049	0.0015837	0.0043940	0.0011817	0.0002375
1	5	0.0118781	0.0042429	0.0015666	0.0043427	0.0011770	0.0002408
2	2	0.0126393	0.0045191	0.0016681	0.0046150	0.0012494	0.0002536
2	3	0.0127193	0.0045574	0.0016857	0.0046607	0.0012672	0.0002597
2	5	0.0126808	0.0045638	0.0016954	0.0046823	0.0012846	0.0002685
3	3	0.0128782	0.0046256	0.0017147	0.0047373	0.0012940	0.0002679
3	5	0.0129869	0.0046880	0.0017460	0.0048166	0.0013284	0.0002806
5	5	0.0133773	0.0048576	0.0018186	0.0050066	0.0013955	0.000300[illegible]
0	0	0.0176066	0.0065859	0.0025276	0.0068978	0.0020227	0.0004804
0	2	0.0160382	0.0062777	0.0024037	0.0065719	0.0019193	0.0004538
0	4	0.0152108	0.0056346	0.0021479	0.0058949	0.0017081	0.0004004
2	2	0.0163310	0.0060672	0.0023167	0.0063442	0.0018438	0.0004331
2	4	0.0149924	0.0055330	0.0021026	0.0057786	0.0016647	0.0003867
4	4	0.0140164	0.0051378	0.0019422	0.0053549	0.0015278	0.0003500

$_{o}$ = 11.5

		o o	o 1	1 1	o o	o 1	1 1
1	1	o.o144684	o.oo52692	o.oo19732	o.oo54o53	o.oo15o47	o.ooo3286
1	2	o.o148768	o.oo54367	o.oo2o417	o.oo55841	o.oo1563o	o.ooo3445
1	3	o.o147943	o.oo541o5	o.oo2o335	o.oo5562o	o.oo15595	o.ooo3453
1	5	o.o143961	o.oo52734	o.oo19858	o.oo54322	o.oo15292	o.ooo3418
2	2	o.o15359o	o.oo56324	o.oo21211	o.oo5792o	o.oo16299	o.ooo3625
2	3	o.o153258	o.oo56244	o.oo21197	o.oo57884	o.oo16317	o.ooo3644
2	5	o.o15o1o5	o.oo55177	o.oo2o834	o.oo56894	o.oo16o99	o.ooo3628
3	3	o.o153443	o.oo56353	o.oo21254	o.oo58o36	o.oo16385	o.ooo3673
3	5	o.o1512o3	o.oo55618	o.oo21o13	o.oo57377	o.oo16257	o.ooo3674
5	5	o.o15o648	o.oo55493	o.oo2o996	o.oo57326	o.oo16292	o.ooo37o7
o	o	o.o122991	o.oo442o9	o.oo16419	o.oo45512	o.oo12519	o.ooo2742
o	2	o.o11474o	o.oo4o893	o.oo15o83	o.oo41999	o.oo114oo	o.ooo2444
o	4	o.o1o1658	o.oo35757	o.oo13o53	o.oo36625	o.ooo9744	o.ooo2o24
2	2	o.o1o9817	o.oo38846	o.oo14236	o.oo39784	o.oo1o662	o.ooo2234
2	4	o.o1oo295	o.oo35o78	o.oo12736	o.oo35815	o.ooo9422	o.ooo1911
4	4	o.oo94781	o.oo32856	o.oo11838	o.oo33441	o.ooo8659	o.ooo17o3

$_{o}$ = 12.o

1	1	o.o154493	o.oo56682	o.oo21333	o.oo58125	o.oo16319	o.ooo3687
1	2	o.o155758	o.oo57218	o.oo21557	o.oo587o8	o.oo16516	o.ooo3745
1	3	o.o1525o5	o.oo55973	o.oo21o77	o.oo57448	o.oo16149	o.ooo3663
1	5	o.o143795	o.oo52687	o.oo19826	o.oo54129	o.oo152o1	o.ooo3452
2	2	o.o157384	o.oo57883	o.oo21829	o.oo5942o	o.oo16748	o.ooo3811
2	3	o,o15445o	o.oo56751	o.oo2139o	o.oo5827o	o.oo164o9	o.ooo3733
2	5	o.o146274	o.oo53649	o.oo2o2o3	o.oo55131	o.oo155o4	o.ooo3529

