INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Über den Reibungswiderstand der Platte

K. Wieghardt

April 1973

Bericht Nr. 291

Über den Reibunswiderstand an der Platte.

K. Wieghardt

Herrn Professor Dr. J. W e i s s i n g e r zum 6o. Geburtstag gewidmet, - auch wenn ihn verworrene Gedanken über Messungen in turbulenten Strömungen weniger interessieren dürften als klare Ideen zu mathematisierbaren Strömungsproblemen.

Übersicht: Neue Messungen /1/ bei weit höheren Reynoldszahlen als sonst bisher bestätigen die vierzig Jahre alte Reibungslinie von Schoenherr auf 1%. Dieses freudige Ereignis wird zum Anlass genommen, mit Hilfe einer rechnerischen Formulierung des ganzen Geschwindigkeitsprofils Fehlerabschätzungen für die Widerstandslinie durchzuführen.

Gliederung:

Zwei Tabellen, vier Bilder.

Institut für Schiffbau
der Universität Hamburg

April 1973

1. Wand- und Außengesetz für die Geschwindigkeitsverteilung.

Für die mittlere Geschwindigkeit u in der turbulenten Reibungsschicht längs einer glatten Platte scheinen folgende Ähnlichkeitsgesetze gesichert zu sein. In der sehr dünnen Unterschicht direkt an der Wand gilt definitionsgemäß

$$u/u_\tau = y\, u_\tau/\nu \quad \text{mit } u_\tau \equiv \sqrt{\tau_0/\varrho} \qquad \text{für } y\, u_\tau/\nu < \text{etwa } 5. \tag{1}$$

(y = Wandabstand, ν = kinematische Zähigkeit, τ_0 = Wandschubspannung, ϱ = Dichte)

Für größere wandnahe Abstände gibt das logarithmische Gesetz eine gute Näherung:

$$u/u_\tau = \frac{1}{\kappa} \ln y u_\tau/\nu + C \qquad \text{für } y u_\tau/\nu > \text{etwa } 50. \tag{2}$$

Die Zahl C hängt von der Rauhigkeit der Platte ab, sie soll aber hier für hydraulisch glatte Platten als Konstante angesehen werden. Für noch größere Wandabstände weicht das Geschwindigkeitsprofil vom logarithmischen Gesetz ab:

$$u/u_\tau = \frac{1}{\kappa} \ln y u_\tau/\nu + C + \Delta u/u_\tau . \tag{3}$$

Schließlich wird am Rand der Grenzschicht für $y = \delta(x)$ (x = Rücklage von der Plattenvorderkante) die konstante Außengeschwindigkeit erreicht: u = U , so daß dort

$$U/u_\tau \equiv \omega = \frac{1}{\kappa} \ln \delta\, u_\tau/\nu + C + \alpha , \text{ mit } \alpha \equiv (\Delta u/u_\tau)_{y=\delta} . \tag{4}$$

Zieht man Gl.(3) von Gl.(4) ab, so wird

$$\frac{U - u}{u_\tau} = \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln y/\delta - \Delta u/u_\tau . \tag{5a}$$

Die Aussage des Außengesetzes besteht nun darin, daß dieser Geschwindigkeitsverlust $(U-u)/u_\tau$, also auch $\Delta u/u_\tau$, eine Funktion allein von $\eta = y/\delta$ ist:

$$\frac{U - u}{u_\tau} = F(\eta) = \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \eta - \Delta u/u_\tau . \tag{5b}$$

Für nicht zu kleine Reynoldszahlen $R_n = Ux/\nu$ findet man experimentell, daß die wandnahe Ähnlichkeit $u/u_\tau = f(yu_\tau/\nu)$ und die wandferne Beziehung $(U-u)/u_\tau = F(\eta)$ in zwei Bereichen von Wandabständen gelten, die sich teilweise überlappen. Daraus folgt nach C.Millikan /2/, daß zumindest im gemeinsamen Gültigkeitsbereich das logarithmische Gesetz (2) gilt. Wichtige Aussagen über die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta u/u_\tau$, insbesondere auch für Grenzschichten mit Druckanstieg, stammen von D.Coles /3,4/. Unsere Bezeichnung weicht von seiner ab, insofern als er mit $\Delta u/u_\tau$ die "strength of the wake component" bezeichnet, eine Zahl, die um etwa o.2 größer ist als unser α nach Gl.(4).

Sieht man die Gültigkeit der obigen Ähnlichkeitsbeziehungen als erwiesen an, so kann man aus Messungen von Geschwindigkeitsprofilen zunächst die Funktion $\Delta u/u_\tau$ sowie die Konstanten α, κ und C bestimmen, und dann den Plattenwiderstand aus dem Impulssatz berechnen, der hier besonders einfach ist:

$$c_f \equiv \frac{\tau_o}{\varrho U^2/2} = \frac{2}{\omega^2} = 2\,\frac{d\delta_2}{dx} = 2\,\frac{d\;U\delta_2/\nu}{d\;Ux/\nu}\;, \tag{6}$$

wobei δ_2 die Impulsverlustdicke ist.

Für die Berechnung der Grenzschichtdicken werden folgende Integrale benötigt(mit $F(\eta)$ nach Gl.(5b)):

$$C_1 = \int_o^1 F(\eta)\,d\eta\;,\quad C_2 = \int_o^1 F(\eta)^2\,d\eta\;,\quad C_3 = \int_o^1 F(\eta)^3\,d\eta. \tag{7}$$

Dann wird mit $\omega = U/u_\tau$

$$\delta_1/\delta = \int_o^1 (1-\tfrac{u}{U})\,d\eta = \frac{C_1}{\omega} \tag{8}$$

$$\delta_2/\delta = \int_o^1 \tfrac{u}{U}(1-\tfrac{u}{U})\,d\eta = \frac{C_1}{\omega} - \frac{C_2}{\omega^2} \tag{9}$$

$$\delta_3/\delta = \int_o^1 \tfrac{u}{U}\left[1-(u/U)^2\right]d\eta = \frac{2\,C_1}{\omega} - \frac{3\,C_2}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega^3}\;, \tag{1o}$$

$$H_{12} \equiv \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1}{1 - C_2/(C_1\omega)} \tag{11}$$

$$H_{32} \equiv \frac{\delta_3}{\delta_2} = H_{12}\left(2 - \frac{3}{\omega}\frac{C_2}{C_1} + \frac{1}{\omega^2}\frac{C_3}{C_1}\right). \tag{12}$$

