

80 | September 1961

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

G. Collatz

**Über ein spezielles  
Quadraturverfahren zur numerischen  
Behandlung Fredholmscher  
Integralgleichungen periodischer  
Funktionen**

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

**Über ein spezielles Quadraturverfahren zur numerischen Behandlung Fredholmscher Integralgleichungen periodischer Funktionen**

G. Collatz, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1961

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr. Ing. Dr. Ing. e. N. G. Weinblum

Über ein spezielles Quadraturverfahren  
zur numerischen Behandlung Fredholmscher  
Integralgleichungen periodischer Funktionen.

von Dipl.-Ing. Günter Collatz

September 1961

### 1. Problemstellung .

Vorgelegt sei eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art.

$$g(x) + \lambda \int_a^b g(\xi) K(x, \xi) d\xi + f(x) = 0 \quad (1)$$

Sind sowohl der Kern  $K(x, \xi)$  als auch die Funktion  $f(x)$  in dem Bereich  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \xi \leq b$  stetig, differenzierbar und beschränkt, so kann man das Integral in (1) näherungsweise durch eine Quadraturformel ersetzen,

$$\int_a^b g(\xi) K(x, \xi) d\xi \approx (b-a) \sum_{\nu=1}^m H_{\nu} g(\xi_{\nu}) K(x, \xi_{\nu}) \quad (2)$$

und damit die Integralgleichung in ein System von  $m$  linearen Gleichungen überführen.

$$g(x_{\mu}) + \lambda (b-a) \sum_{\nu=1}^m H_{\nu} g(\xi_{\nu}) K(x_{\mu}, \xi_{\nu}) + f(x_{\mu}) = 0 \quad (\mu=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

Gleichgültig, ob man dieses System durch Elimination oder iterativ auflöst, wird die Genauigkeit der Lösung davon abhängen, wie gross der Ersatzfehler der Quadraturformel (2) ist. Von Abrundungsfehlern sei dabei abgesehen.

Nun lässt sich immer erreichen, dass der Ersatzfehler der Quadraturformel hinreichend klein ist, wenn man eine genügend hohe Stützstellenzahl  $m$  wählt. Da aber der Rechenaufwand für die Auflösung von (3) mit wachsender

Stützstellenzahl sehr rasch ansteigt, wird man danach trachten, die bestmögliche Quadraturformel zu verwenden, um die Stützstellenzahl so gering wie möglich halten zu können.

Bei nichtperiodischen Funktionen ist im allgemeinen die Gaußsche Quadraturformel als die bestmögliche anzusprechen. Im folgenden sollen jedoch nur Integralgleichungen behandelt werden, bei denen sowohl der Kern  $K(x, \xi)$  als auch die Funktion  $f(x)$  die Periode  $p$  haben, und das Integrationsintervall mit der Periode übereinstimmt.

$$K(x, \xi) = K(x+p, \xi+p) \quad f(x) = f(x+p) \quad p = b-a$$

Da dann zwangsläufig auch die gesuchte Funktion  $g(x)$  die Periode  $p$  haben muss, wird man die wesentlich bequemere Rechteckformel anwenden, denn es ist eine bekannte Tatsache, dass die Rechteckformel bei periodischen Funktionen in den meisten Fällen allen anderen Quadraturformeln an Genauigkeit überlegen ist. ( Siehe: [5] Davis, On the Numerical Integration of Periodic Analytic Functions )

Oftmals erweist sich der Kern für die numerische Behandlung als ausgesprochen ungünstig, auch wenn er, wie oben vorausgesetzt wurde, stetig, differenzierbar und nicht singulär ist. Das ist dann der Fall, wenn er an einer oder mehreren Stellen stark gekrümmt verläuft. Hier wird man mit Hilfe der Rechteckformel eine für die Praxis ausreichende Genauigkeit nur mit einer verhältnismässig hohen Stützstellenzahl, also mit grossem Rechenaufwand erzielen können.

Liegt ein solcher ungünstiger Kern vor, ist dagegen die Funktion  $f(x)$  verhältnismässig gutartig, d.h. ist die grösste Krümmung von  $f(x)$  wesentlich kleiner als die von  $K(x, \xi)$ , so kann man annehmen, dass auch  $g(x)$  verhältnismässig gutartig sein wird, da eine Integration immer eine Glättung bewirkt.

Hier entsteht nun die Frage, ob es nicht möglich ist, eine Quadraturformel zu verwenden, die einerseits den glatten Verlauf der Funktion  $g(\xi)$  berücksichtigt, andererseits die Tatsache ausnutzt, dass ja der Kern nicht nur in den einzelnen Stützstellen bekannt ist, sondern sein Verlauf über das ganze Integrationsintervall durch einen analytischen Ausdruck gegeben ist.

Es wird im Verlauf dieser Arbeit gezeigt, dass für periodische Funktionen eine derartige Quadraturformel,

$$\int_0^p g(\xi) K(x, \xi) d\xi \approx \frac{p}{m} \sum_{\nu=1}^m A_{\nu}(x) g(\xi_{\nu}) \quad (\xi_{\nu} = \frac{p \cdot \nu}{m}) \quad (4)$$

bei der die Stützstellen wie bei der Rechteckregel äquidistant, und die Gewichte  $A_{\nu}$  speziell auf den Kern zugeschnitten sind, unter den obigen Voraussetzungen ein wesentlich genaueres Ergebnis liefern kann als die Rechteckformel. Zur Unterscheidung mit der einfachen Rechteckformel soll diese Formel im folgenden die spezielle Quadraturformel genannt werden.

Die Gewichte erhält man auf folgende Weise: Lässt sich der Kern gleichmässig in eine Fourierreihe entwickeln,

$$K(x, \xi) = \frac{\alpha_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \alpha_k(x) \cos \frac{2\pi k \xi}{p} + \beta_k(x) \sin \frac{2\pi k \xi}{p} \right] \quad (5)$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  noch Funktionen von  $x$  sind, so ist  $A_{\nu}(x)$  gleich der  $n$ -ten Teilsumme dieser Reihe für die Punkte  $x$  und  $\xi_{\nu} = \frac{p \nu}{m}$

$$A_{\nu}(x) = \frac{\alpha_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k(x) \cos \frac{2\pi k \nu}{m} + \beta_k(x) \sin \frac{2\pi k \nu}{m} \right] \quad (6)$$

Ist die Stützstellenzahl  $m$  gerade, so ist dabei  $n = \frac{m}{2}$  zu setzen, für eine ungerade Stützstellenzahl gilt  $n = \frac{m-1}{2}$ .

Praktisch bedeutet das, dass man unter bestimmten Bedingungen mit einer geringeren Stützstellenzahl auskommt, wenn man die Funktion  $g(\xi)$  nicht mit dem Kern, sondern mit der  $n$ -ten Teilsumme der Fourierentwicklung des Kernes multipliziert, und auf dieses Produkt die Rechteckformel anwendet.

## 2. Ableitung der speziellen Formel .

Zur Ableitung der Formel (4) denke man sich die Funktion  $g(\xi)$  durch ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $n$  ersetzt, welches in  $m$  Stützstellen mit der Funktion übereinstimmt.

$$g(\xi) \approx T_n(\xi) = \frac{\gamma_0^*}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \gamma_k^* \cos \frac{2\pi k \xi}{p} + \delta_k^* \sin \frac{2\pi k \xi}{p} \right] \quad (7)$$

Der Index  $*$  soll andeuten, dass die Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation, die man mittels der Besselschen Formeln erhält,

$$\begin{aligned} \gamma_k^* &= \frac{2}{m} \sum_{v=1}^m g\left(\frac{pv}{m}\right) \cos \frac{2\pi kv}{m} \\ \delta_k^* &= \frac{2}{m} \sum_{v=1}^m g\left(\frac{pv}{m}\right) \sin \frac{2\pi kv}{m} \end{aligned} \quad (8)$$

von den exakten Fourierkoeffizienten der Funktion  $g(\xi)$  abweichen.

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{2}{p} \int_0^p g(\xi) \cos \frac{2\pi k \xi}{p} d\xi \\ \delta_k &= \frac{2}{p} \int_0^p g(\xi) \sin \frac{2\pi k \xi}{p} d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

Die Abweichung wird jedoch nicht erheblich sein, da vorausgesetzt wurde, dass  $g(\xi)$  eine verhältnismässig gutartige Funktion ist.

Da ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $n$  von  $2n+1$  Konstanten  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  abhängt, benötigt man zur Bestimmung dieser Konstanten  $2n+1$  Funktionswerte. Die Gleichung (7) gilt also im Grunde genommen nur für eine ungerade Stützstellenzahl  $m$ , wobei  $n = \frac{m-1}{2}$  zu setzen ist.

Bei einer geraden Stützstellenzahl lässt sich die Funktion  $g(\xi)$  nur durch ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_n(\xi) = \frac{\gamma_0^*}{2} + \sum_{k=1}^n \gamma_k^* \cos \frac{2\pi k \xi}{p} + \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k^* \sin \frac{2\pi k \xi}{p}$$

annähern. Hierbei gilt  $n = \frac{m}{2}$ . Da aber

$$\sin \frac{2\pi n v}{m} = \sin \pi v = 0$$

für  $n = \frac{m}{2}$  ist, sich also aus Gl.(8)

$$\delta_n^* = 0$$

ergibt, macht man keinen Fehler, wenn man für eine gerade Stützstellenzahl das trigonometrische Polynom ebenfalls in Form der Gl.(7) schreibt.

Die Formel (4) beruht nun darauf, dass man das Integral

$$I = \int_0^p g(\xi) K(x, \xi) d\xi$$

durch das Integral

$$I \approx \int_0^p T_n(\xi) K(x, \xi) d\xi$$

ersetzt. Da die trigonometrischen Funktionen ein Orthogonalsystem bilden, d.h. da

$$\int_0^p \cos \frac{2\pi k \xi}{p} \sin \frac{2\pi l \xi}{p} d\xi = 0$$

und

$$\left. \begin{aligned} \int_0^p \cos \frac{2\pi k \xi}{p} \cos \frac{2\pi l \xi}{p} d\xi \\ \int_0^p \sin \frac{2\pi k \xi}{p} \sin \frac{2\pi l \xi}{p} d\xi \end{aligned} \right\} = \begin{cases} p & \text{für } k=l=0 \\ p/2 & \text{für } k=l \neq 0 \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

ist, erhält man aus den Reihenentwicklungen (7) für  $T_n(\xi)$  und (5) für  $K(x, \xi)$ :

$$I \approx \frac{p}{2} \left\{ \frac{\delta_0^* \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n [\gamma_k^* \alpha_k + \delta_k^* \beta_k] \right\} \quad (10)$$

Setzt man in diesen Ausdruck die Besselschen Formeln (8) ein,

$$I \approx \frac{p}{m} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} \sum_{\nu=1}^m g\left(\frac{p\nu}{m}\right) + \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k \sum_{\nu=1}^m g\left(\frac{p\nu}{m}\right) \cos \frac{2\pi k\nu}{m} + \beta_k \sum_{\nu=1}^m g\left(\frac{p\nu}{m}\right) \sin \frac{2\pi k\nu}{m} \right] \right\}$$

so folgt nach einer einfachen Umordnung:

$$I \approx \frac{p}{m} \sum_{\nu=1}^m g\left(\frac{p\nu}{m}\right) \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k \cos \frac{2\pi k\nu}{m} + \beta_k \sin \frac{2\pi k\nu}{m} \right] \right\} \quad (11)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer der letzten Gleichung ist unabhängig von der Funktion  $g(\xi)$ . Er stellt die  $n$ -te Teilsumme der Fourierentwicklung des Kernes für die Punkte  $\xi_\nu = \frac{p\nu}{m}$  dar. Durch einen Vergleich mit der Formel (4) erkennt man, dass dieser Ausdruck gleich dem Gewicht  $A_\nu$  ist.

