

39 | 1957

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Eggers

Über die Ermittlung hydrodynamischer Kräfte aus Impuls- und Energieansätzen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

SONDERDRUCK aus Heft 21, 1957

„Schiffstechnik“

Forschungshefte für Schiffbau und Schiffsmaschinenbau

Schiffahrts-Verlag »Hansa« C. Schroedter & Co. · Hamburg 11 · Stubbenhuk 10

**Über die Ermittlung hydrodynamischer
Kräfte aus Impuls- und Energieansätzen**

K. Eggers, Hamburg

Über die Ermittlung hydrodynamischer Kräfte aus Impuls- und Energieansätzen

K. Eggers, Hamburg

Die Bestimmung der Dämpfungskräfte, welche bei der Schwingung eines eingetauchten Körpers auftreten, erfolgt im allgemeinen durch Integration der während einer Periode an die Flüssigkeit abgegebenen Energie, welche in reibungsfreier, inkompressibler Flüssigkeit ihren Ausdruck findet in der Bildung eines Wellensystems. Führt der Körper zusätzlich eine stationäre Translationsbewegung aus, so resultiert jetzt ein Teil der abgestrahlten Energie aus der Überwindung des Wellenwiderstandes gegen diese Translation, der seinerseits durchaus auch von der Art der Schwingung abhängen kann; erst über eine gleichzeitige Erfassung des Mittelwertes der Impulsabgabe an die Flüssigkeit, zu welchem die Dämpfungskräfte nicht beitragen, wird es möglich, diesen Energieanteil zu separieren.

Die folgenden Betrachtungen werden ausgedehnt auf den Fall, daß dem Strömungsbild ein homogenes Wellenfeld oder eine Anströmung überlagert ist; ebenso wurde der Fall der reinen stationären oder beschleunigten Translation miterfaßt.

Aufgabenstellung:

Ein getauchter oder schwimmender Körper in reibungsfreier, inkompressibler Flüssigkeit sei umgeben von einer mit horizontaler Geschwindigkeit c bewegten Kontrollfläche S , welche entweder geschlossen ist und ganz in der Flüssigkeit verläuft oder als Randlinie die Grenze des Körpers mit der durchstoßenen freien Oberfläche hat. Die Strömung sei auf S rotationsfrei. Zur Ermittlung hydrodynamischer Kräfte auf den Körper wird gefragt nach der Größe der Abgabe von Energie und Impuls durch S an die Flüssigkeit außerhalb S bzw. nach ihrem zeitlichen Mittelwert.

A) Spezieller Fall $c = 0$ (ruhende Kontrollfläche)

Die Energiezunahme N im Raum außerhalb von S summiert sich aus zwei Bestandteilen [1]

1. aus dem Transport energiebehalteter Substanz durch S

$$N_1 = \int_S \left\{ \frac{\rho}{2} (v v) + \rho U (v n) \right\} dS, \quad (1)$$

wobei ρ die Dichte, U die potentielle Energie pro Masseneinheit, v der Vektor der Strömung, n der nach außen gerichtete Vektor der Normalen und schließlich dS das Flächenelement von S bedeutet;

2. aus der von der ausströmenden Substanz gegen den Druck p geleisteten Arbeit.

$$N_2 = \int_S p (v n) dS. \quad (2)$$

Wegen der Voraussetzungen über die Rotation von v läßt sich nun ein Geschwindigkeitspotential Φ so definieren, daß einerseits

$$v_t = -\nabla \Phi_t \quad (3)$$

und weiter

$$\Phi_t = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (v v) + U \quad (4)$$

erfüllt wird und damit

$$N = N_1 + N_2 = \int_S \rho \Phi_t (v n) dS \quad (5)$$

gilt. Der Vektor $\mathfrak{B} = \rho \Phi_t v$ kann somit in Analogie zum Poyntingschen Vektor der Elektrodynamik als „Energietransportvektor“ aufgefaßt werden [2].