Aus Gl.(4) folgt weiter

$$U\delta/\nu = \frac{\delta}{x}R_n = \lambda\,\omega\,e^{\kappa\omega}\;,\quad \text{mit } R_n = Ux/\nu \tag{13}$$

und

$$\lambda = \exp - \kappa(\alpha + C). \tag{14}$$

Mit Gl.(9) und (11) wird die örtliche Reynoldszahl der Schicht

$$U\delta_2/\nu = \frac{C_1\lambda}{H_{12}}\,e^{\kappa\omega}\;. \tag{15}$$

Für große Reynoldszahlen kann man näherungsweise annehmen, die Grenzschicht sei schon von der Plattenvorderkante an turbulent. Dann gibt die Integration von Gl.(6) zusammen mit Gl.(15):

$$R_n = Ux/\nu = \int \omega^2 \frac{d}{d\omega} (U\delta_2/\nu)\, d\omega$$

$$= \frac{\lambda C_1}{\kappa^2} \left[(\kappa\omega - \frac{\kappa C_2}{C_1})(\kappa\omega - 2) + 2 \right] e^{\kappa\omega} - (R_n)_o . \qquad (16)$$

Nach Gl.(9) würde δ_2 dort verschwinden, wo $\omega = C_2/C_1$, wenn die Reibungsschicht wirklich von Anfang an turbulent wäre. Soll dann dort auch $R_n = 0$ gelten, so müsste die Integrationskonstante lauten

$$(R_n)_o = \frac{2\lambda C_1}{\kappa^2} e^{\kappa C_2/C_1} . \qquad (17)$$

Sie ist von der Größenordnung 6o und somit vernachlässigbar.

Schließlich folgt für den Beiwert des Gesamtwiderstands aus den Gl.(15) und (17):

$$C_F = 2\,\delta_2/x = 2\,(U\delta_2/\nu)/R_n . \qquad (18)$$

Damit sind nun alle interessierenden Größen als Funktionen von $\omega = \sqrt{2/C_f}$ gegeben.

Wenn man bei den Integrationen für $C_{1,2,3}$ nach Gl.(7) annimmt, daß das logarithmische Gesetz nach Gl.(5b) bis zur Wand hin gilt, obwohl dort $\ln\eta \to -\infty$, so macht man einen Fehler, der vor allem bei kleineren Reynoldszahlen korrigiert werden muß. Messungen in diesem wandnahen Übergangsgebiet von Gl.(1) zu Gl.(2) lassen sich nach einem witzigen Vorschlag von D.B.Spalding /5/ darstellen durch die folgende Umkehrfunktion:

$$yu_\tau/\nu = u/u_\tau + f(\xi)\, e^{-\kappa C} , \text{ mit } \xi \equiv \kappa\, u/u_\tau , \qquad (19)$$

und $$f(\xi) = e^{\xi} - 1 - \xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{24}\xi^4 . \qquad (2o)$$

Für kleine $\xi \to 0$ wird dann nämlich mit $f \to 0$ Gl.(1) reproduziert, für große ξ dagegen mit $f \to e^{\xi}$ das logarithmische Gesetz (2) (vgl.Nebenskizze in Bild 1). Allerdings wird für $\xi \to \infty$ nur die prozentuale Abweichung von Gl.(2) klein, da zwar $f(\xi)/e^{\xi} \to 1$; aber $|f(\xi) - e^{\xi}|$ selbst wächst an wie $\xi^4/24$.

Für jedes Wertepaar von κ und C gibt es jedoch ein kleinstes ξ_E bei dem genau gilt:

$$u/u_\tau = \frac{1}{\kappa} \ln y_E u_\tau/\nu \;\; + C = \frac{1}{\kappa} \xi_E \;\; , \text{ oder } y_E u_\tau/\nu \;=\; e^{\xi_E - \kappa C}. \qquad (21)$$

Dies ist der Fall für ξ_E , das die folgende Gleichung erfüllt:

$$1 + \xi_E + \frac{1}{2}\xi_E^2 + \frac{1}{6}\xi_E^3 + \frac{1}{24}\xi_E^4 = \frac{e^{\kappa C}}{\kappa}\xi_E. \qquad (22)$$

Man findet für $0.38 \leq \kappa \leq 0.4$ und $4 \leq C \leq 6.2$ für ξ_E Werte zwischen 4.8 und 7.3 und für $\log y_E u_\tau/\nu$ Werte zwischen 1.4 und 2.1 . Im wandnahen Bereich $0 < y < y_E$ mit kleinen Geschwindigkeiten $0 < \xi < \xi_E$ ist die "wake-Funktion" $\Delta u/u_\tau$ von Gl.(5b) entweder gleich null oder zumindest vernachlässigbar. Wenn die Integrale $C_{1,2,3}$ nach Gl.(7) mit $F(\eta)$ nach Gl.(5b) berechnet sind, so müssen noch folgende Korrekturen dazu addiert werden:

$$\Delta C_{1,2,3} = \int_0^{\eta_E} \left\{ \left(\frac{U-u}{u_\tau}\right)_{Sp}^{1,2,3} - \left(\frac{U-u}{u_\tau}\right)_{\log}^{1,2,3} \right\} d\eta \;\; , \qquad (23)$$

mit $\eta = y/\delta$ und $\eta_E = e^{\xi_E - \kappa\omega}$ nach Gl.(4); ferner bedeutet

$$\left(\frac{U-u}{u_\tau}\right)_{Sp} = \omega - \frac{1}{\kappa}\xi \quad \text{und} \quad \left(\frac{U-u}{u_\tau}\right)_{\log} = \alpha - \frac{1}{\kappa}\ln\eta \;\; . \qquad (24)$$

Nach einigen Umrechnungen erhält man hierfür

$$\Delta C_1 = \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa\omega} \cdot f_1 \quad , \quad \Delta C_2 = \frac{1}{\kappa^2} e^{-\kappa\omega} \cdot \left[2\kappa\omega f_1 - f_2 \right]$$

$$\Delta C_3 = \frac{1}{\kappa^3} e^{-\kappa\omega} \cdot \left[3(\kappa\omega)^2 f_1 - 3\kappa\omega f_2 + f_3 \right] , \text{ mit}$$

$$f_1 = -1 - \frac{1}{2}\xi_E + \frac{1}{12}\xi_E^3 + \frac{1}{24}\xi_E^4 + \frac{1}{80}\xi_E^5 \qquad (25)$$

$$f_2 = 2 - \frac{1}{3}\xi_E^2 + \frac{1}{12}\xi_E^4 + \frac{2}{45}\xi_E^5 + \frac{1}{72}\xi_E^6$$

$$f_3 = -6 - \frac{1}{4}\xi_E^3 + \frac{3}{40}\xi_E^5 + \frac{1}{24}\xi_E^6 + \frac{3}{224}\xi_E^7 .$$

