

526 | Oktober 1992

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

In-Haeng Song

Über eine Belüftungstheorie in der Nähe der freien Wasseroberfläche

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Über eine Belüftungstheorie in der Nähe der freien Wasseroberfläche

In-Haeng Song, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1992

ISBN: 3-89220-526-4

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

Über eine Belüftungstheorie
in der Nähe
der freien Wasseroberfläche

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Universität Hamburg

vorgelegt von
M.-Sc. In-Haeng Song
aus Korea

Hamburg

19. August 1992

Tag der Disputation : 30 September 1992

Gutachter : Prof. Dr.-Ing. W.H. Isay
Prof. Dr.-Ing. H. Söding

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung	3
2	Einleitung	4
3	Das durch Einfluß der freien Wasseroberfläche bedingte Potential der Quelle und des Wirbelfadens	5
4	Einfluß der Wasseroberflächenbedingung auf die Druckverteilung am Profil	10
5	Kritische Tauchtiefe des Belüftungsbeginns	13
6	Das Integralgleichungssystem zur Berechnung der Singularitätenbelegungen	18
7	Lösung für das Integralgleichungssystem bei der an der Vorderkante beginnenden Belüftung	21
8	Lösung für das Integralgleichungssystem bei der nicht an der Vorderkante beginnenden Belüftung	30
9	Einfluß der Belüftung auf die Druckverteilung am Profil	39
10	Rechnungen und Diskussion	41
	10.1 Einfluß der Wasseroberflächenbedingung auf die Druckverteilung am Profil	41
	10.2 Rechnung für die an der Vorderkante beginnende Belüftung	43
	10.3 Rechnung für die nicht an der Vorderkante beginnende Belüftung	44
11	Symbolliste	47
12	Dankwort	48
13	Literatur	49
A	Berechnung verschiedener Integrale	51
	A.1 Exakte Berechnung mit Hilfe der Residuenmethode	51
	A.2 Numerische Berechnung der von Schwerkraft abhängigen Anteile	55
B	Berechnung der abgekürzten Terme	57

B.1	$RHS(x), LHS(x)$ bei $C_A = -A$	57
B.1.1	$RHS(x)$ bei $C_A = -A$	57
B.1.2	$LHS(x)$ bei $C_A = -A$	59
B.2	$RHSa(x), LHSa(x)$ bei $C_A > A$	61
B.2.1	$RHSa(x)$ bei $C_A > -A$	62
B.2.2	$LHSa(x)$ bei $C_A > -A$	64

1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit handelt es sich um eine Analyse des Belüftungsverlaufs auf dem Tragflügel, wie z.B. des Belüftungsbeginns und der Belüftungserscheinungen hinsichtlich der Dicke und Länge.

Es ist ein Unterdruckfeld im Spitzenwirbel nötig zur Luftansaugung. In dieser Arbeit wird eine Bedingung für den Belüftungsbeginn unter Berücksichtigung der Wasseroberflächenbedingung eingeführt, dabei wird ein Ansatz des Kernradius des Spitzenwirbels bei turbulenter Strömung angewendet.

Die Belüftungsschicht wird in 2-dimensionaler Betrachtungsweise mit der auf dem Singularitätenverfahren basierenden linearisierten Profiltheorie analysiert unter Berücksichtigung der linearisierten Wasseroberflächenbedingung. Die Singularitäten lassen sich durch Iterationsverfahren bestimmen. Für die Belüftung ist eine offene Modellschicht ohne Zusammenfallstrecke geeignet. Die Dicke der Belüftung unterliegt keiner Schließungsbedingung.

Bei der nicht an der Profilverderrkante beginnenden Belüftung wird eine Lösungsmethode angegeben, bei der die zusätzliche Quellenbelegung in zwei Bereiche aufgeteilt wird und unter Berücksichtigung der gegenseitigen Wechselwirkung die Quellenbelegungen bestimmt werden.

Die Belüftungsausdehnung wird durch die freie Wasseroberfläche trotz hoher Froudezahlen in hohem Maße beeinflusst : Mit abnehmender Tauchtiefe wird die Belüftungsdicke vergrößert und die Belüftungslänge kleiner.

Unter Einfluß der freien Wasseroberfläche verliert die Nishiyama-Bedingung ihre Bedeutung. In dieser Arbeit werden die Resultate für eine nichtlinearisierte Theorie von A.E. Green benutzt. Dabei kommt es zu der größeren Belüftungsdicke als bei der Nishiyama-Bedingung. Diese Tendenz wird auch durch Ergebnisse am Joukowski-Profil gezeigt.

Der Auftrieb in Abhängigkeit von Tauchtiefe bei ebener Platte ergibt gute Übereinstimmung mit der nichtlinearisierten Theorie von A.E. Green.

Aus den Ergebnissen der Bedingung für den Belüftungsbeginn erkennt man, daß die Belüftung bei kleiner Tauchtiefe besteht. Wegen des bei der linearisierten Wellentheorie vorliegenden, zusätzlichen Bedingung, daß die Belüftungsschicht unter der ungestörten Wasseroberfläche liegen bleibt, werden die Rechnungen für die kleinere Tauchtiefe nicht mehr durchgeführt. Um diesen Nachteil zu umgehen, muß man auf eine nichtlinearisierte Wellentheorie hinweisen.

2 Einleitung

Im Bereich des Unterwassertragflügels hat man in den letzten Jahren vielfältige Untersuchungen als räumliches Strömungsproblem oder in 2-dimensionaler Betrachtungsweise durchgeführt. Für die letzteren sind sowohl die Kavitation als auch der Einfluß der freien Wasseroberfläche auf dem Profil [1,2,3] behandelt worden. Wenn sich ein Tragflügel in der Nähe der freien Wasseroberfläche befindet, kommt unter besonderen Bedingungen noch die Luftansaugung dazu. Allerdings sind spezifische Untersuchungen über diese Luftansaugung bzw. die sich somit ausbildende Belüftung auf dem Tragflügel nicht vorhanden, die man mit den Ergebnissen dieser Arbeit vergleichen könnte. Hingegen hat man eine Belüftung auf dem aus der Wasseroberfläche heraustretenden Ruder bzw. auf dem Wasserski eines Wasserflugzeugs weitgehend behandelt [4,5,6].

Die Belüftung führt zur geringeren Geräusentwicklung und zum Ausbleiben von Materialschäden gegenüber Kavitation, da es nicht zum Zusammenbruch der Luftblase kommt. Außerdem kommt es wegen des hohen Luftdrucks gegenüber dem Dampfdruck in der Regel zur langen Superbelüftungsschicht, und man erhält stabile Auftriebskraft auf dem Tragflügel. Aber die Luftansaugung führt zu einer weitgehenden Störung der Strömung am Tragflügel und zu unerwünschten Vibrationen. Dies wirkt negativ auf die Ausnutzung der Belüftung am Tragflügel. Man unterscheidet dabei die durch Unterdruckfelder entstehende Belüftung von der künstlichen Belüftung, die durch hinreichende äußere Luftversorgung erzeugt wird. Die letztere, durch die bei einsetzendem Belüftungsvorgang die obige Störung vermieden wird, führt zu praktischen Konsequenzen (vgl. [7]).

Diese Arbeit behandelt die erstere Form der Belüftung und hat eine Analyse des Belüftungsverlaufs auf dem Tragflügel insbesondere des Belüftungsbeginns und der Belüftungserscheinungen in Abhängigkeit von Tauchtiefe zum Ziel; dabei wird die linearisierte Randbedingung an der Wasseroberfläche berücksichtigt.

Wir haben es also mit zwei voneinander abhängigen Problemen zu tun : Erstens soll auf die Frage nach dem kritischen Punkt der Luftansaugung eingegangen werden, also von welcher Eintauchtiefe Luft eingesaugt wird. Für die Luftansaugung ist diese Bedingung erforderlich, daß der Druckgradient im Spitzenwirbelbereich unter Berücksichtigung des Schwerkraftfelds negativ sein soll. Hierfür reicht das Modell der reibungsfreien Strömung nicht aus, vielmehr muß der Zähigkeitseinfluß berücksichtigt werden.

Zweitens werden die Belüftungserscheinungen untersucht. Die im Spitzenwirbelbereich bestehende Belüftung, die eigentlich zur 3-dimensionalen Strömung gehört, führt durch die Verbindung mit der Wasseroberfläche zu einem komplizierten Problem. Daher haben wir hier vereinfachend ein stationären, 2-dimensionalen Problem zugrunde gelegt.

In dieser Arbeit wird die Belüftungserscheinung unter Verwendung der linearisierten Profiltheorie [8] behandelt, die im Bereich der Kavitation gut entwickelt worden ist. Sie setzt voraus, daß es sich um eine reibungsfreie und inkompressible Strömung handelt. Die Randbedingungen gemäß der linearisierten Profiltheorie führen auf Integralgleichungssystem zur Bestimmung der Singularitätenbelegungen, das sich unter Verwendung einer Variablentransformation sowie der Inversionsformel [9] exakt lösen läßt. Das Lösungsverfahren der Integralgleichung für ein kavitierendes Profil wurde zuerst von Hanaoka [10] angegeben.

In dieser Arbeit behandeln wir die an der Profilverderrkante beginnende Belüftung sowie die nicht an der Verderrkante beginnende Belüftung. Um den Einfluß der freien Wasseroberfläche auf die belüftete Profile zu behandeln, führen wir eine Iterationsmethode ein. Also als $(n + 1)$ -te Näherung sind die von Singularitäten des Flügels induzierten Geschwindigkeiten zu berechnen, indem dort die (n) -te Näherung, d.h. die von seinem Wellensystem induzierten Geschwindigkeiten, eingesetzt wird.

Um die Aussage über Belüftungsausdehnung zu liefern, benötigen wir eine weitere Bedingung. Unter Einfluß der freien Wasseroberfläche verliert die Nishiyama-Bedingung [11] ihre Bedeutung. In dieser Arbeit werden die Resultate für eine nichtlinearisierte Theorie von A.E. Green benutzt. Hierauf wird im Kapitel 10.3 noch eingegangen. Dabei kommt es zu der größeren Belüftungsdicke als bei der Nishiyama-Bedingung. Es scheint folgerichtig, daß diese Bedingung sowie die somit ergebenden Resultate mit Hilfe von experimentellen Ergebnisse ermittelt werden sollen.

3 Das durch Einfluß der freien Wasseroberfläche bedingte Potential der Quelle und des Wirbelfadens

In ebener Strömung betrachten wir ein mäßig dickes und schwach gewölbtes Profil der Länge $2A / \cos \delta_0$ mit kleinem Anstellwinkel δ_0 . Den Mittelpunkt der Profilhöhe wählen wir zum Koordinatenursprung und legen die x -Achse parallel zur Anströmung. Dann wird das Profil auf die x -Achse von $x = -A$ bis $x = A$ projiziert. Bei $y = h$ liege die ungestörte Wasseroberfläche (Abb.1(a)). Auf der Saugseite des Profils habe sich eine Belüftungsschicht auf der ganzen Spannweite ausgebildet, deren Dicke $2\eta(x)$ ist. Das vordere Ende der Belüftungsschicht sei C_A und das hintere Schichtsende C_E .

Wir gehen davon aus, daß das Verhältnis von Belüftungsdicke zu Belüftungslänge klein ist. In diesem Fall kann man die Wirkung des belüfteten Profils im Rahmen der Linearisierung in einen Dickeneinfluß und einen Skelettlinieneinfluß aufspalten. Die Strömung um das belüftete Profil läßt sich daher durch die Singularitätenbelegungen darstellen, wie z.B. eine Wirbelbelegung $\gamma(x)$ für den Druckunterschied zwischen Saug- und Druckseite am Profil, eine Quellensenkenbelegung $q(x)$ für die Verdrängungswirkung der Profildicke und eine zusätzliche Quellenbelegung $q_\eta(x)$ für die Verdrängungswirkung der Belüftungsschicht. Bei dem offenen Modell entfällt die Senkenbelegung für die Belüftungsschicht. Für kleinen Anstellwinkel und klein Verhältnis von Belüftungsdicke zu Belüftungslänge lassen sich die zur Erfüllung der Randbedingungen eingeführten Singularitäten annähernd in der Ebene $y = 0$ anordnen.

In diesem Kapitel behandeln wir das Potential einer Quelle und eines Wirbelfadens unter Einfluß der freien Wasseroberfläche.

Nun bedenken wir die Randbedingungen der freien Wasseroberfläche. An der Grenzfläche im Wasser herrscht praktisch der Atmosphärendruck P_{At} bei Vernachlässigung der Luftdichte und der Oberflächenspannung des Wassers. Die letztere ist für schnelle Unterwassertragflügel von geringer Bedeutung. Unter der Voraussetzung der Linearisierung, daß die durch das Wellensystem der freien Wasseroberfläche sowie durch das belüftete Pro-

fil induzierten Geschwindigkeiten klein sind gegenüber der Anströmgeschwindigkeit U_0 und das Verhältnis von Wellenhöhe zu Wellenlänge klein ist, führt die obige dynamische Bedingung auf folgende Relation :

$$U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g(Y(x) - h) = 0 \quad (y = h) \quad (1)$$

Dabei bedeutet Φ Störgeschwindigkeitspotential und $Y(x)$ Höhe der Wasseroberfläche über dem Profil.

Dazu ist noch eine kinematische Randbedingung nötig, welche besagt, daß die Wasseroberfläche Stromfläche sein soll. Die Kombination dieser Bedingung und der Gleichung (1) gestattet im Rahmen der oben vorausgesetzten Linearisierung :

$$U_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y = h) \quad (2)$$

Zuerst betrachten wir das durch Einfluß der freien Wasseroberfläche bedingte Potential einer Punkt-Quelle.

Im unbegrenzten Medium ist das Potential der Quelle, deren Stärke Q ist, wie folgt :

$$\Phi_Q^{(1)} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

Das obige Potential genügt nicht der Randbedingung (2), sondern muß durch zusätzliche Potentialanteile ergänzt werden. Dazu geht man zweckmäßigerweise zu der Fourierdarstellung über.

$$\Phi_Q^{(1)} = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (y > 0) \quad (4)$$

Durch Differentiation nach x und y läßt sich die Übereinstimmung der beiden Gl. (3) und (4) überzeugen mit den Integralformeln

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \int_0^\infty e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (y > 0) \\ \frac{y}{x^2 + y^2} &= \int_0^\infty e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (y > 0) \end{aligned} \quad (5)$$

Im Fall der Vernachlässigung des Einflusses der Schwerkraft $g = 0$ kann die Randbedingung (2) sofort erfüllt werden, indem zu $\Phi_Q^{(1)}$ das Potential $\Phi_Q^{(2)}$ einer an der ungestörten Wasseroberfläche gespiegelten, gleichen Senke hinzugefügt wird :

$$\Phi_Q^{(2)} = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(2h-y)} \cos(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (y < 2h) \quad (6)$$

Das Potential $\Phi_Q = \Phi_Q^{(1)} + \Phi_Q^{(2)}$ erzeugt kein Wellensystem, sondern führt zum Spiegelungssystem.

Für den von der Schwerkraft abhängigen Anteil $\Phi_Q^{(3)}$ macht man den bereits der Laplace-schen Gleichung genügenden Ansatz:

$$\Phi_Q^{(3)} = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty F(\lambda) e^{-\lambda(2h-y)} \cos(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (y < 2h) \quad (7)$$

Die noch unbekannt Funktion $F(\lambda)$ wird aus Gl.(2) bestimmt.

$$F(\lambda) = \frac{2g}{U_0^2} \frac{1}{\lambda - g/U_0^2} \quad (8)$$

Eine Lösung der Form $\Phi_Q = \Phi_Q^{(1)} + \Phi_Q^{(2)} + \Phi_Q^{(3)}$ würde ein Geschwindigkeitsfeld mit einem Wellensystem sowohl weit vor als auch weit hinter dem Flügel ergeben. Es ist noch ein vierter Potentialanteil notwendig

$$\Phi_Q^{(4)} = -Q \cdot e^{-g/U_0^2(2h-y)} \sin \frac{gx}{U_0^2} \quad (9)$$

zu überlagern, der das von Φ_Q weit vor dem Flügel induzierte Feld auslöscht. Dabei benötigt man die folgenden, durch die asymptotische Entwicklung der Ei -Funktion zu beweisenden Integralformeln (vgl. [15]):

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(h\pm ix)} \frac{d\lambda}{\lambda - g/U_0^2} = -e^{-g/U_0^2(h\pm ix)} \cdot [Ei(g h/U_0^2 \pm i g x/U_0^2) + i\pi] \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda(h\pm ix)} \frac{d\lambda}{\lambda - g/U_0^2} = \mp i \pi e^{-g/U_0^2(h\pm ix)} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda(h\pm ix)} \frac{d\lambda}{\lambda - g/U_0^2} = \pm i \pi e^{-g/U_0^2(h\pm ix)}. \quad (12)$$

Unter Benutzung der asymptotischen Entwicklung der Ei -Funktion gilt die folgende Formel:

$$e^{-z} \cdot Ei(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n n!}{z^n} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \text{arc}(z) < \frac{5\pi}{2} \quad ; \quad z : \text{komplex}\right). \quad (13)$$

Die gesuchte vollständige Lösung ist also

$$\Phi_Q = \Phi_Q^{(1)} + \Phi_Q^{(2)} + \Phi_Q^{(3)} + \Phi_Q^{(4)} \quad (14)$$

mit den einzelnen Potentialanteilen gemäß Formel (4),(6),(7) und (9).

Auf gleiche Weise ist das durch den Einfluß der freien Wasseroberfläche bedingte Potential eines Wirbelfadens mit der Zirkulation Γ zu bestimmen. Für die entsprechende vollständige Lösung wird auf [12] vergewiesen.

$$\Phi_\Gamma = \Phi_\Gamma^{(1)} + \Phi_\Gamma^{(2)} + \Phi_\Gamma^{(3)} + \Phi_\Gamma^{(4)} \quad (15)$$

Dabei gelten folgende Potentialanteile :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Gamma}^{(1)} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (y > 0) \\
\Phi_{\Gamma}^{(2)} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(2h-y)} \sin(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (y < 2h) \\
\Phi_{\Gamma}^{(3)} &= -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{g}{U_0^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(2h-y)} \sin(\lambda x) \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda - g/U_0^2} \quad (y < 2h) \\
\Phi_{\Gamma}^{(4)} &= -\Gamma \cdot e^{-g/U_0^2(2h-y)} \cos \frac{g x}{U_0^2}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Aus dem Potential $\Phi = \Phi_Q + \Phi_{\Gamma}$ ersieht man, daß sowohl Tauchtiefenverhältnis h/A als auch die Froudezahl (Froudesche Tiefenzahl)

$$F_h = \frac{U_0}{\sqrt{gh}} \quad (17)$$

als die die Wasseroberfläche beeinflussenden Parameter von Bedeutung sind.

Wir betrachten einen Grenzfall, $g = 0$ für das Potential Φ_{Γ} . Das Potential $\Phi_{\Gamma}^{(2)}$ läßt sich als $-\Gamma/2\pi \tan^{-1}\{(y-2h)/x\}$ schreiben, das einem an der ungestörten Wasseroberfläche gespiegelten Wirbel einer im Umlaufsinn gleichen Zirkulation entspricht. Wie schon bekannt ist, besteht das Spiegelsystem bei unendlicher Froudezahl aus den gleichen Wirbeln und gleichen Senken statt Quellen.

Wir betrachten noch einen anderen Grenzfall, $g/U_0^2 \rightarrow \infty$. Wenn $g/U_0^2 \rightarrow \infty$ ist, gilt $F(\lambda) = -2$ in Gl.(8), und daher geht das Potential in $\Phi = \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)}$ über. Das entspricht dem Spiegelsystem bei der Froudezahl 0, das im Gegensatz zu $g/U_0^2 \rightarrow 0$ aus den entgegengesetzt gleichen Wirbeln aber gleichen Quellen besteht. Dabei wirkt die Wasseroberfläche wie eine feste Wand.

Aus den bereits entwickelten Geschwindigkeitspotentialen ergeben sich die durch den Einfluß der freien Wasseroberfläche bedingten Geschwindigkeitskomponenten.

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \quad ; \quad v(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \quad (18)$$

Dabei sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ die von der Quelle sowie von der Zirkulation des Flügels und ihres Wellensystems induzierten Geschwindigkeiten.

Durch Einsetzen der Gl.(14) mit Integralformel (10) tritt die von der Quelle induzierte Geschwindigkeit auf

$$u_Q = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (2h-y)^2} - i \frac{\nu_0 Q}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix))\}$$

$$+i\pi\} + i\frac{\nu_0 Q}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y+ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y+ix)) + i\pi\} - \nu_0 Q \cdot e^{-\nu_0(2h-y)} \cos \nu_0 x$$

mit der Wellenzahl

$$\nu_0 = \frac{g}{U_0^2}. \quad (19)$$

Die obigen von Schwerkraft abhängigen Anteile lassen sich jeweils mit der komplexen Schreibung wie folgt darstellen, dabei gibt \Im den Imaginärteil an.

$$\begin{aligned} u_Q &= \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (2h-y)^2} \\ &+ \frac{\nu_0 Q}{\pi} \Im[e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) - i\pi\}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Auf gleiche Weise erhalten wir die anderen Geschwindigkeitskomponenten, dabei gibt \Re den Reellteil an.

$$\begin{aligned} v_Q &= \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{Q}{2\pi} \frac{2h-y}{x^2 + (2h-y)^2} - \frac{\nu_0 Q}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) \\ &+ i\pi\} - \frac{\nu_0 Q}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y+ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y+ix)) + i\pi\} - \nu_0 Q \cdot e^{-\nu_0(2h-y)} \sin \nu_0 x \\ &= \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{Q}{2\pi} \frac{2h-y}{x^2 + (2h-y)^2} \\ &- \frac{\nu_0 Q}{\pi} \Re[e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) - i\pi\}] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u_\Gamma &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2h-y}{x^2 + (2h-y)^2} + \frac{\nu_0 \Gamma}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) \\ &+ i\pi\} + \frac{\nu_0 \Gamma}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y+ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y+ix)) + i\pi\} + \nu_0 \Gamma \cdot e^{-\nu_0(2h-y)} \sin \nu_0 x \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2h-y}{x^2 + (2h-y)^2} \\ &+ \frac{\nu_0 \Gamma}{\pi} \Re[e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) - i\pi\}] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} v_\Gamma &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (2h-y)^2} - i\frac{\nu_0 \Gamma}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) \\ &+ i\pi\} + i\frac{\nu_0 \Gamma}{2\pi} e^{-\nu_0(2h-y+ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y+ix)) + i\pi\} - \nu_0 \Gamma \cdot e^{-\nu_0(2h-y)} \cos \nu_0 x \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (2h-y)^2} \\ &+ \frac{\nu_0 \Gamma}{\pi} \Im[e^{-\nu_0(2h-y-ix)} \{Ei(\nu_0(2h-y-ix)) - i\pi\}] \end{aligned} \quad (23)$$

4 Einfluß der Wasseroberflächenbedingung auf die Druckverteilung am Profil

Bevor die Belüftung behandelt wird, betrachten wir in diesem Kapitel die durch den Einfluß der freien Wasseroberfläche bedingte Abminderung der Zirkulation und Druckverteilung am Profil. Für das Profil in der Nähe der freien Wasseroberfläche wenden wir das in Kapitel 3 berechnete Wellensystem an.

Anstelle der bereits behandelten Punkt-Singularitäten berücksichtigen wir, daß die Wirbeldichte $\gamma(x)$ und Quellensinkenverteilung für die Profildicke $q(x)$ in der Ebene $y = 0$ auf dem projizierten Profilsbereich $(-A \leq x \leq A; y = 0)$ angeordnet werden. Dann erhält man folgende induzierte Geschwindigkeiten:

$$u_q(x, y = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)(x - \xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} + \frac{\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A q(\xi) \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (24)$$

$$v_q(x, y = \pm 0) = \pm \frac{q(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi) 2h d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} - \frac{\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A q(\xi) \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (25)$$

$$u_\gamma(x, y = \pm 0) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi) 2h d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} + \frac{\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \gamma(\xi) \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (26)$$

$$v_\gamma(x, y = 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)(x - \xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} + \frac{\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \gamma(\xi) \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (27)$$

In Gl.(25), (26) bezieht sich das (+)Zeichen auf die Sauseite, das (-)Zeichen auf die Druckseite des Profils. Im Rahmen der Linearisierung kann der Einfluß der freien Wasseroberfläche durch Erfüllung von Randbedingungen in der projizierten Profilssehne $y = 0$ ohne großen Aufwand behandelt werden.

