

527 | November 1992

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Thomas Knaack

### Untersuchung der Struktur des Reynolds Tensorfeldes in einer dreidimensionalen Strömung

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

# **Untersuchung der Struktur des Reynolds Tensorfeldes in einer dreidimensionalen Strömung**

Thomas Knaack, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1992

ISBN: 3-89220-527-2

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 527

Untersuchung der Struktur  
des Reynolds Tensorfeldes  
in einer dreidimensionalen Strömung

Thomas Knaack

November 1992

Untersuchung der Struktur des Reynolds-Tensorfeldes  
in einer  $n$ -dimensionalen Strömung

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereichs Physik  
der Universität Hamburg

vorgelegt von  
Thomas Knaack  
aus Hamburg

Hamburg

1992

Gutachter der Dissertation: Dr. J. Kux  
Prof. Dr. F.-W. Büßer

Gutachter der Disputation: Prof. Dr. K. Wieghardt  
Prof. Dr. D. Vogt

Datum der Disputation: 9.11.1992

Sprecher des  
Fachbereichs Physik und  
Vorsitzender des  
Promotionsausschusses: Prof. Dr. G. Mack

## Zusammenfassung

Mit einem Laser-Doppler-Velocimeter wurden die drei Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors und alle sechs Komponenten des Reynoldstensors gemessen. Die Messungen wurden im Nachstrom eines Schiffdoppelmodells im Windkanal durchgeführt.

Die ersten partiellen räumlichen Ableitungen dieser Strömungsgrößen wurden vollständig berechnet. Für die Meßergebnisse der Komponenten des Reynoldstensors wurde eine Fehlerkorrektur eingeführt, die berücksichtigt, daß die Meßrichtungen des Dreikomponenten-Velocimeters nicht orthogonal sind.

Neben den Verteilungen der mittleren Geschwindigkeiten, dem Turbulenzgrad bzw. der kinetischen Energie der Turbulenz wurden u.a. Ergebnisse für die Reynoldskräfte und den Lambvektor gezeigt.

Annahmen einiger Turbulenzmodelle, die für numerische Berechnungsverfahren von Strömungsfeldern wichtig sind, wurden untersucht, indem die Meßergebnisse direkt in die postulierten Zusammenhänge zwischen den mittleren Geschwindigkeiten und den turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen eingesetzt wurden. So wurde z.B. die turbulente Scheinzähigkeit aus den Meßdaten berechnet, und die experimentellen Ergebnisse wurden mit theoretischen Voraussagen verglichen.

## Abstract

The three components of the mean velocity vector and all six components of the Reynoldstensor have been measured using the Laser-Doppler-Velocimeter technique. Measurements have been carried out in the wake of a ship-double-model in a wind tunnel.

All of the first partial spatial derivatives of experimental results have been calculated. In order to increase the accuracy of the components of the Reynoldstensor an errorcorrection has been introduced, considering the influence of nonorthogonal measuring directions of the three-component velocimeter.

Distributions of the mean velocity, the intensity of turbulence respectively the kinetic energy of turbulence have been presented as well as results of the Reynoldsforces and of the Lambvector.

Some assumptions of turbulence modeling important in computational fluid dynamics have been investigated by substituting experimental results directly into postulated relationships between mean velocity and turbulent velocity fluctuations. The eddy-viscosity has been calculated basing on experimental data and the results thereof have been compared with theoretical predictions.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>4</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Einführung in die Theorie der Turbulenz</b>	<b>8</b>
2.1 Grundgleichungen der Strömungslehre . . . . .	8
2.2 Korrelationen der turbulenten Schwankungen . . . . .	10
2.3 Turbulenzmodellierung . . . . .	13
<b>3 Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>17</b>
3.1 Zielsetzung der Experimente . . . . .	18
3.2 Durchführung der Messungen . . . . .	20
3.3 Genauigkeiten von Meßgrößen der Turbulenz . . . . .	22
3.3.1 Statistische Fehler bei LDV-Messungen . . . . .	23
3.3.2 Theorie des Frequenzfehlers . . . . .	26
3.3.3 Experimentelle Bestimmung des Frequenzfehlers . . . . .	27
3.3.4 Korrektur des Frequenzfehlers . . . . .	33
3.4 Allgemeine Fehlerbetrachtung der Meßgrößen . . . . .	38
<b>4 Ergebnisse der Experimente</b>	<b>43</b>
4.1 Vergleich zwischen Experimenten und Berechnungsverfahren . . . . .	43
4.2 Experimentelle Ergebnisse zu Grundlagen der Strömungstheorie . . . . .	48
4.2.1 Weiterführende Auswertungen von Meßergebnissen . . . . .	48
4.2.2 Ergebnisse aus Meßgebiet 1 . . . . .	52
4.2.3 Ergebnisse aus Meßgebiet 2 . . . . .	62
4.2.4 Ergebnisse aus Meßgebiet 3 . . . . .	70
4.2.5 Zusammenfassung der Meßergebnisse . . . . .	80
<b>5 Ausblick</b>	<b>83</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>84</b>
<b>Literatur</b>	<b>86</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>89</b>

<b>Anhang</b>	<b>92</b>
<b>A Bestimmung zeitlich gemittelter Strömungsgrößen aus Meßwerten der momentanen Geschwindigkeit</b>	<b>92</b>
A.1 Das Koordinatensystem der Meßrichtungen . . . . .	92
A.2 Anpassung einer Gaußfunktion an die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeiten . . . . .	93
<b>B Ableitungen von experimentellen Daten</b>	<b>97</b>
<b>C Gerätespezifische Eigenschaften des Frequenzfehlers</b>	<b>100</b>
C.1 Die Frequenzfehlerkonstante . . . . .	100
C.2 Shiftfrequenz . . . . .	102
C.3 Der Frequenzfehler in Abhängigkeit von den Meßrichtungen . . . . .	103

## Vorwort

Herrn Dr. J. Kux danke ich für die ausführliche fachliche Betreuung dieser Arbeit und für die Übernahme des Erstgutachtens.

Herrn Prof. Dr. F.-W. Büßer möchte ich für sein Interesse am Fortgang der Arbeit und für die Übernahme des Zweitgutachtens danken.

Für seine wohlwollende Unterstützung und zahlreiche Anregungen danke ich Herrn Prof. Dr. K. Wieghardt.

Sowohl während der Experimente als auch bei theoretischen Untersuchungen war Herr U. Gietz stets ein kritischer Diskussionspartner. Dafür möchte ich Herrn Gietz recht herzlich danken.

Ferner möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Instituts für Schiffbau bedanken, die an der Durchführung der Experimente beteiligt waren.

Insbesondere danke ich Herrn H. Thiemann, Frau I. Krüger und Frau D. Lausch. Durch ihre Hilfe war es möglich, auch spontane Ideen kurzfristig zu verwirklichen.

Hamburg, im Juli 1992

Thomas Knaack

# 1 Einleitung

In der Strömungslehre wird die Bewegung eines Mediums um einen Körper durch ein orts- und zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld beschrieben. Die lokalen Geschwindigkeiten sind in den meisten technisch relevanten Strömungen unregelmäßigen Schwankungen unterworfen. Diese Schwankungen nennt man *Turbulenz*.

Prandtl [33] entwirft das Bild der Turbulenz als *unregelmäßig wirbelnde Mischbewegungen*, mit denen die Geschwindigkeiten durchsetzt sind. Rotta [34] kennzeichnet turbulente Strömungen durch die Eigenschaften *unregelmäßige Wirbelströmung* und *dreidimensional instationär*.

Die Turbulenz wirkt in verschiedenen Gebieten des Strömungsfeldes unterschiedlich stark. Ist sie im beruhigten Medium vor dem Körper und in der Außenströmung vernachlässigbar klein, so kommt ihr in der Nähe der Körperoberfläche – in der *Grenzschicht* – eine entscheidende Bedeutung zu. Die Reibungskräfte, die das Medium auf den Körper ausübt, sind in der Grenzschicht wesentlich stärker von den Einfüssen der Turbulenz als von der Zähigkeit des Mediums geprägt.

Die turbulenten Schwankungen der Geschwindigkeiten sind in den Einzelheiten nicht deterministisch bestimmbar. In theoretischen Betrachtungen wie im Experiment werden daher die statistischen Mittelwerte der Geschwindigkeiten gebildet. Die *turbulenten Schwankungen* sind die Abweichungen von diesen Mittelwerten. In den zeitlich gemittelten Bewegungsgleichungen tauchen die turbulenten Schwankungen im *Reynolds'schen Spannungstensor* auf.

Die Struktur des *Reynolds'schen Tensorfeldes* wird in dieser Arbeit unter zwei Teilaspekten diskutiert.

Auf der einen Seite sind die sechs verschiedenen Komponenten des symmetrischen Reynoldstensors von der Ortskoordinate abhängig. Diese räumliche Verteilung des Reynoldstensors wird als *Struktur im Ortsraum* angesehen. Aus den partiellen räumlichen Ableitungen der Tensorkomponenten berechnet sich das Vektorfeld der *Reynoldskräfte*. Auf der anderen Seite sind die Komponenten des Reynoldstensors an einem festen Ort zu betrachten. Überträgt man das Bild der turbulenten Schwankungen in den Geschwindigkeitsraum, so bilden sie dort eine *Schwankungsverteilung* um die mittlere Geschwindigkeit. Die Breite dieser Schwankungsverteilung und die Abhängigkeiten der Schwankungen in die verschiedenen Raumrichtungen untereinander werden an diesem festen Ort durch Korrelationen ausgedrückt. Hier ist von einer *Struktur im Geschwindigkeitsraum* zu sprechen.

Auf diese Unterscheidungen der Struktur der Turbulenz wird ausführlich eingegangen.

Vom theoretischen Standpunkt unterscheidet man verschiedene Klassen der Turbulenz. Vernachlässigt man die "Struktur im Geschwindigkeitsraum", d.h. die turbulenten Schwankungen werden als unabhängig von einer Rotation des Koordinatensystems betrachtet, so spricht man von *isotroper Turbulenz*. Eine andere Annahme, die Gleichförmigkeit der "räumlichen Struktur", wodurch die Reynoldskräfte vernachlässigbar klein werden, führt zur *homogenen Turbulenz*. In realen Strömungen tritt letztere näherungsweise hinter durchströmten Gittern auf. Derartige Gitter finden z.B. in der Anströmung eines Windkanals Verwendung. Je kleiner die *homogene freie Turbulenz* eines Windkanals, desto besser ist seine Güte.

In dieser Arbeit wird die turbulente Strömung um einen Schiffsrumpf untersucht. Die Bewegung der freien Wasseroberfläche, Drehbewegungen des Schiffes um seinen Schwerpunkt, als Folge von Seegang oder durch ein Manöver, sowie periodische Bewegungen, zu denen auch die propellerinduzierten Geschwindigkeitsschwankungen gehören, sind nicht Thema dieser Arbeit. Die Umströmung des Schiffes wird als stationär angesehen. Zudem wird das Medium als homogene Phase betrachtet. Probleme einer Zweiphasenströmung durch ein Wasser-Luft-Gemisch, wie es im realen Umfeld eines Schiffes auftritt, und Dichteänderungen infolge der Kompressibilität werden nicht diskutiert.

Selbst nach diesen Näherungen, die im Experiment und in Ansätzen für Berechnungsverfahren von Stömungen gleichermaßen eingeführt werden, ist das turbulente Strömungsfeld am Schiff nicht analytisch zu bestimmen. Wie bei allen turbulenten Strömungen können die Bewegungsgleichungen nicht in ein abgeschlossenes Gleichungssystem überführt werden, solange in ihnen die turbulenten Schwankungen in expliziter Form enthalten sind.

Zur Schliessung des Systems von Bewegungsgleichungen werden empirische Ansätze für die Turbulenz eingeführt, in denen Funktionen der mittleren Geschwindigkeit zur Beschreibung der Turbulenz postuliert werden. Diese Beschreibung der Turbulenz wird als *Turbulenzmodellierung* bezeichnet. Die Grundlagen der empirischen Ansätze in der Turbulenzmodellierung entstammen zumeist experimentellen Betrachtungen.

Die Ergebnisse von numerischen Berechnungen der Strömungsfelder werden i.a. mit experimentellen Daten der mittleren Geschwindigkeiten verglichen. Von Seiten der Berechnungen wird der Reynoldstensor bei diesen Gegenüberstellungen oft nur implizit durch das Turbulenzmodell berücksichtigt.

Im Turbulenzmodell ist die Struktur des Reynolds'schen Tensorfeldes per Postulat Einschränkungen unterworfen. Wenn z.B. isotrope Turbulenz angenommen wird, dann sind die Komponenten des Reynoldstensors nicht mehr unabhängig voneinander. Zum besseren Verständnis der Turbulenz ist es notwendig, die Struktur des Reynoldstensors experimentell zu bestimmen und die Einschränkungen der Turbulenzmodellierung direkt zu prüfen.

In manchen Fällen werden Experimente im Zusammenhang mit Berechnungsverfahren über die oben genannten Punkte hinaus weiter vereinfacht, indem das Feld der mittleren Geschwindigkeit als zweidimensional angesehen wird. Die turbulenten Schwankungen sind stets dreidimensional.

Entlang eines parallelen Mittelschiffes ist die Näherung einer zweidimensionalen Strömung sicherlich gerechtfertigt. Im Heckbereich des Schiffes jedoch ist die Strömung dreidimensional. Dort mischen sich große und kleine Wirbel und am untersuchten Schiff zeigen sich linien- und punktförmige Ablösungen der Grenzschicht.

Zielsetzung dieser Arbeit war die Untersuchung der Struktur des Vektorfeldes der mittleren Geschwindigkeit und der Struktur des Reynolds'schen Tensorfeldes. Im Vergleich mit experimentellen Daten werden theoretische Zusammenhänge und empirische Ansätze der Turbulenzmodellierung für diese Felder geprüft.

Die Entwicklung eines Dreikomponenten Laser-Doppler-Velocimeters (LDV-System) für den Windkanal des Instituts für Schiffbau (IfS) bildet die Grundlage dieser Untersu-

chung. Mit dem LDV-System werden drei Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors und alle sechs Komponenten des Reynoldstensors hinreichend genau bestimmt. Die Entwicklung des LDV-Systems und die Durchführung der Messungen sind in Teil 1 dieses Berichts (Knaack [21]) ausgeführt. Die Experimente wurden an einem Schiffsdoppelmodell im Windkanal durchgeführt. Für ausgewählte Gebiete der Strömung im Heckbereich des Schiffes wurden die partiellen räumlichen Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten und der Komponenten des Reynoldstensors aus den experimentellen Daten gewonnen.

Die Näherungen, Randbedingungen und Zielsetzungen des Experiments sind mit denen der Theorie und der Berechnungsverfahren abzustimmen. Hierzu wird aus der Sicht des Experimentators in Kapitel 2 ein Überblick der Turbulenztheorie gegeben. Dort werden einige Begriffe zur Turbulenz (wie Struktur, Korrelation etc.) erläutert, die in Experiment und Theorie recht unterschiedlich gehandhabt werden.

In Kapitel 3 sowie in den Anhängen A und B wird ausgeführt, wie die experimentellen "Rohdaten" aus Teil 1 der Arbeit ausgewertet werden. Neue Auswertungen und Fehlerkorrekturen werden eingeführt, um speziell die Genauigkeit von Meßergebnissen des Reynoldstensor zu verbessern.

Experimentelle Ergebnisse werden in Kapitel 4 dargestellt. Neben den mittleren Geschwindigkeiten und dem Reynoldstensor werden u.a. einige jener Terme der Grundgleichungen aus den experimentellen Ergebnissen berechnet, die in der Turbulenzmodellierung von Bedeutung sind. Die Anwendung der Turbulenzmodelle in numerischen Berechnungsverfahren wird zwar angedeutet. Es ist aber nicht Thema dieser Arbeit, experimentelle und numerische Daten gegenüberzustellen, um Berechnungsverfahren zu verbessern. Derartige Vergleiche sind auch durchgeführt worden und in einem Parallelbericht (Denker, Knaack, Kux [5]) beschrieben. In dieser Untersuchung werden die Grundlagen der Turbulenzmodellierung direkt den experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt.

## 2 Einführung in die Theorie der Turbulenz

Zur Einführung der Indexnotation sei ein zeitabhängiger Geschwindigkeitsvektor  $v_i(t, x_j)$  (entspr.  $\vec{v}(t) = (v_1, v_2, v_3)(t)$ ) am Ort  $x_j$  betrachtet. Die Indizes laufen stets von 1 bis 3. Die Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten entlang der Raumrichtungen  $j$  sind bei festgehaltener Zeit durch die partiellen Ableitungen  $v_{i|j}$  (entspr.  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ ) definiert. Die gesamte Änderung von  $v_i$  wird durch das totale Differential ausgedrückt  $\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_{i|j}) v_j$  (entspr.  $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$ ) Wenn nicht anders vermerkt, ist über sich wiederholende Indizes nach der *Einsteinschen Summationskonvention* zu summieren <sup>1</sup>.

### 2.1 Grundgleichungen der Strömungslehre

Die Bewegungsgleichungen für inkompressible Gase und Flüssigkeiten lauten (Prandtl [33])

#### Kontinuitäts Gleichung

$$v_{i|i} = 0 \quad (1)$$

#### Navier-Stokes Gleichung

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} p_{|i} + \nu v_{i|kk} + f_i \quad (2)$$

$\rho$  ist die Dichte und  $\nu$  die kinematische Zähigkeit des Mediums. Neben  $\rho$  wird auch  $\nu$  als zeit- und ortsunabhängig betrachtet.  $p$  bezeichnet den Druck und  $f$  eine äußere Kraft, die im folgenden vernachlässigt wird.

Zusammen bilden diese Gleichungen ein vollständiges System von Differentialgleichungen. Eine analytische Lösung wäre eindeutig und alle Strömungsgrößen in Abhängigkeit von Ort und Zeit determiniert, wenn die Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben werden könnten. Die Schwierigkeit liegt aber schon in der Unbestimmbarkeit der Anfangsbedingungen (vgl. Wieghardt [45]). Sie sind unregelmäßigen Störungen unterworfen. Ob diese Anfangstörungen mit fortschreitender Zeit abklingen, oder ob sie angefacht werden, hängt von den Trägheits- und Zähigkeitskräften ab. Das Verhältnis dieser beiden Kräfte zueinander wird durch die *Reynoldszahl*  $Re = UL/\nu$  ausgedrückt <sup>2</sup>. Für hohe Reynoldszahlen wird die Anfangsstörung angefacht und führt zur turbulenten Strömung.

Theoretisch wäre es möglich, für eine Vielzahl von Anfangsbedingungen jeweils alle Strömungsgrößen zu berechnen und durch Mittelwertbildung der Ergebnisse zu einer statistischen Aussage zu kommen. Vernachlässigt man in dieser Überlegung die Beschränkungen durch endliche Rechnerkapazitäten, würde man auch bei einer großen Zahl

<sup>1</sup>Als Beispiel sei  $(v_{i|j}) v_j$  stufenweise in die klassische Schreibweise überführt. Das Umschreiben der partiellen Ableitung liefert  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$ . Summiert man über  $j$ , so bildet sich  $(v_i \text{ grad}) \vec{v}$ . Nun wird  $i$  für alle drei Komponenten eingesetzt und es entsteht  $(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v}$ .

<sup>2</sup> $U$  und  $L$  sind charakteristische Größen (Geschwindigkeit und Länge) im Strömungsfeld. In dieser Untersuchung wird die Reynoldszahl mit der Anströmgeschwindigkeit des Windkanals  $U_\infty$  und der Länge des Schiffmodells gebildet.

von Berechnungen über die einzelnen Störungen und deren Ursachen selbst keine Informationen erhalten. Zudem würden weitere Störungen in den Randbedingungen dazu führen, daß jede Wiederholung einer Berechnung andere Ergebnisse liefern würde. Anstatt in stationären Strömungen das obige Gleichungssystem für verschiedene Anfangszeiten zu lösen und die Ergebnisse statistisch zu betrachten, werden die einzelnen Terme der Gleichungen zeitlich gemittelt. Die zeitabhängige Geschwindigkeit wird nach

$$v_i(t) = \bar{v}_i + v'_i(t) \quad (3)$$

in die zeitlich, gemittelte Geschwindigkeit  $\bar{v}_i$  und die turbulente Schwankung  $v'_i(t)$  aufgeteilt. Die zeitlichen Mittelwerte der turbulenten Schwankungen  $\overline{v'_i}$  sind gleich null, nicht aber die Mittelwerte der quadratischen Schwankungen  $\overline{v'^2_i}$  und die gemischten Terme  $\overline{v'_i v'_j}$ . Ebenso wie die Geschwindigkeit, wird der Druck durch seinen zeitlichen Mittelwert  $\bar{p}$  und die Schwankung  $p'$  beschrieben. Die mittlere Druckschwankung  $\overline{p'}$  verschwindet aus der gemittelten Navier-Stokes Gleichung. In den später erwähnten Transportgleichungen taucht  $p'$  jedoch wieder auf. Eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung (Gl. 1) ergibt sich die gemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\bar{v}_{i|i} = 0 \quad (4)$$

Die zeitlich gemittelte Navier-Stokes Gleichung

$$(\bar{v}_{i|j}) \bar{v}_j = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_{|i} - \overline{(v'_i v'_j)}_{|j} + \nu \bar{v}_{i|kk} \quad (5)$$

wird **Reynolds Gleichung** genannt. Auf der linken Seite enthält sie den *Gradiententensor*

$$\mathbf{V}_{ij} = \bar{v}_{i|j} \quad (6)$$

und auf der rechten Seite den symmetrischen *Reynoldstensor*

$$\mathbf{R}_{ij} = \overline{v'_i v'_j} \quad (7)$$

Seine Komponenten – die *Reynoldsspannungen* – werden als scheinbare Spannungen interpretiert. Die Diagonalterme des Tensors ( $i = j$ ) entsprechen Normalspannungen und die Nichtdiagonalelemente ( $i \neq j$ ) Tangentialspannungen.

Das Gleichungssystem aus der zeitlich gemittelten Kontinuitätsgleichung und der Reynoldsgleichung ist nicht geschlossen. Zur Lösung müssen zusätzliche Beziehungen angenommen werden, in denen die Zusammenhänge zwischen den Reynoldsspannungen und den mittleren Geschwindigkeiten postuliert werden.

Zwei neue Energiegleichungen entstehen z.B., wenn man die Navier-Stokes Gleichung mit  $v_i$  oder  $v'_i$  multipliziert und dann den zeitlichen Mittelwert berechnet. Bei der Bezeichnung "Energie" ist zu beachten, daß in der Strömungslehre (für inkompressible Strömungen) eine Energie immer pro Masseneinheit betrachtet wird. Andere Gleichungen kann man gewinnen, wenn aus  $\frac{Dv'_i}{Dt}$  die Navier-Stokes Gleichungen für die Geschwindigkeitsschwankungen gebildet werden. Ebenso wird die Transportgleichung der kinetischen Energie der Turbulenz  $k$  aufgestellt. Letztere ist definiert durch

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (8)$$

Mit jeder dieser zusätzlichen Gleichungen erhält man neue Beziehungen für die turbulenten Schwankungen. Jedoch werden immer auch neue, unbekannte Größen eingeführt. Bildet sich der Reynoldstensor in Gl. 5 aus Korrelationen 2. Ordnung der Schwankungsgrößen<sup>3</sup>, so enthalten die zusätzlichen Gleichungen auch Korrelationen 3. und höherer Ordnung, sowie Korrelationen zwischen Geschwindigkeits- und Druckschwankungen. Jede Gleichung die durch eine weitere Multiplikation mit  $v_i$  oder  $v'_i$  entsteht, führt neue Korrelationen ein. Es gelingt nicht, zu einem vollständigen Gleichungssystem zu kommen.

## 2.2 Korrelationen der turbulenten Schwankungen

Der Begriff der *Korrelationen der turbulenten Schwankungen* wird in der Literatur recht unpräzise gehandhabt. Während in der Turbulenztheorie mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen "verschiedene" Korrelationen ineinander überführt werden, ist für das Experiment schon im Planungsstadium festzulegen, welche Korrelationen gemessen werden sollen. Die Überlegung für das Experiment werden später in Kapitel 3 ausgeführt. Hier werden die Korrelationen zunächst formal betrachtet.

### Korrelationen 2. Ordnung

Rotta [34] (S. 25) führt eine allgemeine Definition des Geschwindigkeitskorrelationstensor  $\mathbf{R}^*_{ij}$  ein. (Zur Unterscheidung vom Reynoldstensor ist der Geschwindigkeitskorrelations-

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*_{ij}(x_k, t, x_k + s_k, t + \Delta t) & \quad (9) \\ & = \overline{v'_i(x_k, t)v'_j(x_k + s_k, t + \Delta t)} \end{aligned}$$

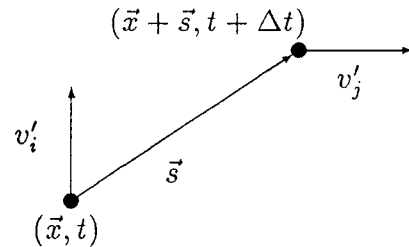


Abbildung 1: Geschwindigkeitskorrelationstensor

tensor hier mit "\*" gekennzeichnet.) Wie in Abb. 1 dargestellt, ist  $\mathbf{R}^*_{ij}$  eine Korrelation 2. Ordnung<sup>4</sup> der beiden Schwankungen  $v'_i$  und  $v'_j$  an den zwei Orten  $x_k$  und  $x_k + s_k$

<sup>3</sup>Die Bezeichnungen der Komponenten des Reynoldstensors  $\overline{v'_i v'_j}$  stimmen in der mathematischen Beschreibung und in der Strömungslehre nicht exakt überein. Während die Mathematik alle Komponenten als Korrelationen auffasst, werden  $\overline{v_i^2}$  in der Strömungslehre häufig als mittlere Schwankungen und nur die gemischten Terme  $\overline{v'_i v'_j}$  ( $i \neq j$ ) als Korrelationen bezeichnet. Diese Wortwahl in der Strömungslehre mag in den unterschiedlichen Eigenschaften der *Normalspannungen* und *Tangentialspannungen* begründet sein.

<sup>4</sup>Die Ordnung der Korrelation  $\overline{v_i^n v_j^m v_k^o \dots}$  ist definiert als  $n + m + o + \dots$ . Eine Korrelation kann von  $l$  Orten anhängen. Dabei ist  $0 \leq l \leq$  "Ordnung".

zu den Zeiten  $t$  und  $t + \Delta t$ . Die Geschwindigkeitskorrelation  $\mathbf{R}^*_{ij}$  wird in dieser Arbeit in drei spezielle *Typen von Korrelationen* unterteilt. In den folgenden Bezeichnungen dieser Typen kommt zum Ausdruck, wie die jeweilige Korrelation von den verschiedenen Parametern  $s_k$ ,  $\Delta t$  abhängt und welche Komponenten der Schwankungen berücksichtigt werden ( $i = j$  oder  $i \neq j$ ):

- Betrachtet man die turbulenten Schwankungen an einem festen Ort  $x_k$  ( $s_k = 0$ ) und wählt nur eine Komponente ( $i = j$ ) des momentanen Schwankungsvektors aus, dann definiert

$$\overline{v'_i(x_k, t)v'_i(x_k, t + \Delta t)} \quad (\text{nicht über } i \text{ summiert}) \quad (10)$$

die *zeitliche Korrelation*.

Sie ist in einer stationären Strömung eine Funktion des Ortes und des Zeitintervalls  $\Delta t$ . Diese zeitliche Korrelation ist ein Maß dafür, wie schnell sich die Strömungsverhältnisse an einem festen Raumpunkt ändern.

- Bildet man dagegen das Produkt gleicher Komponenten des Schwankungsvektors ( $i = j$ ) an zwei verschiedenen Orten zur jeweils gleichen Zeit ( $\Delta t = 0$ ), so ist

$$\overline{v'_i(x_k, t)v'_i(x_k + s_k, t)} \quad (\text{nicht über } i \text{ summiert}) \quad (11)$$

die *Korrelation im Ortsraum*.

Rotta nennt sie "Korrelation vom Zwei-Punkt-Typ".

- Der dritte Typ von Korrelationen enthält verschiedene Komponenten des Schwankungsvektors an einem festen Ort ( $s_k = 0$ ) zur jeweils gleichen Zeit ( $\Delta t = 0$ ). Es entsteht die *Korrelation im Geschwindigkeitsraum*

$$\overline{v'_i(x_k, t)v'_j(x_k, t)} \quad (12)$$

Der Geschwindigkeitskorrelationstensor  $\mathbf{R}^*_{ij}$  ist von  $s_k$ ,  $\Delta t$  und von zwei Komponenten der Schwankungen ( $i \neq j$ ) abhängig und enthält somit alle drei Korrelationstypen. Wenn man in  $\mathbf{R}^*_{ij}$  die zeitliche Korrelation und die Korrelation im Ortsraum ausschließt, d.h. man setzt  $\Delta t = 0$  und  $s_k = 0$ , dann geht  $\mathbf{R}^*_{ij}$  in den Reynoldstensor  $\mathbf{R}_{ij}$  über. So definiert stellt jede Komponenten des Reynoldstensors jeweils eine "Korrelation im Geschwindigkeitsraum" am Ort  $x_k$  dar.

Obwohl speziell der Typ "Korrelation im Geschwindigkeitsraum" (ohne andere Korrelationstypen) und die in der Einleitung eingeführte "Struktur des Reynolds'schen Tensorfeldes im Geschwindigkeitsraum" identisch sind, müssen andere "Typen von Korrelationen" der turbulenten Schwankungen von "Strukturen des Reynolds'schen Tensorfeldes" unterschieden werden. Beide Begriffe bezeichnen zwar zeitliche Mittelwerte, die aus turbulenten Schwankungen berechnet werden. Man verdeutliche sich aber den Unterschied jedoch wie folgt:

- Die "Korrelationen" werden gebildet, indem erst die zeitlichen oder räumlichen Abhängigkeiten von momentanen Schwankungsgeschwindigkeiten berechnet und dann die zeitlichen Mittelwerte bestimmt werden.

- Bei der "Struktur des Reynoldstensors im Ortraum" geht man zuerst von zeitlichen Mittelwerten der Schwankungsgrößen aus und berechnet dann ihre Abhängigkeiten von der Ortskoordinate. Z.B.  $(\overline{v'_i v'_j})|_k$

### Korrelationen 3. Ordnung

In den Grundgleichungen der Strömungslehre sind nur Korrelationen im Geschwindigkeitsraum von 2. Ordnung enthalten.

Erst wenn weitere Bewegungsgleichungen für die Schliessung der Grundgleichungen (vgl. S. 9) hergeleitet werden, um zusätzliche Informationen über die Zusammenhänge zwischen den turbulenten Schwankungen und den mittleren Geschwindigkeiten zu erhalten, dann entstehen Korrelationen höherer Ordnung, in denen verschiedene Korrelationstypen vorkommen.

Um diese höheren Korrelationen für numerische Berechnungsverfahren zu vereinfachen, werden verschiedene Näherungen in den Korrelationen eingeführt. Dabei vernachlässigt man einzelne Korrelationstypen durch die Übergänge  $\lim_{s \rightarrow 0}$  und  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$  oder auch durch die Auswahl der Komponenten des Schwankungsvektors (z.B. mit  $i = j$ ). Abhängig von der Art der Näherung werden theoretische Strömungsfelder konstruiert, mit denen sich die unterschiedliche Forschungsrichtungen der Turbulenztheorie beschäftigen. Als Beispiel seien hier genannt:

- Isotrope Turbulenzfelder: Die Korrelation im Geschwindigkeitsraum für alle  $i \neq j$  verschwindet und ist für  $i = j$  in allen drei Komponenten gleich groß. Für den Reynoldstensor stellt die isotrope Turbulenz den höchsten Grad an Symmetrie dar.
- Homogene Turbulenzfelder: In denen alle Korrelationen unabhängig vom Ort  $x_k$  (nicht aber von  $s_k$ ) sind.

Bei der Herleitung der Transportgleichungen für  $\mathbf{R}^*_{ij}$  (Rotta [34], S. 59) entsteht u.a. die Korrelation 3. Ordnung

$$\mathbf{R}^*_{(ij)k}(x_l, t, x_l + s_l, t + \Delta t) = \overline{v'_i(x_l, t)v'_j(x_l, t)v'_k(x_l + s_l, t + \Delta t)} \quad (13)$$

Diese Korrelation 3. Ordnung wird vielfach in den Grundlagen für die Turbulenzmodellierung verwendet. Daher ist es interessant,  $\mathbf{R}^*_{(ij)k}$  nach Korrelationstypen zu untersuchen. Auch wenn in  $\mathbf{R}^*_{(ij)k}$  explizit keine Korrelationen 2. Ordnung vorhanden sind, denn der zeitliche Mittelwert wird nicht über Paare, sondern über das Produkt von drei Schwankungskomponenten gebildet, so sind implizit unterschiedliche Typen von Korrelationen 2. Ordnung enthalten.

$v'_i(x_l, t)v'_j(x_l, t)$  entspricht einer Korrelation im Geschwindigkeitsraum, während die Produkte  $v'_i(x_l, t)v'_k(x_l + s_l, t + \Delta t)$  und  $v'_j(x_l, t)v'_k(x_l + s_l, t + \Delta t)$  sowohl zeitliche als auch Korrelationen im Ortsraum sind.

Für die Transportgleichung von  $\mathbf{R}^*_{ij}$  wird  $\mathbf{R}^*_{(ij)k}$  modifiziert, indem die Grenzwerte für  $s_l = 0$  und  $\Delta t = 0$  benutzt werden. Von der Korrelation 3. Ordnung nach Gl. 13,

die ursprünglich verschiedene Korrelationstypen enthielt, bleibt dann eine Korrelation 3. Ordnung im Geschwindigkeitsraum. Der Einfachheit halber wird sie allgemein mit

$$\overline{v'_i v'_j v'_k} \quad (14)$$

bezeichnet.

Diese Näherung einer Korrelation 3. Ordnung stellt in der Theorie lediglich eine Vereinfachung für die Berechnungsmethode dar. Im Experiment jedoch bedeuten die Übergänge  $\lim_{s \rightarrow 0}$  oder  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ , daß sich mit dem zu untersuchenden Typ der Korrelation auch die Zielsetzung der Messung ändert. Der Zusammenhang zwischen der Messung und dem Typ der Korrelation ist in Abschnitt 3.1 dargelegt.

## 2.3 Turbulenzmodellierung

Ergänzungen des Systems der zeitlich gemittelten Grundgleichungen Gl. 4 und 5 durch zusätzliche Bewegungsgleichungen liefern keine grundsätzlich neuen physikalischen Informationen, sondern führen weitere Beziehungen zwischen den statistischen Größen einer turbulenten Strömung ein. Zur Schließung des Gleichungssystems müssen funktionale Zusammenhänge zwischen den turbulenten Schwankungen und den mittleren Geschwindigkeiten postuliert werden. Die Turbulenz muß *modelliert* werden.

Mit der wachsenden Computerkapazität wurde in letzten Jahren zunehmend versucht, Strömungsfelder numerisch zu berechnen. Die Zahl verschiedener Turbulenzmodelle ist dabei stark angewachsen. Vergleiche zwischen unterschiedlichen Berechnungsergebnissen für ein komplexes Strömungsfeld unter Verwendung verschiedener Turbulenzmodelle werden kaum durchgeführt. Vielmehr unterscheiden sich Turbulenzmodelle i.a. in freien Parametern, die im Abgleich mit Meßergebnissen der jeweiligen Strömungsfelder ermittelt werden müssen. So entstehen Turbulenzmodelle, die mit einem festen Satz von Parametern für ein bestimmtes Strömungsfeld gültig sind.

Andere Turbulenzmodelle enthalten weniger freie Parameter, gelten aber nur für vereinfachte Strömungen. Hier ist z.B. die Näherung einer zweidimensionalen Strömung zu nennen.

Es ist nicht Ziel dieser Arbeit, Turbulenzmodelle oder deren Parameter im Detail zu prüfen. Hier sollen Grundlagen untersucht werden, auf denen verschiedene "Klassen" von Turbulenzmodellen aufgebaut sind.

Im folgenden wird aufgezeigt, aus welchen Transportgleichungen Turbulenzmodelle entwickelt werden.

Auf zwei Ansätze wird in der Turbulenzmodellierung stets zurückgegriffen. Obwohl diese beiden Ansätze nicht grundsätzlich verschieden sind, werden sie in der Literatur getrennt aufgeführt. In beiden werden die Komponenten des Tensors der Reynoldsspannungen proportional zu den Komponenten des symmetrisierten Gradiententensors der mittleren Geschwindigkeit  $1/2 (\bar{v}_{i|j} + \bar{v}_{j|i})$  angesetzt.

- Im *Boussinesqschen Ansatz*

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_t \frac{1}{2} (\bar{v}_{i|j} + \bar{v}_{j|i}) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (15)$$

wird die turbulente Scheinzähigkeit  $\nu_t$  (engl.: eddy-viscosity) eingeführt. Sie ist keine Stoffkonstante, sondern soll anzeigen, daß das Medium in turbulenten Strömungsfeldern scheinbar seine Eigenschaften ändert.  $\nu_t$  seinerseits ist wieder orts- und geschwindigkeitsabhängig und muß selbst modelliert werden.

$\nu_t$  wird auch als Wirbelviskosität bezeichnet. Gl. 15 ist daher in der Literatur als *Wirbelviskositäts-Hypothese* zu finden.

Das Postulat einer skalaren Scheinzähigkeit  $\nu_t$  in diesem Ansatz, wie es in vielen Turbulenzmodellen übernommen wird, bedeutet eine starke Einschränkung für die beiden Tensoren in Gl. 15. Die sechs Komponentengleichungen sollen durch nur eine einzige Scheinzähigkeit befriedigt werden. Aus dieser Bedingung folgt direkt, daß die Eigenrichtungen des Reynoldstensors und des symmetrisierten Gradiententensors gleich sein müssen.

Auf diese Einschränkung wird im Vergleich der experimentellen Daten mit den Annahmen der Turbulenzmodellierungen in Kapitel 4.1 näher eingegangen.

- Im *Prandtl'schen Mischungswegansatz* wird ein anschauliches Bild von turbulenten Strömungsfeldern eingeführt. Dieser Mischungswegansatz stellt einen Spezialfall des obigen Boussinesq'schen Ansatzes dar.

Man stelle sich ein kleines Volumen vor, das in der Strömung mitgeführt wird. Dieses Volumen bewegt sich, wie alle Teilchen in ihm, mit der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}_i(x_j)$ . Prandtl nennt diese Volumen *Turbulenzballen*. Wenn ein solcher Turbulenzballen durch turbulente Schwankungen um eine Länge  $l_m$  im Strömungsfeld verschoben wird und dabei seine Geschwindigkeit beibehält, dann hat er gegenüber der neuen Umgebung einen Geschwindigkeits-Über- oder Unterschub  $v'_i$ , der proportional zu  $l_m$  und dem Geschwindigkeitsgradienten entlang der Verschiebungsrichtung ist. Wegen der Kontinuitätsgleichung sind die Geschwindigkeitschwankungen in die verschiedenen Raumrichtungen von gleicher Größenordnung  $v'_i \sim v'_j$ . Die Länge  $l_m$  wird als *Mischungsweg* gesehen, um den ein Turbulenzballen im Mittel verschoben werden kann, bevor sich seine Geschwindigkeit in der Umgebung angepaßt hat und er nicht mehr von der Umgebung unterschieden werden kann. Der Mischungswegansatz (hier für die Komponenten 1 und 2) lautet

$$-\rho \overline{v'_1 v'_2} = \rho l_m^2 |\bar{v}_{1|2}| \bar{v}_{1|2} \quad (16)$$

Wie  $\nu_t$  im obigen Ansatz ist hier der Mischungsweg  $l_m$  unbestimmt und muß modelliert werden.

Der Zusammenhang zwischen der Scheinzähigkeit und dem Mischungsweg wird mit der kinetischen Energie der Turbulenz  $k$  und der empirischen Konstante  $C_\mu$  durch

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l_m \quad (17)$$

ausgedrückt. In einem anderen Ansatz wird  $\nu_t$  mit  $k$ , einer weiteren Konstante  $C$  und der *turbulenten Dissipation*  $\varepsilon$  beschrieben <sup>5</sup>.

$$\nu_t = C \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (18)$$

---

<sup>5</sup>Die turbulente Dissipation übersteigt die Dissipation durch den Gradienten der mittleren Geschwindigkeit (i.a. *direkte Dissipation* genannt) um Größenordnungen.

$\varepsilon$  ist definiert durch

$$\varepsilon = \nu \left( \overline{v'_{i|j} v'_{i|j}} + \overline{v'_{i|j} v'_{j|i}} \right) \quad (19)$$

und bezeichnet die pro Volumeneinheit und Zeiteinheit in Wärme umgewandelte mechanische Energie der turbulenten Schwankungen

Je nach Ansatz für  $\nu_t$  sind verschiedene Parameter zu modellieren. Geht man von Gl. 17 aus, so sind zusätzliche Gleichungen für die kinetische Energie der Turbulenz  $k$  und den Mischungsweg  $l_m$  zu postulieren. Ausgehend von Gl. 18 ist neben einer Gleichung für  $k$  eine weitere für die turbulente Dissipation  $\varepsilon$  anzusetzen.

## Verschiedene Turbulenzmodelle

Es gibt keine einheitliche Klassifizierung von Turbulenzmodellen. Hier wird eine Einteilung von Bradshaw [2] übernommen. Er geht in seinen Bezeichnungen der Turbulenzklassen davon aus, daß die Transportgleichungen für Produkte von Geschwindigkeiten aufgestellt werden. Die Ordnungen dieser Produkte (die Potenzen) der Geschwindigkeiten werden als Namen für die Turbulenzklassen übernommen. Wenn z.B. das Strömungsfeld allein aus der Navier-Stokes Gleichung – der Transportgleichung der Geschwindigkeit – bestimmt wird, dann nennt Bradshaw die Turbulenzmodelle *Schließungsmodelle 1. Ordnung*. Benutzt man zusätzlich die Transportgleichung der Reynoldsspannungen oder die der kinetischen Energie der Turbulenz, die jeweils für Produkte aus zwei Geschwindigkeiten aufgestellt werden, dann spricht er von *Schließungsmodellen 2. Ordnung*.

Die wohl bekanntesten Berechnungsverfahren für dreidimensionale Strömungen, die auf Schließungsmodellen 1. Ordnung basieren, sind die von Cebeci und Smith [3] und von Baldwin und Lomax [1]. Beide verwenden die Wirbelviskositäts-Hypothese nach Gl. 15 und setzen eine Ort- und Geschwindigkeitsfunktion für die Scheinzähigkeit  $\nu_t$  an. Auf Parameter der Funktionen für  $\nu_t$  wird hier nicht näher eingegangen<sup>6</sup>.

Wichtig für diese Untersuchung ist, daß in beiden Berechnungsverfahren jeweils skalare Funktionen für  $\nu_t$  angesetzt werden.

In den Schließungsmodellen 2. Ordnung wird von der Transportgleichung für die Reynoldsspannungen oder für die kinetischen Energie der Turbulenz  $k$  - der "k-Gleichung" - ausgegangen (vgl. z.B. Rotta [34]).