Die Impulszunahme \mathfrak{P} im Raum außerhalb S ergibt sich ebenfalls als Summe entsprechender Anteile, nämlich

1. aus dem Transport impulsbehalteter Substanz durch S

$$\mathfrak{P}_1 = \int_S \rho v (v n) dS \quad (6)$$

2. dem Druckintegral über S

$$\mathfrak{P}_2 = \int_S p n dS \quad (7)$$

damit wird unter Benutzung von (4)

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = \int_S \rho \Phi_t n dS - \int_S \rho \left\{ \frac{1}{2} (v v) n - v (v n) \right\} dS - \int_S \rho U n dS. \quad (8)$$

B) Allgemeiner Fall $c \neq 0$

(Translationsbewegung der Kontrollfläche)

In den vorstehenden Ausdrücken ändern sich jetzt die Mengen der S durchströmenden Substanz, es wird

$$N_1 = \int_S (\rho \Phi_t - p) (v - c, n) dS \quad (9)$$

$$\mathfrak{P}_1 = \int_S \rho v (v - c, n) dS. \quad (10)$$

Drückt man jetzt die skalare Größe Φ als Funktion φ der Koordinaten eines zu S festen, d. h. mit c mitbewegten Systems aus, so ist Φ_t durch $\varphi_t - c \nabla \Phi = \varphi_t + (c v)$ zu ersetzen, und wir erhalten unter Benutzung der Identität

$$[c (v n)] = v (c n) - (v c) n$$

$$N = \int_S \rho \varphi_t (v n) dS + \int_S \rho \{ (c v) (v n) - \frac{1}{2} (v v) (c n) \} dS - \int_S \rho U (c n) dS \quad (11)$$

$$\mathcal{P} = \int_S \rho \varphi_t n dS + \int_S \rho \{ v(vn) - \frac{1}{2}(vv)n \} dS + \int_S \rho [c[nv]] dS - \int_S \rho U n dS. \quad (12)$$

Die jeweils letzten Summanden von N und \mathcal{P} sind die Beiträge des hydrostatischen Druckes und werden im folgenden vorerst nicht beachtet.

Für eine Strömung, welche im mit τ bewegten System stationär erscheint, verschwinden die Glieder mit φ_t .

Für eine in diesem System zeitlich periodische Strömung mit

$$v = \operatorname{Re} \{ v_0 e^{i\omega t} \}, \quad \varphi_t = \operatorname{Re} \{ i v \varphi_0 e^{i\omega t} \}$$

ergibt sich für die Periodenmittelwerte von N und \mathcal{P}

$$\tilde{N} = \frac{v}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} N(t) dt = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S \rho i v \varphi_0 (\overline{v_0} n) dS + \int_S \rho (c \overline{v_0}) (\overline{v_0} n) - \frac{1}{2} (\overline{v_0} v_0) (cn) dS \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{v}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \mathcal{P}(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S \rho (v_0 (\overline{v_0} n) - \frac{1}{2} (v_0 \overline{v_0}) n) dS \right\} \quad (14)$$

wobei in üblicher Weise die quer überstrichenen Größen konjugiert komplex zu nehmen sind. Für allgemeinere periodische Strömungen erhält man die entsprechenden Ausdrücke durch direkte Summation der Beiträge der Fourierkomponenten. Man sieht, daß dem Energieterm mit φ_t keine Impulszunahme entspricht, daß er also die Leistung der periodischen Dämpfungskräfte darstellt.

C) Zurückführung der gewonnenen Ausdrücke auf Volumenintegrale im Falle voll eingetauchter Körper

Falls es möglich ist, die Funktionen φ und v im ganzen von S eingeschlossenen Raume R stetig differenzierbar fortzusetzen, so erlaubt uns der Integralsatz von Gauß in verallgemeinerter Form [3], alle Oberflächenintegrale über S auszudrücken als Raumintegrale über R . Man erreicht diese Umformung formal, indem man in den Integranden der Oberflächenintegrale den Vektor n durch den Vektoroperator ∇ und das Oberflächenelement dS durch das Volumenelement $d\tau$ ersetzt und die Operationen von ∇ nach der Produktregel auch auf die vor ∇ stehenden Vektoren ausübt. Voraussetzung ist, daß die Integranden beliebige vektoralgebraische Produkte sind, die den Faktor n einmal enthalten.