Die Bestimmung der  $n$ -ten Teilsummen des Kernes lässt sich auf zweierlei Weise durchführen. Einmal kann man die Fourierkoeffizienten aus den Eulerschen Formeln

$$\alpha_k(x) = \frac{2}{p} \int_0^p K(x, \xi) \cos \frac{2\pi k \xi}{p} d\xi$$

$$\beta_k(x) = \frac{2}{p} \int_0^p K(x, \xi) \sin \frac{2\pi k \xi}{p} d\xi \quad (12)$$

errechnen, und mittels dieser Koeffizienten die Teilsumme

$$H_\nu(x) = \frac{\alpha_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k(x) \cos \frac{2\pi k \nu}{m} + \beta_k(x) \sin \frac{2\pi k \nu}{m} \right]$$

bilden. Die Teilsumme lässt sich aber auch durch ein einzelnes Integral darstellen. Setzt man nämlich in die letzte Gleichung die Eulerschen Formeln (12) ein, so erhält man:

$$H_\nu(x) = \frac{1}{p} \int_0^p K(x, \xi) d\xi + \sum_{k=1}^n \frac{2}{p} \int_0^p K(x, \xi) \left[ \cos \frac{2\pi k \xi}{p} \cos \frac{2\pi k \nu}{m} + \sin \frac{2\pi k \xi}{p} \sin \frac{2\pi k \nu}{m} \right] d\xi$$

$$= \frac{2}{p} \int_0^p K(x, \xi) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2\pi k \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) \right] d\xi$$

Aus der geometrischen Summe

$$\sum_{k=0}^n e^{2\pi i k \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right)} = \frac{1 - e^{2\pi i \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) (n+1)}}{1 - e^{2\pi i \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right)}}$$

ergibt sich durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil:

$$1 + \sum_{k=1}^n \cos 2\pi k \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos 2\pi (n+1) \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) - \cos 2\pi n \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right)}{1 - \cos 2\pi \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right)}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\cos 2\pi (n+1) \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) - \cos 2\pi n \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) = -2 \sin \pi (2n+1) \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) \sin \pi \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right)$$

$$1 - \cos 2\pi \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right) = 2 \sin^2 \pi \left( \frac{\xi}{p} - \frac{\nu}{m} \right)$$

die Identität,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2\pi k \left( \frac{x}{p} - \frac{v}{m} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi (2n+1) \left( \frac{x}{p} - \frac{v}{m} \right)}{\sin \pi \left( \frac{x}{p} - \frac{v}{m} \right)}$$

sodass sich schliesslich ergibt:

$$H_v(x) = \frac{1}{p} \int_0^p K(x, \xi) \frac{\sin \pi (2n+1) \left( \frac{\xi}{p} - \frac{v}{m} \right)}{\sin \pi \left( \frac{\xi}{p} - \frac{v}{m} \right)} d\xi \quad (13)$$

(Siehe auch [6] Natanson, Konstruktive Funktionstheorie, S.134)

### 3. Integralgleichungen mit einer Nebenbedingung.

Hat in der Integralgleichung

$$g(x) + \lambda \int_0^p g(\xi) K(x, \xi) d\xi + f(x) = 0 \quad (14)$$

der Kern die Eigenschaft, dass für alle x

$$\int_0^p K(x, \xi) d\xi = -\frac{1}{\lambda} \quad (15)$$

ist, so lässt sich die Funktion  $g(x)$  nicht eindeutig, sondern nur bis auf eine beliebige Konstante  $C$  bestimmen. In diesem Fall ist nämlich, da

$$\lambda \int_0^p C K(x, \xi) d\xi = -C$$

ist, die obige Integralgleichung mit der Gleichung

$$[g(x) + C] + \lambda \int_0^p [g(\xi) + C] K(x, \xi) d\xi + f(x) = 0$$

identisch. Man benötigt also zur eindeutigen Bestimmung von  $g(x)$  noch eine Nebenbedingung. Diese Nebenbedingung ist häufig durch ein Integral

$$\int_0^p g(x) dx = E \tag{16}$$

gegeben. Würde man hierbei zur Auflösung die Rechteckformel heranziehen, so stünde man vor der Situation, zur Bestimmung der  $m$  unbekannt Funktionswerte ein System von  $m+1$  Gleichungen zur Verfügung zu haben, nämlich die der Integralgleichung (14) entsprechenden  $m$  Gleichungen,

$$g\left(\frac{\rho\mu}{m}\right) + \lambda \frac{\rho}{m} \sum_{\nu=1}^m g\left(\frac{\rho\nu}{m}\right) K\left(\frac{\rho\mu}{m}, \frac{\rho\nu}{m}\right) + f\left(\frac{\rho\mu}{m}\right) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

und zusätzlich für die Nebenbedingung (16) die Gleichung:

$$\frac{\rho}{m} \sum_{\nu=1}^m g\left(\frac{\rho\nu}{m}\right) = E$$

Bei der Anwendung der speziellen Quadraturformel kann man diese Schwierigkeit umgehen. Es gelten folgende Hilfsformeln, wenn  $k$  und  $m$  ganze Zahlen sind :

$$\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m \cos \frac{2\pi k\nu}{m} = \begin{cases} 1 & \text{für } k/m = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für alle anderen Werte von } k/m \end{cases}$$

$$\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m \sin \frac{2\pi k\nu}{m} = 0 \tag{17}$$

Die Richtigkeit dieser Formeln lässt sich leicht nachweisen, indem man die komplexe geometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^m e^{\frac{2\pi i k\nu}{m}} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i k\nu}{m}} = \frac{1 - e^{2\pi i k}}{1 - e^{2\pi i k/m}}$$

betrachtet. Da für ganzzahliges  $k$

$$e^{2\pi i k} = 1$$

ist, ist der Zähler des rechten Ausdruckes immer gleich Null. Der Nenner ist hingegen nur dann Null, wenn das Verhältnis  $k/m$  eine ganze Zahl ist. Ist aber  $k/m$  eine ganze Zahl, so ist auch  $\frac{k\nu}{m}$  eine ganze Zahl, und damit sind alle Glieder der Summe gleich Eins. Es gilt also:

$$\sum_{\nu=1}^m e^{\frac{2\pi i k \nu}{m}} = \begin{cases} m & \text{für } k/m \text{ ganzzahlig} \\ 0 & \text{für alle anderen} \\ & \text{Werte } k/m \end{cases} \quad (18)$$

Daraus folgen durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil die Formeln (17). Aus den Gleichungen (17) wiederum folgt, dass

$$\frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m F_{\nu}(x) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m \left\{ \frac{\alpha_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k(x) \cos \frac{2\pi k \nu}{m} + \beta_k(x) \sin \frac{2\pi k \nu}{m} \right] \right\} = \frac{\alpha_0(x)}{2}$$

ist. Lässt man jedoch bei der Bestimmung der Gewichte das Glied  $\frac{\alpha_0(x)}{2}$  fort,

$$B_{\nu}(x) = F_{\nu}(x) - \frac{\alpha_0(x)}{2} = \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k(x) \cos \frac{2\pi k \nu}{m} + \beta_k(x) \sin \frac{2\pi k \nu}{m} \right] \quad (19)$$

so gilt für diese Größen:

$$\sum_{\nu=1}^m B_{\nu}(x) = 0 \quad (20)$$

Ferner gelten zwischen den Gewichten  $A_{\nu}(x)$  und  $B_{\nu}(x)$  die Beziehungen,

$$\sum_{\nu=1}^m B_{\nu}(x) \cos \frac{2\pi k \nu}{m} = \sum_{\nu=1}^m A_{\nu}(x) \cos \frac{2\pi k \nu}{m} \quad (21)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{\nu=1}^m B_{\nu}(x) \sin \frac{2\pi k \nu}{m} = \sum_{\nu=1}^m A_{\nu}(x) \sin \frac{2\pi k \nu}{m}$$

da nach (17)

$$\sum_{\nu=1}^m \frac{\alpha_0(x)}{2} \cos \frac{2\pi k\nu}{m} = \sum_{\nu=1}^m \frac{\alpha_0(x)}{2} \sin \frac{2\pi k\nu}{m} = 0 \quad (k \neq 0, m, 2m, \dots)$$

ist. Das bedeutet, dass eine Quadraturformel mit den Gewichten  $B_\nu(x)$  das konstante Glied  $\frac{y_0}{2}$  der Entwicklung von  $g(f)$  bei der Integration unberücksichtigt lässt, während man für den nicht konstanten Teil das gleiche Ergebnis erhält wie bei Verwendung der Gewichte  $A_\nu(x)$ . Ersetzt man also die Integralgleichung (14) durch das Gleichungssystem

$$g\left(\frac{p\mu}{m}\right) + \lambda \frac{p}{m} \sum_{\nu=1}^m B_\nu\left(\frac{p\mu}{m}\right) g\left(\frac{p\nu}{m}\right) + f\left(\frac{p\mu}{m}\right) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

so erhält man automatisch diejenige Lösung, die der Nebenbedingung

$$\int_0^p g(x) dx = -\frac{p}{m} \sum_{\mu=1}^m f\left(\frac{p\mu}{m}\right) \approx -\int_0^p f(x) dx$$

genügt. Die Lösung für die Nebenbedingung (16) ergibt sich schliesslich aus dieser Lösung, in dem man zu den einzelnen Funktionswerten anschliessend noch das konstante Glied

$$\frac{y_0}{2} = \frac{E}{p} + \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^m f\left(\frac{p\mu}{m}\right) \quad (23)$$

hinzufügt, oder, was auf das Gleiche hinausläuft, in dem man die Integralgleichung (14) durch das System der folgenden  $m$  linearen Gleichungen ersetzt.

$$g\left(\frac{p\mu}{m}\right) + \lambda \frac{p}{m} \sum_{\nu=1}^m B_\nu\left(\frac{p\mu}{m}\right) g\left(\frac{p\nu}{m}\right) + f\left(\frac{p\mu}{m}\right) = \frac{E}{p} + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^m f\left(\frac{p\nu}{m}\right) \quad (24)$$

#### 4. Die Überlegenheit der speziellen Formel.

Es soll nun versucht werden, die Überlegenheit der speziellen Formel gegenüber der einfachen Rechteckregel für das Integral

$$I = \int_0^p g(x)h(x) dx$$

nachzuweisen. Dabei sei  $g(x)$  diejenige Funktion, deren Funktionswerte nur an einzelnen Stützstellen bekannt sind, während  $h(x)$  durch einen analytischen Ausdruck gegeben ist. Beide Funktionen haben die Periode  $p$  und sollen sich gleichmässig in eine Fourierreihe entwickeln lassen.