Diese Gleichungen enthalten Terme mit neuen Abhängigkeiten der turbulenten Schwankungen. Diese Terme müssen wiederum modelliert werden.

Zum einen tritt in der Transportgleichung der Reynoldsspannungen das Produkt  $\overline{v'_i v'_j} \cdot \overline{v}_{i|j}$  auf. Es wird mit der Wirbelviskositäts-Hypothese nach

$$- \left( \overline{v'_i v'_j} \right) \overline{v}_{i|j} = \nu_t \frac{1}{2} \left( \overline{v}_{i|j} + \overline{v}_{j|i} \right) \overline{v}_{i|j} \quad (20)$$

<sup>6</sup>Zum Unterschied der beiden Berechnungsverfahren sei vermerkt: Cebeci et al benutzen eine Annahme über den Verlauf eines Grenzschichtprofils, mit welcher abgelöste Grenzschichten nicht beschrieben werden können, während nach Baldwin et al die Grenzschichtdicke nicht explizit bestimmt werden muß und auch abgelöste Grenzschichten berechnet werden.

modelliert.

Zum anderen enthält die  $k$ -Gleichung eine Korrelation 3. Ordnung, wie sie in Gl. 13 definiert ist. In verschiedenen Veröffentlichungen (z.B. bei Daly und Harlow [4]) wird diese Korrelation 3. Ordnung zunächst auf Korrelationen 2. Ordnung zurückgeführt. Dann werden diese Korrelationen 2. Ordnung nach der Wirbelviskositäts-Hypothese modelliert.

In diesen Ansätzen, welche Schließungsmodelle 2. Ordnung verwenden, ist die Scheinzähigkeit  $\nu_t$  noch unbestimmt und muß modelliert werden. Häufig wird für diese Schließungsmodelle die Transportgleichung für die turbulente Dissipation  $\varepsilon$  zusätzlich eingeführt. Aus  $k$  und  $\varepsilon$  wird  $\nu_t$  nach Gl. 18 bestimmt.

Wenn von diesen beiden Transportgleichungen, der  $k$ - und " $\varepsilon$ -Gleichung", ausgegangen wird, dann werden die Turbulenzmodelle als  $k$ - $\varepsilon$ -Modelle bezeichnet. Diese  $k$ - $\varepsilon$ -Modelle sind heute in den numerischen Berechnungsverfahren am meisten verbreitet.

Die gezeigten Beispiele mögen ausreichen, um die heute typische Vorgehensweise bei der Turbulenzmodellierung zu skizzieren. Weitere Transportgleichungen würden immer neue empirische Ansätze erfordern. Bei der Modellierung der mittleren Schwankungsgrößen wird meist auf die Wirbelviskositäts-Hypothese zurückgegriffen. Doch diese beschreibt Korrelationen 2. Ordnung, wie sie in der Reynoldsgleichung auftreten. Höhere Korrelationen müssen daher wiederum mit empirischen Annahmen, die weitere freie Parameter enthalten, auf Korrelationen 2. Ordnung zurückgeführt werden.

### 3 Experimentelle Untersuchungen

Die Entwicklung des Dreikomponenten-LDV-Systems für den Windkanal des IfS ist in Teil 1 dieser Arbeit [21] beschrieben. Dort findet sich auch eine Einführung in das Meßprinzip der LDV. Hier wird darauf eingegangen, wie aus "einzelnen" LDV-Messungen Aussagen über das Strömungsfeld gewonnen werden.

Das Dreikomponenten-LDV-System liefert mit jeder Einzelmessung einen momentanen Geschwindigkeitsvektor im Koordinatensystem der Meßrichtungen. Aus einem Ensemble dieser Einzelmessungen am jeweiligen Ort werden die Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors und die Komponenten des Reynoldstensors im kartesischen Koordinatensystem bestimmt.

Mit Hinblick auf eine hohe Genauigkeit in den Aussagen über das Reynolds'sche Tensorfeld wurden umfangreiche Berechnungsverfahren entwickelt. Sie basieren auf der Anpassung einer Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung an das Ensemble von Einzelmessungen. Die Definition des Meßsystems, die Transformationen von diesem in das kartesische System und die Berechnungen der Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung sind in Anhang A beschrieben.

Aus den Meßergebnissen an benachbarten Orten werden die partiellen räumlichen Ableitungen bestimmt. Die Berechnungsmethoden für diese Ableitungen sind in Anhang B aufgeführt.

Die Untersuchung der Meßergebnisse zeigt, daß Meßfehler der verschiedenen Komponenten des Reynoldstensors sehr empfindlich von der Orientierung der Meßrichtungen abhängen. Die Veränderungen dieser Meßergebnisse sind nicht einfach mit gleichmäßig verteilten Abweichungen von einem festen Mittelwert zu erklären, sondern sie liegen darin begründet, daß statistische Fehler in Einzelmessungen eine einseitige Verschiebung der Meßergebnisse der Komponenten des Reynoldstensors zu größeren Werten hin bewirken. Dieses Phänomen wird in Abschnitt 3.3 näher analysiert. Die Ursachen dieser statistischen Fehler – die *Frequenzfehler* – zeigen in Abhängigkeit von den Meßrichtungen eine räumliche Charakteristik. Sie wird durch den *Frequenzfehlerntensor* ausgedrückt. Die allgemeine Formulierung einer Korrektur dieser Frequenzfehler für Meßergebnisse des Reynoldstensors wird zunächst theoretisch hergeleitet. Anschliessend wird der Frequenzfehlerntensor aus experimentellen Daten bestimmt. In Abschnitt 3.3.4 wird die Auswirkung der Frequenzfehlerkorrektur auf die gemessenen Komponenten des Reynoldstensors betrachtet. Wie sich zeigt, sind einige der Komponenten ohne diese Korrektur mehr durch die Frequenzfehler als durch die Physik der Strömung geprägt.

Die theoretischen Betrachtungen der Frequenzfehler werden in Abschnitt 3.3 für beliebige LDV-Systeme durchgeführt. Einige gerätespezifische Fragestellungen, die für die Größe der Frequenzfehler von Bedeutung sind, werden in Anhang C.3 angesprochen.

Die Genauigkeiten der Meßergebnisse nach der Frequenzfehlerkorrektur und ihre Abhängigkeit von anderen Fehlerquellen werden in Abschnitt 3.4 abgeschätzt.

### 3.1 Zielsetzung der Experimente

Im experimentellen Teil dieser Untersuchung sollte das Vektorfeld der mittleren Geschwindigkeiten und das Reynolds'sche Tensorfeld in einer dreidimensionalen stationären Strömung bestimmt werden. Die partiellen räumlichen Ableitungen aller Komponenten dieser beiden Felder sollten aus den experimentellen Daten berechnet werden.

Experimente zur Messung von Geschwindigkeitsfeldern sind speziell darauf abzustimmen, welche turbulenten Strömungsgrößen untersucht werden sollen. Dies sei an einigen Beispielen aus der Literatur verdeutlicht. Dabei wird hier nicht nach den Meßmethoden oder nach den Genauigkeiten von Meßwerten unterschieden, sondern aufgezeigt, welche Komponenten  $v_i(t)$  des momentanen Geschwindigkeitsvektors mit einer Meßapparatur bestimmt werden müssen, um daraus spezielle turbulente Strömungsgrößen berechnen zu können.

Der Vektor der mittleren Geschwindigkeit wird in allen Experimenten auf ähnliche Weise bestimmt. Entweder werden die momentanen Geschwindigkeitskomponenten kontinuierlich gemessen und die Ergebnisse über ein Zeitintervall gemittelt oder bei diskretisierten Messungen von momentanen Geschwindigkeiten wird der Mittelwert über eine Anzahl von Einzelmessungen berechnet. Verschiedene Experimente zur mittleren Geschwindigkeit unterscheiden sich hauptsächlich darin, wieviele Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bestimmt werden<sup>7</sup>. In der vorliegenden Untersuchung wurden alle drei Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors gleichzeitig gemessen.

Im Gegensatz zur einheitlichen Definition der mittleren Geschwindigkeit werden "Aussagen über die Turbulenz" aus recht unterschiedlichen Meßwerten gewonnen. Auch dann, wenn man sich auf zeitliche Mittelwerte von turbulenten Strömungsgrößen in stationären Strömungen beschränkt.

In Abschnitt 2.2 wurden verschiedene Typen von Korrelationen turbulenter Geschwindigkeitsschwankungen eingeführt. Hier wird erläutert, welche Voraussetzungen ein Experiment erfüllen muß, damit der gesuchten Typ von Korrelationen aus den Meßwerten berechnet werden kann.

Alle Typen von Korrelationen werden aus Produkten von Komponenten der momentanen turbulenten Geschwindigkeitsschwankung  $v'_i(t)$  gebildet. Die Geschwindigkeitsschwankungen berechnen sich aus den gemessenen momentanen Geschwindigkeiten  $v_i(t)$  nach der Mittelwertbildung aus  $v_i(t) = \bar{v}_i + v'_i$ . Experimente sind danach zu unterscheiden, welche und wieviele Komponenten der momentanen Geschwindigkeit gemessen werden. Entsprechend der Anzahl "n" der gemessenen Komponenten spricht man von einer n-dimensionalen Meßapparatur.

"Zeitliche Korrelationen"  $\overline{v'_i(x_k, t)v'_j(x_k, t + \Delta t)}$  werden meist (z.B. Frenkiel et al [12]) für nur eine Komponente ( $i = j$ ) der momentanen Geschwindigkeit an einem festen

---

<sup>7</sup>In manchen Untersuchungen dreidimensionaler Strömungsfelder werden Experimente aus geräte-technischen Gründen auf zwei- oder sogar auf nur eindimensionale Messungen vereinfacht. Dabei werden entweder die nicht gemessenen Komponenten (meist die Querkomponenten) vernachlässigt oder die verschiedenen Komponenten werden nacheinander d.h. in mehreren Messungen mit jeweils veränderten Meßrichtungen bestimmt.

Ort bestimmt. Diese zeitlichen Korrelationen können mit einer Einkomponenten-Meßapparatur untersucht werden. Bei diesen Messungen müssen die Zeitabstände zwischen den Einzelmessungen kurz sein, da die zeitlichen Korrelationen z.B. in einem Windkanal typischerweise für  $\Delta t > 50 \text{ msec}$  (vgl. Frenkiel [12]) gegen null gehen. Eine Meßapparatur zur Bestimmung der zeitlichen Korrelationen wird also eher auf eine hohe Datenrate, d.h. einen kleinen Zeitabstand zwischen den Einzelmessungen optimiert werden, als darauf mehrere Komponenten gleichzeitig messen zu können.

Für die Messung von "Korrelationen im Ortsraum" und "Korrelationen im Geschwindigkeitsraum" benötigt man mindestens zwei Komponenten der momentanen Geschwindigkeit. Diese Komponenten müssen zeitgleich bestimmt werden. Bei einem Mehrkomponenten-LDV-System wird jede Komponente an einem eigenen Meßpunkt bzw. in einem eigenen Meßvolumen gemessen (vgl. Teil 1 [21] S. 36). In Experimenten zur Bestimmung dieser Korrelationen ist zu unterscheiden, ob beide Komponenten an verschiedenen oder an einem Ort untersucht werden.

Wenn Korrelationen im Ortsraum  $\overline{v'_i(x_k, t)v'_j(x_k + s_k, t)}$  gemessen werden sollen, dann sind die Meßpunkte der beiden Komponenten an den Orten  $x_k$  und  $x_k + s_k$  mit dem Differenzvektor  $\vec{s}$  zueinander zu positionieren (vgl. Abb. 2). Diese Korrelation im Ortsraum

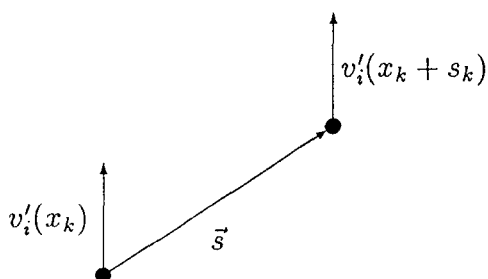


Abbildung 2: Korrelation im Ortsraum

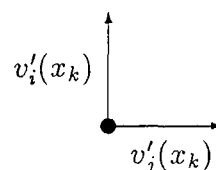


Abbildung 3: Korrelation im Geschwindigkeitsraum

wird i.a. für nur eine Komponente ( $i = j$ ) der momentanen Geschwindigkeit gemessen (z.B. Frenkiel et al [13]). Im Experiment ist  $\vec{s}$  zu variieren, um eine Funktion der Korrelation im Ortsraum bestimmen zu können.

Hingegen werden Korrelationen im Geschwindigkeitsraum  $\overline{v'_i(x_k, t)v'_j(x_k, t)}$  an einem festen Ort aber mit verschiedenen Komponenten der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen (i.a.  $i \neq j$ ) gemessen (vgl. Abb. 3). Driver et al. haben LDV-Messungen dieser Korrelationen in einer zweidimensionalen Strömung in [6] beschrieben.

Wie dargelegt, ist die Anzahl der verschiedenen Meßkomponenten einer Meßapparatur und die Lage der Meßorte für die einzelnen Komponenten maßgebend dafür, welche Korrelationen der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen bestimmt werden können. Wenn der Typ dieser Korrelationen durch einen Grenzübergang z.B.  $\lim_{s \rightarrow 0}$  von einer Korrelation im Ortsraum zu einer Korrelation im Geschwindigkeitsraum wechselt, wie

es in der Theorie der Turbulenzmodellierung (vgl. Abschnitt 2.2) vorkommt, dann ist für das Experiment eine neue Meßapparatur zu konzipieren. Messungen, bei denen sowohl Korrelationen im Ortsraum als auch Korrelationen im Geschwindigkeitsraum (letztere mit verschiedenen Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit) im gleichen Experiment bestimmt wurden, sind nicht bekannt<sup>8</sup>.

Im Experiment dieser Untersuchung wurde ein Dreikomponenten-LDV-System verwendet. Die drei Komponenten der momentanen Geschwindigkeit wurden am gleichen Ort gemessen. Aus den Meßwerten wurden alle sechs Korrelationen im Geschwindigkeitsraum von 2. Ordnung berechnet, d.h. der Reynoldstensor wurde vollständig bestimmt.

Auch die Korrelationen im Geschwindigkeitsraum von 3. Ordnung (vgl. Gl. 14 in Abschnitt 2.2) konnten aus den Meßwerten berechnet werden. Die rechnerischen Ergebnisse dieser 3. Korrelationen sind aber mit relativen Fehlern von weit über 100% behaftet und deshalb in dieser Arbeit nicht aufgeführt. Die Ursachen für diese Ungenauigkeiten sind in Anhang A.2 erläutert. Dort sind auch weitere Beispiele für Messungen von Korrelationen der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen aufgeführt und unter dem Aspekt der Auswertung von Meßdaten für verschiedene Korrelationen betrachtet.

Wenn alle drei Komponenten der mittleren Geschwindigkeit und alle sechs Komponenten des Reynoldstensors für jeden Meßpunkt vorliegen, sollten die insgesamt 27 verschiedenen partiellen Ableitungen aller Komponenten berechnet werden. Der Abstand zwischen den Meßpunkten mußte für alle Raumrichtungen klein genug sein, um die räumliche Struktur der Komponenten hinreichend genau auflösen zu können. Die charakteristische Größenordnung dieser Strukturen wurde für einzelne Komponenten in Vorexperimenten untersucht und nach deren Ergebnissen wurde das Meßpunktraster festgelegt (vgl. auch Anhang B).

## 3.2 Durchführung der Messungen

Die Messungen mit dem Dreikomponenten-LDV-System im Windkanal des IfS sind Inhalt von Teil 1 dieser Arbeit [21]. Das Doppelmodell eines Schiffes – der sogenannte HSVA-Tanker – mit einer Länge von  $2.72m$  wurde bei einer Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  von  $27\frac{m}{s}$  untersucht. Die Reynoldszahl betrug  $5 \cdot 10^6$ .

Für die Bestimmung der partiellen Ableitungen der Strömungsgrößen wurde der Meßpunktabstand auf  $2mm$  festgelegt<sup>9</sup>. In dimensionslosen Einheiten bezogen auf die Schiffslänge entspricht dies  $7 \cdot 10^{-4}$ . Dieser Abstand wurde für alle drei Raumrichtungen gewählt, um eine vergleichbare Genauigkeit für die entsprechenden Ableitungen zu erhalten. Somit entfallen auf ein kleines dreidimensionales Gebiet von  $20mm$  Kantenlänge  $1000$  Meßpunkte. Bei einer Meßzeit von 2 bis 45 Minuten pro Meßpunkt (nach der Maximalzeit wurden die Messungen abgebrochen) liegt die Gesamtmeßzeit für ein solches

---

<sup>8</sup>In manchen Veröffentlichungen (z.B. Townsend [40]) sind neben den Korrelationen im Ortsraum auch die quadratischen Terme  $\overline{v_i'^2}$  berechnet worden.  $\overline{v_i'^2}$  sind zwar Korrelationen im Geschwindigkeitsraum, sie enthalten aber gleiche Komponenten der Geschwindigkeitsschwankung.

<sup>9</sup>Darstellungen der Ergebnisse – z.B. Geschwindigkeitsgradienten in Abb. 20 S. 56 – zeigen, daß diese Feinheit des Meßpunktrasters angebracht war.

Gebiet bei einigen hundert Stunden.

Daraus wird deutlich, daß diese Messungen im Nachstrom des Modells aus zeitlichen Gründen nicht auf größere Meßgebiete ausgedehnt werden konnten<sup>10</sup>. Nach früheren

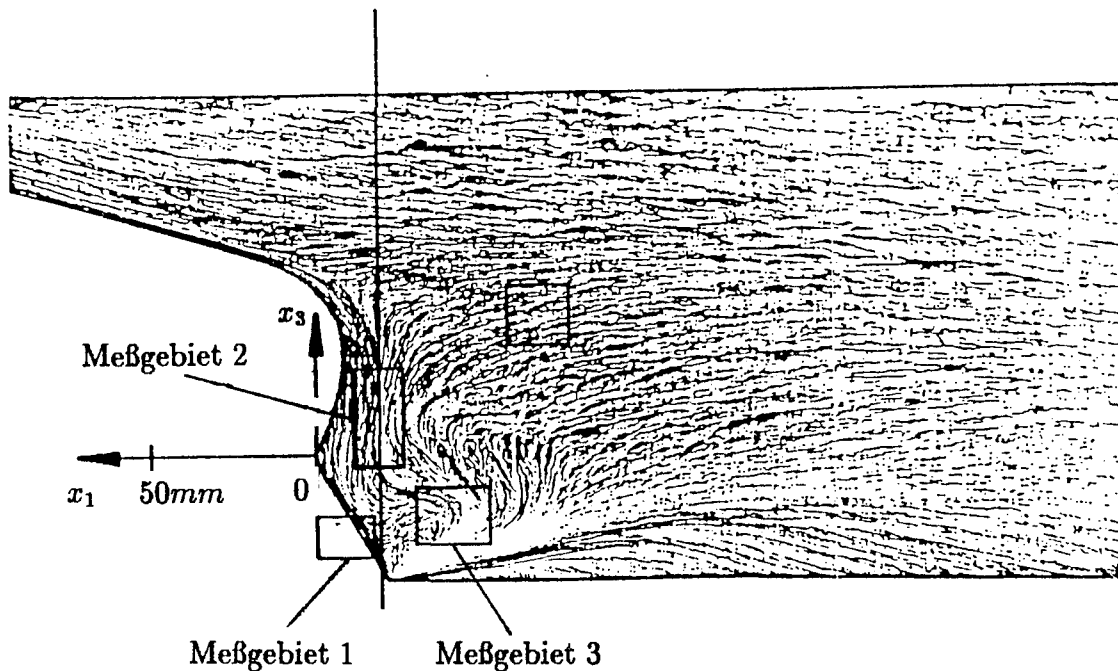


Abbildung 4: Anstrichversuch zur Sichtbarmachung des Richtungsfeldes der Wandschubspannungen mit den Meßgebieten 1 bis 3

Untersuchungen der mittleren Geschwindigkeit (Kux, Wieghardt [22]) und den Ergebnissen der Sichtbarmachung der Wandschubspannungen (Abb. 4) wurden die Meßgebiete nach unterschiedlichem Charakter der Strömung ausgewählt (vgl. Teil 1 S. 19). Die Meßgebiete sind in Tabelle 1 aufgelistet. Ihre Position am Heck des Schiffes ist aus Abbildung 4 zu ersehen.

<sup>10</sup>Diese Angaben über den Zeitbedarf einer LDV-Messung sind nur für die Aufgabenstellung dieser Arbeit gültig. Wenn nur die mittleren Geschwindigkeiten oder nur die kinetische Energie der Turbulenz (ohne die Nichtdiagonalelemente des Reynoldstensors) gesucht werden, so ist die Meßzeit wesentlich geringer und beträgt nur einige Sekunden pro Meßpunkt (vgl. Denker, Knaack, Kux [5]).

Meßgebiete	
1	Im Totwasser
2	Im axialen Wirbel, dort, wo der Winkel zwischen dem Vektor der mittleren Geschwindigkeit und dem Vektor der Rotation groß ist
3	Wo das Bild der Wandschubspannungen auf eine punktförmige Ablösung hindeutet

Tabelle 1: Lage der Meßgebiete

### 3.3 Genauigkeiten von Meßgrößen der Turbulenz

Der Einfluß von Fehlern bei LDV-Messungen wurde in der Literatur vielfach behandelt. Eine Übersicht geben u.a. Durrani et al. [10] und Durst et al. [11]. Diese Meßfehler lassen sich in verschiedene Grundtypen einteilen.

Wie in allen Experimenten gibt es in der LDV *systematische Fehler*, die hier z.B. durch Ungenauigkeiten bei der Kalibrierung der Meßgeräte entstehen. Von systematischen Fehlern wird später noch zu sprechen sein<sup>11</sup>.

Andere Fehlerquellen sind speziell in Verbindung mit dem Meßprinzip der LDV zu sehen. Durch die LDV werden Geschwindigkeiten von Teilchen bestimmt, die ein Medium mitführt. Hieraus wird auf die Geschwindigkeit des Mediums geschlossen. Die Untersuchung der *Fehler durch Teilcheneigenschaften* ist wichtiger Bestandteil einer Genauigkeitsanalyse<sup>12</sup>. Hierzu betrachtete Melling [28] Teilchen nach ihren Eigenschaften Laserlicht zu streuen und ihrem Vermögen der Strömung zu folgen. McLaughlin [27] legte die Abhängigkeit einer gemessenen, zeitlichen Geschwindigkeitsverteilung von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit bzw. Konzentration der Teilchen dar. Letztere Fehler werden in der LDV mit dem Schlagwort *biasing* (einseitige Wichtung) bezeichnet. Verschiedene Korrekturen der *biasing-Effekte* sind bei Auswertungen von LDV-Messungen üblich<sup>13</sup>.

Daneben finden sich in den Meßwerten auch *statistische Fehler*, denen bei der experimentellen Bestimmung von turbulenten Schwankungen eine besondere Bedeutung zukommt. Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung von Eigenschaften der Turbulenz. Daher sind die folgenden Abschnitte ausschließlich statistischen Fehlern und hier speziell ihrem Einfluß auf Meßergebnisse des Reynoldstensors gewidmet.

<sup>11</sup>Soweit systematische Fehler für die vorliegenden Messungen relevant sind, werden sie in Teil 1 und in Abschnitt 3.4 berücksichtigt.

<sup>12</sup>In Teil 1 Abschnitt V.2 ist die Bedeutung der künstlichen Zugabe von Teilchen (*seeding*) für die LDV-Messung im Windkanal erläutert.

<sup>13</sup>Die hier verwendete Methoden zur Berechnung der Strömungsgrößen aus den Geschwindigkeitsverteilungen finden sich in Anhang A.

### 3.3.1 Statistische Fehler bei LDV-Messungen

Bei Messungen einer Komponente des Geschwindigkeitsvektors ist der Zusammenhang zwischen der Genauigkeit der mittleren Geschwindigkeit, deren turbulenter Schwankung und den statistischen Meßfehlern weitgehend bekannt.

Für Mehrkomponenten-LDV-Systeme mit nicht-orthogonalen Meßrichtungen werden diese Fehler in der Literatur i.a. mit Hinblick auf die Art der Strömungsgrößen (Mittelwerte oder Schwankungen), welche im Experiment bestimmt werden sollen, unter verschiedenen Teilaspekten diskutiert.

Nach Transformation der Meßgrößen in das kartesische Koordinatensystem zeigen die Fehler in diesem System eine Richtungscharakteristik. Sie wird z.T. rein qualitativ betrachtet (Hoshino et al. [18]) und bei der Auslegung der Meßrichtungen eines LDV-Systems berücksichtigt.

Snyder, Orloff et al. [37] [30] haben die richtungsabhängigen Fehler für die Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors berechnet. Im Meßkoordinatensystem untersuchten sie diese Fehler nach ihrer Wichtung in der Transformation in das kartesische Koordinatensystem. Sie schlugen vor, die betragsmäßig größten Fehler im kartesischen System dadurch zu minimieren, daß im Meßsystem jene Komponenten der mittleren Geschwindigkeit statistisch besser erfaßt werden, die bei der Transformation am stärksten gewichtet sind. Hierzu sind diese Geschwindigkeitskomponenten durch eine erhöhte Anzahl von Einzelmessungen genauer zu bestimmen.

Ozcan [31] hat für zwei spezielle LDV-Systeme mit unterschiedlichen Meßrichtungen sowohl die Fehler der Komponenten des mittleren Geschwindigkeitsvektors als auch die Fehler der Komponenten des Reynoldstensors berechnet. Qualitativ vergleicht er die berechnete Richtungscharakteristik dieser Fehler mit experimentellen Daten.

### Schwankungen um die mittlere Geschwindigkeit

Bei der Betrachtung von Fehlern in Meßgrößen der Turbulenz tauchen zwei verschiedene "Arten" von Schwankungen um einen Mittelwert auf. Es muß zwischen *turbulenten* und *fehlerbedingten* Schwankungen unterschieden werden. Zunächst sei die Bedeutung dieser beiden Begriffe näher dargelegt.

Ein Ensemble von Einzelmessungen der momentanen Geschwindigkeiten ist im Geschwindigkeitsraum als Verteilung um den mittleren Geschwindigkeitsvektor zu beschreiben. Diese Verteilung wird hier für die weitere Auswertung durch eine dreidimensionale Gaußverteilung mit dem Korrelationstensor  $\sigma_{ij}$  beschrieben. Die Auswertungen und die Bestimmung von  $\sigma_{ij}$  sind im Anhang A.2 ausgeführt.

Die folgenden Überlegungen gelten grundsätzlich im Dreidimensionalen. Für eine anschaulichere Darstellung wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aber auf eine Ebene im Geschwindigkeitsraum projiziert. Dort im Zweidimensionalen bilden Isolinien gleicher Wahrscheinlichkeit eine *Schwankungsellipse*. Eine solche Verteilung ist in Abb. 5 gezeigt. Als Achsenlängen dieser Ellipse werden die Eigenwerte von  $\sigma_{ij}$  übernommen. Die Richtungen der Achsen sind durch die Eigenrichtungen festgelegt. Aus Sicht der Strömungslehre stellen die Eigenrichtungen von  $\sigma_{ij}$  die "Hauptschwankungsrichtungen" dar.

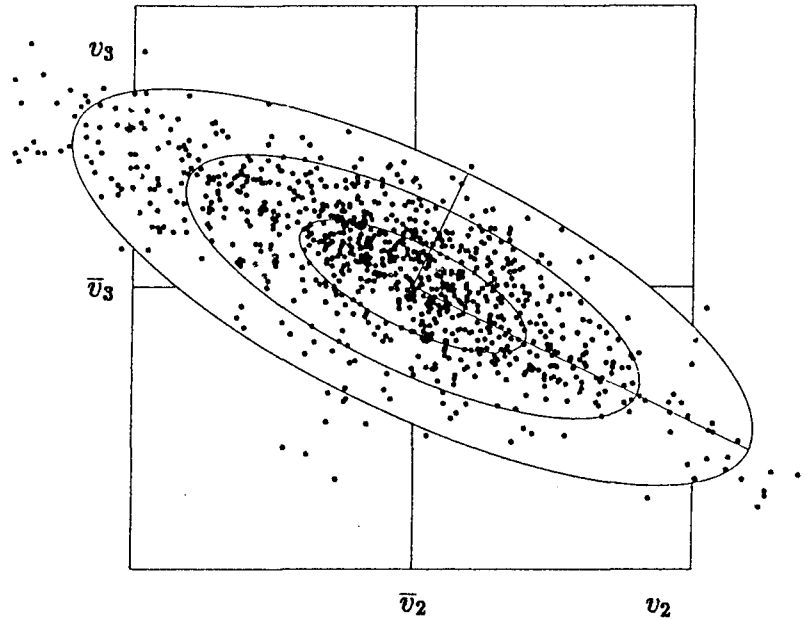


Abbildung 5: Verteilung von Meßwerten um die mittlere Geschwindigkeit sowie Schwankungsellipsen der ein-, zwei- und dreifachen Achsenlänge

Die Verteilungen, welche die Schwankungen im Geschwindigkeitsraum um den Mittelwert bilden, werden kurz *Schwankungsverteilungen* oder, ob ihrer Form, auch *Schwankungsellipsen* genannt.

Wenn es sich um *fehlerbedingte* Schwankungen handelt, dann wird die Ellipse für Meßwerte aus unterschiedlichen Anwendungen meist als Fehlerellipse bezeichnet<sup>14</sup>. *Die Ausrichtung der Eigenrichtungen dieser Fehlerellipse ist von der Lage der Meßrichtungen abhängig.* Diese Fehlerellipse beschreibt entweder den Fehler der mittleren Geschwindigkeit (in einer Dimension die "Standardabweichung/ $\sqrt{N}$ ", dabei ist  $N$  die Anzahl der Einzelmessungen), oder wie in dieser Arbeit die Verteilung der fehlerbedingten Schwankungen um die mittlere Geschwindigkeit (eindimensional die "Standardabweichung"). Diese Unterscheidung ist insofern von Bedeutung, als der Fehler der mittleren Geschwindigkeit durch eine erhöhte Anzahl ( $N$ ) von Einzelmessungen verkleinert werden kann, die Verteilung der fehlerbedingten Schwankungen ist aber unabhängig von der Anzahl der Einzelmessungen.

Aus der Sicht der Strömungslehre sind Schwankungen um den Mittelwert der Geschwindigkeit, aus denen sich die Verteilung bildet, nicht als Fehler in der Messung des momentanen Geschwindigkeitsvektors sondern als *turbulente* Schwankungen zu interpretieren.

In Experimenten treten turbulente und fehlerbedingte Schwankungen zusammen auf. Ein Meßwert einer Komponente der momentanen Geschwindigkeit  $M_i$  in Meßrichtung  $i$ , setzt sich nach

$$M_i = \bar{M}_i + M'_i + M'_{Ci} \quad (21)$$

<sup>14</sup>Uhlig et al – aus dem Bereich des Schiffbaus – beschreiben für die Navigation in [44] (S. 104ff) die Fehlerellipse des Standortfehlers.

aus der mittleren Geschwindigkeit  $\overline{M}_i$ , der turbulenten Schwankung  $M'_i$  und der fehlerbedingten Schwankung  $M'_{Ci}$  zusammen. Gemessene Schwankungsverteilungen um den Mittelwert eines Geschwindigkeitsvektors, wie in Abb. 5 gezeigt, können auf drei verschiedene Arten interpretiert werden:

- In laminaren Strömungen ( $M'_i = 0$ ) bildet sich die Verteilung um den Mittelwert allein durch fehlerbedingte Schwankungen ( $M'_{Ci} \neq 0$ ) in den Einzelmessungen.
- Unter der Annahme, daß die Einzelwerte ohne Fehler ( $M'_{Ci} = 0$ ) bestimmt werden, bildet sich in turbulenten Strömungen ( $M'_i \neq 0$ ) die Verteilung durch turbulente Schwankungen.
- In einer turbulenten Strömung, in der Einzelwerte mit Meßfehlern behaftet sind, treten turbulente und fehlerbedingte Schwankungen gekoppelt auf.

Jede reale Messung liefert Verteilungen, in denen beide Schwankungen auftreten. Die quadratischen Mittelwerte der turbulenten Schwankungen (die Varianz der momentanen Geschwindigkeiten) in die verschiedenen Raumrichtungen und deren Korrelationen bilden die Komponenten des Reynoldstensors.

### Fehler der turbulenten Schwankungen

In der Strömungslehre werden die quadratischen Mittelwerte der turbulenten Schwankungen oftmals kurz als "mittlere Schwankungen" bezeichnet. Meßwerte dieser "mittleren Schwankungen"  $\overline{M_i'^2}$  werden i.a. als Größen behandelt, die mit einem statistischen Fehler – im Sinne einer Intervallbreite (der Standardabweichung) der Wahrscheinlichkeitsverteilung um den Mittelwert der Meßgröße – behaftet sind.

$$\text{Meßwert}(\overline{M_i'^2}) = \overline{M_i'^2} \pm \text{statistischer Fehler} \quad (22)$$

Dabei wird der statistische Fehler als Funktion der fehlerbedingten Schwankungen gesehen.

Eine detailliertere Analyse wird im folgenden (Abschnitt 3.3.2 bis 3.3.4) jedoch zeigen, daß die häufig verwendete Fehlerabschätzung aus Gl. 22 anders anzusetzen ist. In den gemittelten Meßwerten der turbulenten Schwankungen sind die fehlerbedingten Schwankungen als additive Terme enthalten

$$\underbrace{\text{Meßwert}(\overline{M_i'^2})}_{\text{gemessene Schwankung}} = \underbrace{\overline{M_i'^2}}_{\text{Turbulenz}} + \underbrace{\overline{M_{Ci}'^2}}_{\text{fehlerbedingte Schwankung}} \pm \underbrace{\Delta \overline{M_i'^2}}_{\text{statistischer Fehler}} \quad (23)$$

Die statistischen Fehler in Gl. 23 bezeichnen die Ungenauigkeiten bei der Berechnung des Meßwertes aus dem Ensemble von Einzelmessungen (vgl. Anhang A.2). Wie sich zeigen wird, ist der gesamte Fehler der gemittelten Meßwerte nicht als Intervallbreite um den Mittelwert wie in Gl. 22 sondern, wegen

$$\overline{M_{Ci}'^2} \gg \Delta \overline{M_i'^2} \quad (24)$$

im wesentlichen als Zuwachs der fehlerbedingten Schwankungen zu den turbulenten Schwankungen nach Gl. 23 anzusehen.

Das Verhältnis der Mittelwerte der turbulenten zu den fehlerbedingten Schwankungen  $\overline{M_i'^2}/\overline{M_{Ci}'^2}$  ist nicht von der Zahl der Einzelmessungen abhängig! D.h. durch eine erhöhte Anzahl von Einzelmessungen kann zwar  $\Delta \overline{M_i'^2}$  minimiert werden, wegen Gl. 24 hat dies aber kaum Einfluß auf die Meßwerte der turbulenten Schwankungen.

Ziel dieser Fehlerbetachtung ist  $\overline{M_{Ci}'^2}$  quantitativ zu bestimmen, um in den Meßwerten nach Gl. 23 zwischen turbulenten und fehlerbedingten Schwankungen unterscheiden und dann die Meßwerte korrigieren zu können.

Bisher wurden die Fehler der turbulenten Schwankungen für jede Dimension einzeln betrachtet. Im folgenden wird der Zusammenhang zwischen diesen beiden verschiedenen Schwankungen im Dreidimensionalen untersucht.

### 3.3.2 Theorie des Frequenzfehlers

Komponenten eines momentanen Geschwindigkeitsvektors werden in der LDV durch Messungen von Dopplerfrequenzen bestimmt. Meßtechnisch gesehen entsprechen fehlerbedingte Schwankungen daher *Frequenzfehlern*.

In Teil I dieser Arbeit ([21], Anhang II und III) wurde der Frequenzfehler Tensor und sein Zusammenhang mit den turbulenten Schwankungen in einer mathematischen Formulierung hergeleitet. Die wichtigsten Schritte waren:

- Die Komponenten der momentanen Geschwindigkeit  $M_i$  enthalten nach  $M_i = \overline{M}_i + M_i' + M_{Ci}'$  (vgl. Gl. 21) die mittlere Geschwindigkeit  $\overline{M}_i$ , die turbulente Schwankung  $M_i'$  und die fehlerbedingte Schwankung  $M_{Ci}'$ . Nimmt man an, daß die Schwankungsverteilungen der momentanen Geschwindigkeiten in jeder Meßrichtung Gaußverteilungen sind, so ist  $(\overline{M_i'^2} + \overline{M_{Ci}'^2})$  die Varianz der gemessenen Verteilung.
- Bei einer dreidimensionalen LDV-Messung sind die Meßgrößen nach

$$\begin{aligned} \overline{v_i} &= \mathbf{E}_{ij}^{-1} \overline{M_j} \\ \overline{v_i v_j'} &= \mathbf{E}_{ik}^{-1} \mathbf{E}_{jl}^{-1} \overline{M_k' M_l'} \end{aligned}$$

in das kartesische System zu transformieren (vgl. Anhang A). Im kartesischen System wird die Gesamtschwankungsverteilung durch eine dreidimensionale Gaußverteilung<sup>15</sup> mit dem Korrelationstensor  $\sigma_{Cij}$  beschrieben. Der Index  $C$  zeigt im folgenden an, daß die gekennzeichneten Größen mit einem Frequenzfehler behaftet sind.

- Die Randbedingungen, daß die fehlerbedingten Schwankungen in die verschiedenen Meßrichtungen untereinander nicht korreliert sind

$$\overline{M_{Ci}' M_{Cj}'} = 0 \quad \text{für alle } i \neq j \quad (25)$$

<sup>15</sup>Die Anpassung einer Gaußverteilung an die Schwankungsverteilung ist in Anhang A dargelegt.

und die turbulenten nicht mit den fehlerbedingten Schwankungen korreliert sind

$$\overline{M'_i M'_{Cj}} = 0 \quad \text{für alle } i, j \quad (26)$$

führen zur **Definition des Frequenzfehlerensors**

$$C_{ij} = \overline{M'_{Ci} M'_{Cj}} \quad (27)$$

Der Frequenzfehlerensor ist wegen Gl. 25 diagonal.

- Der Korrelationstensor der gemessenen dreidimensionalen Schwankungsverteilung

$$\underbrace{\sigma_{Cij}}_{\text{gemessene Schwankung}} = \underbrace{\mathbf{R}_{ij}}_{\text{Turbulenz}} + \underbrace{\mathbf{E}_{ik}^{-1} \mathbf{E}_{jl}^{-1} C_{ij}}_{\text{Frequenzfehler}} \quad (28)$$

setzt sich im kartesischen System als Summe aus dem Reynoldstensor  $\mathbf{R}_{ij}$  und dem transformierten Frequenzfehlerensor zusammen.

Gleichung 28 gilt im kartesischen System und stellt die Erweiterung von Gl. 23 für drei Dimensionen dar. Der statistische Fehler  $\Delta \overline{M_i'^2}$  ist hier gegenüber dem Frequenzfehler vernachlässigt (vgl. Gl. 24). Dieser statistische Fehler wird in der allgemeinen Fehlerbetrachtung in Abschnitt 3.4 wieder berücksichtigt. Wie auf Seite 26 für eine Dimension erläutert, stellt der Frequenzfehler auch in drei Dimensionen einen Zuwachs zu den Mittelwerten der turbulenten Schwankungen dar.

### 3.3.3 Experimentelle Bestimmung des Frequenzfehlers

Im allgemeinen wird der Frequenzfehlerensor  $C_{ij}$  in Gleichung 28 nicht bestimmt und der Reynoldstensor  $\mathbf{R}_{ij}$  gleich dem Korrelationstensor  $\sigma_{Cij}$  gesetzt. Der Frequenzfehlerensor wird meist als Meßungenauigkeit interpretiert.

Hier soll der Frequenzfehlerensor aus experimentellen Daten quantitativ bestimmt werden.

Turbulente und fehlerbedingte Anteile der Schwankungen in den Einzelmessungen der momentanen Geschwindigkeiten lassen sich nicht voneinander trennen. Zwei Charakteristiken der gemittelten Größen dieser beiden Schwankungen – d.h. die Komponenten des Reynoldstensors und die Komponenten des Frequenzfehlerensors – bieten aber Möglichkeiten, diese Mittelwerte im Experiment unabhängig voneinander zu bestimmen.

Zum einen werden die gemessenen Schwankungen in Abhängigkeit von elektronischen und optischen Bedingungen des Meßgerätes betrachtet. Hält man die Strömungsbedingungen konstant und ändert die elektronischen Bedingungen des Meßgerätes, dann kann eine Veränderung der Meßwerte der gemittelten Schwankungsgrößen (in Gl. 23 für eine Dimension bzw. in Gl. 28 für drei Dimensionen) nur durch Änderungen der Frequenzfehler hervorgerufen werden. Im Ansatz A wird die Abhängigkeit der Meßwerte und Frequenzfehler von den elektronischen Bedingungen des Meßgerätes bestimmt.

Zum anderen zeigen die Eigenrichtungen der gemessenen Schwankungsellipse in ihrer Ausrichtung eine Charakteristik, die durch die Lage der Meßrichtungen bestimmt wird. Anschaulich wird dies auch in der Form und Lage der Fehlerellipse (vgl. S. 24) wiedergegeben. Wenn man eine Messung in einem Strömungsgebiet durchführt, in dem die Verhältnisse der Eigenrichtungen und Eigenwerte des Reynoldstensors weitgehend bekannt sind, z.B. in isotroper Turbulenz, dann ist aus den Eigenwerten und Eigenrichtungen des Korrelationstensors  $\sigma_{Cij}$  nach Gleichung 28 der Frequenzfehler Tensor zu berechnen. Dieses Verfahren wird in Ansatz B verwendet.

### Ansatz A:

#### Bestimmung des Frequenzfehlers aus Eigenschaften der Meßgeräte

Der Frequenzfehler Tensor  $C_{ij}$  ist nach Gl. 25 diagonal. Seine Komponenten können im Meßsystem unabhängig voneinander behandelt werden. Bisher wurden die turbulenten und fehlerbedingten Schwankungen im Geschwindigkeitsraum gesehen, hier werden die Schwankungen im Frequenzraum untersucht.

Der Zusammenhang zwischen den momentanen Geschwindigkeiten  $M_i$  und den momentanen Dopplerfrequenzen  $\nu_{Di}$  ergibt sich über den Streifenabstand  $s_i$ <sup>16</sup>.

$$M_i = s_i \nu_{Di} \quad (\text{nicht über } i \text{ summiert}) \quad (29)$$

Die momentane Dopplerfrequenz  $\nu_{Di}$  und die Shiftfrequenz  $\nu_{Si}$  ergeben die momentane Meßfrequenz

$$\nu_{Mi} = \nu_{Di} + \nu_{Si} \quad (30)$$

Analog zur Beschreibung der momentanen Geschwindigkeit in Gl. 21 setzt sich die momentane Dopplerfrequenz

$$\nu_{Di} = \bar{\nu}_{Di} + \nu'_{Di} + \nu'_{Ci} \quad (31)$$

aus der mittleren Dopplerfrequenz  $\bar{\nu}_{Di}$ , der turbulenten Frequenzschwankung  $\nu'_{Di}$  und dem momentanen Frequenzfehler  $\nu'_{Ci}$  zusammen. Wie im Geschwindigkeitsraum (vgl. Gl. 23) so enthält hier im Frequenzraum der Mittelwert der gemessenen Schwankungen  $\overline{\nu'^2_{MCi}}$  Anteile der turbulenten und fehlerbedingten Schwankungen. Damit ergibt sich aus Gl. 30 und Gl. 31

$$\overline{\nu'^2_{MCi}} = \overline{\nu'^2_{Di}} + \overline{\nu'^2_{Ci}} \quad (32)$$

Dabei sind Schwankungen der Shiftfrequenz vernachlässigt.