Für den Dickenverdrängungseffekt gilt nach der linearisierten Profiltheorie [12]

$$\begin{aligned} \frac{q(\vartheta)}{2U_0} &= \frac{dy_d}{dx} \\ &= B_0(\cot \vartheta/2 - 2 \sin \vartheta) - B_1(\tan \vartheta/2 - 2 \sin \vartheta) - \sum_{\lambda=2}^{NB} B_\lambda \sin \lambda \vartheta \end{aligned} \quad (28)$$

mit der trigonometrischen Variable

$$x = -A \cos \vartheta \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (29)$$

Dabei bedeutet dy_d/dx die Ableitung der Dickenlinie nach der Sehnenkoordinate x .

In den Geschwindigkeiten (26) und (27) ist die Belegung $\gamma(\xi)$ noch unbekannt. Bei der Berechnung der Umströmung eines belüftungsfreien Profils sind folgende Bedingungen zu berücksichtigen

- i) Eine kinematische Strömungsrandbedingung an der Mittellinie des Profils
- ii) Die Kuttasche Abflußbedingung an der Profilhinterkante.

Die kinematische Randbedingung i) besagt, daß die Mittellinie des Profils Stromlinie sein muß. Dies führt im Rahmen der üblichen linearisierten Profiltheorie auf die Aussage :

$$-\delta_0 + \frac{dy_s}{dx} = \sum \frac{v(x, y=0)}{U_0} \quad (30)$$

In Gl.(30) setzen wir die voll induzierten Geschwindigkeiten (25), (27) ein. Dabei entfällt der von der Profildicke induzierte Anteil ($\pm q/2$) der Geschwindigkeit v_q , da dessen arithmetischer Mittelwert verschwindet. Dann gilt :

$$\begin{aligned} 2\delta_0 - 2\frac{dy_s}{dx} &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\ &+ \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \end{aligned} \quad (31)$$

Die obige Integralgleichung wird wie folgt umgeformt :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} = 2\delta_0 - 2\frac{dy_s}{dx}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (32)
\end{aligned}$$

Die Integralgleichung läßt sich iterativ lösen. Als $(n+1)$ -te Näherung sind die von Singularitäten des Flügels induzierten Geschwindigkeiten zu berechnen, indem dort die (n) -te Näherung, d.h. die von seinem Wellensystem induzierten Geschwindigkeiten, eingesetzt wird.

Unter Verwendung der Inversionsformel [9] mit der Kuttaschen Bedingung $\gamma(A) = 0$ erhält man die folgende, iterativ lösbare Gleichung.

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma^{(n+1)}(x)}{U_0} &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \left[2\delta_0 - 2\frac{dy_s}{dx} \right. \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi-\Xi) d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \right] \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (33)
\end{aligned}$$

Wenn sich der Integrand auf der rechten Seite in Gl.(33) als Fourierreihe darstellen läßt, kommt man mit der trigonometrischen Transformation $\xi = -A \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) auf:

$$g_\gamma(\theta) = \sum_{\mu=0}^N a_\mu^\gamma \cos \mu\theta \quad (34)$$

Die folgende Lösung für $\gamma(\vartheta)$ ergibt damit:

$$\frac{\gamma^{(n+1)}(\vartheta)}{U_0} = a_0^\gamma \cdot \cot \vartheta/2 - \sum_{\mu=1}^N a_\mu^\gamma \sin \mu\vartheta \quad (35)$$

Wenn $\gamma^{(n+1)}$ durch Iteration konvergiert, erhält man den Gesamtauftrieb durch den Kutta-Joukowskischen Ansatz. Der Gesamtauftriebsbeiwert (C_L) ist dargestellt (vgl. [13]) als

$$C_L = \frac{1}{A} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} d\xi \quad (36)$$

Aus Gl.(36) mit gleicher trigonometrischer Transformation folgt

$$\begin{aligned} C_L &= \int_0^\pi (a_0^\gamma \cdot \cot \theta/2 - \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda^\gamma \sin \lambda\theta) \sin \theta d\theta \\ &= \pi (a_0^\gamma - \frac{1}{2}a_1^\gamma) \end{aligned} \quad (37)$$

Im einfachsten Fall des Profils ohne Skelettlinie im unbegrenzten Medium ergibt sich $C_L = 2\pi\delta_0$ mit $a_0^\gamma = 2\delta_0$ und $a_1^\gamma = 0$.

Am Flügel wird der Druckbeiwert vorgegeben als

$$C_p = \frac{P_0 - P(x)}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}, \quad (38)$$

der ohne Kavitation oder ohne Belüftung charakterisiert ist. Wenn die Bernoullische Gleichung in Gl.(38) eingesetzt wird, dann erhalten wir die Druckverteilung am Profil mit Riegelfaktor in folgender Form [12]

$$\begin{aligned} C_p &= \left(\frac{U_T}{U_0}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{(1 + u_q(x, y=0)/U_0 + u_\gamma(x, y=\pm 0)/U_0)^2}{1 + (dy_d/dx)^2} - 1 \end{aligned} \quad (39)$$

Verwendet man $+0$ in (39), so bezeichnet C_p den Druckbeiwert auf der Saugseite; Bei -0 in (39) erhält man den Druckbeiwert auf der Druckseite. Man erhält u_q in Gl.(39) gemäß Gl.(24) mit (29) und u_γ gemäß Gl.(26). Durch deren Einsetzen in (39) ergibt sich C_p unter Einfluß der freien Wasseroberfläche.

Die durch den Profil erzeugte Wellenform ergibt sich aus Gl.(1)

$$\begin{aligned} \frac{Y(x)}{A} &= \frac{h}{A} - \frac{1}{\pi A} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\ &\quad - \frac{1}{\pi A} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \end{aligned} \quad (40)$$

5 Kritische Tauchtiefe des Belüftungsbeginns

Die Luftansaugung kann in folgender Weise verstanden werden [6,14]: Wenn sich ein Tragflügel nahe an der Wasseroberfläche befindet, kann ein Unterdruckgebiet gegenüber dem Atmosphärendruck auf seiner Saugseite bestehen. In einer kleineren, kritischen Tauchtiefe vermag die Wasserdecke zwischen der Wasseroberfläche und dem Flügel den herrschenden Druckgradienten nicht mehr aufzufangen; es bildet sich unter dem Einfluß der Wasseroberfläche eine wirbelförmige Strömung in Richtung auf das Unterdruckgebiet aus, mit der Oberflächenluft in das Unterdruckgebiet im Spitzenwirbelkernbereich eingesaugt wird. Der einsetzende Luftstrom gelangt bis zum vorhandenen Unterdruck- oder

Kavitationsgebiet auf dem Flügel. Durch diesen Vorgang bildet sich die Belüftungsschicht über die ganze Spannweite aus.

Dieser Aufttrittsvorgang der Belüftungsschicht ist abhängig von der vorliegenden Strömung, auf die Faktoren, wie z.B. Anströmgeschwindigkeit, Profilform, Anstellwinkel und Tauchtiefe wirken.

Trotz einer zwischen der ersten Luftansaugung und Belüftung auf der ganzen Spannweite bestehenden Übergangsphase wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, daß nach der Luftansaugung der Flügel bereits belüftet ist.

Für die kritische Tauchtiefe des Belüftungsbeginns ist es notwendig, das Unterdruckfeld im Innenbereich eines Spitzenwirbels genauer zu analysieren. Das Strömungsfeld im Bereich des Spitzenwirbels vom Tragflügel ist voll 3-dimensional und in hohem Maße durch Viskosität beeinflußt.

Bei großem Seitenverhältnis ist es in ausreichender Näherung aber möglich, den Einfluß des gegenüberliegenden freien Wirbels, des gebundenen Tragflügelwirbels und der über der freien Wasseroberfläche liegenden Wirbel zu vernachlässigen. Die dabei zugrunde liegende Vereinfachung ist, daß der komplizierte Aufrollvorgang als vollendet betrachtet wird.

Wir haben es mit einem einzigen Wirbel in Zylinderkoordinaten zu tun. Mit Verwendung dieser Näherung zusätzlich ist die durch die freie Wasseroberfläche bedingte Veränderung der Zirkulation zu berücksichtigen. Die x -Achse des Koordinatensystems falle mit der Wirbelachse zusammen (Abb.1(b)). Die Richtung der r -Achse verläuft vom Wirbelzentrum nach außen.

Unter der Annahme analog zur Grenzschichttheorie, daß die Geschwindigkeitsgradienten in radialer Richtung wesentlich bedeutsamer sind als diejenigen in Axialrichtung, wurde von Newmann, B.L. [15] das laminare Strömungsfeld im Spitzenwirbelbereich behandelt. Die für das Druckfeld wesentliche Umfangsgeschwindigkeit wird wie folgt angegeben bei Vernachlässigung des Schwerkraftfelds (vgl. [13])

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/r_k^2}\right) \quad (41)$$

Dabei gibt r_k den stark durch Viskosität beeinflussten Innenbereich an. Die radiale Impulsgleichung gilt für das Strömungsfeld des Spitzenwirbels :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r} = \frac{\rho}{r} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r}\right)^2 \left(1 - e^{-r^2/r_k^2}\right)^2 \quad (42)$$

Durch Integration der Gl.(42) ergibt sich näherungsweise das Druckfeld :

$$\frac{P_0 - P(x, r)}{\rho/2 U_0^2} = 2 \ln 2 \cdot \left(\frac{\Gamma}{2\pi U_0 A}\right)^2 \left(\frac{A}{r_k(x)}\right)^2 e^{-0,6(r/r_k(x))^{3/2}} \quad (43)$$

Dabei bedeutet Γ den Maximalwert in der Flügelzirkulation über die Spannweite. Gl.(42) und (43) zeigen den Druckgradienten bzw. das Druckfeld am beliebigen Radius im Wirbelbereich, der sich auf den Kernradius r_k bezieht. Der Innenbereich des Spitzenwirbels ($r < r_k$) wird überwiegend von Zähigkeit beeinflusst. Diese Beeinflussung ist

noch wirksam im Bereich ($r < 2 \cdot r_k$) und außerhalb dieses Wertes verschwindet sie fast völlig.

Für Kernradius in turbulenter Strömung r_k ist der Ansatz anzunehmen [16].

$$\frac{r_k(x)}{x} = \frac{C}{(U_0 x / \nu)^n} \quad (44)$$

Dabei ist ν die kinematische Zähigkeit.

C ist eine Konstante in turbulenter Strömung. Es kann aber mit experimentellen Resultaten ermittelt werden. Mc Cormick [17] hat für einen Reynoldszahlbereich unterhalb von etwa 10^6 eine empirische Formel für r_k angegeben, nämlich

$$r_k = 2A(0,024 + 0,042C_L) \quad (45)$$

Da Untersuchungen zeigen, daß die r_k -Werte etwas unter den Formel (45) liegen, wurde die Mc Cormick-Formel unter Berücksichtigung des Einflusses der Reynoldszahl R_n modifiziert [16].

$$\frac{r_k}{2A} = (0,024 + 0,042C_L) \left(\frac{8 \cdot 10^5}{R_n} \right)^n \quad (46)$$

Dabei bezieht sich r_k nun auf die Stelle $x = x_1$, wo der Aufrollvorgang des Spitzenwirbels vollendet ist und der Spitzenwirbel seine volle Form erreicht hat. Diese Stelle soll als maßgebend für den Minimaldruck angesehen werden. Mit Gl.(44) und (46) erhalten wir

$$\frac{r_k(x)}{A} = \left(\frac{x}{x_1} \right)^{1-n} (0,048 + 0,084C_L) \left(\frac{8 \cdot 10^5}{R_n} \right)^n \quad (47)$$

Dabei wird $R_n = 2AU_0/\nu$ genommen, n ist bei turbulenter Strömung aus dem Wertebereich $0,18 \leq n \leq 0,20$ zu nehmen.

Für die Luftansaugung führen wir die Bedingung ein, daß der Druckgradient im Spitzenwirbelbereich in Gl.(42) unter Berücksichtigung des Schwerkraftfelds an der freien Wasseroberfläche positiv sein soll, da der Druckgradient im Spitzenwirbelbereich von der Wasseroberfläche nach unten größer wird. Also

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r} - \rho g \right)_{r=Y(x)} > 0 \quad (48)$$

Siehe hierzu Abb.1(b). Für die Bestimmung der kritischen Tauchtiefe H nehmen wir die Bedingung an :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r} - \rho g \right)_{r=Y(x)} = 0 \quad (49)$$

Also, die radiale Druckabnahme im Wirbelbereich an der freien Wasseroberfläche werde durch den hydrostatischen Druckanstieg nach unten gerade kompensiert.

Die Bedingungsgleichung in Gl.(49) wird mit Gl.(42) und dem Ansatz für den Kernradius (47) umgeformt.

$$\left(\frac{\Gamma}{2\pi U_0 A}\right)^2 \left(1 - e^{-Y(x)^2/A^2 \cdot (x/x_1)^{2n-2} (R_n/8 \cdot 10^5)^{2n} (0,048+0,084C_L)^{-2}}\right)^2 \cdot \frac{U_0^2}{A} \left(\frac{A}{Y(x)}\right)^{3-g} = 0 \quad (50)$$

Aus Gl.(50) und Gl.(40) wird der Wert von H/A für den Beginn der Belüftung bestimmt. Alle übrigen Größen in diesen Gleichungen sind bekannt.

Es hier sei vermerkt, daß an der der Gl.(50) genügenden Stelle von x der Druck im Wirbelkern niedriger als der Atmosphärendruck sein soll : In Gl.(43) setzen wir Gl.(47) ein und bedenken, daß in der Zuströmung zum Profil auf der y -Achse der Druck P_0

$$P_0 = P_{At} + \rho gh \quad (51)$$

herrscht. Dann folgt

$$\begin{aligned} (C_P)_{r=y=0} &= \frac{P_0 - P(x, r = y = 0)}{\rho/2U_0^2} > \frac{2gh}{U_0^2} \\ &= \left(\frac{\Gamma}{2\pi U_0 A}\right)^2 \left(\frac{x}{x_1}\right)^{-1,6} \left(\frac{R_n}{8 \cdot 10^5}\right)^{0,4} \frac{2 \ln 2}{(0,048 + 0,084C_L)^2} \end{aligned} \quad (52)$$

Die Gleichungen werden nachgerechnet für eine ebene Platte mit einem elliptischen Grundriß : Sein Seitenverhältnis $\Lambda = 10$; $\delta_0 = 0,1047$; $2A = 0,4 m$ und $U_0 = 12,86 m/s$. Dabei gilt $R_n = 4,51 \cdot 10^6$, und wir nehmen hier 0,2 als n . Dann ist

$$\left(\frac{R_n}{8 \cdot 10^5}\right)^{0,4} = 2,00$$

Nach einer erweiterten Traglinientheorie [18] gilt für einen Flügel mit dem elliptischen Grundriß unter Berücksichtigung der durch die Wasseroberfläche bedingten Veränderung der Zirkulation :

$$\frac{\Gamma}{2\pi U_0 A} = \frac{4\delta_0}{\pi} \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4} + 2} \cdot \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right) \quad ; \quad C_L = \frac{2\pi\Lambda\delta_0}{\sqrt{\Lambda^2 + 4} + 2} \cdot \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right) \quad (53)$$

Dabei bedeutet (Γ/Γ_0) die Abminderung der Zirkulation gegenüber derjenige im unbegrenzten Medium (in 2-dimensionaler Betrachtungsweise). Gl.(53) liefert gute Übereinstimmung mit der Resultaten der Tragflächentheorie, auch wenn Seitenverhältnisse klein sind (vgl. [8]); dabei wird die Zirkulationsverteilung längs der Spannweite als elliptisch angenommen.

Wir rechnen zuerst die Abminderung der Zirkulation mit Gl.(37) für verschiedene Tauchtiefen bei obigem Fall entsprechender Froude-Zahl :

h/A	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8
F_h	8,4	8,8	9,2	9,7	10,3
Γ/Γ_0	0,825	0,812	0,798	0,781	0,761

Mit diesen Ergebnissen führen wir Rechnungen der Druckstelle im Wirbelkern x_2 , wo der Druck P_{At} erreicht, in Gl.(52) durch. Die Ergebnisse der Auswertung zeigen sich in der folgenden Tabelle.

h/A	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8
$\Gamma/(2\pi U_0 A)$,0902	,0888	,0872	,0854	,0832
C_L	,445	,438	,430	,421	,410
,048+, 084 C_L	,0854	,0848	,0841	,0834	,0824
x_2/x_1	18,7	19,6	20,5	21,6	22,8

Mit diesen Ergebnissen führen wir Rechnungen der Wellenhöhe und des dortigen Druckgradienten durch. Die Ergebnisse der Auswertung zeigen sich in der folgenden Tabelle. Dabei wird der Aufrollanfangspunkt im Spitzenwirbel $x_1/A = 1,6$ ($x_1/A > 1,5$) angenommen.

h/A	x/x_1	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0	19,0
$= 1,2$	Y/A	1,41	1,32	1,25	1,18	1,12	1,07	1,03	—
	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g$	-7,39	-6,89	-6,34	-5,75	-5,09	-4,45	-3,97	—
h/A	x/x_1	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0	19,0
$= 1,1$	Y/A	1,30	1,22	1,15	1,08	1,02	0,97	0,92	0,87
	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g$	-6,87	-6,21	-5,45	-4,49	-3,83	-3,09	-2,66	-2,62
h/A	x/x_1	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0	19,0
$= 1,0$	Y/A	1,20	1,12	1,05	0,98	0,92	0,87	0,82	0,77
	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g$	-6,18	-5,31	-4,33	-3,23	-2,14	-1,40	-1,17	-1,47
h/A	x/x_1	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0	19,0
$= 0,9$	Y/A	1,10	1,01	0,95	0,88	0,83	0,77	0,72	0,67
	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g$	-5,25	-4,05	-2,70	-1,22	0,04	0,63	0,42	-0,42

Aus der obigen Tabelle ersieht man, daß der Druckgradient an der freien Wasseroberfläche mit zunehmendem Abstand vom Profil in der Regel größer wird, da mit zunehmendem Abstand vom Profil die Höhe des Wasserspiegels kleiner wird. Aber bei kleiner Tauchtiefe, z.B. bei $h/A=1,0$ und $0,9$ wird der Druckgradient in der Nähe von $x/x_1=19,0$ wieder kleiner. Dies ist verständlich, weil dort der Wirbel durch den Zähigkeitseinfluß schwächer wird.

Für ein größeres Tauchtiefenverhältnis als $1,0$ tritt die Luftansaugung noch nicht auf. Durch eine Interpolation erhält man $H/A = 0,93$ als kritisches Tauchtiefenverhältnis.

h/A	x/x_1	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0
$= 0,93$	Y/A	0,88	0,86	0,83	0,80	0,78	0,75	0,73	0,70
	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g$	-1,24	-0,68	-0,26	-0,01	0,06	-0,06	-0,33	-0,72

Daraus kann man ersehen, daß eine Stelle in der Nähe von $x/x_1 = 16,0$ für die Luftansaugung zur Belüftung besonders gefährdet ist. Es erscheint logisch, davon auszugehen, daß bei $H/A \approx 0,93$ bei $x = 25,6A$ die Belüftung erfolgt.

In der Regel, besonders bei höheren Froudezahlen, die von praktischer Bedeutung für den Unterwassertragflügel sind, ist die kritische Tauchtiefenverhältnis H/A so klein, daß sich die Belüftungsschicht über das Profil hinaus erstreckt. Daher gehen wir im folgenden von Super-Belüftung aus.

6 Das Integralgleichungssystem zur Berechnung der Singularitätenbelegungen

Wir führen auf das Koordinatensystem in Abb.1(a) zurück. Nun betrachten wir ein belüftetes Profil. Bei der linearisierten Profiltheorie läßt sich die Belüftungsschicht als zusätzlicher, in ihrem Innern durch homogenen Atmosphärendruck beherrschter Strömungskörper erfassen. Diese Verdrängungswirkung der Belüftungsschicht kann man mathematisch durch eine zusätzliche Quellenbelegung $q_\eta(x)$ beschreiben ; dabei gilt für die Belüftungsschicht

$$q_\eta(x) = 2U_0 \cdot \frac{d\eta}{dx} \quad (54)$$

Außerdem ist der Effekt der durch die Belüftungsschicht veränderten Druckverteilung durch eine Modifikation der Wirbeldichte $\gamma(x)$ darzustellen. Es sei hier bemerkt, daß eine Aufspaltung von $\gamma(x)$ Term wegen des Auftretens der Wasseroberflächenbedingung hier keine Vorteile bringen würde.

Außer den von γ und q induzierten Geschwindigkeiten (vgl. Gl.(24) bis (27)) tritt die von q_η induzierten Geschwindigkeit auf. Die zusätzliche Quellenbelegung q_η , ist im Belüftungsgebiet ($C_A \leq x \leq C_E$; $y = 0$) als von Null verschieden anzusetzen. C_A braucht nicht mit der Profilverkante zusammenzufallen.

$$\begin{aligned} u_{q_\eta}(x, y = 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_A}^{C_E} q_\eta(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} - \frac{1}{2\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi) (x - \xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \\ &+ \frac{\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} q_\eta(\xi) \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} v_{q_\eta}(x, y = \pm 0) &= \frac{q_\eta(x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi) 2h d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} q_\eta(\xi) \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \end{aligned} \quad (56)$$

In den Geschwindigkeiten (26), (27) und (55),(56) sind die Belegungen $\gamma(\xi)$ und $q_\eta(\xi)$ noch unbekannt. Zu ihrer Bestimmung dienen zwei Randbedingungen : die eine ist kinematisch und die andere dynamisch.

Zunächst muß die um die Belüftungszone erweiterte Mittellinie des Profils Stromlinie sein. Dies führt im Rahmen der üblichen linearisierten Profiltheorie auf die Aussage :

$$-\delta_0 + \frac{dy_s}{dx} + \frac{d\eta}{dx} = \sum \frac{v(x, y = 0)}{U_0} \quad (57)$$

Im obigen Term $v(x, y = 0)$ setzen wir die Geschwindigkeit v gemäß Gl.(25), (27), (56) und Gl.(54) ein, dann:

$$\begin{aligned}
2\delta_0 - 2\frac{dy_s}{dx} - \frac{q_n(x)}{U_0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
&- \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
&- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
&+ \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
&+ \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (58)
\end{aligned}$$

Um die Belüftungsform zu beschreiben, müssen wir eine theoretische Modellschicht verwenden. Für diese Belüftungsschicht ist das lineare offene Modell [19] ohne Zusammenfallstrecke geeignet. Die Dicke der Belüftung unterliegt keiner Schließungsbedingung. Nach diesem Modell besteht am Profil eine nahe Belüftungsschicht, in der konstanter Druck herrscht, und dann eine andere entfernte wie ein offener Körper wirkende Belüftungsschicht, längs der sich der Druck bis zum Zuströmdruck weit hinter dem Profil erhöht. Das offene Modell führt im Rahmen der Linearisierung auf die Aussage:

$$q_n(C_E) = 0 \quad (59)$$

Die dynamische Bedingung lautet, daß der Druck im Bereich der Belüftungszone $P = P_{At}$ sein muß. Wir verwenden die voll linearisierte Bernoulli-Gleichung mit dem Zuströmdruck. Dann folgt

$$\sigma_{At} \left(= \frac{2gh}{U_0^2} \right) = \sum 2 \frac{u(x, +0)}{U_0} \quad (60)$$

In Gl.(60) setzen wir die Geschwindigkeit $u(x, +0)$ gemäß Gl.(24),(26) und (55) ein, dann:

$$\begin{aligned}
\sigma_{At} &= \frac{\gamma(x)}{U_0} - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{61}
\end{aligned}$$

Für die bekannten Ausdrücke werden folgende Abkürzungen eingeführt ;

$$\begin{aligned}
f_s(x) & \equiv 2\delta_0 - 2 \frac{dy_s}{dx} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi ; \tag{62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_p(x) & \equiv \sigma_{At} - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \left(1 - \frac{(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + 4h^2}\right) \frac{d\xi}{x-\xi} \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{63}
\end{aligned}$$

Dann nehmen Integralgleichungen (58) und (61) die folgende Form an ;

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} & = \frac{q_\eta(x)}{U_0} - f_s(x) \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} ; \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{64}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{\gamma(x)}{U_0} - f_p(x)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (65)
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (64) und (65) stellen ein gekoppeltes Integralgleichungssystem zur Bestimmung der beiden Profilbelegungen $\gamma(\xi)$ und $q_\eta(\xi)$ dar.