So ergibt sich im Falle stationärer Strömung, falls v sich in R fortsetzen läßt

$$\mathcal{P}_{\text{stat}} = \int_R \rho v \operatorname{div} v d\tau - \int_R \rho [v - c, \operatorname{rot} v] d\tau \quad (15)$$

und

$$N_{\text{stat}} = (c \mathcal{P}_{\text{stat}}) = \int_R \rho (c v) \operatorname{div} v d\tau - \int_R \rho (c [v, \operatorname{rot} v]) d\tau \quad (16)$$

Da die Strömung in R außerhalb des Körpers quellenfrei ist, verschwindet $\int \rho c \operatorname{div} v d\tau$, und nach Subtraktion dieser Größe von $\mathcal{P}_{\text{stat}}$ wird ersichtlich, daß $\mathcal{P}_{\text{stat}}$ dann nur von $v - c$, d. h. von der Strömung relativ zur bewegten Kontrollfläche abhängt.

Für den instationären Anteil der Translationsbewegung wählen wir als S die Oberfläche des mit b beschleunigten Körpers; es wird dann $(vn) = (cn)$ und $(v_t n) = (bn)$ und damit, falls sich φ_t und v_t in R fortsetzen lassen,

$$\mathcal{P}_{\text{instat}} = \int_S \rho \varphi_t n dS = \int_S \rho \{ \varphi_t n + \tau (v_t n) - \tau (bn) \} dS = \int_R \rho \tau \operatorname{div} v_t d\tau - b \rho v \quad (17)$$

$$N_{\text{instat}} = \int_S \rho \varphi_t (vn) dS = (c \mathcal{P}_{\text{instat}}) \quad (18)$$

wenn τ ein Ortsvektor und $v = \int d\tau$ das Volumen des eingetauchten Körpers bedeutet.

Die Wahl des Aufpunktes für τ ist dabei beliebig wegen $\int_R \operatorname{div} v d\tau = 0$. Der zweite Summand von \mathcal{P} fällt aus, wenn die Flüssigkeit gegen den stationär bewegten Körper beschleunigt wird, weil dann $(v_t n) = 0$ gilt.

Für den Fall periodischer Schwingungen des Körpers sei S eine Fläche, welche die volle Bahn des Körpers während einer Periode umfaßt. Falls sich dann v_0 in R fortsetzen läßt, wird

$$\tilde{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_R \rho v_0 \operatorname{div} v_0 d\tau \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \int_R \rho [v_0, \operatorname{rot} v_0] d\tau \right\} \quad (19)$$

und

$$N = (c \tilde{\mathcal{P}}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_R \rho i v \varphi_0 \operatorname{div} \overline{v_0} d\tau \right\} \quad (20)$$

falls sich auch φ_0 fortsetzen läßt, da $\operatorname{Re} \left\{ \int_R \rho i v (v_0, \overline{v_0}) d\tau \right\}$ identisch verschwindet.

Die vorstehenden Integrale über kontinuierliche Quellenverteilungen lassen sich durch stetigen Grenzübergang verallgemeinern für den Fall diskreter Quellen und Senken, wobei an die Stelle des Integrals ein Summenzeichen tritt. Ebenfalls durch stetigen Grenzübergang erhält man die entsprechenden Ausdrücke für kontinuierliche Verteilungen von Dipolvektoren m bzw. $m_0 e^{i\omega t}$. Die Leistungen entsprechend den Gleichungen (16), (18), (20) werden jetzt bis auf einen durch die Definition von m gegebenen Faktor

$$N_{\text{stat}} = \int_R \rho (m \nabla) (vc) d\tau - \int_R \rho (c [v, \operatorname{rot} v]) d\tau \quad (21)$$

$$N_{\text{instat}} = \int_R \rho (c m_t) d\tau - (cb) \rho v \quad (22)$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ - \int_R \rho i v (v_0 \overline{m_0}) d\tau + \int_R \rho (m_0 \nabla) (\overline{v_0} c) d\tau \right\} \quad (23)$$

D) Einfluß der durchstoßenen freien Oberfläche bei nicht voll eingetauchten Körpern

D.1 Zurückführung auf Volumen und Flächenintegrale

Falls die Fläche S nicht geschlossen ist, erfordert die Anwendung des Satzes von Gauss die Subtraktion von Integralen des Typs (11)–(14) über die Restoberflächen S^+ von R . — Wenn die freie Wellenoberfläche sich durch Fortsetzung der Strömung in R vervollständigen läßt, so ist es naheliegend, als S die benetzte Oberfläche des Körpers zu wählen und als S^+ das durch den Körper ausgeschnittene Stück der freien Oberfläche. Im stationären Fall wird diese Fläche nicht durchströmt, so daß lediglich über den Druck zu integrieren ist, der einen im wesentlichen vertikalen Beitrag zu \mathcal{P} liefert.