Die Größe des mittleren Frequenzfehlers  $\overline{\nu'^2_{Ci}}$  soll bestimmt werden, sie hängt im Experiment von verschiedenen Parametern ab. Hier werden als wichtigste die Signalqualität (des analogen Meßsignals) und die Art der Frequenzbestimmung (im Signalprozessor) aufgeführt.

---

<sup>16</sup>Der Streifenabstand (vgl. Durst [11]) ist von der Geometrie der Optik abhängig und enthält keine statistischen Fehler

- In einem theoretischen Ansatz beschreiben Hösel und Rodi [15] die Abhängigkeit der Frequenzfehler von der Signalqualität, die i.a. durch das Signal-Rauschverhältnis ausgedrückt wird. Sie vergleichen ihren Ansatz mit simulierten Daten, die sie mit einem Frequenzgenerator erzeugten. Dabei gaben sie das Signal-Rauschverhältnis als Parameter vor. Sie leiteten die funktionalen Abhängigkeiten des Frequenzfehlers von der Signalqualität und der Gerätegenauigkeit her und entwickelten auf dieser Basis ein neues Verfahren [16] für die LDV, um die Güte von Signalprozessoren zu testen.

- Die Theorien, die der Frequenzbestimmung zu Grunde liegen, und die verschiedenen Meßgeräte, mit welchen diese Theorien im Experiment umgesetzt werden, sind in der Literatur (z.B. Durrani [10], Durst [11] etc.) ausgeführt. Drei Fehlerquellen sind in der Frequenzbestimmung durch die Signalprozessoren zu nennen.

Erstens: Alle Signalprozessoren in der LDV wandeln das analoge Signal zuerst in ein digitales Signal um. Die endliche Dauer der Zeitschritte dieser Digitalisierung bedeutet eine Einschränkung in der Genauigkeit der Frequenzbestimmung.

Zweitens: Nur ein Teil der Perioden des Meßsignals wird weiterverarbeitet. Dies begrenzt zwar den datentechnischen Aufwand, schränkt aber die Genauigkeit der Frequenz weiter ein.

Drittens: Die Periodenlänge des Meßsignals wird in den Signalprozessoren durch unterschiedliche Kriterien bestimmt. Bei diesen Kriterien (z.B. bei Countern die Zeitabstände zwischen "Nulldurchgängen" der Meßsignale) sind "Toleranzen" zugelassen, so daß die Periodenlängen fehlerbehaftet bestimmt werden.

In den meisten Anwendungen überwiegt die dritte Fehlerquelle bei weitem die anderen beiden. Im folgenden werden die Fehlerquellen der Frequenzbestimmung nicht weiter einzeln betrachtet, sondern zu einem Fehler zusammengefaßt. Unter Berücksichtigung der kommerziellen Geräteentwicklung<sup>17</sup> liegt der relative Fehler einer Frequenzmessung in der LDV bei 0.3% bis 1%. Während dieser Arbeit kamen Counter als Signalprozessoren zum Einsatz<sup>18</sup>. Die relative Genauigkeit dieser Counter beträgt 1%.

Einzelne Fehlerparameter lassen sich zwar theoretisch untersuchen oder simulieren, sie sind jedoch nicht aus einem realen Experiment zu bestimmen. Hier werden die einzelnen Fehlerparameter während einer Messung konstant gehalten und ein mittlerer Frequenzfehler betrachtet. In einer einfachen Form wird der mittlere Frequenzfehler nach

$$\overline{\nu_{Ci}^2} = K_{Ci}^2 \overline{\nu_{Mi}^2} \quad (33)$$

als relativer Fehler der mittleren Meßfrequenz  $\overline{\nu_{Mi}}$  angesetzt. (Die Gleichungen 33 und 34 gelten für jede Komponente einzeln und es wird nicht über  $i$  summiert.) In der Fehlerkonstante  $K_{Ci}$  werden die Abhängigkeiten von einzelnen Fehlerparametern zusammengefaßt. Dieser mittlere Frequenzfehler wird in Gl. 32 zur Berechnung des Mittelwertes der gemessenen Frequenzschwankung eingesetzt.

$$\begin{aligned} \overline{\nu_{MCi}^2} &= \overline{\nu_{Di}^2} + K_{Ci}^2 \overline{\nu_{Mi}^2} \\ &= \overline{\nu_{Di}^2} + K_{Ci}^2 (\overline{\nu_{Di}} + \nu_{si})^2 \end{aligned} \quad (34)$$

<sup>17</sup>Lading vergleicht die Genauigkeiten von FFT-Prozessoren und konventionellen Countern [23].

<sup>18</sup>vgl. Teil 1 Abschnitt V.2.

Die Fehlerkonstante  $K_{Ci}$  muß bestimmt werden, um die mittlere turbulente Schwankung  $\overline{\nu_{Di}^2}$  berechnen zu können. Inwieweit die Fehlerkonstanten  $K_{Ci}$  nicht nur für einzelne Messungen sondern als feste Größe des LDV-Systems als konstant anzusehen ist, wird in Anhang C.1 untersucht.

$\overline{\nu_{Di}^2}$  ist durch das Strömungsfeld und  $K_{Ci}$  durch die Eigenschaften des LDV-Systems festgelegt. Wenn die Shiftfrequenz  $\nu_{Si}$  an einen festen Meßpunkt variiert wird, dann können die beiden Konstanten  $\overline{\nu_{Di}^2}$  und  $K_{Ci}^2$  im linearen Ansatz nach Gl. 34 bestimmt werden. Bei Testmessungen zur Bestimmung der Fehlerkonstanten wurden folgende Randbedingungen eingehalten:

- In der Windkanalströmung, fern von der Modellwand ist die turbulente Frequenzschwankung  $\overline{\nu_{Di}^2}$  in einem Testgebiet (hier über einige cm) konstant. Auch die mittlere Dopplerfrequenz  $\overline{\nu_{Di}}$  ist in diesem Bereich als konstant anzusehen. Die Änderung der mittleren Meßfrequenz wird allein durch eine Variation der Shiftfrequenz bewirkt<sup>19</sup>.
- Die Fehlerkonstante  $K_{Ci}$  ist von optischen und elektronischen Parametern des LDV-Systems abhängig. Alle Parameter, wie z.B. Verstärkung und Filterung der Meßsignale, wurden bei Variation der Shiftfrequenz konstant gehalten.

Im Testgebiet wurden Messungen der Querkomponenten des Geschwindigkeitsvektors an verschiedenen Meßpunkten durchgeführt. Die Shiftfrequenz wurde für jeden Meßpunkt variiert und die Meßergebnisse in Gl. 34 eingesetzt. Eine lineare Regression liefert die gesuchten Konstanten. Im Testgebiet war der turbulente Anteil der Schwankungen klein gegen den fehlerbedingten Anteil<sup>20</sup>. Die Ergebnisse an verschiedenen Meßpunkten wurden über das Testgebiet gemittelt.

Ergebnisse dieses Ansatzes sind zusammen mit den Ergebnissen des zweiten Ansatzes zur Berechnung des Frequenzfehlers in Tabelle 2 (S. 34) aufgelistet und werden dort diskutiert.

### Ansatz B:

#### Bestimmung des Frequenzfehlers aus Kenntnissen über das Strömungsfeld

Ansatz A zeigt den Frequenzfehler als Funktion von gerätetechnischen Parametern, die typischerweise bei LDV-Messungen von Bedeutung sind. Hier nun wird der Frequenzfehler im Zusammenhang mit der Strömungsphysik unabhängig von der Meßmethode gesehen. Im gleichen Testgebiet, wie im Ansatz A erwähnt, wird der Frequenzfehlersensor hier nach einer anderen Methode berechnet und die Ergebnisse beider Ansätze werden verglichen.

Diesem zweiten Ansatz liegt folgende Idee zugrunde: Die Turbulenz der Strömung im Testgebiet – vom Modell aus gesehen die Außenströmung – ist isotrop. D.h. die Mittelwerte der turbulenten Schwankungen in alle Raumrichtungen sind gleich groß. Die drei

<sup>19</sup>Die Shiftfrequenz wurde im Bereich von 1 MHz bis 5 MHz variiert.

<sup>20</sup>Die turbulenten Schwankungen im Testgebiet waren nicht vom Modell induziert. Vielmehr wirkte hier die freie Turbulenz der Anströmung.

Eigenwerte des Reynoldstensors sind gleich und die Eigenrichtungen sind unbestimmt. Im anschaulichen (zweidimensionalen) Bild der oben eingeführten Schwankungsellipsen ist diese Ellipse des Reynoldstensors hier kreisförmig (vgl. Abb. 6). Nach Gl. 28 enthalten die gemessenen Schwankungsverteilungen neben den hier isotropen, turbulenten Schwankungen die Anteile der Frequenzfehler. Der Frequenzfehlerntensor wird im Bild durch eine Fehlerellipse dargestellt, die sich der kreisförmigen Struktur der Verteilung der turbulenten Schwankungen überlagert. Im Testgebiet ist zu erwarten, daß die fehlerbedingten die turbulenten Schwankungen überwiegen. Somit prägt die Fehlerellipse die Struktur der Verteilung, die durch Superposition der beiden Schwankungen entsteht. Aus der elliptischen Form der gemeinsamen Verteilung läßt sich auf die Kreisform der Verteilung der turbulenten Schwankungen zurückrechnen. Als Differenz ergibt sich die Fehlerellipse und somit die Komponenten des Frequenzfehlerntensors  $C_{ij}$ . Diese Berechnung wird im folgenden ausgeführt.

Gl. 28, die den gemessenen Korrelationstensor  $\sigma_{C_{ij}}$  im kartesischen System definiert, wird in das Meßsystem transformiert (vgl. Anhang A) und ergibt dort

$$\underbrace{\sigma_{MC_{ij}}}_{\text{gemessene Schwankung}} = \underbrace{\mathbf{E}_{ik} \mathbf{E}_{jl} \mathbf{R}_{kl}}_{\text{Turbulenz}} + \underbrace{\mathbf{C}_{ij}}_{\text{Frequenzfehler}} \quad (35)$$

In isotropen Strömung gilt

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{R}_{22} = \mathbf{R}_{33} \quad (36)$$

$$\mathbf{R}_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i \neq j \quad (37)$$

Dann enthält Gl. 35 nur eine Unbekannte im Reynoldstensor und drei unbekannte Komponenten des Frequenzfehlerntensors (wegen seiner Diagonalform). Für die Meßrichtungen 2 und 3 werden diese Unbekannten berechnet.

Zwei Nichtdiagonalelemente des Korrelationstensors ergeben

$$\sigma_{MC_{23}} = \sigma_{MC_{32}} \quad (38)$$

$$= \mathbf{E}_{2k} \mathbf{E}_{3l} \mathbf{R}_{kl} + \mathbf{C}_{23} \quad (39)$$

Der Frequenzfehlerntensor ist (wegen Gl. 25) diagonal, daher ist  $\mathbf{C}_{23} = 0$ . Ebenso ist  $\mathbf{E}_{21} = \mathbf{E}_{31} = 0$ , da für die hier besprochenen Messungen die Meßrichtung 1 senkrecht auf den Meßrichtungen 2 und 3 steht<sup>21</sup>. So folgt

$$\sigma_{MC_{23}} = \mathbf{E}_{22} \mathbf{E}_{32} \mathbf{R}_{22} + \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{33} \mathbf{R}_{33} \quad (40)$$

Hieraus ergeben sich die Komponenten des Reynoldstensors wegen der Annahme der Isotropie

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{22} &= \mathbf{R}_{33} \\ &= \frac{\sigma_{MC_{23}}}{\mathbf{E}_{22} \mathbf{E}_{32} + \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{33}} \end{aligned} \quad (41)$$

---

<sup>21</sup>Die Komponenten der Transformationsmatrix  $\mathbf{E}_{ij}$  in Abhängigkeit von der Geometrie des LDV-Systems finden sich in Anhang A.

Die Komponenten des Frequenzfehltensors lassen sich aus den Diagonalelementen des Korrelationstensors nach Gl. 35 berechnen. Für Messrichtung 2 ergibt sich

$$\sigma_{MC22} = \mathbf{E}_{2k} \mathbf{E}_{2l} \mathbf{R}_{kl} + \mathbf{C}_{22} \quad (42)$$

Unter Berücksichtigung der Isotropie von  $\mathbf{R}_{kl}$  liefert Gl. 42 als zweite Komponente des Frequenzfehltensors

$$\mathbf{C}_{22} = \sigma_{MC22} - (\mathbf{E}_{22}^2 + \mathbf{E}_{23}^2) \mathbf{R}_{22} \quad (43)$$

Analog zur zweiten Komponente berechnet sich die dritte Komponente des Frequenzfehltensors zu

$$\mathbf{C}_{33} = \sigma_{MC33} - (\mathbf{E}_{33}^2 + \mathbf{E}_{32}^2) \mathbf{R}_{33} \quad (44)$$

Auf diese Weise wurden die Komponenten des Reynoldstensors und die Komponenten des Frequenzfehltensors nach Messdaten aus dem Testgebiet berechnet. Für den Ansatz A waren Messungen mit einer Variation der Shiftfrequenz (vgl. S. 30). durchgeführt worden. Hier liefern Messungen mit unterschiedlichen Shiftfrequenzen je einen Satz von Komponenten der beiden Tensoren.

Abb. 6 zeigt die Ergebnisse aus Ansatz B (bei einer Shiftfrequenz von 5 MHz) in Form von Schwankungsellipsen. Die eingezeichneten Halbachsen der großen, gemess-

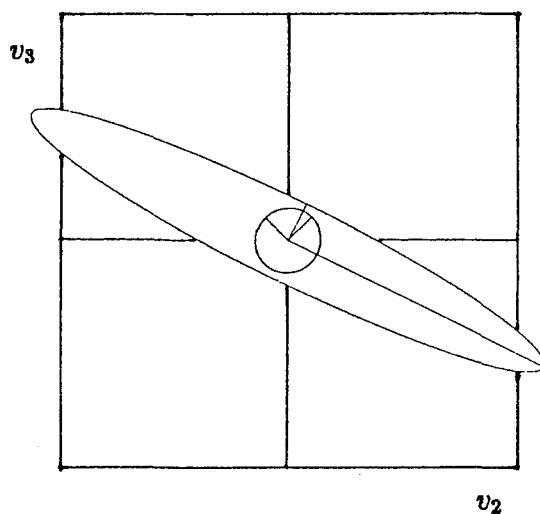


Abbildung 6: Gemessene Schwankungsellipse und daraus berechnete Verteilung der turbulenten Schwankung

senen Schwankungsellipse unterscheiden sich in ihrer Länge. Ihre Lage ist durch die Richtungscharakteristik des Frequenzfehltensors geprägt. Die berechnete, kreisförmige Verteilung der isotropen, turbulenten Schwankungen hat eine wesentliche kleinere Ausdehnung. Natürlich ist die Lage der eingezeichneten Halbachsen bei dieser Kreisform willkürlich.

Alle Ergebnisse dieses Ansatzes B sind im folgenden Abschnitt in Tabelle 2 denen des ersten Ansatzes gegenübergestellt.

### 3.3.4 Korrektur des Frequenzfehlers

#### Frequenzfehlerkorrekturen für das Testgebiet

Die Testmessungen zur Bestimmung des Frequenzfehlers sind nach den beiden vorgestellten Verfahren – Ansatz A in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Meßgeräte und Ansatz B aus Kenntnissen über das Strömungsfeld – ausgewertet worden. Der Frequenzfehler wurde für die Meßrichtungen 2 und 3 berechnet<sup>22</sup>. Beide Meßrichtungen liegen in Richtung der Querkomponenten der Strömung. In Anhang C.3 wird ausgeführt, wie sich die Frequenzfehler speziell bei dem verwendeten LDV-System in den einzelnen Meßrichtungen und nach der Transformation im kartesischen System auswirken. Im Anhang wird auch gezeigt, daß der Frequenzfehler für die Meßrichtung 1 zu vernachlässigen ist.

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse aus beiden Ansätzen gegenübergestellt. Die beiden Meßrichtungen sind getrennt aufgeführt. Um die Frequenzfehler mit den turbulenten Schwankungen vergleichen zu können, sind alle Größen in Tabelle 2 als normierte Geschwindigkeitsschwankungen (dimensionslos als  $\frac{m^2/s^2}{U_\infty^2}$ ) angegeben.

Die Berechnung der einzelnen Größen in Tabelle 2 aus den Ergebnissen der beiden Ansätze ist im folgenden für die Meßrichtung 2 ausgeführt. Die Größen für Meßrichtung 3 ergeben sich entsprechend. Für Ansatz A wird vom Mittelwert der gemessenen Frequenzschwankung nach Gl. 34 ausgegangen. Die einzelnen Terme dieser Gleichung werden in den Geschwindigkeitsraum transformiert und dort auf die Anströmgeschwindigkeit normiert. So ergeben sich z.B. die mittlere Geschwindigkeit bzw. die mittlere quadratische Schwankung<sup>23</sup>.

$$\begin{aligned}\overline{M}_2 &= \frac{\overline{\nu}_{D2} s_2}{U_\infty} \\ \overline{M}_2'^2 &= \frac{\overline{\nu}_{Di}'^2 s_2^2}{U_\infty^2}\end{aligned}$$

Im Geschwindigkeitsraum ergibt sich Gl. 34 dann zu

$$\sigma_{MC22} = \overline{M}_2'^2 + K_{C2}^2 \left( \overline{M}_2 + \frac{\nu_{s2} s_2}{U_\infty} \right)^2 \quad (45)$$

$$= \overline{M}_2'^2 + C_{22} \quad (46)$$

Für Ansatz B wird von Gl. 35 angegangen. Beachtet man, daß alle Nichtdiagonalelemente des Reynoldstensors wegen der Annahme der Isotropie gleich null sind (vgl. Gl. 37), dann nimmt Gl. 35 für  $i, j = 2$  die Form der obigen Gl. 46 an.

Die einzelnen Terme aus Gl. 45 und 46 sind in der Tabelle 2 für beide Meßrichtungen aufgelistet.

<sup>22</sup>Die Meßrichtungen sind in Anhang A.1 definiert.

<sup>23</sup>Die Umrechnung der Frequenzen in die Geschwindigkeiten erfolgt nach Gl. 29. Die Geschwindigkeiten sind hier normiert.

Meßrichtung 2							
Shift- frequenz	Meßgröße	Ansatz A			Ansatz B		
	unkorrigiert $\sigma_{MC22}$	$C_{22}$	$K_{C_2}^2$	korrigiert $\overline{M_2'^2}$	$C_{22}$	$K_{C_2}^2$	korrigiert $\overline{M_2'^2}$
5 MHz	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$
2 MHz	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$			$2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
1 MHz	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-4}$			$4.4 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$

Meßrichtung 3							
	$\sigma_{MC33}$	$C_{33}$	$K_{C_3}^2$	$\overline{M_3'^2}$	$C_{33}$	$K_{C_3}^2$	$\overline{M_3'^2}$
5 MHz	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-4}$
2 MHz	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$			$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
1 MHz	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$			$8.1 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 2: Frequenzfehler aus den Testmessungen (in normierten Geschwindigkeiten)

Die Bezeichnung "Korrektur" soll anzeigen, daß  $\overline{M_i'^2}$  die gesuchten Mittelwerte der quadratischen, turbulenten Schwankungen sind. Aber nur der Meßwert  $\sigma_{MCij}$  kann experimentell bestimmt werden. Die Frequenzfehler  $K_{C_i}^2$  werden als Korrekturgrößen bezeichnet, mit denen die Meßwerte korrigiert werden müssen, um die turbulenten Schwankungen zu erhalten. Bei Korrekturen von Meßdaten wird später von den Fehlerkonstanten  $K_{C_i}^2$  ausgegangen. Im Ansatz A entsprechen diese Fehlerkonstanten den Steigungen aus der linearen Regression (Gl. 34 S. 29). Für diesen Ansatz ist daher in der Tabelle nur jeweils ein Wert der Größen  $K_{C_i}^2$  und  $\overline{M_i'^2}$  bei verschiedenen Shiftfrequenzen angegeben. Für Ansatz B werden die Fehlerkonstanten indirekt nach Gl. 45 aus den Frequenzfehlern für jede Shiftfrequenz einzeln berechnet.

Um die Größe der Frequenzfehler  $\sigma_{MCij}$  beurteilen zu können, werden sie in Relation zu den unkorrigierten Meßwerten betrachtet. Bei der Shiftfrequenz von 5 MHz beträgt der relative, mittlere Frequenzfehler 50% (Meßrichtung 2) bzw. über 90% (Meßrichtung 3).

Vergleicht man die Ergebnisse beider Ansätze und betrachtet das Verhältnis zwischen  $\overline{M_i'^2}$  und  $C_{ij}$  bei einer Shiftfrequenz von 5 MHz, so zeigt sich, daß für Meßrichtung 2 dieses Verhältnis ungefähr 1 ist, für Meßrichtung 3 ist  $C_{33}$  aber wesentlich größer als  $\overline{M_3'^2}$ . Wie erwartet, ändert sich bei kleineren Shiftfrequenzen dieses Verhältnis zu kleineren mittleren Frequenzfehlern  $C_{ij}$  hin.

Die Größe der mittleren, turbulenten Schwankungen  $\overline{M_i'^2}$  läßt sich unabhängig von der Shiftfrequenz recht gut bestimmen. Z.B. beträgt der Mittelwert von  $\overline{M_3'^2}$  (aus den Ergebnissen beider Ansätze gebildet)  $8.7 \cdot 10^{-4}$  mit der Standardabweichung von  $1.5 \cdot 10^{-4}$ .

Bezogen auf die unkorrigierte Meßgröße beträgt diese Standardabweichung 1%. D.h. die gesuchte Größe  $\overline{M}_3^{12}$  beträgt nur 5.8% des unkorrigierten Meßwertes. Sie ist aus diesem Meßwert mit einer relativen Genauigkeit von 15% zu bestimmen.

Die Fehlerkonstanten  $K_{C_i}^2$ , welche die Abhängigkeiten von der Meßfrequenz anzeigen, lassen sich für kleine Shiftfrequenzen jedoch nur ungenau bestimmen.

## Frequenzfehlerkorrekturen für andere Meßgebiete

Im Testgebiet, wo der Frequenzfehler tensor bestimmt werden sollte, sind die korrigierten, mittleren, turbulenten Schwankungen klein gegen die unkorrigierten Meßgrößen<sup>24</sup>. In der Grenzschicht, wo die Meßgebiete 1 bis 3 dieser Untersuchung liegen (vgl. Tabelle 1 S. 22), sind die turbulenten Schwankungen um Zehnerpotenzen größer als im Testgebiet. Dort wirken sich die Frequenzfehler bei der Betrachtung der mittleren Schwankungen im Meßsystem nicht so stark aus wie im Testgebiet. Die Transformation in das kartesische System zeigt aber einen starken Einfluß der Richtungscharakteristik der Frequenzfehler<sup>25</sup> auf die der mittleren Schwankungen. Der Frequenzfehler wirkt im kartesischen System besonders auf die Komponente des Reynoldstensor, welche die Raumrichtung repräsentiert, die den größten Winkel zu den Meßrichtungen bildet<sup>26</sup>.

Die Abhängigkeit der Richtungscharakteristik der Schwankungsverteilungen von der Lage der Meßrichtungen wird besonders deutlich, wenn man Meßergebnisse vergleicht, die unter Verwendung verschiedener Meßrichtungen entstanden sind. Hierzu werden Ergebnisse aus Meßgebiet 2 denen gegenübergestellt, die Gietz [14] bei einer anderen Untersuchung im Windkanal des IFS erhalten hat.

Meßgebiet 2: Dort waren die Größen der Frequenzfehler und die Lage der Meßrichtungen mit den für das Testgebiet gültigen Werten identisch. Die Shiftfrequenz betrug 5 MHz. Die turbulenten Schwankungen waren in Meßgebiet 2 – in der Grenzschicht – wesentlich größer als im Testgebiet. In Abb. 7 sind die Schwankungselipsen (wie zuvor z.B. in Abb. 6 als Projektion des eigentlichen Schwankungsellipsoids auf zwei Dimensionen) für mehrere Punkte der Ebene  $x_1 = -12mm$  aus Meßgebiet 2 gezeigt. Neben den größeren Schwankungselipsen des unkorrigierten Korrelationstensors sind die kleineren Schwankungselipsen der korrigierten turbulenten Schwankungen (des Reynoldstensors) gezeigt. Auch ist zu erkennen, daß sich nach der Frequenzfehlerkorrektur die Richtungscharakteristik des Reynoldstensors stark von der Charakteristik des unkorrigierten Korrelationstensors unterscheidet.

Messungen von Gietz: Gänzlich andere Orientierungen zeigen die Schwankungselipsen in Abb. 8. Diese Ergebnisse sind der Untersuchung von Gietz entnommen. Auch

---

<sup>24</sup>In der Außenströmung im Windkanal des IFS liegt  $\sqrt{v_i'^2}/U_\infty$  unter 1%. In den dimensionslosen Einheiten die in Tabelle 2 verwendet werden, entspricht dies  $1.0 \cdot 10^{-4}$ .

<sup>25</sup>Obwohl der Frequenzfehler tensor im Meßsystem diagonal ist, wirkt er nach Gl. 28 im kartesischen Koordinatensystem auch auf die Nichtdiagonalelemente der unkorrigierten gemessenen Schwankungen (vgl. Anhang C.3).

<sup>26</sup>In dieser Untersuchungen ist  $\overline{v_2'^2}$  am stärksten mit Frequenzfehlern behaftet. Die Lage der Meßrichtungen ist aus Abb. 61 S. 90 zu ersehen.

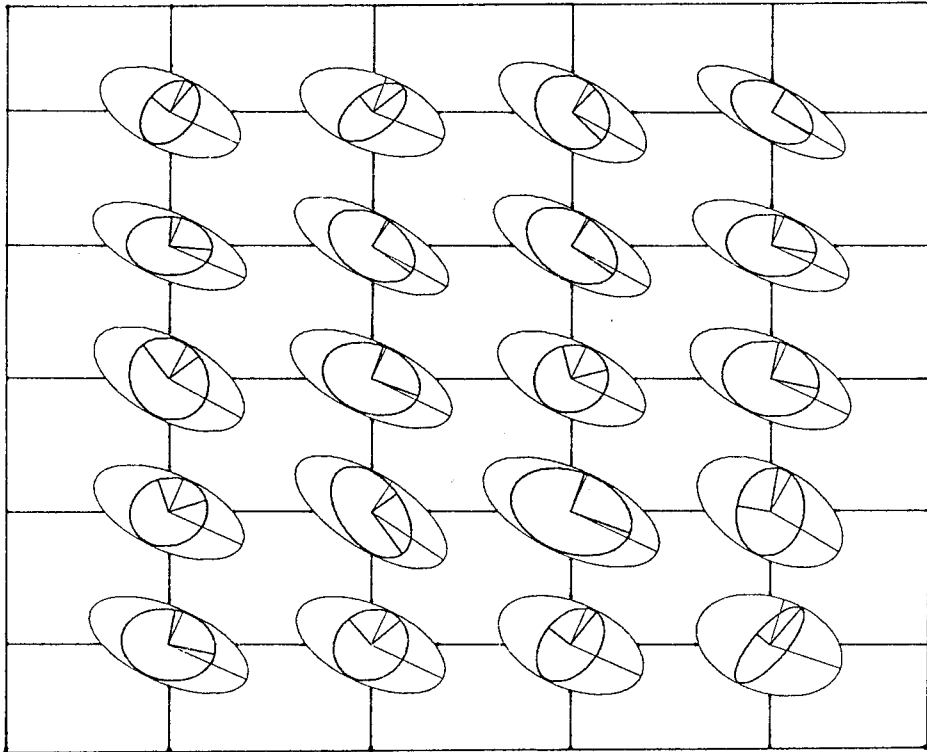


Abbildung 7: Schwankungsellipsen vor und nach der Korrektur des Frequenzfehlers; Meßgebiet 2; Ebene  $x = -12mm$

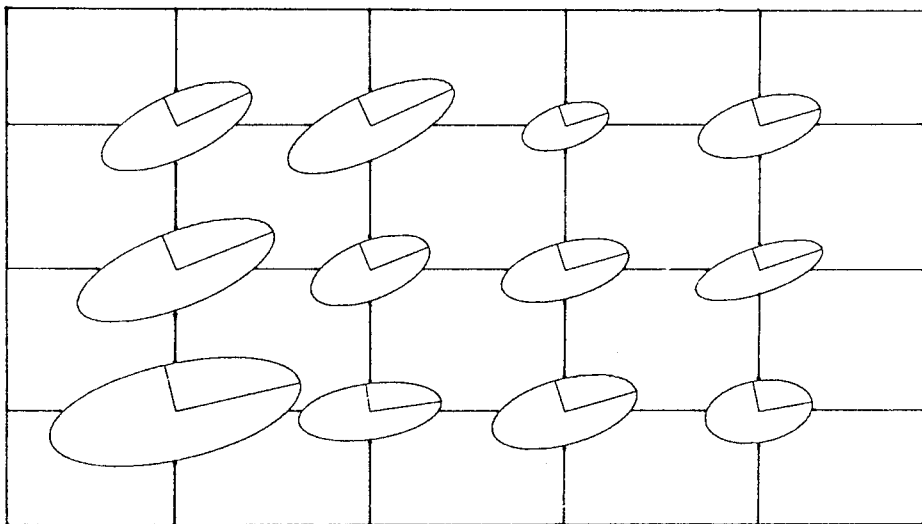


Abbildung 8: Schwankungsellipsen nach Meßergebnissen von Gietz

Gietz verwendete das LDV-System im Windkanal des IfS. Jedoch waren die Meßrichtungen im Experiment von Gietz gegenüber denen beim hier beschriebenen Experiment an der waagerechten Ebene gespiegelt <sup>27</sup>. Der Vergleich der Abbildungen 7 und 8 zeigt,

<sup>27</sup>Andere Randbedingungen waren zwischen beiden Untersuchungen vergleichbar. In beiden Fällen wurde eine Shiftfrequenz von 5 MHz verwendet. Die Ebenen die in den Abbildungen gezeigt werden, liegen in beiden Untersuchungen in einer Wirbelströmung (vgl. Gietz [14] S. 42, Ebene  $x = 149mm$ ).

daß mit den Meßrichtungen auch die Orientierung der Schwankungsellipsen an der waagerechten Ebene gespiegelt ist.

Die Korrektur des Frequenzfehlers konnte für die Daten von Gietz nicht durchgeführt werden, da sich die optischen und elektronischen Parameter in beiden Untersuchungen soweit unterschieden, daß die oben bestimmten Fehlerkonstanten  $K_{C_i}$  nicht auf die Ergebnisse von Gietz zu übertragen waren.

Die Größe der Frequenzfehlerkorrektur ist von der Fehlerkonstante  $K_{C_i}$  und der Meßfrequenz abhängig.

Inwieweit  $K_{C_i}$  als Kenngröße eines LDV-Systems oder zumindest als konstant während einer Messung angesehen werden kann, wird in Anhang C.1 ausführlich diskutiert. In dieser Untersuchung sind die Fehlerkonstanten  $K_{C_i}$  aus dem Testgebiet für die Meßgebiete 1 bis 3 übernommen worden.

Die Meßfrequenz ist von der Strömungsgeschwindigkeit und der Shiftfrequenz abhängig. Die Strömungsgeschwindigkeit ist vom Strömungsfeld vorgegeben. Die Shiftfrequenz jedoch kann bei einer Messung in einem gewissen Bereich variiert werden. Kleine Shiftfrequenzen wären wünschenswert, da sie auch nur einen kleinen Frequenzfehler erzeugen. Für die beschriebene Anwendung im Windkanal war aber eine Shiftfrequenz von 5MHz notwendig. Die Auswahl der Shiftfrequenz für dieses Experiment ist in Anhang C.2 erläutert.

In dieser Arbeit gezeigte Ergebnisse für die Komponenten des Reynoldstensors sind um den Frequenzfehler korrigiert. Insbesondere eine Untersuchung der Invarianten des Reynoldstensors, wie sie in den Eigenwertbetrachtungen in Abschnitt 4.2 durchgeführt werden, erscheinen ohne Korrektur des Frequenzfehlers nicht sinnvoll. Wie in Abb. 7 gezeigt, richtet der Frequenzfehler die unkorrigierte Schwankungsellipse eher nach der Geometrie der Meßrichtungen als nach der "Struktur des Reynoldstensors im Geschwindigkeitsraum" aus.

### 3.4 Allgemeine Fehlerbetrachtung der Meßgrößen

In Teil 1 dieser Arbeit wurden die experimentelle Bestimmung der momentanen Geschwindigkeitskomponenten und dabei auftretende Fehler beschrieben.

Im vorliegenden Teil 2 werden neue Auswertungsmethoden vorgestellt, um aus diesen momentanen Geschwindigkeiten die mittleren Geschwindigkeiten und die Komponenten des Reynoldstensors, d.h. gemittelte Schwankungsgrößen der Geschwindigkeit zu berechnen. Zusätzlich wird eine Fehlerkorrektur für die Komponenten des Reynoldstensors eingeführt.

Hier werden zunächst die Ergebnisse dieser mittleren Strömungsgrößen auf ihre Genauigkeit hin abgeschätzt.

Im weiteren Verlauf werden Fehler von "höheren" Termen der Strömungstheorie untersucht, die sich aus den mittleren Strömungsgrößen berechnen lassen (vgl. Abschnitt 4.2).

#### Komponenten der mittleren Geschwindigkeit und Komponenten des Reynoldstensors

Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten und Komponenten des Reynoldstensors werden für jeden Meßpunkt aus einem Ensemble von Einzelmessungen der momentanen Geschwindigkeitskomponenten berechnet (vgl. Anhang A.2). Daher basiert die Fehlerabschätzung auf diesen momentanen Geschwindigkeiten  $M_i$  (in die Meßrichtungen  $i$ ), die aus den Meßfrequenzen  $\nu_{Mi}$  bzw. aus den Dopplerfrequenzen  $\nu_{Di}$  (vgl. Gl. 29 und 30) nach

$$\begin{aligned} M_i &= s_i (\nu_{Mi} - \nu_{si}) \\ &= s_i \nu_{Di} \end{aligned} \quad (47)$$

(nicht über  $i$  summiert)

berechnet werden.  $s_i$  ist der Streifenabstand, und  $\nu_{si}$  bezeichnet die Shiftfrequenz. Der statistische Fehler von  $M_i$  hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher  $\nu_{Mi}$  von den Frequenzmeßgeräten bestimmt werden kann. Der relative Fehler der Meßfrequenz kann mit

$$\frac{\Delta \nu_{Mi}}{\nu_{Mi}} \approx 1\% \quad (\text{nicht über } i \text{ summiert}) \quad (48)$$

angesetzt werden (vgl. S. 28). Die systematischen Fehler bei der Bestimmung des Streifenabstands  $\Delta s_i$  sowie die Schwankungen der Shiftfrequenz  $\Delta \nu_{si}$  sind wesentlich kleiner als 1% und werden hier gegen den Fehler der Meßfrequenz vernachlässigt. Dann hängt der relative Fehler der Dopplerfrequenz

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \nu_{Di}}{\nu_{Di}} &= \frac{\Delta (\nu_{Mi} - \nu_{si})}{\nu_{Mi} - \nu_{si}} \\ &= \frac{\Delta \nu_{Mi}}{\nu_{Mi}} \frac{\nu_{Di} + \nu_{si}}{\nu_{Di}} \end{aligned} \quad (49)$$

(nicht über  $i$  summiert)

im wesentlichen von dem Verhältnis der Dopplerfrequenz zur Shiftfrequenz ab. Wenn die Shiftfrequenz  $\nu_{si}$  gegen null geht, wird der relative Fehler der Dopplerfrequenz minimal. Aus meßtechnischen Gründen, die in Anhang C.2 dargelegt sind, muß  $\nu_{si}$  aber oberhalb einer gewissen Grenze liegen.

Nach Gl. 49 sind die relativen Fehler der Dopplerfrequenzen an jedem Meßpunkt zu bestimmen. Für einige Meßpunkte z.B. im Bereich des parallelen Mittelschiffs, dort wo die Querkomponenten der Geschwindigkeit, also auch  $\nu_{Di}$  (für  $i = 2, 3$ ), vernachlässigbar klein sind, geht  $\Delta\nu_{Di}/\nu_{Di}$  gegen unendlich.

Dies führt kaum zu einer sinnvollen Fehlerabschätzung. In der Praxis ist es einfacher, mit einer allgemeingültigen Aussage für den Fehler - einer "Faustformel" - zu arbeiten. Daher wird der Fehler der momentanen Geschwindigkeiten  $\Delta M_i$  nicht auf die momentane Geschwindigkeit selbst, sondern auf die Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  bezogen. Geht man davon aus, daß die Shiftfrequenzen bei der hier beschriebenen Anwendung stets erheblich größer sind als die Dopplerfrequenzen, dann läßt sich der Fehler verallgemeinern und wie folgt ausdrücken<sup>28</sup>: Der Fehler der momentanen Geschwindigkeitskomponenten bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  beträgt ca. 1.1%.

Entsprechend zur Transformation der Geschwindigkeitskomponenten vom Meßsystem in das kartesische Koordinatensystem (Gl. 64 in Anhang A.1) berechnen sich die Fehler der momentanen Geschwindigkeiten  $\Delta v_i$  im kartesischen System nach

$$\Delta v_i = |\mathbf{E}_{ij}^{-1}| \Delta M_j \quad (50)$$

Die Koeffizienten der Transformationsmatrix  $\mathbf{E}_{ij}^{-1}$  ergeben sich aus den Einheitsvektoren der Meßrichtungen und sind genauer bestimmbar als auf 1%.

In der Literatur wird der Fehler eines Mittelwertes - hier der mittleren Geschwindigkeit  $\overline{M}_i$  - als Standardabweichung geteilt durch  $\sqrt{N}$  ( $N =$  Anzahl der Messungen) angegeben. Benutzt man die Definition des lokalen Turbulenzgrades  $\eta_i$  (Gl. 67 S. 92), dann ergibt sich der relative Fehler der mittleren Geschwindigkeit zu

$$\frac{\Delta \overline{M}_i}{\overline{M}_i} = \frac{1}{\sqrt{N}} \eta_i \quad (\text{nicht über } i \text{ summiert}) \quad (51)$$

Nun unterscheidet sich der lokale Turbulenzgrad in den drei Meßgebieten recht stark. Während er im Mittel zwischen 10 und 20% liegt, steigt er im Meßgebiet 1 bis über 1000% an. Bezieht man wie beim Fehler der momentanen Geschwindigkeiten auch hier den Fehler auf die Anströmgeschwindigkeit, dann erhält man Fehler der mittleren Geschwindigkeiten  $\Delta \overline{M}_i/U_\infty$ , die in den Meßgebieten 2 und 3 ca. 0.5% und in Meßgebiet 1 ca. 3% betragen.

---

<sup>28</sup>Der Fehler der momentanen Geschwindigkeiten bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit  $\Delta M_i/U_\infty$  wird wie folgt abgeschätzt:

In den drei Meßgebieten liegt die axiale Komponente der momentanen Geschwindigkeit zwischen 0 und  $0.2 U_\infty$ . Die Shiftfrequenz für diese Komponente beträgt  $0.9 U_\infty$  (4MHz). Wegen  $\Delta M_i/M_i = \Delta \nu_{Di}/\nu_{Di}$  ergibt sich nach Gl. 49  $\Delta M_1/U_\infty \approx 1.1\%$ .

Die Querkomponenten der momentanen Geschwindigkeiten sind im wesentlichen kleiner als  $0.2 U_\infty$ . Die Shiftfrequenz für die Querkomponenten beträgt  $1.1 U_\infty$  (5MHz). Damit ergibt sich für die Querkomponenten  $\Delta M_i/U_\infty \approx 1.2\%$  (für  $i = 2, 3$ ).

Die Berechnung der mittleren Strömungsgrößen aus einem Ensemble von Einzelmessungen durch eine Gaußanpassung ist in Anhang A.2 diskutiert. Die Güte dieser Gaußanpassung wurde durch numerische Simulationen getestet (vgl. S. 94). Die Gaußanpassung kann (in relativen Genauigkeiten ausgedrückt) die mittlere Geschwindigkeit auf unter 1% und die Komponenten des Reynoldstensors auf ca. 5% wiedergeben.

Wie in Abschnitt 3.3 ausführlich diskutiert, sind die Komponenten des Reynoldstensors neben den statistischen Fehlern stärker noch mit den *Frequenzfehlern* behaftet. Der Einfluß dieser Frequenzfehler auf die Meßergebnisse läßt sich wie folgt zusammenfassen:

- Der Einfluß des Frequenzfehlers auf die mittlere Geschwindigkeit ist vernachlässigbar klein.
- Die Bestimmung der turbulenten Schwankungen in die Richtungen  $x_2$  und  $x_3$  (die Querkomponenten) führt ohne Frequenzfehlerkorrektur zu Ergebnissen, die sich um eine Zehnerpotenz von den "korrigierten" Werten unterscheiden <sup>29</sup>.
- Ein Turbulenzgrad der Querkomponenten von unter 1% ist mit einem LDV-System auch nach einer Frequenzfehlerkorrektur nicht zu bestimmen. (In den Meßgebieten dieser Untersuchung ist der Turbulenzgrad jedoch stets größer als 1%.)

## Ableitungen

In die Ungenauigkeiten der partiellen Ableitungen gehen sowohl die Ungenauigkeiten der abzuleitenden Größen als auch die Fehler der Ortsbestimmung ein. Wie in Teil 1 beschrieben, sind zwei Ortskoordinaten relativ zueinander auf 0.1mm genau einzustellen. Bei dem verwendeten Meßpunktabstand von 2mm ist das Intervall zwischen zwei Meßpunkten mit einer relativen Genauigkeit von 0.5% zu bestimmen.

Der relative Fehler der partiellen Ableitungen ist dort minimal, wo der Gradient der untersuchten Variablen maximal ist. In dem "Totwasser" in Meßgebiet 1 jedoch, wo sowohl der Gradient der mittleren Geschwindigkeiten als auch der Gradient der Komponenten des Reynoldstensors verschwindet, geht der relative Fehler aller partiellen Ableitungen gegen unendlich.

In Anhang B wird das integrale Verfahren beschrieben, mit welchem in dieser Untersuchung partielle Ableitungen berechnet werden. "Ausreißer" von Meßergebnissen an einzelnen Meßpunkten werden ausgeglichen, da die Rotation bei diesem Verfahren jeweils über 4 Meßpunkte bzw. die Divergenz jeweils über 8 Meßpunkte gemittelt wird.

