98 | 1962

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr.-Ing. Maria Kirsch

Das Rotationsellipsoid in Wandnähe nach Eisenberg

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Das Rotationsellipsoid in Wandnähe nach Eisenberg

Von Dr.-Ing. Maria Kirsch

Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

In seiner Arbeit „An asymptotic solution for the flow about an ellipsoid near a plane wall" befaßt sich Eisenberg [1] mit den Strömungsverhältnissen um ein Ellipsoid in unbegrenzter Flüssgkeit, in welcher sich eine ebene Wand befindet; er untersucht theoretisch und experimentell die Druckänderungen am Ellipsoid, die durch die Wand bewirkt werden. Das Ellipsoid dient ihm hierbei als gute Näherung für konkrete Schiffskörper, deren theoretische Behandlung mit großen Schwierigkeiten verbunden ist. Sind l und b die Halbachsen des Ellipsoids, mit $l > b$ und $y = z = b$ für $x = 0$, so bezeichnet $z = h$ den Wandabstand von der Mittelebene des Ellipsoids bei $z = 0$. Für seine Untersuchung hat Eisenberg fast ausschließlich große Wandnähe vorausgesetzt, nämlich Verhältnisse $h/b \leq 2$ und $h/b = 3$. Für das Ellipsoid gelten die Achsenverhältnisse $l/b = 4$ und $l/b = 6$.

In der vorliegenden Arbeit soll der Versuch unternommen werden, auf Grund der von Eisenberg abgeleiteten Formeln die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in einzelnen Punkten der Oberfläche für Verhältnisse $l/b > 6$ und $2 \leq h/b \leq 10$ zu bestimmen. Der Zweck der Rechnungen ist, Anhaltspunkte zu schaffen für die Erhöhung der Geschwindigkeit und damit des Widerstandes von Schiffen im Flachwasser.

Das Problem entspricht etwa der von D. W. Taylor [2] aufgeworfenen Frage, wie weit eine Wand von einem Körper in unbegrenzter Flüssigkeit entfernt sein muß, damit diese Wand die Strömung um den Körper nicht mehr beeinflußt.

Zunächst soll ein kurzer Überblick über die von Eisenberg entwickelte Methode gegeben werden mit Angabe der für die Rechnung benötigten Formeln.

Gesucht ist das Geschwindigkeitspotential Φ der Strömung um das Rotationsellipsoid in Wandnähe, dessen partielle Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen die Geschwindigkeitskomponenten in diesen Richtungen ergeben.

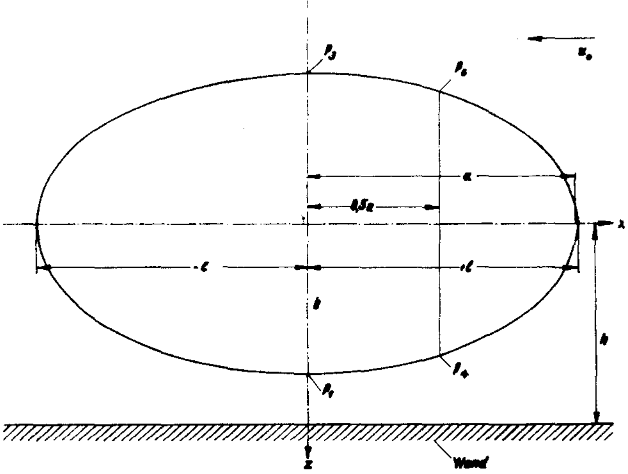

Abb. 1: Das Rotationsellipsoid in Wandnähe (Längsschnitt)

Das Koordinatensystem ist, wie bereits erwähnt, festgelegt (Abb. 1): Die horizontale Mittelebene des Ellipsoids liegt in der xy-Ebene, die Längsachse verläuft in x-Richtung, die z-Achse ist vertikal nach unten gerichtet, die Halbachsen sind $x = l$ und $y = z = b$. Der Wandabstand ist $z = h$.

Die Flüssigkeit sei inkompressibel und ideal und habe die Translationsgeschwindigkeit u_0; das Ellipsoid befinde sich in Ruhe.