2. L.Landweber's Analyse und F.R.Hama's Vorschlag.

Mit Hilfe des Wand- und Außengesetzes bestimmten bereits K.E.Schoenherr /6/ und F.Schultz-Grunow /7/ den Plattenwiderstand. L.Landweber /8/ analysierte 1952 genauer alle damals bekannten Messungen zur Plattenströmung. Für das Wandgesetz nimmt er an

$$u/u_\tau = 6 \log yu_\tau/\nu + 4 \text{ , für } yu_\tau/\nu > 30 \text{ ,} \tag{26}$$

d.h. $\kappa = \ln 10 / 6 = 0.383_8$ und $C = 4$. (27)

Dementsprechend wird für den Geschwindigkeitsverlust in Wandnähe

$$(U - u)/u_\tau = 2 - 6 \log y/\delta \qquad \text{für } y/\delta < 0.16 \text{ ,} \tag{28}$$

d.h. $\alpha = 2$.

Für den äußeren Teil des Profils mit nicht-verschwindendem $\Delta u/u_\tau$ zeichnet Landweber eine mittlere Kurve durch die Messpunkte zur numerischen Integration von C_1 und C_2 . Für $C_F(R_n)$ findet er so eine Kurve, die nur bis zu ± 0.6 % von der Schoenherr-Linie /6/ abweicht, für die bekanntlich gilt:

$$\sqrt{C_{FS}} = 0.242/\log(R_n \cdot C_{FS}) \qquad \text{(vgl.Tabelle II,S.15)} \tag{29}$$

und $C_{fS} = 2/\omega^2 = C_{FS}/(1 + c\sqrt{C_{FS}})$, mit $c = \dfrac{2}{0.242 \ln 10} = 3.59$.

In der Diskussion des Vortrags von Landweber /8/ schlägt F.R.Hama vor, den äußeren Teil des Profils anzunähern durch die einfache Funktion

$$(U - u)/u_\tau = 9.6\ (1 - \eta)^2 \qquad \text{für } \eta_1 < \eta < 1 . \tag{30}$$

Wir wollen dieser Anregung folgen, um das ganze Profil rechnerisch darzustellen und später abzuschätzen, welchen Einfluß Fehler in der Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils auf die Widerstandskurve haben können. Das Geschwindigkeitsprofil werde also dargestellt durch

$$(U-u)/u_\tau = F_1 = \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \eta \qquad \text{für } \eta \leq \eta_1 \tag{31}$$

$$(U-u)/u_\tau = F_2 = G \cdot (1 - \eta)^m \qquad \text{für } \eta_1 \leq \eta \leq 1 . \tag{32}$$

Wir verlangen noch, daß beide Kurvenäste im Schnittpunkt mit gleicher Tangente ineinander übergehen sollen. Wenn

α und κ gegeben sind, bestimmen folgende Gleichungen η_1 und G :

$$\alpha\kappa = \ln\eta_1 + (1-\eta_1)/m\eta_1 \tag{33}$$

$$G\kappa = \frac{1}{m\eta_1(1-\eta_1)^{m-1}} \tag{34}$$

Ein stetiger Übergang bei $\eta = 1$ in die Funktion $F_3 = 0$ für $\eta \geq 1$ wird hier automatisch erzielt. In der Auftragung $\Delta u/u_\tau$ über η wie in Bild 1 entspricht dem, daß die Tangente in $\eta = 1$ die Neigung $-1/\kappa$ haben soll.

Für C_1 und C_2 ergibt sich hier:

$$C_1 = \int_0^{\eta_1} F_1\, d\eta + \int_{\eta_1}^{1} F_2\, d\eta = \frac{1}{\kappa}\,\frac{1+(m-1)\eta_1+m^2\eta_1^2}{m(m+1)\eta_1} \tag{35}$$

$$C_2 = \int_0^{\eta_1} F_1^2 d\eta + \int_{\eta_1}^{1} F_2^2 d\eta = \frac{1}{\kappa^2}\,\frac{1+2(m-1)\eta_1+(4m^2-2m+1)\eta_1^2+2m^2(2m-1)\eta_1^3}{m^2(2m+1)\eta_1^2}. \tag{36}$$

Der gemessene Verlauf von $\Delta u/u_\tau$ über $\eta = y/\delta$ nach Winter und Gaudet /1/ bzw. nach Landweber /8/ wird durch Gl.(32) ausreichend genau angenähert, wenn man m = 1.8 setzt, wie aus Bild 1 zu ersehen ist.(In einer Auftragung $(U-u)/u_\tau$ würden diese Abweichungen natürlich noch kleiner.) Für diese gestrichelten Kurven gilt:

$$\begin{aligned} \Delta u/u_\tau &= \alpha - \frac{1}{\kappa}\ln\eta - G\cdot(1-\eta)^{1.8} && \text{für} \quad \eta_1 \leq \eta \leq 1 \\ &= 0 && \text{für} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_1 . \end{aligned} \tag{37}$$

3. K.G.Winter und L.Gaudet's Messungen bei hohen Reynoldszahlen.

K.G.Winter und L.Gaudet /1/ geben folgende Zusammenfassung: "Es werden Messungen der turbulenten Reibungsschicht an der Seitenwand des RAE 8 ftx 8 ft-Windkanals (2.4m x 2.4m) beschrieben. Gemessen wurden die Wandschubspannung mit einer großen Waage mittels Dehnungsmeßstreifen sowie Geschwindigkeits- und Temperaturprofile. Die größten Reynoldszahlen - umgerechnet auf eine Plattenströmung - reichen von etwa 2oo Millionen bei M = o.2 bis 6o Millionen bei M = 2.8 . Die Versuchsauswertung zeigt, daß die für inkompressible Strömung allgemein anerkannten Beschreibungen der turbulenten Grenzschicht auf Grund des Außengesetzes auch für kompressible Strömungen erhalten bleiben, wenn die Grenzschichtparameter in kinematischer Weise ausgedrückt werden. Das führt zu einer einfachen Methode, die Reibung und die Geschwindigkeitsprofile bei konstantem Druck und ohne Wärmeübergang zu berechnen."