Ein anschauliches Bild der Güte von partiellen Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten ergibt sich z.B. durch  $div(\vec{v})_{norm}$  (vgl. Anhang B). Nach der Kontinuitätsgleichung muß  $div(\vec{v})_{norm}$  verschwinden. Die Normierung der Divergenz ist so gewählt,

<sup>29</sup>Wie bedeutend Fehlerkorrekturen bei Messungen von Geschwindigkeitsschwankungen der Querkomponenten sind, zeigen Portfors et al. [32] schon 1969 für Hitzdrahtmessungen von Uberoi et al. [42] [43]. Bedingt durch verschiedene Korrekturen wurden bei vergleichbaren Experimenten im ersten Fall Querschwingungen gemessen, die größer als die Schwankungen in axialer Richtung waren. Im zweiten Fall war das Verhältnis der Schwankungskomponenten gerade umgekehrt.

daß der Wert 1 für  $div(\vec{v})_{norm}$  einer Quelle und der Wert  $-1$  einer Senke am Meßpunkt entspricht. Wie z.B. für Meßgebiet 1 in Abb. 18 (S. 55) zu erkennen, liegt  $div(\vec{v})_{norm}$  zwischen  $-2\%$  und  $4\%$ .

## Eigenrichtungen

Die Genauigkeit der Lage der Eigenrichtungen des Reynoldstensors bzw. des symmetrierten Gradiententensors läßt sich nicht in einer allgemeingültigen Form beschreiben. Diese Genauigkeit ist vom Verhältnis der Komponenten des jeweiligen Tensors untereinander abhängig. Es ergeben sich sehr unterschiedliche Genauigkeiten für die Eigenrichtungen. Dies wird im Folgenden an einigen Beispielen verdeutlicht, indem verschiedene Verhältnisse jeweils zweier Diagonalkomponenten des Reynoldstensors zueinander angenommen und die Genauigkeiten der Eigenrichtungen berechnet werden.

- In isotroper Turbulenz sind die Eigenrichtungen des Reynoldstensors unbestimmt.
- Es wird angenommen, daß zwei Diagonalkomponenten des Reynoldstensors gleich sind  $\overline{v_i'^2} = \overline{v_j'^2}$  und die dazugehörige Nichtdiagonalkomponente  $10\%$  der Diagonalkomponenten beträgt  $\overline{v_i'v_j'}/\overline{v_i'^2} = 10\%$   
Die Änderung einer Diagonalkomponente um  $5\%$  bewirkt eine Drehung der Eigenrichtung um ca.  $8^\circ$ . Eine Änderung der Nichtdiagonalkomponente hat keinen Einfluß auf die Lage der Eigenrichtungen.
- Zwischen den zwei Diagonalkomponenten bestehe das Verhältnis  $\overline{v_i'^2} = 2\overline{v_j'^2}$ , und die Nichtdiagonalkomponente betrage wieder  $\overline{v_i'v_j'}/\overline{v_i'^2} = 10\%$ .  
Bei Änderung einer Diagonalkomponente um  $5\%$  wird die Eigenrichtung um ca.  $1^\circ$  gedreht. Die Änderung der Nichtdiagonalkomponente um  $5\%$  dreht die Eigenrichtungen um ca.  $2^\circ$ .

Generell ist die Lage der Eigenrichtungen um so genauer bestimmbar, je geringer der Unterschied zwischen Diagonal- und Nichtdiagonalkomponenten ist.

## Abschließende Bemerkung zur Fehlerbetrachtung

Alle Fehlerabschätzungen basieren auf der Genauigkeit der Frequenzbestimmung, die in Gl. 48 mit  $1\%$  angesetzt wird. Im Experiment ist diese Genauigkeit entscheidend von der Signalqualität abhängig. Obwohl gerade bei LDV-Messungen in Nähe einer Modellwand die Signalqualität z.T. sehr schlecht ist (vgl. Anhang C.1), zeigen die Ergebnisse - insbesondere die partiellen Ableitungen - kleinere Fehler, als nach der Fehlerrechnung zu erwarten wären.

Diese geringen Fehler entsprechen nicht den Beobachtungen bei Einkomponentenmessungen. Experimente, in denen speziell der Einfluß der Signalqualität auf die Genauigkeit der gemittelten Strömungsgrößen untersucht wurde, zeigen die Zusammenhänge zwischen der Güte von Ergebnissen und der Methode der Dreikomponentenmessung auf:

Bei der Untersuchung nur einer Geschwindigkeitskomponente werden auch Einzelmessungen beobachtet, die, bedingt durch eine schlechte Signalqualität, sehr weit vom Mittelwert der Geschwindigkeitskomponente entfernt sind. Die experimentelle Ursache für diese schlechte Signalqualität soll hier nicht diskutiert werden. In diesem Zusammenhang ist jedoch wichtig, daß diese schlechten Signale in der Auswerteelektronik nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit als gültig detektiert werden.

In den Experimenten dieser Arbeit wurden jeweils drei Signale (für drei Komponenten  $M_i$ ) gleichzeitig aufgenommen. Dieses Tripel von Einzelmessungen wurde nur dann als gültig gewertet, wenn jede der Einzelmessungen gültig war. Die Wahrscheinlichkeit, ein solches Tripel als gültig zu detektieren, ist aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für die drei Einzelmessungen zu bilden. Diese Wahrscheinlichkeit für ein Tripel von Einzelmessungen ist bei schlechter Signalqualität also wesentlich geringer als bei der Messung nur einer Geschwindigkeitskomponente.

Durch die gleichzeitige Bestimmung aller drei Geschwindigkeitskomponenten werden schlechte Signale schon in der Meßelektronik "herausgefiltert", noch bevor sie in die statistische Auswertung einfließen.

## 4 Ergebnisse der Experimente

In diesem Kapitel werden Meßergebnisse aus zwei Experimenten mit verschiedenen Zielsetzungen dargestellt.

Ziel der Messungen am HSVA-Tanker-2 war ein Vergleich von experimentellen und numerischen Ergebnissen. Die Ergebnisse aus Experimenten werden üblicherweise in Form von räumlichen Verteilungen der mittleren Geschwindigkeiten oder der Komponenten des Reynoldstensors dargestellt. Diese Darstellungen werden mit den Ergebnissen numerischer Berechnungsverfahren verglichen. Ein solcher Vergleich wird in Abschnitt 4.1 für einige Ergebnisse am HSVA-Tanker-2 angedeutet. Ausführlich wird der Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse von Denker, Knaack und Kux in [5] beschrieben.

Abschnitt 4.1 zeigt, wie schwierig es ist, die Güte eines numerischen Berechnungsverfahrens allein nach den Ergebnissen für das Feld der mittleren Geschwindigkeiten zu beurteilen.

Die Messungen am Modell des "Original" HSVA-Tankers sollten über die Ergebnisse der mittleren Geschwindigkeiten hinaus die Zusammenhänge zwischen dem Vektorfeld der mittleren Geschwindigkeiten und dem Reynoldsschen Tensorfeld beleuchten. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Abschnitt 4.2 dargestellt und zeigen u.a. räumliche Verteilungen einzelner Terme aus den Grundgleichungen. Diese Terme wurden aus den Meßergebnissen berechnet.

### 4.1 Vergleich zwischen Experimenten und Berechnungsverfahren

Im Vergleich von Ergebnissen aus Experimenten auf der einen Seite und aus numerischen Berechnungsverfahren auf der anderen Seite werden i.a. Geschwindigkeits- und Druckverteilungen einander gegenübergestellt. Um zu diesen Ergebnissen zu gelangen, sind auf beiden Seiten in verschiedenen Zwischenstufen Spezialisierungen oder Näherungen für das untersuchte Strömungsfeld einzuführen. In jeder dieser Zwischenstufen gibt es freie Parameter die entweder rein theoretisch bestimmt oder nach empirischen Betrachtungen postuliert werden müssen. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen sind Endergebnisse einer Untersuchung nachdem alle Parameter festgelegt sind.

Die wichtigsten Stufen numerischer und experimenteller Untersuchungen sind in Abb.9 als Übersicht zusammengestellt. Es soll hier nicht versucht werden, eine Einführung in die Details numerischer Berechnungsverfahren zu geben, sondern es wird eine grobe Einteilung vorgestellt, die sich an den verschiedenen "Näherungsstufen" orientiert.

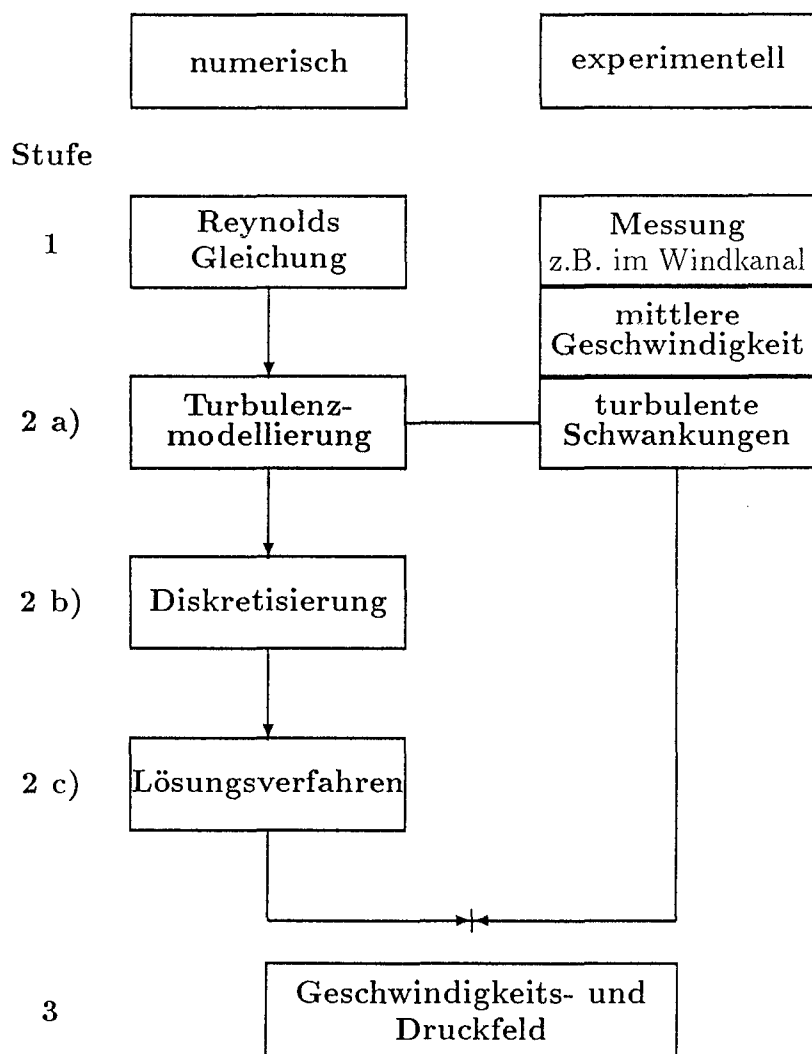


Abbildung 9: Vergleich zwischen Experimenten und Berechnungsverfahren

Geht man von einer stationären Strömung aus, dann ist auf Seiten der Numerik als Grundlage in Stufe 1 vom Gleichungssystem aus der Reynoldsgleichung Gl. 5 und der zeitlich gemittelten Kontinuitätsgleichung Gl. 4 auszugehen.

Die Schliessung dieses Gleichungssystems durch verschiedene Turbulenzmodelle wurde in Abschnitt 2.3 erläutert. Die Auswahl eines dieser Turbulenzmodelle stellt als Stufe 2a) den ersten Näherungsschritt dar.

In der nächsten Stufe 2b) wird die Kontur des zu untersuchenden Strömungskörpers sowie die Geometrie des Strömungsfeldes selbst räumlich diskretisiert beschrieben. Die Feinheit der räumlichen Beschreibung ist im wesentlichen durch die zur Verfügung stehende Computerkapazität beschränkt <sup>30</sup>.

Nach der Diskretisierung gehen die Differential- bzw. Integralgleichungssysteme in Differenzgleichungen über, auf die in Stufe 2c) unterschiedliche Lösungsverfahren angewandt werden. Dabei können Kriterien der Konvergenz und der Iterationsart (z.B. Itera-

<sup>30</sup>Die Art der räumlichen Diskretisierung, das "Erstellen des Rechnernetzes", wird englisch als *grid-generation* bezeichnet. Wie die folgenden Seiten zeigen werden, können Berechnungen eines Geschwindigkeitsfeldes mit unterschiedlich feinen Rechnernetzen völlig verschiedene Ergebnisse liefern.

tionsschrittweite, Einzelschritt- oder Gesamtschrittverfahren, etc.) als unterschiedliche Parameter gewählt werden.

Experimente werden in Luft oder in Wasser an Strömungskörpern in verschiedenen Maßstäben z.B. in der Großausführung oder im Modell durchgeführt. Im folgenden aufgeführte Ergebnisse entstammen Experimenten im Windkanal des IfS, wie sie in Kapitel 3 beschrieben sind.

Die Ergebnisse beider Untersuchungsmethoden werden in Stufe 3 in Form von Geschwindigkeits- oder Druckfeldern gegenübergestellt.

Im Bereich des Schiffbaus werden z.B. von der ITTC (International Towing Tank Conference) workshops veranstaltet, zu denen Arbeitsgruppen aufgefordert sind, mit ihren unterschiedlichen numerischen Methoden Strömungsfelder an vorgegebenen Testfällen zu berechnen und die Genauigkeit ihrer Ergebnisse durch einen Vergleich untereinander zu testen.

Im September 1990 haben 18 Teilnehmer aus verschiedenen Ländern auf dem "SSPA-CTH-IIHR workshop on ship viscous flow" in Göteborg ihre Ergebnisse aus numerischen Berechnungen vorgestellt. Zwei Schiffsformen waren als Testfälle ausgeschrieben. Der erste Testfall war der HSVA-Tanker, der auch in dieser Arbeit experimentell untersucht wird. Der zweite Testfall war eine im Heckbereich (ab  $x/L = 0.65$ ) modifizierte Form des HSVA-Tankers, der im IfS als HSVA-Tanker-2 bezeichnet wird.

Auch die Messungen an einem Doppelrumpfmodell des zweiten Testfalls wurden im Windkanal des IfS durchgeführt.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene des HSVA-Tanker-2. Die Ergebnisse der numerischen Berechnungsverfahren sind den proceedings des workshops in Göteborg (Larsson [24]) entnommen.

Die Messergebnisse (Abb.10) zeigen im Außenbereich die Aufwärtstendenz der Potentialströmung und im Bereich des Propellerkreises einen Wirbel mit recht großen Beträgen der Querkomponenten. Aus der Vielzahl der numerischen Ergebnisse ist hier zunächst als Beispiel eines mit recht guter Übereinstimmung zu den Messungen gezeigt (Abb. 11). Sowohl die Außenströmung, als auch die Lage des Wirbels und die Größe seiner Querkomponenten sind gut mit den Ergebnissen der Messungen in Einklang zu bringen.

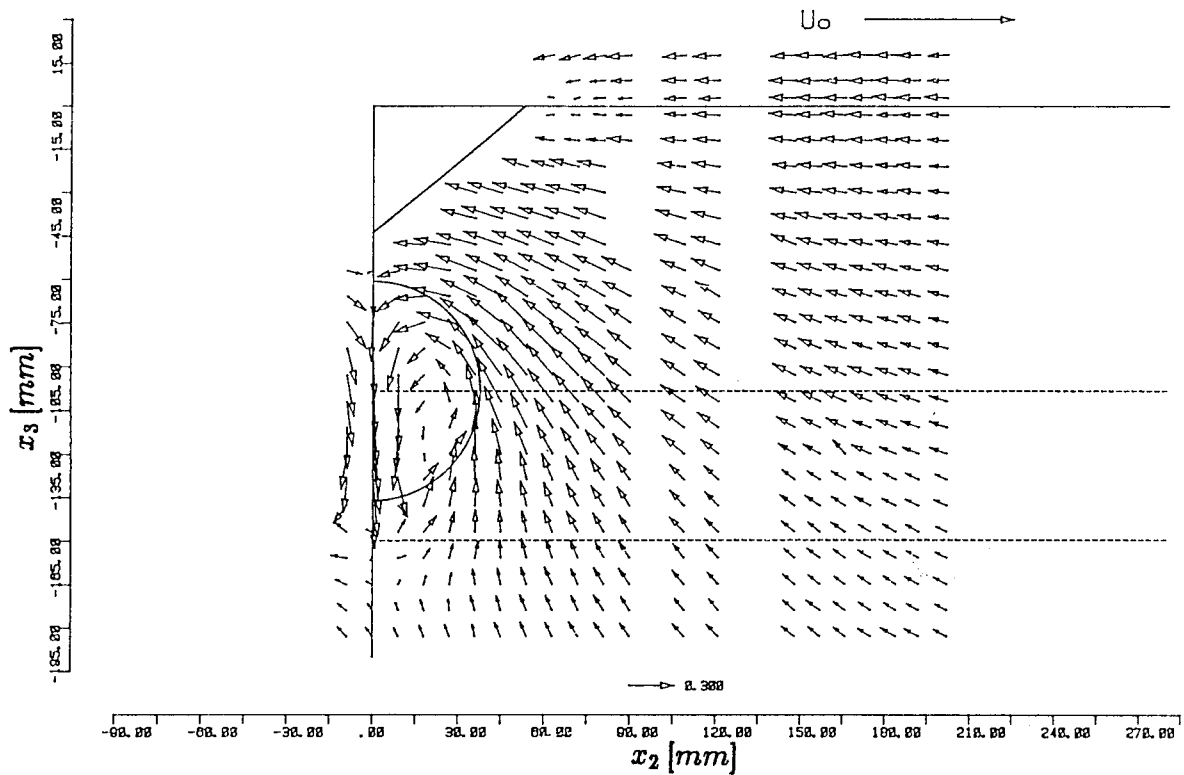


Abbildung 10: Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Messung

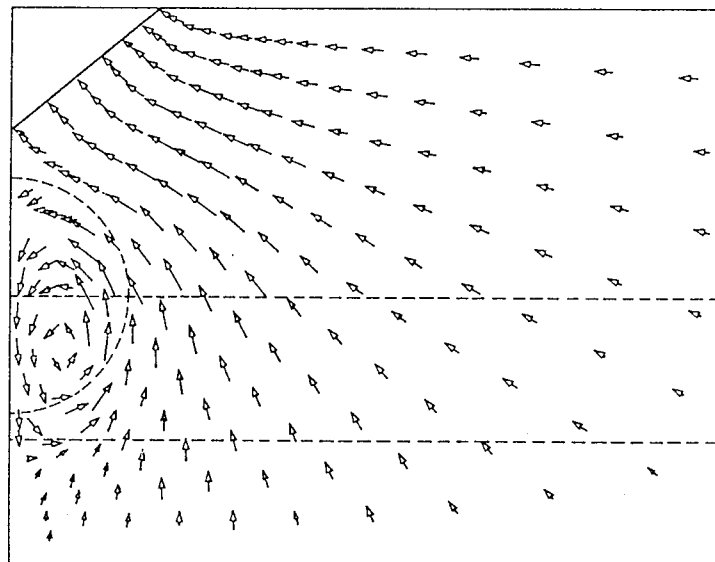


Abbildung 11: Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Berechnung 1

Bei der Diskussion über die Güte eines numerischen Berechnungsverfahrens haben Fragen der Turbulenzmodellierung eine entscheidende Bedeutung. Wie schwierig eine Optimierung dieser Turbulenzmodellierung in Stufe 2a) der Numerik ist, wenn alle Parameter der verschiedenen Stufen gekoppelt betrachtet werden, d.h. solange ein Vergleich in Form des Geschwindigkeitsfeldes als Ergebnis nach Durchlaufen aller Stufen der Numerik durchgeführt wird, soll durch die folgende Betrachtung verdeutlicht werden.

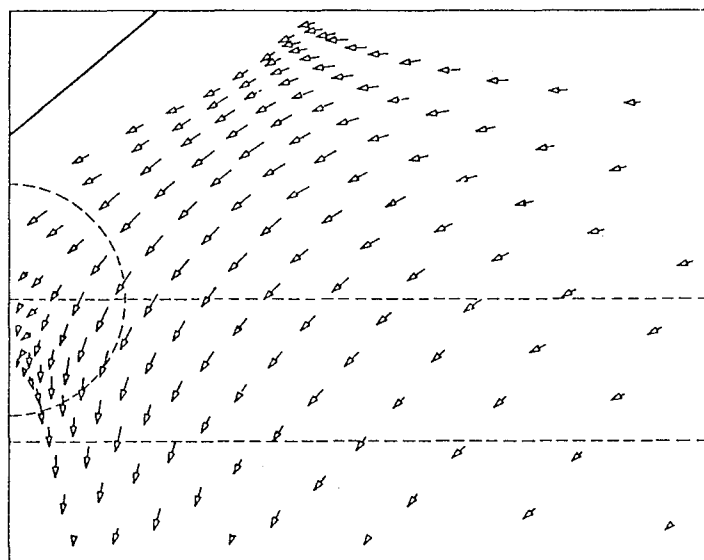


Abbildung 12: Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Berechnung 2

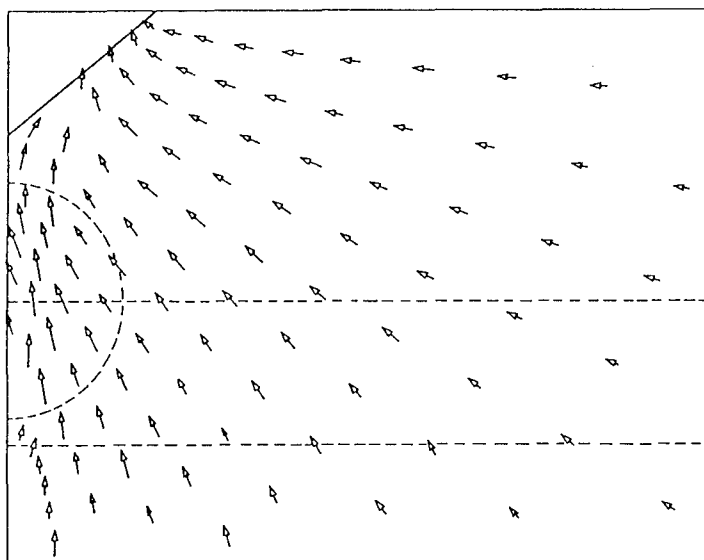


Abbildung 13: Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Berechnung 3

Die Abbildungen 12 und 13 zeigen zwei andere Berechnungen des workshops. Die Ergebnisse — ebenfalls in der Propellerebene — sind nicht nur untereinander sehr verschieden, in einem Bild zeigt sich eine Aufwärtstendenz, im anderen eine Abwärtstendenz, auch der im Experiment gemessene Wirbel fehlt gänzlich.

Alle drei hier gezeigten Ergebnisse von Berechnungen verwenden in Stufe 2a) das eddy-viscosity Turbulenzmodell (vgl. Abschnitt 2.3). Beachtet man, daß die unterschiedlichen Ergebnisse durch die Einflüsse der Parameterwahl in den Stufen 2b) und 2c) entstanden

sind, dann erscheint die Beurteilung einer Turbulenzmodellierung in einem Berechnungsverfahren nach der Geschwindigkeitsverteilung in Stufe 3 fraglich.

Wie in der Übersicht (Abb. 9) gezeigt, bietet sich jedoch eine Vergleichsmöglichkeit zwischen Experiment und Numerik direkt in der Stufe der Turbulenzmodellierung an. Wenn die turbulenten Schwankungen und mittleren Geschwindigkeiten sowie deren Ableitungen im Experiment hinreichend genau bestimmt werden können, ist eine Untersuchung des Turbulenzmodells direkt, d.h. unabhängig von den folgenden Stufen der Numerik möglich. Auf diesen direkten Vergleich wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

## 4.2 Experimentelle Ergebnisse zu Grundlagen der Strömungstheorie

Während im vorherigen Abschnitt nur die mittlere Geschwindigkeit und deren räumliche Verteilungen betrachtet wurden, werden hier aus den Meßergebnissen auch "höhere Terme" berechnet, die entweder für Turbulenzmodelle relevant sind, oder sich aus den Grundgleichungen ableiten lassen. Im Gegensatz zu den Messungen am HSVA-Tanker-2, die im vorherigen Abschnitt diskutiert wurden, liegen hier die Messungen am "Original" HSVA-Tanker zugrunde. Diese Messungen wurden in kleinen ausgewählten Meßgebieten (vgl. Abschnitt 3.2) mit sehr hoher räumlicher Auflösung durchgeführt.

Im folgenden werden zunächst von der theoretischen Seite jene "höheren Terme" erläutert, die dann aus den Meßwerten berechnet und für die einzelnen Meßgebiete getrennt dargestellt werden. In Abschnitt 4.2.5 werden Schlußfolgerungen aus den Ergebnissen der drei Meßgebiete gezogen.

### 4.2.1 Weiterführende Auswertungen von Meßergebnissen

#### Untersuchungen von Invarianten

Für die Meßgebiete am "Original" HSVA-Tanker wurden die räumlichen Verteilungen des Vektorfeldes der mittleren Geschwindigkeit und des Reynolds'schen Tensorfeldes bestimmt.

Die einzelnen Komponenten beider Felder im kartesischen Koordinatensystem liegen als Funktion des Ortsvektors vor. Auch die partiellen räumlichen Ableitungen dieser Komponenten werden bezogen auf das kartesische System berechnet (vgl. Anhang B). Die Wahl des Koordinatensystems ist willkürlich und damit auch die Darstellung einzelner Komponenten einer Strömungsgröße oder ihrer partiellen Ableitungen.

In der Literatur gibt es verschiedene Ansätze die Vektor- und Tensorfelder unabhängig von Koordinatensystemen in ihren Invarianten zu untersuchen.

Speziale [38] untersuchte Turbulenzmodelle nach ihren Eigenschaften beim Wechsel des Koordinatensystems. Er analysierte verschiedene Modelle vom theoretischen Standpunkt aus und zeigte, daß die meisten der allgemein verwendeten Turbulenzmodelle bei Koordinatentransformationen nicht invariant sind.

Donaldson et al. [7] führten zur Schließung der Reynoldstransportgleichungen ein Turbulenzmodell ein, das invariant bzgl. von Koordinatentransformationen ist. In weiteren Untersuchungen zeigten Donaldson et al. [8] [9] Anwendungen dieses Turbulenzmodells in numerischen Berechnungen verschiedener Strömungsfelder.

Zur Beschreibung des Reynoldstensors, speziell wenn isotrope Turbulenz angenommen wird, führt Lumley [25] [26] einen "Anisotropietensor" ein. Mit den Eigenwerten dieses Tensors definiert Lumley ein Maß für die Isotropie.

Allgemein kann man in einem ersten Schritt zur Beschreibung von Strömungsgrößen in einer koordinateninvarianten Form von den Grundgleichungen der Strömungslehre ausgehen und untersuchen, welche Zusammenhänge der Vektor- und Tensorfelder durch skalare Größen beschrieben werden. So fordert die Kontinuitätsgleichung z.B., daß die Divergenz des Vektors der mittleren Geschwindigkeit (trivialerweise ein Skalar) verschwindet. Aber auch der Tensor der Reynoldsspannungen wird durch einen Skalar, nämlich die kinetische Energie der Turbulenz teilweise beschrieben.

Zusammenhänge zwischen den mittleren Geschwindigkeiten und dem Reynoldstensor werden in der Wirbelviskositäts-Hypothese (vgl. Gl. 15 S. 13) durch die skalare Scheinzähigkeit  $\nu_t$  angenommen.  $\nu_t$  wird jedoch nur als Skalar postuliert und es wird sich im folgenden zeigen, daß diese Annahme durch die Meßergebnisse nicht bestätigt werden kann.

Wenn man die Wirbelviskositäts-Hypothese nach  $\nu_t$  auflöst, dann liefert (formal mit jeweils einzelnen  $i, j$ )

$$\nu_t = \frac{\frac{2}{3}k\delta_{ij} - \overline{v'_i v'_j}}{\frac{1}{2}(\overline{v_{i|j}} + \overline{v_{j|i}})} \quad (\text{nicht über } i, j \text{ summiert}) \quad (52)$$

mit den experimentellen Daten an jedem Ortspunkt sechs verschiedene Werte für  $\nu_t$ . Diese unterschiedlichen Werte werden im folgenden mit  $\nu_{tij}$  bezeichnet.

Im Vergleich zu den einzelnen  $\nu_{tij}$  wird ein skalares  $\nu_t$  hier z.B. nach Saffmann et al. [35] aus dem einfachen Ansatz

$$\nu_{t(Saff)} = c \frac{k}{|\vec{\omega}|} \quad (53)$$

berechnet. Dabei ist  $k$  die kinetische Energie der Turbulenz,  $\vec{\omega}$  der Vektor der Rotation ( $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{v})$ ) und  $c$  eine Konstante, die in der Literatur meist mit 1.0 angegeben wird. Nach der Theorie soll diese skalare Scheinzähigkeit in Gl. 52 alle sechs Komponenten-gleichungen befriedigen. Räumliche Verteilungen von  $\nu_{tij}$  und  $\nu_{t(Saff)}$  werden in den folgenden Abschnitten gegenübergestellt.

In einer weiteren Betrachtung werden der Reynoldstensor und der Gradiententensor auf ihre Eigencharakteristika hin untersucht.

Wenn in der Wirbelviskositäts-Hypothese  $\nu_t$  als Skalar angenommen wird, dann werden damit auch gleiche Eigenrichtungen für den Reynoldstensor  $\mathbf{R}_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$  und den symmetrisierten Gradiententensor  $\frac{1}{2}(\overline{v_{i|j}} + \overline{v_{j|i}})$  postuliert. Zur Untersuchung dieser Annahme werden Meßergebnisse für die einzelnen Komponenten in beide Tensoren eingesetzt und die Tensoren auf ihre Hauptachsen transformiert.

## Einzelne Terme der Grundgleichungen

Die Reynoldsgleichung (Gl. 5) beschreibt die Entwicklung der zeitlichen Mittelwerte von Strömungsgrößen in einem stationären, inkompressiblen Strömungsfeld.

Die linke Seite der Reynoldsgleichung  $(\bar{v}_{i|j}) \bar{v}_j$  bezeichnet die effektive Beschleunigung des betrachteten Volumenelements. Diese Beschleunigung wird durch die Identität

$$(\bar{v}_{i|j}) \bar{v}_j = \frac{1}{2}(\bar{v}_j \bar{v}_j)_i - L_i \quad (54)$$

in eine Form überführt, in welcher der von Truesdell [41] eingeführte Lambvektor  $\vec{L} = \vec{v} \times \vec{\omega}$  auftaucht.

Das Gleichgewicht <sup>31</sup> zu diesen Beschleunigungen auf der linken Seite der Reynoldsgleichung bilden auf der rechten Seite die Druckkräfte  $\bar{p}_{|i}$  und die Reynoldskräfte  $\rho(\overline{v'_i v'_j})_{|j}$ .

Der Term der viskosen Kräfte, der die kinematische Zähigkeit  $\nu$  enthält, ist gegenüber den Reynoldskräften zu vernachlässigen.

Somit ergibt die Reynoldsgleichung (Gl. 5)

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\bar{v}_j \bar{v}_j)_i - L_i}_{\text{effektive Beschl.}} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\bar{p}_{|i}}_{\text{Druckkräfte}} - \frac{1}{\rho} \underbrace{(\rho(\overline{v'_i v'_j})_{|j})}_{\text{Reynoldskräfte}} \quad (55)$$

(Zur Vereinfachung der Bezeichnungen werden, wie in der Literatur üblich, die effektive Beschleunigung mit  $a_i = (\bar{v}_{i|j}) \bar{v}_j = 1/2(\bar{v}_j \bar{v}_j)_i - L_i$  und die Reynoldskräfte mit  $-T_i = \rho(\overline{v'_i v'_j})_{|j}$  abgekürzt.)

LDV-Messungen liefern keine Ergebnisse für das Druckfeld. Eine exakte Gegenüberstellung der linken und rechten Seite aus Gl. 55 ist mit den vorliegenden Meßdaten nicht möglich. Da jedoch häufig angenommen wird, daß der Druck in einem Totwasser wie etwa im Meßgebiet 1 konstant ist, wird hier die effektive Beschleunigung  $a_i$  direkt den Reynoldskräften  $-T_i$  gegenübergestellt.

In Pfeildarstellungen werden die Querkomponenten der beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{T}$  verglichen. Um zu beurteilen, inwieweit der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  und der Vektor der Reynoldskräfte  $-\vec{T}$  entgegengesetzt orientiert und vom Betrag proportional sind d.h. als

$$a_i = \frac{T_i}{\rho} \quad (56)$$

anzusetzen sind, wird die skalare Größe  $\xi$  mit

$$-1 \leq \xi = \frac{\vec{a} \vec{T}}{|\vec{a}| |\vec{T}|} \leq 1 \quad (57)$$

eingeführt.  $\xi$  nimmt den Wert 1 an, wenn die Annahme in Gl. 56 erfüllt ist, und den Wert  $-1$ , wenn  $\vec{a}$  und  $-\vec{T}/\rho$  parallel und betragsmäßig gleich sind.

<sup>31</sup>Streng genommen bezeichnen auch die Terme auf der rechten Seite der Reynoldsgleichung (z.B. in der Form von Gl.55) Beschleunigungen. Für unkompressible Strömungen werden in der Strömungslehre aber häufig die Kräfte wie die "Energie" (vgl. S. 9) pro Masseneinheit betrachtet, so daß nicht exakt zwischen Kräften und Beschleunigungen unterschieden wird. Daher spricht man beim Vergleich von Termen der Reynoldsgleichung auch vom "Gleichgewicht der Kräfte".

In Gl. 56 wir angenommen, daß der Druckterm vernachlässigt werden kann. Eine Aussage über die Zusammenhänge zwischen den mittleren Geschwindigkeiten und den turbulenten Schwankungen, ohne daß eine solche Näherung benutzt wird, liefert jedoch die Theorie, wenn man die Rotation der Reynoldsgleichung Gl. 55 berechnet. Es ergibt sich

$$- \epsilon_{ijk} L_{j|k} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{\rho} T_{j|k} \quad (58)$$

oder in Vektorschreibweise

$$- \text{rot } \vec{L} = \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{T} \quad (59)$$

In dieser Vektorgleichung sind zweite partielle Ableitungen von Strömungsgrößen enthalten und es fragt sich, ob es sinnvoll ist, Meßergebnisse zweimal zu differenzieren.  $\text{rot } \vec{L}$  wird aus den zweiten Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten berechnet. Wie die Ergebnisse in den folgenden Abschnitten zeigen, sind die Verteilungen von  $\text{rot } \vec{L}$  noch "recht glatt". Dahingegen sind die zweiten Ableitungen der Komponenten des Reynoldstensors in  $\text{rot } \vec{T}$  von Meßpunkt zu Meßpunkt so stark schwankend, daß sie in dieser Arbeit nicht dargestellt werden.

Die Bedeutung der Gl. 59 hat Wieghardt in mehreren Veröffentlichungen [46] [47] [48] untersucht.

Ergebnisse früherer Messungen am HSVA-Tanker [22] führten dort, wo der Vektor der mittleren Geschwindigkeit im wesentlichen in  $x_1$ -Richtung orientiert war, zu

$$\left( \text{rot } \vec{L} \right)_1 \approx 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{rot } \vec{L} \perp x_1 \quad (60)$$

Diese Ergebnisse erweiterte Wieghardt zu folgender Annahme für dreidimensionale Strömungsfelder

$$\text{rot } \vec{L} \perp \vec{v} \quad \text{oder} \quad \vec{v} \text{rot } \vec{L} = 0 \quad (61)$$

Wegen der Identität

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{L}) = \vec{L} \vec{\omega} - \vec{v} \text{rot } \vec{L}$$

und

$$\vec{L} \vec{\omega} = (\vec{v} \times \vec{\omega}) \vec{\omega} = 0$$

ist Gl. 61 gleichbedeutend mit

$$\text{div } \vec{A} = \text{div}(\vec{v} \times \vec{L}) = 0 \quad (62)$$

In Gl. 62 wird die Größe  $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L}$  eingeführt.  $\text{div } \vec{A}$  wird aus den zweiten Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten berechnet. Mit der gleichen Methode, mit der  $\text{div } \vec{v}$  normiert wird (vgl. Anhang B), wird auch die normierte Divergenz  $\text{div}(\vec{A})_{norm}$  berechnet.  $\text{div}(\vec{A})_{norm}$  liegt dann im Wertebereich von  $-1$  bis  $1$ .

Bei den "höheren" Termen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, handelt es sich stets um Größen, die direkt aus den Meßdaten bestimmt werden. Auf Berechnungen, in denen experimentelle Daten und theoretische Annahmen - wie z.B. Turbulenzmodelle oder empirische Konstanten - gemischt auftreten, wurde hier bewußt verzichtet. Einige Ansätze zu letzteren Berechnungen sind in Kapitel 5 skizziert.

#### 4.2.2 Ergebnisse aus Meßgebiet 1

Wie in Abschnitt 3.2 erläutert, wurde das Strömungsfeld in den drei Meßgebieten in einem feinen, dreidimensionalen Meßpunktraster aufgemessen. Die räumlichen Verteilungen von Strömungsgrößen können in einer Vielzahl von "Schnittebenen" durch die Meßgebiete dargestellt werden. Hier wurde für die Meßgebiete nur jeweils eine Ebene mit  $x_1 = konst$  ausgewählt. Diese Ebenen zeigen die interessantesten Ergebnisse, da Änderungen aller Strömungsgrößen entlang der  $x_2$ - bzw.  $x_3$ -Richtung wesentlich größer sind als entlang der Richtung  $x_1$ .

Wenn nicht anders vermerkt, dann sind die gezeigten Größen dimensionslos. Sie sind auf die Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  normiert. (In einigen Abbildungen wird die Anströmgeschwindigkeit mit  $U_0$  bezeichnet.)

Die Lage der Meßpunkte ist aus den Pfeildarstellungen direkt zu ersehen. In den Isolinenbildern sind die Meßpunkte jeweils zusätzlich eingezeichnet. Die Beschriftung der Isolinen erfolgt entweder als Dezimalbruch oder wie in der EDV üblich z.B. mit 1E-3 (entspr.  $1.0 \cdot 10^{-3}$ ).

Die Lage des Meßgebietes 1 ist aus der Abb. 4 (S. 21) zu erkennen. Im Meßgebiet 1 sind die Ergebnisse für die Ebene  $x_1 = -2mm$  gezeigt.

Bei der Interpretation der Ergebnisse ist zu beachten, daß die Symmetrieebene, die nach der Theorie Mittschiffs bei  $x_2 = 0mm$  liegt, im Experiment nach  $x_2 = -3mm$  verschoben ist. Dieses Verschiebung der Symmetrie ist seit den ersten Messungen am HSVA-Tanker (Hoffmann 1976 [17], Scheinpflug 1979 [36]) bekannt.

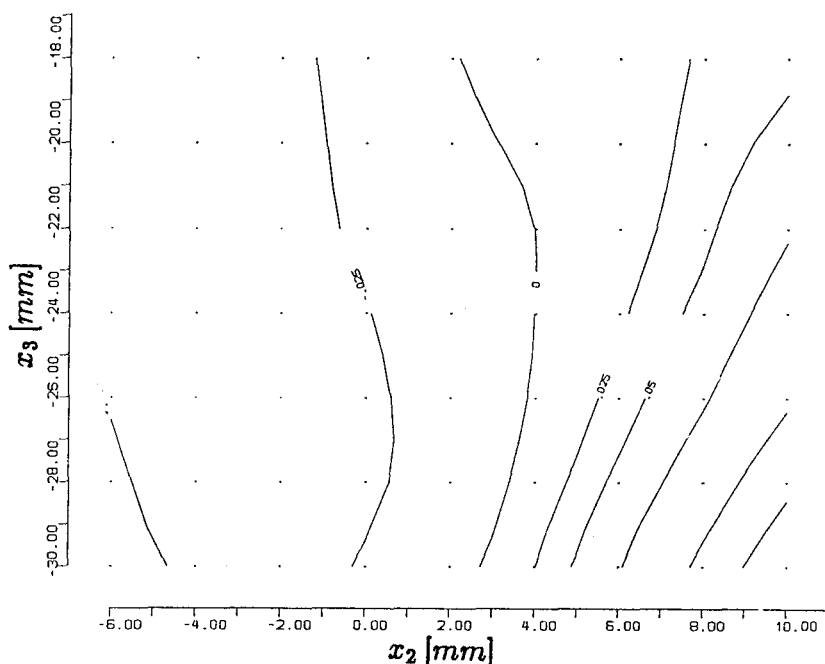


Abbildung 14: Axiale Komponente der Geschwindigkeit, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Abb. 14 zeigt Isolinen der axialen Komponente der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}_1/U_\infty$ . Das Meßgebiet 1 befindet sich im "Totwasser" am Heck des Schiffes. Die axiale Komponente der mittleren Geschwindigkeit liegt in weiten Bereichen zwischen -2% (d.h. Rück-

strömung) und 5% der Anströmgeschwindigkeit. Dort, wo diese Komponente der mittleren Geschwindigkeit ihr Vorzeichen wechselt (um die "Isolinie 0" herum), ist der Gradient dieser Geschwindigkeitskomponente sehr klein und nimmt nur im Bereich  $x_2 \geq 6mm$  - am Rand des Totwassers - zu.

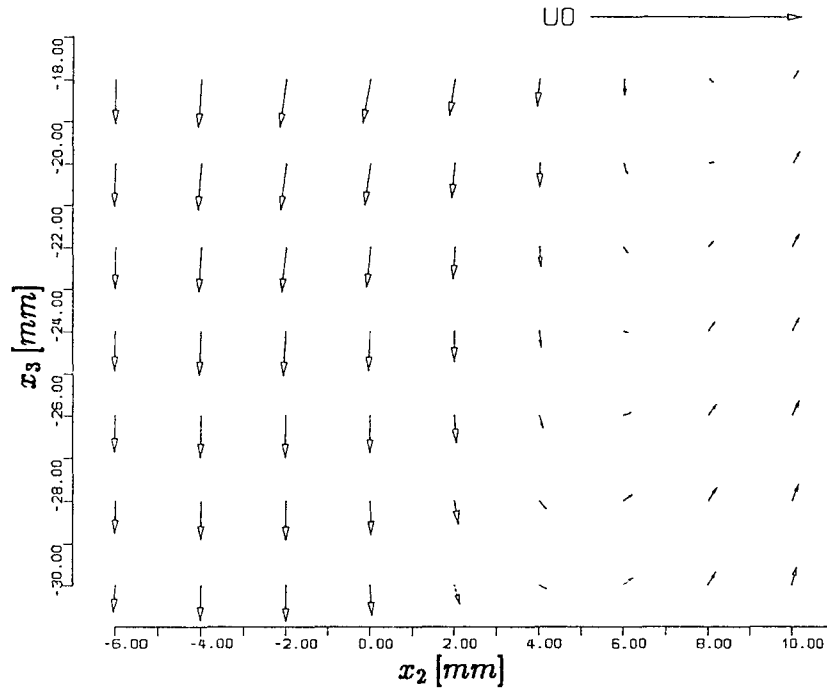


Abbildung 15: Querkomponenten der Geschwindigkeit, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Die Querkomponenten  $\bar{v}_2$  und  $\bar{v}_3$  der mittleren Geschwindigkeit sind in Abb. 15 dargestellt. Diese Querkomponenten zeigen einen Wirbel, der im äußeren Bereich bei  $x_2 \geq 6mm$  die Aufwärtstendenz der Potentialströmung widerspiegelt und im inneren Bereich  $x_2 < 6mm$  eine Abwärtstendenz der mittleren Geschwindigkeit zeigt.