$\lambda_0 = 12.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.0132221	0.0047781	0.0017754	0.0048685	0.0013328	0.0002950
1 2	0.0130679	0.0047192	0.0017527	0.0048092	0.0013156	0.0002911
1 3	0.0125946	0.0045352	0.0016809	0.0046211	0.0012597	0.0002774
1 5	0.0114967	0.0041153	0.0015192	0.0041944	0.0011348	0.0002480
2 2	0.0129440	0.0046709	0.0017339	0.0047603	0.0013011	0.0002877
2 3	0.0125092	0.0045008	0.0016672	0.0045860	0.0012486	0.0002747
2 5	0.0114805	0.0041058	0.0015145	0.0041837	0.0011303	0.0002465
3 3	0.0121359	0.0043536	0.0016091	0.0044344	0.0012023	0.0002631
3 5	0.0112198	0.0040004	0.0014720	0.0040739	0.0010957	0.0002374
5 5	0.0105171	0.0037263	0.0013647	0.0037926	0.0010110	0.0002164
0 0	0.0081206	0.0027323	0.0009551	0.0027294	0.0006606	0.0001151
0 2	0.0083402	0.0028209	0.0009905	0.0028202	0.0006888	0.0001222
0 4	0.0082662	0.0028041	0.0009877	0.0028073	0.0006899	0.0001241
2 2	0.0088317	0.0030124	0.0010653	0.0030154	0.0007471	0.0001363
2 4	0.0090002	0.0030870	0.0010973	0.0030951	0.0007748	0.0001443
4 4	0.0093951	0.0032459	0.0011613	0.0032606	0.0008268	0.0001580

$\lambda_0 = 13.0$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.0093580	0.0032456	0.0011658	0.0032743	0.0008393	0.0001702
1 2	0.0091306	0.0031575	0.0011316	0.0031848	0.0008128	0.0001638
1 3	0.0087425	0.0030072	0.0010731	0.0030315	0.0007673	0.0001525
1 5	0.0078625	0.0026734	0.0009455	0.0026939	0.0006701	0.0001296
2 2	0.0089415	0.0030833	0.0011024	0.0031091	0.0007900	0.0001581
2 3	0.0086039	0.0029517	0.0010510	0.0029744	0.0007496	0.0001479
2 5	0.0078143	0.0026511	0.0009357	0.0026699	0.0006614	0.0001269
3 3	0.0083380	0.0028470	0.0010096	0.0028666	0.0007168	0.0001395
3 5	0.0076757	0.0025941	0.0009124	0.0026099	0.0006421	0.0001215
5 5	0.0072471	0.0024285	0.0008480	0.0024406	0.0005918	0.0001020
0 0	0.0099894	0.0034732	0.0012470	0.0034805	0.0008880	0.0001743
0 2	0.0103545	0.0036197	0.0013055	0.0036314	0.0009349	0.0001865
0 4	0.0103392	0.0036262	0.0013120	0.0036432	0.0009437	0.0001907
2 2	0.0108866	0.0038275	0.0013868	0.0038436	0.0009985	0.0002023
2 4	0.0110105	0.0038844	0.0014118	0.0039056	0.0010208	0.0002093
4 4	0.0112625	0.0039873	0.0014536	0.0040130	0.0010551	0.0002188

$_o = 13.5$

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.0065871	0.0021561	0.0007359	0.0021509	0.0004973	0.0000839
1	2	0.0064783	0.0021145	0.0007199	0.0021090	0.0004851	0.0000810
1	3	0.0063331	0.0020596	0.0006989	0.0020530	0.0004689	0.0000770
1	5	0.0059104	0.0019053	0.0006417	0.0018989	0.0004270	0.0000678
2	2	0.0064118	0.0020884	0.0007096	0.0020823	0.0004771	0.0000789
2	3	0.0063183	0.0020526	0.0006958	0.0020454	0.0004661	0.0000761
2	5	0.0059854	0.0019314	0.0006509	0.0019241	0.0004332	0.0000688
3	3	0.0062915	0.0020418	0.0006914	0.0020333	0.0004622	0.0000748
3	5	0.0060716	0.0019627	0.0006623	0.0019541	0.0004409	0.0000701
5	5	0.0060507	0.0019572	0.0006609	0.0019483	0.0004400	0.0000700
0	0	0.0113719	0.0040166	0.0014590	0.0040242	0.0010492	0.0002171
0	2	0.0114796	0.0040620	0.0014778	0.0040722	0.0010652	0.0002218
0	4	0.0111782	0.0039561	0.0014402	0.0039698	0.0010397	0.0002174
2	2	0.0116848	0.0041414	0.0015088	0.0041535	0.0010894	0.0002280
2	4	0.0114704	0.0040655	0.0014816	0.0040802	0.0010710	0.0002245
4	4	0.0113486	0.0040216	0.0014657	0.0040380	0.0010602	0.0002230