Auch wenn wir uns nur für die Messungen bei $M \approx 0.2$ interessieren, bei denen Kompressibilitätseffekte fast vernachlässigbar sind, verdienen sie Beachtung, da hier die örtliche Reynoldszahl von $U\delta_2/\nu = 2\cdot 10^4$ bis $2\cdot 10^5$ um eine Größenordnung höher ist als bei den sonst üblichen Versuchen. Die Versuchseinrichtung und der Vergleich der Ergebnisse mit denen anderer Verfasser ist im Bericht beschrieben. Allerdings wird nicht erwähnt, daß die gefundene Widerstandslinie $C_F(R_n)$ praktisch wieder mit der von Schoenherr zusammenfällt, wie schon bei Landweber /8/. Ähnlich wie in der Schiffbauforschung war das Ziel der Untersuchung, die Reibungsverluste großer Flugzeuge aus Modellmessungen genauer abschätzen zu können als bisher. Im Folgenden sollen Einzelheiten der Auswertung näher untersucht werden.

Die Abweichung des Geschwindigkeitsprofils vom logarithmischen Wandgesetz wird von Winter und Gaudet durch folgende Funktion beschrieben:

$$\begin{aligned} \Delta u/u_\tau &= 0 \quad \text{für} \quad \eta < \eta_1 \\ &= \beta\left[1 - \cos\frac{\pi}{\gamma}(\eta - \eta_1)\right] \quad \text{für} \quad \eta_1 \leq \eta \leq 1, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\text{so daß } \alpha = (\Delta u/u_\tau)_{y=\delta} = \beta\left[1 - \cos\frac{\pi}{\gamma}(1 - \eta_1)\right]. \tag{39}$$

(Auch Intermittenz wurde nur für $\eta > \eta_1$ gemessen.)

Wenn wir verlangen, daß das Profil am Grenzschichtrand sich stetig an die konstante Außengeschwindigkeit anschließen soll: $\partial u/\partial\eta = 0$ für $\eta = 1$, so ergibt sich eine Verknüpfung der Konstanten β, γ, η_1 mit der des Wandgesetzes κ:

$$\kappa = -\frac{\gamma}{\pi\beta\sin\frac{\pi}{\gamma}(1-\eta_1)} \, . \tag{40}$$

Diese Bedingung wird weder bei Landweber noch bei D.E.Coles erfüllt, dessen Funktion in der Näherung nach J.O.Hinze /9/

mit $\varkappa = 0.41$ und $p = 0.55$ für $R_n > 3 \cdot 10^6$ /vgl.4/ lautet:

$$\Delta u/u_\tau = \frac{p}{\varkappa}(1 - \cos \pi\eta) \; . \tag{41}$$

Physikalisch handelt es sich bei dieser Bedingung auch nur um eine Schönheitskorrektur, da für den Impuls- und Energieverlust in der Schicht nur das wandnahe Gebiet wesentlich ist. Wenn man aber zur Darstellung von $\Delta u/u_\tau$ schon drei Zahlenkonstante ansetzt, kann diese Forderung leicht mit erfüllt werden.

Die Integrale $C_{1,2}$ sind in /1/ anscheinend numerisch gefunden worden für die dort angegebenen Werte für β, γ, η_1. Da wir den Einfluß von Änderungen dieser Konstanten auf $C_F(R_n)$ studieren wollen, schreiben wir mit den Abkürzungen:

$$A = -\sin\frac{\pi}{\gamma}(1-\eta_1) \quad \text{und} \quad B = -\cos\frac{\pi}{\gamma}(1-\eta_1) \tag{42}$$

die Integrale:

$$C_1 = \frac{\gamma}{\pi\varkappa A}\left[\left(\frac{\pi}{\gamma} - \frac{\gamma}{\pi}\right) A + B + \eta_1\right] \tag{43}$$

$$C_2 = \frac{2}{\varkappa^2}\left\{1 + \frac{\gamma}{\pi A}\left[B - I - \eta_1(\ln\eta_1 - 1)\right] + \frac{\gamma^2}{2\pi^2 A^2}\left[\frac{1+\eta_1}{2} + 2\eta_1 B + B^2 - \frac{3\gamma}{2\pi} AB\right]\right\} \tag{44}$$

$$\text{mit } I = \int_{\eta_1}^{1} \ln\eta \cdot \cos\frac{\pi}{\gamma}(\eta - \eta_1)\, d\eta = -\frac{\gamma}{\pi}\int_{\eta_1}^{1} \frac{1}{\eta}\sin\frac{\pi}{\gamma}(\eta - \eta_1)\, d\eta \, . \tag{45}$$

Die am besten passenden Zahlenkonstanten finden Winter und Gaudet folgendermaßen. Für die 14 gemessenen Profile bei $M \doteq 0.2$ tragen sie $(H_{12}-1)/H_{12}$ über $10^3/\omega$ in ihrer Fig.13 auf. Nach Gl.(11) wird

$$(H_{12}-1)/H_{12} = \frac{1}{\omega}\, C_2/C_1 \quad , \tag{46}$$

so daß für diese Auftragung eine Gerade zu erwarten ist, die die kinematischen Geschwindigkeitsmessungen mit denen der Widerstandswaage ($\omega = \sqrt{2/C_f} = U/u_\tau$) verknüpft. Die Ausgleichsgerade gibt hier $C_2/C_1 = 6.55$.

Fig.12 in /1/ zeigt eine ähnliche Auftragung für $\ln U\delta_1/\nu$ über $H_{12}/(H_{12}-1)$. Hierfür folgt aus den Gl.(9) und (13), wenn ω eliminiert wird mittels Gl.(11):

$$\ln U\delta_1/\nu = \ln C_1 e^{-\varkappa(\alpha \pm C)} + \varkappa \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{H_{12}}{H_{12}-1} \quad . \tag{47}$$

Die Ausgleichsgerade gibt hier

$$C_1 e^{-\varkappa(\alpha + C)} = 0.389_4 \quad \text{und} \quad \varkappa C_2/C_1 = 2.49_2 \; . \tag{48}$$

Zusammen mit $C_2/C_1 = 6.55$ aus Fig.13 wird somit $\varkappa = 0.380_5$. Die Geschwindigkeitsprofile werden am besten dargestellt durch folgende Zahlenkonstanten:

$$C = 4.05 \; , \; \beta = 0.89 \; , \; \gamma = 0.707 \; , \; \eta_1 = 0.483 - \frac{\gamma}{2} = 0.129_5 \; .$$

Wenn wir jedoch diese Zahlen in unsere analytischen Ausdrücke (42) bis (44) einsetzen, erhalten wir

$$A = 0.664_3 \; , \; B = 0.747_5 \; , \; I = -0.224_2, \; C_1 = 3.276 \; , \; C_2 = 21.12$$

und $C_2/C_1 = 6.44_7$ statt 6.55 . Im Messbereich war ω zwischen 30 und 35; bei $\omega = 30$ sind die Korrekturen nach Gl.(25) noch nicht vernachlässigbar: $C_1 = 3.276 + 0.002$ und $C_2 = 21.12 + 0.08$, so daß hier $C_2/C_1 = 6.46_7$ genauer ist. Erfüllen wir andrerseits die Beziehung $C_2/C_1 = 6.55$, so finden wir einen kleineren Wert für $\varkappa = 0.375$.