Eisenberg führt zur Vereinfachung der Rechnung halbelliptische Koordinaten ein. Ausgehend von der Lösung für das Ellipsoid in unbegrenzter Flüssigkeit, leitet er das Geschwindigkeitspotential bei Vorhandensein einer Wand durch Spiegelung des Ellipsoids an dieser Wand ab. Die exakte Lösung liefert für das Geschwindigkeitspotential unendliche konvergente Reihen von Legendreschen Polynomen.

Wegen der Kompliziertheit dieses Ausdrucks und dem damit verbundenen großen Rechenaufwand, der zur Auswertung erforderlich ist, gibt Eisenberg Näherungslösungen.

In der vorliegenden Arbeit soll die zweite Näherung gebraucht werden, für welche Eisenberg die folgenden Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten erhält:

$$\frac{u_x}{u_0} = -1 - \frac{B}{c}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\,\frac{\xi'+1}{\xi'-1}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{1}{\zeta\,\xi'^3} + \frac{1}{\beta\,\xi^3}\right) - \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi'}\right)\right\}$$

$$\frac{u_y}{u_0} = \frac{B}{c}\left(\frac{x}{c}\right)\left\{\frac{y}{c}\,[\beta(\xi^3-\xi)]^{-1} + \left(\frac{y}{a} - 2\,\frac{h}{a}\right)[\zeta(\xi'^3-\xi')]^{-1}\right\}$$

$$\frac{u_z}{u_0} = \frac{B}{c}\left(\frac{x}{c}\right)\left(\frac{z}{c}\right)\left\{[\beta(\xi^3-\xi)]^{-1} + \left[\zeta(\xi'^3-\xi')\right]^{-1}\right\}$$

mit dem Brennpunktabstand $c = \sqrt{l^2 - b^2}$,

$$B = -c\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\,\frac{1+e_0}{1-e_0}\right) - \left(\frac{e_0}{1-e_0^2} + \frac{1}{\eta}\right)\right]^{-1}$$

mit

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{4}{e_0^2}\left(\frac{h}{l}\right)^2}$$

und

$$e_0 = \frac{c}{l}\,,$$

und

$$\xi = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,,\quad \xi' = \sqrt{\frac{\gamma+\zeta}{2}}$$

mit

$$\alpha = 1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 4\left(\frac{x}{c}\right)^2}$$

$$\gamma = a + 4\left(\frac{h}{c}\right)^2 - 4\,\frac{h\,y}{c^2}$$

$$\zeta = \sqrt{\gamma^2 - 4\left(\frac{x}{c}\right)^2}$$

Es sind in der vorliegenden Veröffentlichung nur Berechnungen von $\frac{u_x}{u_0}$ durchgeführt worden, und zwar für die Verhältnisse $l/b = 6{,}0892$, $8{,}06376$, $10{,}0500$ und $12{,}04140$ und für $h/b = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ und $h/b \to \infty$. Der Fall $h/b \to \infty$ bedeutet, daß die Wand unendlich fern ist, d. h. daß die Flüssigkeit praktisch unbegrenzt, ohne Wand ist. Die krummen Zahlenwerte für l/b ergeben sich aus der Tatsache, daß diese Rechnungen ursprünglich als Vergleichsrechnungen zu Flachwasserergebnissen [3] durchgeführt wurden, bei welchen nicht von den Körpern selbst, sondern von den entsprechenden kontinuierlichen, axialen Singularitätenverteilungen ausgegangen wurde, für welche die Verhältnisse $a/b = 6, 8, 10$ und 12 galten, wenn a die halbe Länge der Singularitätenverteilung bezeichnet. So sind deshalb auch im Falle des Rotationsellipsoids die Verhältnisse a/b zugrunde gelegt und hieraus die Achsenverhältnisse l/b berechnet worden.