Zunächst seien die beiden folgenden extremen Fälle betrachtet:

- a.) Als ausgesprochen günstig in bezug auf die Anwendung der speziellen Quadraturformel ist die Funktion  $g(x)$  zu betrachten, wenn sie eine ganze Funktion ist, da dann die Beträge ihrer Fourierkoeffizienten mit wachsendem Index rasch klein werden. Ist insbesondere  $g(x)$  ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $n$ , so liefert die spezielle Formel im Gegensatz zur Rechteckformel ein exaktes Ergebnis, gleichgültig, wie sich der Kern verhält. Dies folgt aus der Tatsache, dass in diesem Fall die Fourierkoeffizienten durch die Besselschen Formeln (8) exakt dargestellt werden.
- b.) Ein anderer extremer Fall ist der, dass  $h(x)$  eine singuläre Stelle aufweist, während  $g(x)$  beschränkt bleibt. Hier versagt die Rechteckformel. Die  $n$ -te Teilsumme von  $h(x)$

bleibt jedoch im ganzen Integrationsintervall beschränkt. Man kann also immer mittels der speziellen Formel ein ausreichend genaues Ergebnis erzielen, wenn man die Stützstellenzahlen nur gross genug wählt, vorausgesetzt natürlich, dass  $h(x)$  integrierbar ist. Ist ausserdem der Verlauf von  $g(x)$  noch verhältnismässig gutartig, so ergibt sich trotz der Singularität von  $h(x)$  schon bei einer geringen Stützstellenzahl ein überraschend kleiner Ersatzfehler.

In Hinblick auf Integralgleichungen bedeutet letzteres: Man kann mit Hilfe der speziellen Formel auch Integralgleichungen mit singulärem Kern nach der Quadraturformelmethode lösen, ohne den Bereich um die singuläre Stelle gesondert - beispielsweise durch eine Reihenentwicklung - behandeln zu müssen.

Für nicht so extreme Fälle gelingt es nicht, die Überlegenheit dieser Formel für eine endliche Stützstellenzahl nachzuweisen. Bei Integralgleichungen treten jedoch vorwiegend Funktionen auf, die sich analytisch in die komplexe Zahlenebene fortsetzen lassen und dort mit Ausnahme einzelner singulärer Punkte regulär sind.

Beschränkt man sich auf die Klasse dieser Funktionen, so gibt es eine Teilfolge von Stützstellenzahlen  $m = \mu^*$ , für die sich zeigen lässt, dass der Fehler der speziellen Formel mit wachsender Stützstellenzahl stärker gegen Null strebt als der Fehler der Rechteckformel, wenn die Funktion  $g(x)$  mindestens doppelt so gutartig ist wie die Funktion  $h(x)$ .

Es folgt nun der Beweis dieser Behauptung, wobei gleichzeitig näher erläutert wird, was unter dem Begriff "doppelt so gutartig" zu verstehen ist. Es seien

$$g(x) = g(x+iy)|_{y=0} \quad \text{und} \quad h(x) = h(x+iy)|_{y=0}$$

analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die auf der reellen Achse reelle Werte annehmen; oder anders ausgedrückt, die beiden Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  sollen sich in die komplexe Zahlenebene fortsetzen lassen, indem man  $x+iy = z$  statt  $x$  setzt.

Der Einfachheit halber sei ferner angenommen, dass sowohl  $g(x)$  als auch  $h(x)$  gerade Funktionen sind, dass also gilt:

$$g(x) = g(-x) \qquad h(x) = h(-x)$$

Diese Einschränkung ist für die folgende Beweisführung nicht notwendig, sie wird nur deshalb gemacht, da dann in den Fourierreentwicklungen nur Kosinusglieder auftreten und damit die Gleichungen übersichtlicher werden. Die Koeffizienten von  $g(x)$  seien mit  $a_k$ , die von  $h(x)$  mit  $b_k$  bezeichnet. Die Koeffizienten des Produktes beider Funktionen seien  $c_k$ .

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi}{p} kx \qquad (25)$$

$$h(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{2\pi}{p} kx \qquad (26)$$

$$g(x) \cdot h(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{2\pi}{p} kx \qquad (27)$$

Handelt es sich bei den Funktionen  $g(z)$  und  $h(z)$  um ganze Funktionen, so sind sie in der ganzen Zahlenebene regulär, anderenfalls weisen sie mehrere singuläre Stellen auf, die

die gleiche Periode haben wie die Funktionen und paarweise symmetrisch zur x-Achse sind. Den Abstand dieser komplexen Singularitäten von der reellen Achse kann man als ein Mass für die Gutartigkeit der Funktionen ansehen, denn eine nahe der reellen Achse gelegene Singularität hat zur Folge, dass die für  $y = 0$  reelle Funktion dort einen starken Buckel hat.

Es sei  $\tau_g$  der Abstand zwischen der reellen Achse und denjenigen Singularitäten der Funktion  $g(z)$ , die der reellen Achse am nächsten liegen,  $\tau_h$  der entsprechende Abstand für die Funktion  $h(z)$ . Dann ist die Funktion  $g(z)$  regulär innerhalb eines Streifens, welcher durch die beiden Geraden  $y = \pm \tau_g$  begrenzt wird,  $h(z)$  innerhalb eines Streifens mit den Begrenzungen  $y = \pm \tau_h$ .

Der Begriff "gutartig" sei nun folgendermassen definiert: Eine periodische Funktion ist gutartiger als eine zweite, wenn ihre analytische Fortsetzung in einem breiteren Streifen regulär ist als die analytische Fortsetzung der zweiten Funktion. Insbesondere sei  $g(x)$  als "mindestens doppelt so gutartig" bezeichnet wie  $h(x)$ , wenn  $\tau_g \geq 2\tau_h$  ist.

Zunächst sei lediglich angenommen, dass  $g(x)$  gutartiger ist als  $h(x)$ . Es wird also lediglich  $\tau_g > \tau_h$  gefordert. Das bedeutet, dass auch das Produkt  $g(z)h(z)$  regulär innerhalb des Streifens  $-\tau_h < \text{Im} z < \tau_h$  ist.

Macht man die Substitution,

$$\left. \begin{aligned} e^{\frac{i2\pi}{p}x} &= w \\ x &= \frac{p}{2\pi i} \ln w \end{aligned} \right\} \longrightarrow \omega \frac{2\pi}{p} kx = \frac{1}{2} (w^k + w^{-k})$$

so geht die Funktion  $g(z)$  über in die Reihe:

$$g\left(\frac{p}{2\pi i} \ln w\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k \quad (a_{-k} = a_k)$$

Für das Produkt  $g(z) \cdot h(z)$  gilt

$$g\left(\frac{\rho}{2\pi i} \ln w\right) h\left(\frac{\rho}{2\pi i} \ln w\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w^k \quad (c_{-k} = c_k)$$

Der Streifen  $-\tau_g < \gamma < \tau_g$ , innerhalb dessen die Funktion  $g(z)$  regulär ist, geht in den Kreisring

$$e^{-\frac{2\pi}{\rho} \tau_g} < |w| < e^{\frac{2\pi}{\rho} \tau_g}$$

über. Der Konvergenzkreis der Reihe  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} w^k$  ist also :

$$\tau = e^{\frac{2\pi}{\rho} \tau_g}$$

Zwischen den Koeffizienten  $a_k$  und dem Konvergenzradius besteht nach Cauchy die Beziehung:

$$\tau = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{2}\right|}}$$

Daraus folgt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{2}\right|} = e^{-\frac{2\pi}{\rho} \tau_g} \quad (28)$$

(Siehe auch [7] : Behnke und Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Seite 252.) Auf entsprechende Weise erhält man für die Koeffizienten  $c_k$  :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{c_k}{2}\right|} = e^{-\frac{2\pi}{\rho} \tau_h} \quad (29)$$

D.h., für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  gibt es eine ganze Zahl  $N(\varepsilon)$ , sodass für alle  $\mu \geq N$

$$|a_\mu| \leq 2 e^{-\mu \left(\frac{2\pi}{\rho} \tau_g - \varepsilon\right)} \quad (30)$$

$$|c_\mu| \leq 2 e^{-\mu \left(\frac{2\pi}{\rho} \tau_h - \varepsilon\right)}$$

ist.

Ferner gibt es eine Teilfolge  $\mu^*$ , für die eine entgegengesetzte Abschätzung gilt.

$$|c_{\mu^*}| \geq 2 e^{-\mu^* \left( \frac{2\pi}{p} \tau_n + \varepsilon \right)} \quad (\mu^* \geq N) \quad (31)$$

(Die letzte Ungleichung ist nicht notwendig für alle  $\mu$  erfüllt. Sie gilt nur dann für alle  $\mu \geq N$ , wenn das Produkt  $g(z) \cdot h(z)$  innerhalb eines Periodenstreifens lediglich ein einziges Singularitätenpaar (Pole) besitzt, wenn also die Reihe  $\sum \frac{c_k}{2} w^k$  nur einen einzigen Pol auf dem Konvergenzkreis hat. Dann weiss man, dass der Grenzwert  $\lim \frac{c_{\mu+1}}{c_\mu}$  existiert. In diesem Fall kann man in Gleichung (29) den "lim sup" durch "lim" ersetzen.)

Als nächstes soll nun der Ersatzfehler der Rechteckformel betrachtet werden. Bei  $m$  Stützstellen lautet er:

$$F_{Rm} = \frac{p}{m} \sum_{v=1}^m g\left(\frac{pv}{m}\right) h\left(\frac{pv}{m}\right) - \int_0^p g(x) h(x) dx \quad (32)$$

Setzt man die Reihe (27) ein, so ergibt sich:

$$\frac{p}{m} \sum_{v=1}^m g\left(\frac{pv}{m}\right) h\left(\frac{pv}{m}\right) = p \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{kv}{m} \right]$$

Nun gilt nach Gleichung (17):

$$\frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{kv}{m} = \begin{cases} 1 & \text{für } k/m = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{für alle anderen Werte von } k/m \end{cases}$$

Es bleiben also von der Doppelsumme nur diejenigen Glieder übrig, für die  $k/m$  eine ganze Zahl ist. Da ferner

$$\int_0^p g(x) h(x) dx = p \frac{c_0}{2}$$

ist, erhält man für den Ersatzfehler der Rechteckformel:

$$F_{Rm} = p \sum_{j=1}^{\infty} c_{m \cdot j} \quad (33)$$

Ist nun die Stützstellenzahl  $m$  eine Zahl aus der Teilfolge  $\mu^*$ , so gilt für den Betrag des Fehlers:

$$\begin{aligned} |F_{Rm}| &= p |c_m + c_{2m} + c_{3m} + \dots| \\ &\geq p \left| |c_m| - |c_{2m} + c_{3m} + \dots| \right| \end{aligned} \quad (34)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $|c_m| > |c_{2m} + c_{3m} + \dots|$  ist, kann man  $|c_m|$  durch die Abschätzung

$$|c_m| \geq 2e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h + \varepsilon\right)} \quad (m = \mu^*) \quad (\text{Siehe Gl. (31)})$$

ersetzen, also durch einen Wert, der kleiner oder gleich  $|c_m|$  ist. Für die Summe  $|c_m + c_{2m} + \dots|$  erhält man aus den Ungleichungen (30) einen Wert, der grösser oder gleich dieser Summe ist.

$$\begin{aligned} |c_m + c_{2m} + \dots| &\leq |c_{2m}| + |c_{3m}| + \dots \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=2}^{\infty} e^{-m \cdot j \left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - \varepsilon\right)} = \\ &= 2 \frac{e^{-2m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - \varepsilon\right)}}{1 - e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - \varepsilon\right)}} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck strebt mit wachsendem  $m$  stärker gegen Null als die rechte Seite von Gl. (31). Die obige Voraussetzung ist also erfüllt, wenn man  $m$  nur gross genug wählt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |F_{Rm}| &\geq 2p \left\{ e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h + \varepsilon\right)} - \frac{e^{-2m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - \varepsilon\right)}}{1 - e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - \varepsilon\right)}} \right\} = \\ &= 2p e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h + \varepsilon\right)} \left\{ 1 - \frac{e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - 3\varepsilon\right)}}{1 - e^{-m\left(\frac{2\pi}{p}\tau_h - \varepsilon\right)}} \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

Der Wert innerhalb der geschweiften Klammer nähert sich mit wachsendem  $m$  der Eins, ist also für genügend grosse  $m$  grösser als eine Konstante  $C_R > 0$ . (Für sehr grosse  $m$  nur wenig kleiner als Eins.)