Es entsteht also die Frage, wie genau H_{12} überhaupt gemessen werden kann. In der Mitte des Meßbereichs von /1/ bei R_n um 10^8 ist $H_{12} \doteq 1.25$. Ein kleiner Messfehler in $H_{12} = 1.25\cdot(1+\varepsilon)$ wird somit in der aufgetragenen Größe $(H_{12}-1)/H_{12} = 0.2\cdot(1+4\varepsilon)$ auf das Vierfache vergrößert! Bei allem Respekt vor Meßergebnissen kann wohl ein Meßfehler etwa von ± 0.5 % in H_{12} nicht ausgeschlossen werden; dann kann man aber aus Fig.13 in /1/ nur folgern $C_2/C_1 = 6.55 \pm 2$ % $= 6.42$ bis 6.68 . Auch die Streuung der Meßpunkte in Fig.12 mit $H_{12}/(H_{12}-1)$ als Abszisse ließe sich so erklären.

Als Beispiel sei angenommen, in der Nähe der Wand werde die Geschwindigkeit um weniger als 1% der Außengeschwindigkeit zu groß gemessen, etwa so, daß

$$u/U = \eta^{1/7} + 0.01\cdot(\eta - 1)^4 \tag{49}$$

statt des "wahren" 1/7-Profils ausgewertet würde. Es ergäbe sich:

$$H_{12} = 0.123/0.096_3 = 1.277 \quad \text{statt} \quad 0.125/0.097_2 = 1.286; \quad (5$$

d.h. es würde H_{12} um 0.7 % zu klein bestimmt.

In entsprechender Weise kann man Variationen der Zahlenkonstanten für das Profil als möglich annehmen. Die Tabelle I zeigt drei Gruppen von Konstanten, die die experimentellen Ergebnisse in engen Fehlergrenzen darstellen. Dabei ist die Bedingung (4o) mitberücksichtigt. Die Konstante C im Wandgesetz wurde zusammen mit κ so variiert, daß sich für $yu_\tau/\nu = 10^3$ stets der gleiche Wert für $u/u_\tau = \frac{1}{\kappa} \ln yu_\tau/\nu + C = 22.2$ wie in /1/ ergibt. Fall b) ist am nächsten den Angaben in /1/; Fall c) gibt ein etwas größeres und damit orthodoxeres κ . Die zugehörigen $\Delta u/u_\tau$ Verläufe über η sind in Bild 1 angegeben.

4. Gesamtwiderstand der Platte und Fehlerabschätzungen.

Für die Anwendungen interessiert der Beiwert des Plattenwiderstands $C_F(R_n)$ natürlich weit mehr als Einzelheiten der Geschwindigkeitsverteilung. Es ist daher befriedigend, daß auch die neuen Messungen von Winter und Gaudet bei sehr hohen Reynoldszahlen - ebenso wie die Analyse von Landweber - wieder $C_F(R_n)$ -Werte ergeben, die um weniger als ± 1 % von der Schoenherr-Linie abweichen für $R_n > 6 \cdot 10^5$. Dies zeigt Bild 2, in dem die prozentualen Abweichungen gegen die Schoenherr-Linie $(C_F - C_{FS})/C_{FS}$ über log R_n aufgetragen sind, da in der gewohnten Auftragung: C_F über log R_n diese Differenzen nur schwer zu erkennen wären. Die gestrichelten Kurven zeigen, daß bei der Annäherung von $\Delta u/u_\tau$ durch die einfache Näherung Gl.(32) nach Hama nur ein Fehler von höchstens o.5 % in C_F gemacht wird.

Nimmt man an, die Form des äußeren Teils des Geschwindigkeitsprofils sei durch die Näherung nach Hama ausreichend genau beschrieben, so hängt das ganze Profil nur noch von drei Zahlenkonstanten κ , C and α ab, die auch die Widerstandskurve ganz bestimmen. Die Wandnähe ist durch κ und C, sowie durch die Spalding-Funktion festgelegt (Gl.(19) bis (25)), der Außenteil durch α und durch die Zahlen η_1 und G, die nur von α und κ abhängen(vgl.Gl.(31) bis (37)).

Für dieses Formelsystem wurde nun $C_F(R_n)$ bzw. die prozentualen Abweichungen von der Schoenherr-Linie berechnet für die Wertepaare C = 4 oder 5 und α = 1.5 oder 2.5 bei κ = o.38 (ausgezogene Linien) und κ = o.41 (gestrichelte Linien), wie Bild 3 zeigt. Die Punkte, die jeweils für bestimmte Werte von

Wenn die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ unabhängig, etwa durch Wägung, bestimmt wurde mit einem Fehler ε , so daß statt des wahren Werts u_τ ein u'_τ in die Auswertung eingeht mit $u_\tau = (1+\varepsilon)\, u'_\tau$, so findet man statt der "wahren" Konstanten κ , C und α jetzt

$$\kappa' = (1-\varepsilon)\kappa \quad , \quad C' = (1+\varepsilon)\, C + \varepsilon/\kappa' \quad \text{und} \quad \alpha' = (1+\varepsilon)\alpha \, .$$

Ist z.B. $\kappa = 0.38$, $C = 4$ und $\alpha = 1.5$ und zeigt die Waage für u_τ um 1 % zu klein an ($\varepsilon = +0.01$), so würde man mit den Konstanten κ', C', α' den Gesamtwiderstand C_F bei gleichen Reynoldszahlen um 1.8 % zu niedrig berechnen.

Wenn andrerseits die Geschwindigkeit u überall um 1 % zu groß gemessen wäre ($\varepsilon = -0.01$ in $u = (1+\varepsilon)u'$ und $\kappa' = (1+\varepsilon)\kappa$, $C' = (1-\varepsilon)\, C$, $\alpha' = (1-\varepsilon)\alpha$), würde die Kurve $C_F(R_n)$ um 1.7 % zu niedrig liegen.

Fehler in der Bestimmung der Zähigkeit wirken sich nur in den Reynoldszahlen aus, bzw. in $C' = C + \varepsilon/\kappa$. Ist ν um 1% zu klein ermittelt ($\varepsilon = -0.01$), so liegt die $C_F(R_n)$-Kurve nur um 0.1_5% zu hoch.