Exakter können die Zusatzintegrale erfaßt werden im Fall eines Potentials Φ , daß der linearisierten Oberflächenbedingung

$$\Phi_{tt} + g \Phi_z = 0 \quad (24)$$

auf einer Ebene $z = 0$ genügt, wenn man unter z die von einer mittleren Wasseroberfläche nach unten gemessene Koordinate versteht. Diese Bedingung entspricht der Annahme kleiner Wellenhöhen, und es wird dann vertretbar, daß als S^+ , die von S aus der Ebene $z = 0$ ausgeschnittene Fläche gewählt wird.

Die Bedingung (24) lautet für ein mit Geschwindigkeit vom Betrag c in horizontaler x -Richtung bewegtes Koordinatensystem allgemeiner

$$\varphi_{tt} - 2c\varphi_{xt} + c^2\varphi_{xx} + g\varphi_z = 0 \quad (25)$$

d. h. insbesondere im stationären Fall

$$c^2\varphi_{xx} + g\varphi_z = 0 \quad (26)$$

und im oszillierenden Fall

$$-v^2\varphi - 2ivc\varphi_x + c^2\varphi_{xx} + g\varphi_z = 0 \quad (27)$$

außerdem wird auf S^+ $(cn) = 0$ und $(vn) = \varphi_z$, was sich dann aus den Gleichungen (25), (26), (27) substituieren läßt.

So erhalten wir zum Beispiel für einen Körper, der zur xz -Ebene symmetrisch ist, im stationären Fall in horizontaler x -Richtung einen Zuwachs von \mathfrak{P} um einen Ausdruck

$$P' = \frac{c^2}{g} \int_{S^+} \varrho \varphi_x \varphi_{xx} dS^+ = \frac{c^2}{g} \int_0^{B/2} \varrho (\varphi_{xv}^2 - \varphi_{xh}^2) dy \quad (28)$$

wenn y die Ordinate und B die Breite quer zur xz -Ebene bedeuten und φ_{xv} bzw. φ_{xh} die Werte von φ_x auf dem Rande von S^+ bei konstantem y im vorderen bzw. hinteren Teil dieser Wasserlinie sind.

Für Tauchschwingungen eines in senkrechter Richtung prismatischen Körpers ergibt sich, daß der Einfluß der durchstoßenen Oberfläche auf die Dämpfungsleistung verschwindet für den Fall $c = 0$, da

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{S^+} \varrho \operatorname{div} \varphi_0 \bar{\varphi}_0 dz \right\} dS^+ = \operatorname{Re} \left\{ \int_{S^+} \varrho v^3 i \varphi_0 \bar{\varphi}_0 dS^+ \right\} = 0 \quad (29)$$

ist.

D. 2 Zurückführung auf Flächen- und Linienintegrale

In einer linearisierten Theorie, in der φ , v und die Wellenhöhe $\zeta = \frac{1}{g} \Phi_t$ von erster Ordnung klein sind, empfiehlt

sich oft eine Aufspaltung der Ausdrücke (11) und (12) in Oberflächenintegrale über den Anteil S_0 von S , der unter der Ebene $z = 0$ liegt und Linienintegrale über die Randkurve L_0 dieser Fläche auf der Ebene $z = 0$, die vom Schwerepotential $U = -gz$ bestimmt sind. Bis auf Größen dritter Ordnung wird

$$N = \int_{S_0} \varrho \varphi_t (vn) dS + \int_{S_0} \varrho \left\{ (cv) (vn) - \frac{1}{2} (vv) (cn) \right\} dS + \int_{S_0} \varrho gz (cn) dS - \oint_{L_0} \varrho g \frac{\zeta^2}{2} (cn) dL_0 \quad (30)$$

$$\mathfrak{P} = \int_{S_0} \varrho \varphi_t n dS + \int_{S_0} \varrho \left\{ v (vn) - \frac{1}{2} (vv) n \right\} dS + \int_{S_0} \varrho gz n dS + \int_{S_0} \varrho [c[nv]] dS +$$

$$\oint_{L_0} \varrho [c[nv]] \zeta dL_0 - \oint_{L_0} \varrho g \frac{\zeta^2}{2} n dL_0. \quad (31)$$

Der letzte Term von (30) kompensiert bei Gültigkeit von (27) die Leistungsabgabe durch S^+ gemäß D. 1; die Größe des abgestrahlten Impulses durch S^+ wird jedoch nur in den Fällen $v = 0$ oder $c = 0$ durch den letzten Term von (31) aufgehoben.