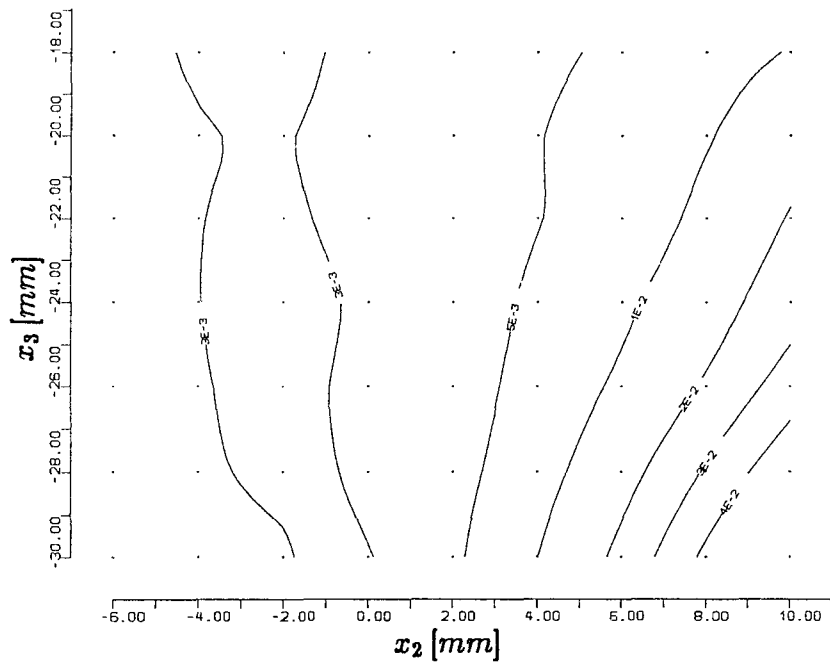


Abbildung 16: Erste Komponente des Reynoldstensors, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

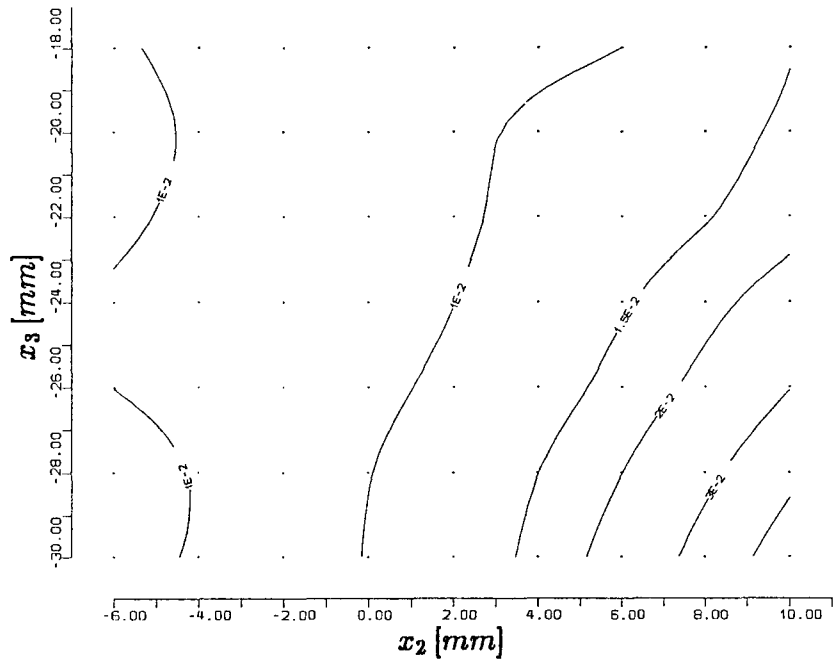


Abbildung 17: Kinetische Energie der Turbulenz, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Die erste Komponente des Reynoldstensors  $\overline{v_1'^2}/U_\infty^2$  in Abb. 16 und die kinetische Energie der Turbulenz  $k/U_\infty^2$  in Abb. 17 bestätigen den Charakter eines Totwassers für Meßgebiet 1. Während die mittlere Geschwindigkeit gegen null geht, erreicht der Turbulenzgrad  $\sqrt{\overline{v_1'^2}/U_\infty^2}$  bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit 20%. (Der lokale Turbulenzgrad  $\sqrt{\overline{v_1'^2}/\overline{v_1^2}}$  geht gegen unendlich.)

Abb. 18 zeigt die normierte Divergenz der mittleren Geschwindigkeit  $div(\vec{v})_{norm}$ , die nach Gl.71 in Anhang B berechnet wurde. Nach der Kontinuitätsgleichung muß diese Divergenz verschwinden. Die Zahlenwerte liegen im wesentlichen im Bereich von -2% bis 4% (100% würden eine Quelle anzeigen), und nur wenige Meßpunkte weisen höhere Zahlenwerte aus.

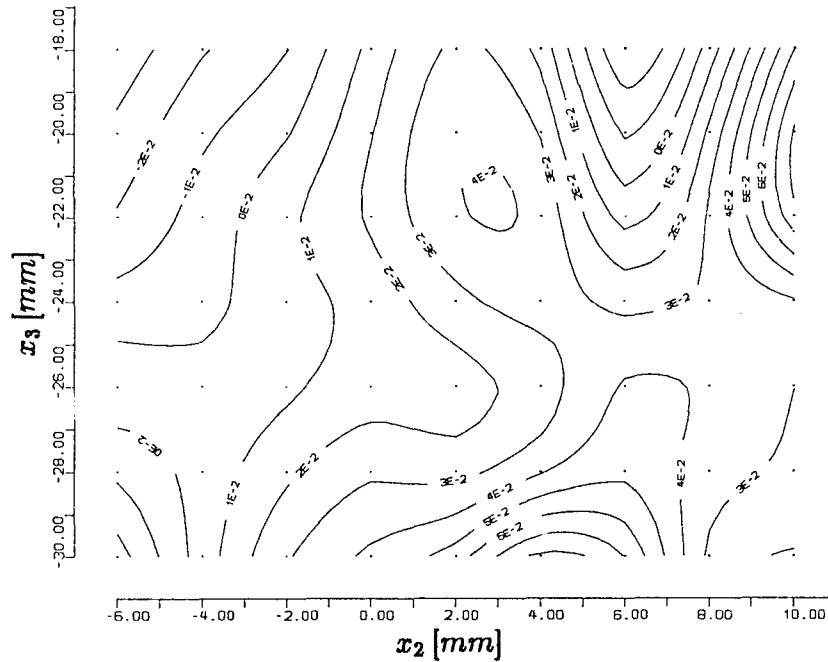


Abbildung 18: Normierte Divergenz der Geschwindigkeit, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Die Verteilung des Rotationsvektors der mittleren Geschwindigkeit  $rot(\vec{v})$  ist in Abb. 19 dargestellt. Wenn Ableitungen der mittleren Geschwindigkeit nicht normiert sind, dann sind die Ergebnisse wie hier die Rotation mit der Einheit  $1/[mm]$  behaftet. Neben Isolinien der axialen Komponente des Rotationsvektors sind Pfeile der Querkomponenten gezeigt. Die Symmetrieebene bei  $x_2 = -3mm$  ist deutlich zu erkennen. Die größten Werte der axialen Komponente des Rotationsvektors bei  $x_2 = 4mm$  spiegeln den Wirbel in den Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit wieder (vgl. Abb. 15). Die großen Querkomponenten des Rotationsvektors zum Rand des Totwasser hin (bei  $x_2 \geq 6mm$ ) zeigen dort die starke Scherung der Strömung an.

Als Beispiel für eine einzelne Komponente des Gradiententensors ist in Abb. 20 die erste Komponente  $\bar{v}_{11}$  gezeigt.

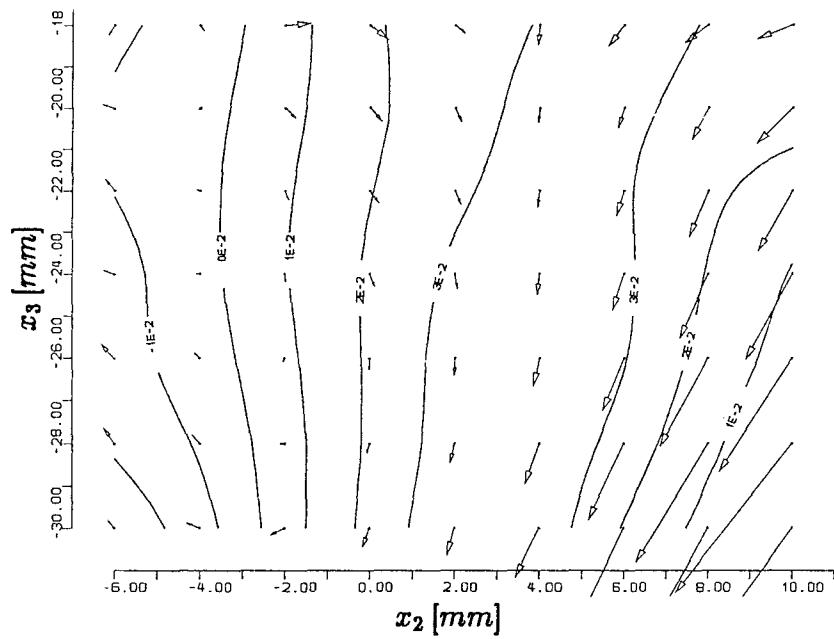


Abbildung 19: Rotation der Geschwindigkeit, Isolinien der axialen Komponente, Pfeile der Querkomponenten, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

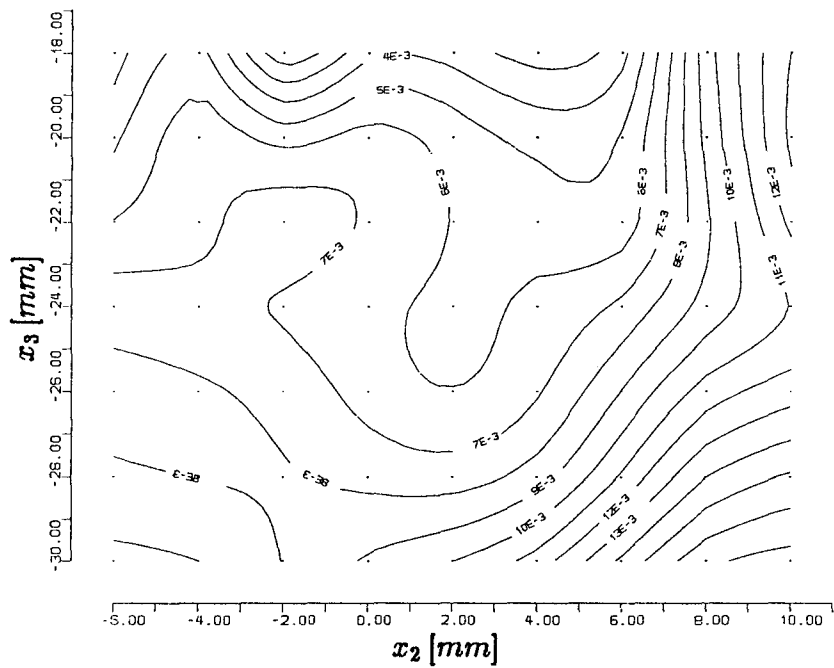


Abbildung 20: Erste Komponente des Gradiententensors, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Die turbulente Scheinzähigkeit  $\nu_t$  aus dem Ansatz der Wirbelviskositätshypothese wurde auf verschiedene Arten untersucht.

Aus den Komponenten des Gradiententensors und des Reynoldstensors wurden die  $\nu_{tij}$  nach Gl. 52 berechnet. Aus den insgesamt sechs verschiedenen  $\nu_{tij}$  sind hier als Beispiele zwei ausgewählt. Die Abbildungen 21 und 22 zeigen die räumlichen Verteilungen der Scheinzähigkeit  $\nu_{t11}$ , die aus Diagonalelementen der beiden Tensoren ( $i = j$ ) berechnet wurde, bzw. die Verteilung von  $\nu_{t12}$ , die sich aus Nichtdiagonalelementen ( $i \neq j$ ) ergibt.

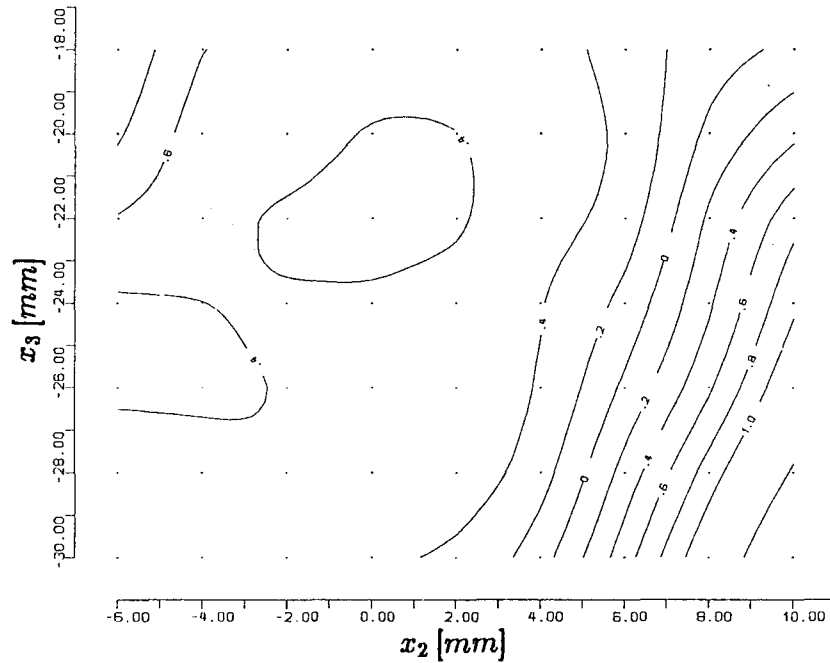


Abbildung 21: Scheinzähigkeit  $\nu_{t11}$ , Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

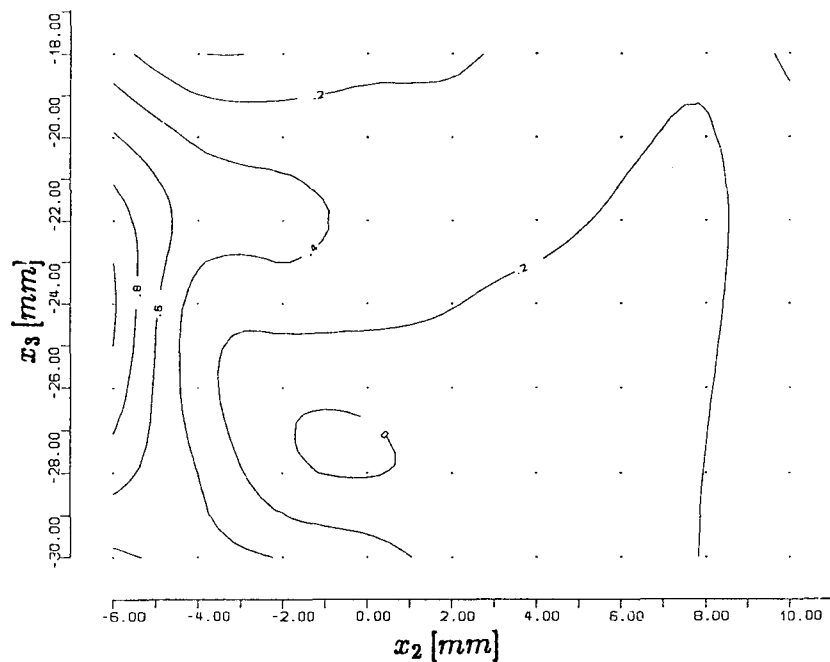


Abbildung 22: Scheinzähigkeit  $\nu_{t12}$ , Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Im Vergleich zu den  $\nu_{tij}$  ist die Verteilung der Scheinzähigkeit  $\nu_{t(Saff)}$  nach Saffman (Gl. 53) in Abb. 23 dargestellt.

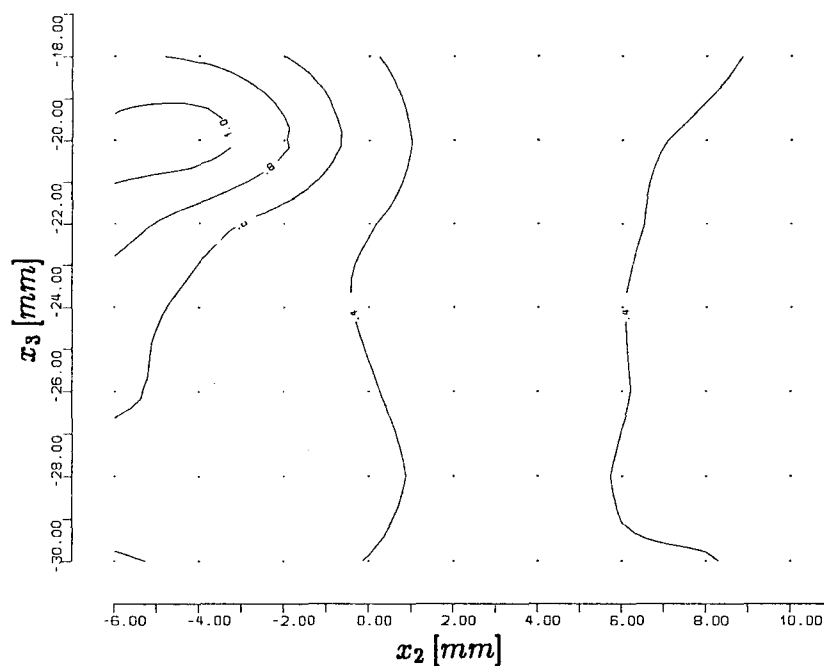


Abbildung 23: Scheinzähigkeit nach Saffmann  $\nu_{t(Saff)}$ , Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Nach dem Ansatz einer skalaren Scheinzähigkeit sollten sich die Ergebnisse in den Abb. 21 bis 23 entsprechen. Als einheitlicher Trend ist aber nur die Größenordnung der Scheinzähigkeit im Bereich des Totwassers ( $x_2 < 6mm$ ) zu bezeichnen. Die Zahlenwerte für  $\nu_t$  liegen zwischen 0.2 und 0.4 . Der starke Gradient von  $\nu_{t11}$  am Rand des Totwassers mit einem Anstieg bis zu Werten von 1.5 wird weder von  $\nu_{t12}$  noch von  $\nu_{t(Saff)}$  wiedergegeben.

Als ein anderes Maß dafür, ob eine skalare Scheinzähigkeit in der Wirbelviskositätshypothese alle sechs Komponentengleichungen befriedigen kann, ist der Vergleich zwischen den Eigenrichtungen des Reynoldstensors und denen des symmetrisierten Gradiententensors anzusehen.

Für beide Tensoren lassen sich drei reelle Eigenrichtungen bestimmen. In den Abbildungen 24 und 25 ist an jedem Meßpunkt jeweils eine Eigenrichtung des Reynoldstensors bzw. des symmetrisierten Gradiententensors gezeigt. In den perspektivischen Darstellungen sind die Eigenrichtungen und jeweils ihre Projektionen auf die untersuchte Ebene eingezeichnet.

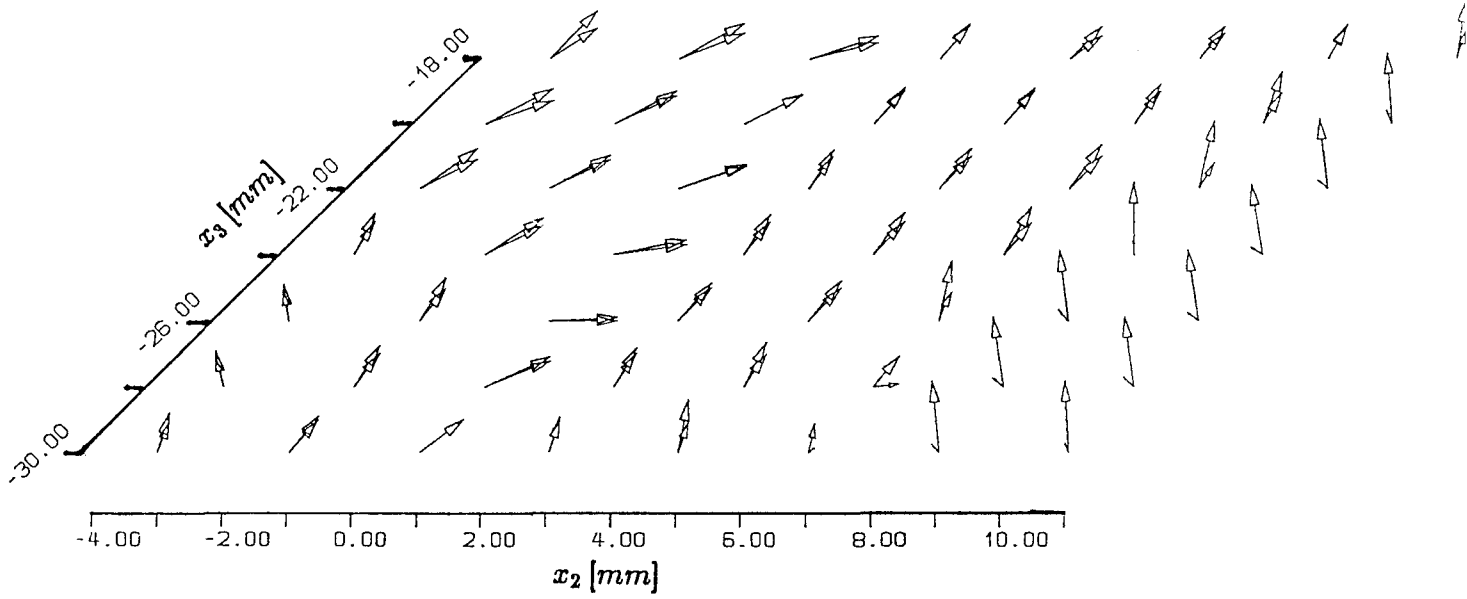


Abbildung 24: Eigenrichtungen des Reynoldstensors, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

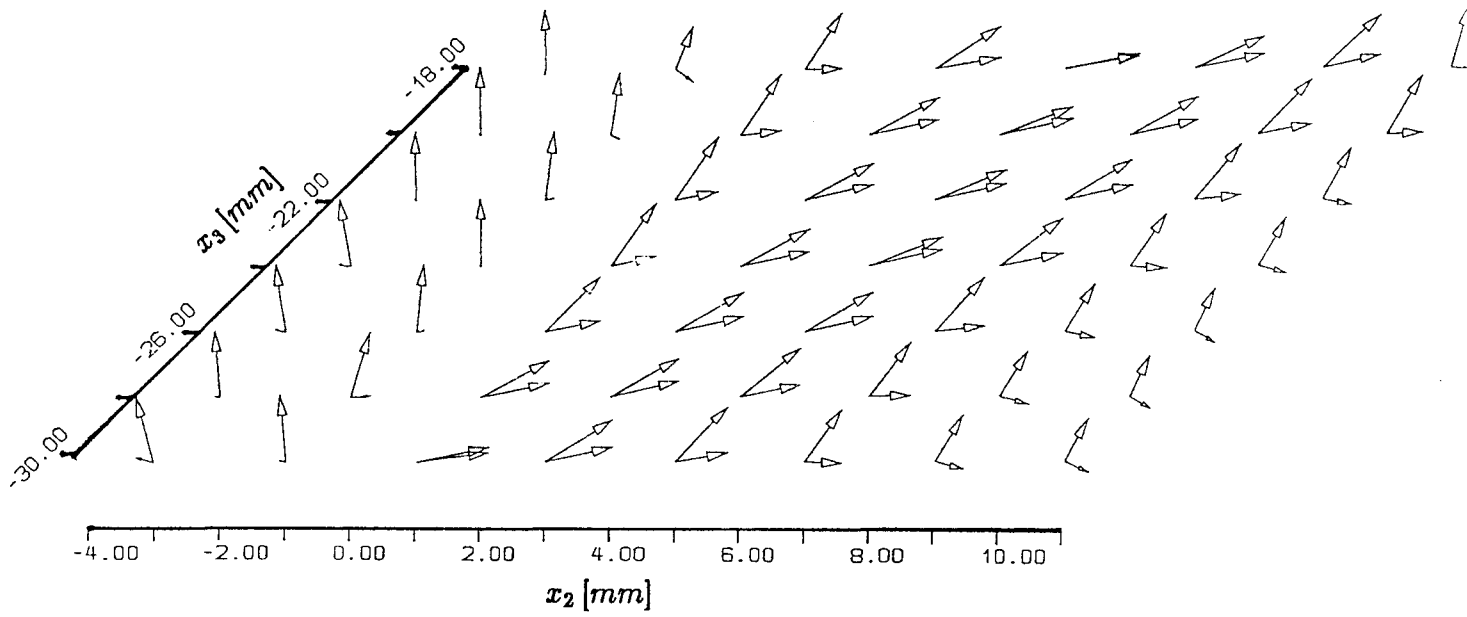


Abbildung 25: Eigenrichtungen des Gradiententensors, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Die Kräfte bzw. die Beschleunigungen, die in den Reynoldsgleichungen auftauchen, sind in der Abb. 26 dargestellt. Die Querkomponenten der Beschleunigung  $\vec{a}$  (dünn gezeichnet) und die Querkomponenten von  $-\vec{T}/\rho$  (fett gezeichnet), die aus den Reynoldskräften resultieren, sind gegenübergestellt. Wie auch die Größe  $\xi$  (vgl. Gl.57) in Abb. 27 zeigt, ist der Unterschied von  $\vec{a}$  zu  $\vec{T}/\rho$  dort am größten, wo sich die Grenze des Totwasser befindet und ein starker Gradient in der mittleren Geschwindigkeit vorliegt (vgl. Abb. 20 im Bereich der Isolinien mit den Werten 0.025 und 0.05).

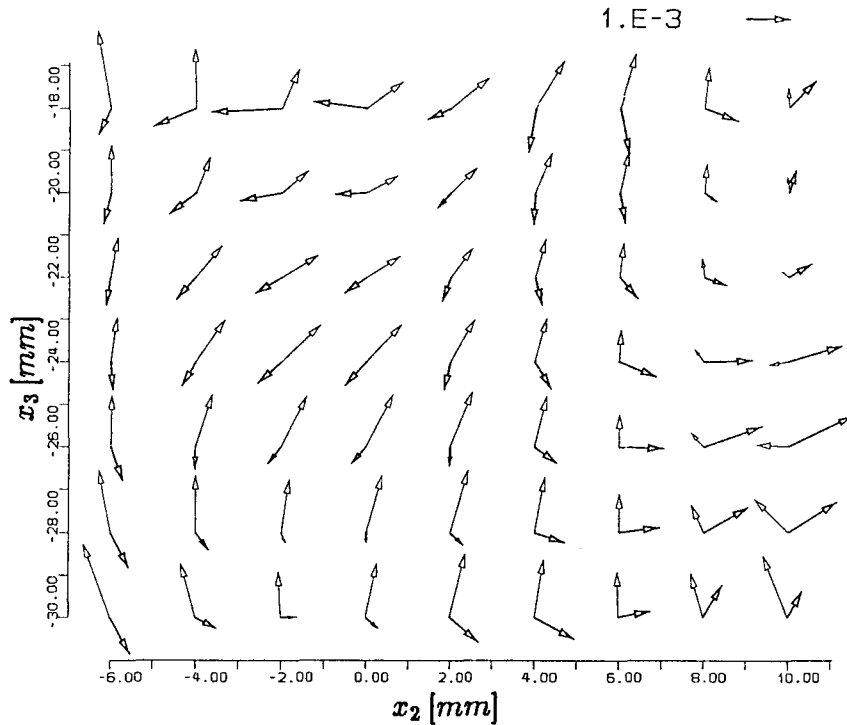


Abbildung 26: Linke Seite der Reynoldsgleichung  $\vec{a}$  (dünn) und rechte Seite  $-\vec{T}/\rho$  (fett), jeweils die Querkomponenten, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

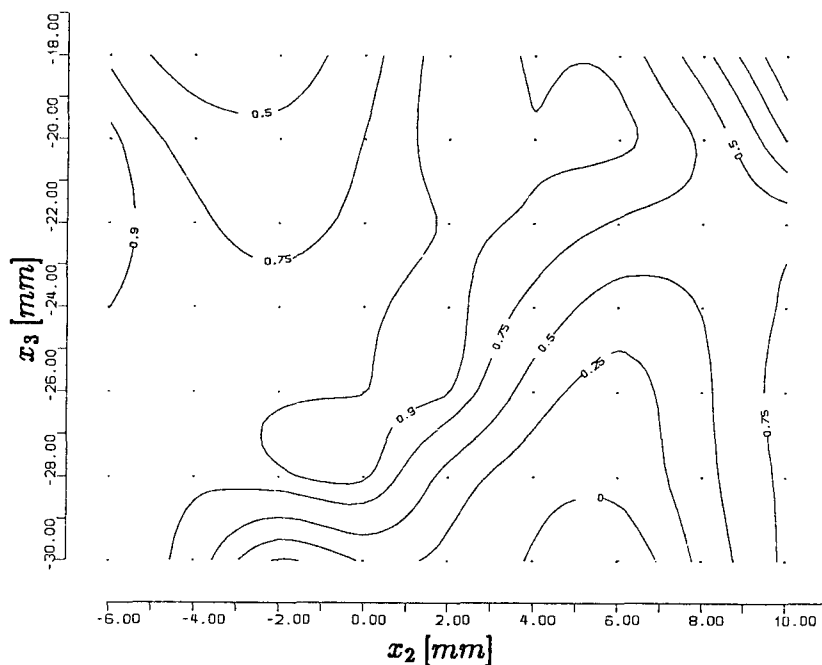


Abbildung 27:  $\xi$  (Gleichgewicht zwischen Beschleunigungen und Reynoldskräften), Meßgebiet 1,  $x_1 = -2mm$

Abb. 28 zeigt die axiale Komponente der Rotation des Lambvektors  $rot(\vec{L})_1$ . Bis auf wenige Randbereiche liegen die Werte von  $rot(\vec{L})_1$  zwischen null und  $2.0 \cdot 10^{-4}$ . In Abb. 29 ist die normierte Divergenz der Größe  $\vec{A}$  (vgl. Gl. 62) dargestellt. Nimmt man die sechs Meßpunkte bei  $x_2 = 4$  und  $6\text{mm}$  sowie  $x_3 = -26, -28$  und  $-30\text{mm}$  aus, dann gilt  $-5\% \leq div(\vec{A})_{norm} \leq 5\%$ .

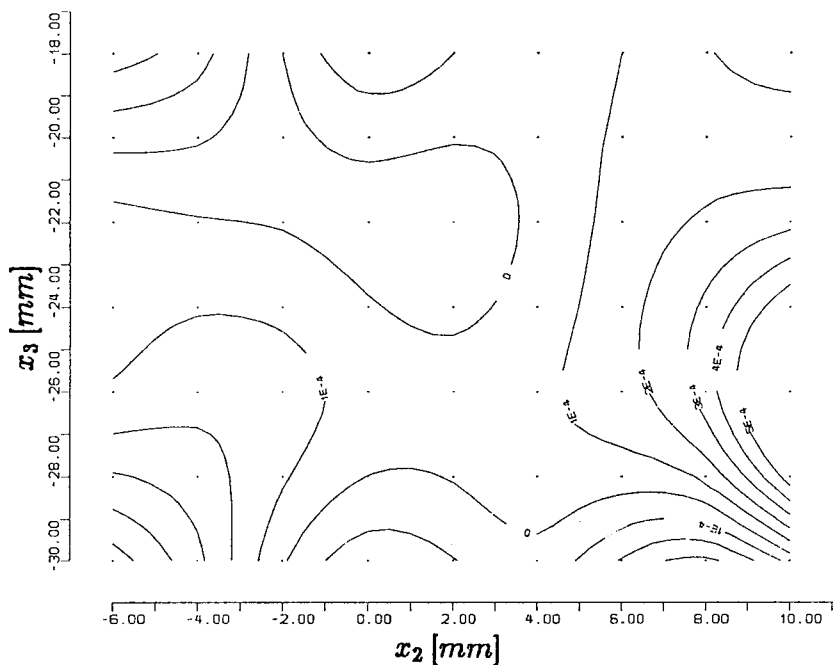


Abbildung 28: Rotation des Lambvektors, axiale Komponente, Meßgebiet 1,  $x_1 = -2\text{mm}$

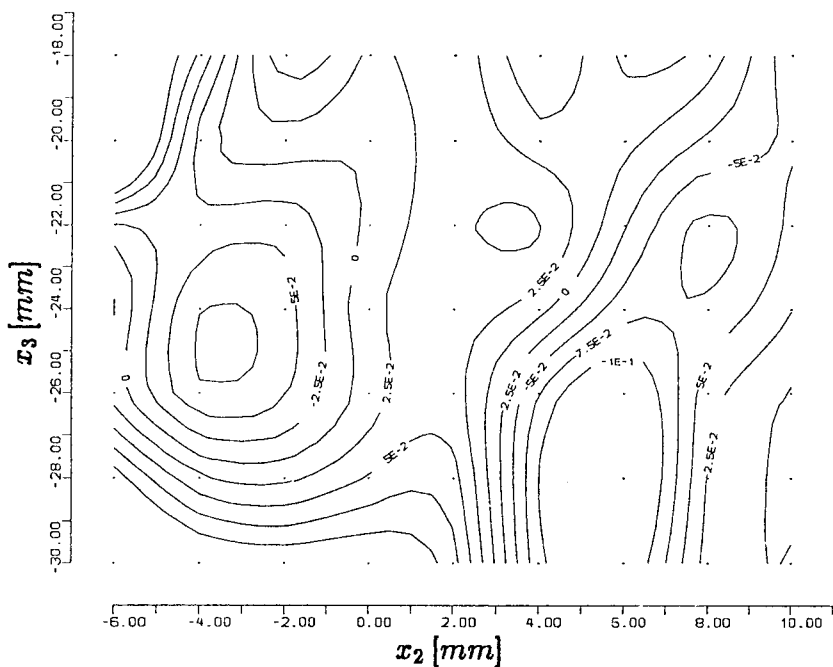


Abbildung 29: Normierte Divergenz von  $\vec{A}$ , Meßgebiet 1,  $x_1 = -2\text{mm}$

### 4.2.3 Ergebnisse aus Meßgebiet 2

Meßgebiet 2 liegt in einem Bereich des Nachstromfeldes, das nach der Sichtbarmachung der Wandschubspannungen in Abb. 4 starke Querkomponenten der Geschwindigkeiten erwarten läßt. Wie aus früheren Messungen bekannt ist, entsteht ein Längswirbel an der Kimm (bei  $x_2 = 200\text{mm}$  und  $x_3 = -42\text{mm}$ ) im Bereich des Mittelschiffs ( $x_1 \leq -858\text{mm}$ ). Im Nachstrom des Schiffes bewegt sich dieser "Kimmwirbel" mit der Hauptrichtung der Außenströmung weiter aufwärts. Im Meßgebiet 2 liegt die Achse dieses Kimmwirbels bei  $x_2 = 18\text{mm}$  und  $x_3 = 4\text{mm}$ .

Zudem befindet sich Meßgebiet 2 dort, wo die Modellwand konkav gekrümmt ist (vgl. Spantenriß des Schiffes Teil 1 S. 3), so daß in diesem Bereich mit einer verstärkten Ablösung der Strömung zu rechnen ist.

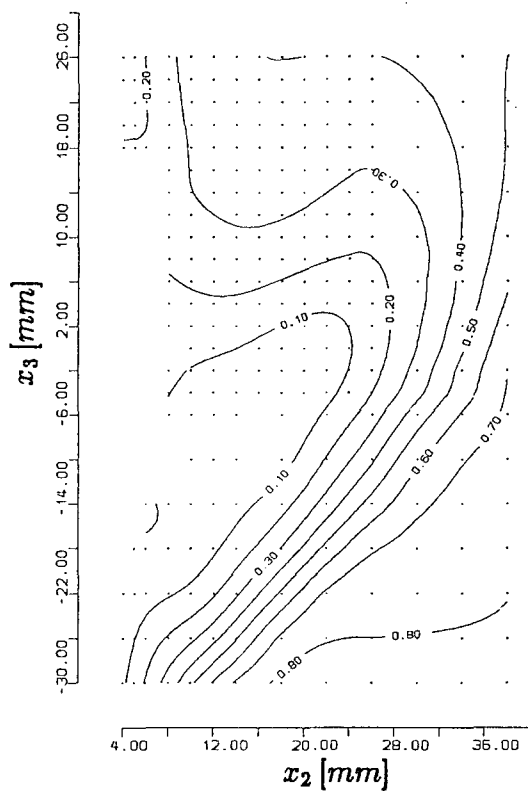


Abbildung 30: Axiale Komponente der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2,  $x_1 = -12\text{mm}$

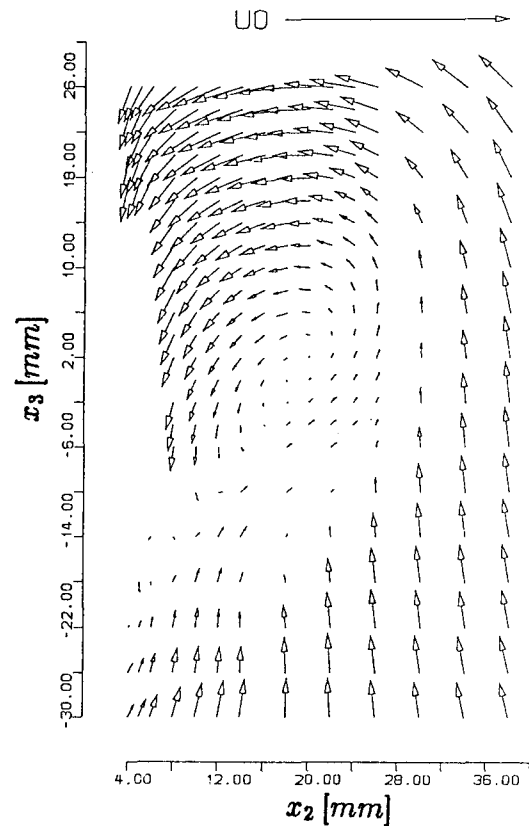


Abbildung 31: Querkomponenten der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2,  $x_1 = -12\text{mm}$

Die axiale Komponente der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}_1/U_\infty$  in Abb. 30 und die Querkomponenten  $\bar{v}_2$  und  $\bar{v}_3$  in Abb. 31 zeigen die Wirbelstruktur, die sich nach der Sichtbarmachung der Wandschubspannungen andeutet. Die mittleren Geschwindigkeiten wurden in der dargestellten Ebene  $x_1 = -12\text{mm}$  im weiteren Umfeld über das Meßgebiet hinaus bestimmt, um den Verlauf der Strömung in einem größeren Zusammenhang besser verstehen zu können. Das Meßgebiet 2 selbst ist in diesen Abbildungen am gleichmäßigen feinen Meßpunktraster zu erkennen ( $8\text{mm} \leq x_2 \leq 26\text{mm}$ ,  $-4\text{mm} \leq x_3$ ). Die Modellwand befindet sich auf der Höhe von  $x_3 = 0\text{mm}$  bei  $x_2 = 6\text{mm}$ . Mit steigenden Koordinatenwerten von  $x_3$  fallen die Werte von  $x_2$ .

Während die axiale Komponente der mittleren Geschwindigkeit im unteren Bereich der

Abbildung 30 stark ansteigt, ist der Gradient dieser Komponente im Meßgebiet 2 recht klein. Aus dem Bild der Querkomponenten ist die Lage der Wirbelachse innerhalb von Meßgebiet 2 deutlich zu lokalisieren.

Die folgenden Ergebnisse für Meßgebiet 2 sind in der Ebene  $x_1 = -14mm$  gezeigt. Die Komponenten der mittleren Geschwindigkeit unterscheiden sich zwischen den Ebenen  $x_1 = -12mm$  und  $x_1 = -14mm$  kaum. Für die Darstellung der Ableitungen von Meßgrößen eignet sich die Ebene  $x_1 = -12mm$  jedoch nicht, da sie am Rand des Meßgebietes 2 liegt (vgl. Anhang B).

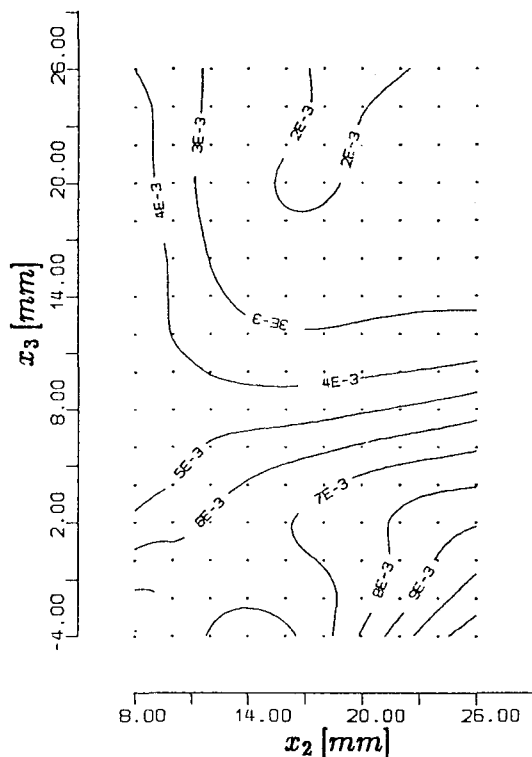


Abbildung 32: Erste Komponente des Reynoldstensors, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

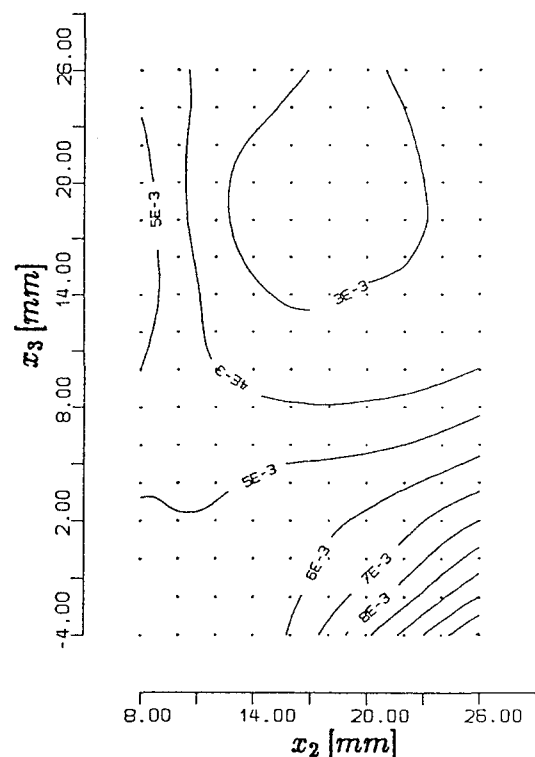


Abbildung 33: Kinetische Energie der Turbulenz, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

Die erste Komponente des Reynoldstensors  $\overline{v_1'^2}/U_\infty^2$  und die kinetische Energie der Turbulenz  $k/U_\infty^2$  sind in den Abbildungen 32 und 33 für die Ebene  $x_1 = -14mm$  gezeigt. Der Turbulenzgrad  $\sqrt{\overline{v_1'^2}/U_\infty^2}$  erreicht maximal 10% und ist damit wesentlich kleiner als in Meßgebiet 1. Wie aus dem Verlauf der Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in Abb. 31 zu schließen ist, läßt sich der geringe Turbulenzgrad damit begründen, daß wenig gestörtes Material aus der Außenströmung in das Meßgebiet 2 hineintransportiert wird.