Die durch ein belüftetes Profil erzeugte Wellenform ergibt sich aus Gl.(1) :

$$\begin{aligned}
\frac{Y(x)}{A} &= \frac{h}{A} - \frac{1}{\pi A} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& - \frac{1}{\pi A} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& - \frac{1}{\pi A} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (66)
\end{aligned}$$

7 Lösung für das Integralgleichungssystem bei der an der Vorderkante beginnenden Belüftung

In diesem Kapitel wird die Super-Belüftung behandelt, deren Schicht bereits an der Vorderkante des Tragflügels beginnt, also $C_A = -A$ ist. Wenn die Schicht an der scharfen Vorderkante beginnt und sich über die ganze Saugseite des Profils erstreckt, kann man ein Verdrängungseffekt der Profildicke in denen für Belüftungsschicht einbeziehen. Also geht $q(\xi)$ in $q_\eta(\xi)$ auf, indem man y_s in der Abkürzung f_δ für eine Profillinie der Druckseite $y_{\delta s}$ hält. Dann entfällt der Dickeverdrängungseffekt des Flügels und $f_{\delta s}$ definiert anstelle von f_δ :

$$f_{\delta s} = 2\delta_0 - 2 \frac{dy_{\delta s}}{dx} \quad (67)$$

und f_p in (63) geht entsprechend über in ;

$$f_p = \sigma_{At} \quad (68)$$

Um die Integralgleichungen (64) und (65) zu lösen, verwenden wir aus Literatur [9] die Inversionsformel. Wenn wir den Term in rechter Seite in Gl.(65) gleich $g(x)$ setzen, dann gilt die Inversionsformel wie folgt

$$\frac{q_\eta(x)}{U_0} = \frac{1}{\pi \sqrt{C_E - x} \sqrt{A + x}} \left[C + \int_{-A}^{C_E} g(\xi) \sqrt{C_E - \xi} \sqrt{A + \xi} \frac{d\xi}{x - \xi} \right]$$

$$\text{mit } C = \int_{-A}^{C_E} q_\eta(\xi) d\xi \quad (69)$$

Die Konstante C , die nach [9] beliebig vorgegeben werden darf, legen wir durch die Bedingung für das offene Modell $q_\eta(C_E) = 0$ fest. Wir erhalten

$$\frac{q_\eta(x)}{U_0} = \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^{C_E} \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} g(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (70)$$

Die Inversionsformel (70) ist gültig für Integralgleichungen der Art Gl.(65).

$$\begin{aligned} \frac{q_\eta(x)}{U_0} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \frac{\gamma(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x - \xi} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^{C_E} \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \left[\sigma_{At} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \right. \\ &\quad - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ &\quad - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi - \Xi) d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \right] \frac{d\xi}{x - \xi} \end{aligned} \quad (71)$$

Die Integralgleichung (71) wird iterativ gelöst. Als $(n + 1)$ -te Näherung und als (n) -te Näherung sind die vom Singularitätensystem des Flügels bzw. seines Wellensystems induzierten Geschwindigkeiten wie folgt zu berechnen

$$\begin{aligned} \frac{q_\eta^{(n+1)}(x)}{U_0} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \frac{\gamma^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x - \xi} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^{C_E} \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \right. \\ &\quad - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ &\quad \left. - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi - \Xi) d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \Bigg] \frac{d\xi}{x - \xi} + \sigma_{At} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \quad (72)$$

Diese Gl. (72) wird in die Integralgleichung (64) eingesetzt. Ist die Näherung $q_\eta^{(n+1)}(\xi)$ bestimmt, folgt entsprechend das zugehörige $\gamma^{(n+1)}(\xi)$ der gleichen Näherung aus der folgenden, iterativ zu interpretierenden Gleichung.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \left[1 + \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x} \frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \right] \frac{d\xi}{x - \xi} \\ & = -f_{\delta_s}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x - \xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \\ & - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \\ & + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \\ & - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^{C_E} \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \left[f_p(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \right. \\ & - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ & - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi - \Xi) d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \right] \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (73) \end{aligned}$$

In jeder Näherung besteht für $\gamma^{(n+1)}(\xi)$ exakt die aus der Kavitationsprofiltheorie [20,21] bekannte und geschlossen lösbare Integralgleichung; dabei werden die Terme mit $\gamma^{(n)}(\xi)$ und $q_\eta^{(n)}(\xi)$ als zusätzliche Inhomogenitäten aufgefaßt und in diese die Ergebnisse der früheren Näherung für γ und q_η nämlich $\gamma^{(n)}$ und $q_\eta^{(n)}$ eingesetzt. In erster Näherung für γ ist hier mit der Lösung bei fehlender Belüftung und fehlender Wasseroberfläche zu beginnen.

Zunächst ist Gl.(73) zu lösen, um γ zu bestimmen. q_η ergibt sich dann aus Formel (72). Die in (n)-ter Näherung auftretenden Terme in Gl.(72) und Gl.(73) bezeichnen wir abgekürzt als $RHS(x)$ und $LHS(x)$ wie folgt

$$RHS(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^{C_E} \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& -\frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi - \Xi) d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \Bigg] \frac{d\xi}{x - \xi} \tag{74}
\end{aligned}$$

$$LHS(x) = RHS(x)$$

$$\begin{aligned}
& -f_{\delta s}(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x - \xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \\
& -\frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{75}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gl.(76) in Gl.(74) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{q_\eta^{(n+1)}(x)}{U_0} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \frac{\gamma^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x - \xi} \\
&+ RHS(x) + \sigma_{At} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}}, \tag{76}
\end{aligned}$$

und Gl.(73) erhält die Form mit Gl.(75)

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \left[1 + \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x} \frac{A + \xi}{C_E - \xi}} \right] \frac{d\xi}{x - \xi} = LHS(x) + \sigma_{At} \sqrt{\frac{C_E - x}{A + x}} \tag{77}$$

Der Term $LHS(x)$ kommt aus der kinematischen Bedingung, deren Bereich sich auf den Profildbereich beschränkt. Dagegen erstreckt sich die Variable ξ im Integranden von $RHS(x)$ in der ganzen die dynamische Bedingung erfüllenden Belüftungszone.

Nun besteht darin die erste Aufgabe, diese Glieder für den (n) -ten Iterationsschritt zu lösen. Die gesuchte Singularitätenverteilungen $\gamma(\xi)$ und $q_\eta(\xi)$ sind als Sinusreihe und

Cotangens-Term darzustellen. Dabei lehnen wir uns an ähnliche Formeln der Superkavitationstheorie [21] an.

$$\frac{\gamma(\theta)}{U_0} = C_{-1}^\gamma \sqrt{\cot \theta/2}^3 + C_0^\gamma \sqrt{\cot \theta/2} + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \theta \quad (78)$$

$$\frac{q_\eta(\theta; \theta')}{U_0} = C_{-1}^{q_\eta} \sqrt{\cot \theta/2}^3 + C_0^{q_\eta} \sqrt{\cot \theta/2} + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_\eta} \sin \lambda \theta' \quad (79)$$

Dabei sind die trigonometrischen Variablen und ihre Bereiche:

$$\xi (-A \leq \xi \leq A) = -A \cos \theta \quad \text{mit} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (80)$$

$$\xi (-A \leq \xi \leq C_E) = \frac{-A + C_E}{2} - \frac{A + C_E}{2} \cos \theta' \quad \text{mit} \quad 0 \leq \theta' \leq \pi \quad (81)$$

Dazu ist hinzuzufügen, daß das Marken (') die Transformation im Belüftungsbereich bedeutet. Hier ist es anschaulich, sich das Singularitätenverhalten auf den Profilibereich zu beschränken.

In (n)-ter Näherung muß man die folgenden Integrale berechnen:

$$\begin{aligned} J_\lambda(\vartheta) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \theta \, d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \\ J_{ct1}(\vartheta) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \\ J_{ct2}(\vartheta) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta \cos \theta \, d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \\ J_{ct3}(\vartheta) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta \, d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \\ J_{ct4}(\vartheta) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta \cos \theta \, d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2}, \end{aligned} \quad (82)$$

die in Anhang A.1 mit der Residuenmethode exakt ausgewertet worden sind.

Für den von Schwerkraft abhängigen Anteil sind die folgenden Integrale zu berechnen, die numerisch ausgewertet werden können (in Anhang A.2):

$$\begin{aligned} K_\lambda^R &\equiv \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda \theta \Re[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))}] \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\} d\theta \\ K_\lambda^I &\equiv \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda \theta \Im[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))}] \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\} d\theta \end{aligned} \quad (83)$$

Die Terme, $RHS(x)$ und $LHS(x)$ können mit den trigonometrischen Variablen (80), (81) und Integralformen (82), (83) auf der ursprünglichen Koordinate (x, ξ) genau ausgewertet werden. Die ausführlichen Berechnungen werden in Anhang B.1 zusammengestellt.

Ist die (n) -te Näherung bereits ausgewertet worden, behandeln wir als die $(n+1)$ -te Näherung die Lösung der Integralgleichungen (77) und (76).

Das Lösungsverfahren für eine Integralgleichung der Form (77) wurde von Hanaoka [10] angegeben und später von Alwardt und Isay [20] bei Teilkavitation und weiterhin von Gasau [22] bei der an der Profilverderrkante beginnenden Superkavitation aufgebaut.

Wir führen die Variablentransformation ein, bei der es auf die Stelle des Belüftungsansatzes ankommt. Durch die Transformation wird der physikalische Bereich auf einen eine Inversionsformel verwendenden Bereich abgebildet.

$$\sqrt{\frac{A+x}{C_E-x}} = b(z+1) \quad \text{mit} \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2A}{C_E-A}} \quad (84)$$

Dadurch wird der Profilbereich auf $-1 \leq z \leq 1$ abgebildet. Dem Intervall $A \leq x \leq C_E$ entspricht $1 \leq z < \infty$.

Dann zeigen einige elementare Rechnungen mit Hilfe der Residuenmethode, daß die Integralgleichung (77) in die folgende Form übergeht

$$-\frac{1}{2} \frac{b(z+1)}{1+b^2(z+1)^2} \left[LHS(z) + \frac{\sigma_{At}}{b(z+1)} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(z')}{U_0} \frac{b(z'+1)}{1+b^2(z'+1)^2} \frac{dz'}{z-z'} \quad (85)$$

Die der Kuttaschen Bedingung $\gamma = 0$ für $z = 1$ genügende Lösung lautet bekanntlich wie (70):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z)}{U_0} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \left[\frac{\sigma_{At}}{b(z+1)} + LHS(z') \frac{z'+1}{z+1} \right] \\ &\cdot \frac{1+b^2(z+1)^2}{1+b^2(z'+1)^2} \frac{dz'}{z-z'} \end{aligned} \quad (86)$$

Mit den trigonometrischen Variablen $z = -\cos \omega$, $z' = -\cos \tau$ geht (86) in die numerisch besser auswertbare Form über

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{(n+1)}(\omega)}{U_0} &= \frac{\cot \omega/2}{\pi} \frac{1+4b^2 \sin^4 \omega/2}{2 \sin^2 \omega/2} \int_0^\pi \frac{2 \sin^2 \tau/2}{1+4b^2 \sin^4 \tau/2} \\ &\cdot \left[\frac{\sigma_{At}}{2b} + LHS(\tau) \cdot \sin^2 \tau/2 \right] \frac{d\tau}{\cos \tau - \cos \omega} \end{aligned} \quad (87)$$

Für die weitere Auswertung setzen wir den Anteil im Integranden zur Fourieranalyse.

$$\frac{1}{1+4b^2 \sin^4 \tau/2} \left[\frac{\sigma_{At}}{2b} + LHS(\tau) \cdot \sin^2 \tau/2 \right] = \sum_{\mu=0}^N A_\mu \cos \mu\tau \quad (88)$$

Durch den Grenzwert $\tau \rightarrow 0$ in Gl.(88) erhält man die Beziehung:

$$\sum_{\mu=0}^N A_{\mu} = \frac{\sigma_{At} + C_0^{RHS}}{2b} \quad (89)$$

Dabei bedeutet C_0^{RHS} den Durchschnittswert des Integranden im Glied *RHS* (in Anhang B.1).

Damit ergibt sich aus (87) die gesuchte Gesamtwirbelbelegung $\gamma(\omega)$ in ihrer endgültigen Gestalt

$$\frac{\gamma(\omega)}{U_0} = \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \omega/2}{2 \sin^2 \omega/2} \left(\sum_{\mu=1}^N A_{\mu} \sin \mu\omega - A_0 \cot \omega/2 \right) \quad (90)$$

Für die Bestimmung von $q_{\eta}(\omega)$ verwenden wir Gl.(77). Setzen wir dort γ gemäß Gl.(90) ein, erhalten wir nach einiger Zwischenrechnung:

i) auf dem Profilbereich

$$\begin{aligned} \frac{q_{\eta}(\omega)}{U_0} &= \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \omega/2}{2 \sin^2 \omega/2} \left(\sum_{\mu=1}^N A_{\mu} (-e^{-\mu\Theta} - \cos \mu\omega) + A_0 \frac{\cos \omega - e^{-\Theta}}{2 \sin^2 \omega/2} \right) \\ &+ \frac{\sigma_{At}}{2b \sin^2 \omega/2} + RHS(\omega) \\ \text{mit } z &= -\cos \omega, \quad 2 - \cos \omega = \cosh \Theta \end{aligned} \quad (91)$$

ii) hinter dem Profilbereich

$$\begin{aligned} \frac{q_{\eta}(\Phi)}{U_0} &= \frac{1 + 4b^2 \cosh^4 \Phi/2}{2 \cosh^2 \Phi/2} \left(\sum_{\mu=1}^N A_{\mu} (-e^{-\mu\Omega} - (-1)^{\mu} e^{-\mu\Phi}) + A_0 \frac{-e^{-\Omega} - e^{-\Phi}}{2 \cosh^2 \Phi/2} \right) \\ &+ \frac{\sigma_{At}}{2b \cosh^2 \Phi/2} + RHS(\Phi) \\ \text{mit } z &= \cosh \Phi, \quad 2 + \cosh \Phi = \cosh \Omega \end{aligned} \quad (92)$$

Zur Ausführung von $\gamma(\omega)$, $q_{\eta}(\omega)$ benötigt man die folgenden, nach der Residuenmethode zu beweisenden Integralformeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \mu\tau \, d\tau}{\cos \tau - \cos \omega} &= \frac{\sin \mu\omega}{\sin \omega} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \mu\tau \, d\tau}{\cos \tau - \cosh \Theta} &= -\frac{e^{-\mu\Theta}}{\sinh \Theta} \end{aligned} \quad (93)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \mu \tau d\tau}{\cos \tau + \cosh \Omega} = (-1)^\mu \frac{e^{-\mu \Omega}}{\sinh \Omega}$$

Um die Koeffizienten gemäß (78),(79) zu erhalten, verwenden wir einen Grenzwert für $\omega \rightarrow 0$, $z \rightarrow -1$ in (90). Durch den Grenzwert in der Transformation (84)

$$\frac{4}{\omega^2} (1 + \frac{\omega^2}{12} + 0(\omega^4)) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \sqrt{\frac{C_E + A}{C_E - A}}$$

ergeben sich unmittelbar :

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \sqrt{\frac{C_E + A}{C_E - A}} \quad (94)$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{A-x}{A+x}} \sqrt[4]{\frac{C_E + A}{C_E - A}}, \quad (95)$$

während die in der obigen Gl. auftretende Singularität sich mit $\cot \theta/2$ darstellen läßt (s. Gl.(80) für θ). Bei Berücksichtigung der höheren Ordnung von ω erhält man

$$\frac{1}{\omega^3} = \frac{1}{8} \sqrt[4]{\left(\frac{A-x}{A+x}\right)^3} \sqrt[4]{\left(\frac{C_E + A}{C_E - A}\right)^3} - \frac{1}{16} \sqrt[4]{\frac{A-x}{A+x}} \sqrt[4]{\frac{C_E + A}{C_E - A}}. \quad (96)$$

Wird Gl.(96) in den zweiten Anteil von $\gamma(\omega)/U_0$ gemäß (90) eingesetzt, dann erhält man den Koeffizienten von $(x+A)^{-3/4}$

$$C_{-1}^\gamma = -\sqrt[4]{\left(\frac{C_E + A}{C_E - A}\right)^3} \frac{A_0}{2} \quad (97)$$

sowie den Koeffizienten von $(x+A)^{-1/4}$. Damit ergibt sich aus dem ersten Anteil von Gl.(90) :

$$C_0^\gamma = \sqrt[4]{\frac{C_E + A}{C_E - A}} \left\{ \frac{A_0}{4} + \sum_{\mu=1}^N \mu \cdot A_\mu \right\} \quad (98)$$

Etwas anders gestaltet sich die Belegung $q_\eta(\omega)$. Für den Grenzwert $\omega \rightarrow 0$ in der Beziehung $2 - \cos \omega = \cosh \Theta$ verwenden wir die Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen :

$$\Theta = \omega - \frac{\omega^3}{12} + 0(\omega^4) \quad (99)$$

Wird Gl.(99) in den zweiten Anteil von $q_\eta(\omega)/U_0$ gemäß (91) eingesetzt, dann erhält man

$$\frac{4 A_0}{\omega^3} (1 - \omega + \frac{\omega^2}{4}) \quad (100)$$

Auf gleiche Weise erhält man aus dem ersten Anteil von Gl.(91)

$$\frac{2}{\omega^2} \sum_{\mu=1}^N A_{\mu}(-2 + \mu\omega) \quad (101)$$

Mit der Gl.(96) ergeben sich die Singularität von $(x + A)^{-3/4}$

$$C_{-1}^{q_{\eta}} = \sqrt[4]{\left(\frac{C_E + A}{C_E - A}\right)^3 \frac{A_0}{2}} \equiv -C_{-1}^{\gamma} \quad (102)$$

und folgt die Singularität von $(x + A)^{-1/4}$

$$C_0^{q_{\eta}} = \sqrt[4]{\frac{C_E + A}{C_E - A} \left\{ \frac{A_0}{4} + \sum_{\mu=1}^N \mu \cdot A_{\mu} \right\}} \equiv C_0^{\gamma} \quad (103)$$

Hier sei bemerkt, daß die Singularität von $(x + A)^{-1/2}$ völlig verschwindet, da ihr Koeffizient gemäß der Gl.(100) und (101)

$$-\sqrt{\frac{C_E + A}{C_E - A}} \sum_{\mu=0}^N A_{\mu}$$

und der aus der Wasseroberflächenbedingung auftretenden Singularität gemäß (76)

$$\sqrt{\frac{C_E + A}{2A}} (\sigma_{At} + C_0^{RHS}) = \sqrt{\frac{C_E + A}{C_E - A}} \sum_{\mu=0}^N A_{\mu}$$

miteinander ausgleichen. Die letztere Berechnung wird durch Einsetzen von Gl.(89) unmittelbar bestätigt.

Die Singularitätenbelegungen q_{η} und γ sind damit als Lösungen des Integralgleichungssystems (76) und (77) durch das Iterationsverfahren eindeutig bestimmt. Aber das Belüftungsende C_E ist noch unbekannt.

Zur Bestimmung der Belüftungsausdehnung, d.h. zur Festlegung von C_E für einen Belüftungsbeiwert wird eine weitere Bedingung benötigt. Hierzu verwendet man die Nishiyama-Bedingung [11]

$$\eta(A) = 2 \delta_0 A \quad (104)$$

bei offenem Modell. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, daß sich ein Schichtmodell zur symmetrischen Strömung hinter dem Profil ausbildet.

Die sogenannte Nishiyama-Bedingung wird üblich im unbegrenzten Medium benutzt. Soweit die Belüftung auftritt, ist die freie Wasseroberfläche von Bedeutung, deren Sogeffekt bei höherer Froude-Zahl zu einer vergrößerten Belüftungsdicke führt (vgl. [22]), also ein Schichtmodell bildet sich nicht mehr symmetrische Strömung hinter dem Profil aus.

Zur Bestimmung der Belüftungsausdehnung wird an Stelle von Nishiyama-Bedingung die folgende Bedingung eingeführt.

$$\eta(A) = K \cdot (2 \delta_0 A) \quad (105)$$

Dabei wird hier die Konstante, K aus den Resultaten für eine nichtlinearisierte Theorie von A.E. Green genommen.

Aus der Gl.(54) folgt unmittelbar für die Dicke der Belüftungsschicht an der Profilhinterkante

$$2\eta(A) = \int_{-A}^A \frac{q_\eta(\xi) d\xi}{U_0} \quad (106)$$

Um das Singularitätenverhalten an der Vorderkante zu umgehen, wenden wir die Transformation(84) an. Damit gilt im Profilbereich :

$$d\xi = 4(C_E + A) b^2 \frac{\sin^2 \tau/2 \sin \tau d\tau}{(1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2)^2} \quad (107)$$

Mit $2(C_E + A)b^2 = A(C_E + A)/(C_E - A)$ erhalten wir für die Dicke an der Hinterkante :

$$\begin{aligned} \frac{2\eta(A)}{A} = 4\delta_0 = \frac{C_E + A}{C_E - A} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{(1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2)^2} \left[\frac{\sigma_{At}}{b} + RHS(\tau) \cdot 2 \sin^2 \tau/2 \right. \\ \left. + (1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2) \left(\sum_{\mu=1}^N A_\mu (-e^{-\mu\Theta} - \cos \mu\tau) + A_0 \frac{\cos \tau - e^{-\Theta}}{2 \sin^2 \tau/2} \right) \right] d\tau \quad (108) \end{aligned}$$

Der Integral läßt sich numerisch mit Cubic-Spline ohne Schwierigkeit berechnen. Für $\tau \rightarrow 0$ wird der Integrand des A_0 zugehörigen Terms unbestimmt. Für die Berechnungen verwenden wir den Grenzwert $\tau \rightarrow 0$.

$$I = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\pi A_0 \frac{\cos \tau - e^{-\Theta}}{1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2} \cot \tau/2 d\tau = 2A_0$$

8 Lösung für das Integralgleichungssystem bei der nicht an der Vorderkante beginnenden Belüftung

Bei der nicht an der Profilhinterkante beginnenden Belüftung $C_A > -A$ können wir das Integralgleichungssystem (64) und (65) zur Berechnung der Belegungen heranziehen. Wie bei der an der Profilhinterkante beginnenden Belüftung sind die Integralgleichungen (64) und (65) iterativ zu lösen. Als frühere Näherung sind die vom Wellensystem des Flügels induzierten Geschwindigkeiten zu nehmen.

Bei den Profile mit einer runden Vorderkante erscheint die Belüftung offenbar hinter der Profilhinterkante zu erfolgen. Wendet man dort die Belüftungsprofiltheorie für $C_A = -A$

dennoch an, ergeben sich für diesen Fall unrealistische, negative Schichtdicken, wie in der Literatur [21] gezeigt wurde. Es zeigt sich also, daß diese Theorie nur auf Belüftungsschichten anzuwenden ist, die an der Profilverkante erfolgen.

Hingegen wird die Theorie für $C_A > -A$ mit der Bedingung eines Verschwindens der Quellenbelegung bei C_A und C_E entwickelt. Dies kann nur für Schichten gefordert werden, die hinter der Profilverkante erfolgen.