Tabelle 1:

Die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in Wandnähe und in unbegrenzter Flüssigkeit

a) $l/b = 6{,}0892$, bzw. $a/b = 6$

h / b	$\frac{\sqrt{F_B/2}}{h}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_o}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_o}$
2	0,6267	0	0	1	1,06092	0,5	0	0,8699	1,04474
			± 1	0	1,05501		± 0,8699	0	1,04182
			0	— 1	1,05181		0	— 0,8699	1,04035
3	0,4178	0	0	1	1,05181	0,5	0	0,8699	1,03974
			± 1	0	1,04951		± 0,8699	0	1,03868
			0	— 1	1,04822		0	— 0,8699	1,03802
4	0,3133	0	0	1	1,04810	0,5	0	0,8699	1,03775
			± 1	0	1,04709		± 0,8699	0	1,03724
			0	— 1	1,04647		0	— 0,8699	1,03689
6	0,2089	0	0	1	1,04557	0,5	0	0,8699	1,03621
			± 1	0	1,04530		± 0,8699	0	1,03605
			0	— 1	1,04512		0	— 0,8699	1,03593
8	0,1567	0	0	1	1,04484	0,5	0	0,8699	1,03568
			± 1	0	1,04475		± 0,8699	0	1,03562
			0	— 1	1,04468		0	— 0,8699	1,03557
10	0,1253	0	0	1	1,04456	0,5	0	0,8699	1,03546
			± 1	0	1,04452		± 0,8699	0	1,03543
			0	— 1	1,04449		0	— 0,8699	1,03541
∞	0	0	0	1	1,04427	0,5	0	0,8699	1,03220
			± 1	0	1,04427		± 0,8699	0	1,03220
			0	— 1	1,04427		0	— 0,8699	1,03220

Tabelle 2:

Die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in Wandnähe und in unbegrenzter Flüssigkeit

b) $l / b = 8{,}06376$, bzw. $a / b = 8$

h / b	$\frac{\sqrt{F_B/2}}{h}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_o}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_o}$
2	0,6267	0	0	1	1,04176	0,5	0	0,8683	1,02431
			± 1	0	1,03778		± 0,8683	0	1,02239
			0	— 1	1,03571		0	— 0,8683	1,02136
3	0,4178	0	0	1	1,03556	0,5	0	0,8683	1,02099
			± 1	0	1,03379		± 0,8683	0	1,02020
			0	— 1	1,03272		0	— 0,8683	1,01970
4	0,3133	0	0	1	1,03266	0,5	0	0,8683	1,01952
			± 1	0	1,03177		± 0,8683	0	1,01912
			0	— 1	1,03119		0	— 0,8683	1,01884
6	0,2089	0	0	1	1,03034	0,5	0	0,8683	1,01828
			± 1	0	1,03006		± 0,8683	0	1,01813
			0	— 1	1,02987		0	— 0,8683	1,01802
8	0,1567	0	0	1	1,02957	0,5	0	0,8683	1,01779
			± 1	0	1,02946		± 0,8683	0	1,01773
			0	— 1	1,02938		0	— 0,8683	1,01768
10	0,1253	0	0	1	1,02926	0,5	0	0,8683	1,01757
			± 1	0	1,02921		± 0,8683	0	1,01754
			0	— 1	1,02917		0	— 0,8683	1,01751
∞	0	0	0	1	1,02891	0,5	0	0,8683	1,02199
			± 1	0	1,02891		± 0,8683	0	1,02199
			0	— 1	1,02891		0	— 0,8683	1,02199

Tabelle 3:

Die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in Wandnähe und in unbegrenzter Flüssigkeit

c) $l/b = 10{,}0500$, bzw. $a/b = 10$

h / b	$\frac{\sqrt{F_{\boxtimes}/2}}{h}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_0}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_0}$
2	0,6267	0	0	1	1,03064	0,5	0	0,8675	1,02340
			± 1	0	1,02788		± 0,8675	0	1,02175
			0	— 1	1,02637		0	— 0,8675	1,02086
3	0,4178	0	0	1	1,02629	0,5	0	0,8675	1,02060
			± 1	0	1,02494		± 0,8675	0	1,01988
			0	— 1	1,02409		0	— 0,8675	1,01945
4	0,3133	0	0	1	1,02405	0,5	0	0,8675	1,01930
			± 1	0	1,02331		± 0,8675	0	1,01895
			0	— 1	1,02281		0	— 0,8675	1,01871
6	0,2089	0	0	1	1,02204	0,5	0	0,8675	1,01822
			± 1	0	1,02178		± 0,8675	0	1,01809
			0	— 1	1,02158		0	— 0,8675	1,01799
8	0,1567	0	0	1	1,02128	0,5	0	0,8675	1,01777
			± 1	0	1,02112		± 0,8675	0	1,01771
			0	— 1	1,02109		0	— 0,8675	1,01766
10	0,1253	0	0	1	1,02095	0,5	0	0,8675	1,01755
			± 1	0	1,02090		± 0,8675	0	1,01752
			0	— 1	1,02086		0	— 0,8675	1,01750
∞	0	0	0	1	1,02055	0,5	0	0,8675	1,01611
			± 1	0	1,02055		± 0,8675	0	1,01611
			0	— 1	1,02055		0	— 0,8675	1,01611