Überraschend wenig würde sich ein prozentualer Fehler in der Messung des Wandabstands $y = (1+\varepsilon)y'$ auswirken: $\kappa' = \kappa$, $C' = C + \varepsilon/\kappa$, $\alpha' = \alpha - \varepsilon/\kappa$, so daß $\lambda = e^{-\kappa'(C'+\alpha')}$ unverändert bliebe. Sind etwa alle Wandabstände um 1 % zu groß bestimmt, so liegt die $C_F(R_n)$-Kurve nur um 0.0_5% zu niedrig.

Natürlich weiß jeder Experimentator, daß vor allem die zwar systematischen, aber meist nicht prozentualen Meßfehler zu fürchten sind, wie z.B. eine mögliche Verfälschung der Anzeige von Pitotrohr und Hitzdraht in Wandnähe. Trotzdem zeigt schon die obige einfache Fehlerrechnung, daß eine Ermittlung der $C_F(R_n)$-Kurve mit größerer Genauigkeit als auf etwa 2 % wohl kaum möglich ist.

5. Einfache Potenzgesetze.

Für Überschlagsrechnungen genügt oft das alte Potenzprofil

$$u/U = [y/\delta(x)]^{1/n} \tag{51}$$

mit $$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{n+1}\,, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}\,, \quad \frac{\delta_3}{\delta} = \frac{2n}{(n+1)(n+3)} \tag{52}$$

und $$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 1 + \frac{2}{n}\,, \quad H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2} = 2\,\frac{n+2}{n+3} = \frac{4H_{12}}{3H_{12}-1}\,. \tag{53}$$

Im Bereich Modell-Schiff, d.h. für $10^6 < R_n < 10^9$ wird die Schoenherr-Linie angenähert durch

$$C_F = 2\,\delta_2/x \doteq 0.0355\ R_n^{-0.153} \pm 3\% \quad \text{(vgl. Bild 2)} \tag{54}$$

$$C_f = 2\ d\delta_2/dx \doteq 0.847\ C_F \doteq 0.0301\ R_n^{-0.153} \doteq 0.0145\ (U\delta_2/\nu)^{-0.181}\,. \tag{55}$$

Die Grenzschichtdicke nach /1/ wird im gleichen R_n-Bereich:

$$\delta/x = 0.085\ R_n^{-0.1} \pm 3\%\,. \tag{56}$$

Diese Näherungen zeigt Bild 4 für den Fall b) nach Messungen von Winter und Gaudet.

Im Rahmen dieser Näherungen wird

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{C_F/2}{\delta/x} = 0.209\ R_n^{-0.053}\,. \tag{57}$$

Benutzen wir diese Beziehung, um die geeignetste Potenz 1/n für eine bestimmte Reynoldszahl zu finden, so ergeben sich für $R_n = 10^6$, 10^7, 10^8 und 10^9 folgende Werte für n = 6.65, 8.0, 9.5 und 11.2 . Die schwache Abhängigkeit der Potenz 1/n von R_n ist in der Impulsgleichung (55) allerdings vernachlässigt.

Die bekannte Formel für das 1/7-Profil: $\delta/x = 0.37\ R_n^{-0.2}$ gilt nur für nicht zu große Reynoldszahlen im Modellbereich, worauf L. Prandtl von Anfang an hingewiesen hat. Bei zu großen Reynoldszahlen gibt sie zu dünne Grenzschichtdicken, z.B. für $R_n = 10^9$ (bzw. 10^8) $\delta/x = 5.9\cdot10^{-3}$ (bzw. $9.3\cdot10^{-3}$) statt nach Gl.(56) $\delta/x = 10.7\cdot10^{-3}$ (bzw. $13.5\cdot10^{-3}$) . Zumindest für die hohen Reynoldszahlen von Schiffen ist die Gl.(56) wesentlich realistischer.

6. Energiedissipation.

Da in der Plattenströmung keine Druckkräfte wirken, ist hier die Impulsverlustdicke $\delta_2(x)$ ein Maß für den Reibungswiderstand längs der Platte bis zur Länge x, und das Analoge trifft auch für die Energieverlustdicke $\delta_3(x)$ zu. Im Nachlauf der Platte kann kein weiterer Impulsverlust stattfinden, es wird aber auch dort noch mechanische Energie in Wärme dissipiert. Von der Antriebsleistung oder der insgesamt dissipierten Energie je Zeit- und Breiteneinheit $E = C_F \frac{\rho}{2} U^3 L$ (L = Plattenlänge) wird nur der Anteil $E_{Pl} = \frac{\rho}{2} U^3 \delta_3(x=L)$ bereits längs der Platte in Wärme umgewandelt und der Rest erst im Nachlauf:

$$E_N/E = 1 - \frac{\delta_3}{L\,C_F} = 1 - \frac{1}{2} H_{32}(x=L)\ . \tag{58}$$

Für die laminare Blasius-Strömung ist unabhängig von R_n $E_N/E = 0.214$. Wenn die Plattenströmung turbulent ist, wird die relative Dissipation im Nachlauf jedoch viel kleiner, z.B. für $R_n = 10^7$ (bzw. 10^9) nur $E_N/E = 0.10_1$ (bzw. 0.07_8).

7. Schrifttum.

/1/ Winter,K.G. und Gaudet,L. Royal Aircraft Establishment, Techn.Rep. 70251, 1970
/2/ Millikan, C.B. 5th Intern.Congr.Appl.Mech. 1938
/3/ Coles,D.E. J.Fluid Mech.1, 1956, 191
/4/ Coles, D.E. Rand-Report R-403-PR, 1962
/5/ Spalding, D.B. Int.J.Heat Mass Transfer.5, 1962, 1133
/6/ Schoenherr, K.E. Soc.Nav.Arch.Mar.Eng. 1932
/7/ Schultz-Grunow, F., Luftfahrtforschung 17, 1940
/8/ Landweber,L. Soc.Nav.Arch.Mar.Eng.1953
/9/ Hinze,J.O., Turbulence, McGraw-Hill,New York, 1959, p.508
/10/Wieghardt,K. Z.A.M.M.24, 1944, 294

Tabelle I. Drei Gruppen von Konstanten zur Darstellung der Meßergebnisse von Winter und Gaudet /1/ für

$$u/u_\tau = \frac{1}{\kappa} \ln yu_\tau/\nu + C + \beta\left[1 - \cos \frac{\pi}{\gamma}(\eta - \eta_1)\right],$$

mit $\beta = 0$ für $\eta = y/\delta < \eta_1$.

	a	b	c	Coles
η_1	0.129_5	0.129_5	0.13	0
γ	0.707	0.707	0.717	1
β	0.904_6	0.890_8	0.95	1.341_5
α	1.580_8	1.556_7	1.694_4	2.682_9
κ	0.374_5	0.380_3	0.386_7	0.41
C	3.76	4.04	4.34	5.0
λ	0.135_3	0.119_0	0.096_{96}	0.042_{85}
C_1	3.328_3	3.277_6	3.319_1	3.780_5
C_2	21.800	21.140	21.394	24.998
C_3	192.5	183.8	184.6	
C_2/C_1	6.550	6.450	6.446	6.612

Tabelle II. Beiwert des Gesamtwiderstands nach Schoenherr.