Wenn die Belüftung nicht an der Vorderkante beginnt, tritt jedoch eine mathematische Schwierigkeit auf, da keiner der beiden Definitionsbereiche von q_η und γ den andern ganz einschließt. Deswegen werden die Quellenbelegungen in zwei Bereiche aufgeteilt wie bei der Modellierung für Totwasserströmung von Marzi [23]. Dabei wurde der Dicken einfluß der Blase mit einer im Profilverkante angeordneten Quellverteilung und einer sich hinter dem Flügel befindenden einfachen Senkenmodell dargestellt, da der Totwasserdruck nur auf dem Profilverkante hinter der Ablösestelle vorgegeben wird.

In dieser Arbeit werden dagegen auf dem Profilverkante sowie hinter dem Profilverkante zwei Quellenbelegungen $q_\eta(x)$ und $\bar{q}_\eta(x)$ angeordnet. Also,

$$\begin{aligned} \text{Quellen :} & \quad q_\eta(x) \in [C_A, A] \\ \text{Quellen :} & \quad \bar{q}_\eta(x) \in [A, C_E] \\ \text{Wirbel :} & \quad \gamma(x) \in [-A, A] \end{aligned} \tag{109}$$

Diesem Lösungsweg liegt zugrunde, daß durch Erfüllung der exakten Randbedingung auf beiden Bereichen die Quellenbelegungen bestimmt werden können unter Berücksichtigung der von gegenseitiger Belegung induzierten Geschwindigkeit in beiden Bereichen.

Bei der Aufspaltung der Quellenbelegungen gehen wir von der Voraussetzung aus, daß als eine Übergangsbedingung

$$q_\eta(A) = 0 \quad ; \quad \bar{q}_\eta(A) = 0 \tag{110}$$

gelten müssen.

Nun erfolgt die Bedingung für ein für Belüftung geeignetes offenes Modell :

$$\bar{q}_\eta(C_E) = 0 \tag{111}$$

Für das vordere Ende der Belüftung ist auch die Neigung $dy_s/dx + d\eta/dx$ der Mittellinie im ganzen inneren Bereich $-A < x < A$ als stetig vorauszusetzen, da jede Sprungstelle auf eine physikalisch nicht interpretierbare Singularität führen würde. Daraus folgt, daß bei der nicht an der Profilverkante beginnenden Belüftung die zusätzliche Quellenbelegung $q_\eta(x)$ als Bedingung gelten muß :

$$q_\eta(C_A) = 0 \tag{112}$$

Für den aus den n -ten Näherung bekannten Einfluß kommt man zur Gesamtquellenbelegung auf der ganzen Belüftungszone $q_\eta^t(x)$ (vgl. $q_\eta(x)$ in Kapitel 6), und unter

Anlehnung an die nicht an der Vorderkante beginnende Kavitationstheorie gehen wir von folgender Darstellung mit Fourierreihe aus.

$$\frac{q_n^t(\theta')}{U_0} = \sum_{\nu=1}^N C_\nu^{q_n} \sin \nu \theta' \quad (113)$$

Die Inversionslösung der Gl.(64) lautet analog zur Gl.(70) unter Erfüllung der Kuttaschen Abflußbedingung $\gamma(A) = 0$, da die von 0 verschiedene Wirbelbelegung an der Hinterkante auf eine physikalische nicht interpretierbare Drucksprung führen würde.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{(n+1)}(x)}{U_0} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{C_A}^A \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \frac{q_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \left[f_\delta(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi-\Xi) d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} \right. \\ &\quad + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ &\quad - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} \right] \frac{d\xi}{x-\xi} \end{aligned} \quad (114)$$

Diese Gl. (114) wird in die Integralgleichung (65) eingesetzt unter Berücksichtigung der Aufspaltung der von Gesamtquellenbelegung induzierten Geschwindigkeit in Gl.(65).

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^t(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^A \frac{q_n(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \int_A^{C_E} \frac{\bar{q}_n(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (115)$$

Ist die Näherung $\gamma^{(n+1)}(\xi)$ bestimmt, folgt so das zugehörige $q_n^{(n+1)}(\xi)$ der gleichen Näherung aus der folgenden, iterativ zu interpretierenden Gleichung.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{C_A}^A \frac{q_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \left[1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x} \frac{A+\xi}{A-\xi}} \right] \frac{d\xi}{x-\xi} &= \frac{1}{\pi} \int_A^{C_E} \frac{\bar{q}_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \\ -f_p(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \left[f_\delta(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi-\Xi) d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} \right. \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& \left. + \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} \right] \frac{d\xi}{x-\xi} \tag{116}
\end{aligned}$$

Für die in der (n) -ten Näherung auftretenden Terme in Gl.(114) und Gl.(116) werden abgekürzt $RHSa(x)$ und $LHSa(x)$ eingeführt :

$$\begin{aligned}
RHSa(x) & = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \left[f_\delta(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi-\Xi) d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} \right. \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi-\Xi)) - i\pi\}] d\Xi \\
& \left. + \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi-\Xi)^2 + 4h^2} \right] \frac{d\xi}{x-\xi} \tag{117}
\end{aligned}$$

$$LHSa(x) = RHSa(x)$$

$$\begin{aligned}
& -f_p(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\
& + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{118}
\end{aligned}$$

Auf die ausführliche Berechnung dieser beiden Terme wird in Anhang B.2 eingegangen. Durch Einsetzen von Gl.(117) in Gl.(114) erhält man

$$\frac{\gamma^{(n+1)}(x)}{U_0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{C_E}^A \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \frac{q_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} + RHSa(x), \quad (119)$$

und Gl.(109) erhält die Form mit (118):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{C_A}^A \frac{q_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \left[1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x} \frac{A+\xi}{A-\xi}} \right] \frac{d\xi}{x-\xi} \\ = LHSa(x) + \frac{1}{\pi} \int_A^{C_E} \frac{\bar{q}_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \end{aligned} \quad (120)$$

Um diese Integralgleichung mit der bekannten Inversionsformel lösen zu können, müssen wir die folgende Variablentransformation vorzunehmen,

$$\sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = b(1-z) \quad \text{mit} \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A-C_A}{A+C_A}} \quad (121)$$

Dadurch werden der Bereich von $q_n(x)$ und der Profilbereich vor der Belüftung für γ auf folgende Bereiche abgebildet:

$$\begin{aligned} C_A \leq x \leq A & \iff -1 \leq z \leq 1 \\ -A \leq x \leq C_A & \iff -\infty < z \leq -1 \end{aligned} \quad (122)$$

Nach elementaren Rechnungen mit Transformation (121) geht die Integralgleichung (120) in folgende Form [23] über

$$-\frac{1}{2} \left[LHSa(z) + \frac{2u_{\bar{q}_n}(z)}{U_0} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{q_n(z')}{U_0} \frac{1+b^2(1-z)^2}{1+b^2(1-z')^2} \frac{dz'}{z-z'} \quad (123)$$

wenn die von der hinteren Quellenbelegung induzierte Geschwindigkeit abgekürzt wie folgt beschrieben wird:

$$\frac{u_{\bar{q}_n}(x)}{U_0} = \frac{1}{2\pi} \int_A^{C_E} \frac{\bar{q}_n^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (124)$$

Die der Forderungen $q_n(-1) = 0$, $q_n(1) = 0$ in Gl.(110) und Gl.(112) genügende Lösung lautet:

$$\frac{q_n(z)}{U_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{2u_{\bar{q}_n}(z')}{U_0} + LHSa(z') \right] \frac{1+b^2(1-z)^2}{1+b^2(1-z')^2} \sqrt{\frac{1-z^2}{1-z'^2}} \frac{dz'}{z-z'} \quad (125)$$

Dabei muß die Nebenbedingung

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[\frac{2u_{q\eta}(z')}{U_0} + LHSa(z')]}{1 + b^2(1 - z')^2} \frac{dz'}{\sqrt{1 - z'^2}} = 0 \quad (126)$$

erfüllt werden [21].

Zur weiteren Behandlung wird wieder die trigonometrische Transformation $z = -\cos \omega$, $z' = -\cos \tau$ eingeführt. Damit ergibt sich die Quellverteilung zu

$$\frac{q_\eta(\omega)}{U_0} = \frac{\sin \omega}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1 + 4b^2 \cos^4 \omega/2}{1 + 4b^2 \cos^4 \tau/2} \frac{[\frac{2u_{q\eta}(\tau)}{U_0} + LHSa(\tau)] d\tau}{\cos \tau - \cos \omega} \quad (127)$$

Für die weitere Auswertung verwenden wir die Fourieranalyse

$$\frac{[\frac{2u_{q\eta}(\tau)}{U_0} + LHSa(\tau)]}{2(1 + 4b^2 \cos^4 \tau/2)} = \sum_{\nu=0}^N a_\nu \cos \nu \tau \quad (128)$$

Mit (128) nimmt die zu erfüllende Nebenbedingung (126) die einfache Form an :

$$\int_0^\pi \sum_{\nu=0}^N a_\nu \cos(\nu \tau) d\tau = a_0 = 0 \quad (129)$$

Damit ergibt sich aus (127) die Quellenbelegung auf dem Profilbereich $q_\eta(\omega)$ in ihrer endgültigen Gestalt

$$\frac{q_\eta(\omega)}{U_0} = (1 + 4b^2 \cos^4 \omega/2) \sum_{\nu=1}^N a_\nu \sin \nu \omega. \quad (130)$$

Für die Bestimmung der Wirbelbelegung $\gamma(\omega)$ verwenden wir Gl.(119). Setzen wir dort q_η gemäß Gl.(130) ein, erhält man nach einigen Zwischenrechnung unter Verwendung der Integralformeln (93):

i) im Belüftungsgebiet ($C_A \leq x \leq A$)

$$\frac{\gamma(\omega)}{U_0} = (1 + 4b^2 \cos^4 \omega/2) \sum_{\nu=1}^N a_\nu ((-1)^\nu e^{-\nu\Theta} - \cos \nu\omega) + RHSa(\omega) \quad (131)$$

$$z = -\cos \omega \quad \text{mit} \quad 2 + \cos \omega = \cosh \Theta$$

ii) vor dem Belüftungsgebiet ($-A \leq x \leq C_A$)

$$\frac{\gamma(\Phi)}{U_0} = (1 + 4b^2 \cosh^4 \Phi/2) \sum_{\nu=1}^N a_\nu ((-1)^\nu e^{-\nu\Omega} - e^{-\nu\Phi}) + RHSa(\Phi) \quad (132)$$

$$z = -\cosh \Phi \quad \text{mit} \quad 2 + \cosh \Phi = \cosh \Omega$$

Der Grenzwert von γ in Gl.(132) an der Vorderkante durch elementare Reihenentwicklung zeigt, daß sich $\gamma(x)$ für $\Phi \rightarrow \infty$ verhält wie

$$\sim (x + A)^{-\frac{1}{2}}$$

und dadurch ist $\gamma(\xi)$ für die (n) -te Näherung als folgende Reihe darzustellen mit $\xi = -A \cos \theta$:

$$\frac{\gamma(\theta)}{U_0} = C_0^\gamma \cdot \cot \theta/2 + \sum_{\nu=1}^N C_\nu^\gamma \sin \nu\theta, \quad (133)$$

und aus (130) enthält q_η eine Sinusreihe auf der ursprünglichen Koordinate:

$$\frac{q_\eta(\theta)}{U_0} = \sum_{\nu=1}^N C_\nu^{q_\eta(1)} \sin \nu\theta, \quad (134)$$

Dabei bedeutet der Koeffizient C_0^γ

$$C_0^\gamma = C^{RHsa} - a_1 b. \quad (135)$$

Eine elementare Reihenentwicklung in Gl.(131) zeigt, daß der Wert von $\gamma(\xi)$ an der Hinterkante für $\omega = \pi$ ($x = A$) gleich 0 ist. An der Stelle $\omega = \Phi = 0$ ($x = C_A$) gehen die beiden Wirbelverteilungen stetig über wie gefordert.

In der Fourieranalyse auf der linken Seite in Gl.(128) ist die von der hinteren Quellbelegung \bar{q}_η induzierte Geschwindigkeit zunächst unbekannt. Die Koeffizienten a_ν können noch nicht bestimmt sein. Aus der Integralgleichung (65) mit Aufspaltung der Gesamtquellenbelegung (115) gilt auf dem Belüftungsbereich hinter dem Profilbereich unter Berücksichtigung, daß da keine Wirbelbelegungen sind:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_A^{C_E} \frac{\bar{q}_\eta^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \left(= -\frac{2 u_{\bar{q}_\eta}^{(n+1)}(x)}{U_0} \right) &= \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^A \frac{q_\eta^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \\ -f_p(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} - \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \\ + \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_\eta^{t(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \end{aligned} \quad (136)$$

Wird die rechte Seite der obigen Gleichung als $\bar{g}(x)$ gesetzt, läßt sich \bar{q}_η mit der Inversionsformel unter Berücksichtigung der Forderungen $\bar{q}_\eta(A) = 0$, $\bar{q}_\eta(C_E) = 0$ in Gl.(110) und (111) lösen.

$$\frac{\bar{q}_\eta^{(n+1)}(x)}{U_0} = \frac{1}{\pi} \int_A^{C_E} \sqrt{\frac{(C_E - x)(x - A)}{(C_E - \xi)(\xi - A)}} \bar{g}(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (137)$$

Wird $\bar{g}(\xi)$ als Cosinusreihe approximiert, dann

$$\bar{g}(\bar{\theta}) = \sum_{\nu=0}^N \bar{a}_\nu \cos \nu \bar{\theta}$$

mit $0 \leq \bar{\vartheta}, \bar{\theta} \leq \pi$; $A \leq x, \xi \leq C_E$ (138)

Dabei bedeuten die trigonometrischen Transformationen auf der ursprünglichen Koordinate (x, ξ) wie folgt:

$$x = \frac{C_E + A}{2} - \frac{C_E - A}{2} \cos \bar{\vartheta} \quad ; \quad \xi = \frac{C_E + A}{2} - \frac{C_E - A}{2} \cos \bar{\theta} \quad (139)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Quellverteilung hinter dem Profilbereich $\bar{q}_\eta^{(n+1)}(x)$

$$\frac{\bar{q}_\eta^{(n+1)}(\bar{\vartheta})}{U_0} = \sum_{\nu=1}^N \bar{a}_\nu \sin \nu \bar{\vartheta} \quad (140)$$

Die Nebenbedingung für $\bar{q}_\eta(\bar{\vartheta})$ wird dann zu der Relation:

$$\bar{a}_0 = 0 \quad (141)$$

Auf der rechten Seite der Gl.(136) bleibt die von der vorderen Quellenbelegung induzierte Geschwindigkeit noch unbekannt:

$$u_{q_\eta}^{(n+1)}(x)/U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{C_A}^A \frac{q_\eta^{(n+1)}(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (142)$$

Anschließend werden dafür die trigonometrischen Transformationen verwendet:

$$x = \frac{A + C_A}{2} + \frac{A - C_A}{2} \cosh \bar{\phi} \quad ; \quad \xi = \frac{A + C_A}{2} - \frac{A - C_A}{2} \cos \theta \quad (143)$$

Damit ergibt sich die von Quellverteilung auf dem Profilbereich induzierte Geschwindigkeit $u_{q_\eta}(\bar{\phi})$

$$u_{q_\eta}(\bar{\phi})/U_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N C_\nu^{q_\eta(1)} (-1)^\nu e^{-\nu \bar{\phi}} \quad (144)$$

Dabei bedeutet $C_\nu^{q_\eta(1)}$ den Koeffizienten der vorderen Quellverteilung wie in (134) zeigt.

In der zu approximierende Funktion auf der linken Seite der Gl.(128) ist die von der hinteren Quellenbelegung, $\bar{q}_\eta(x)$, induzierte Geschwindigkeit auf dem Profildereich auch unbekannt. Die Koeffizienten a_ν noch nicht berechnet werden.

$$\frac{u_{\bar{q}_\eta}(\varphi)}{U_0} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \bar{a}_\nu e^{-\nu\varphi}$$

mit $x = \frac{C_E + A}{2} - \frac{C_E - A}{2} \cosh \varphi.$ (145)

Die in q_η und \bar{q}_η enthaltenen noch unbekanntes Grenzen C_A und C_E des Belüftungsintervalls sind durch Erfüllung der beiden Nebenbedingungen entsprechend zu bestimmen. Dabei müssen die beide von quellinduzierten Geschwindigkeiten (144), (145) konvergiert werden.

Aber dabei ist eine Problematik drin. Es ist jedoch schwer, die von q_η induzierten Geschwindigkeit hinter dem Profildereich in Gl.(144) mit einer Cosinusreihe darzustellen, da es auf eine exponential reduzierende, nicht glatte, sondern steile Kurve weist. Diese Schwierigkeit führt zu einer ungenügenden hinteren Quellverteilung und zu einer kleineren davon induzierten Geschwindigkeit auf dem Profildereich. Aber mit unendlicher Zahl von Aufpunkten wäre diese Problematik verschwinden.

Hier wird eine Näherungsmethode eingeführt. Dabei wird die hintere Quellverteilung (\bar{a}_n) bestimmt nicht auf der hinter Belüftungszone, sondern auf der vorderen Belüftungszone. Also, aus der ersten Nebenbedingung (129), ($a_0 = 0$) erhält man die Reihe mit \bar{a}_n , während die Form der hinteren Quellverteilung noch unbekannt bleibt. Die letzere ist aus einer inneren Iteration zu bestimmen. Dabei werden die beiden Quellverteilungen konvergiert.

Die erste Nebenbedingung (129) wird durch den Durchschnittswert auf dem Integrationsintervall gemäß Gl.(128) zu der Relation :

$$a_0 = \bar{g}_\tau + \frac{2 \overline{u_{\bar{q}_\eta}}(\varphi)}{U_0} \quad (146)$$

Dabei wird g_τ wie folgt abgekürzt.

$$g_\tau = \frac{LH S a(\tau)}{2(1 + 4b^2 \cos^4 \tau/2)} \quad (147)$$

Dabei wird ein Durchschnittswert mit einer Oberlinie gekennzeichnet.

Bei der nächsten inneren Iteration wird unter Erfüllung der ersten Nebenbedingung, $a_0 = 0$, von der mit k

$$k = -\bar{g}_\tau \cdot \left(\frac{2 \overline{u_{\bar{q}_\eta}}(\varphi)}{U_0} \right)^{-1} \quad (148)$$

multiplizierten, hinteren Quellenbelegung ausgehen :

$$\bar{a}_n^{(i+1)} = k \cdot \bar{a}_n^{(i)}, \quad (149)$$

Durch die Iteration, bei der die Form der hinteren Quellverteilung bestimmt wird, muß ein Parameter k als gleich 1 konvergiert, wie bereits erwähnt wurde. Zur praktischen Nutzung ist noch ein Konvergenztest nötig, aus dem man feststellen kann, daß die gesuchte hintere Quellverteilung zulässige Resultate ergibt. Hierauf wird im Kapitel 10.3 noch eingegangen.

Wenn die beiden Quellbelegungen mit der Erfüllung der ersten Nebenbedingung konvergiert wird, dann liefert die zweite Nebenbedingung (141) die Relation $C_A - C_E$.

Aus Untersuchung entspricht C_A in der Regel einer Lage des Druckminimums der von Belüftung oder Kavitation freien Strömung, die sich auf die vorhandene Ablöseblase oder die darauf beruhende Dampfblase bezieht. Für die Rechnungen wird angenommen, daß der Belüftungsansatz jeweils beim potentialtheoretischen Druckminimum erfolgt.

Mit dem festgelegten Wert C_A liefert dann die Nebenbedingung (141) den C_E -Wert. Also Gl.(141) ist durch große Iteration mit variantem Belüftungsende zu erfüllen.

Mit den festgelegten Belüftungsintervall werden dann die gesuchten Quellbelegungen, q_η , und \bar{q}_η sind als eindeutige Lösung in $(n + 1)$ -te Näherung zu bestimmen. Für die nächste Näherung wird die Gesamtquellenbelegung q_η^t durch Summation von q_η und \bar{q}_η bestimmt (vgl. Gl.(149), Gl.(140)).

9 Einfluß der Belüftung auf die Druckverteilung am Profil

Wenn im Gegensatz zu Kapitel 3 Belüftung auftritt, wird vorausgesetzt, daß in der Belüftungszone der Atmosphärendruck, P_{At} homogen herrscht. Als Belüftungsbeiwert definieren wir σ_{At} wie folgt :

$$\sigma_{At} = \frac{P_0 - P_{At}}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = \frac{2gh}{U_0^2} \quad (150)$$

Nun behandeln wir den Druckbeiwert außerhalb des Belüftungsgebiets bei der nicht an der Vorderkante beginnenden Belüftung. Im bisherigen Sinn ist man davon ausgegangen, daß die Druckverteilung am Profil stetig sein soll. Wir bezeichnen den Druckbeiwert außerhalb des Belüftungsgebiets mit $\sigma_p(x)$, der an der Grenze C_A identisch mit σ_{At} sein muß.

Im Rahmen der linearisierten Profiltheorie vernachlässigen wir die höhere Ordnung in Gl.(39), und dann gilt auf der ganzen Saugseite Gl.(60) bei der an der Vorderkante beginnenden Belüftung. Der durch den Einfluß der Belüftungsschicht gegenüber dem von Belüftungsschicht freien Zustand modifizierte $\sigma_p(x)$ läßt sich aus (120) bestimmen. Ersetzen wir $\sigma_p(x)$ anstelle von σ_{At} in $LHSa(x)$ in Gl.(120) und setzen wir Gl.(125), (128)

in Gl.(120) ein, dann ergibt sich nach elementaren Rechnungen mit Transformation (121) und Nebenbedingung (129) :

$$\sigma_p(\Phi) = (1 + 4b^2 \cosh^4 \Phi/2) \sum_{\nu=1}^N a_\nu (-e^{-\nu\Phi}) + LHSa(\Phi) + \frac{2u_{\bar{q}_\eta}(\Phi)}{U_0} + \sigma_{At} \quad (151)$$

Formel (151) gilt für $-A \leq x \leq C_A$ oder $-\infty < \Phi \leq 0$. Für $\Phi = 0$, $x = C_A$ wird $\sigma_p = \sigma_{At}$, wie man durch Vergleich mit Gl.(128) für $\omega = 0$, $x = C_A$ unmittelbar bestätigt.

Mit der voll linearisierten Bernoullischen Gleichung läßt sich der durch Belüftung bedingte Druckbeiwert σ_d an der Druckseite beschreiben

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sigma_d(\omega) &= \sigma_{At} - 2 \frac{\gamma(\omega)}{U_0} \\ \text{(ii)} \quad \sigma_d(\Phi) &= \sigma_p(\Phi) - 2 \frac{\gamma(\Phi)}{U_0} \end{aligned} \quad (152)$$

Für den Fall $C_A = -A$ gilt Gl.(152(i)).

Die rechte Seite in Gl.(151) zeigt $2u(x, +0)/U_0$ außerhalb des Belüftungsgebiets. Für die praktische Rechnung sollen die nach (141) berechneten Geschwindigkeiten noch mit dem Riegelfaktor der Potentialströmung ohne Belüftung berücksichtigt werden.