Damit lässt sich für den Fehler der Rechteckregel auf folgende Weise eine untere Schranke angeben.

Besitzt die analytische Fortsetzung des Produktes  $g(x) \cdot h(x)$  eine Singularität im Abstand  $\tau_h$  von der reellen Achse und ist sie regulär innerhalb des Streifens  $|\operatorname{Im} z| < \tau_h$ , so gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Konstante  $C_R > 0$  und eine Folge von ganzen Zahlen  $\mu^*$  (in Abhängigkeit von  $\varepsilon$ ), sodass gilt:

$$|F_{Rm}| \geq 2p C_R e^{-m \left( \frac{2\pi}{p} \tau_h + \varepsilon \right)} \quad (m = \mu^*) \quad (36)$$

(Siehe auch [5]: Davis, On the Numerical Integration of Periodic Analytic Functions.)

Für den Fehler der speziellen Formel soll nun auf entsprechende Weise eine obere Schranke abgeleitet werden.

Die spezielle Formel beruht darauf, dass die Funktion  $g(x)$  durch ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $n = \frac{m}{2}$  bzw.  $n = \frac{m-1}{2}$ , je nachdem ob  $m$  gerade oder ungerade ist, angenähert wird. (Siehe Gl. (7))

$$g(x) \approx T_n(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^* \cos \frac{2\pi}{p} kx$$

Der Ersatzfehler der speziellen Formel

$$F_{Sm} = \int_0^p T_n(x) h(x) dx - \int_0^p g(x) h(x) dx \quad (37)$$

wird also dadurch hervorgerufen, dass einmal die ersten  $n$  Koeffizienten  $a_k$  durch die trigonometrische Interpolation nicht exakt dargestellt, zum anderen alle Koeffizienten mit grösserer Ordnung als  $n$  vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned}
 F_{sm} &= \frac{p}{4} a_0^* b_0 + \frac{p}{2} \sum_{k=1}^n a_k^* b_k - \frac{p}{4} a_0 b_0 - \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \\
 &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{(a_0^* - a_0) b_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^* - a_k) b_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k \right\}
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Es ist nun die Frage, um wieviel die Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation  $a_k^*$  von den exakten Fourierkoeffizienten  $a_k$  abweichen. Setzt man in die Besselsche Formel

$$a_k^* = \frac{2}{m} \sum_{v=1}^m g\left(\frac{pv}{m}\right) \cos 2\pi \frac{kv}{m}$$

die Reihe

$$g\left(\frac{pv}{m}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \cos \mu \frac{2\pi v}{m}$$

ein und wendet das Additionstheorem

$$2 \cos \mu \frac{2\pi v}{m} \cos k \frac{2\pi v}{m} = \cos (\mu+k) \frac{2\pi v}{m} + \cos (\mu-k) \frac{2\pi v}{m}$$

an, so ergibt sich :

$$a_k^* = a_0 \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{kv}{m} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \left[ \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{(\mu+k)v}{m} + \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{(\mu-k)v}{m} \right]$$

(39)

Nun gilt wiederum nach Gleichung (17):

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{kv}{m} \\
 &\frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{(\mu+k)v}{m} \\
 &\frac{1}{m} \sum_{v=1}^m \cos 2\pi \frac{(\mu-k)v}{m}
 \end{aligned} \right\} = 1 \text{ f\u00fcr } \begin{cases} k=0 \\ \mu+k = m, 2m, \dots \\ \mu-k = 0, m, 2m, \dots \end{cases}$$

F\u00fcr alle anderen Werte verschwinden die Summen. Dabei ist bereits ber\u00fccksichtigt, dass  $k$  nur die ganzen Zahlen von 0 bis  $n \leq \frac{m}{2}$  durchl\u00e4uft, da ja nur die ersten  $n$  Koeffizienten  $a_k^*$

interessieren. Die erste Summe von Gleichung (39) liefert also nur für  $a_0^*$  einen Beitrag, die beiden Doppelsummen nur für  $\mu = m \cdot j - k$  und  $\mu = m \cdot j + k$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a_0^* &= a_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} a_{m \cdot j} \\ a_k^* &= a_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m \cdot j - k} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m \cdot j + k} \end{aligned} \quad (40)$$

Mittels der Ungleichungen (30) erhält man die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |a_k^* - a_k| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \{ a_{m \cdot j - k} + a_{m \cdot j + k} \} \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \{ |a_{m \cdot j - k}| + |a_{m \cdot j + k}| \} \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ e^{-(m \cdot j - k) \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} + e^{-(m \cdot j + k) \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \right\} = \\ &= 2 \left\{ e^{k \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} + e^{-k \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \right\} \frac{e^{-m \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}}{1 - e^{-m \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}} \quad (41) \end{aligned}$$

Nun ist für  $0 \leq k \leq n \leq \frac{m}{2}$ :

$$\begin{aligned} e^{k \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} + e^{-k \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} &= 2 \operatorname{cosh} k \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right) \\ &\leq 2 \operatorname{cosh} \frac{m}{2} \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Danach gilt für alle in Frage kommenden Werte von  $k$ :

$$|a_k^* - a_k| \leq 2 e^{-m \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \cdot \frac{2 \operatorname{cosh} \frac{m}{2} \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}{1 - e^{-m \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}}$$

Der Quotient  $\frac{2 \operatorname{cosh} \frac{m}{2} \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}{1 - e^{-m \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}}$

strebt mit wachsendem  $m$  gegen  $e^{\frac{m}{2} \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)}$

D.h., es gibt für jedes  $m > 0$  eine Konstante  $C_1$ , die für grosse  $m$  nur wenig grösser als Eins ist, sodass gilt:

$$|a_k^* - a_k| \leq 2 C_1 e^{-m/2 \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \quad (42)$$

Da die gleiche Schranke auch für die Beträge aller Koeffizienten  $a_k$  mit grösserer Ordnung als  $n+1 \geq \frac{m+1}{2}$  Gültigkeit hat, denn es ist,

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq 2 e^{-k \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \leq 2 e^{-\frac{m+1}{2} \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \\ &< 2 C_1 e^{-m/2 \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \end{aligned}$$

kann man, wenn man in Gleichung (38) alle Werte durch ihre Beträge ersetzt, für

$$|F_{sm}| \leq \frac{p}{2} \left\{ \frac{|a_0^* - a_0| |b_0|}{2} + \sum_{k=1}^n |a_k^* - a_k| |b_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |b_k| \right\} \quad (43)$$

auch schreiben:

$$|F_{sm}| \leq p C_1 e^{-m/2 \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \left\{ \frac{|b_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \right\} \quad (44)$$

Nach Voraussetzung soll die Fourierreihe von  $h(x)$  gleichmässig konvergent sein. Dann konvergieren die Koeffizienten  $b_k$  absolut. (Siehe z.B. [8]: Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik, Band 2, Seite 34-36.) Damit bleibt die Summe innerhalb der geschweiften Klammer beschränkt, ist also kleiner oder gleich einer Konstanten  $C_2$ . Setzt man  $C_1 \cdot C_2 = 2C_3$ , so erhält man als obere Schranke für den Fehler der speziellen Formel:

$$|F_{sm}| \leq 2p C_3 e^{-m/2 \left( \frac{2\pi}{p} \tau_g - \varepsilon \right)} \quad (45)$$

Dieser Ausdruck ist entsprechend aufgebaut wie die untere Schranke für den Fehler der Rechteckformel, gilt jedoch, im Gegensatz zu Gl.(36) nicht nur für eine Teilfolge  $m = \mu^k$ , sondern für alle  $m$  grösser oder gleich einer ganzen Zahl  $N(\varepsilon)$ .

Durch einen Vergleich beider Schranken folgt schliesslich:

$$\left| \frac{F_{sm}}{F_{Rm}} \right| \leq \frac{C_S}{C_R} \cdot \frac{e^{-m/2 \left( \frac{2\pi}{P} \tau_g - \varepsilon \right)}}{e^{-m \left( \frac{2\pi}{P} \tau_h + \varepsilon \right)}} = \text{womd.} e^{-m/2 \left[ \frac{2\pi}{P} (\tau_g - 2\tau_h) - 3\varepsilon \right]}$$

$(m = \mu^k) \quad (46)$

Dieser Ausdruck strebt mit wachsendem  $m$  für  $\tau_g > 2\tau_h$  gegen Null, womit die oben aufgestellte Behauptung - zumindest für gerade Funktionen - bewiesen ist.

Aus der letzten Abschätzung erkennt man, dass die Überlegenheit der speziellen Quadraturformel um so grösser wird, je gutartiger  $g(x)$  im Verhältnis zu  $h(x)$  ist. Diese Tendenz hat sich auch bei der Durchrechnung mehrerer Beispiele gezeigt.

## 5. Die spezielle Formel bei singulärem Kern .

( Beispiel )

In der Beweisführung des vorhergehenden Abschnittes war vorausgesetzt worden, dass beide Funktionen gleichmässig konvergieren sollen. So folgt die Gleichung (45) aus der Gleichung (44) nur dann, wenn die Fourierkoeffizienten der Funktion  $h(x)$  absolut konvergieren. Diese Voraussetzung trifft nicht mehr zu, wenn  $h(x)$  singulär ist. Die Überlegenheit der speziellen Formel ergibt sich in diesem Fall einfach aus der Tatsache, dass die Rechteckregel versagt.

Dass, wenn die Funktion  $g(x)$  recht glatt verläuft, die spezielle Formel trotz der Singularität des Kernes ein überraschend genaues Ergebnis liefert, soll nun an einem Beispiel gezeigt werden. An Stelle des Kernes sei die Funktion

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln [2(1 - \cos x)] = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \quad (0 < x < 2\pi)$$

gewählt. Ferner sei angenommen, dass man von der Funktion

$$g(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx \quad (0 \leq r < 1)$$

nur die Funktionswerte an den 12 Stützstellen

$$x_v = \frac{\pi}{6} v \quad (v = 0, 1, 2, \dots, 11)$$

kennt. Bei dieser Funktion handelt es sich um keine ganze Funktion, jedoch verläuft sie relativ glatt, wenn man  $r$  nicht zu gross wählt. (Vergleiche Abschnitt 6 b)

Der exakte Wert des Integrals

$$I = \int_0^{2\pi} g(x) h(x) dx$$

ergibt sich aus den Fourierreihen beider Funktionen durch Ausmultiplizieren und gliedweises Integrieren zu:

$$I = -2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} = 2\pi \ln(1-r)$$

Für  $r = 0,2$  erhält man beispielsweise:

$$I = 2\pi \ln 0,8 = \underline{-1,402053}$$

Eine direkte Anwendung der Rechteckregel ist infolge der Singularität von  $h(x)$  bei  $x = 0$  nicht möglich.