$\log R_n$	$10^3 C_{FS}$
5	7.179_4
5.5	5.561_1
6	4.409_4
6.5	3.566_5
7	2.934_3
7.5	2.450_0
8	2.072_0
8.5	1.772_2
9	1.530_9
9.5	1.334_2
10	1.172_0

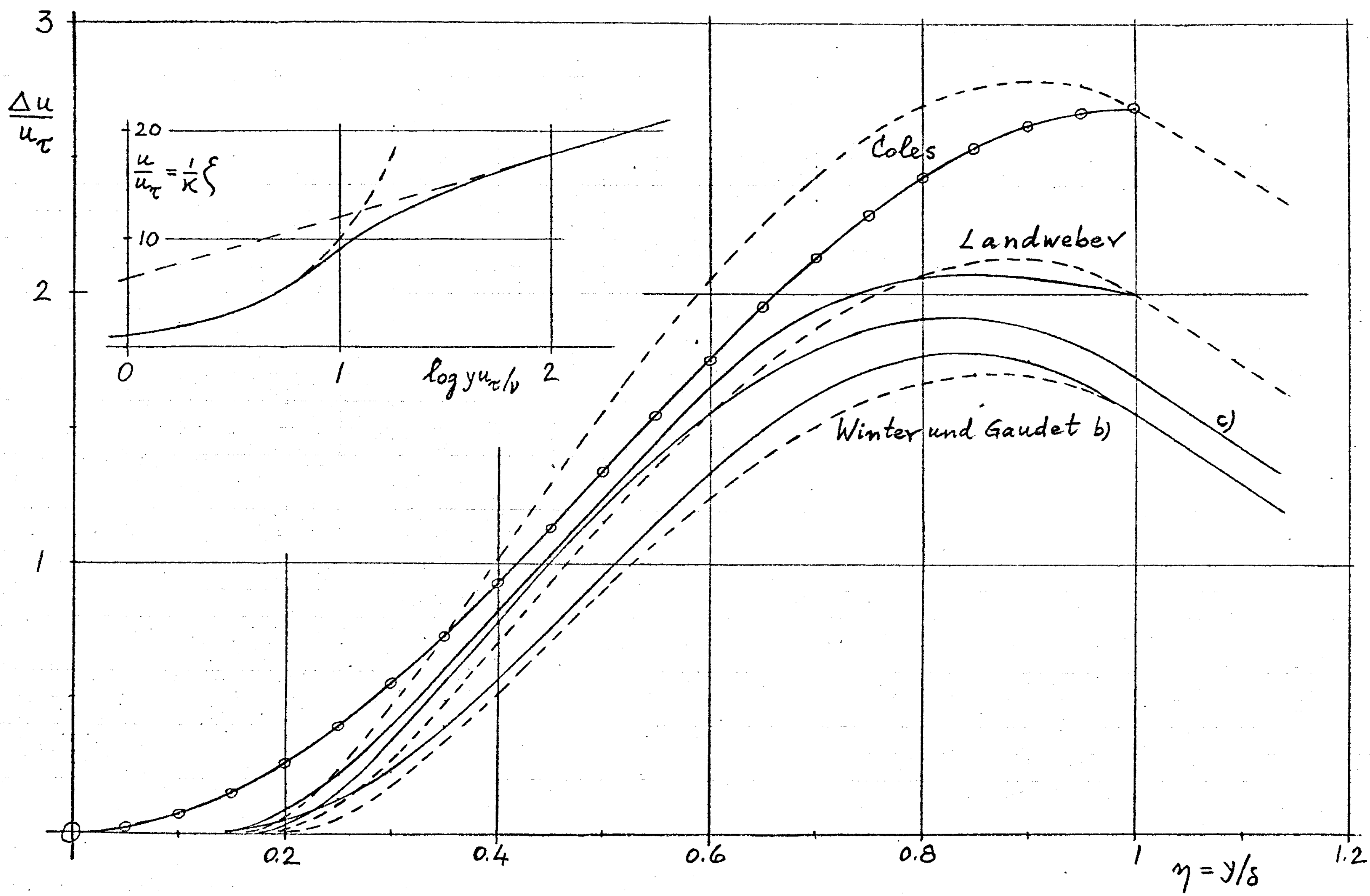

Bild 1. Abweichungen des Geschwindigkeitsprofils vom logarithmischen Wandgesetz; gestrichelte Kurven: Hama's Näherung.