Für die numerische Berechnung zur C_L gemäß Gl.(36) bei der an der Vorderkante beginnenden Belüftung verwenden wir die ähnliche Integralform wie Gl.(106), nachdem $\gamma(z)$ an Stelle von $q_\eta(z)$ gesetzt worden ist. Aus Gl.(84) erhalten wir mit $4b^2 = 2A/(C_E - A)$ für den Auftriebsbeiwert

$$C_L = \frac{C_E + A}{C_E - A} \int_0^\pi \frac{\sum_{\mu=1}^N A_\mu \sin \mu\tau \sin \tau - A_0(1 + \cos \tau)}{1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2} d\tau \quad (153)$$

Nun berechnen wir C_L für die nicht an der Vorderkante beginnende Belüftung. Um das Singularitätenverhalten an der Vorderkante zu umgehen, wenden wir die Transformation(121) an. Damit gilt im Profilbereich .

$$d\xi = 4A b^2 \frac{(1 + \cos \tau) \sin \tau d\tau}{(1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2)^2} \quad (154)$$

Damit erhalten wir für den Auftriebsbeiwert unter Berücksichtigung der Formel $4b^2 = (A - C_A)/(A + C_A)$

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{1}{A} \int_{-A}^{C_A} \frac{\gamma(\xi)}{U_0} d\xi + \frac{1}{A} \int_{C_A}^A \frac{\gamma(\xi)}{U_0} d\xi \\ &= \frac{A - C_A}{A + C_A} \int_0^\infty \sum_{\nu=1}^N a_\nu ((-1)^\nu e^{-\nu\Omega} - e^{-\nu\Phi}) \frac{(1 + \cosh \Phi) \sinh \Phi d\Phi}{1 + 4b^2 \cosh^4 \Phi/2} \\ &\quad + \frac{A - C_A}{A + C_A} \int_0^\pi \sum_{\nu=1}^N a_\nu ((-1)^\nu e^{-\nu\Theta} - \cos \nu\tau) \frac{(1 + \cos \tau) \sin \tau d\tau}{1 + 4b^2 \sin^4 \tau/2} \end{aligned}$$

$$+\pi (C_0^{RHs_a} - \frac{1}{2}C_1^{RHs_a}) \quad (155)$$

Dabei bezeichnen $C_0^{RHs_a}$ und $C_1^{RHs_a}$ die Reihenkoeffizienten von $RHSa$ in Anhang B.2. Man erhält den letzten Term in Gl.(155) mit $\xi = -A \cos \theta$ ohne Schwierigkeit. Die Integrale lassen sich numerisch mit Cubic-Spline berechnen. Da der Integrand für Φ in Gl.(132) $\Phi \rightarrow \infty$ sehr gut konvergiert, erweist es sich als ausreichend, die obere Integralgrenze auf 8,0 zu begrenzen.

10 Rechnungen und Diskussion

Für die Rechnungen nach in Kapitel 4,7,8 aufgestellten Gleichungen gelten 3 unabhängige Programme, denen ein Berechnungsverfahren mit Singularitätenmethode für belüftete Profile zugrunde liegt, mit folgendem Inhalt :

- a) Druckverteilung im von Belüftung freien Zustand für verschiedene Froudezahlen (F_h) und Tauchtiefenverhältnis (h/A)
- b) Verlauf der Belüftungserscheinung bei der an der Profilverdkernte beginnenden Belüftung
- c) Verlauf der Belüftungserscheinung bei der nicht an der Profilverdkernte beginnenden Belüftung

Für jeden Fall kann die linearisierte Randbedingung an der freien Wasseroberfläche berücksichtigt werden, und ihre Ergebnisse werden unter Umständen mit denen bei unendlicher Froudezahl verglichen.

10.1 Einfluß der Wasseroberflächenbedingung auf die Druckverteilung am Profil

In diesem Kapitel wird der Einfluß der freien Wasseroberfläche im von Belüftung freien Zustand (s. Kapitel 4) berechnet.

Zunächst wird ein Konvergenztest durchgeführt. Die Zahl der Distanz zwischen Aufpunkten auf dem Profil variiert von 4 bis zu 16 verdoppelnd, und auf jeden Punkte wird der Einfluß der freien Wasseroberfläche berechnet.

Hierfür wird die Druckverteilung am Joukowski-Profil mit 12 % Dicke für den Fall $F_h = 1,41; h/A = 0,91$ gerechnet. Aus deren Resultaten in Abb. 2 ersieht man, daß die Rechnung mit 4 Aufpunkten auch ein zuverlässiges Ergebnis liefert. Dies ist verständlich, daß der Einfluß der freien Wasseroberfläche längs Profil nicht so stark schwänkt und läßt sich mit Cosinusreihe (vgl. Gl.(34)) genau darstellen.

Die Druckverteilung am Profil 4412 für den Fall $\delta_0 = 5,0^\circ$ wird gerechnet. Für praktische Berechnung der Ei -Funktion wird hierbei auf [24] hingewiesen, dieselbe wird in den Resultaten von Giesing und Smith [3] verwendet.

Abb.3 zeigt die Druckverteilung an der Saugseite am Profil 4412 mit experimentellen Ergebnissen von Ausman [25]. Experimentergebnisse bezeichnen mit Kreis, Dreieck für

$h/A = 1,88$ und $h/A = 1,20$. Dabei entsprechen die beiden Froudezahlen F_h 1,06 bzw. 1,33. Aus den Resultaten der Rechnungen in Kapitel 4 dieser Arbeit ergibt sich die ungebrochene Linie.

Die gestrichelte Linie werden Resultate mit der Panel-Methode von Giesing und Smith [3] bezeichnet, bei der Quellsenkenbelegungen sowie Dipolenbelegungen benutzt werden und auf der Oberfläche des Profils die Strömungsrandbedingungen zu erfüllen sind. Als Kuttasche Abflußbedingung sollen die tangentialen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten am Ende des Profils gleich sein. Wie der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen zeigt, gibt die Panel-Methode von Giesing und Smith [3] im qualitativen Sinn eine sehr ähnliche Druckverteilungsform aber im quantitativen Sinn eine deutliche Abweichung von den experimentellen Werten an. Den Grund für diesen Unterschied haben die Autoren nicht erklärt.

In Abb.3 stimmen die Resultate dieser Arbeit mit den Experimenten in der Regel überein. Die Gesamtauftriebsbeiwert ist fast gleich mit den vorgegebenen experimentellen Daten. Nach Abb.3 scheint es plausibel, daß wegen Erfüllung der linearisierten Randbedingung auf der projizierten Profilhöhe bei dieser Methode der Einfluß der Wasseroberflächenbedingung nicht genau in der Nähe der Vorderkante berechnet wird.

In Abb.4 zeigt sich die Druckverteilung an der Saugseite am Joukowski-Profil mit 12 Prozent Dicke. Dabei ist $\delta_0 = 5,0^\circ$. Die Resultate von Giesing und Smith [3] sowie die Experimente von Parkin [26] sind zum Vergleich eingetragen. Die Experimentergebnisse werden mit Kreis, Dreieck und Diamant für $h/A = 3,51; 1,91$ und $0,91$ bezeichnet. Dabei entsprechen die Froudezahlen $0,71; 0,97$ und $1,41$. Die ungebrochene Linie zeigt die Resultate dieser Arbeit. Die gestrichelte Linie werden Resultate von Giesing und Smith bezeichnet.

Die Resultate dieser Arbeit stimmen auch hier mit den Experimenten gut überein und zeigen trotz des kleinen Unterschieds in der Nähe der Vorderkante eine konsistente Tendenz : In der Nähe der Vorderkante ist der berechnete Druck niedriger als in den Experimenten und hinter der Stelle etwa $x/A = -0,8$ ist der Druck höher als in den Experimenten. Das entspricht der Tendenz in Abb.3. Dagegen gab es nicht konsistente Resultat von Giesing und Smith insbesondere in der Nähe der Profilverkante.

Für Joukowski-Profil mit 6 Prozent Dicke werden die Druckverteilungen bei $h/A = 1,05; 0,525$ gerechnet bei dem bereits in Kapitel 5 behandelten Zustand, also $U_0 = 12,86 \text{ m/s}$; $A = 0,2 \text{ m}$; die auf Profilhöhe bezogene Froudezahl, $F_A = 9,18$; $\delta_0 = 6^\circ$ Dabei entsprechen die Froudezahlen, F_h 8,96 und 12,7 und ihre Ergebnisse werden in Abb.5 zusammen dargestellt.

Aus Abb.5 erkennt man, daß das Wellensystem die größere Abminderung der Zirkulation als beim Spiegelsystem beeinflusst. Dieser Unterschied mit den beiden Systemen wird kleiner mit der höheren F_h . Aus diesen Rechnungen entnimmt man, daß der Schwerkraftseffekt in der Wasseroberflächenbedingung mit der höheren F_h gegen 0 konvergiert wie gefordert. Bei hoher Froudezahl spielt das Spiegelsystem bei unendlicher Froudezahl große Rolle. Dies Effekt wirkt sich umgekehrt wie beim sogenannten Tunneleffekt aus, daß die Druckverteilung immer vergrößert wird.

Im Bereich der Untersuchung der Wasseroberflächenbedingung ist die Wellenhöhe noch von grundsätzlichem Interesse. Beim gleichen Zustand mit der kritischen Tauchtiefe, also

$F_h = 8,96; h/A = 1,05; \delta_0 = 6^\circ$ wird der Verlauf der Wellenhöhe nach Gl.(40) gerechnet. Die Ergebnisse für den Fall $F_h = 6,3; \delta_0 = 6^\circ$ werden zum Vergleich eingezeichnet.

Es zeigt sich, daß weit vor dem Flügel die Welle ausgelöscht wird und daß hinter dem Flügel eine sinnsförmige Welle erfolgt. Die Wellenhöhe im Fall der kleinere F_h hat eine steilere Neigung gegenüber der ungestörten Wasseroberfläche, wie aus der Abb.6 zu ersehen ist.

10.2 Rechnung für die an der Vorderkante beginnende Belüftung

Nach den in Kapitel 7 aufgestellten Gleichungen werden Belüftungserscheinungen für ebene Platte berechnet.

Zunächst wird ein Konvergenztest durchgeführt. Die Aufpunkten liegen auf dem transformierten Profilbereich. Die Zahl der Distanz zwischen Aufpunkten auf dem Profil verdoppelnd variiert von 8 bis zu 32. Hierfür wird die Quellverteilung für Belüftung an ebener Platte für den Fall $F_h = 9,96; h/A = 0,85$ gerechnet. Aus deren Resultaten in Abb.7 ersieht man, daß die Rechnung mit 8 Aufpunkten auch ein zuverlässiges Ergebnis liefert.

Wir betrachten den Verlauf der Belüftung für die bei verschiedenen Tiefen getauchte ebene Platte. Abb.8 (a),(b) enthalten den Verlauf der Belüftungserscheinungen für $h/A = 1,05; 0,85$. Dabei ist $\delta_0 = 6,0^\circ$ und x -Achse bedeutet die relative Distanz zur Profillänge $(x + A)/2A$. Zur Bestimmung der Belüftungsausdehnung wird an Stelle von Nishiyama-Bedingung die Bedingung (105) benutzt.

In diesen Abbildungen werden die Wellenhöhe und die Oberfläche der Belüftung beim Wellensystem sowie beim Spiegelsystem aufgetragen. Im Spiegelsystem wird keine Welle erzeugt. Beim offenen Modell endet die Belüftungsschicht zugleich mit dem Ansteigen des Druckes P über den Atmosphärendruck P_{At} bei der maximalen Belüftungsdicke.

Aus Abb.8 ergibt sich, daß trotz hoher Froudezahl, hier $F_h=8,96; 9,96$ sich die Belüftungslänge beim Wellensystem deutlich von der beim Spiegelsystem unterscheidet.

Nun betrachten wir diesen Einfluß der Wasseroberflächenbedingung: Aus dem aus der gleichen Wirbel- und gleichen Senkenbelegung bestehenden Spiegelsystem kann man erkennen, daß von der Wirbelbelegung über der Wasseroberfläche negative Geschwindigkeiten in x -Richtung auf dem Belüftungsbereich induziert werden. Von der Senkenbelegung werden in der Nähe der Profilverkante positive aber in einigem Abstand davon negative Geschwindigkeiten induziert. Also, diese Wasserspiegelanhebung bei hohen Froudezahl wirkt reduzierend.

Vom Wellensystem wird auch negative Geschwindigkeit induziert. Der von der Schwerkraft abhängige Term im Wellensystem (vgl. $\Phi^{(3)} + \Phi^{(4)}$ in Kapitel 3) spielt eine große Rolle besonders bei der offenen Modellschicht, da keine Senkenbelegung besteht. Wie man an der Wellenhöhe in Abb.8 sieht, wird diese Wirkung des von der Schwerkraft abhängigen Terms mit zunehmender Schichtlänge allmählich größer.

Offenbar ist die Belüftungsschicht für $F_h = 8,96$ deshalb kürzer und stärker ausgeprägt als bei $F_h \rightarrow \infty$ (s. Abb.8(a)). Diese Feststellung gilt auch für Abb.8 (b).

Beim Spiegelsystem sowie beim Wellensystem ist es bemerkenswert, daß die Belüftungsschicht in die ungestörte Wasseroberfläche nicht hineinragen darf. Dieser linearisierten Wellentheorie liegt die Vorstellung zugrunde, daß durch eine Kombination zwischen der Singularitäten des Flügels und der ober der Wasseroberfläche liegenden, gespiegelten Singularitäten die Wasseroberflächenbedingung erfüllt wird. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Singularitäten des Flügels, also physikalisch hier die Belüftungsschicht, jeweils unter der ungestörten Wasseroberfläche liegen bleibt.

10.3 Rechnung für die nicht an der Vorderkante beginnende Belüftung

Für die Berechnung der in Kapitel 8 aufgestellten Beziehungen muß man zunächst die zulässigen Aufpunkten bestimmen.

Die Aufpunkten liegen auf dem transformierten Profilbereich sowie auf dem hinteren Belüftungsbereich. Die Zahl der Distanz zwischen Aufpunkten variiert verdoppelnd von 16 bis zu 64.

Aus der Quellverteilung für Belüftung im unbegrenzten Medium in Abb.9 ersieht man, daß die Rechnung mit 64 Aufpunkten ein zulässiges Ergebnis liefert. Dabei beträgt der Belüftungsbeiwert 0,0593. Weiterhin werden 64 Aufpunkte für die beiden Belüftungsbe-
reiche benutzt.

Die Belüftung im unbegrenzten Medium bedeutet, daß kein Einfluß der freien Wasseroberfläche auf die Belüftung berücksichtigt wird, also alle durch die freie Wasseroberfläche bedingten Singularitäten weggelassen werden. Dabei bedeutet die Abkürzung (o.W.F) kein Einfluß der freien Wasseroberfläche.

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß der Belüftungseinsatz jeweils beim potentialtheoretischen Druckminimum erfolgt. Der C_A -Wert $-0,99A$ wird hierbei im unbegrenzten Medium sowie beim Wellensystem gewählt. Aber beim Auftritt der freien Wasseroberfläche muß man C_A mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse ermitteln.

Abb.10 (a),(b) enthält die Belüftungserscheinungen am Joukowski-Profil mit 6 % Dicke für $h/A = 1,05; 0,9$. Beim Spiegelsystem hat die für den Fall $C_E > -A$ geltende Form keinen Sinn, wenn die Belüftungsdicke in die Wasseroberfläche ($y = h$) hineinragt. Aus diesem Grunde entfällt die Rechnung beim Spiegelsystem. Offenbar wird die Schichtdicke unter Einfluß der Wasseroberfläche vergrößert. Diese Feststellung gilt auch für die an der Profilverkante beginnende Belüftung.

Bei gleichem Belüftungsbeiwert wird diese Belüftungslänge kürzer als bei ebener Platte (vgl. Abb.8). Im Fall mit Profildicken entspricht ihre Verdrängungswirkung einer $(n + 1)$ -ten Näherung. Die dadurch induzierte Geschwindigkeitskomponente in der x -Koordinate wird hinter dem Profilbereich negativ. Diese negative Geschwindigkeit verhindert ein Anwachsen der Belüftungsschicht.

Abb.11 zeigt die durch die Belüftung modifizierte γ -Verteilung im Vergleich zu beim unbegrenzten Medium. In Abb.11(a) zeigen sich ihre Ergebnisse für ebene Platte, und Abb.11(b) entspricht den Ergebnisse am Joukowski-Profil.

Der γ -Verlauf entspricht der Tatsache, daß die starken Unterdrücke in der unmittel-

baren Umgebung des vorderen Endes der Belüftung durch die Ausbildung der Belüftung abgebaut werden.

In Abb.12 zeigt sich der Verlauf der Belüftungsdicke an der Profilhinterkante gegenüber derjenigen bei Nishiyama-Bedingung, also $\eta(A)/2\delta_0 A$ in Abhängigkeit von Tauchtiefe unter der Wasseroberfläche am 6 % Joukowski-Profil. Dabei werden die Resultate von Green, A.E. [27] bei ebener Platte zum Vergleich eingetragen. Die Resultate dieser Theorie am 6 % Joukowski-Profil ergeben eine gute Übereinstimmung mit denen von Green, A.E. [27].

In Abb.13 wird der Verlauf des Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit von der Tiefe des Profils unter der Wasseroberfläche bei ebener Platte zum Vergleich mit denen am Joukowski-Profil zusammengefaßt.

Dabei werden auch bisherige Resultate mit Hilfe der konformen Abbildung eingetragen, mit der A.E. Green 1936 als erster die gleitende Platte in der Nähe der freien Wasseroberfläche unter Vernachlässigung der Schwerkraft und beim Belüftungsbeiwert gleich 0 behandelte [27]. Weiterhin wurde die linearisierte Methode unter gleicher Bedingung von S.H. Schot 1962 vorgegeben [28]. Da die unendliche Froudezahl und eine unendlich große Belüftungsschicht dabei vorausgesetzt werden, tritt die Problematik auf, daß die Belüftung immer vorhanden sein soll. Deswegen bei großer Tauchtiefe verliert diese vereinfachend entwickelte Theorie ihre Bedeutung.

Im Grenzfall $\sigma_{At} = 0$, $h/A \rightarrow \infty$, also einer unendlichen Belüftungsschicht im unbegrenzten Medium konvergiert der Auftriebsbeiwert, C_L , bekanntlich gegen $\frac{1}{2}\pi\delta_0$ nach der linearisierten Theorie mit der konformen Abbildung z.B. von Schot.

Also, die Wasserspiegelanhebung bei hohen Froudezahl wirkt steigend auf den Auftrieb, wie in Abb.13 gezeigt wurde. Je kleiner die Tauchtiefe wird, um so größer wird der Auftrieb. Die Resultate dieser Theorie bei ebener Platte ergeben eine gute Übereinstimmung mit denen von Green, A.E..

Die zusätzliche Bedingung für Belüftungsschicht führt zum Auftriebssprung bei unendlicher F_h . Diese verkleinerte Belüftungsschicht (s. in Abb.8(b)) gestattet die Wasserspiegelanhebung nicht genau.

Der Auftrieb bei der nicht an der Vorderkante beginnenden Belüftung liegt jeweils unter dem Wert bei der an der Vorderkante beginnenden Belüftung. Dabei beträgt der Wert $C_L/2\pi\delta_0$ bei ebener Platte 0,332; 0,326 für $h/A=0,85$ bzw. 1,05, während der am 6 % Joukowski-Profil 0,240; 0,225 für $h/A=0,90$ bzw. 1,05 bleibt.

Es ist verständlich, daß man größeren Auftrieb bei einer Superkavitationsflügelform mit scharfer Vorderkante und beim seichter fahrenden Tragflügel erhält, wenn er in der Nähe der freien Wasseroberfläche fährt und daher für Belüftung gefährdet ist.

Aber wegen der zusätzlichen Bedingung für die Belüftungsschicht, daß sie unter der ungestörten Wasseroberfläche liegen bleibt, werden die Rechnungen für kleinerer Tauchtiefe nicht mehr durchgeführt. Um diesen Nachteil zu umgehen, muß man auf eine nichtlinearisierte Wellentheorie hinweisen, besonders für die Belüftung ist die Lage der freien Wasseroberfläche wichtig, auf der die Wasseroberflächenbedingung erfüllt werden muß.

11 Symbolliste

A	projizierte Profilhalblänge
C_A	vorderes Ende des Belüftungsgebiets
C_E	hinteres Ende des Belüftungsgebiets
C_L	Gesamtauftriebsbeiwert
C_P	Druckbeiwert am Profil
δ_0	Anstellwinkel
F_A	die auf Profilhalbtiefe A bezogene Froudszahl
F_h	die auf Tauchtiefe h bezogene Froudszahl
g	Erdebeschleunigung
h	Tauchtiefe des Profils
H	kritische Tauchtiefe des Belüftungsbeginns
P	Druck in der Umströmung des Profils oder Druck in der Spitzenwirbel
P_{At}	Atmosphärendruck
P_0	Zuströmdruck des Profils
q	Quellensinkenverteilung für die Profildicke
q_η	Quellverteilung für die Profilbelüftung
r	radiale Achse vom Wirbelzentrum im Spitzenwirbelbereich
r_k	Kernradius des Spitzenwirbels
R_n	Reynoldszahl
u	x -Komponente der induzierten Geschwindigkeit
U_0	Anströmgeschwindigkeit
u_γ, v_γ	von Wirbelbelegung induzierte Geschwindigkeit
u_q, v_q	von Profildicke induzierte Geschwindigkeit
$u_{q\eta}, v_{q\eta}$	von zusätzlicher Quellenbelegung induzierte Geschwindigkeit
$u_{\bar{q}\eta}$	von hinterer Quellenbelegung induzierte Geschwindigkeit
U_T	Gesamtgeschwindigkeit am Profil
V	Umfangsgeschwindigkeit im Spitzenwirbelbereich
v	y -Komponente der induzierten Geschwindigkeit
x_1	Aufrollaufvorgangspunkt des Spitzenwirbels
X_e	dimensionalose relative Distanz zur Profillänge ($= (x + A)/2A$)
Y	Wellenhöhe der Wasseroberfläche über dem Profil
y_d	Dickenlinie des Profils
y_s	Skelettlinie des Profils
$y_{\delta s}$	Saugseitelinie des Profils
z	transformierte Variable von x
η	Halbdicke der Profilbelüftung
Γ	Maximalwert des tragenden Wirbels oder Stärke des freien Wirbels
Γ_0	Wirbelstärke im unbegrenzten Medium
γ	Wirbelverteilung
Λ	Seitenverhältnis
ν_0	Wellenzahl ($= g/U_0^2$)
Φ	Störgeschwindigkeitspotential(Kapitel 3), trigonometrische Variable auf dem transformierten Bereich(Kapitel 7,8,9)
ϱ	Dichte der Flüssigkeit
σ_{At}	Belüftungsbeiwert

σ_p, σ_d	durch Belüftung bedingte Druckbeiwert außerhalb Belüftungsgebiets
ω	trigonometrische Variable auf dem transformierten Bereich
\Im	imaginäres Teil der komplexen Zahl
\Re	reelles Teil der komplexen Zahl

12 Dankwort

An dieser Stelle möchte ich allen herzlich danken, die mir die Anfertigung dieser Arbeit ermöglichten. Insbesondere möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. W.H. Isay für die Betreuung des Promotionsvorhabens und seine Anregung, auf die hin diese Untersuchungen durchgeführt wurden, bedanken. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Söding danke ich für seine unermüdliche Diskussionsbereitschaft und seine Hinweise. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn W. Bannasch für die Hilfe bei der Anfertigung der Arbeit.

13 Literatur

1. Isay, W.H. ; *Zur Theorie der nahe der Wasseroberfläche fahrenden Tragflächen*, Ingenieur-Archiv, XXVII Band, pp.295-313, 1960.
2. Bernicker, R.P. ; *A Linearized Two-Dimensional Theory for High-Speed Hydrofoils Near the Free Surface*, J.S.R. Vol.10, No.1 pp.25-48,1966.
3. Giesing, J.P. & Smith, A.M.O. ; *Potentialflow about two-dimensional Hydrofoils*, J.F.M. Vol. 28, pp.113-129, 1967.
4. Breslin, J.P. & Skalak, R. ; *Exploratory Study of Ventilated Flows about Yawed Surface-Piercing Struts*, NASA Memo 2-23-59 W, Waschington, 1959
5. Vaughan, V.L. & Ramsen, J.A. ; *Hydrodynamic Characteristics Over a Range of Speeds Up to 80 Feet Per Second of a Rectangular Modified Flat Plate Having an Aspect Ratio of 0,25 and Operating at Several Depths of Submersion*, NACN TN 3903, 1957.
6. Wadlin, K.L. ; *Mechanics of Ventilation Inception*, 2nd Symposium Naval Hydrodynamics, 1958.
7. Dobay, G.F. ; *Hydrofoils Designed for Surface Ventilation -An Experimental Analysis*, SNAME Hydrofoil Symposium at the Spring Meeting, 1965.
8. Schlichting, H. & Trockenbrodt, E. ; *Aerodynamik des Flugzeugs*, Band I, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
9. Schmeidler, W. ; *Integralgleichungen mit Anwendung in Physik und Technik*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig, 1950.
10. Nishiyama, T. & Ota, T. ; *Linearized Potential Flow Models for Hydrofoils in Supercavitating Flows*, J. of Basic Engin. Vol.93, pp.550-564, 1971.
11. Hanaoka, T. ; *Linearized Theory of Cavity Flow past a Hydrofoil of Arbitrary Shape*, Selected Papers from the Journal of the S.N.A.J. Vol.3, 1969.
12. Isay, W.H. ; *Inkompressible Strömung*, Vorlesungsmanuskript der Universität Hamburg, 1972.
13. Isay, W.H. ; *Kavitation*, Schiffahrtsverlag Hansa Hamburg, 3. Aufl., 1989.
14. Isay, W.H. ; *Propellertheorie-Hydrodynamische Probleme*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
15. Newman, B.L. ; *Flow in a Viscous Trailing Vortex*, The Aeronautical Quarterly 10, p 149, 1959.
16. Isay, W.H. ; *Eine Näherungslösung für das Geschwindigkeits- und Druckfeld eines Flügelspitzenwirbels in turbulenter Strömung*, Institut f. Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 516, 1991.
17. Mc Cormick, B.W. & Tangler, J.L. & Sherrieb, H.E. ; *Structure of Trailing Vortics*, Journ. of Aircraft 5, p 260, 1968.
18. Helmbold, H.B. ; *Der unverwundene Ellipsenflügel als tragende Fläche*, Jb. Lufo., I: pp 111-113, 1942.
19. Fabular, A.G. ; *Thin-Aerofoil Theory Applied to Hydrofoils with an Arbitrary Free-Streamline Detachment*, J.F.M. Vol.12, Part 2, pp 227-240, 1962.
20. Alwardt, P. & Isay, W.H. ; *Zur Behandlung von Teilkavitation an Flügeln mit Methoden der Profiltheorie*, Institut f. Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 399, 1980.