Nur im unteren rechten Bereich von Abb. 32 und 33 ist ein Ansteigen des Turbulenzgrads festzustellen. Auch dies ist aus der Betrachtung der Quergeschwindigkeiten zu verstehen. Turbulentes Strömungsmaterial wird aus der Grenzschicht in der Nähe der Schiffswand bei  $x_2 \leq 4mm$  heraustransportiert und gelangt dort in das Meßgebiet 2, wo ein höherer Turbulenzgrad gemessen wurde.

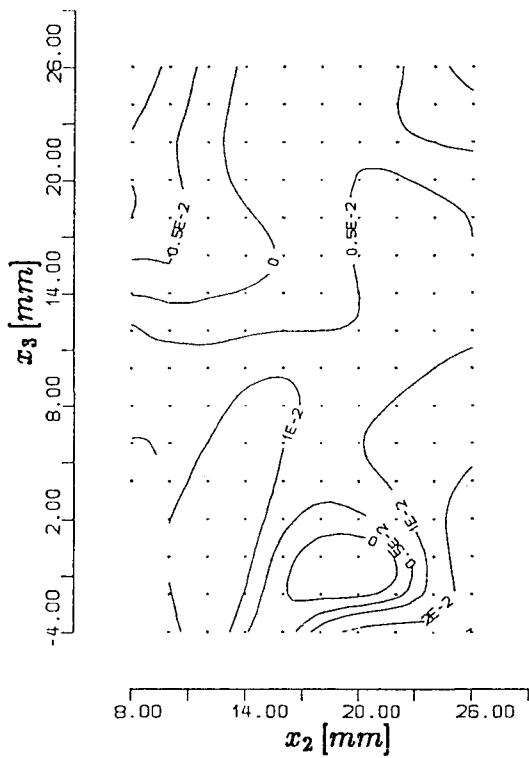


Abbildung 34: Normierte Divergenz der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

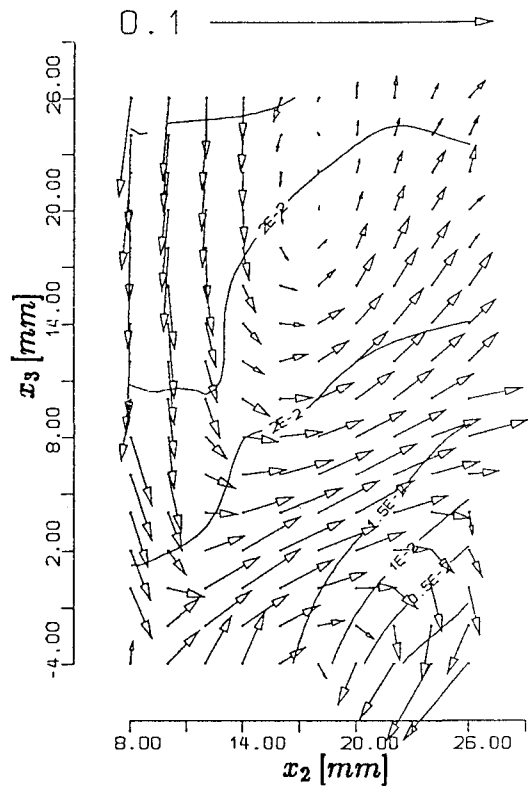


Abbildung 35: Rotation der Geschwindigkeit, Isolinien der axialen Komponente, Pfeile der Querkomponenten, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

Die normierte Divergenz der mittleren Geschwindigkeit  $div(\vec{v})_{norm}$  in Abb. 34 erfüllt hier in Meßgebiet 2 die Kontinuitätsgleichung noch besser als in Meßgebiet 1. Die Beträge von  $div(\vec{v})_{norm}$  sind im gesamten Meßgebiet kleiner als 2%. Im überwiegenden Teil sind sie sogar kleiner als 1%.

Die Verteilung des Rotationsvektors der mittleren Geschwindigkeit  $rot(\vec{v})$  zeigt Abb. 35. Wie für Meßgebiet 1 sind hier Isolinien der axialen Komponente des Rotationsvektors und Pfeile der Querkomponenten dargestellt.

Die Abbildungen 36 und 37 zeigen die Scheinzähigkeiten  $\nu_{t11}$  und  $\nu_{t12}$ , die nach der Wirbelviskositätshypothese berechnet wurden.

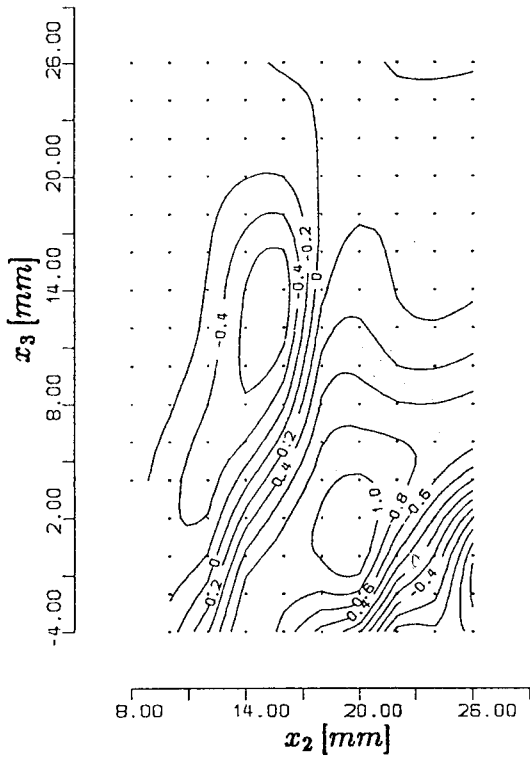


Abbildung 36: Scheinzähigkeit  $\nu_{t11}$ ,  
Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

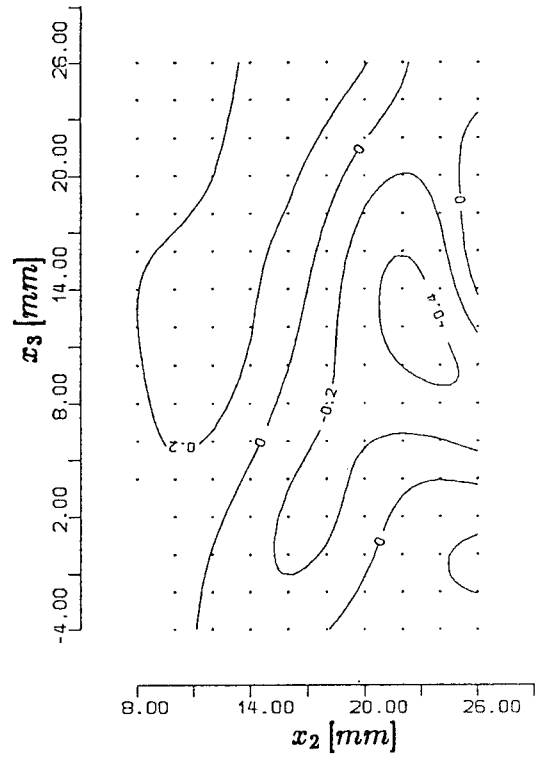


Abbildung 37: Scheinzähigkeit  $\nu_{t12}$ ,  
Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

Die Lage der Isolinie mit dem Wert 0 stimmt in den Abb. 36 und 37 recht gut überein. Die beiden Scheinzähigkeiten haben in den Abbildungen jedoch vertauschte Vorzeichen.  $\nu_{t11}$  ist links von der Linie mit dem Wert 0 negativ und rechts positiv.  $\nu_{t12}$  hingegen ist mit umgekehrtem Vorzeichen behaftet. Auch die Beträge dieser beiden Scheinzähigkeiten entsprechen sich nicht.  $\nu_{t11}$  ist i.a. vom Betrag her doppelt so groß wie  $\nu_{t12}$ .

Die Verteilung der Scheinzähigkeit  $\nu_{t(Saff)}$  nach Saffman ist in Abb. 38 dargestellt. Eine Übereinstimmung von  $\nu_{t(Saff)}$  mit  $\nu_{t11}$  oder mit  $\nu_{t12}$  ist für dieses Meßgebiet nicht festzustellen.

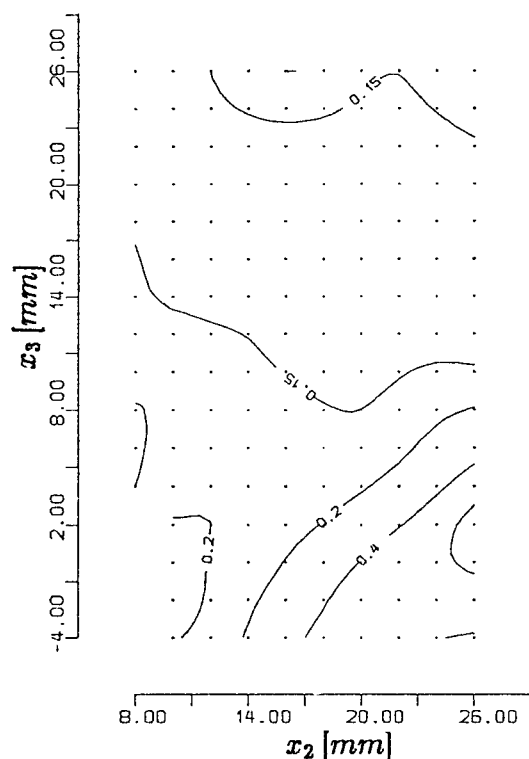


Abbildung 38: Scheinzähigkeit nach Saffmann  $\nu_{t(Saff)}$ , Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

Daß die Scheinzähigkeit in diesem Meßgebiet nicht als skalar angesetzt werden kann, wird auch durch den Vergleich der Eigenrichtungen des Reynoldstensors in Abb. 39 und denen des symmetrisierten Gradiententensors in Abb. 40 deutlich. Eine gemeinsame Tendenz der Eigenrichtungen beider Tensoren ist nicht zu erkennen. Auf die Betrachtung dieser Eigenrichtungen wird im Abschnitt 4.2.5 noch näher eingegangen.

Die Berechnung der Eigenrichtungen des Reynoldstensors lieferte an einigen Meßpunkten keine reellen Eigenwerte. Prüfungen der Berechnungsverfahren zeigten ein Problem auf, das in der Frequenzfehlerkorrektur begründet lag. Die Frequenzfehlerkorrektur wurde für die einzelnen Komponenten des Reynoldstensors unabhängig voneinander durchgeführt. Nach der Frequenzfehlerkorrektur waren die Nichtdiagonalelemente des Reynoldstensors an einigen Meßpunkten größer als die Diagonalelemente. In solchen Fällen ergibt die Hauptachsentransformation des Reynoldstensors keine reellen Eigenwerte <sup>32</sup>.

<sup>32</sup>Eine anschauliche Erklärung dieses Phänomens aus der Sicht der Statistik: Man betrachte die momentanen Geschwindigkeitsschwankungen als Zufallsgrößen. Wenn man Nichtdiagonalelemente des Reynoldstensors (die Erwartungswerte der Korrelationen der Zufallsgrößen) erhält, die größer sind als die Diagonalelemente (die Erwartungswerte der quadratischen Schwankungen), dann bedeutet dies, daß die Korrelationskoeffizienten zwischen den Zufallsgrößen vom Betrag größer sind als 1. Derartige Korrelationskoeffizienten sind aber für reelle Zufallsgrößen nicht definiert.

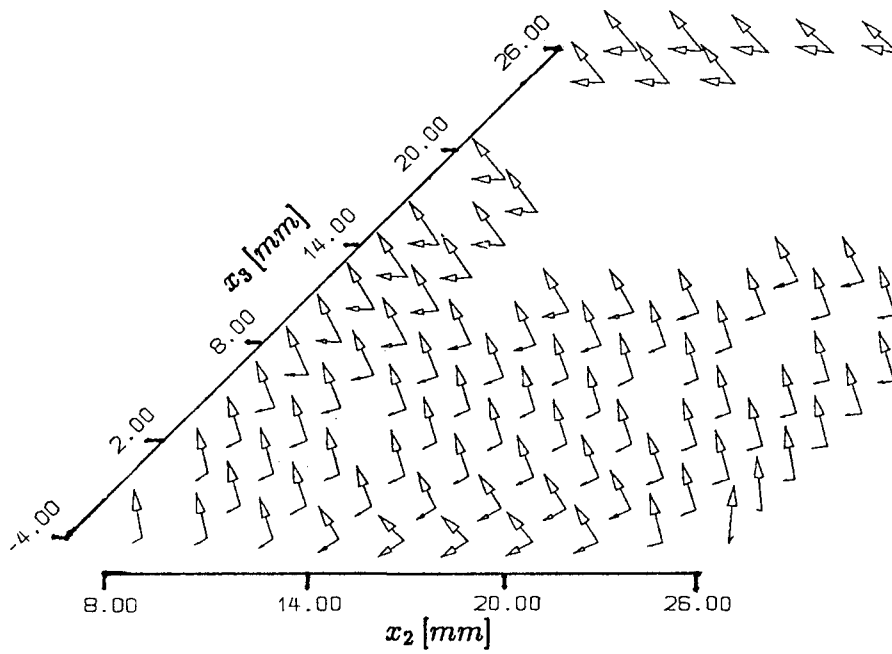


Abbildung 39: Eigenrichtungen des Reynoldstensors, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

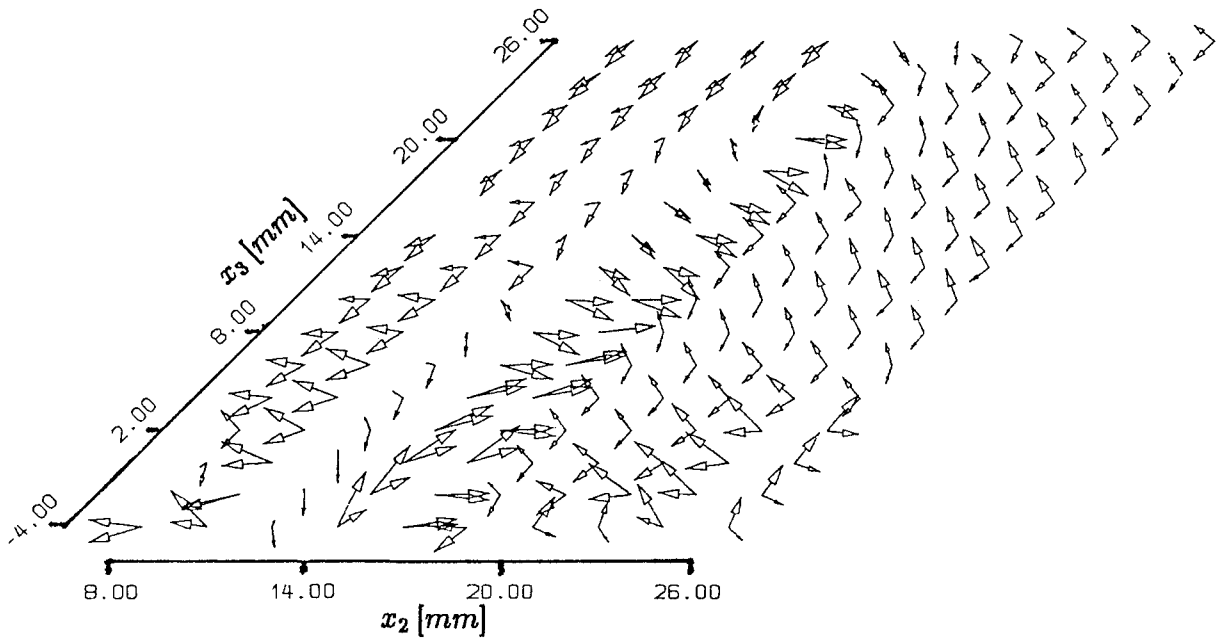


Abbildung 40: Eigenrichtungen des Gradiententensors, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

Im Gleichgewicht der Beschleunigungen bzw. der Kräfte in den Reynoldsgleichungen (z.B. in der Form von Gl. 55 S. 50) haben die Druckkräfte im Meßgebiet 2 einen erheblichen Anteil und können nicht wie im Meßgebiet 1 vernachlässigt werden. Daher sind die effektive Beschleunigung  $\vec{a}$  und die Beschleunigungen  $-\vec{T}/\rho$ , die durch die Reynoldskräfte entstehen, hier nicht direkt gegenübergestellt, sondern in den Abbildungen 41 und 42 getrennt gezeigt.

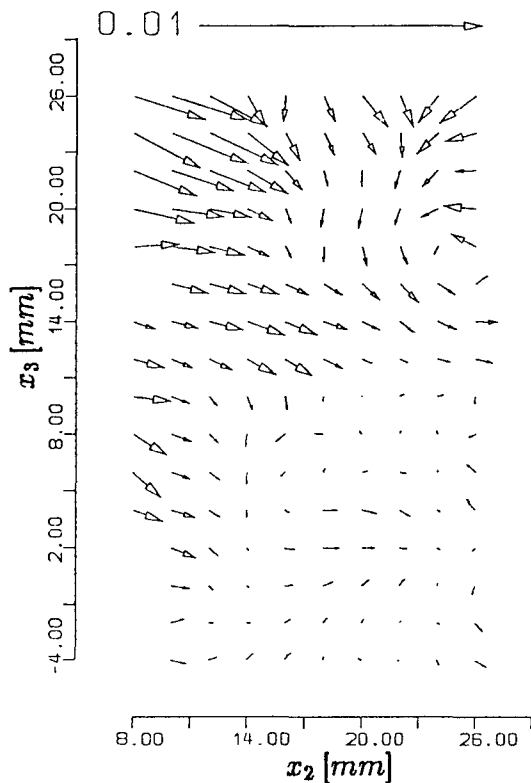


Abbildung 41: Querkomponenten der Beschleunigung  $\vec{a}$ , Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

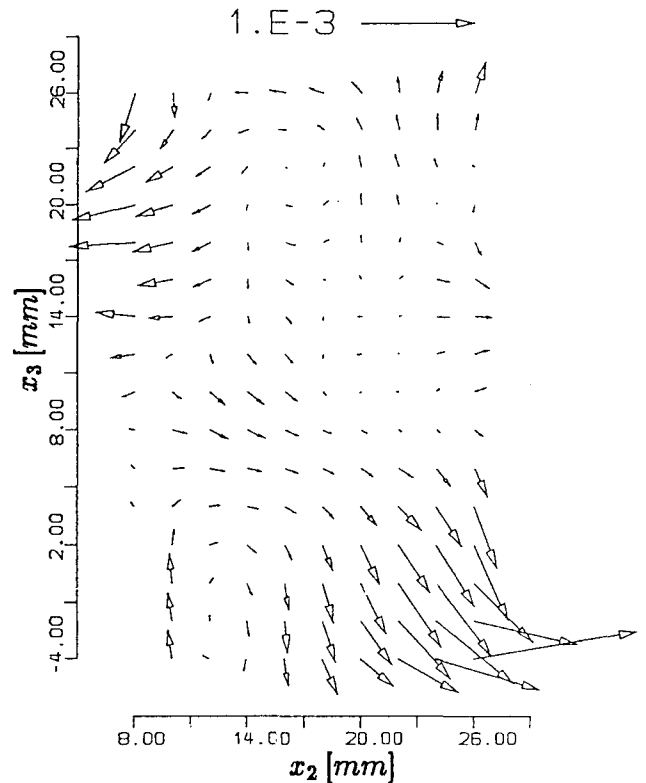


Abbildung 42: Querkomponenten von  $-\vec{T}/\rho$ , Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

Die Querkomponenten der effektiven Beschleunigung  $\vec{a}$  sind in Meßgebiet 2 wesentlich größer als in Meßgebiet 1. Diese Beschleunigungen bewirken große Änderungen der Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit, so daß sich der Längswirbel (vgl. Abb. 31) ausbildet.

Beim Vergleich der Größen von  $\vec{a}$  und  $-\vec{T}/\rho$  in Abb. 41 und 42 ist zu beachten, daß die Länge des Einheitspfeils in den beiden Abbildungen nicht identisch ist. Um räumliche Verteilungen besser erkennen zu können, ist  $-\vec{T}/\rho$  um den Faktor vier größer dargestellt als  $\vec{a}$ .

Abb. 43 zeigt die axiale Komponente der Rotation des Lambvektors  $rot(\vec{L})_1$ . In diesem Meßgebiet mit seiner ausgeprägten Wirbelstruktur liegt  $rot(\vec{L})_1$  in den meisten Meßpunkten zwischen null und  $1.0 \cdot 10^{-4}$ .

$div(\vec{A})_{norm}$  ist in Abb. 44 dargestellt. Die Annahme  $div(\vec{A})_{norm} = 0$  wird durch die Meßergebnisse bestätigt. Wenige Werte liegen über 5%. Im überwiegenden Teil gilt  $-2.5\% \leq div(\vec{A})_{norm} \leq 2.5\%$ .

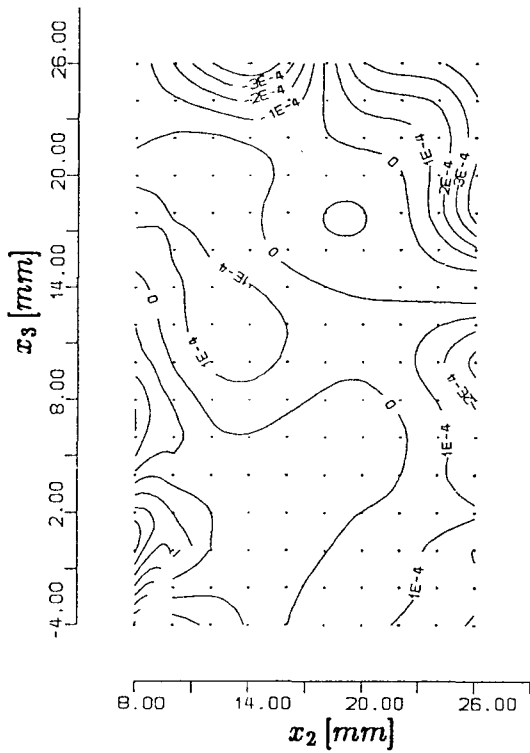


Abbildung 43: Rotation des Lambvektors, axiale Komponente, Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

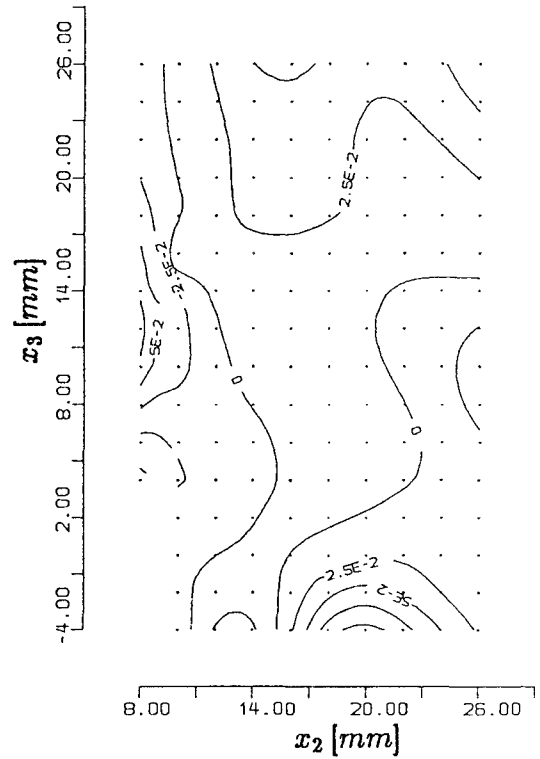


Abbildung 44: Normierte Divergenz von  $\vec{A}$ , Meßgebiet 2,  $x_1 = -14mm$

#### 4.2.4 Ergebnisse aus Meßgebiet 3

In Abb. 4 (S. 21) deuten die Wandschubspannungen im oberen Bereich des Meßgebietes 3 Rückströmung an. Im unteren Bereich des Meßgebietes ist das Richtungsfeld der Wandschubspannungen starken Änderungen unterworfen, die auf linien- oder punktförmige Ablösung der Strömung hindeuten.

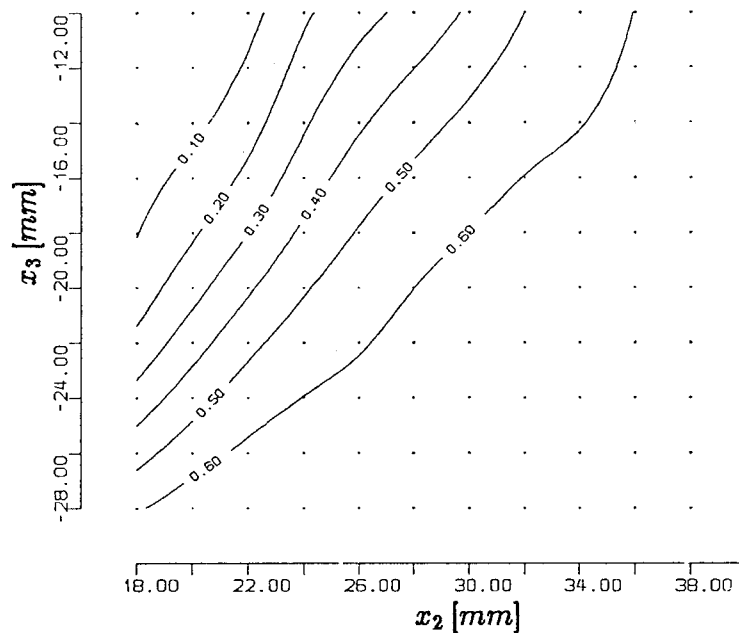


Abbildung 45: Axiale Komponente der Geschwindigkeit, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Die axiale Komponente der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}_1/U_\infty$  ist in Abb. 45 für die Ebene  $x_1 = -34mm$  dargestellt. Aus der Verteilung von  $\bar{v}_1/U_\infty$  läßt sich die Rückströmung, wie sie nach den Ergebnissen der Wandschubspannung zu erwarten ist, nicht erkennen.

An den Meßpunkten, die sich am nächsten an der Modellwand bei  $x_2 = 14mm$  befinden, fällt die axiale Komponente der Geschwindigkeit auf 10% der Anströmung ab. Für die Koordinaten zwischen  $x_2 = 14mm$  und  $x_2 = 18mm$  liegen keine Ergebnisse vor.

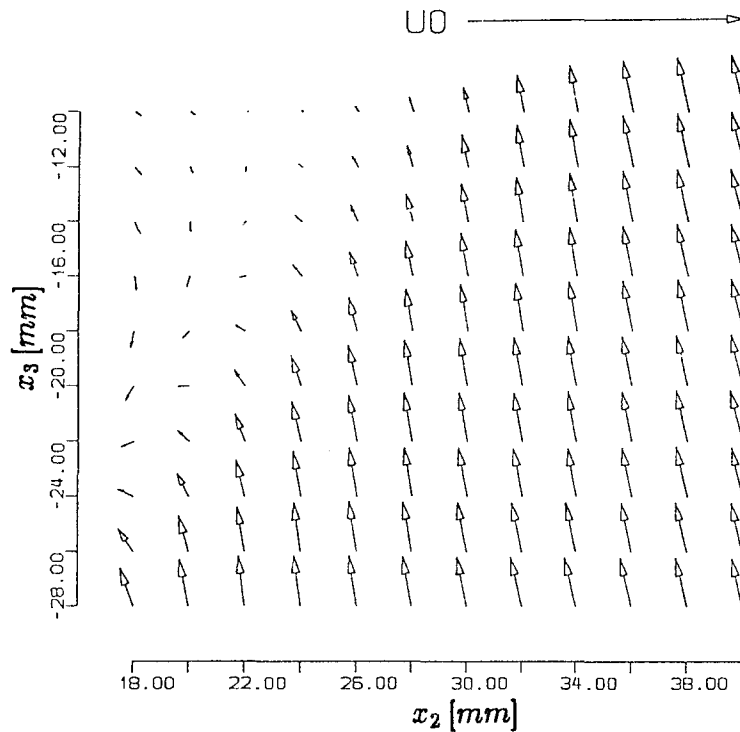


Abbildung 46: Querkomponenten der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2,  $x_1 = -34$ mm

Die Darstellung der Querkomponenten der Geschwindigkeit  $\bar{v}_2$  und  $\bar{v}_3$  in Abb. 46 macht deutlich, daß die Strömung in Meßgebiet 3 in verschiedene Bereiche eingeteilt werden kann:

einen "Wandbereich" mit den Koordinaten  $x_2 \leq 26$ mm in der Nähe der Modellwand (dort sind die Querkomponenten der Geschwindigkeit abwärts gerichtet),  
einen zweiten Bereich - den "Außenbereich" -, der mit einer recht gleichmäßigen Struktur den Verlauf der Potentialströmung widerspiegelt. Dort zeigt die Hauptströmungsrichtung aufwärts.

Starke Querkomponenten der Geschwindigkeit sind nur im "Wandbereich" zu finden. Die Rückströmung der Wandschubspannungen kann nicht bestätigt werden, da der Abstand der Meßpunkte von der Modellwand zu groß ist.

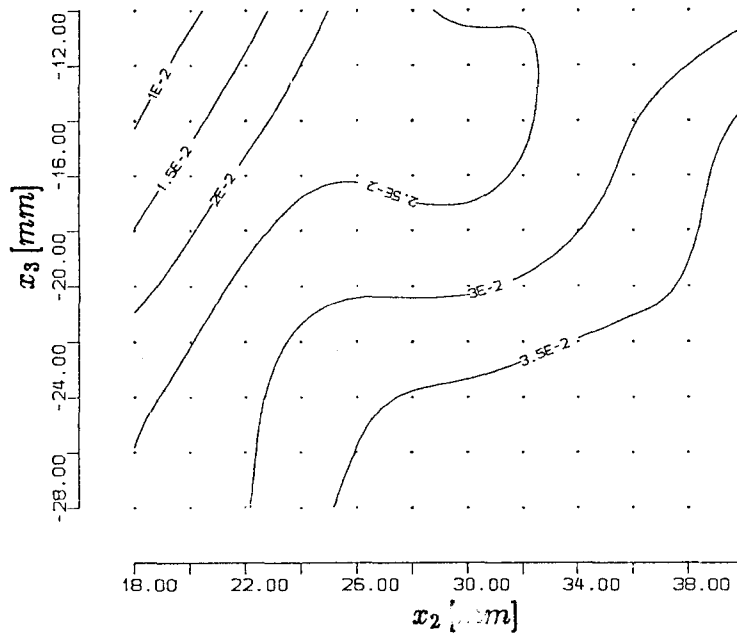


Abbildung 47: Erste Komponente des Reynoldstensors, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Die Abbildungen 47 und Abb. 48 zeigen die erste Komponente des Reynoldstensors  $\overline{v_1^2}/U_\infty^2$  bzw. die kinetische Energie der Turbulenz  $k/U_\infty^2$ . Der Turbulenzgrad ist mit maximal 17% größer als in Meßgebiet 2.

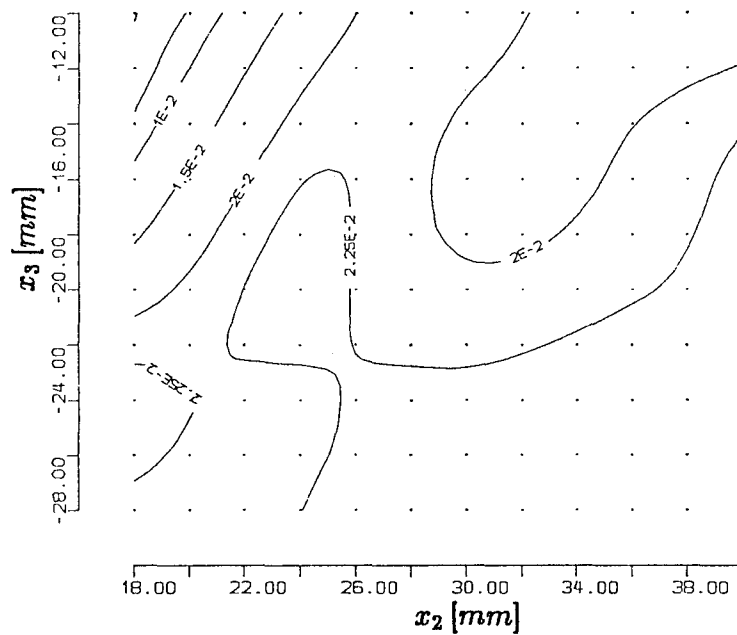


Abbildung 48: Kinetische Energie der Turbulenz, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

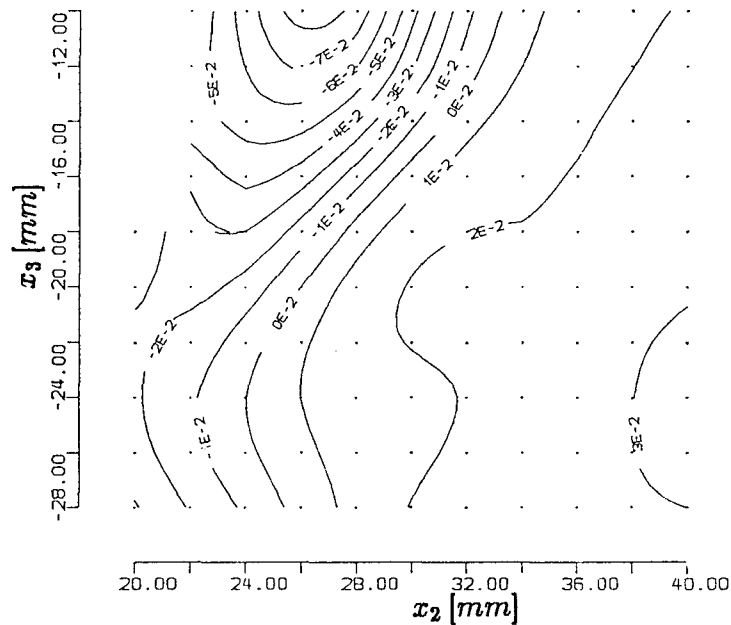


Abbildung 49: Normierte Divergenz der Geschwindigkeit, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Die normierte Divergenz der mittleren Geschwindigkeit  $div(\vec{v})_{norm}$  in Abb. 49 beträgt  $-7\%$  bis  $3\%$ . Die größten Abweichungen von null zeigen sich dort, wo die Grenze zwischen Wand- und Außenbereich der Strömung liegt.

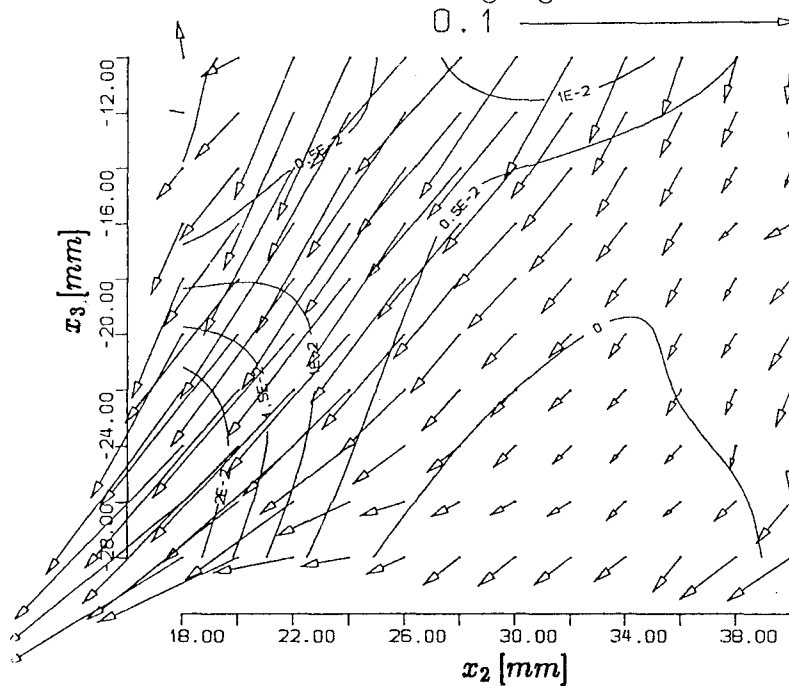


Abbildung 50: Rotation der Geschwindigkeit, Isolinien der axialen Komponente, Pfeile der Querkomponenten, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Die Verteilung des Rotationsvektors der mittleren Geschwindigkeit  $rot(\vec{v})$  ist in Abb. 50 dargestellt. Im Außenbereich verschwindet die axiale Komponente der Rotation. Die

Querkomponente aber zeigt eine starke Scherschicht an. Dort, wo der Wand- in den Außenbereich übergeht, nimmt die Querkomponente maximale Werte an.

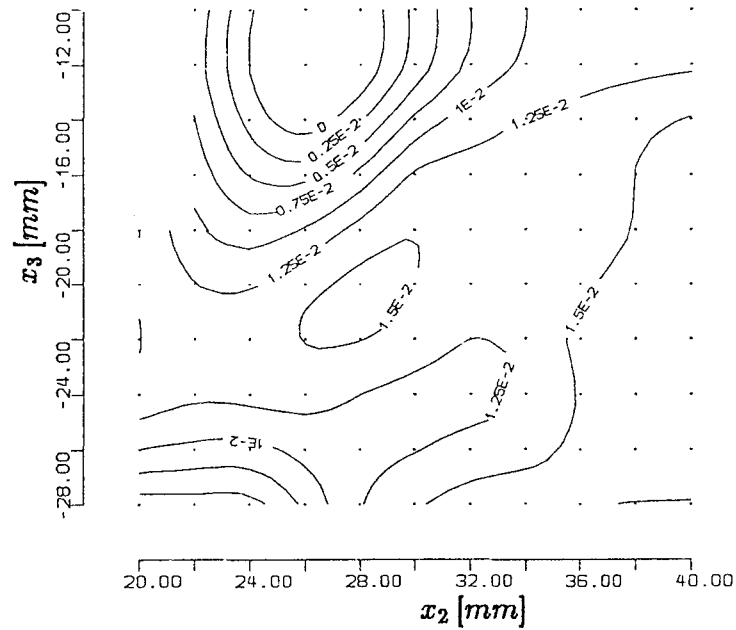


Abbildung 51: Erste Komponente des Gradiententensors, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Abb. 51 zeigt die erste Komponente des Gradiententensors. Im Außenbereich dieses Meßgebietes ist  $\bar{v}_{1|1}$  größer als in den anderen Meßgebieten. Im Wandbereich fällt  $\bar{v}_{1|1}$  bis auf null ab.

Die Verteilungen der Scheinzähigkeiten  $\nu_{t11}$  und  $\nu_{t12}$  in der Ebene  $x_2 = -34mm$  sind in den Abbildungen 52 und 53 dargestellt. Weder die Struktur der räumlichen Verteilungen noch die Größen von  $\nu_{t11}$  und  $\nu_{t12}$  sind in Einklang zu bringen. Während  $\nu_{t12}$  an einer Linie, die sich an der Trennung von Wand- und Außenbereich anlehnt, das Vorzeichen wechselt, ist  $\nu_{t11}$  stets negativ und vom Betrag wesentlich größer als  $\nu_{t12}$ .

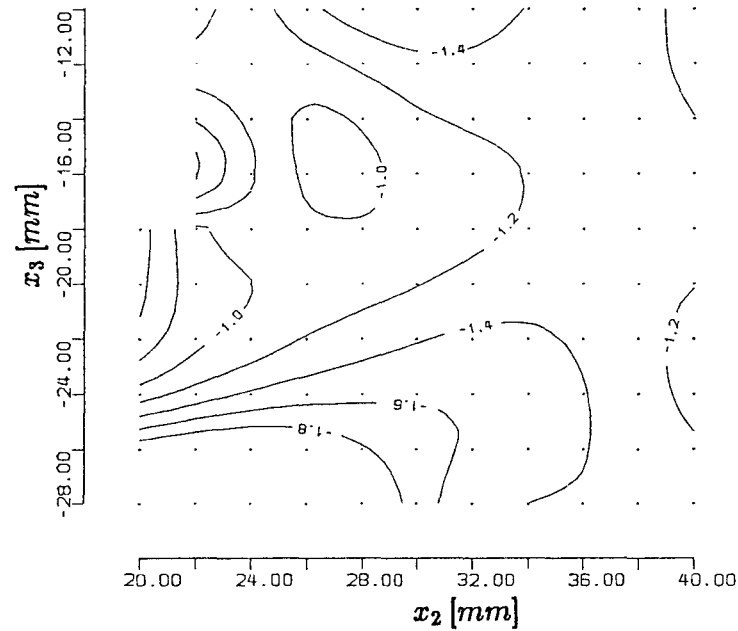


Abbildung 52: Scheinzähigkeit  $\nu_{t11}$ , Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

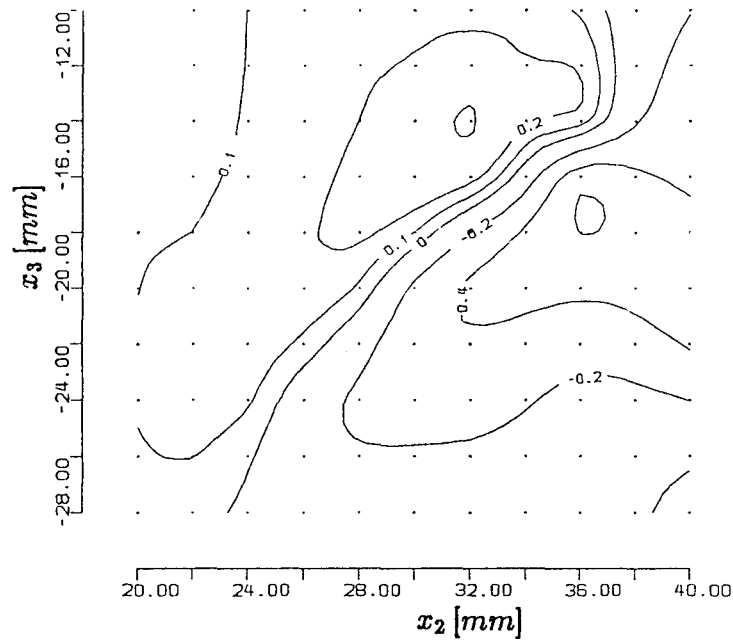


Abbildung 53: Scheinzähigkeit  $\nu_{t12}$ , Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Ebenso wie in Meßgebiet 2 stimmt hier in Meßgebiet 3 die Scheinzähigkeit nach Saffmann  $\nu_{i(Saff)}$  (Abb. 54) nicht mit den Scheinzähigkeiten  $\nu_{t11}$  und  $\nu_{t12}$  überein.