Schreibt man jedoch,

$$I = \int_0^{2\pi} [g(x) - g(0)] h(x) dx + g(0) \int_0^{2\pi} h(x) dx$$

so lässt sich das erste Integral nach der Rechteckregel lösen, da der Integrand jetzt für  $x = 0$  gegen Null strebt.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [g(x) - g(0)] \frac{1}{2} \ln [2(1 - \cos x)] = 0$$

Zum Beweis sei  $2(1 - \cos x) = u$  gesetzt. Denkt man sich dann die Differenz  $g(x) - g(0)$  in eine Potenzreihe von  $u$  entwickelt,

$$g(x) - g(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^k$$

wobei kein konstantes Glied  $c_0$  auftreten kann, da die Differenz für  $x = 0 \rightarrow u = 0$  verschwindet, so folgt das Nullwerden des Integranden aus der Tatsache, dass jede Potenz von  $\frac{1}{u}$  für  $u = 0$  stärker gegen Unendlich strebt als  $\ln u$ .

Das zweite Integral verschwindet, da

$$\int_0^{2\pi} h(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln [2(1 - \cos x)] dx = 0$$

ist. Die Formel, die der Rechteckformel entsprechen würde, lautet also für dieses Beispiel

$$\int_0^{2\pi} g(x) h(x) dx \approx \frac{2\pi}{m} \sum_{v=0}^{m-1} [g(x_v) - g(0)] h(x_v) \quad (x_v = \frac{2\pi v}{m})$$

Für  $r = 0,2$  und  $m = 12$  ergibt sich danach: (Siehe Tabelle 1)

$$I_{R12} = \underline{-1,363993}$$

Der Fehler beträgt:

$$F_{R12} = \underline{0,038060} \longrightarrow 2,82 \%$$

Dagegen erhält man mittels der speziellen Quadraturformel

$$\int_0^{2\pi} g(x) h(x) dx \approx \frac{2\pi}{m} \sum_{v=0}^{m-1} A_v g\left(\frac{2\pi v}{m}\right)$$

bei gleicher Stützstellenzahl mit

$$n = \frac{m}{2} = 6 \longrightarrow A_v = -\sum_{k=1}^6 \frac{\cos k \frac{2\pi v}{m}}{k}$$

ein wesentlich genaueres Ergebnis:

$$I_{S12} = \underline{-1,402127}$$

$$F_{S12} = \underline{-0,000074} \longrightarrow 0,0053 \%$$

(Siehe Tabelle 2)

Dazu muss allerdings bemerkt werden, dass sich die Anwendung der speziellen Formel auf ein einfaches Integral - wie im obigen Beispiel - kaum lohnt, da die Bestimmung der Gewichte in den meisten Fällen recht zeitraubend ist. Man wird hierbei, vorausgesetzt, dass genügend viele Funktionswerte der Funktion  $g(x)$  bekannt sind bzw. sich bestimmen lassen, viel schneller zum Ziele gelangen, wenn man die Rechteckregel mit genügend hoher Stützstellenzahl benutzt. Denn die Anwendung der speziellen Formel ist selbstverständlich nur dann sinnvoll, wenn der durch die geringere Stützstellenzahl eingesparte Rechenaufwand nicht durch den Rechenaufwand übertroffen wird, den die Bestimmung der  $n$ -ten Fourierteilssummen macht.

Der Vorteil der speziellen Formel kommt erst bei Integralgleichungen oder ähnlichen Problemen, bei denen der Rechenaufwand mit wachsender Stützstellenzahl sehr rasch ansteigt, voll zur Geltung. Ein Beispiel hierfür, ein Integralgleichungsproblem aus der Strömungslehre, soll im nächsten Abschnitt ausführlich behandelt werden.

6. Beispiel einer Integralgleichung aus der Strömungslehre.

a.) Darstellung eines zylindrischen Körpers mit elliptischer Kontur in einer ebenen Potentialströmung.

Man spricht von einer ebenen Strömung, wenn die Geschwindigkeit  $v$  zu jeder Zeit einer festen Ebene parallel und in allen auf einer Normalen zu dieser Ebene liegenden Punkten die gleiche ist. Ist die Strömung eine Potentialströmung, so kann man einen (theoretisch unendlich langen) zylindrischen Körper, dessen Achse senkrecht auf der Ebene steht, darstellen durch eine zweidimensionale Quell-Senken-Belegung auf der Kontur eines beliebigen Querschnittes. Von der Kontur wird lediglich gefordert dass sie stetig ist und überall eine eindeutige Tangente besitzt.

Es sei:

$S$  die Kontur

$(x,y)$  ein Aufpunkt

$(\xi,\eta)$  ein laufender Punkt

$d\sigma(\xi,\eta)$  ein Element der Kontur

und  $\vec{n}(x,y)$  der nach aussen gerichtete

Einheitsnormalenvektor im Aufpunkt

Ist das Potential  $\phi_a$  der relativen Anströmgeschwindigkeit für jeden Punkt  $(x,y)$  auf der Kontur bekannt, so gilt für die Quellbelegung  $q(x,y)$  [m/s] die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{2} q(x,y) + \frac{1}{2\pi} \int_S q(\xi,\eta) \frac{\partial \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\partial n} d\sigma + \frac{\partial \phi_a}{\partial n} = 0 \quad (47)$$

Diese Gleichung folgt aus der Bedingung, dass durch die Körperoberfläche keine Flüssigkeit hindurchtreten kann, dass also die resultierende Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit und der von der Quellbelegung induzierten Geschwindigkeit an der Kontur verschwinden muss.

Bezeichnet man mit  $\cos(n,x)$  und  $\sin(n,x)$  den Kosinus bzw. Sinus des Winkels zwischen der Normalen und der x-Achse,

so gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\partial n} &= \left\{ \cos(n, x) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(n, x) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ &= \frac{(x-\xi) \cos(n, x) + (y-\eta) \sin(n, x)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \end{aligned}$$

und entsprechend, wenn  $v_{ax}(x, y)$  und  $v_{ay}(x, y)$  die x- bzw. y-Komponenten der relativen Anströmung sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_a}{\partial n} &= \cos(n, x) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} + \sin(n, x) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \\ &= v_{ax} \cos(n, x) + v_{ay} \sin(n, x) \end{aligned}$$

Nun sei die Kontur des zylindrischen Körpers eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Dann gilt für einen Aufpunkt auf der Kontur die folgende Parameterdarstellung:

$$x = a \cdot \cos \varphi, \quad y = b \cdot \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

Bezeichnet man entsprechend einen laufenden Punkt auf der Kontur mit,

$$\xi = a \cdot \cos \gamma, \quad \eta = b \cdot \sin \gamma$$

so erhält man für das Linienelement

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma} d\gamma$$

und für den Richtungs- Kosinus bzw. Sinus:

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{dy}{d\sigma} = \frac{b}{a} \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma}} \\ \sin(n, x) &= -\frac{dx}{d\sigma} = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma}} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

die numerische Exzentrizität der Ellipse.

Mit diesen Beziehungen lautet die Gleichung (47):

$$\begin{aligned}
 q(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\gamma) 2ab \frac{(\cos\varphi - \cos\gamma)\cos\varphi + (\sin\varphi - \sin\gamma)\sin\varphi}{a^2(\cos\varphi - \cos\gamma)^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\gamma)^2} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma}} d\gamma + \\
 + 2 \left( \frac{a}{b} V_{ax}(\varphi)\cos\varphi + V_{ay}(\varphi)\sin\varphi \right) \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} = 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

Der Kern lässt sich noch vereinfachen. Es ist

$$\begin{aligned}
 (\cos\varphi - \cos\gamma)\cos\varphi + (\sin\varphi - \sin\gamma)\sin\varphi &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - (\cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma) \\
 &= 1 - \cos(\varphi - \gamma)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (\cos\varphi - \cos\gamma)^2 &= 4 \sin^2 \frac{\varphi+\gamma}{2} \sin^2 \frac{\varphi-\gamma}{2} = [1 - \cos(\varphi+\gamma)][1 - \cos(\varphi-\gamma)] \\
 (\sin\varphi - \sin\gamma)^2 &= 4 \cos^2 \frac{\varphi+\gamma}{2} \sin^2 \frac{\varphi-\gamma}{2} = [1 + \cos(\varphi+\gamma)][1 - \cos(\varphi-\gamma)]
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 K(\varphi, \gamma) &= 2ab \frac{(\cos\varphi - \cos\gamma)\cos\varphi + (\sin\varphi - \sin\gamma)\sin\varphi}{a^2(\cos\varphi - \cos\gamma)^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\gamma)^2} \\
 &= \frac{2ab}{a^2[1 - \cos(\varphi+\gamma)] + b^2[1 + \cos(\varphi+\gamma)]}
 \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\frac{a - b}{a + b} = r \tag{49}$$

so erhält man durch eine einfache Umformung

$$K(\varphi, \gamma) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi+\gamma) + r^2} \tag{50}$$

Multipliziert man schliesslich die Gleichung (48) mit  $\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$  und setzt zur Abkürzung,

$$g(\varphi) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = g(\varphi) \quad (51)$$

$$2 \left( \frac{b}{a} v_{ax}(\varphi) \cos \varphi + v_{ay}(\varphi) \sin \varphi \right) = f(\varphi) \quad (52)$$

so lautet die Bestimmungsgleichung für die Funktion  $g(\varphi)$

$$g(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\gamma) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi + \gamma) + r^2} d\gamma + f(\varphi) = 0 \quad (53)$$

b.) Die komplexen Singularitäten des Kernes.

Die analytische Fortsetzung des Kernes (50) hat im Komplexen offensichtlich dort eine singuläre Stelle, wo der Nenner

$$1 - 2r \cos(\varphi + \gamma + i\tau) + r^2$$

verschwindet, also für

$$\cos(\varphi + \gamma + i\tau) = \frac{1 + r^2}{2r}$$

Daraus folgt :

$$\begin{aligned} \varphi + \gamma + i\tau &= \arccos \frac{1+r^2}{2r} \\ &= \pm i \ln \left[ \frac{1+r^2}{2r} + i \sqrt{1 - \left( \frac{1+r^2}{2r} \right)^2} \right] + 2\pi k \\ &= \pm i \ln r + 2\pi k \end{aligned}$$

Die komplexen Singularitäten befinden sich also bei:

$$\gamma = 2\pi k - \varphi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (54)$$

Der Abstand von der reellen Achse beträgt:

$$\tau = |\ln r| = \ln \frac{1}{r} = \ln \left( \frac{a+b}{a-b} \right) \quad (55)$$

Das bedeutet: Je grösser das Achsenverhältnis  $a/b$  ist, desto näher liegen die komplexen Singularitäten an der reellen Achse, und desto ungünstiger verläuft der Kern in Hinblick auf die Integration mit Hilfe der Rechteckformel.