21. Gasau, H. ; *Zur Behandlung der stationären Teil- und Superkavitation an Tragflügelprofilen*, Institut f. Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 416, 1982.
22. Johnson, A.E. ; *Supercavitating Hydrofoils Operating at Zero Cavitation Number*, 2nd Symposium Naval Hydrodynamics, 1958.
23. Marzi, J. ; *Ein Berechnungsverfahren zur Behandlung von Profilströmungen mit lokalen Ablösezonen und offenen Totwassergebieten*, Institut f. Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 481, 1988.
24. Hess, J.L. & Smith, A.M.O. ; *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies*, Progress in Aeronautical Sciences Vol.8, Oxford & New York, 1966.
25. Ausman, J.S. ; *Pressure Limitation on the Upper Surface of a Hydrofoil*, Ph.D. Thesis in Mechanical Engineering at the University of California, Berkeley, 1954.
26. Parkin, B.R. & Perry, B. ; *Pressure Distribution on a Hydrofoil Running Near the Water Surface*, Calif. Inst. of Tech. Hydrodynamics Lab., Rept. No. 47-2, 1955.
27. Green, A.E. ; *Note on the Gliding of a Plate on the Surface of a Stream*, Proc. of Cambridge Phil. Soc., Vol. 32, 1936.
28. Schot, S.H. ; *Surface Tension and Free Surface Effects in Steady Two-Dimensional Cavity Flow about Slender Bodies*, DTMB Report No. 1566, Jan 1962.

A Berechnung verschiedener Integrale

A.1 Exakte Berechnung mit Hilfe der Residuenmethode

Hier behandeln wir die durch das Spiegelungsprinzip dargestellten Integrale mit Hilfe der Residuenmethode.

$$\text{A.1.1)} \quad J_\lambda(\vartheta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \quad \text{für } 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

Mit der Substitution $z = e^{i\theta}$ erfolgt die Integration über den Einheitskreis der komplexen z -Ebene.

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \vartheta - i2h/A &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} (z - e^\chi)(z - e^{-\chi}) \\ \cos \theta - \cos \vartheta + i2h/A &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} (z - e^{\bar{\chi}})(z - e^{-\bar{\chi}}) \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \cosh \chi &= \cos \vartheta + i2h/A \\ \cosh \bar{\chi} &= \cos \vartheta - i2h/A, \end{aligned} \quad (157)$$

wobei mit $\bar{\chi}$ die konjugierte komplexe Zahl von χ bezeichnet wird.. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} J_\lambda(\vartheta) &= \frac{1}{\cosh \chi - \cosh \bar{\chi}} \\ &= \left[\frac{1}{\pi i} \oint_{E.K.} \frac{z^\lambda dz}{(z - e^\chi)(z - e^{-\chi})} - \frac{1}{\pi i} \oint_{E.K.} \frac{z^\lambda dz}{(z - e^{\bar{\chi}})(z - e^{-\bar{\chi}})} \right] \end{aligned} \quad (158)$$

Eine konventionelle Rechnung nach der Residuenmethode liefert die folgende Lösung.

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{2h} \Im \left(\frac{-e^{-\lambda\chi}}{\sinh \chi} \right) \quad \text{für } \Re(\chi) > 0 \\ J_\lambda(\vartheta) &= 0 \quad \text{für } \Re(\chi) = 0 \\ &= \frac{A}{2h} \Im \left(\frac{e^{\lambda\chi}}{\sinh \chi} \right) \quad \text{für } \Re(\chi) < 0 \end{aligned} \quad (159)$$

Für die Bedingung (157) gilt die erste Lösung für den Fall $\Re(\chi) > 0$.

$$\text{A.1.2)} \quad J_{ct1}(\vartheta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \quad \text{für } 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$J_{ct1}(\vartheta) = \frac{1}{\cosh \chi - \cosh \bar{\chi}}.$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \bar{\chi}} \right] \quad (160)$$

Wir bezeichnen I_{ct1} wie folgt

$$I_{ct1}(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi}. \quad (161)$$

Etwas anders gestaltet sich die Berechnung der Integrale I_{ct1} . Wir machen die Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} &= x^4; & \frac{1 + \cosh \chi}{1 - \cosh \chi} &= t^4 \quad (t : \text{komplexe Zahl}); \\ \frac{-2 \sin \theta d\theta}{(1 - \cos \theta)^2} &= 4x^3 dx; & \frac{2(\cos \theta - \cosh \chi)}{(1 - \cosh \chi)(1 - \cos \theta)} &= x^4 - t^4; \\ \sqrt{\cot \theta/2} &= x; & x^4 + 1 &= \frac{2}{1 - \cos \theta} \end{aligned} \quad (162)$$

und vollziehen anschliessend die Integration über den ersten Quadranten der Komplex($z = x + iy$)-Ebene.

$$\begin{aligned} I_{ct1}(\chi) &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(x^4 + 1)(x^4 - t^4)} \\ &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 + i} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \oint_{I.Q.} \frac{z^4 dz}{(z^4 + 1)(z^4 - t^4)} \end{aligned} \quad (163)$$

Das Integral hat zwei einfache Polstellen bei $z = e^{i\pi/4}$ und $z = t_h$, deren Phasen in den ersten Quadrant fallen.

Nach einer elementaren Zwischenrechnung ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} I_{ct1}(\chi) &= \sqrt{2} + \frac{2i}{1 - i} t_h, \\ J_{ct1}(\vartheta) &= \frac{R^{1/4}}{2h/A} \left[-\sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \theta_p\right) \right] \end{aligned} \quad (164)$$

Dabei bedeutet θ_p wie folgt

$$t_h = R^{1/4} e^{i\theta_p} \quad \text{mit} \quad t^4 = R e^{i\Omega} \quad (0 \leq \theta_p \leq \pi/2) \quad (165)$$

$$\text{A.1.3) } J_{ct2}(\vartheta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2}$$

$$J_{ct2}(\vartheta) = \frac{1}{\cosh \chi - \cosh \bar{\chi}}.$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \bar{\chi}} \right] \quad (166)$$

Wir bezeichnen I_{ct2} wie folgt

$$I_{ct2}(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi}. \quad (167)$$

Mit der obigen Transformation (162) wird Gl.(167) umgeformt, und anschliessend die Integration über den ersten Quadranten der Komplex($z = x + iy$)-Ebene vollzogen.

$$\begin{aligned} I_{ct2}(\chi) &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \int_0^\infty \frac{(x^4 - 1) x^4 dx}{(x^4 + 1)^2 (x^4 - t^4)} \\ &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 + i} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \oint_{I.Q.} \frac{(z^4 - 1) z^4 dz}{(z^4 + 1)^2 (z^4 - t^4)} \end{aligned} \quad (168)$$

Der Integrand hat eine Polstelle bei $z = e^{i\pi/4}$, die zweiter Ordnung ist und eine bei $z = t_h$, deren Phase im den ersten Quadrant fällt. Für die Berechnung des Residuums der Polstelle bei $z = e^{i\pi/4}$ werden folgende Formeln benötigt:

$$\begin{aligned} (z - e^{i\pi/4})/(z^4 + 1) \Big|_{z=e^{i\pi/4}} &= \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4}; \\ ((z - e^{i\pi/4})/(z^4 + 1))^2 \Big|_{z=e^{i\pi/4}} &= \frac{i}{16}; \\ \frac{d}{dz} ((z - e^{i\pi/4})/(z^4 + 1))^2 \Big|_{z=e^{i\pi/4}} &= -\frac{3}{16} e^{i\pi/4} \end{aligned} \quad (169)$$

Nach einer elementaren Zwischenrechnung ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} I_{ct2}(\chi) &= -\sqrt{2} + (\sqrt{2} + \frac{2i}{1-i} \cdot t_h) \cosh \chi \\ J_{ct2}(\vartheta) &= \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{R^{1/4}}{2h/A} \left[\cos \vartheta \cdot \sin(\theta_p - \frac{\pi}{4}) + \frac{2h}{A} \cdot \cos(\theta_p - \frac{\pi}{4}) \right] \\ \text{mit } \chi &= x + ih/2A \quad ; \quad t_h = R^{1/4} e^{i\theta_p} \end{aligned} \quad (170)$$

$$\text{A.1.4) } J_{ct3}(\vartheta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \quad \text{für } 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} J_{ct3}(\vartheta) &= \frac{1}{\cosh \chi - \cosh \bar{\chi}} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \bar{\chi}} \right] \end{aligned} \quad (171)$$

Wir bezeichnen I_{ct3} wie folgt

$$I_{ct3}(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi}. \quad (172)$$

Mit der obigen Transformation (162) wird Gl.(172) umgeformt, und anschliessend die Integration über den ersten Quadranten der Komplex($z = x + iy$)-Ebene vollzogen.

$$\begin{aligned} I_{ct3}(\chi) &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(x^4 + 1)(x^4 - t^4)} \\ &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 + i} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \oint_{I.Q.} \frac{z^6 dz}{(z^4 + 1)(z^4 - t^4)} \end{aligned} \quad (173)$$

Das Integral hat zwei einfache Polstellen bei $z = e^{i\pi/4}$ und $z = t_h$, deren Phasen in den ersten Quadrant fallen.

Nach einer elementaren Zwischenrechnung ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} I_{ct3}(\chi) &= \sqrt{2} + \frac{2i}{1+i} t_h^3, \\ J_{ct3}(\vartheta) &= \frac{R^{3/4}}{2h/A} \left[-\sqrt{2} \sin\left(-\frac{3}{4}\pi + 3\theta_p\right) \right] \end{aligned} \quad (174)$$

Dabei bedeutet θ_p wie folgt

$$t_h = R^{1/4} e^{i\theta_p} \quad \text{mit} \quad t^4 = R e^{i\Omega} \quad (0 \leq \theta_p \leq \pi/2) \quad (175)$$

$$\text{A.1.5) } J_{ct4}(\vartheta) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2}$$

$$J_{ct4}(\vartheta) = \frac{1}{\cosh \chi - \cosh \bar{\chi}}.$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \bar{\chi}} \right] \quad (176)$$

Wir bezeichnen I_{ct4} wie folgt

$$I_{ct4}(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cosh \chi}. \quad (177)$$

Mit der obigen Transformation (162) wird Gl.(177) umgeformt, und anschliessend die Integration über den ersten Quadranten der Komplex($z = x + iy$)-Ebene vollzogen.

$$\begin{aligned} I_{ct4}(\chi) &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \int_0^\infty \frac{(x^4 - 1) x^6 dx}{(x^4 + 1)^2 (x^4 - t^4)} \\ &= \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 + i} \frac{1}{1 - \cosh \chi} \oint_{I.Q.} \frac{(z^4 - 1) z^6 dz}{(z^4 + 1)^2 (z^4 - t^4)} \end{aligned} \quad (178)$$

Der Integrand hat eine Polstelle bei $z = e^{i\pi/4}$, die zweiter Ordnung ist und eine bei $z = t_h$, deren Phase im den ersten Quadrant fällt. Für die Berechnung des Residuums der Polstelle bei $z = e^{i\pi/4}$ werden die Formeln (169) wie bei A.1.3) benötigt.

Nach einer elementaren Zwischenrechnung ergeben sich die Lösungen

$$I_{ctA}(\chi) = \frac{3}{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} + \frac{2i}{1+i} \cdot t_h^3) \cosh \chi$$

$$J_{ctA}(\vartheta) = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{R^{3/4}}{2h/A} \left[\cos \vartheta \cdot \sin(3\theta_p - \frac{3\pi}{4}) + \frac{2h}{A} \cdot \cos(3\theta_p - \frac{3\pi}{4}) \right]$$

$$\text{mit } \chi = x + ih/2A \quad ; \quad t_h = R^{1/4} e^{i\theta_p} \quad (179)$$

A.2 Numerische Berechnung der von Schwerkraft abhängigen Anteile

$$K_\lambda^R(\vartheta) \equiv \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda \theta \Re[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))} \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\}] d\theta \quad (180)$$

$$K_\lambda^I(\vartheta) \equiv \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda \theta \Im[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))} \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\}] d\theta \quad \text{mit } \lambda \geq 0 \quad (181)$$

K_λ^R und K_λ^I sind die gerade Funktionen, die als Cosinusreihe darzustellen sind:

$$K_\lambda^R = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \cos \mu \vartheta \quad \text{mit } (0 \leq \vartheta \leq \pi); \quad (182)$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_\lambda^R(\theta) d\theta;$$

$$A_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi K_\lambda^R(\theta) \cos \mu \theta d\theta. \quad (183)$$

Durch Einsetzen von (A.19) in Gl.(A.18) ergibt sich:

$$K_\lambda^R(\vartheta) = \sum_{\mu=0}^N \delta_\mu \beta_{\lambda\mu}^R \cos \mu \vartheta \quad (184)$$

Dabei sind $\beta_{\lambda\mu}^R$ und δ_μ :

$$\beta_{\lambda\mu}^R = \frac{4\nu_0 A}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \cos \lambda\tau \cos \mu\theta \cdot \Re[e^{-\nu_0(2h-iA(\cos \tau - \cos \theta))}] \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \tau - \cos \theta))) - i\pi\} d\tau d\theta; \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \delta_\mu &= 1/2 & (\mu = 0), \\ \delta_\mu &= 1 & (\mu \geq 1) \end{aligned} \quad (186)$$

Die zusätzliche Bezeichnungen werden für eine Viertelwurzel-Singularität sowie für eine Dreiviertelwurzel-Singularität eingeführt :

$$K_{-1}^R(\vartheta) \equiv \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2} \sin \theta \cdot \Re[e^{-\nu_0(2h-iA(\cos \theta - \cos \vartheta))}] \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\} d\theta \quad (187)$$

$$K_{-2}^R(\vartheta) \equiv \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \theta/2}^3 \sin \theta \cdot \Re[e^{-\nu_0(2h-iA(\cos \theta - \cos \vartheta))}] \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\} d\theta \quad (188)$$

Die oben besprochene Darstellung gilt auch für K_λ^I .

B Berechnung der abgekürzten Terme

B.1 $RHS(x)$, $LHS(x)$ bei $C_A = -A$

In diesem Anhang B.1 werden die in (n)-te Näherung auftretenden Terme bei an der Vorderkante beginnender Belüftung, also $RHS(x)$ und $LHS(x)$ in Gl.(74), (75) berechnet. Jedes Teil wird durch die trigonometrischen Variablen auf der ursprünglichen Koordinate und die in Anhang A bereits berechneten Integralformeln (82), (83) dargestellt. Bei der hierbei auftretenden Integrale ergeben sich zwei Integralintervalle, also ein Profilvereich $[-A, A]$ und ein Belüftungsbereich $[-A, C_E]$. Hierzu sei bemerkt, daß sich die Wirbelbelegung und die der Cotangentterme zugehörige, zusätzliche Quellenbelegung auf dem Profilvereich anordnen, hingegen sich die Sinusreihe in der Quellenbelegung auf dem Belüftungsbereich beschränkt.

Für RHS werden die nachfolgenden trigonometrischen Variablen eingeführt :

$$\begin{aligned} \xi(-A \leq \xi \leq A) &= -A \cos \theta & \text{mit} & \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \xi(A \leq \xi \leq C_E) &= A \cosh \phi & \text{mit} & \quad 0 \leq \phi \leq \phi_E \\ \xi(-A \leq \xi \leq C_E) &= \frac{C_E - A}{2} - \frac{C_E + A}{2} \cos \theta' & \text{mit} & \quad 0 \leq \theta' \leq \pi \end{aligned} \quad (189)$$

Für LHS werden ebenfalls die trigonometrischen Variablen eingeführt :

$$\begin{aligned} x(-A \leq x \leq A) &= -A \cos \vartheta & \text{mit} & \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ x(-A \leq x \leq C_E) &= \frac{C_E - A}{2} - \frac{C_E + A}{2} \cos \vartheta' & \text{mit} & \quad 0 \leq \vartheta' \leq \pi \end{aligned} \quad (190)$$

Wenn das Integralintervall der ganzen Belüftungszone entspricht, wird sie mit dem Symbol(') bezeichnet. Das gilt für die auf der ganzen Belüftung auftretende Integralform, und die ähnliche Integralform wird auch bezeichnet :

$$\begin{aligned} J'_\lambda(\vartheta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + (4h/(C_E + A))^2} \\ J_\lambda(\phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} + \cosh \phi)^2 + (2h/A)^2} \end{aligned} \quad (191)$$

Analog zu $J'_\lambda(\vartheta)$ und $J_\lambda(\phi)$ führen wir $K'_\lambda(\vartheta)$ und $K_\lambda(\phi)$ ein.

B.1.1 $RHS(x)$ bei $C_A = -A$

a) $R1(\xi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \end{aligned} \quad (192)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^\gamma \sqrt{\cot \bar{\theta}/2}^3 + C_0^\gamma \sqrt{\cot \bar{\theta}/2} + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \bar{\theta} \right\} \frac{2h/A \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} + \xi/A)^2 + 4h^2/A^2} \\
&- \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^\gamma \sqrt{\cot \bar{\theta}/2}^3 + C_0^\gamma \sqrt{\cot \bar{\theta}/2} + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \bar{\theta} \right\} \sin \bar{\theta} \cdot \\
&\quad \cdot \Re[e^{-\nu_0(2h-iA(\cos \bar{\theta}+\xi/A))} \{Ei(\nu_0(2h-iA(\cos \bar{\theta}+\xi/A))) - i\pi\}] d\bar{\theta}
\end{aligned}$$

i) $\xi/A = -\cos \theta$ für $-A \leq \xi \leq A$

$$\begin{aligned}
&= C_{-1}^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} \cdot J_{ct3}(\theta) - K_{-2}^R(\theta) \right\} + C_0^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} \cdot J_{ct1}(\theta) - K_{-1}^R(\theta) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} (J_{\lambda-1}(\theta) - J_{\lambda+1}(\theta)) - (K_{\lambda-1}^R(\theta) - K_{\lambda+1}^R(\theta)) \right\} \quad (193)
\end{aligned}$$

ii) $\xi/A = \cosh \phi$ für $A \leq \xi \leq C_E$

$$\begin{aligned}
&= C_{-1}^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} \cdot J_{ct3}(\phi) - K_{-2}^R(\phi) \right\} + C_0^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} \cdot J_{ct1}(\phi) - K_{-1}^R(\phi) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} (J_{\lambda-1}(\phi) - J_{\lambda+1}(\phi)) - (K_{\lambda-1}^R(\phi) - K_{\lambda+1}^R(\phi)) \right\} \quad (194)
\end{aligned}$$

b) $R2(\xi)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_n^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi - \Xi) d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \\
&- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_n^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \quad (195)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^{q_n} \sqrt{\cot \bar{\theta}/2}^3 + C_0^{q_n} \sqrt{\cot \bar{\theta}/2} \right\} \frac{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta) \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta)^2 + 4h^2/A^2} \\
&- \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^{q_n} \sqrt{\cot \bar{\theta}/2}^3 + C_0^{q_n} \sqrt{\cot \bar{\theta}/2} \right\} \sin \bar{\theta} \Re[e^{-\nu_0(2h-iA(\cos \bar{\theta}-\theta))} \cdot \\
&\quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h-iA(\cos \bar{\theta}-\cos \theta))) - i\pi\}] d\bar{\theta}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \bar{\theta} \frac{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta') \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta')^2 + (4h/(C_E + A))^2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\nu_0 A C_E + A}{\pi} \frac{1}{2A} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q\eta} \sin \lambda \bar{\theta} \sin \bar{\theta} \Re[e^{-\nu_0(2h-i\frac{C_E+A}{2}(\cos \bar{\theta}-\theta'))}] \\
& \quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h-i\frac{C_E+A}{2}(\cos \bar{\theta}-\cos \theta')))-i\pi\} d\bar{\theta} \\
& = C_{-1}^{q\eta} \left\{ \begin{array}{ll} J_{ct4}(\theta) - \cos \theta \cdot J_{ct3}(\theta) - K_{-2}(\theta) & \text{i)} \\ J_{ct4}(\theta) + \cosh \phi \cdot J_{ct3}(\phi) - K_{-2}(\phi) & \text{ii)} \end{array} \right. \\
& + C_0^{q\eta} \left\{ \begin{array}{ll} J_{ct2}(\theta) - \cos \theta \cdot J_{ct1}(\theta) - K_{-1}(\theta) & \text{i)} \\ J_{ct2}(\theta) + \cosh \phi \cdot J_{ct1}(\phi) - K_{-1}(\phi) & \text{ii)} \end{array} \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q\eta} \left\{ \frac{1}{2} (J'_{\lambda-2}(\theta') - J'_{\lambda+2}(\theta') - \cos \theta' (J'_{\lambda-1}(\theta') - J'_{\lambda+1}(\theta'))) \right. \\
& \quad \left. - \frac{C_E + A}{2A} (K''_{\lambda-1}(\theta') - K''_{\lambda+1}(\theta')) \right\} \tag{196}
\end{aligned}$$

Wird Jedes Teil im Integranden addiert, dann wird dies durch Fourieranalyse approximiert.

$$R1(\theta) + R2(\theta) = \sum_{\lambda=0}^N C_\lambda^{RHS} \sin \theta \tag{197}$$

Mit der Glauert-Integralformel ergibt sich für $RHS(\vartheta)$

$$RHS(\vartheta) = C_0^{RHS} \cdot \cot \vartheta / 2 - \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{RHS} \sin \lambda \vartheta \tag{198}$$

B.1.2 LHS(x) bei $C_A = -A$

Auf den Profilbereich beschränkt sich die Variable x .

a) $L1(x)$

$$= 2\delta_0 - 2 \frac{dy_{\delta s}}{dx} \tag{199}$$

b) $L2(x)$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{200}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^\gamma \sqrt{\cot \theta/2}^3 + C_0^\gamma \sqrt{\cot \theta/2} + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \theta \right\} \frac{(\cos \theta - \cos \vartheta) \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta)^2 + 4h^2/A^2} \\
& - \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^\gamma \sqrt{\cot \theta/2}^3 + C_0^\gamma \sqrt{\cot \theta/2} + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \theta \right\} \sin \theta \cdot \\
& \quad \cdot \Im[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))} \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta))) - i\pi\}] d\theta \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \left[\frac{1}{2} (J_{\lambda-2}(\vartheta) - J_{\lambda+2}(\vartheta)) - \cos \vartheta (J_{\lambda-1}(\vartheta) - J_{\lambda+1}(\vartheta)) \right. \\
& \quad \left. - (K_{\lambda-1}^I(\vartheta) - K_{\lambda+1}^I(\vartheta)) \right] + C_{-1}^\gamma \{ (J_{ct4}(\vartheta) - \cos \vartheta \cdot J_{ct3}(\vartheta)) - K_{-2}^I(\vartheta) \} \\
& \quad + C_0^\gamma \{ (J_{ct2}(\vartheta) - \cos \vartheta \cdot J_{ct1}(\vartheta)) - K_{-1}^I(\vartheta) \} \tag{201}
\end{aligned}$$

c) $L3(x)$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x - \xi)^2 + 4h^2} \\
& - \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^{C_E} \frac{q_\eta^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x - \xi)) - i\pi\}] d\xi \tag{202} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^{q\eta} \sqrt{\cot \theta/2}^3 + C_0^{q\eta} \sqrt{\cot \theta/2} \right\} \frac{2h/A \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta')^2 + 4h^2/A^2} \\
& - \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_{-1}^{q\eta} \sqrt{\cot \theta/2}^3 + C_0^{q\eta} \sqrt{\cot \theta/2} \right\} \sin \theta \Re[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta'))}] \cdot \\
& \quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta - \cos \vartheta')) - i\pi)\} d\theta \\
& + \frac{4h}{C_E + A} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q\eta} \sin \lambda \theta \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta')^2 + (4h/(C_E + A))^2} \\
& - \frac{2\nu_0 A C_E + A}{\pi} \frac{1}{2A} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q\eta} \sin \lambda \theta \sin \theta \Re[e^{-\nu_0(2h - i\frac{C_E + A}{2}(\cos \theta - \cos \vartheta'))}] \cdot \\
& \quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h - i\frac{C_E + A}{2}(\cos \theta - \cos \vartheta')) - i\pi)\} d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{q_n} \left\{ \frac{4h}{C_E + A} (J'_{\lambda-1}(\vartheta') - J'_{\lambda+1}(\vartheta')) - \frac{C_E + A}{2A} (K'_{\lambda-1}{}^R(\vartheta') - K'_{\lambda+1}{}^R(\vartheta')) \right\} \\
&+ C_{-1}^{q_n} \left\{ \frac{2h}{A} \cdot J_{ct3}(\vartheta) - K_{-2}^R(\vartheta) \right\} + C_0^{q_n} \left\{ \frac{2h}{A} \cdot J_{ct1}(\vartheta) - K_{-1}^R(\vartheta) \right\} \quad (203)
\end{aligned}$$

Aus der Summe ergibt sich $LHS(\vartheta)$

$$LHS(\vartheta) = -L1(\vartheta) + L2(\vartheta) - L3(\vartheta) + RHS(\vartheta) \quad (204)$$

B.2 $RHSa(x)$, $LHSa(x)$ bei $C_A > A$

Auf die abgekürzten Terme $RHSa(x)$ und $LHSa(x)$ in Gl.(110), (111) werden in diesen Anhang B.2 eingegangen. Jedes Teil wird durch den trigonometrischen Variablen auf der ursprünglichen Koordinate und die in Anhang A bereits berechneten Integralformeln (82), (83) dargestellt. Bei der hierbei auftretenden Integrale ergeben sich zwei Integralintervalle, also ein Profilbereich $[-A, A]$ und ein Belüftungsbereich $[C_A, C_E]$.