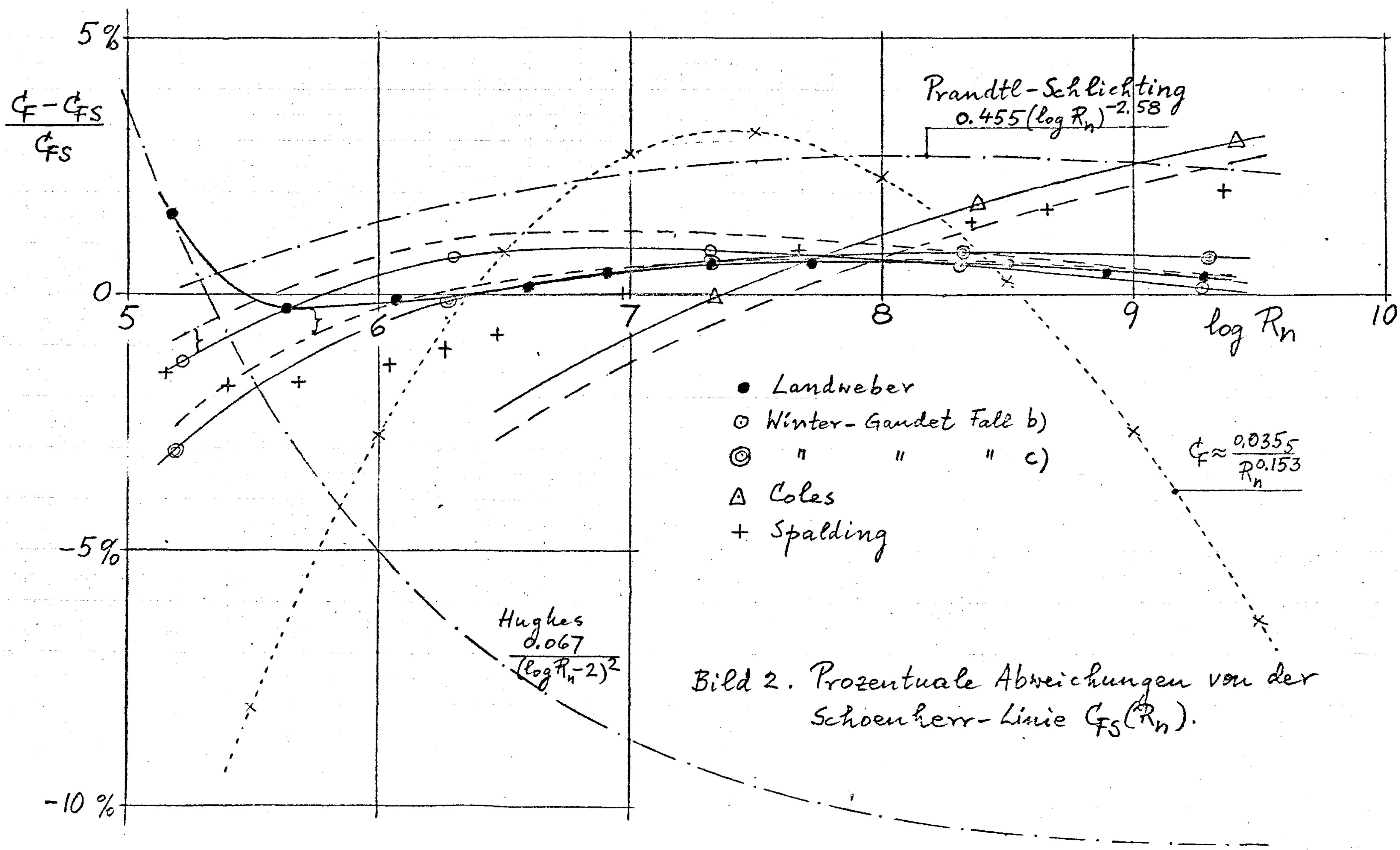

Bild 2. Prozentuale Abweichungen von der Schoenherr-Linie $c_{FS}(R_n)$.

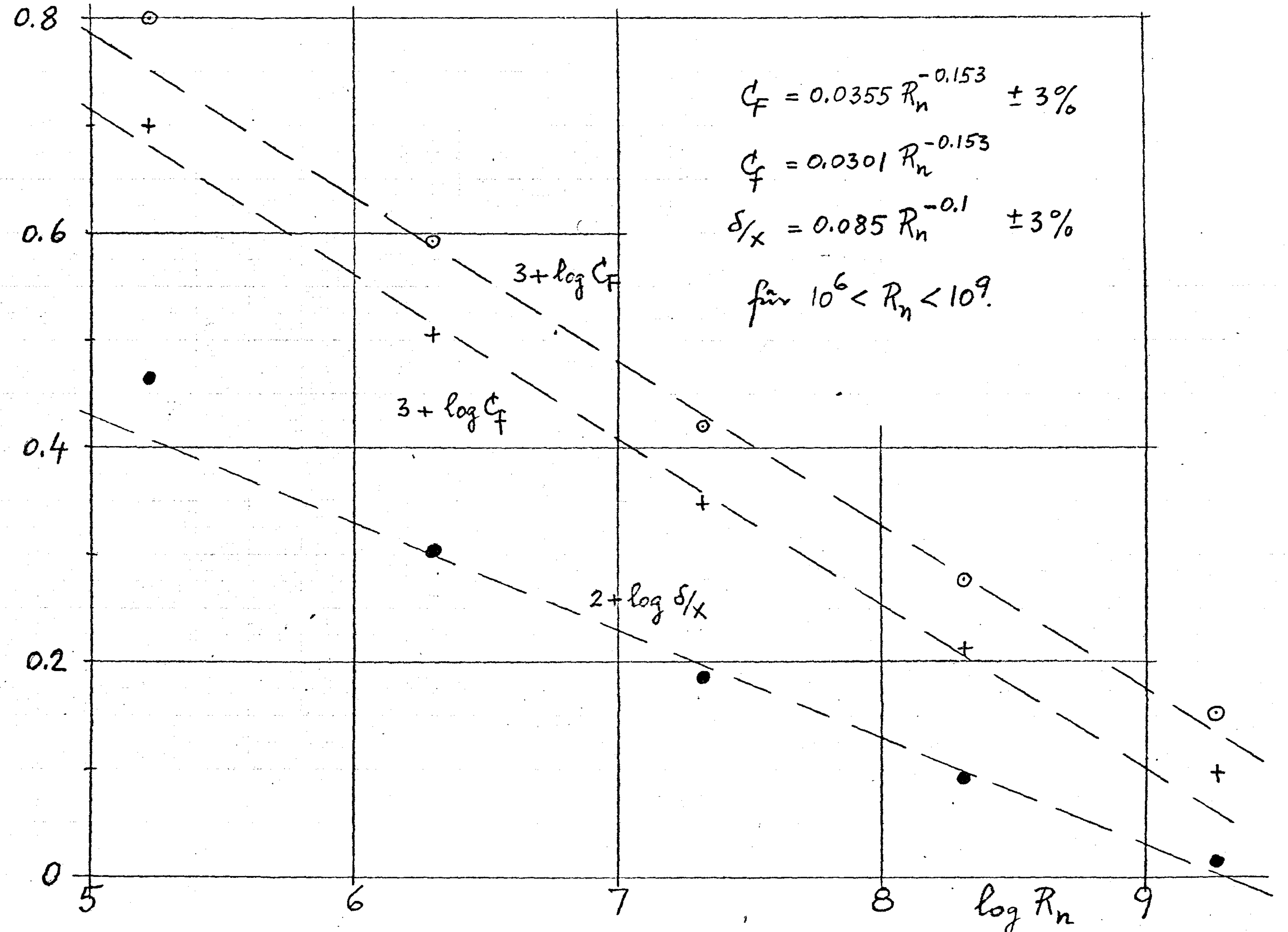

Bild 4. Einfache Potenzannäherungen für Messungen von Winter und Gaudet.