Andererseits artet der Kern für einen Kreis in eine Konstante aus.

$$a/b = 1 \rightarrow r = 0 \rightarrow K(\varphi, \gamma) = 1$$

In Bild 1 ist der Verlauf des Kernes für verschiedene Achsenverhältnisse über der Ordinate  $\varphi + \gamma$  aufgetragen. Man erkennt deutlich, wie der Buckel bei  $\varphi + \gamma = 0$  mit grösser werdendem Achsenverhältnis ansteigt.

### c.) Die Gutartigkeit der Lösungsfunktion.

Die trigonometrischen Funktionen  $\cos k\varphi$  und  $\sin k\varphi$  sind Eigenfunktionen des Kernes  $K(\varphi, \gamma)$  mit den dazugehörigen Eigenwerten  $\lambda_k = -$  und  $+\frac{1}{2\pi\tau k}$ . Man erkennt das, indem man in die zu (53) homogene Integralgleichung die Fourierentwicklung des Kernes (siehe Gl.(57)) einsetzt.

$$\begin{Bmatrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{Bmatrix} + \lambda_k \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos k\gamma \\ \sin k\gamma \end{Bmatrix} K(\varphi, \gamma) d\gamma = 0 \rightarrow \lambda_k = \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \frac{1}{2\pi\tau k} \quad (56)$$

Da die trigonometrischen Funktionen ausserdem linear unabhängig sind, kann man die Fourierentwicklung der Lösungsfunktion auch als eine Linearkombination von (orthogonalen) Eigenfunktionen auffassen. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, aus der Fourierentwicklung der Störfunktion, (die dann ebenfalls eine Linearkombination von Eigenfunktionen ist,) auf die Fourierentwicklung der Lösungsfunktion zu schliessen, und damit eine Aussage über die Gutartigkeit von  $g(\varphi)$  in Abhängigkeit von  $f(\varphi)$  zu machen.

Die Fourierkoeffizienten von  $f(\varphi)$  seien mit  $a_k$  und  $b_k$  bezeichnet.

Die Fourierentwicklung des Kernes lautet:

$$K(y, \gamma) = \frac{1 - \tau^2}{1 - 2\tau \cos(y + \gamma) + \tau^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \cos k(y + \gamma) \quad (57)$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k (\cos ky \cos k\gamma - \sin ky \sin k\gamma)$$

Macht man schliesslich noch für die gesuchte Funktion  $g(y)$  den Ansatz,

$$g(y) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \cos ky + \delta_k \sin ky) \quad (58)$$

so erhält man durch Ausmultiplizieren und gliedweises Integrieren:

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\gamma) K(y, \gamma) d\gamma$$

$$= \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k (\gamma_k \cos ky - \delta_k \sin ky) \quad (59)$$

Die Integralgleichung

$$g(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\gamma) K(y, \gamma) d\gamma + f(y) = 0$$

lautet mit diesen Ansätzen:

$$\frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \cos ky + \delta_k \sin ky) + \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k (\gamma_k \cos ky - \delta_k \sin ky) + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ky + b_k \sin ky) = 0 \quad (60)$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\gamma_0 + \frac{a_0}{2} = 0 \longrightarrow \gamma_0 = -\frac{a_0}{2}$$

$$\gamma_k + \tau^k \gamma_k + a_k = 0 \longrightarrow \gamma_k = -\frac{a_k}{1 + \tau^k} \quad (61)$$

$$\delta_k - \tau^k \delta_k + b_k = 0 \longrightarrow \delta_k = -\frac{b_k}{1 - \tau^k}$$

Lässt man nun  $k$  gegen Unendlich streben, so ergibt sich, da für  $|\tau| < 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \tau^k = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \tau^k = 1$$

ist, dass die Beträge der Koeffizienten von  $g(\varphi)$  im selben Masse gegen Null streben wie die Beträge der Koeffizienten von  $f(\varphi)$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|y_k|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_k|}{|b_k|} = 1 \quad (62)$$

Das wiederum bedeutet, dass der Abstand der komplexen Singularitäten von der reellen Achse bei beiden Funktionen der gleiche ist, dass also die Lösungsfunktion die gleiche Gutartigkeit aufweist, wie die Störfunktion. Aus Gleichung (61) folgt insbesondere: Ist  $f(\varphi)$  ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $n$ , so ist auch  $g(\varphi)$  ein trigonometrisches Polynom vom Grade  $n$ .

Dass die Lösungsfunktion die gleiche Gutartigkeit aufweist wie die Störfunktion, ist keinesfalls eine spezielle Eigenschaft dieses einen Kernes. Diese Eigenschaft haben alle symmetrischen Kerne.

Für symmetrische Kerne ( $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ ) gelten nämlich die Sätze:

- a.) Die zu zwei verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal.
- b.) Die Eigenwerte können sich im Endlichen nicht häufen.

(Diese Sätze gelten ganz allgemein für symmetrische Kerne, also auch für nicht periodische.) Aus a.) folgt, dass dann die Lösung der Integralgleichung

$$g(x) = \lambda \int_a^b g(\xi) K(x, \xi) d\xi + f(x) \quad (63)$$

in der Form

$$g(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_{\nu} g_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu} - \lambda} + f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_{\nu}} f_{\nu} g_{\nu}(x) \quad (64)$$

(Schmidtsche Reihe) angegeben werden kann, wobei  $g_{\nu}(x)$  die normierten Eigenfunktionen des Kernes ( $\|g_{\nu}(x)\| = 1$ ),  $\lambda_{\nu}$  die dazugehörigen Eigenwerte und  $f_{\nu}$  die Entwicklungskoeffizienten der Störfunktion sind.

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} g_{\nu}(x) \longrightarrow f_{\nu} = \int_a^b f(\xi) g_{\nu}(\xi) d\xi \quad (65)$$

Aus b.) folgt, da der Parameter  $\lambda$  notwendig endlich sein muss, dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda_{\nu}} = 0 \longrightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_{\nu}} = 1 \quad (66)$$

ist. Es klingen also für alle symmetrischen Kerne die Fourierkoeffizienten der Lösungsfunktion in gleichen Masse ab wie die Fourierkoeffizienten der Störfunktion.

d.) Die Bestimmung der Gewichte für die spezielle Quadraturformel.

Es soll nun gezeigt werden, dass in diesem Beispiel die numerische Bestimmung der Gewichtsmatrix für die spezielle Formel keinen grösseren Rechenaufwand erfordert als die Bestimmung der entsprechenden Matrix für die Rechteckregel.

Aus der Fourierentwicklung des Kernes folgt:

$$K(y, \gamma) - 1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \pi^k \cos k(y + \gamma) \quad (67)$$

Setzt man  $\cos k(y+\gamma) = \operatorname{Re} e^{ik(y+\gamma)}$   
 so kann man dafür auch schreiben:

$$K(y, \gamma) - 1 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k e^{ik(y+\gamma)} = 2 \operatorname{Re} \frac{\tau e^{i(y+\gamma)}}{1 - \tau e^{i(y+\gamma)}} \quad (68)$$

Für die Punkte  $\varphi_{\mu} = \frac{2\pi\mu}{m}$  und  $\gamma_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{m}$  gilt dann:

$$K(\varphi_{\mu}, \gamma_{\nu}) - 1 = K\left(2\pi \frac{\mu+\nu}{m}\right) - 1 = 2 \operatorname{Re} \frac{\tau e^{\frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)}}{1 - \tau e^{\frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)}} \quad (69)$$

Es sei nun die Stützstellenzahl  $m$  eine gerade Zahl. Dann sind die Gewichte der speziellen Formel gleich der  $n$ -ten Teilsumme des Kernes für die Punkte  $\varphi_{\mu}$  und  $\gamma_{\nu}$ , wobei  $m = 2n$  ist. (Siehe Gl.(6))

$$\begin{aligned} A_{\nu}\left(\frac{2\pi\mu}{m}\right) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \tau^k \cos k \frac{2\pi}{m}(\mu+\nu) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \tau^k e^{k \frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)} \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\tau e^{\frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)}}{1 - \tau e^{\frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)}} \left[1 - \tau^n e^{n \frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)}\right] \end{aligned} \quad (70)$$

Nun ist für  $n = \frac{m}{2}$ :

$$e^{n \frac{2\pi i}{m}(\mu+\nu)} = e^{\pi i(\mu+\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}$$

Damit ergibt sich unter Zuhilfenahme von Gl.(69):

$$A_{\nu}\left(\frac{2\pi\mu}{m}\right) = 1 + \left[K\left(2\pi \frac{\mu+\nu}{m}\right) - 1\right] \left[1 - \tau^{m/2} (-1)^{\mu+\nu}\right] \quad (71)$$

In diesem Fall ist also, wenn man die Stützstellenzahl gerade wählt, die Bestimmung der  $n$ -ten Teilsumme des Kernes für die Punkte  $\varphi_{\mu}$  und  $\gamma_{\nu}$  nur unwesentlich aufwendiger als die Bestimmung

des Kernes selbst für diese Punkte. Da man die gleiche Genauigkeit bei Anwendung der speziellen Formel unter Umständen mit einer wesentlich geringeren Stützstellenzahl erreicht ( $m_S < m_R$ ), kann sogar die Bestimmung der Gesamtheit aller  $m_S^2$  Gewichte  $A_\nu(\varphi_\nu)$  weniger Rechenaufwand erfordern als die Bestimmung der entsprechenden  $m_R^2$  Funktionswerte des Kernes.

e.) Die Ellipse in einer Parallelströmung.

Befindet sich die Ellipse in einer Parallelströmung, sind also die Komponenten der Anströmgeschwindigkeit  $v_{ax}$  und  $v_{ay}$  über den ganzen Ellipsenumfang konstant, so ist die Störfunktion  $f(\varphi)$  (siehe Gl.(52)) ein trigonometrisches Polynom ersten Grades.

$$f(\varphi) = 2 \left( \frac{b}{a} v_{ax} \cos \varphi + v_{ay} \sin \varphi \right)$$

Hier erhält man durch den Koeffizientenvergleich (siehe Gl.(61))

$$\gamma_0 = 0$$

$$\gamma_1 = - \frac{2b/a}{1+\tau} = - \frac{b/a(1+b/a)}{1+\tau} \quad (\tau = \frac{a-b}{a+b})$$

$$\delta_1 = - \frac{2}{1-\tau} = - (1+a/b)$$

$$\gamma_k = \delta_k = 0 \quad (k \geq 2)$$

für die Lösungsfunktion:

$$g(\varphi) = - \frac{b/a(1+b/a)}{1+\tau} v_{ax} \cos \varphi - (1+a/b) v_{ay} \sin \varphi \quad (72)$$

Nach Gl.(51) lautet dann die Funktion der Quellbelegung:

$$q(\varphi) = \frac{g(\varphi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} = - \frac{b/a(1+b/a) v_{ax} \cos \varphi + (1+a/b) v_{ay} \sin \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \quad (73)$$

Man ist also auf eine Quadraturformelmethode nicht angewiesen. Es ist jedoch interessant, einmal aufzuzeigen, wie schlecht in diesem Fall die Rechteckformel bei einem grossen Achsenverhältnis  $a/b$  ist, bzw. wie viele Stützstellen man bei Anwendung der Rechteckregel benötigt, um ein einigermaßen genaues Ergebnis zu erzielen. Aus diesem Grunde wurde mit Hilfe der elektronischen Rechanlage IBM 650 des Institutes für angewandte Mathematik der Universität Hamburg als Beispiel der Fall

$$v_{ax} = 1 \quad , \quad v_{ay} = 0 \quad [m/s]$$

bei einem Achsenverhältnis  $a/b = 8$

(Parallelströmung in Richtung der grösseren Achse.)

für mehrere Stützstellenzahlen durchgerechnet.