Für $RHSa$ werden die nachfolgenden trigonometrischen Variablen eingeführt :

$$\begin{aligned}
\xi(-A \leq \xi \leq A) &= -A \cos \theta & \text{mit} & \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\
\xi(-A \leq \xi \leq C_A) &= \frac{C_E + C_A}{2} - \frac{C_E - C_A}{2} \cosh \phi' & \text{mit} & \quad \phi'_A \geq \phi' \geq 0 \\
\xi(C_A \leq \xi \leq A) &= \frac{C_E + C_A}{2} - \frac{C_E - C_A}{2} \cos \theta' & \text{mit} & \quad 0 \leq \theta' \leq \theta'_A \quad (205)
\end{aligned}$$

Für $LHSa$ werden ebenfalls die trigonometrischen Variablen eingeführt :

$$\begin{aligned}
x(C_A \leq x \leq A) &= -A \cos \vartheta & \text{mit} & \quad \vartheta_A \leq \theta \leq \pi \\
x(A \leq x \leq C_E) &= A \cosh \varphi & \text{mit} & \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_E \\
x(C_A \leq \xi \leq C_E) &= \frac{C_E + C_A}{2} - \frac{C_E - C_A}{2} \cos \vartheta' & \text{mit} & \quad 0 \leq \vartheta'_A \leq 0 \quad (206)
\end{aligned}$$

Für die in der ganzen Belüftungszone auftretende Integralform bezeichnen wir mit dem Symbol($'$), und die ähnliche Integralform wird auch wie folgt bezeichnet :

$$\begin{aligned}
J'_{\lambda}(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta)^2 + (4h/(C_E - C_A))^2} \\
J_{\lambda}(\phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cosh \phi)^2 + 4h^2/A^2} \quad (207)
\end{aligned}$$

Analog zu $J'_{\lambda}(\vartheta)$ und $J_{\lambda}(\phi)$ führen wir $K'_{\lambda}(\vartheta)$ und $K_{\lambda}(\phi)$ ein.

Für vereinfachendes Verdrängungseffekt gehen wir von Joukowski-Profil ohne Skelettlinie aus d.h. $dy_s/dx = 0$ und $q(\theta)/2U_0 = B_0(\cot \theta/2 - 2 \sin \theta)$.

B.2.1 $RHSa(x)$ bei $C_A > -A$

Hier beschränkt sich auf den Profildbereich die Variable (ξ) also $-A \leq \xi \leq A$.

a) $Ra1(\xi)$

$$= f_\delta(\xi) = 2\delta_0 - 2\frac{dy_s}{dx} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2}$$

$$- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \quad (208)$$

$$\Leftrightarrow 2\delta_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2B_0(\cot \bar{\theta}/2 - 2 \sin \bar{\theta}) \frac{2h/A \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta)^2 + 4h^2/A^2}$$

$$- \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \{2B_0(\cot \bar{\theta}/2 - 2 \sin \bar{\theta})\} \sin \bar{\theta} \Re[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \bar{\theta} - \cos \theta))} \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \bar{\theta} - \cos \theta))) - i\pi\}] d\bar{\theta}$$

$$= 2\delta_0 + 2B_0 \left\{ \left(\frac{2h}{A} \right) (J_1(\theta) + J_2(\theta)) - (K_1^R(\theta) + K_2^R(\theta)) \right\} \quad (209)$$

b) $Ra2(\xi)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{(\xi - \Xi) d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2}$$

$$- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\Xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \quad (210)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_0^\gamma \cdot \cot \bar{\theta}/2 + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \bar{\theta} \right\} \frac{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta) \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta)^2 + 4h^2/A^2}$$

$$- \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_0^\gamma \cdot \cot \bar{\theta}/2 + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda \bar{\theta} \right\} \sin \bar{\theta} \Im[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \bar{\theta} + \xi))} \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \bar{\theta} + \xi))) - i\pi\}] d\bar{\theta}$$

$$= C_0^\gamma \{ J_1(\theta) + \frac{1}{2}(J_0(\theta) + J_2(\theta)) - \cos \theta (J_0(\theta) + J_1(\theta)) - (K_0^I(\theta) + K_1^I(\theta)) \}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \left[\frac{1}{2}(J_{\lambda-2}(\theta) - J_{\lambda+2}(\theta)) \right]$$

$$-\cos \theta (J_{\lambda-1}(\theta) - J_{\lambda+1}(\theta)) - (K_{\lambda-1}^I(\theta) - K_{\lambda+1}^I(\theta)) \quad (211)$$

c) $Ra3(\xi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \frac{2h d\Xi}{(\xi - \Xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\Xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(\xi - \Xi)) - i\pi\}] d\Xi \end{aligned} \quad (212)$$

i) $\xi = \frac{C_E + C_A}{2} - \frac{C_E - C_A}{2} \cos \theta'$ für $C_A \leq \xi \leq A$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \bar{\theta} \frac{4h/(C_E - C_A) \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cos \theta')^2 + (4h/(C_E - C_A))^2} \\ &- \frac{2\nu_0 A C_E - C_A}{\pi} \frac{C_E - C_A}{2A} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \bar{\theta} \sin \bar{\theta} \Re[e^{-\nu_0(2h - i\frac{C_E - C_A}{2}(\cos \bar{\theta} - \cos \theta'))}] \\ &\quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h - i\frac{C_E - C_A}{2}(\cos \bar{\theta} - \cos \theta'))) - i\pi\} d\bar{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \left\{ \frac{4h}{C_E - C_A} (J'_{\lambda-1}(\theta') - J'_{\lambda+1}(\theta')) - \frac{C_E - C_A}{2A} (K'_{\lambda-1}{}^R(\theta') - K'_{\lambda+1}{}^R(\theta')) \right\} \end{aligned} \quad (213)$$

ii) $\xi = \frac{C_E + C_A}{2} - \frac{C_E - C_A}{2} \cosh \phi'$ für $-A \leq \xi \leq C_A$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \bar{\theta} \frac{4h/(C_E - C_A) \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}}{(\cos \bar{\theta} - \cosh \phi')^2 + (4h/(C_E - C_A))^2} \\ &- \frac{2\nu_0 A C_E - C_A}{\pi} \frac{C_E - C_A}{2A} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \bar{\theta} \sin \bar{\theta} \Re[e^{-\nu_0(2h - i\frac{C_E - C_A}{2}(\cos \bar{\theta} - \cosh \phi'))}] \\ &\quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h - i\frac{C_E - C_A}{2}(\cos \bar{\theta} - \cosh \phi'))) - i\pi\} d\bar{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \left\{ \frac{4h}{C_E - C_A} (J'_{\lambda-1}(\phi') - J'_{\lambda+1}(\phi')) \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_E - C_A}{2A} (K'_{\lambda-1}{}^R(\phi') - K'_{\lambda+1}{}^R(\phi')) \right\} \end{aligned} \quad (214)$$

Jedes Teil im Integranden wird addiert, und dies wird durch Fourier-Cosinusreihe approximiert.

$$Ra1(\theta) - Ra2(\theta) + Ra3(\theta) = \sum_{\lambda=0}^N C_{\lambda}^{RHsa} \cos n\theta \quad (215)$$

Aus der Glauert-Integralformel ergibt sich für Term, $RHSa(\vartheta)$

$$RHSa(\vartheta) = C_0^{RHsa} \cot \vartheta/2 - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{RHsa} \sin \lambda\vartheta \quad (216)$$

B.2.2 $LHSa(x)$ bei $C_A > -A$

Auf den Belüftungsbereich beschränkt sich die Variable (x), also $C_A \leq x \leq C_E$.

a) $Lal(x)$

$$\begin{aligned} &= \sigma_{At} - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (217) \\ &\Leftrightarrow \sigma_{At} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2B_0(\cot \theta/2 - 2 \sin \theta) \frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta + x/A} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2B_0(\cot \theta/2 - 2 \sin \theta) \frac{(\cos \theta + x/A) \sin \theta d\theta}{(\cos \theta + x/A)^2 + 4h/A^2} \\ &- \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^{\pi} \{2B_0(\cot \theta/2 - 2 \sin \theta)\} \sin \theta \Im[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta + x/A))} \\ &\cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta + x/A))) - i\pi\}] d\theta \end{aligned}$$

i) $x/A = -\cos \vartheta$ für $C_A \leq \xi \leq A$

$$\begin{aligned} &= \sigma_{At} - 2B_0(-e^{-\vartheta} + e^{-2\vartheta})/\sinh \vartheta \\ &+ B_0 \left\{ \sum_{\lambda=0}^3 J_{\lambda}(\vartheta) - 2 \cos \vartheta (J_1(\vartheta) + J_2(\vartheta)) \right\} - 2B_0 \{K_1^I(\vartheta) + K_2^I(\vartheta)\} \quad (218) \end{aligned}$$

ii) $x/A = \cosh \varphi$ für $A \leq \xi \leq C_E$

$$= \sigma_{At} - 2B_0(1 - 2 \cosh \varphi) + B_0 \left\{ \sum_{\lambda=0}^3 J_{\lambda}(\varphi) + 2 \cosh \varphi (J_1(\varphi) + J_2(\varphi)) \right\}$$

$$-2B_0\{K_1^I(\varphi) + K_2^I(\varphi)\} \quad (219)$$

b) $La2(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \frac{2h d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma^{(n)}(\xi)}{U_0} \Re[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (220) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_0^\gamma \cdot \cot \theta/2 + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda\theta \right\} \frac{2h/A \sin \theta d\theta}{(\cos \theta + x/A)^2 + 4h^2/A^2} \\ &- \frac{2\nu_0 A}{\pi} \int_0^\pi \left\{ C_0^\gamma \cdot \cot \theta/2 + \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \sin \lambda\theta \right\} \sin \theta \Im[e^{-\nu_0(2h - iA(\cos \theta + x/A))}] \\ &\quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h - iA(\cos \theta + x/A))) - i\pi\} d\theta \end{aligned}$$

i) $x/A = -\cos \vartheta$ für $C_A \leq \xi \leq A$

$$\begin{aligned} &= C_0^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} (J_0(\vartheta) + J_1(\vartheta)) - (K_0^R(\vartheta) + K_1^R(\vartheta)) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{2h}{A} (J_{\lambda-1}(\vartheta) - J_{\lambda+1}(\vartheta)) - (K_{\lambda-1}^R(\vartheta) - K_{\lambda+1}^R(\vartheta)) \right\} \quad (221) \end{aligned}$$

ii) $x/A = \cosh \varphi$ für $A \leq x \leq C_E$

$$\begin{aligned} &= C_0^\gamma \left\{ \frac{2h}{A} (J_0(\varphi) + J_1(\varphi)) - (K_0^R(\varphi) + K_1^R(\varphi)) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^\gamma \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{2h}{A} (J_{\lambda-1}(\varphi) - J_{\lambda+1}(\varphi)) - (K_{\lambda-1}^R(\varphi) - K_{\lambda+1}^R(\varphi)) \right\} \quad (222) \end{aligned}$$

c) $La3(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\xi)}{U_0} \frac{(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4h^2} \\ &- \frac{2\nu_0}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{q_n^{t(n)}(\xi)}{U_0} \Im[e^{-(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi))} \{Ei(2\nu_0 h - i\nu_0(x-\xi)) - i\pi\}] d\xi \quad (223) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \theta \frac{(\cos \theta - \cos \vartheta') \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \vartheta')^2 + (4h/(C_E - C_A))^2} \\
&- \frac{2\nu_0 A C_E - C_A}{\pi} \frac{C_E - C_A}{2A} \int_0^\pi \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \sin \lambda \theta \sin \theta \Re[e^{-\nu_0(2h - i \frac{C_E - C_A}{2}(\cos \theta - \cos \vartheta'))}] \\
&\quad \cdot \{Ei(\nu_0(2h - i \frac{C_E - C_A}{2}(\cos \theta - \cos \vartheta'))) - i\pi\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{q_n} \left[\frac{1}{2} (J'_{\lambda-2}(\vartheta') - J'_{\lambda+2}(\vartheta')) - \cos \vartheta' (J'_{\lambda-1}(\vartheta') \right. \\
&\quad \left. - J'_{\lambda+1}(\vartheta')) - \frac{C_E - C_A}{2A} (K''_{\lambda-1}(\vartheta') - K''_{\lambda+1}(\vartheta')) \right] \tag{224}
\end{aligned}$$

Aus der Summe ergibt sich $LHSa(\vartheta)$:

$$LHSa(\vartheta) = -La1(\vartheta) - La2(\vartheta) - La3(\vartheta) + RHSa(\vartheta) \tag{225}$$

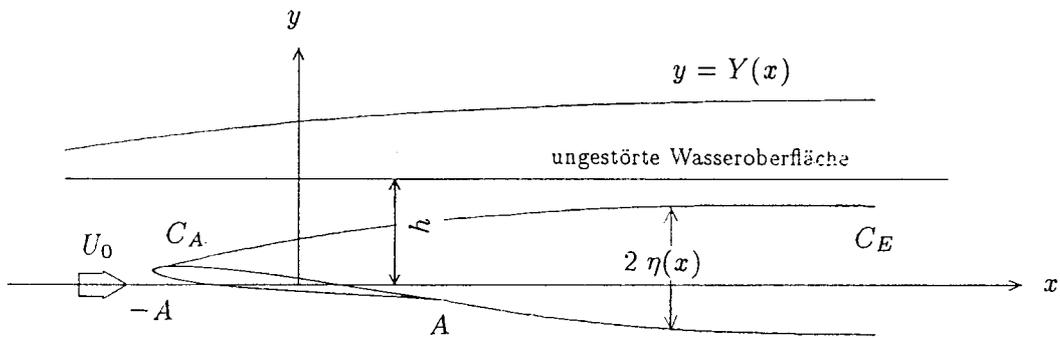


Abb.1 (a) Koordinatensystem für belüftetes Profil

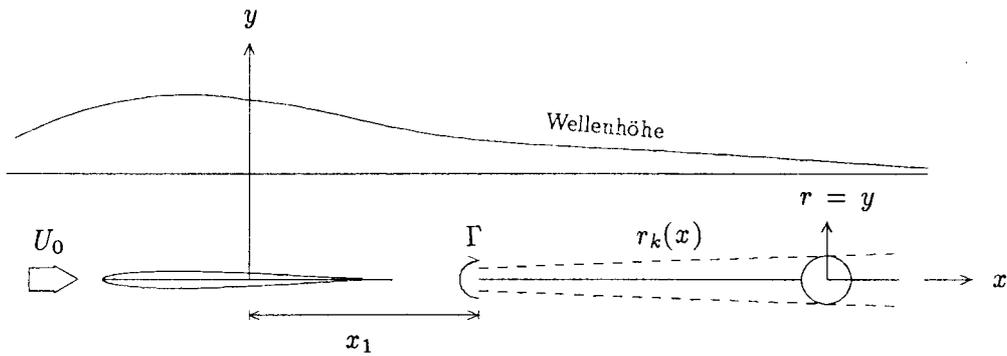


Abb.1 (b) Koordinatensystem für einen aufgerollten Spitzenwirbel hinter dem Profil

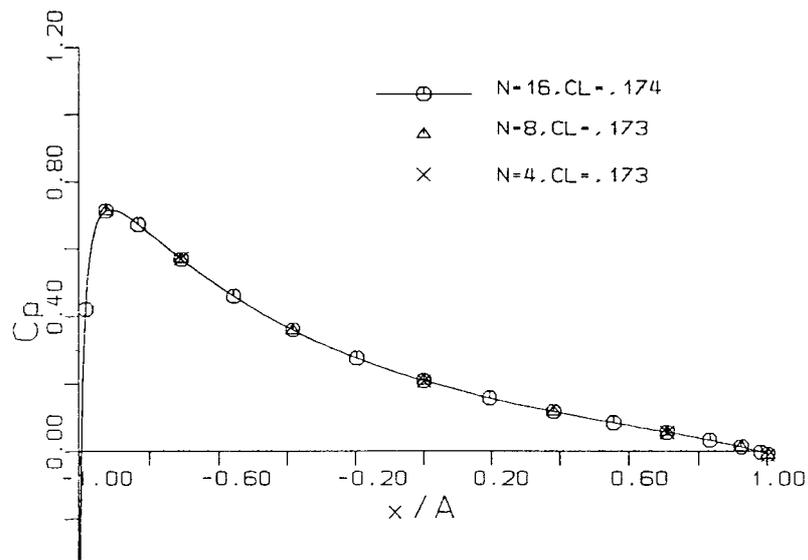


Abb.2 Konvergenztest am Joukowski-Profil mit 12 % Dicke, $\delta_0 = 5^\circ$
 ($h/A = 0,91, F_h = 1,41$)

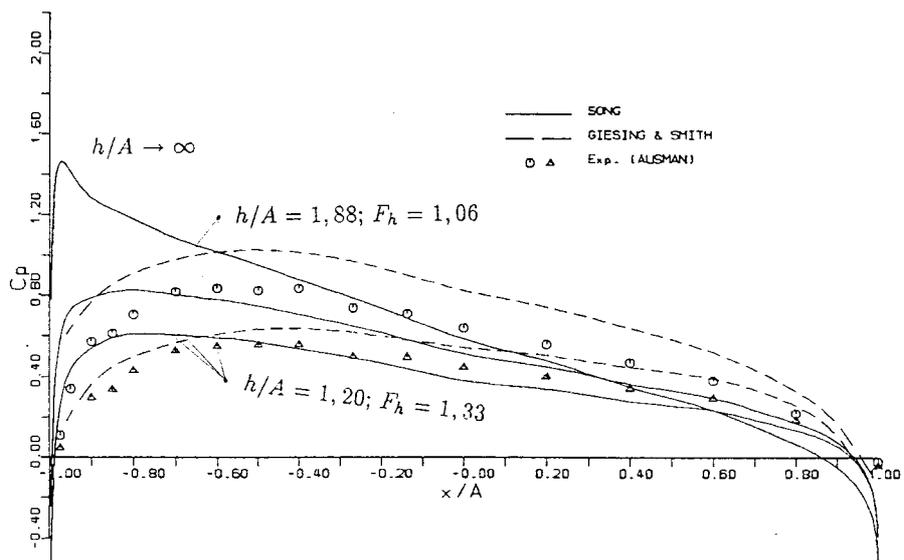


Abb.3 Druckverteilung an der Saugseite des Profils 4412, $\delta_0 = 5^\circ$
 ($h/A = 1,88, F_h = 1,06; h/A = 1,20, F_h = 1,33$)

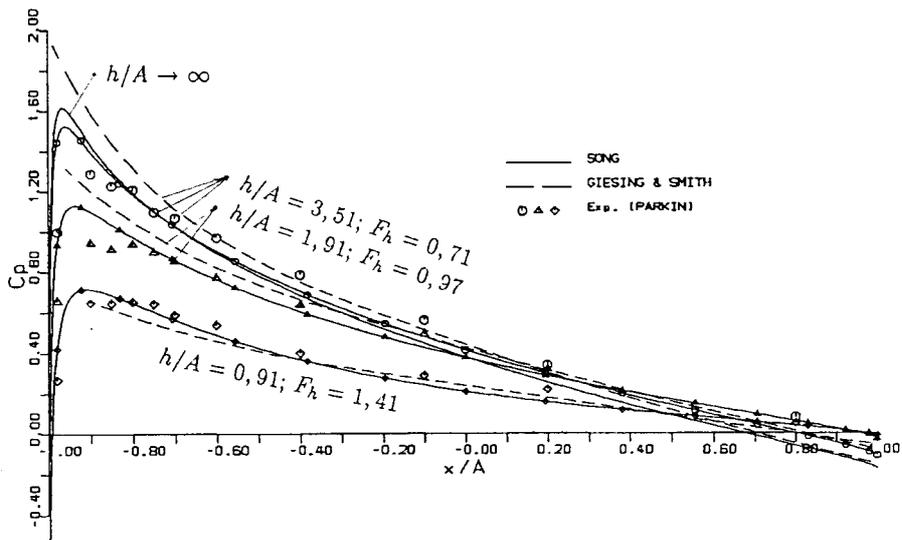


Abb.4 Druckverteilung am 12 % Joukowski-Profil, $\delta_0 = 5^\circ$
 ($h/A = 3,51, F_h = 0,71$; $h/A = 1,91, F_h = 0,97$; $h/A = 0,91, F_h = 1,41$)