Tabelle 4:

Die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in Wandnähe und in unbegrenzter Flüssigkeit

d) $l/b = 12{,}04140$, bzw. $a/b = 12$

h / b	$\frac{\sqrt{F_{\boxtimes}/2}}{h}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_0}$	x/a	y/b	z/b	$\frac{u_x}{u_0}$
2	0,6267	0	0	1	1,02355	0,5	0	0,8670	1,01858
			± 1	0	1,02155		± 0,8670	0	1,01726
			0	— 1	1,02043		0	— 0,8670	1,01654
3	0,4178	0	0	1	1,02039	0,5	0	0,8670	1,01630
			± 1	0	1,01934		± 0,8670	0	1,01574
			0	— 1	1,01867		0	— 0,8670	1,01538
4	0,3133	0	0	1	1,01864	0,5	0	0,8670	1,01526
			± 1	0	1,01803		± 0,8670	0	1,01496
			0	— 1	1,01761		0	— 0,8670	1,01475
6	0,2089	0	0	1	1,01694	0,5	0	0,8670	1,01433
			± 1	0	1,01669		± 0,8670	0	1,01422
			0	— 1	1,01651		0	— 0,8670	1,01413
8	0,1567	0	0	1	1,01622	0,5	0	0,8670	1,01394
			± 1	0	1,01612		± 0,8670	0	1,01388
			0	— 1	1,01603		0	— 0,8670	1,01384
10	0,1253	0	0	1	1,01589	0,5	0	0,8670	1,01373
			± 1	0	1,01584		± 0,8670	0	1,01370
			0	— 1	1,01580		0	— 0,8670	1,01368
∞	0	0	0	1	1,01545	0,5	0	0,8670	1,01237
			± 1	0	1,01545		± 0,8670	0	1,01237
			0	— 1	1,01545		0	— 0,8670	1,01237

Berechnet wurde die Geschwindigkeit u_x in den Hauptspantpunkten der Ellipsoidoberfläche P_1 ($x=0$; $y=0$; $z=b$), P_2 ($x=0$; $y=b$; $z=0$) und P_3 ($x=0$; $y=0$; $z=-b$) (die Berechnung für den Punkt P ($x=0$; $y=-b$; $z=0$) erübrigte sich, da die Geschwindigkeit in diesem Punkt aus Symmetriegründen gleich der Geschwindigkeit im Punkt P_2 mit $y=+b$ ist) und in den entsprechenden Punkten bei $x = 0{,}5a$. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle zusammengestellt, und zwar für jeweils einen bestimmten Wert l/b in Abhängigkeit nicht nur von dem Verhältnis h/b, welches den Wandabstand angibt, sondern auch in Abhängigkeit von dem von Schlichting [4] eingeführten Parameter $\frac{\sqrt{F_{\otimes}/2}}{h}$, der von der Schiffstheorie her dem Parameter h/b vorzuziehen ist. (Mit $F_{\otimes}$ ist die Hauptspantfläche des Körpers bezeichnet, die im Falle der Rotationskörper den Wert πb^2 hat). Eigentlich ist der von Schlichting eingeführte Parameter $\sqrt{F_{\otimes}}/h$; da aber bei Schlußfolgerungen für Schiffe nur das halbe Rotationsellipsoid zu berücksichtigen ist, so entsprechen die für das Rotationsellipsoid erhaltenen Werte $\sqrt{F_{\otimes}/2}/h$ den Parameterwerten für Schiffe. In den Abb. 2 und 3 sind die Geschwindigkeiten bei $x = 0$ und $x = 0{,}5a$ über $\sqrt{F_{\otimes}/2}/h$ aufgetragen.