$_o = 14.0$

		0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1	1	0.0063373	0.0020574	0.0006955	0.0020408	0.0004615	0.0000744
1	2	0.0063769	0.0020735	0.0007020	0.0020570	0.0004666	0.0000757
1	3	0.0064445	0.0021014	0.0007132	0.0020848	0.0004752	0.0000778
1	5	0.0063640	0.0020802	0.0007079	0.0020654	0.0004732	0.0000784
2	2	0.0064517	0.0021024	0.0007131	0.0020859	0.0004749	0.0000776
2	3	0.0065597	0.0021450	0.0007298	0.0021282	0.0004874	0.0000806
2	5	0.0065465	0.0021481	0.0007333	0.0021328	0.0004918	0.0000825
3	3	0.0067158	0.0022054	0.0007531	0.0021881	0.0005047	0.0000840
3	5	0.0067800	0.0022368	0.0007671	0.0022207	0.0005166	0.0000882
5	5	0.0069771	0.0023162	0.0007987	0.0023007	0.0005411	0.0000944
0	0	0.0105084	0.0036808	0.0013270	0.0036766	0.0009444	0.0001939
0	2	0.0102695	0.0035913	0.0012935	0.0035886	0.0009201	0.0001887
0	4	0.0096952	0.0033792	0.0012144	0.0033792	0.0008630	0.0001764
2	2	0.0101184	0.0035322	0.0012704	0.0035300	0.0009029	0.0001847
2	4	0.0096367	0.0033521	0.0012028	0.0033518	0.0008535	0.0001737
4	4	0.0092642	0.0032105	0.0011488	0.0032110	0.0008136	0.0001646

$\gamma_0 = 14.5$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.0077739	0.0026095	0.0009065	0.0025837	0.0006161	0.0001115
1 2	0.0078498	0.0026397	0.0009184	0.0026141	0.0006252	0.0001138
1 3	0.0079699	0.0026879	0.0009375	0.0026622	0.0006397	0.0001174
1 5	0.0079220	0.0026793	0.0009370	0.0026558	0.0006416	0.0001191
2 2	0.0079498	0.0026783	0.0009333	0.0026527	0.0006364	0.0001165
2 3	0.0080946	0.0027352	0.0009555	0.0027093	0.0006531	0.0001206
2 5	0.0080885	0.0027411	0.0009602	0.0027171	0.0006586	0.0001225
3 3	0.0082668	0.0028018	0.0009812	0.0027755	0.0006723	0.0001252
3 5	0.0083036	0.0028228	0.0009913	0.0027980	0.0006814	0.0001282
5 5	0.0084184	0.0028706	0.0010107	0.0028466	0.0006968	0.0001325
0 0	0.0076958	0.0026738	0.0009378	0.0026628	0.0006485	0.0001244
0 2	0.0075322	0.0025362	0.0008856	0.0025267	0.0006103	0.0001157
0 4	0.0069545	0.0023226	0.0008060	0.0023160	0.0005529	0.0001030
2 2	0.0073803	0.0024381	0.0008475	0.0024290	0.0005817	0.0001087
2 4	0.0068226	0.0022672	0.0007833	0.0022599	0.0005350	0.0000982
4 4	0.0064993	0.0021445	0.0007366	0.0021380	0.0005004	0.0000901

$\gamma_0 = 15.0$

	0 0	0 1	1 1	0 0	0 1	1 1
1 1	0.0088641	0.0030247	0.0010635	0.0029878	0.0007287	0.0001389
1 2	0.0088546	0.0030223	0.0010630	0.0029860	0.0007357	0.0001391
1 3	0.0088806	0.0030346	0.0010684	0.0029986	0.0007333	0.0001405
1 5	0.0086391	0.0029522	0.0010399	0.0029195	0.0007146	0.0001374
2 2	0.0088620	0.0030256	0.0010644	0.0029896	0.0007301	0.0001396
2 3	0.0089032	0.0030421	0.0010715	0.0030073	0.0007356	0.0001411
2 5	0.0086918	0.0029706	0.0010465	0.0029377	0.0007192	0.0001384
3 3	0.0089592	0.0030654	0.0010804	0.0030297	0.0007425	0.0001429
3 5	0.0087743	0.0030017	0.0010583	0.0029686	0.0007279	0.0001405
5 5	0.0086490	0.0029579	0.0010428	0.0029267	0.0007177	0.0001387
0 0	0.0054780	0.0017502	0.0005839	0.0017411	0.0003846	0.0000627
0 2	0.0052708	0.0016722	0.0005544	0.0016638	0.0003630	0.0000577
0 4	0.0049302	0.0015503	0.0005100	0.0015435	0.0003553	0.0000510
2 2	0.0051908	0.0016396	0.0005413	0.0016220	0.0003515	0.0000549
2 4	0.0049492	0.0015555	0.0005114	0.0015474	0.0003317	0.0000506
4 4	0.0048738	0.0015277	0.0005010	0.0015194	0.0003239	0.0000487