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgte iterativ, wobei die Iteration solange fortgesetzt wurde, bis die maximale Änderung der Funktionswerte relativ zum maximalen Funktionswert von einem Iterationsschritt zum nächsten absolut nicht mehr als  $5 \cdot 10^{-7}$  betrug. (6 gültige Ziffern des maximalen Funktionswertes.) Iterationsstop bei:

$$\frac{\max |g_{t+1}(y_{\mu}) - g_t(y_{\mu})|}{\max |g_t(y_{\mu})|} - 5 \cdot 10^{-7} < 0$$

In Tabelle 3 sind die Ergebnisse zum Teil wiedergegeben.

In den ersten beiden Spalten stehen die Stützstellenzahlen  $m$  und die benötigten Iterationsschritte  $t$ .

In Spalte 3 sind die maximalen Funktionswerte ( $-g(0)$  bzw.  $g(\pi)$ ) angegeben. Der besseren Übersicht halber wurden alle anderen errechneten Funktionswerte fortgelassen. Der exakte Wert ergibt sich aus Gleichung (72) zu:

$$-g_{\text{exakt}}(0) = g_{\text{exakt}}(\pi) = \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = 0,140625 \quad [m/s]$$

In Spalte 4 und 5 sind der absolute und der relative Fehler dieses Funktionswertes angegeben.

$$F = 0,140625 - |g(0)|$$

$$F_{\text{rel.}} = \frac{F}{0,140625} \cdot 100 \%$$

Schliesslich wurde noch der mittlere quadratische Fehler aller Funktionswerte bestimmt.

$$F_{\text{mittel}} = \sqrt{\frac{\sum_{\nu=0}^{m-1} [g(\frac{2\pi\nu}{m}) - 0,140625 \cos \frac{2\pi\nu}{m}]^2}{m}}$$

In dem Diagramm unterhalb von Tabelle 3 ist der relative Fehler des maximalen Wertes  $F_{\text{rel.}}$  über der Stützstellenzahl aufgetragen. Man erkennt, dass eine Rechenschiebergenaugigkeit ( etwa 0,1% ) erst bei einer Stützstellenzahl  $m = 28$  erreicht wird. ( Die Kurve gilt genau genommen nur für gerade Stützstellenzahlen. Es ist anzunehmen, dass die Werte für ungerade Stützstellenzahlen von der durchgestrahten Kurve etwas abweichen. )

Mittels der speziellen Formel würde man, da hier der extreme Fall vorliegt, dass  $g(y)$  ein trigonometrisches Polynom ersten Grades ist, schon bei 2 Stützstellen ( $y_0 = 0$ ,  $y_1 = \pi$ ) die beiden Funktionswerte  $g(0)$  und  $g(\pi)$  bis auf Abrundungsfehler exakt erhalten.

#### f.) Die Ellipse im Feld einer zweidimensionalen Quelle

Im vorhergehenden Beispiel konnte die Funktion der Quellbelegung in geschlossener Form angegeben werden. Das ist im allgemeinen nicht mehr der Fall, wenn sich die Ellipse in einer beliebigen, krummlinigen Strömung befindet. Man kann zwar immer die relative Anströmung und die sich daraus ergebende Störfunktion in eine Fourierreihe entwickeln und

dann mittels des Koeffizientenvergleichs die Fourierreihe der Lösungsfunktion angeben; im allgemeinen wird jedoch die Fourierentwicklung der Störfunktion Schwierigkeiten bereiten oder nur näherungsweise möglich sein. Letzteres ist z.B. dann der Fall, wenn die relative Anströmung nur an endlich vielen diskreten Punkten der Kontur bekannt ist. Hier bietet sich eine iterative Lösung der Integralgleichung nach der Quadraturformelmethode an.

Um für einen derartigen Fall noch einmal die Überlegenheit der speziellen Formel an Hand eines Beispiels aufzuzeigen, wird eine Ellipse im Feld einer einzelnen zweidimensionalen Quelle betrachtet.

Die Kontur der Ellipse sei wieder mit  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  angegeben. Die Quelle mit der Ergiebigkeit  $E$  [ $m^2/s$ ] befinde sich ( ausserhalb der Ellipse ) im Punkt  $(x_0, y_0)$ . Für das Potential und die von der Quelle induzierten Geschwindigkeitskomponenten gilt dann:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ v_{ax} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ v_{ay} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\end{aligned}$$

Dann lautet nach Gl.(52) die Störfunktion:

$$\begin{aligned}f(\varphi) &= 2 \left[ \frac{b}{a} v_{ax}(\varphi) \cos \varphi + v_{ay}(\varphi) \sin \varphi \right] \\ &= 2 \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{\frac{b}{a} (a \cos \varphi - x_0) \cos \varphi + (b \sin \varphi - y_0) \sin \varphi}{(a \cos \varphi - x_0)^2 + (b \sin \varphi - y_0)^2} \quad (74) \\ &= 2 \frac{1 - \frac{x_0}{a} \cos \varphi - \frac{y_0}{b} \sin \varphi}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 (\cos \varphi - \frac{x_0}{a})^2 + (\sin \varphi - \frac{y_0}{b})^2} \cdot \frac{E}{2\pi b}\end{aligned}$$

Die Funktion  $f(\varphi)$  hat in der komplexen Ebene dort eine Singularität, wo der Nenner von Gl.(74) verschwindet, also bei:

$$[a \cos(\varphi + i\tau_f) - x_0]^2 + [b \sin(\varphi + i\tau_f) - y_0]^2 = 0 \quad (75)$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach  $\tau_f$  ist in geschlossener Form möglich, jedoch etwas umständlich und soll deshalb hier nicht durchgeführt werden. Stattdessen soll eine andere Frage gestellt werden. Wenn die Einzelquelle auf der x-Achse liegt, wie weit muss sie dann vom Ellipsenmittelpunkt entfernt sein, damit die spezielle Formel mit Sicherheit der Rechteckformel überlegen ist?

Es ist anschaulich klar, dass für  $y_0 = 0$  und  $x_0 > a$  die Störfunktion bei  $\varphi = 0$  den grössten Buckel hat, und damit diejenige der komplexen Singularitäten, die der reellen Achse am nächsten liegt, sich ebenfalls bei  $\varphi = 0$  befindet. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \cos(0 + i\tau_f) &= \cos i\tau_f = \cosh \tau_f \\ \sin(0 + i\tau_f) &= \sin i\tau_f = i \sinh \tau_f \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich Gl.(75) zu:

$$(a \cosh \tau_f - x_0)^2 - b^2 \sinh^2 \tau_f = 0$$

Nach  $x_0$  aufgelöst ergibt sich:

$$x_0 = a \cosh \tau_f + b \sinh \tau_f = \frac{a+b}{2} e^{\tau_f} + \frac{a-b}{2} e^{-\tau_f} \quad (76)$$

Die analytische Fortsetzung des Kernes ist regulär innerhalb des Streifens

$$|\operatorname{Im} x| < \tau_k = \ln \left( \frac{a+b}{a-b} \right)$$

(siehe Gl.(55)). Soll die spezielle Formel der Rechteckformel überlegen sein, so muss nach der aus Gl.(46) gezogenen Folgerung  $\tau_f > 2\tau_k$  sein.

Da, wie nachgewiesen wurde,  $\tau_g = \tau_f$  ist, muss also

$$\tau_f > 2 \ln \left( \frac{a+b}{a-b} \right) \longrightarrow e^{\tau_f} > \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^2$$

sein. Setzt man diesen Wert in Gl.(76) ein, so folgt für den Punkt, bei dem die Überlegenheit der speziellen Formel zumindest fraglich ist:

$$x_0 = \frac{(a+b)^3}{2(a-b)^2} + \frac{(a-b)^3}{2(a+b)^2} = \frac{(a+b)^5 + (a-b)^5}{2(a^2 - b^2)^2}$$

Oder dimensionslos geschrieben:

$$\frac{x_0}{a} = \frac{(\frac{a}{b} + 1)^5 + (\frac{a}{b} - 1)^5}{2 \frac{a}{b} [(\frac{a}{b})^2 - 1]^2} \quad (77)$$

Bei einem Achsenverhältnis  $a/b = 8$  ergibt sich daraus:

$$x_0/a = 1,1945074 \quad (\gamma_0/b = 0)$$

Für diesen Punkt wurde die Quellbelegung der Ellipse sowohl nach der Rechteckformel als auch nach der speziellen Formel mit 12, 24, 36 und 48 Stützstellen iterativ bestimmt. (In Bezug auf die Iteration siehe Abschnitt 6e.) Die Ergiebigkeit der Einzelquelle wurde dabei, um die Rechnung dimensionslos durchführen zu können, so gewählt, dass

$$\frac{E}{2\pi b} = 1 \quad [m/s]$$

ist. Die errechneten Werte der Funktion  $g(\varphi)$  sind in Tabelle 4 (Rechteckformel) und 5 (Spezielle Quadraturformel) wiedergegeben. Dabei sind für  $m = 12$  nur die ersten 7 ( $n = 0, 1, \dots, 6$ ) Werte, (auf die anderen konnte aus Symmetriegründen verzichtet werden,) für  $m = 24, 36$  und  $48$  nur die mit diesen vergleichbaren Werte  $\frac{12^n}{m}$  angegeben.

Bei 48 Stützstellen stimmen die nach der Rechteckformel errechneten Werte fast mit denen überein, die nach der speziellen Quadraturformel bestimmt wurden. (Lediglich die beiden

absolut grössten Werte weisen eine Differenz von 1 bzw. 2 Einheiten in der letzten Stelle auf.) Man dürfte also diese Werte als genau bezeichnen können. Vergleicht man nun die Werte bei  $m = 12, 24$  und  $36$  mit den Werten bei  $m = 48$ , so sieht man, dass zwar die spezielle Formel der Rechteckformel überlegen, die Überlegenheit jedoch nur sehr gering ist. Eine Genauigkeit von  $0,1\%$  wird in beiden Fällen etwa erst bei  $m = 28$  ( wie auch im vorherigen Beispiel der Ellipse in Parallelströmung ) erreicht. Man kann also sagen, dass, wenn sich die Einzelquelle in diesem Punkt befindet ( $\tau_j = \tau_f = 2\tau_k$ ), beide Formeln tatsächlich etwa gleich gut, oder besser gesagt, gleich schlecht sind.

Ist dagegen die Einzelquelle sehr viel weiter vom Ellipsenmittelpunkt entfernt, ( siehe Tabelle 6 und 7,  $x_0/a \approx 8$  ), so liefert die spezielle Formel schon bei 12 Stützstellen ein auf 6 Ziffern genaues Ergebnis. Schon bei der unwahrscheinlich niedrigen Stützstellenzahl  $m = 6$  ( nur alle  $60^\circ$  eine Stützstelle ) ergibt die spezielle Formel relativ gute Werte. Dagegen ist bei  $m = 6$  der Ersatzfehler der Rechteckformel schon so gross, dass die Iteration nicht mehr konvergiert.