Man erkennt aus den Tabellen 1-3, daß ganz allgemein die Geschwindigkeit am Hauptspant stets höher ist als bei $x = 0{,}5a$, was zu erwarten war, da bei schlanken Körpern, zu denen das Rotationsellipsoid mit dem Schärfegrad $\varphi = {}^2/_3$ zählt, die keine Anschwellungen oder Wülste aufweisen, stets die Maximalgeschwindigkeit am Hauptspant auftritt. Weiterhin fällt auf, daß die Geschwindigkeitsverteilung um jeweils einen bestimmten Querschnitt nicht konstant ist, was sich aus dem einseitigen Wandeinfluß erklärt.

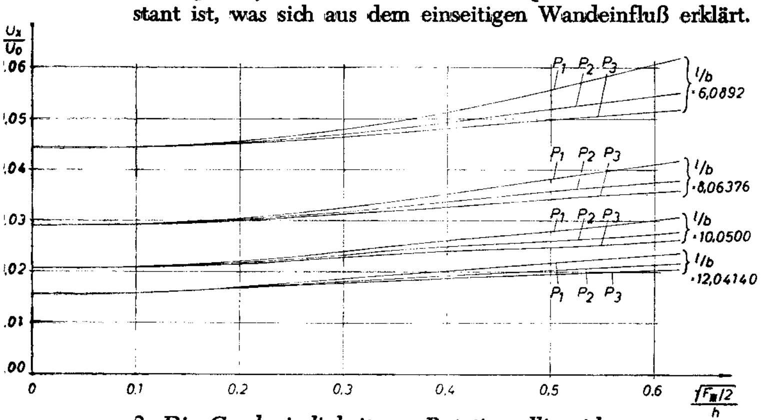

Abb. 2: Die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in Wandnähe in den Hauptspantpunkten $P_1(0;0;b)$; $P_2(0;\pm b;0)$; $P_3(0;0;-b)$

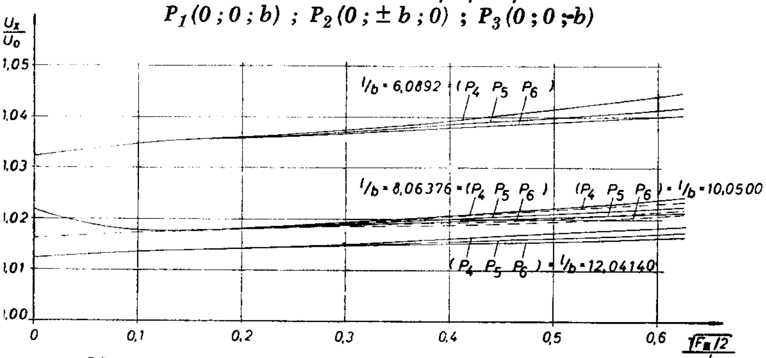

Abb. 3: Die Geschwindigkeit am Rotationsellipsoid in Wandnähe in den Punkten bei $x = 0{,}5a$

$$l/b = 6{,}5892 \left\{ \begin{array}{l} P_4\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ 0{,}8699\,b) \\ P_5\,(0{,}5\,a;\ \pm 0{,}8699\,b;\ 0\ ) \\ P_6\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ -0{,}8699\,b) \end{array} \right.$$

$$l/b = 8{,}06376 \left\{ \begin{array}{l} P_4\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ 0{,}8683\,b) \\ P_5\,(0{,}5\,a;\ \pm 0{,}8683\,b;\ 0\ ) \\ P_6\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ -0{,}8683\,b) \end{array} \right.$$

$$l/b = 10{,}0500 \left\{ \begin{array}{l} P_4\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ +0{,}8675\,b) \\ P_5\,(0{,}5\,a;\ \pm 0{,}8675\,b;\ 0\ ) \\ P_6\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ -0{,}8675\,b) \end{array} \right.$$

$$l/b = 12{,}04140 \left\{ \begin{array}{l} P_4\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ 0{,}8670\,b) \\ P_5\,(0{,}5\,a;\ \pm 0{,}8670\,b;\ 0\ ) \\ P_6\,(0{,}5\,a;\ 0\ ;\ -0{,}8670\,b) \end{array} \right.$$