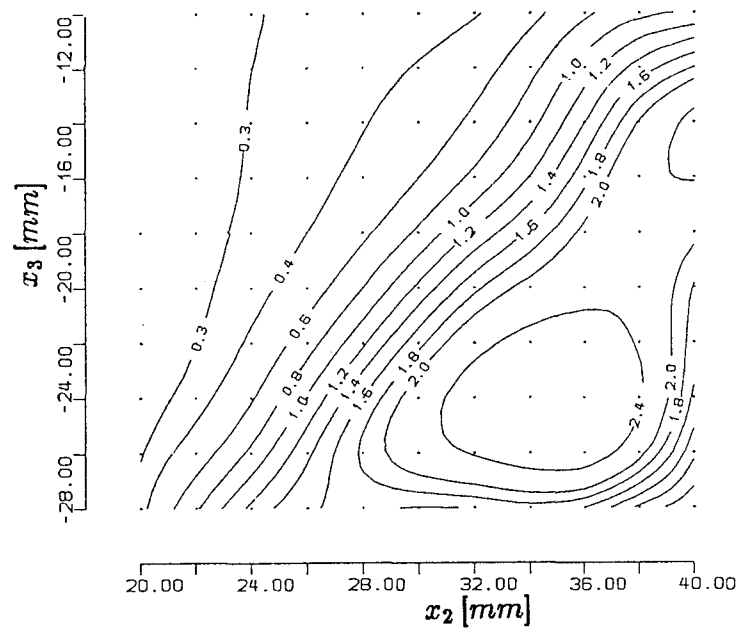


Abbildung 54: Scheinzähigkeit nach Saffmann  $\nu_{i(Saff)}$ , Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Obwohl die Verteilungen der verschiedenen Scheinzähigkeiten derart unterschiedlich sind, zeigen Eigenrichtungen des Reynoldstensors in Abb. 55 und Eigenrichtungen des symmetrisierten Gradiententensors in Abb. 56 eine vergleichbare Struktur. In beiden Darstellungen der Eigenrichtungen ist die Aufteilung des Meßgebietes in Wand- und Außenbereich wiederzufinden, auch wenn sich die Trennung der Bereiche in den Darstellungen verschiebt. Im Wandbereich sind diese Eigenrichtungen im wesentlichen normal zur Modellwand ausgerichtet. Im Außenbereich zeigen die Eigenrichtungen mehr in positive  $x_3$ -Richtung.

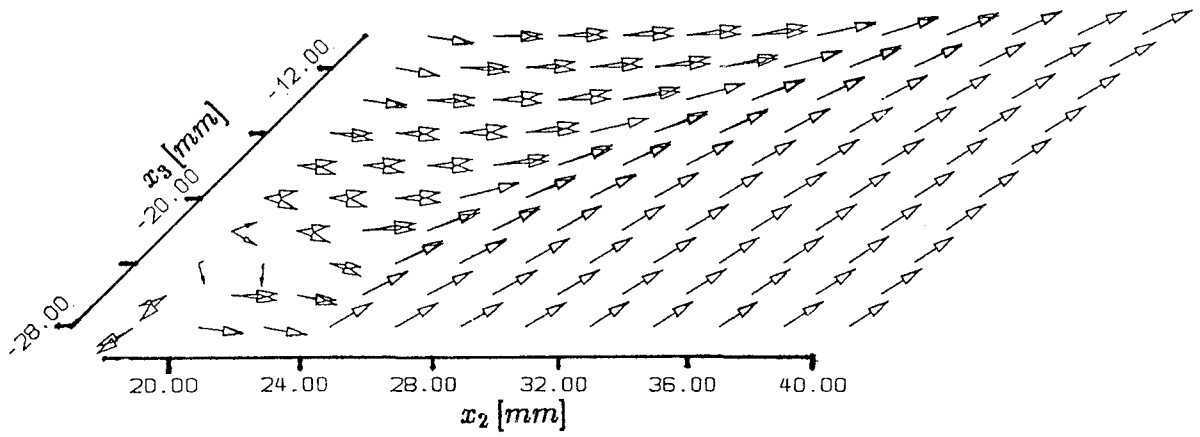


Abbildung 55: Eigenrichtungen des Reynoldstensors, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

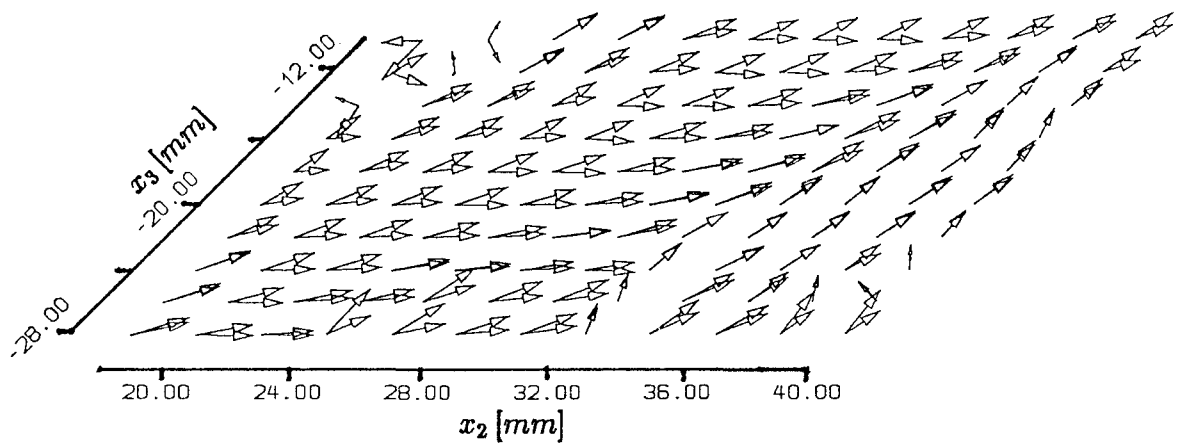


Abbildung 56: Eigenrichtungen des Gradiententensors, Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Abb. 57 zeigt Querkomponenten der effektiven Beschleunigungen  $\vec{a}$  aus der Reynolds-gleichung. Sie sind im Außenbereich in Richtung zur Modellwand orientiert, wie man es auch nach der Potentialtheorie erwartet. Im Wandbereich nehmen die Beschleunigungen stark ab.

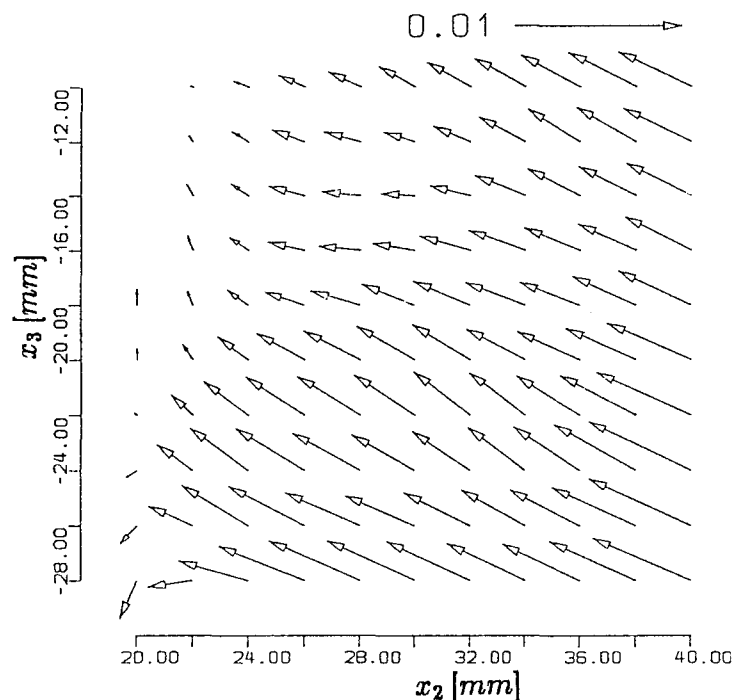


Abbildung 57: Querkomponenten der Beschleunigung  $\vec{a}$ , Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Querkomponenten der Beschleunigungen  $-\vec{T}/\rho$ , die aus den Reynoldskräften resultieren, sind in der Abb. 58 dargestellt.

Auch in diesem Meßgebiet muß beim Größenvergleich der Beschleunigungen aus Abb. 57 und 58 berücksichtigt werden, daß die Einheitslänge der Pfeile in den Darstellungen unterschiedlich ist.

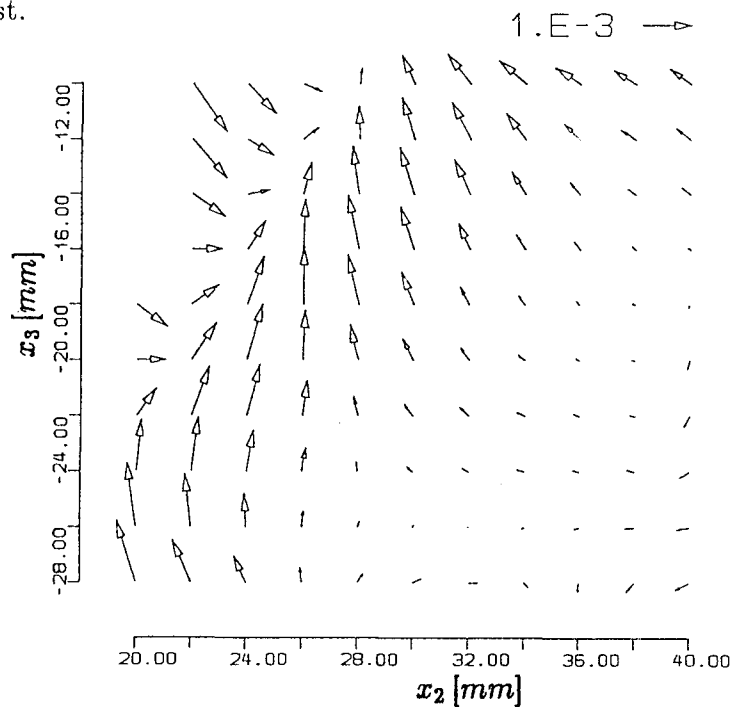


Abbildung 58: Querkomponenten von  $-\vec{T}/\rho$ , Meßgebiet 3,  $x_1 = -34mm$

Die axiale Komponente der Rotation des Lambvektors  $rot(\vec{L})_1$  zeigt die Abb. 59. Die Zahlenwerte für  $rot(\vec{L})_1$  sind in der Mitte der Meße ebene nahe bei null. Auch in dieser Meße ebene wächst  $rot(\vec{L})_1$  in den Randprofilen stark an.

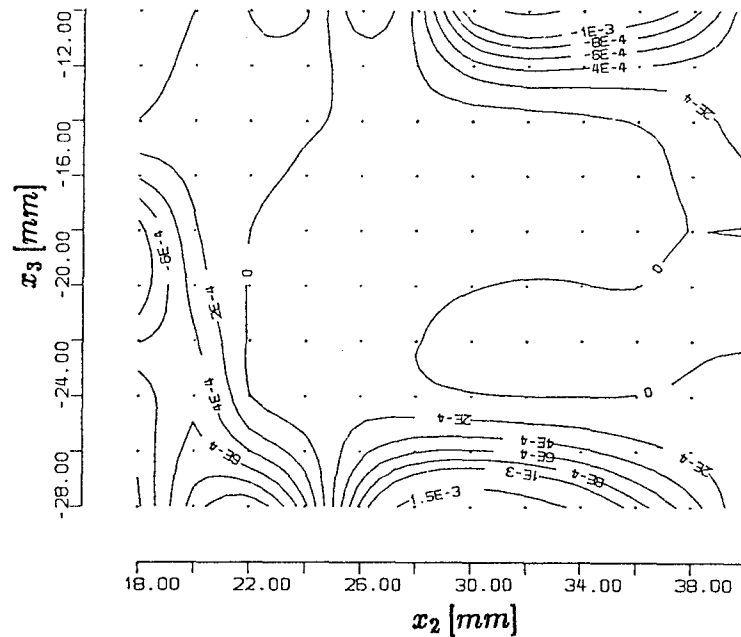


Abbildung 59: Rotation des Lambvektors, axiale Komponente, Meßegebiet 3,  $x_1 = -34mm$

$div(\vec{A})_{norm}$  in Abb. 60 ändert sich in Meßegebiet 3 kaum und nimmt Werte zwischen null und  $-2.5\%$  an.

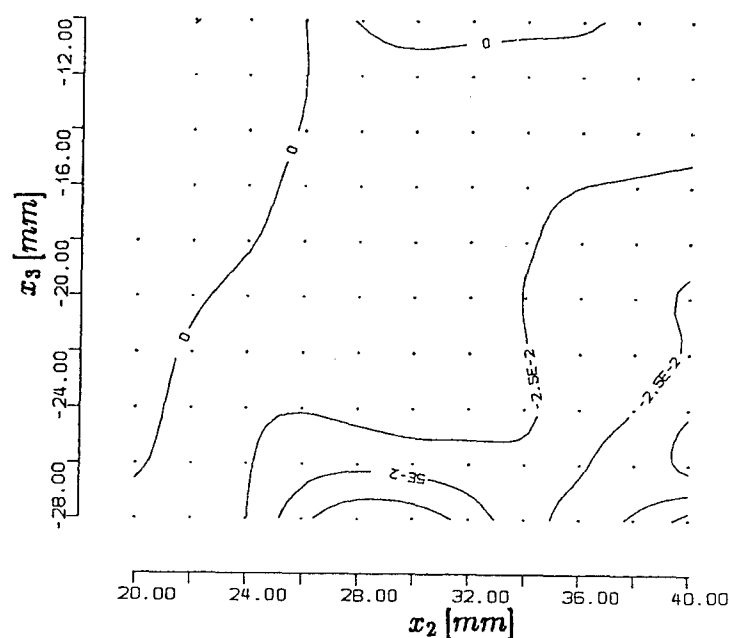


Abbildung 60: Normierte Divergenz von  $\vec{A}$ , Meßegebiet 3,  $x_1 = -34mm$

#### 4.2.5 Zusammenfassung der Meßergebnisse

Die Lage der drei Meßgebiete wurde nach den Ergebnissen der Sichtbarmachung der Wandschubspannungen (Abb. 4) festgelegt. Der Strömungscharakter, der sich nach dem Verlauf der Wandschubspannungen für die jeweiligen Meßgebiete andeutete (vgl. Tabelle 1 S. 22), konnte durch Ergebnisse der LDV-Messungen bestätigt werden.

Die Darstellungen der mittleren Geschwindigkeiten zeigen insbesondere in Meßgebiet 3, daß im Nachstromfeld der Bereich an der Schiffswand sehr klein sein kann, in dem die Struktur der mittleren Geschwindigkeiten von der Außenströmung abweicht. Ein sehr feines Meßpunktraster war notwendig, um die geringe Ausdehnung der räumlichen Strukturen zu erfassen.

Die Berechnung der partiellen räumlichen Ableitungen der gemessenen Strömungsgrößen liefert hinreichend genaue Resultate, um daraus Einblick in die Verteilungen einiger "höherer" Terme aus den Grundgleichungen der Strömungstheorie zu gewinnen.

Die partiellen Ableitungen sind um so genauer, je größer die Differenzen der abgeleiteten Größe zwischen benachbarten Meßpunkten sind. Die Güte partieller Ableitungen experimenteller Daten kann am besten beurteilt werden, wenn das Ergebnis der partiellen Ableitungen wie bei  $div(\vec{v})_{norm} = 0$  in der Strömungstheorie definiert ist. Die Darstellung von  $div(\vec{v})_{norm}$  zeigt für Meßgebiet 3, dort wo die Änderungen der mittleren Geschwindigkeit am größten sind, wesentlich bessere Ergebnisse als in Meßgebiet 1.

Aus den partiellen Ableitungen der Komponenten der mittleren Geschwindigkeiten werden die Komponenten des Gradiententensors berechnet. In symmetrisierter Form geht dieser Gradiententensor in die Turbulenzmodellierung ein. In der Wirbelviskositätshypothese werden die Komponenten des Reynoldstensors proportional zu den entsprechenden Komponenten des Gradiententensors angesetzt. Als "Proportionalitätskonstante" wird die Scheinzähigkeit  $\nu_t$  eingeführt.

Aus den räumlichen Verteilungen der gemessenen Komponenten des Reynoldstensors und des Gradiententensors wurden Verteilungen der Scheinzähigkeiten  $\nu_{ij}$  berechnet. Nach der Turbulenztheorie werden diese Scheinzähigkeiten  $\nu_{ij}$  durch einen Skalar  $\nu_t$  beschrieben. Inwieweit sich die  $\nu_{ij}$  aus den Meßwerten voneinander unterscheiden, wurde untersucht:

Die experimentellen Ergebnisse von  $\nu_{ij}$  sind in den drei Meßgebieten sehr verschieden. In Meßgebiet 1 zeigen die Verteilungen der verschiedenen  $\nu_{ij}$  zwar unterschiedliche Strukturen, die jeweiligen Zahlenwerte sind aber in weiten Bereichen recht ähnlich.

In Meßgebiet 2 ist eine vergleichbare Struktur der Verteilungen unterschiedlichen  $\nu_{ij}$  zu erkennen. Die dargestellten  $\nu_{ij}$  sind jedoch mit verschiedene Vorzeichen behaftet.

Für Meßgebiet 3 sind schließlich sowohl die Strukturen als auch die Zahlenwerte der  $\nu_{ij}$  verschieden.

Im Vergleich zu den Scheinzähigkeiten  $\nu_{ij}$ , die sich aus der Wirbelviskositätshypothese berechnen lassen, wurde ein einfacher Ansatz einer Scheinzähigkeit  $\nu_{t(Saff)}$  (nach Saffman [35]) herangezogen. Im "Totwasser" des Meßgebietes 1, in dem die Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten klein sind, stimmt  $\nu_{t(Saff)}$  zumindest von den Zahlen-

werten mit  $\nu_t$  überein. In den Meßgebieten 2 und 3 aber haben die Verteilungen von  $\nu_{t(Saff)}$  und  $\nu_t$  keine Gemeinsamkeiten.

In verschiedenen Veröffentlichungen (z.B. Prandtl [33], Rotta [34]) wird darauf hingewiesen, daß die durch die Scheinzähigkeit ausgedrückte Proportionalität zwischen den Komponenten des Reynoldstensors und den Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten eine starke Vereinfachung ist. In der Wirbelviskositätshypothese werden zunächst wie bei Saffman nur lokale Effekte im Strömungsfeld berücksichtigt, und die "Vorgeschichte" des betrachteten Strömungsmaterials - wie die Produktion und Dissipation der kinetischen Energie der Turbulenz - wird vernachlässigt.

Die Verteilung der kinetischen Energie der Turbulenz z.B. in Meßgebiet 2 zeigt deutlich, daß der Transport des Strömungsmediums bei der Interpretation der Verteilung von Meßgrößen der Turbulenz zu berücksichtigen ist. In einigen "höheren" Turbulenzmodellen werden Transportgleichungen angesetzt, um zu Aussagen über  $\nu_t$  zu gelangen. Die Vorgehensweise für einen Vergleich der experimentellen Daten mit einer solchen Scheinzähigkeit aus einem "höheren" Turbulenzmodell ist in Kapitel 5 angedeutet.

Mit der Darstellung der verschiedenen  $\nu_{tij}$  prüft man die Annahmen der Wirbelviskositätshypothese für einzelne Komponenten. Von den sechs verschiedenen Komponenten sind jeweils zwei gezeigt: eine Komponente, die sich aus Diagonalelementen des Reynoldstensors bzw. des symmetrisierten Gradiententensors berechnet, und eine andere Komponente, die aus Nichtdiagonalelementen bestimmt wird.

Unabhängig von derartigen Komponentendarstellungen wurde durch den Vergleich der Eigenrichtungen der Tensoren untersucht, ob die Scheinzähigkeit in der Wirbelviskositätshypothese als Skalar angesehen werden kann.

Beide Tensoren sind symmetrisch. Bis auf wenige Ausnahmen in Meßgebiet 2 (vgl. Abb. 39) lassen sich für beide Tensoren jeweils drei reelle Eigenwerte und drei Eigenvektoren berechnen. Um die Eigenrichtungen der verschiedenen Tensoren beim Vergleich untereinander zuordnen zu können, wurden die Eigenrichtungen für jeden Meßpunkt wie folgt "sortiert": An einem Referenz-Meßpunkt (i.a. der Punkt mit dem größten Betrag des Ortsvektors) wurde diejenige Eigenrichtung als "Eigenrichtung 1" bezeichnet, die der  $x_1$ -Richtung am nächsten lag. Ebenso werden die Eigenrichtungen 2 und 3 zugeordnet. Vom Referenz-Meßpunkt ausgehend wurden die Eigenrichtungen an den nächsten "Nachbar"-Meßpunkten so "sortiert", daß sich die Zuordnungen der Eigenrichtungen am "Nachbar"-Meßpunkt und am vorherigen Meßpunkt am besten entsprechen. Die Eigenrichtungen beider Tensoren mit gleicher Zuordnung wurden verglichen.

Die Orientierungen der Eigenrichtungen beider Tensoren sind nicht miteinander in Einklang zu bringen. Lediglich in Meßgebiet 3 ist eine Gemeinsamkeit zu erkennen. Die Aufteilung des Meßgebietes in Wand- und Außenströmung, die nach den Ergebnissen der mittleren Geschwindigkeiten vorgenommen wurde, ist in beiden Strukturen der Eigenrichtungen wiederzufinden.

*Die Untersuchung der Eigenrichtungen zeigt, daß eine skalare Scheinzähigkeit die Zusammenhänge zwischen der mittleren Geschwindigkeit und den turbulenten Schwankungen im Nachstrom eines Schiffes nicht beschreiben kann.*

Berechnet man zusätzlich zu den Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten auch die partiellen räumlichen Ableitungen der Komponenten des Reynoldstensors, dann erhält man die Reynoldskräfte. Damit hat man aus den experimentellen Daten Terme auf beiden Seiten der Reynoldsgleichung bestimmt. Für das Gleichgewicht der Kräfte in der Reynoldsgleichung fehlen aber noch die Druckkräfte. Druckverteilungen können mit einem LDV-System nicht gemessen werden. Zu dieser Problemstellung wird in Kapitel 5 eine weitergehende Auswertung der Daten vorgeschlagen.

Ergebnisse der Kräfte bzw. Beschleunigungen wurden für alle Meßgebiete dargestellt. Für Meßgebiet 1 wird angenommen, daß die Druckkräfte vernachlässigt werden können (Gl. 56 S. 50). Die effektiven Beschleunigungen und die durch die Reynoldskräfte bedingten Beschleunigungen werden deshalb direkt gegenübergestellt (Abb. 26 S. 60). Das Ungleichgewicht dieser Beschleunigungen zeigt, daß der Druckterm in der Reynoldsgleichung auch im "Totwasser" von Meßgebiet 1 nicht verschwindet. Für Meßgebiet 2 und 3 wurden Ergebnisse zu den Termen der Reynoldsgleichung nicht direkt gegenübergestellt, sondern jeweils getrennt gezeigt.

Aus den ersten partiellen räumlichen Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten läßt sich der Lambvektor  $\vec{L}$  (nach Truesdell [41]) bestimmen. Der Lambvektor geht in die von Wieghardt eingeführte Größe  $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L}$  ein.

Für Meßergebnisse der mittleren Geschwindigkeiten wurden die zweiten partiellen Ableitungen berechnet. So konnte  $div(\vec{A})_{norm}$  erstmals aus Ergebnissen eines Experiments in einer dreidimensionalen Strömung bestimmt werden.

Die Ergebnisse aller drei Meßgebiete bestätigen die Annahme von Wieghardt, daß  $div(\vec{A})_{norm}$  auch in dreidimensionalen Strömungen verschwindet.

## 5 Ausblick

Die LDV-Messungen im Nachstromfeld des Schiffmodells haben sehr umfangreiches Datenmaterial hervorgebracht. Unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Meßwerte wurden mittlere Geschwindigkeiten, Komponenten des Reynoldstensors sowie die partiellen räumlichen Ableitungen dieser Größen bestimmt. Auch einige "höhere" Terme aus der Strömungstheorie wurden untersucht.

Jede der in dieser Arbeit dargestellten Größen wurde direkt aus den Meßwerten berechnet. D.h. Terme, die indirekt mit Hilfe von Grundgleichungen der Strömungstheorie oder nach Ansätzen aus der Turbulenzmodellierung zu bestimmen sind, wurden bisher nicht analysiert. Für eine solche Analyse wurde mit dem hier erstellten Datenmaterial die Basis geschaffen.

Bei der Beurteilung numerischer Berechnungsverfahren ist es wichtig, Aussagen über die Verteilung einiger Größen zu erhalten, die nicht direkt mit einem LDV-System zu messen sind. Als wichtigste dieser Größen sind der Druck und die Dissipation zu nennen. Es wäre möglich, z.B. vom Gleichgewicht der Kräfte in der Reynoldsgleichung auszugehen, die gemessenen mittleren Geschwindigkeiten und Schwankungsgrößen einzusetzen und den fehlenden Druckterm zu berechnen. Entsprechend könnte man die Transportgleichung der Dissipation - die sogenannte  $\varepsilon$ -Gleichung - verwenden, um die Dissipation selbst zu bestimmen. Dabei würde sich jedoch die Frage nach der Genauigkeit der so gewonnenen Ergebnisse stellen.

Bisher wurden die Meßergebnisse auch in den weiterführenden Auswertungen nicht geglättet, sieht man einmal vom integrierenden Effekt bei der Berechnung der partiellen Ableitungen ab. Es ist jedoch unrealistisch, von ungeglätteten Meßwerten zu erwarten, daß sie zweimal abgeleitet werden können und dann, z.B. eingesetzt in eine Transportgleichung, immer noch "glatte" Ergebnisse für die indirekt berechneten Terme liefern.

Aus den Theorien der numerischen Berechnungsverfahren für Strömungsfelder sind unterschiedliche Verfahren bekannt, "Rauhigkeiten" in den Lösungen der Differentialgleichungen zu glätten. Überträgt man diese "Glättungsverfahren" auf die Auswertungen von experimentellen Daten, dann wird es durchaus möglich sein, mit Hilfe von indirekten Methoden zur Zeit noch unbekannte Terme hinreichend genau aus dem Datenmaterial zu berechnen.

Neben dem oben erwähnten Druck und der Dissipation wird man auf eine ähnliche Weise auch Ergebnisse für den Mischungsweg  $l_m$  gewinnen können. Mit der Rotation  $\vec{\omega}$  und der kinetischen Energie der Turbulenz  $k$ , die beide direkt bestimmt werden, sowie der indirekt berechneten Dissipation  $\varepsilon$  und dem Mischungsweg  $l_m$  wären alle Größen bekannt, auf denen heute die meisten Turbulenzmodelle basieren.

# Nomenklatur

$A$	Amplitude der Gaußverteilungsfunktion
$\vec{A}$	$\vec{v} \times \vec{L}$
$\vec{a}$	effektive Beschleunigung (linke Seite der Reynoldsgleichung)
$C_{ij}$	Frequenzfehlertensor
$E_{ij}$	Transformationstensor (vom kartesischen Koordinatensystem in das Koordinatensystem der Meßrichtungen)
$\vec{e}_i$	Einheitsvektor der Meßrichtung $i$
$F$	Oberfläche eines Kontrollvolumens
$f_i$	Komponente der Kraft
$K_{Ci}$	(Frequenz-) Fehlerkonstante (Meßrichtung $i$ )
$k$	kinetische Energie der Turbulenz $\frac{1}{2}(\overline{v'_i v'_i})$
$L$	(Schiffs-) Länge
$\vec{L}$	Lambvektor $\vec{v} \times \vec{\omega}$
$l_m$	Prandtlscher Mischungsweg
$M_i$	Komponente der momentanen Geschwindigkeit im Koordinatensystem der Meßrichtungen (Meßsystem)
$\overline{M}_i$	Komponente der mittleren Geschwindigkeit im Meßsystem
$M'_i$	Komponente der Geschwindigkeitsschwankung im Meßsystem
$M'_{Ci}$	Komponente der "fehlerbedingten" Geschwindigkeitsschwankung im Meßsystem
$N$	Anzahl der Einzelmessungen der momentanen Geschwindigkeit
$N_d$	Normierung der Divergenz
$p$	Druck
$\mathbf{R}_{ij}$	Reynoldstensor
$\mathbf{R}^*_{ij}$	Geschwindigkeitskorrelationstensor 2. Ordnung; $\mathbf{R}^*_{(ij)k}$ 3. Ordnung
$Re$	Reynoldszahl
$S/N$	Signal-Rauschverhältnis von Meßsignalen
$\vec{s}$	Ortsvektors
$s_i$	Streifenabstand (Meßrichtung $i$ )
$\vec{T}$	Reynoldskräfte
$t$	Zeit
$U_\infty, U_0$	Anströmgeschwindigkeit des Windkanals
$V$	Volumen (-inhalt eines Kontrollvolumens)
$\mathbf{V}_{ij}$	Gradiententensor

$\vec{v}(t)$	Vektor der momentanen Geschwindigkeit im kartesischen Koordinatensystem
$v_i(t)$	Komponente der momentanen Geschwindigkeit im kartesischen Koordinatensystem
$v_{i j}$	partielle Ableitung von $v_i$ ; entspr. $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$
$\bar{v}_i$	Komponente der mittleren Geschwindigkeit
$v'_i$	Komponente der Geschwindigkeitsschwankung
$x_i$	Ortskoordinaten im kartesischen System
$\alpha_i$	Winkel zwischen der Meßrichtung $i$ und der $x_3$ -Achse des kartesischen Koordinatensystems
$\Delta \overline{M_i^2}$	mittlerer statistischer Fehler der Geschwindigkeitskomponente im Meßsystem
$\Delta \nu_{Mi}$	statistischen Fehler der Meßfrequenz
$\Delta t$	Zeitintervall
$\Delta x_i$	Abstand zwischen zwei Meßpunkten
$\delta_{ij}$	Kronecker Symbol (1 für $i = j$ , 0 sonst)
$\varepsilon$	turbulente Dissipation
$\eta_i$	Turbulenzgrad (Richtung $i$ im kartesischen Koordinatensystem)
$\nu$	kinematische Zähigkeit
$\nu'_{Ci}$	Frequenzfehler der Dopplerfrequenz (Meßrichtung $i$ )
$\nu_{Di}$	Dopplerfrequenz (Meßrichtung $i$ )
$\bar{\nu}_{Di}$	mittlere Dopplerfrequenz (Meßrichtung $i$ )
$\nu'_{Di}$	Schwankung der Dopplerfrequenz (Meßrichtung $i$ )
$\nu_{Mi}$	Meßfrequenz (Meßrichtung $i$ )
$\nu_{si}$	Shiftfrequenz (Meßrichtung $i$ )
$\nu_t$	turbulente Scheinzähigkeit (eddy viscosity)
$\nu_{tij}$	turbulente Scheinzähigkeit, berechnet aus den Meßergebnissen
$\nu_{t(Saff)}$	turbulente Scheinzähigkeit nach Saffman
$\rho$	Dichte
$\sigma_{Cij}$	Korrelationstensor der Gaußverteilung
$\vec{\omega}$	Rotation der mittleren Geschwindigkeit $rot(\vec{v})$
$\xi$	Maß für das Gleichgewicht der Kräfte in der Reynoldsgleichung

### zusätzliche Indizes

$C$	die bezeichnete Größe ist mit einem Frequenzfehler behaftet
$M$	bezeichnet eine Größe im Meßsystem

## Literatur

- [1] Baldwin B.S., Lomax H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows", AIAA Paper 78-257, 1978
- [2] Bradshaw P., "Turbulence", Springer Verlag, 1978
- [3] Cebeci T., "Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers", AIAA Journ., Vol. 12, No. 6, 1974
- [4] Daly B.J., Harlow F.H., "Transport Equations in Turbulence", The Physics of Fluids, Vol. 13, No. 11, 1970
- [5] Denker J., Knaack Th., Kux J., "Experimental and Numerical Investigations of HSVA-tanker-2 Flow Field", IfS-Bericht Nr. 521, 1992
- [6] Driver D.M., Seegmiller H.L., "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow", AIAA Journal, Vol. 23, No. 2, 1985
- [7] Donaldson C. duP., Rosenbaum H., "Calculation of Turbulent Shear Flows Through Closure of the Reynolds Equations by Invariant Modeling", NASA SP-216, 1968, pp.231-253
- [8] Donaldson C. duP., "Calculation of Turbulent Shear Flows for Atmospheric and Vortex Motions", AIAA Journal, Vol. 10, No. 1, 1972, pp.4-12
- [9] Donaldson C. duP., Sullivan R. D., Rosenbaum H., "A Theoretical Study of the Generation of Atmospheric-Clear Air Turbulence", AIAA Journal, Vol. 10, No. 2, 1972, pp.110-118
- [10] Durrani T.S., Greated C.A., "Laser Systems in Flow Measurement", Plenum Press, New York, London, 1972
- [11] Durst F., Melling A., Whitelaw J.H., "Principles and Practice of Laser-Doppler-Anemometry", Academic Press, London, New York, 1981
- [12] Frenkiel F.N., Klebanoff P.S., "Higher-Order Correlations in a Turbulent Field", The Physics of Fluids, 1967, Vol. 10, No. 3, pp. 507 - 520
- [13] Frenkiel F.N., Klebanoff P.S., "Correlation Measurements in a Turbulent Flow using High-Speed Computing Methods", The Physics of Fluids, 1967, Vol. 10, No. 8, pp. 1737 - 1747
- [14] Gietz U., "Untersuchung einer dreidimensionalen Wirbelströmung im Windkanal mit einem Laser-Doppler-Velocimeter", IfS-Schrift Nr. 2381, 1990
- [15] Hösel W., Rodi W., "Eine genaue digitale Auswertemethode für Laser-Doppler-Velocimeter Signale", Technisches Messen, 1978, Teil 1: Heft 2, pp. 43; Teil 2: Heft 3, pp. 105
- [16] Hösel W., Rodi W., "Ein neues Verfahren zur Prüfung digitaler Frequenzmeßgeräte für Laser-Doppler-Velocimeter-Signale", Technisches Messen, 1978, Heft 4, pp. 125

- [17] Hoffmann H.P., "Untersuchung der 3-dimensionalen Grenzschicht an einem Schiffsdoppelmodell im Windkanal", IfS-Bericht Nr. 343, 1976
- [18] Hoshino T., Oshima A., Sasajima T., "Flow Measurements by 3-Component LDV in a Cavitation Tunnel", Proceedings of 19th ITTC Group Discussion on: Application and Accuracy of LDV Measurements, Kobe, October, 1987
- [19] Kampé de Ferrier J., "The Gram-Charlier Approximation of the Normal Law and the Statistical Description of a Homogeneous Turbulent Flow near Statistical Equilibrium", David Taylor Model Basin, Applied Mathematics Laboratory Research and Development Report, No. 2013, Washington D.C., 1966
- [20] Knaack Th., Kux J., Wieghardt K., "On the Structure of the Flow Field on Ship Hulls", Proceedings of Osaka Int. Colloquium on Ship Viscous Flow, Osaka, 1985, pp. 192 - 208
- [21] Knaack Th., "LDV-Messungen der Reynolds-Spannungen im Nachlauf eines Schiffmodells im Windkanal", IfS-Bericht Nr. 499, 1990
- [22] Kux J., Wieghardt K., "Nomineller Nachstrom auf Grund von Windkanaluntersuchungen", Jahrbuch Schiffbautech. Ges. 74, 1980, S. 303
- [23] Lading L., "Spectral analysis versus counting", Proceedings of International Symposium on Laser-Anemometry, AMSE, 1985, FED-Vol. 33, pp.189
- [24] Larsson L., Patel V.C., Dyne G., "Ship Viscous Flow Proceedings of the 1990 SSPA-CTH-IIHR Workshop", 1991
- [25] Lumley J.L., "Stochastic Tools in Turbulence", Academic Press, 1970
- [26] Lumley J.L., "Computational Modeling of Turbulent Flows", in: Advances in Applied Mechanics, Vol. 18, Academic Press, New York, 1978, pp.123-176
- [27] McLaughlin D.K., Tiedermann W.G., "Biasing Correction for Individual Realization of Laser Anemometer Measurements in Turbulent Flows", The Physics of Fluids, 1973, Vol. 16, No. 12, pp.2082
- [28] Melling A., "Scattering Particles for Laser-Anemometry in Air", Imperial College of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering, ET/TN/B/7, 1971
- [29] OEI, "User Manual Strahlteiler und Doppelbraggzellenmodul LD-OK-301/402", OEI GmbH, Karlsruhe
- [30] Orloff K.L., Snyder P.K., "Laser Doppler anemometer measurements using nonorthogonal velocity components: error estimates", Applied Optics, 1982, Vol. 21, No. 2, pp. 339
- [31] Ozcan O., "Measurement Errors in Three-Component Laser-Anemometry", in Rood E.P. (editor), The Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers: Experimental Uncertainty in Fluid Measurements, Boston, Massachusetts, December 1987

- [32] Portfors E.A., Keller J.F., "Isotropy in initial period grid turbulence", *The Physics of Fluids*, Vol. 12, 1969, pp. 1519 - 1521
- [33] Prandtl L., "Führer durch die Strömungslehre", Vieweg, Braunschweig, 3. Auflage, 1949
- [34] Rotta J.C., "Turbulente Strömungen", Teubner, Stuttgart, 1972
- [35] Saffman P.G., Wilcox D.C., "Turbulent-Model Predictions for Turbulent Boundary Layers", *AIAA Journal*, April 1974, Vol. 12, No. 4, pp.541
- [36] Scheinpflug M., "Vergleichende Nachstromuntersuchungen an einem Schiffsdoppelrumpfmödel im Windkanal mit einem Laser-Doppler-Anemometer und Drucksonden", *IfS-Bericht Nr. 381*, 1979
- [37] Snyder P.K., Orloff K.L., Reinath M.S., "Reduction of Flow-Measurement Uncertainties in Laser Velocimeters with Nonorthogonal Channels", *AIAA Journal*, August 1984, Vol. 22, No. 8, pp.1115
- [38] Speziale C. G., "Turbulence Modeling in Noninertial Frames of Reference", in: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1989, pp.3-19
- [39] Spöhr M., "Wandnahe Messungen des Geschwindigkeitsfeldes an einem Schiffsdoppelmodell mit einem Laser Doppler Velocimeter", *IfS-Schrift Nr. 2392*, 1991
- [40] Townsend A.A., "The Structure of Turbulent Shear Flow", Cambridge University Press, 1976
- [41] Truesdell C., "The Kinematic of Vorticity", Indiana Univ. Press, Bloomington, Indiana, 1954
- [42] Uberoi M.S., "Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows". *J. Appl. Phys.*, Vol. 28, 1957, pp. 1165 - 1170
- [43] Uberoi M.S., Wallis S., "Small axisymmetric contraction of grid turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 24, 1966, pp. 539 - 543
- [44] Uhlig L., Hoffmann P., "Automatisierung der Navigation", Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin, 1984
- [45] Wieghardt K., "Theoretische Strömungslehre", Teubner, Stuttgart, 1965
- [46] Wieghardt K., "Zur Struktur turbulenter Strömungen", *IfS-Bericht Nr. 470*, 1986
- [47] Wieghardt K., "On a Characteristic of Threedimensional Free Turbulence", 12th Georg Weinblum Memorial Lecture, in *Schiffstechnik* Bd. 37, 1990
- [48] Wieghardt K., "Zum Außengesetz inkompressibler, turbulenter Grenzschichten", *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* Vol. 15, No. 5, 1991, pp. 319

## Abbildungsverzeichnis

1	Geschwindigkeitskorrelationstensor . . . . .	10
2	Korrelation im Ortsraum . . . . .	19
3	Korrelation im Geschwindigkeitsraum . . . . .	19
4	Anstrichversuch zur Sichtbarmachung des Richtungsfeldes der Wandschubspannungen mit den Meßgebieten 1 bis 3 . . . . .	21
5	Verteilung von Meßwerten um die mittlere Geschwindigkeit sowie Schwankungsellipsen der ein-, zwei- und dreifachen Achsenlänge . . . . .	24
6	Gemessene Schwankungsellipse und daraus berechnete Verteilung der turbulenten Schwankung . . . . .	32
7	Schwankungsellipsen vor und nach der Korrektur des Frequenzfehlers; Meßgebiet 2; Ebene $x = -12mm$ . . . . .	36
8	Schwankungsellipsen nach Meßergebnissen von Gietz . . . . .	36
9	Vergleich zwischen Experimenten und Berechnungsverfahren . . . . .	44
10	Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Messung . . . . .	46
11	Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Berechnung 1 . . . . .	46
12	Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Berechnung 2 . . . . .	47
13	Querkomponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Propellerebene, HSVA-Tanker-2, Berechnung 3 . . . . .	47
14	Axiale Komponente der Geschwindigkeit, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	52
15	Querkomponenten der Geschwindigkeit, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	53
16	Erste Komponente des Reynoldstensors, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	54
17	Kinetische Energie der Turbulenz, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	54
18	Normierte Divergenz der Geschwindigkeit, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	55
19	Rotation der Geschwindigkeit, Isolinien der axialen Komponente, Pfeile der Querkomponenten, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	56
20	Erste Komponente des Gradiententensors, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	56
21	Scheinzähigkeit $\nu_{t11}$ , Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	57
22	Scheinzähigkeit $\nu_{t12}$ , Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	57
23	Scheinzähigkeit nach Saffmann $\nu_{t(Saff)}$ , Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	58
24	Eigenrichtungen des Reynoldstensors, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	59
25	Eigenrichtungen des Gradiententensors, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	59

26	Linke Seite der Reynoldsgleichung $\vec{a}$ (dünn) und rechte Seite $-\vec{T}/\rho$ (lett), jeweils die Querkomponenten, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	60
27	$\xi$ (Gleichgewicht zwischen Beschleunigungen und Reynoldskräften), Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	60
28	Rotation des Lambvektors, axiale Komponente, Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$	61
29	Normierte Divergenz von $\vec{A}$ , Meßgebiet 1, $x_1 = -2mm$ . . . . .	61
30	Axiale Komponente der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2, $x_1 = -12mm$ . .	62
31	Querkomponenten der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2, $x_1 = -12mm$ . . .	62
32	Erste Komponente des Reynoldstensors, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . .	63
33	Kinetische Energie der Turbulenz, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	63
34	Normierte Divergenz der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . .	64
35	Rotation der Geschwindigkeit, Isolinien der axialen Komponente, Pfeile der Querkomponenten, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	64
36	Scheinzähigkeit $\nu_{t11}$ , Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	65
37	Scheinzähigkeit $\nu_{t12}$ , Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	65
38	Scheinzähigkeit nach Saffmann $\nu_{t(Saff)}$ , Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . .	66
39	Eigenrichtungen des Reynoldstensors, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	67
40	Eigenrichtungen des Gradiententensors, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . .	67
41	Querkomponenten der Beschleunigung $\vec{a}$ , Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . .	68
42	Querkomponenten von $-\vec{T}/\rho$ , Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	68
43	Rotation des Lambvektors, axiale Komponente, Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$	69
44	Normierte Divergenz von $\vec{A}$ , Meßgebiet 2, $x_1 = -14mm$ . . . . .	69
45	Axiale Komponente der Geschwindigkeit, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . .	70
46	Querkomponenten der Geschwindigkeit, Meßgebiet 2, $x_1 = -34mm$ . . . .	71
47	Erste Komponente des Reynoldstensors, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . .	72
48	Kinetische Energie der Turbulenz, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	72
49	Normierte Divergenz der Geschwindigkeit, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . .	73
50	Rotation der Geschwindigkeit, Isolinien der axialen Komponente, Pfeile der Querkomponenten, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	73
51	Erste Komponente des Gradiententensors, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . .	74
52	Scheinzähigkeit $\nu_{t11}$ , Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	75
53	Scheinzähigkeit $\nu_{t12}$ , Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	75
54	Scheinzähigkeit nach Saffmann $\nu_{t(Saff)}$ , Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . .	76
55	Eigenrichtungen des Reynoldstensors, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	77

56	Eigenrichtungen des Gradiententensors, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . .	77
57	Querkomponenten der Beschleunigung $\vec{a}$ , Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . .	78
58	Querkomponenten von $-\vec{T}/\rho$ , Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	78
59	Rotation des Lambvektors, axiale Komponente, Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$	79
60	Normierte Divergenz von $\vec{A}$ , Meßgebiet 3, $x_1 = -34mm$ . . . . .	79
61	Lage der Meßrichtungen im kartesischen Koordinatensystem . . . . .	92
62	Anpassung einer Gaußfunktion an die Meßwerte . . . . .	95
63	Erste Komponente des Reynoldstensors als Funktion der Anzahl der Einzelmessungen N . . . . .	96
64	Kontrollvolumen zur Berechnung der partiellen Ableitungen . . . . .	97

# A Bestimmung zeitlich gemittelter Strömungsgrößen aus Meßwerten der momentanen Geschwindigkeit

## A.1 Das Koordinatensystem der Meßrichtungen

Für die Experimente im Windkanal wird ein kartesisches Koordinatensystem definiert, dessen Achse  $x_1$  in Richtung der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  zeigt. Die Lage der Einheitsvektoren in die Meßrichtungen  $\vec{e}_i$  bzgl. des kartesischen Systems ist aus Abb. 61 zu ersehen.