Ebenso deutlich kommt die Überlegenheit der speziellen Formel in Bild 2 zum Ausdruck. Hier ist die Funktion  $g(\psi)$  aufgetragen für den Fall, dass sich die Einzelquelle quer zur Ellipse im Punkt ( $x_0/a = 0, y_0/b = 3$ ) befindet. Die ausgezogene Kurve gibt die für  $m = 48$  nach der speziellen Formel errechneten Werte wieder. ( Die Werte für  $m = 24$  und  $36$  stimmen innerhalb der Zeichengenauigkeit mit dieser Kurve überein. ) Für  $m = 12$  weichen die Werte der Rechteckformel fast um  $100\%$  ab, während die Werte der speziellen Formel schon recht nahe an die genauen Werte herankommen.

### Literaturverzeichnis

- [1] E.J. Nyström : Über die praktische Auf lösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendungen auf die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Comment.phys.-math., Soc.Sci. Fenn. 4, Nr. 15 (1928)
- [2] H.Brakhage : Über die numerische Behandlung von Integralgleichungen nach der Quadraturformelmethode. Numerische Mathematik Bd.2.,H.3. (1960)
- [3] E.Martensen : Zur numerischen Behandlung des inneren Neumannschen und Robinschen Problems. ZAMM Band 39, Heft 9/11 (1959)
- [4] L.Collatz : Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer (1951)
- [5] P.Davis : On the Numerical Integration of Periodic Analytic Functions. On Numerical Approximation. Medison: The University of Wisconsin Press (1959)  
Herausgeber R.E. Langer
- [6] I.P.Natanson : Konstruktive Funktionentheorie. Akademie - Verlag Berlin (1955)
- [7] H.Behnke : Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.  
F.Sommer : Springer (1955)
- [8] A.Duschek : Vorlesungen über höhere Mathematik. Springer (1950) Band 2

Numerische Bestimmung des Integrals:

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}}_{g(x)} \underbrace{\frac{1}{2} \ln [2(1-\cos x)]}_{h(x)} dx \quad r=0,2$$

Tabelle 1      Rechteckformel

$v$	$g(x_v)$	$g(x_v) - g(0)$	$h(x_v)$	$[g(x_v) - g(0)] h(x_v)$
0	1,5	0	$-\infty$	0
1	1,3841033	- 0,1158967	- 0,6584791	0,0763156
2	1,1428571	- 0,3571429	0	0
3	0,9230769	- 0,5769231	0,3465736	- 0,1999463
4	0,7741935	- 0,7258065	0,5493062	- 0,3986900
5	0,6924358	- 0,8075642	0,6084787	- 0,4913856
6	0,6666667	- 0,8333333	0,6931472	- 0,5776226
7	0,6924358	- 0,8075642	0,6084787	- 0,4913856
8	0,7741935	- 0,7258065	0,5493062	- 0,3986900
9	0,9230769	- 0,5769231	0,3465736	- 0,1999463
10	1,1428571	- 0,3571429	0	0
11	1,3841033	- 0,1158967	- 0,6584791	0,0763156

$$\sum_{v=0}^{m-1} [g(x_v) - g(0)] h(x_v) = - 2,6050352$$

$$I_{R12} = \frac{2\pi}{m} \sum_{v=0}^{m-1} [g(x_v) - g(0)] h(x_v) = \underline{\underline{- 1,363993}}$$

Tabelle 2      Spezielle Quadraturformel

$v$	$g(x_v)$	$H_v$	$H_v g(x_v)$
0	1,5	- 2,45	- 3,675
1	1,3841033	- 0,6511537	- 0,9012639
2	1,1428571	- 0,0583333	- 0,0666667
3	0,9230769	0,4166667	0,3846154
4	0,7741935	0,475	0,3677419
5	0,6924358	0,7344870	0,5085851
6	0,6666667	0,6166667	0,4111111
7	0,6924358	0,7344870	0,5085851
8	0,7741935	0,475	0,3677419
9	0,9230769	0,4166667	0,3846154
10	1,1428571	- 0,0583333	- 0,0666667
11	1,3841033	- 0,6511537	- 0,9012639

$$\sum_{v=0}^{m-1} H_v g(x_v) = - 2,6778653$$

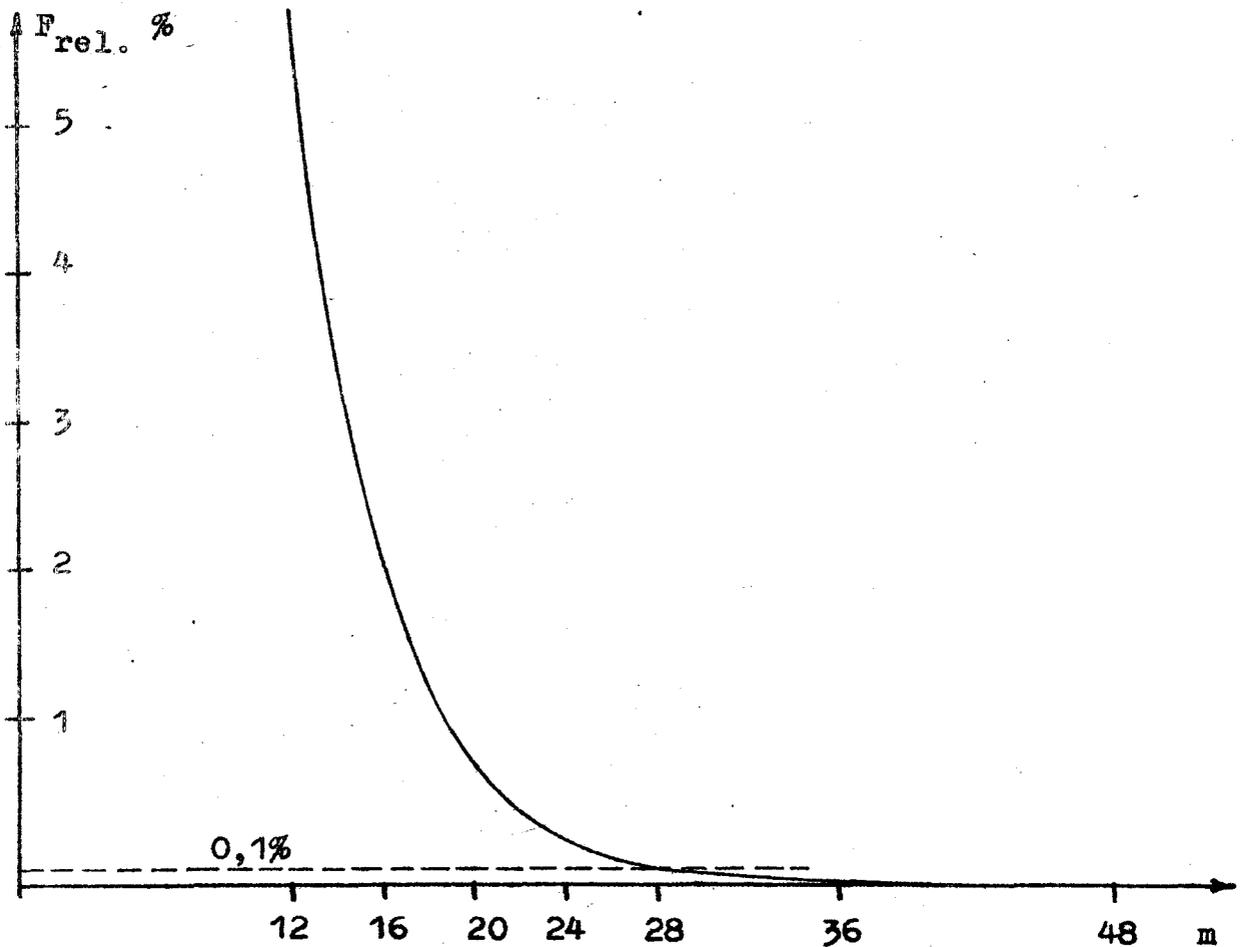
$$I_{S12} = \frac{2\pi}{m} \sum_{v=0}^{m-1} H_v g(x_v) = \underline{\underline{- 1,402127}}$$

### Ellipse in Parallelströmung

Bestimmung der Funktion  $g(\varphi) = q(\varphi) \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$   
mit Hilfe der Rechteckformel.

Tabelle 3

m	t	-g(o)	F	F <sub>rel.</sub>	F <sub>mittel</sub>
12	44	0,132688	0,007937	5,65 %	0,005612
16	28	0,137706	0,002919	2,08 %	0,002064
20	25	0,139555	0,001070	0,761 %	0,000757
24	24	0,140233	0,000392	0,279 %	0,000277
36	24	0,140606	0,000019	0,0135%	0,000014
48	24	0,140624	0,000001	0,0007%	0,000001
exakt		0,140625	—	—	—



Ellipse im Feld einer Quelle.

$$x_0: a = 1,1945074$$

$$y_0: b = 0$$

Tabelle 4      Rechteckformel

$\frac{12A}{m}$ \ m	12	24	36	48
0	0,97680	1,09739	1,10485	1,10523
1	0,00417	-0,01585	-0,01685	-0,01690
2	-0,16077	-0,17066	-0,17116	-0,17119
3	-0,11739	-0,12334	-0,12365	-0,12366
4	-0,08839	-0,09268	-0,09290	-0,09291
5	-0,07449	-0,07805	-0,07823	-0,07824
6	-0,07041	-0,07376	-0,07393	-0,07394

Tabelle 5      Spezielle Quadraturformel

$\frac{12A}{m}$ \ m	12	24	36	48
0	1,06368	1,10441	1,10523	1,10525
1	-0,00725	-0,01710	-0,01690	-0,01691
2	-0,17911	-0,17136	-0,17119	-0,17119
3	-0,11492	-0,12386	-0,12366	-0,12366
4	-0,10296	-0,09311	-0,09291	-0,09291
5	-0,06822	-0,07845	-0,07824	-0,07824
6	-0,08442	-0,07415	-0,07394	-0,07394

ellipse im reid einer quelle.

$$x_0: a = 8,508$$

$$y_0: b = 0$$

Tabelle 6      Rechteckformel

$\frac{m}{n}$ \ $m$	6	12	24	36
0		0,00223495	0,00236591	0,00237239
1		0,00181919	0,00192408	0,00192927
2	keine Konvergenz	0,00082680	0,00087154	0,00087374
3		-0,00025053	-0,00026770	-0,00026856
4		-0,00108132	-0,00114368	-0,00114675
5		-0,00156869	-0,00165642	-0,00166075
6		-0,00172584	-0,00182156	-0,00182628

Tabelle 7      Spezielle Quadraturformel

$\frac{m}{n}$ \ $m$	6	12	24 und 36
0	0,00236596	0,00237272	0,00237272
1		0,00192954	0,00192953
2	0,00088036	0,00087385	0,00087385
3		-0,00026860	-0,00026861
4	-0,00115310	-0,00114692	-0,00114692
5		-0,00166097	-0,00166097
6	-0,00182044	-0,00182652	-0,00182652