Je weiter die einzelnen Querschnittspunkte von der Wand entfernt sind, desto geringer wird der Wandeinfluß. So ist beispielsweise für den Punkt P_1 (0; 0; b), also den Punkt, welcher der Wand am nächsten ist, für $a/b = 6$ die Geschwindigkeit $\frac{u_x}{u_0} = 1{,}06092$, für die Punkte am Hauptspant in der x y-Ebene $P_{2,\,2a}$ (0; + b; 0) die Geschwindigkeit $\frac{u_x}{u_0} = 1{,}05501$, also schon erheblich geringer als im Punkt P_1, und für den Hauptspantpunkt größter Wandferne P_3 (0; 0; — b) ist $\frac{u_x}{u_0} = 1{,}05181$; es ist also eine weitere Geschwindigkeitsabnahme gegenüber dem Punkt P_2 zu verzeichnen. Diese Tendenz gilt für sämtliche Querschnitte. Man sieht weiterhin, daß für $h/b = 10$ der Einfluß der Wand auf jeden Fall vernachlässigt werden kann, ein Ergebnis, welches die Aussagen und Untersuchungen von D. W. Taylor [2] bestätigt. Man kann sogar sagen, daß praktisch bereits für $h/b = 6$ der Wandeinfluß vernachlässigbar ist.

Um aus der Geschwindigkeit die Erhöhung des Reibungswiderstandes für das Rotationsellipsoid in Wandnähe berechnen zu können, müßte man nicht nur die x-Komponente der Geschwindigkeit u_x, sondern die Tangentialgeschwindigkeit u_t kennen, die sich aus den drei Komponenten u_x, u_y, u_z ergibt, und nicht nur die Geschwindigkeit in den angegebenen Punkten, sondern den gesamten Geschwindigkeitsverlauf um den Körper, um daraus den Mittelwert der Geschwindigkeit zu bestimmen, der für die Widerstandszunahme maßgeblich ist. Grundsätzliche Schwierigkeiten für die Berechnung bestehen nicht. In der vorliegenden Veröffentlichung ist davon jedoch Abstand genommen worden, da diese Rechnungen eigentlich nur dem Vergleich mit Flachwasserergebnissen dienten. Jedoch hoffe ich, daß durch diesen Beitrag die Theorie und Methode von Eisenberg einem daran interessierten Kreis nahegebracht wird.

Zu dem Vergleich mit Flachwasserergebnissen ist zu sagen, daß die Effekte im Flachwasser stets erheblich stärker sein werden als im Falle einer Wand in unbegrenzter Flüssigkeit; dies ergibt sich auch aus den Untersuchungen [3], aus welchen ebenfalls hervorgeht, daß die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten eines Querschnittes im Flachwasser nur geringfügige Abweichungen aufweist, daß also die Geschwindigkeitsverteilung um einen Querschnitt im Flachwasser praktisch konstant ist, im Gegensatz zu dem Falle eines Körpers in Wandnähe, bei welchem die Geschwindigkeit um einen Querschnitt stets eine monoton abnehmende Funktion des Wandabstandes des jeweiligen Punktes ist.

Zum Schluß möchte ich Herrn cand. arch. nav. W. Fürste, welcher den größten Teil der Berechnungen durchgeführt hat, meinen Dank aussprechen.

Literatur

[1] Eisenberg, Ph.: An asymtotic solution for the flow about an ellipsoid near a plane wall. (Hydrodynamics Laboratory. California Institute of Technology. Pasadena. Report N-57.)

[2] Taylor, D. W.: On solid stream forms and the depth of water necessary to avoid abnormal resistance of ships. (Transactions of the Institution of Naval Architects. Vol. 36, S. 234—247, 13 Fig., 1895.)

[3] Kirsch, M.: Der Einfluß beschränkter Wassertiefe auf den Widerstand. (Noch nicht veröffentlicht.)

[4] Schlichting, O., und Strohbusch: Schiffswiderstand auf beschränkter Wassertiefe. (Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft. Bd. 35, S. 127—148, 1934.)