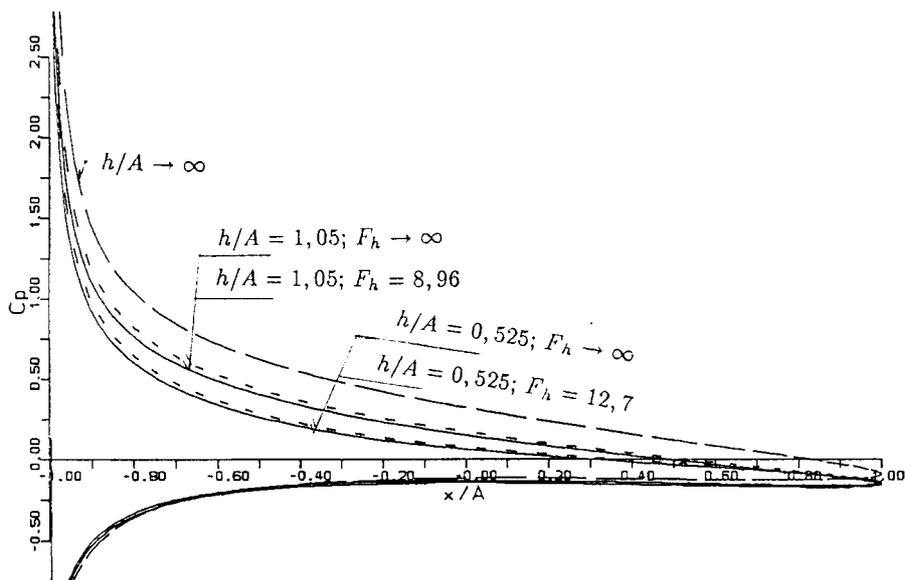


Abb.5 Druckverteilung am 6 % Joukowski-Profil, $\delta_0 = 6^\circ$
 ($h/A = 1,05, F_h = 8,96$; $h/A = 0,525, F_h = 12,7$)

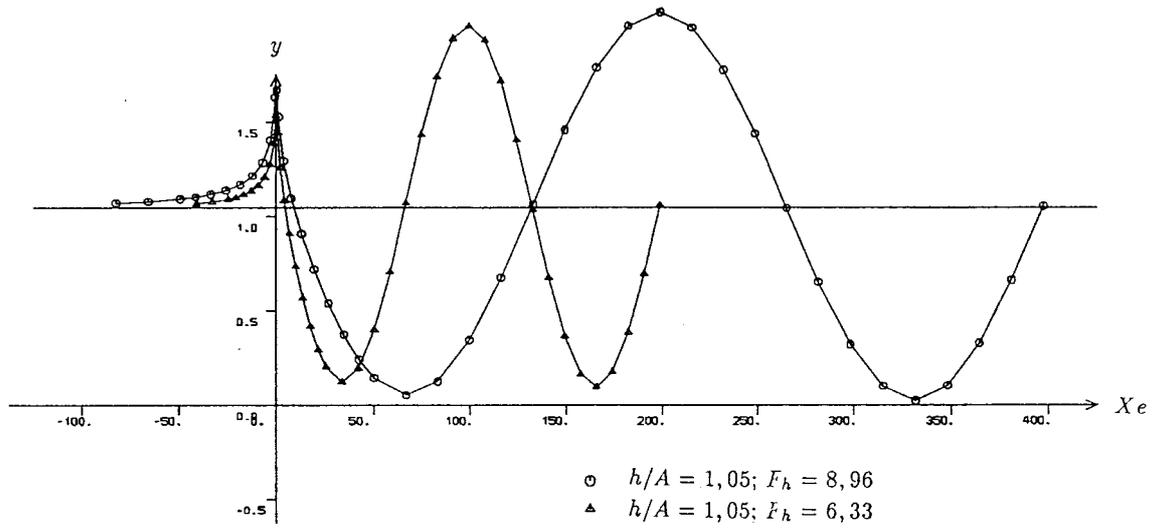


Abb.6 Das durch Profil erzeugte Wellensystem für $h/A = 1,05; \delta_0 = 6^\circ$
 ($F_h = 9,96; 6,3$)

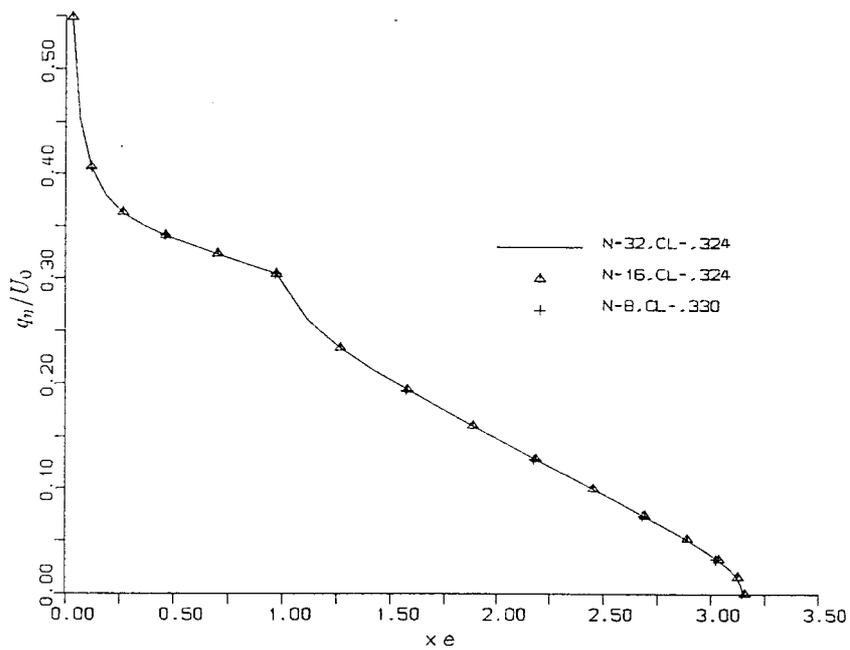
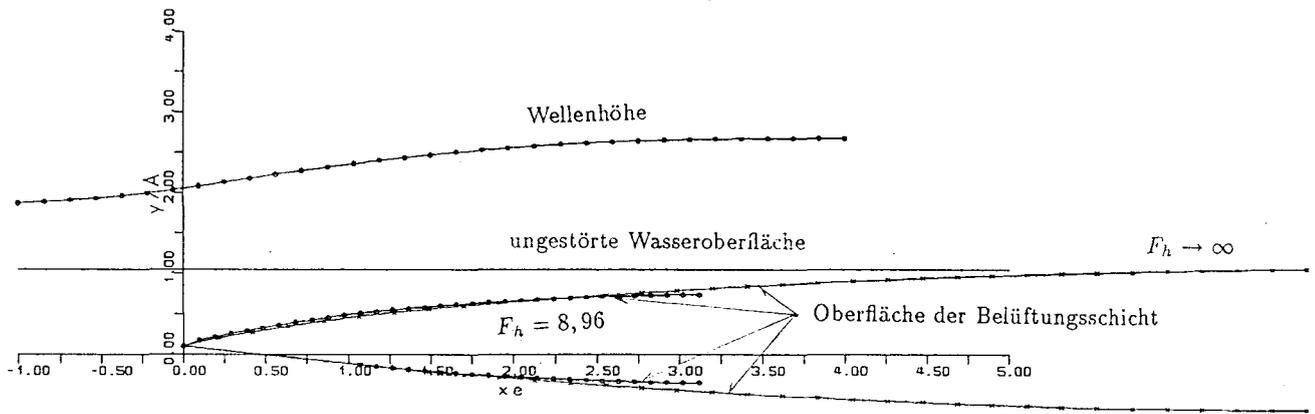
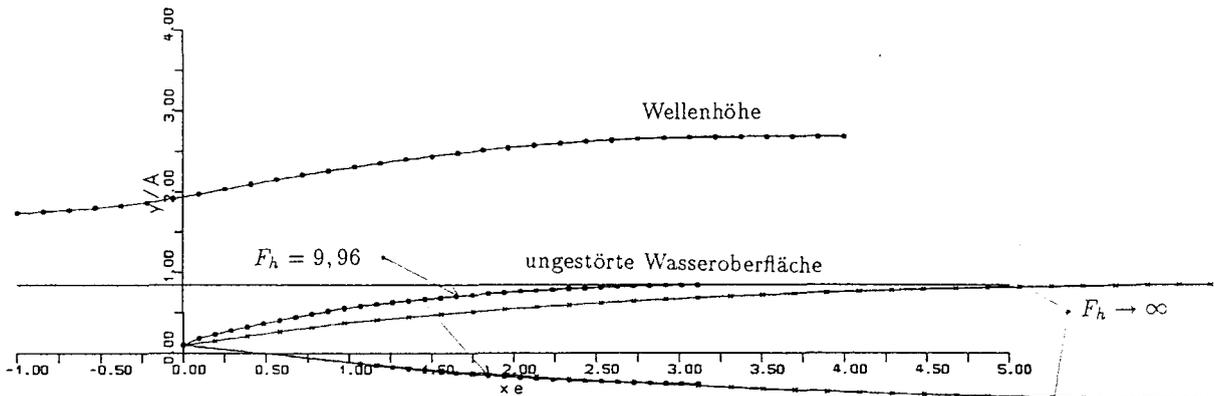


Abb.7 Konvergenztest für Belüftung an ebener Platte, $\delta_0 = 6^\circ$
 ($h/A = 0,75; F_h = 10,6$)



(a) bei $h/A = 1,05$; $F_h = 8,96$; $N = 32$



(b) bei $h/A = 0,85$; $F_h = 9,96$; $N = 32$

Abb.8 Belüftungsschicht und Wellenform für ebene Platten ($C_A = -A$) zum Vergleich mit denen bei $F_h \rightarrow \infty$

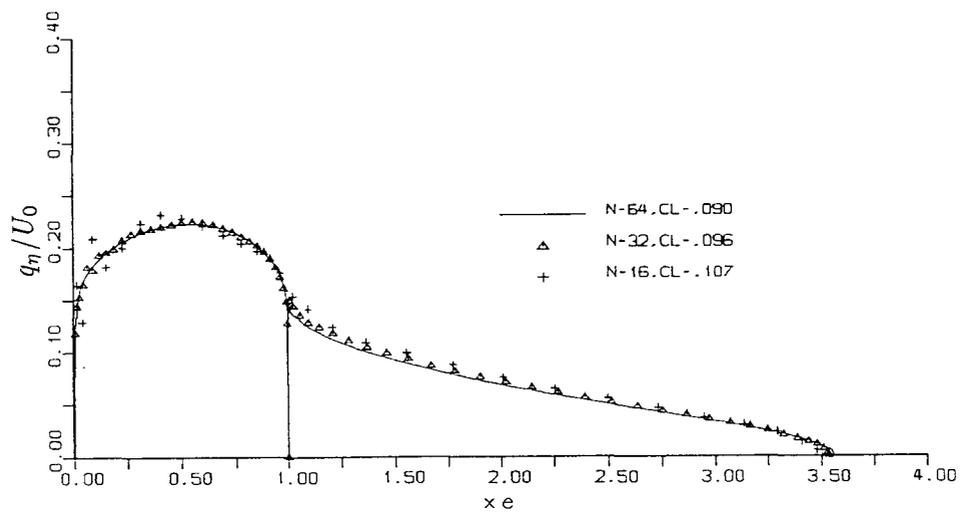
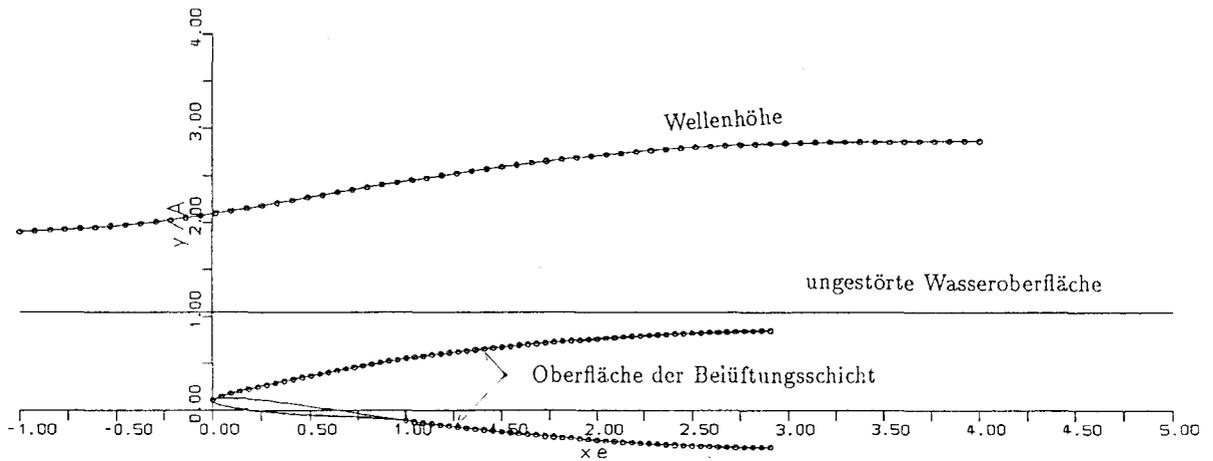


Abb.9 Konvergenztest für Belüftung am 6 % Joukowski-Profil $\delta_0 = 6^\circ$
 ($\sigma_{At} = 0,0593(o.W.F)$)



(a) bei $h/A = 1,05$; $F_h = 8,96$; $N = 64$

Abb.10 Belüftungsschicht und Wellenform für 6 % Joukowski-Profil ($C_A = -0,99A$)

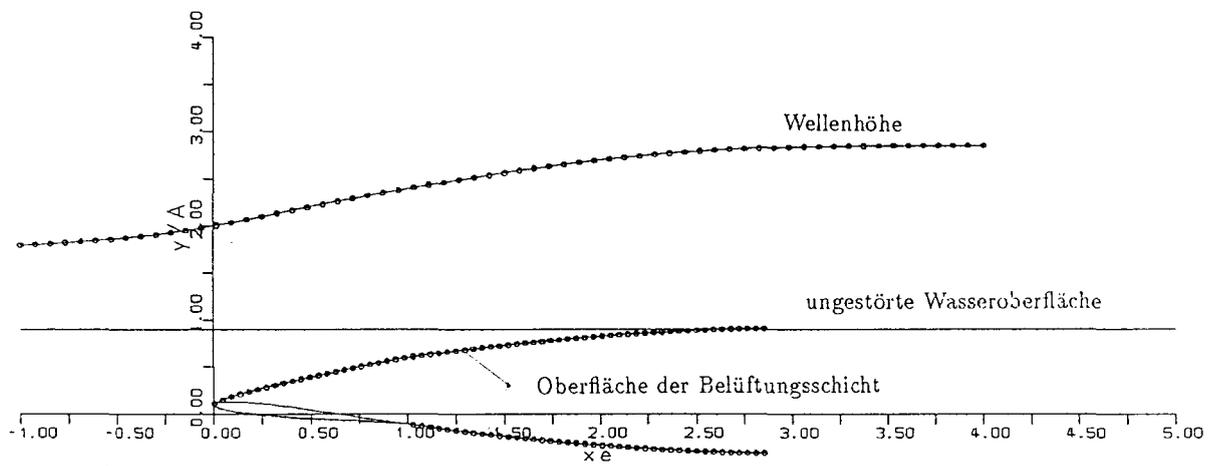
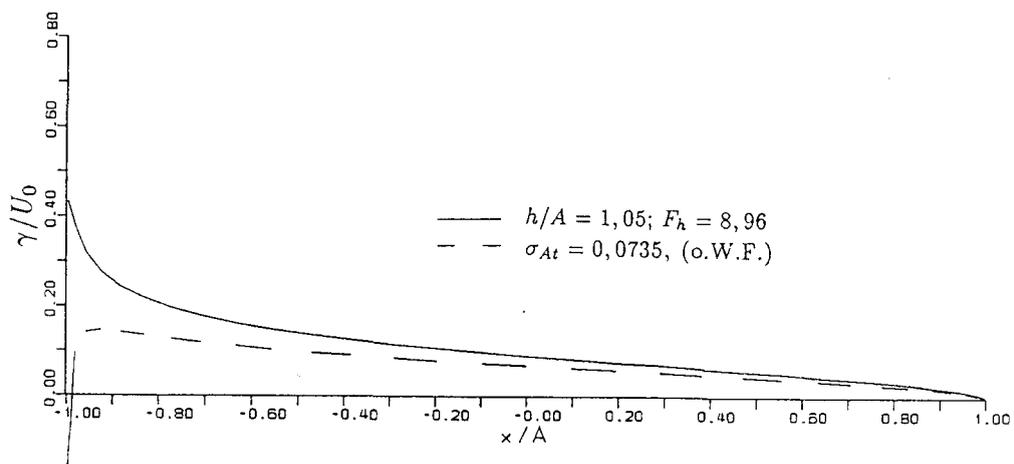


Abb.10 (b) bei $h/A = 0,9$; $F_h = 9,68$; $N = 64$



(a) bei ebenen Platten ($C_A = -A$)

Abb.11 Wirbelverteilung

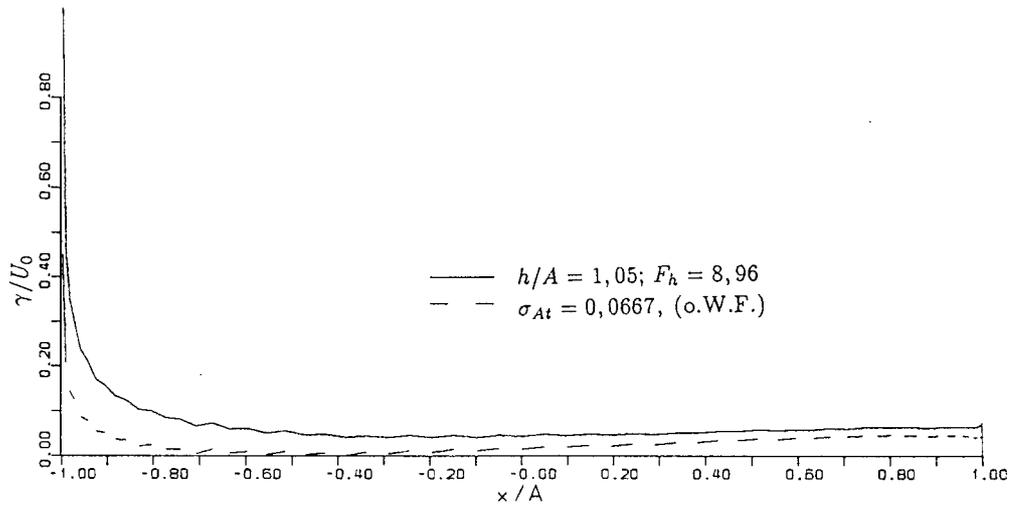


Abb.11 (b) am Joukowski-Profil ($C_A = -0,99A$)

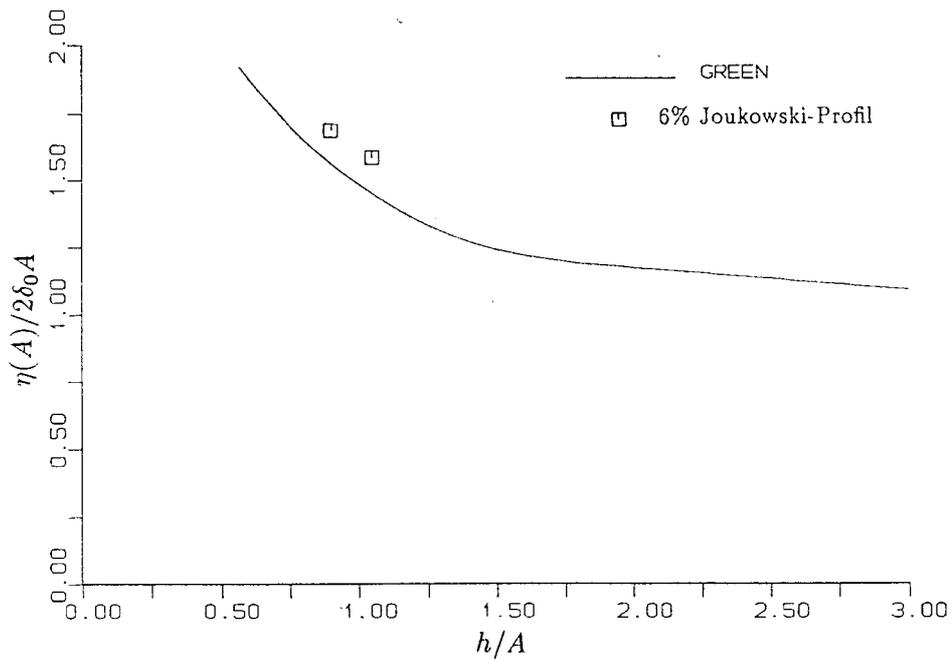


Abb.12 Verlauf der Belüftungshalbedicke an der Profilhinterkante, $\eta(A)/2\delta_0 A$

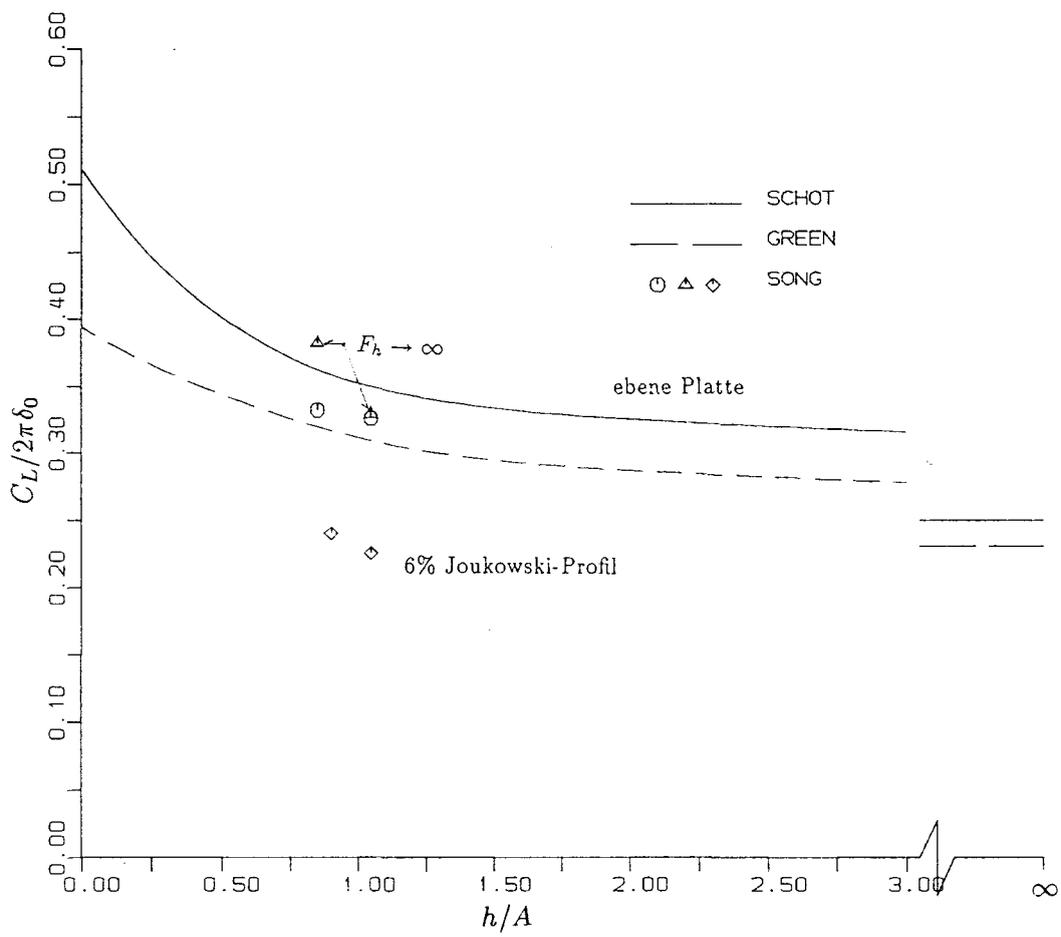


Abb.13 Verlauf des Auftriebsbeiwertes zum Vergleich mit anderen Ergebnissen

Lebenslauf

Name: In-Haeng S o n g
Geburtsdatum: geb. am 2 April, 1956
Geburtsort: in Daejon in Korea
Staatsangehörigkeit: koreanisch

Schulbildung:
1969 - 1975 Daejon *middle-high School* mit dem Abschluß
der Hochschulreife

Studium:
1976 - 1982 Studium an der Seoul National-Universität bis
zum Erreichen des Master Science

wissenschaftl. Tätigkeit:
1982 - 1988 wissenschaftl. Tätigkeit als Assistent am Insti-
tut für Schiffbau (in Korea)
Schwerpunkt der Tätigkeit:
Propeller-Tragflächentheorie
seit 1990 in der Promotion am Institut für Schiffbau der
Universität Hamburg

veröffentlichte Arbeit:
*Effective Wake and its Influence upon Propeller-induced Pressure
Fluctuations*, PRADS'87 (mit Chang-Sup Lee), 1987.