Im Fall, daß L_0 ein Kreis mit Radius R und Azimutwinkel Θ ist, wird $L_0 = R d\Theta$. Die Formeln lassen sich dann insbesondere anwenden, wenn asymptotische Entwicklungen

bekannt sind und die Integrale über S_0 für große R von höherer Ordnung verschwinden. Man erhält dann beispielsweise für die x -Komponenten von \mathfrak{P} bzw. $2\mathfrak{P}$

$$P_x \text{ bzw. } 2\tilde{P}_x = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho g}{2} \zeta \bar{\zeta} \cos \Theta R d\Theta. \quad (32)$$

Dieser Grenzwert läßt sich oft nach dem Prinzip der stationären Phase auswerten; über die Höhe der Wellen am Ort der Erregung brauchen dabei keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht werden.

Der Leistungsfluß durch den Kreiszyylinder unter L_0 kann im Grenzfall für $R \rightarrow \infty$ ebenfalls auf ein Linienintegral über L_0 zurückgeführt werden, falls die Kotchin-Bedingung

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - i \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (33)$$

gilt und φ für $z \rightarrow \infty$ verschwindet.

E) Anwendungsmöglichkeiten

Formeln für die Dämpfungsenergie und die Widerstandsleistung von Schiffen, welche in Fahrt Schwingungen ausführen, wurden bisher von Haskind [5] und Hanaoka [6] für idealisierte Schiffsformen vom Michell'schen Typ und kleine Amplituden angegeben. Es ist aber von Peters und Stoker gezeigt worden [8], daß für derartige Körper im Rahmen der zugrunde gelegten linearisierten Theorie die auftretenden Ausdrücke von verschwindender Größenordnung sind. Die Ergebnisse von Haskind können durch unsere Ableitungen korrigiert, die von Hanaoka, welche durch Oberflächenintegration des Druckes unter gewissen Vernachlässigungen gefunden waren, auf Schwingungen von Körpern endlicher Dicke mit großen Amplituden verallgemeinert werden. Dabei lassen sich insbesondere die Kopplungsglieder der Schwingungen in verschiedenen Freiheitsgraden erfassen; des weiteren kann die Wirkung einer Welle auf das Schiff ohne die Einschränkungen der Kryloff'schen Hypothese studiert werden. Die Schwierigkeit liegt bei vorgegebener Körperform und Bewegung lediglich in der Ermittlung des Strömungsverlaufs bzw. von geeigneten Singularitäten und Wirbeln, welche diesen erzeugen. Die Voraussetzung kleiner Wellenhöhen ist im Prinzip nicht erforderlich.

Die letzte Aufgabe wird sich aber im allgemeinen durch finite Annäherung befriedigend lösen lassen, indem die Bedingungen für die Strömung auf der Oberfläche des Körpers nur auf einigen Punkten erfüllt oder [7] optimal angenähert werden. Auch darf erwartet werden, daß qualitativ richtige Resultate über die Abhängigkeit der auftretenden Größen von Parametern der Fahrt und Frequenz bereits durch die Untersuchung der Umströmung charakteristischer Singularitäten, etwa von Quellen und Senken pulsierender Intensität, gefunden werden können.

Schrifttum

- [1] Müller: Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928.
- [2] Heinrich, G.: Energietransport in strömenden Medien, ZAMM 1952.
- [3] Diesselhorst: Magnetische Felder und Kräfte, Leipzig 1939.
- [4] Cummins: On the Forces and Moments Acting on a Body moving in an Arbitrary Potential Stream, TMB Report 780, 1953, Washington.
- [5] Haskind: ZAHl-Bericht No. 603, Moskau 1946.
- [6] Inui: Japanese Developments on the Theory of Wave-Making and Wave Resistance, Skipsmodelltankens meddelelse 34/1954, Drontheim.
- [7] Grim: STG-Jahrbuch 1953.
- [8] Peters and Stoker: Publication of Office of Naval Research, Washington.