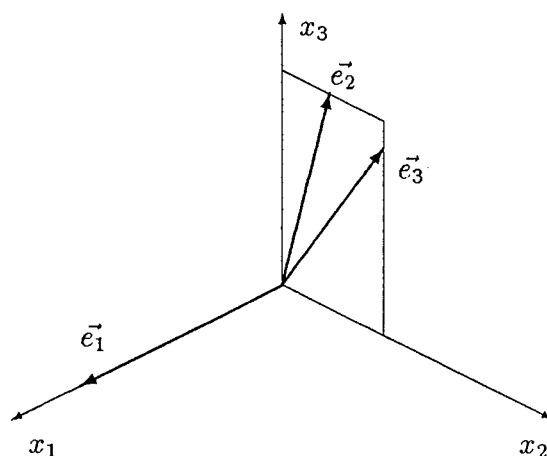


Abbildung 61: Lage der Meßrichtungen im kartesischen Koordinatensystem

Meßrichtung 1 liegt parallel zum Geschwindigkeitsvektor der Anströmung  $U_\infty$  in  $x_1$ -Richtung. Die Meßrichtungen 2 und 3 liegen in der Ebene, die von  $x_2$  und  $x_3$  aufgespannt wird. Die Winkel dieser Meßrichtungen zur  $x_3$ -Achse betragen ca.  $\alpha_2 = 5^\circ$  für Meßrichtung 2 und  $\alpha_3 = 30^\circ$  für Meßrichtung 3. Die Komponenten der Einheitsvektoren in die Meßrichtungen bilden die Zeilen der Transformationsmatrix

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Der Vektor der mittleren Geschwindigkeit im Meßrichtungssystem mit den Komponenten  $\overline{M}_i$  ist nach

$$\overline{v}_i = \mathbf{E}_{ij}^{-1} \overline{M}_j \quad (64)$$

in das kartesische System zu transformieren. Entsprechend berechnen sich die gemittelten Schwankungen im kartesischen System nach

$$\overline{v'_i v'_j} = \mathbf{E}_{ik}^{-1} \mathbf{E}_{jl}^{-1} \overline{M'_k M'_l} \quad (65)$$

aus den gemittelten Schwankungen im Meßrichtungssystem  $\overline{M'_k M'_l}$ . Die gemittelten Schwankungen  $\overline{v'_i v'_j}$  im kartesischen System sind die Komponenten des Reynoldstensors  $\mathbf{R}_{ij}$ .

## A.2 Anpassung einer Gaußfunktion an die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeiten

Die obige Transformation  $\mathbf{E}_{ij}$  überführt die momentanen Geschwindigkeitskomponenten im Meßsystem  $M_i(t)$  in die entsprechenden Komponenten im kartesischen System  $v_i(t)$ . Dort werden die Mittelwerte  $\bar{v}_i$  über ein Zeitintervall  $T$  berechnet. Die Strömungsverhältnisse sind langzeitstabil, so daß  $T$  zwar lang genug sein muß, um sinnvoll über die turbulenten Schwankungen mitteln zu können, sonst kann  $T$  aber beliebig gewählt werden.

Die turbulenten Schwankungen  $v'_i(t)$  sind die Abweichungen der momentanen Geschwindigkeiten von den Mittelwerten  $\bar{v}_i$ . Andere, z.B. periodische Schwankungen treten nicht auf, da die Strömung im Mittel als stationär anzusehen ist.

Das zeitliche Mittel der turbulenten Schwankungen  $\overline{v'_i}$  verschwindet. Als mittlere turbulente Schwankung versteht man daher im Sprachgebrauch der Strömungslehre i.a. das quadratische Mittel  $\sqrt{\overline{v'^2_i}}$ . Dies ist die Standardabweichung der Verteilung der momentanen Geschwindigkeitskomponente. Setzt man diese Standardabweichung in Relation zur Anströmgeschwindigkeit, so nennt man  $\sqrt{\overline{v'^2_i}}/U_\infty$  den *Turbulenzgrad*. Bezogen auf den lokalen Mittelwert der Geschwindigkeit ergibt sich der *lokale Turbulenzgrad*

$$\eta_i = \frac{\sqrt{\overline{v'^2_i}}}{\bar{v}_i} \quad (66)$$

Der Reynoldstensor  $\mathbf{R}_{ij} = \overline{v'_i v'_j}$  enthält neben den mittleren Schwankungen in die Raumrichtungen ( $i = j$ ) die gemischten Korrelationen ( $i \neq j$ ). Um alle sechs verschiedenen Komponenten des Reynoldstensors in gleicher Dimension – als Quadrat einer Geschwindigkeit – behandeln zu können, ist es üblich statt der Standardabweichung auch die Varianz  $\overline{v'^2_i}$  als mittlere, turbulente Schwankung zu bezeichnen. Die letztere Bezeichnung wird auch in dieser Arbeit verwendet.

Aus einer Anzahl von Einzelmessungen der momentanen Geschwindigkeiten lassen sich die Mittelwerte und die Varianzen der i.a. dreidimensionalen Verteilung berechnen. "Ausreißer", d.h. einzelne Meßwerte fernab vom Mittelwert, deren Ursache in Störungen des elektronischen Meßsignals zu suchen ist, können in jeder Messung auftreten. Verteilen sich diese Ausreißer symmetrisch um die Mittelwerte, so verändern sie die Größen dieser Mittelwerte nicht. In die Varianz jedoch gehen diese Ausreißer quadratisch ein und ihr quadratisches Mittel verschwindet nicht. Eine Analyse der Meßergebnisse zeigte, daß schon wenige Ausreißer<sup>33</sup> im Einfluß auf die Größe der Varianz nicht mehr zu vernachlässigen sind.

Zur Unterscheidung dieser Ausreißer von den turbulenten Schwankungen wird eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angenommen und an die gemessene Häufigkeitsverteilung

<sup>33</sup>Hier beträgt Zahl der Ausreißer bezogen auf die Gesamtzahl der Einzelmessungen weniger als 1%

$f(\vec{v}')$  der momentanen Geschwindigkeiten angepaßt. Läßt sich diese *Schwankungsverteilung*  $f(\vec{v}')$  durch eine analytische Funktion wiedergeben, so sind die Ausreißer zu erkennen und zu eliminieren.

Mathematische Hilfsmittel zur statistischen Beschreibung der Turbulenz werden z.B. von Lumley [25] und Rotta [34] vorgestellt. Sie führen Formalismen zur Berechnung der Korrelationen zwischen verschiedenen turbulenten Schwankungen ein. Die Bedeutung der Korrelationen höherer Ordnung aus der Sicht der Turbulenztheorie beschreibt der Abschnitt 2.2, dort werden auch verschiedene Typen von *Korrelationen der Turbulenz* definiert. Diese Bezeichnungen der "Korrelationstypen" wird hier in den Vergleich verschiedener experimentellen Daten übernommen.

Meist wird eine Schwankungsverteilung in erster Näherung als Gaußverteilung angesetzt. Sie liefert die Korrelationen 2. Ordnung, in denen sich die Breite der Verteilung widerspiegelt. Die Symmetrieeigenschaften (hier die Schiefe) der i.a. dreidimensionalen Verteilung wird durch die Korrelationen 3. Ordnung ausgedrückt, diese sind bei einer Gaußverteilung definitionsgemäß gleich null. Werden diese Korrelationen 3. Ordnung z.B. durch eine Gram-Charlier Entwicklung bestimmt, so gibt die Größe dieser Terme 3. Ordnung Aufschluß darüber, wie weit die Messwerte von einer Gaußverteilung abweichen.

Frenkiel und Klebanoff [12] untersuchten experimentelle Daten nach höheren Ordnungen der zeitlichen Korrelation  $v'(\vec{x}, t)v'(\vec{x}, t + \Delta t)$ . Diese Korrelation zeigt die zeitliche Änderung einer Geschwindigkeitskomponente an einem festen Ortspunkt. Frenkiel und Klebanoff verglichen verschiedene analytische Funktionen mit gemessenen Schwankungsverteilungen. Neben einer eindimensionalen Gaußfunktion setzten sie nach Kampé de Fériet [19] eine Gram-Charlier Entwicklung an, um höhere Korrelationen als von der 2. Ordnung bestimmen zu können. Die Korrelationen 3. Ordnung der Gram-Charlier Entwicklung zeigten, daß die Schiefe der gemessenen Schwankungsverteilung zum Teil recht erheblich von einer Gaußfunktion abwich.

*Räumliche Korrelationen und Korrelationen im Geschwindigkeitsraum* wurden u.a. für Messungen von Townsend [40] berechnet. Die gemessene Korrelation im Geschwindigkeitsraum  $v'_i(\vec{x}, t)v'_i(\vec{x}, t)$  (nicht über  $i$  summiert) konnte sehr gut durch eine eindimensionale Gaußfunktion wiedergegeben werden. Korrelationen 3. und höherer Ordnung waren zu vernachlässigen. Die Ergebnisse der räumlichen Korrelation  $v'_i(\vec{x}, t)v'_i(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t)$  (nicht über  $i$  summiert) wichen von einer Gaußfunktion ab.

In dieser Untersuchung wurden die zeitlichen Mittelwerte der sechs verschiedenen Korrelationen im Geschwindigkeitsraum  $v'_i(\vec{x}, t)v'_j(\vec{x}, t)$  für jeden Meßpunkt bestimmt. Der Typ der gemessenen Korrelationen ist mit den Messungen von Townsend zu vergleichen, auch wenn Townsend nur eine der sechs Komponenten des Reynoldstensors bestimmt hat. Wie bei Townsend passen sich die Messungen hier sehr gut an eine Gaußfunktion an. Während Townsend von einer eindimensionalen Gaußverteilung ausgeht, wird hier eine dreidimensionale Gaußverteilung angesetzt

$$\begin{aligned} G(v_i) &= Ae^{-\frac{1}{2}((\bar{v}_i - v_i)\sigma_{ij}^{-1}(\bar{v}_j - v_j))} \\ &= Ae^{-\frac{1}{2}(v'_i\sigma_{ij}^{-1}v'_j)} \end{aligned} \quad (67)$$

Zur Anpassung dieser Gaußfunktion an die Meßwerte sind 10 Parameter (3 Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{v}_i$ , 6 Komponenten des symmetrischen Korrelationstensors  $\sigma_{ij}$  und die Konstante A) nach dem Prinzip der "kleinsten Fehlerquadrate" zu optimieren. Abb. 62 zeigt die Anpassung einer Gaußfunktion an eine Schwankungsverteilung in einer Dimension. In der Abbildung sind die Meßwerte (1.) sowie eine Splineanpassung (2.), eine Startfunktion (3.) und das Endergebnis (4.) der Gaußanpassung dargestellt.

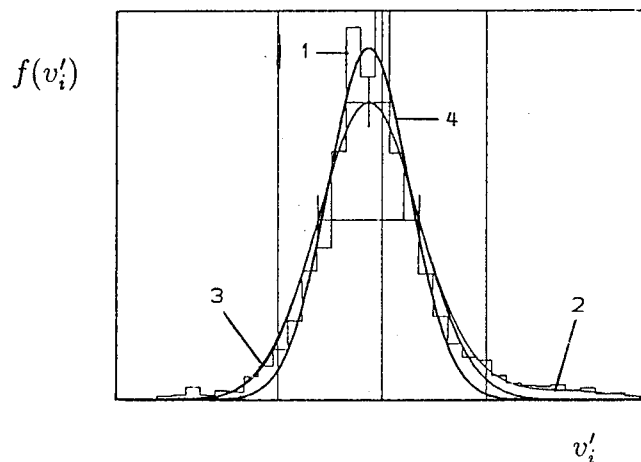


Abbildung 62: Anpassung einer Gaußfunktion an die Meßwerte

In Parameterstudien wurden Schwankungsverteilungen und verschiedene Größenordnungen von Störeinflüssen numerisch simuliert und geprüft mit welcher Genauigkeit die Anpassung vorgegebene Parameter bestimmen kann.

Ein Ergebnis dieser Parameterstudien zeigte, daß 300 bis 500 Einzelmessungen notwendig sind, um eine dreidimensionale Schwankungsverteilung repräsentieren zu können. Dies steht im Einklang mit einer Analyse der experimentellen Daten, in denen die Entwicklung von Mittelwerten der Schwankungsgrößen in Abhängigkeit von der Anzahl der Einzelmessungen getestet wurde. Abb. 63 zeigt die erste Komponente des Reynoldstensors  $\overline{v_1'^2}$  als Funktion der Anzahl der Einzelmessungen  $N$ .  $\overline{v_1'^2}(N)$  ist als Abweichung vom Mittelwert bei  $N = 1000$  dargestellt. Für  $N > 300$  geht der Verlauf asymptotisch in den Wert bei 1000 Einzelmessungen über.

In Meßgebiet 1 waren die turbulenten Schwankungen recht groß. Der lokale Turbulenzgrad betrug dort zum Teil über 1000%. Um die Verteilungen hinreichend genau bestimmen zu können, wurden in diesem Meßgebiet 1000 Einzelmessungen pro Punkt aufgenommen. In den Meßgebieten 2 bis 3, in denen der lokale Turbulenzgrad wesentlich geringer war, wurde die Zahl der Einzelmessungen auf 500 reduziert<sup>34</sup>.

<sup>34</sup>Hierdurch veränderte sich die Genauigkeit der Meßergebnisse kaum. Die Einsparung an Meßzeit war jedoch beträchtlich.

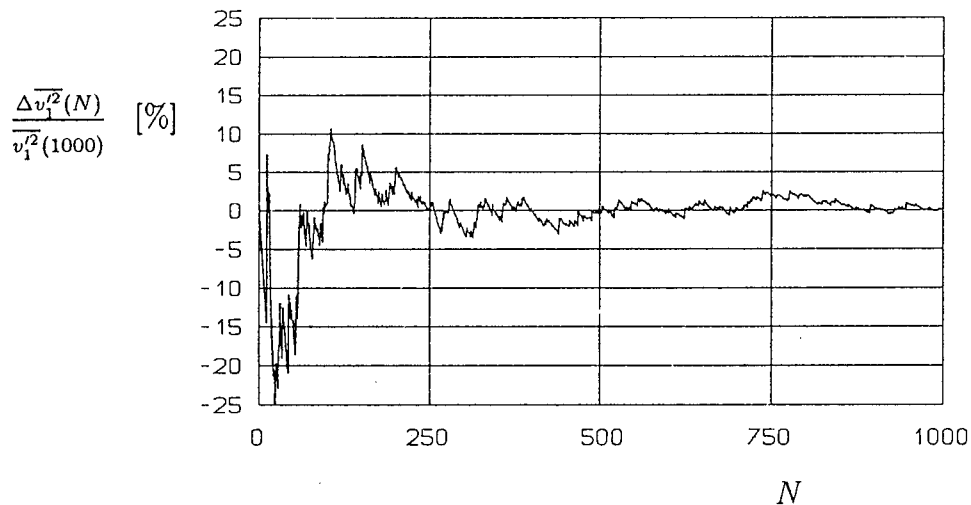


Abbildung 63: Erste Komponente des Reynoldstensors als Funktion der Anzahl der Einzelmessungen  $N$

Ein anderes Ergebnis der Parameterstudien ergab, daß die Komponenten der mittleren Geschwindigkeit nach der Gaußanpassung auf unter 1% genau aus den simulierten Schwankungsverteilungen zu bestimmen war. Wurde das Verhältnis der simulierten Störungen zu den Meßsignalen den Bedingungen bei einer Messung angeglichen, so gab die Gaußanpassung die Komponenten des Reynoldstensors auf 1% bis 5% genau wieder.

In das Auswertungsprogramm zur Gaußanpassung wurden Korrekturen von Fehlern integriert, die charakteristisch für LDV-Untersuchungen sind (vgl. Abschnitt 3.3). Neben dem bias-Effekt berücksichtigt das Auswertungsprogramm die Frequenzfehlerkorrektur.

Eine Berechnung der Korrelationen 3. Ordnung aus den Meßdaten ergab sehr kleine Zahlenwerte. Dies deckt sich mit den Ergebnissen von Townsend. (Hier betragen die Korrelationen 3. Ordnung bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit weniger als  $1.0 \cdot 10^{-6}$ .) Zudem wiesen die Schwankungsverteilungen eine leichte Schiefe (in der Größenordnung der Korrelationen 3. Ordnung) auf, die mit Eigenschaften der Meßgeräte zu begründen war. Die Verstärkungseigenschaften der Counter fallen bei einer Mittenfrequenz von 5 MHz zu höheren Frequenzen hin erheblich ab. Fällt die Verstärkung für eine hohe Meßfrequenz, so nimmt auch die Wahrscheinlichkeit ab, daß diese Frequenz im Counter als gültiges Signal detektiert wird. Die Geschwindigkeiten, aus denen sich die Schwankungsverteilungen bilden, sind proportional zu den Meßfrequenzen. Die einseitige Wichtung der Detektionswahrscheinlichkeit verschiedener Frequenzen überträgt sich auf die Häufigkeitsverteilung der Geschwindigkeiten.

Da die Schiefe in den Schwankungsverteilungen sehr gering war, und nicht zu unterscheiden war, ob diese Schiefe in der Physik der Strömung oder in Eigenschaften der Meßgeräte begründet liegt, wurden Korrelationen 3. Ordnung in dieser Arbeit nicht dargestellt.

## B Ableitungen von experimentellen Daten

Die räumliche Struktur einer mehrdimensionalen Funktion – hier des Vektorfeldes der mittleren Geschwindigkeit und des Reynolds'schen Tensorfeldes – kann durch die Bestimmung ihrer partiellen räumlichen Ableitungen untersucht werden. Im allgemeinen bilden die partiellen ersten Ableitungen die Komponenten der Jacobimatrix zu der Funktion. Speziell für das Vektorfeld der mittleren Geschwindigkeit wird die Matrix dieser partiellen Ableitungen als Gradiententensor

$$\mathbf{V} = (\bar{v}_{ij}) \quad (68)$$

bezeichnet. Dieser Gradiententensor tritt auf der linken Seite der Reynolds Gleichung auf (Gl. 5 Seite 9).

Die Berechnung dieser Ableitungen aus experimentellem Datenmaterial stellt hohe Anforderungen an die räumliche Auflösung des Geschwindigkeitsfeldes. Der Abstand der Meßpunkte  $\Delta x_i$  betrug bei Messungen bis 1986 im Windkanal des IfS  $\Delta x_1 \geq 19mm$  und  $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 3mm$  [22]. Für diese Untersuchung wurde eine verfeinerte Auflösung des Meßpunktrasters mit  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 2mm$  gewählt.

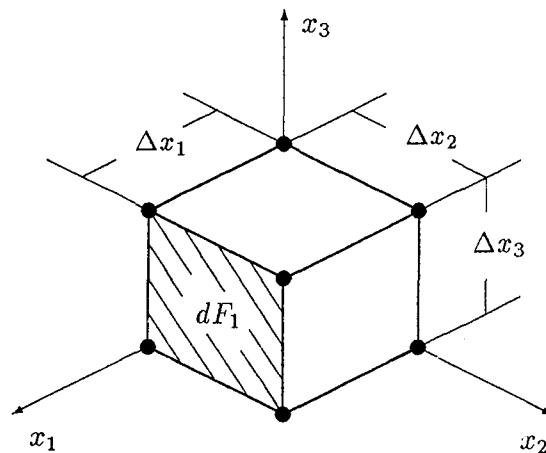


Abbildung 64: Kontrollvolumen zur Berechnung der partiellen Ableitungen

In früheren Arbeiten [20] wurden die Differentiale durch Differenzenquotienten angenähert. Bei hinreichend kleinen Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten zwischen zwei Meßpunkten waren die Ergebnisse befriedigend. Im nächsten Schritt wurden Sätze von eindimensionalen Splinefunktionen an Geschwindigkeitsverteilungen angepaßt. Bei dieser Anpassung verzichtet man auf eine Glättung der Ableitungen durch Ausgleichssplinefunktionen. Die Ableitungen wurden den Koeffizienten der Interpolationssplinefunktionen entnommen.

Beide Berechnungsmethoden lieferten dimensionsbehaftete Zahlenwerte. Die Güte der einzelnen Ableitungen und deren räumliche Verteilungen entzieht sich einer Bewertung, solange die Größe der Werte von einer Dimension abhing.

Wieghardt schlug 1989 für die Berechnung der Ableitungen des Datenmaterials dieser Untersuchungen folgenden Ansatz vor [47]. Die Meßgebiete werden in kleine Kontrollvolumen (Abb. 64) aufgeteilt. Die Randflächen der Kontrollvolumen sind durch die Meßpunkte begrenzt. Divergenz ( $div(\vec{v})$ ) entspr.  $\bar{v}_{i|i}$ ) und Rotation ( $rot(\vec{v})$ ) entspr.  $\varepsilon_{ijk} \bar{v}_{j|k}$ ) der mittleren Geschwindigkeiten werden für diese Kontrollvolumen durch integrale Verfahren berechnet, wobei angenommen wird, daß  $div(\vec{v})$  und  $rot(\vec{v})$  im jeweiligen Integrationsgebiet konstant sind.  $div(\vec{v})$  wird im Mittelpunkt der Kontrollvolumen als Integral über den Fluß durch die Oberfläche nach dem Satz von Gauß in der Form

$$div(\vec{v}) = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \vec{v} d\vec{F} \quad (69)$$

gebildet. In linearer Näherung wird angesetzt

$$\begin{aligned} div(\vec{v}(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x_1, x_2 + \frac{1}{2}\Delta x_2, x_3 + \frac{1}{2}\Delta x_3)) \\ &= \bar{v}_{i|i}(x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i) \\ &= \frac{1}{4\Delta x_1} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^1 (\bar{v}_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + n\Delta x_2, x_3 + m\Delta x_3) - \bar{v}_1(x_1, x_2 + n\Delta x_2, x_3 + m\Delta x_3)) \\ &\quad + \frac{1}{4\Delta x_2} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^1 (\bar{v}_2(x_1 + n\Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + m\Delta x_3) - \bar{v}_2(x_1 + n\Delta x_1, x_2, x_3 + m\Delta x_3)) \\ &\quad + \frac{1}{4\Delta x_3} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^1 (\bar{v}_3(x_1 + n\Delta x_1, x_2 + m\Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \bar{v}_3(x_1 + n\Delta x_1, x_2 + m\Delta x_2, x_3)) \end{aligned}$$

$div(\vec{v})$  ist auch hier zunächst dimensionsbehaftet. Eine Normierung auf die Summe der Beträge der Geschwindigkeitskomponenten an den jeweiligen Eckpunkten der Kontrollvolumen

$$\begin{aligned} N_d = \\ &\frac{1}{4\Delta x_1} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=0}^1 (|\bar{v}_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + n\Delta x_2, x_3 + m\Delta x_3)| + |\bar{v}_1(x_1, x_2 + n\Delta x_2, x_3 + m\Delta x_3)|) \\ &+ \dots + \dots \end{aligned}$$

liefert die dimensionslose Divergenz

$$div(\vec{v})_{norm} = \frac{div(\vec{v})}{N_d} \quad (70)$$

mit dem Wertebereich von -1 bis 1. Dabei entspricht der Wert 1 einer Quelle und -1 einer Senke im Kontrollvolumen.

Die untersuchte Strömung ist als inkompressibel anzusehen. Somit verlangt die Kontinuitätsgleichung für jedes Kontrollvolumen  $div(\vec{v})_{norm} = 0$ . Für eine Ebene aus Meßgebiet 1 ist die normierte Divergenz in Abb. 18 S. 55 gezeigt. Die Zahlenwerte von  $div(\vec{v})_{norm}$  bewegen sich in der Größenordnung von wenigen Prozent. Betragsmäßig

kleinere Werte sind aus den experimentellen Daten nicht zu erwarten, da die mittlere Geschwindigkeit, die abgeleitet wird, nur auf 1% genau bekannt ist <sup>35</sup>.

Auf ähnliche Weise wie  $div(\vec{v})$  wird  $rot(\vec{v})$  in den Mittelpunkten der Randflächen der Kontrollvolumen nach dem Satz von Stokes berechnet. Für die erste Komponente des Rotationsvektors ergibt sich

$$rot(\vec{v})_1 = \frac{1}{dF_1} \int_{\partial F_1} \vec{v} \, d\vec{s} \quad (71)$$

Aus den Werten für die Randflächen mit verschiedenen Normalenrichtungen ergeben sich die unterschiedlichen Komponenten des Rotationsvektors. Eine Darstellung des Rotationsvektors der mittleren Geschwindigkeit findet sich z.B. in Abb. 19 S. 56.

Die Divergenz und die Rotation werden in den Mittelpunkten der Kontrollvolumen bzw. in den Mittelpunkten der Randflächen der Kontrollvolumen berechnet. Ausgehend von den Werten an diesen Koordinaten werden die Divergenz und die Rotation durch Interpolation an den original Meßpunktskoordinaten d.h. an den Randpunkten der Kontrollvolumen bestimmt. Für Koordinaten auf den Randflächen der Meßbereiche können die entsprechenden Größen nur durch eine Extrapolation bestimmt werden. Diese Extrapolation führt bei einigen Ergebnissen an den Randkoordinaten zu starken "Rauhigkeiten".

Aus der Divergenz und Rotation sowie aus Zwischenstufen der aufgeführten Berechnungen werden die partiellen räumlichen Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten d.h. die einzelnen Komponenten des Gradiententensors bestimmt. Diese Methode zur Berechnung partieller Ableitungen wurde auch für die Komponenten des Reynoldstensors verwendet.

Während in dieser Arbeit alle Geschwindigkeiten auf die Anströmgeschwindigkeit normiert sind, werden die partiellen ersten Ableitungen, wenn nicht anders vermerkt, in den Einheiten  $1/mm$  angegeben.

---

<sup>35</sup>vgl. Abschnitt 3.4

## C Gerätespezifische Eigenschaften des Frequenzfehlers

Bei allen Meßmethoden zur Geschwindigkeitsbestimmung führt ein Rauschen in den elektronischen Meßsignalen dazu, daß die Ergebnisse der momentanen Geschwindigkeiten mit einem Fehler behaftet sind. Wird die Geschwindigkeit mit einem LDV-System gemessen, dann resultieren die Ungenauigkeiten in den Geschwindigkeiten aus Fehlern in der Frequenzbestimmung auf.

In Abschnitt 3.3 wird der Einfluß dieser Frequenzfehler auf Meßergebnisse von Komponenten des Reynoldstensors analysiert. Hier wird untersucht, inwieweit die Frequenzfehler von Eigenschaften des jeweiligen LDV-Systems abhängen.

Im Dreidimensionalen wird der Frequenzfehler durch den Frequenzfehler Tensor  $C_{ij}$  beschrieben. Aus den Gleichungen 45 und 46 (Abschnitt 3.3.4) ergibt sich z.B. die zweite Komponente von  $C_{ij}$  als

$$C_{22} = K_{C2}^2 \left( \overline{M}_2 + \frac{\nu_{s2} s_2}{U_\infty} \right)^2 \quad (72)$$

Die mittlere Geschwindigkeit  $\overline{M}_2$  und die Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  sind durch das Experiment vorgegeben. Der Streifenabstand  $s_2$  ist durch die optische Anordnung des LDV-Systems bestimmt.

Die Fehlerkonstante  $K_{C2}^2$  und die Shiftfrequenz  $\nu_{s2}$  sind von der elektronischen Parametern des LDV-Systems abhängig und werden in den folgenden Abschnitten näher betrachtet.

Die Bedeutung der Fehlerkonstanten  $K_{Ci}^2$  für ein LDV-System wird in Abschnitt C.1 untersucht.

In Abschnitt C.2 wird auf den Zusammenhang zwischen einer hohen Shiftfrequenz  $\nu_{si}$  einerseits und dem Frequenzfehler andererseits eingegangen.

In Abschnitt C.3 wird untersucht, wie sich die Frequenzfehler auf die einzelnen Komponenten des Reynoldstensors im kartesischen Koordinatensystem auswirken.

### C.1 Die Frequenzfehlerkonstante

Um Kenntnis über  $K_{Ci}^2$  zu gewinnen und damit die Frequenzfehlerkorrektur für die Meßergebnisse (vgl. Abschnitt 3.3.4) durchführen zu können, sind zwei Fragestellungen wichtig:

1. Wie wird  $K_{Ci}^2$  für ein beliebiges LDV-System bestimmt?
2. Ist  $K_{Ci}^2$  langzeitstabil und für alle Anwendungen eines speziellen LDV-Systems gültig? (Ist  $K_{Ci}^2$  eine Gerätekonstante?)

Die Gründe für die Frequenzfehler in der LDV sind in 3.3.1 detailliert ausgeführt. Im wesentlichen ist die Frequenzfehlerkonstante  $K_{Ci}^2$  vom Signal-/Rauschverhältnis  $S/N$

der Meßsignale abhängig.  $S/N$  verändert sich sowohl mit den optischen als auch mit den elektronischen Parametern des LDV-Systems. Diese Parameter sind für jedes LDV-System unterschiedlich. Selbst für das gleiche LDV-System erhält man bei unterschiedlichen Experimenten verschiedene Werte für  $S/N$ .

Einen analytischen Zusammenhang zwischen  $S/N$  und  $K_{C_i}^2$  gibt es nicht. Daher ist  $K_{C_i}^2$  auch dann nicht theoretisch zu berechnen, wenn  $S/N$  aus dem Experiment bekannt sein sollte. In Abschnitt 3.3.3 wird ein experimentelles Verfahren vorgestellt,  $K_{C_i}^2$  nach zwei unterschiedlichen Methoden (Ansatz A und B) direkt aus Meßergebnissen zu bestimmen. Aus Unterschieden der Ergebnisse beider Methoden kann die Genauigkeit von  $K_{C_i}^2$  abgeschätzt werden.

Im Ablauf eines Experimentes sind zunächst die Frequenzfehlerkonstanten  $K_{C_i}^2$  zu bestimmen. Danach ist es wichtig, alle Parameter, von denen die  $K_{C_i}^2$  abhängen, und damit auch  $K_{C_i}^2$  selbst während des weiteren Experiments konstant zu halten. Für die meisten Parameter (Geometrische Anordnung der Optik, Art der Elektronik, Art der Frequenzbestimmung etc.) ist dies möglich.

Gerade das Signal-/Rauschverhältnis aber kann bei einem Experiment sehr unterschiedlich sein, besonders wenn die Meßpunkte sich wie in dieser Untersuchung in der Nähe einer Modellwand befinden. Dort können Reflexe der Laserstrahlen an der Modellwand in die Empfangsoptik fallen und  $S/N$  stark beeinflussen<sup>36</sup>. Läßt man unter derartigen Meßbedingungen z.B. die Verstärkung und die Filterung der Meßsignale konstant, wird sich  $S/N$  in Abhängigkeit vom Wandabstand von Meßpunkt zu Meßpunkt ändern.

Spohr [39] hat am LDV-System des IfS die Möglichkeiten untersucht, bei LDV-Messungen in der Nähe von einer Modellwand  $S/N$  mit Hilfe der Verstärkung der Meßsignale zu steuern. In einer theoretischen und experimentellen Analyse zeigte Spohr, daß  $S/N$  als Funktion der Verstärkung beschrieben werden kann. Nachdem freie Variablen dieser Funktion durch eine Versuchsreihe bestimmt sind, kann  $S/N$  über die Verstärkung definiert eingestellt werden<sup>37</sup>.

Diese "Regelung" des Signal-/Rauschverhältnisses wurde schon bei den Experimenten dieser Untersuchungen (1988 bis 1989) verwendet. Zunächst erfolgte die Einstellung von  $S/N$  manuell und der Experimentator hatte diese Einstellung nach Erfahrungswerten abzuschätzen. Nachdem Spohr (1991) einen theoretischen Zusammenhang zwischen  $S/N$  und der Verstärkung sowie die Rechnersteuerung der Verstärkung eingeführt hat, werden Meßergebnisse in Wandnähe in Zukunft wesentlich besser zu reproduzieren sein.

Wenn  $S/N$  nach der vorgestellten Methode für verschiedene Meßpunkte auf gleichem Niveau gehalten wird, dann ist  $K_{C_i}^2$  als Konstante anzusehen.

Es sei noch einmal erwähnt, daß es für die Betrachtung der Frequenzfehlerkonstante nicht wichtig ist, die Größe von  $S/N$  exakt zu bestimmen. Vielmehr ist darauf zu achten, daß

---

<sup>36</sup>Das Problem von Wandreflexen bei LDV-Messungen wird in Teil 1 diskutiert.

<sup>37</sup>In seiner Arbeit definiert Spohr das  $S/N$  nicht wie in der Literatur mit Hilfe absoluten Größe des Meßsignale (den Amplituden von Null aus gesehen) sondern durch die Anteile der Meßsignale bzw. des Rauschens, die oberhalb einer Schwelle (i.a. der "Triggerschwelle" der Auswertelektronik) liegen. Durch die Verstärkung wird also nicht das  $S/N$  der Gesamtheit aller Signale verändert, sondern  $S/N$  bezogen auf die Meßsignale, die zur Auswertung herangezogen werden.

die Konstanz von  $S/N$  während des Experiments gewährleistet ist.

## C.2 Shiftfrequenz

Aus Gl. 72 wird deutlich, wie die Komponenten des Frequenzfehlersensors  $C_{ij}$  von den Shiftfrequenzen  $\nu_{si}$  abhängen. Um den Frequenzfehler zu minimieren, ist eine möglichst kleine Shiftfrequenz zu wählen. Gerade bei Messung aller Geschwindigkeitskomponenten hat sich aber gezeigt, daß eine recht große Shiftfrequenz notwendig ist.

In der Literatur (z.B. Durrani [10], Durst [11]) wird die Shiftfrequenz in erster Linie damit begründet, das Vorzeichen der gemessenen Geschwindigkeit zu erkennen. Nach der Theorie ist für die "Vorzeichenerkennung" eine kleine Shiftfrequenz absolut ausreichend. In der Praxis bestimmen aber häufig andere Faktoren die Größe der Shiftfrequenz.

Für die theoretischen Grundlagen der LDV sei auf die oben erwähnte Literatur verwiesen. Hier wird die Bedeutung der Shiftfrequenz durch ein anschauliches (zweidimensionales) Bild erklärt.

Ein Meßsignal entsteht in der LDV dadurch, daß ein Teilchen ein System von Interferenzstreifen kreuzt und dabei Licht streut. Die Lage der Interferenzstreifen im Raum bestimmt die Meßrichtung. Aus dem Abstand der Interferenzstreifen und der Geschwindigkeit des Teilchens ergibt sich die Dopplerfrequenz.

Wird mit einer Shiftfrequenz gearbeitet, dann "laufen" die Interferenzstreifen. Je nach Anordnung laufen sie mit oder gegen die Richtung der Teilchengeschwindigkeit.

Will man eine Geschwindigkeitskomponente messen, die sich kaum von null unterscheidet (z.B. eine Querkomponente der Geschwindigkeit), dann ist das obige anschauliche Bild noch weiter zu vereinfachen. Die Geschwindigkeitskomponente (in Meßrichtung) der Teilchen wird vernachlässigt und während sich das Teilchen eine "gewisse" Zeit im Meßvolumen aufhält, laufen die Interferenzstreifen an dem Teilchen vorbei.

Die "Aufenthaltsdauer" des Teilchens im Meßvolumen ist vom Betrag der Teilchengeschwindigkeit und von der Größe des Meßvolumens abhängig. Für das verwendete LDV-System ergeben sich folgende Zahlenwerte: Das Meßvolumen hat einen Durchmesser von  $0.1\text{mm}$ . Bei einer Geschwindigkeit von  $27\text{m/s}$  beträgt die "Aufenthaltsdauer" eines Teilchens im Meßvolumen  $3.7 \cdot 10^{-6}\text{sec}$ <sup>38</sup>.

Die Anzahl der Interferenzstreifen, die an dem Teilchen "vorbeilaufen" ergibt die Zahl der Perioden, die das Meßsignal enthält. Gietz ist in seiner Untersuchung (Gietz [14] S. 54) detailliert darauf eingegangen, wie die Zahl der Perioden des Meßsignals von Richtung und Betrag des Geschwindigkeitsvektors, von der Meßrichtung und von der Shiftfrequenz abhängt.

Zur Auswertung der Meßsignale in den Signalprozessoren muß nun eine bestimmte Mindestzahl von Perioden in den Signalen enthalten sein. Die verwendeten Signalprozessoren benötigen mindestens vier Perioden, um die Meßfrequenz bestimmen zu können. Für die oben angegebene "Aufenthaltsdauer" der Teilchen im Meßvolumen bedeutet dies,

---

<sup>38</sup>Das Meßvolumen wird als Rund angesehen und man nimmt an, daß ein Teilchen dieses Meßvolumen im Zentrum durchquert.

daß die Shiftfrequenz mind.  $3MHz$  betragen muß, damit vier Perioden in einem Meßsignal erhalten sind und damit die Meßfrequenz bestimmt werden kann.

Die Elektronik gestattet eine Einstellung der Shiftfrequenz in den Stufen 1, 2, und  $5MHz$ . Wegen der aufgezeigten Gründe wurde bei der Messung der Querkomponenten der Geschwindigkeiten eine Shiftfrequenz von  $5MHz$  verwendet.

Mit Rücksicht auf den Frequenzfehler mögen Shiftfrequenzen von einigen  $MHz$  problematisch erscheinen. Sie sind aber meßtechnisch notwendig. Daher wurde auch die Frequenzfehlerkorrektur (Abschnitt 3.3.4) für diese Größenordnung der Shiftfrequenzen bestimmt.

### C.3 Der Frequenzfehler in Abhängigkeit von den Meßrichtungen

Der Frequenzfehler nach Gl. 72 ist im Koordinatensystem der Meßrichtungen definiert. Dieser Abschnitt soll zeigen, welchen Einfluß der Frequenzfehler auf Meßergebnisse des Reynoldstensors im kartesischen Koordinatensystem hat.

In den Programmen zur Auswertung der LDV-Messungen werden die Frequenzfehler an jedem Meßpunkt für jede Koordinatenrichtung im kartesischen System individuell berechnet.

Im Folgenden wird eine mittlere Größe des Frequenzfehlers abgeschätzt. Dazu wird zunächst angenommen, daß der Frequenzfehler für alle Meßrichtungen gleich groß ist, und sein Wert wird auf 1 normiert. Dann ist der Frequenzfehlerntensor im Koordinatensystem der Meßrichtungen durch die Einheitsmatrix zu beschreiben:

$$(\mathbf{C}_{ij})_{normiert} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

Transformiert man den Frequenzfehlerntensor (wie in Gl. 28 S. 27) vom Meßsystem in das kartesische Koordinatensystem, ergibt sich mit der Transformationsmatrix aus Anhang A.1

$$(\mathbf{E}_{ik}^{-1} \mathbf{E}_{jl}^{-1} \mathbf{C}_{ij})_{normiert} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9.57 & -2.64 \\ 0 & -2.64 & 1.30 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Nach Gl. 28 ergeben sich Meßwerte des Reynoldstensors als Summe aus dem Reynoldstensor (bedingt durch turbulente Geschwindigkeitsschwankungen) und dem Frequenzfehlerntensor (bedingt durch Meßungenauigkeiten). Gl. 74 zeigt also direkt die Größen der Meßfehler an, die als additive Terme in den Meßwerten enthalten sind.

In dieser theoretischen Überlegung wird aus den Zahlenwerten in Gl. 74 deutlich, daß die größten Fehler in den Meßwerten von  $\mathbf{R}_{22}$  und  $\mathbf{R}_{23}$  bzw.  $\mathbf{R}_{32}$  auftreten. Zur Abschätzung der Größen der Frequenzfehler in einer realen Messung geht man von den Werten für  $\mathbf{C}_{ij}$  aus, die in Abschnitt 3.3.4 bestimmt wurden. Der Frequenzfehler für

Die Meßrichtungsabweichung ist in der folgenden Größe beschrieben:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 9.4 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 9.4 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (75)$$

Die Transformation in das kartesische Koordinatensystem liefert

$$\mathbf{E}_{ik}^{-1} \mathbf{E}_{jl}^{-1} C_{ij} = \begin{pmatrix} 9.4 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 8.1 \cdot 10^{-2} & -8.7 \cdot 10^{-3} \\ 0 & -8.7 \cdot 10^{-3} & 1.3 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad (76)$$

Diese Zahlenwerte für  $C_{ij}$  sind als mittlere quadratische Schwankungen (Standardabweichungen der Geschwindigkeit) angegeben. Für die Diagonalelemente ist eine anschaulichere Größe zu gewinnen, wenn man die Wurzel aus den Frequenzfehlern berechnet. Sie entspricht einem zusätzlichen "scheinbaren Turbulenzgrad", der in den Meßwerten enthalten ist. (Bei der Umrechnung der Frequenzfehler in einen "scheinbaren Turbulenzgrad" ist zu beachten, daß die Normierungsgröße - die Anströmgeschwindigkeit - im Vorexperiment zur Bestimmung des Frequenzfehlers  $12m/s$  und während der Hauptexperimente  $27m/s$  betrug.)

Der Frequenzfehler bewirkt im kartesischen Koordinatensystem für die  $x_1$ -Richtung einen zusätzlichen "scheinbaren Turbulenzgrad" von 1.36%, für die  $x_2$ -Richtung von 12.6% und für die  $x_3$ -Richtung von 1.9%. In diesen Größen treten die Fehler dann auf, wenn die Shiftfrequenz für die jeweilige Meßrichtung  $5MHz$  beträgt (vgl. Gl. 72). Für die Meßrichtung 1 wurde eine Shiftfrequenz von nur 2 bis  $4MHz$  verwendet. Die Frequenzfehler für Meßrichtung 1 waren daher so gering, daß sie in den meisten Fällen vernachlässigt werden konnten.