

Verbesserung der Effizienz dynamischer Simulationen mithilfe hierarchischer Platten- und Schalenformulierungen

Manfred Bischoff¹, Lisa-Marie Reinken¹, Henrik Jakob¹, Bastian Oesterle²

¹Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart

²Institut für Baustatik, Technische Universität Hamburg

Zusammenfassung: Die Stabilität expliziter Zeitintegrationsverfahren ist durch eine kritische Zeitschrittweite begrenzt, die bei schubweichen Platten- und Schalenmodellen von der höchsten Frequenz der Querschubmoden abhängt. Um die kritische Zeitschrittweite zu erhöhen und damit die Rechenzeit zu verkürzen werden häufig Massenskalierungsmethoden verwendet. Eine Herausforderung ist dabei, einen guten Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit zu finden. Hierarchische Platten- und Schalenformulierungen, ursprünglich zur Vermeidung von Querschublocking entwickelt, ermöglichen eine selektive Skalierung der Trägheit der Querschubmoden ohne die Genauigkeit der Biegemoden wesentlich zu beeinträchtigen. Diese bereits als intrinsisch lockingfrei bekannten hierarchischen Formulierungen erlauben also auch eine intrinsisch selektive Massenskalierung.

1 Einführung

Finite Elemente für schubweiche Schalenmodelle (Reissner-Mindlin-Schalenelemente), werden in zahlreichen Anwendungen in Wissenschaft und Praxis eingesetzt. Balken- und Plattenformulierungen werden im Folgenden als Modellprobleme verwendet, um die Komplexität der Darstellung von Schalentheorien in krummlinigen Koordinaten zu vermeiden.

Für die transiente Analyse kurzer und stark nichtlinearer dynamischer Prozesse, wie bei Crash- und Blechumformsimulationen, werden häufig explizite Zeitintegrationsverfahren eingesetzt, in der Regel mit diagonalen Massenmatrizen (*lumped mass*), deren Inversion trivial ist. Sie sind nur bedingt stabil. Dabei ist der kritische Zeitschritt

$$\Delta t_{\text{krit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}} \quad (1)$$

durch die höchste Eigenkreisfrequenz ω_{max} beschränkt. Bei schubweichen Balken-, Platten- und Schalenelementen sind die höchsten Eigenfrequenzen die der (Quer-)schubmoden, deren

Bedeutung für das Strukturverhalten, insbesondere bei dünnen Strukturen, häufig von untergeordneter Bedeutung ist. Darüber hinaus sind sie bei einem Finite-Elemente-Modell mit unphysikalischen Schwingungsformen verbunden („*mesh modes*“).

In der Praxis wird in der Regel Massenskalierung eingesetzt, um die Trägheiten zu erhöhen und damit die Frequenzen zu verringern. Da die Rechenzeit in etwa proportional zur höchsten Eigenfrequenz ist, können damit signifikante Effizienzsteigerungen erreicht werden. Bei konventioneller Massenskalierung wird dabei künstlich Masse hinzugefügt. Dadurch ändern sich jedoch auch die für das Strukturverhalten wichtigen niedrigen Frequenzen, was einen negativen Einfluss auf die Genauigkeit der Simulationen hat.

In [10] wird eine Methode zur selektiven Massenskalierung (SMS) für Kontinuums-elemente vorgeschlagen, bei der die Translationsträgheiten erhalten bleiben und damit der Einfluss auf die Moden mit niedrigen Frequenzen geringer ist als bei konventioneller Massenskalierung. Allerdings führt diese Methode zu nicht diagonalen Massenmatrizen. Außerdem ist bislang keine Übertragung auf Elemente mit Rotationsfreiheitsgraden gelungen. Eine verwandte Strategie für Balken-, Platten- und Schalenelemente ist die Rotationsmassenskalierung (RMS), bei der nur die Rotationsträgheiten skaliert werden [1]. Dabei bleibt die Massenmatrix diagonal, die Genauigkeit der Biegefrequenzen wird aber negativ beeinflusst.

Oesterle et al. [7] und Krauß¹ et al. [4] schlagen deshalb eine Massenskalierungsmethode vor, bei der nur die mit Schubverformungen korrespondierenden Trägheiten skaliert werden. Dies gelingt mit hierarchischen Formulierungen, die entweder die Schubrotationen als primäre Freiheitsgrade verwenden [2], [5] oder mit den Schubverformungen korrespondierende „Schubverschiebungen“ [8], [9]. Da diese hierarchischen Formulierungen die Bedingung verschwindender Schubdeformationen im dünnen Limit trivial erfüllen können, sind sie *intrinsisch lockingfrei*, unabhängig von der Diskretisierungsmethode. Ihr variationeller Index erfordert eine C^1 -kontinuierliche Diskretisierung, weswegen sie häufig im Rahmen der isogeometrischen Analyse verwendet werden. In [4] und [7] wird gezeigt, dass die hierarchischen Formulierungen eine *intrinsisch selektive* Massenskalierung (ISMS) erlauben, weil die Skalierung der mit den Schubfreiheitsgraden zusammenhängenden Trägheiten vor allem die Schubmoden beeinflusst und nur einen geringen Einfluss auf die wichtigen Biegemoden hat. Weil bei der hierarchischen Verschiebungsformulierung die konzentrierte Massenmatrix singular wird, fokussiert sich die Arbeit auf die Formulierung mit hierarchischen Rotationen.

2 Hierarchische Formulierungen

2.1 Modellproblem: Timoschenko-Balken

Die im gegebenen Kontext wichtigsten Gleichungen sind die kinematischen Gleichungen, auf die sich die folgende Darstellung beschränkt. Bei der Standard-Formulierung (w - φ -Formulierung) des Timoschenko-Balkenmodells sind dies die Zusammenhänge zwischen den Verschiebungen w und den Rotationen φ mit den Krümmungen κ und dem Schubwinkel γ ,

$$\kappa = \varphi' , \quad \gamma = w' + \varphi , \quad (2)$$

¹ Die Erstautorin des zitierten Aufsatzes ist auch die Zweitautorin der vorliegenden Arbeit

mit $(\blacksquare)' = \frac{d(\blacksquare)}{dx}$. Die Imbalance der Ableitungen in Gleichung (2)₂ ist die Ursache für Locking, weil die Bedingung $\gamma = 0$ nicht einfach erfüllt werden kann, wenn Ansätze gleicher Ordnung für w und φ verwendet werden. Die Formulierung mit hierarchischen Rotationen aus [2] verwendet deshalb den Schubwinkel γ als primäre Variable. Für die Rotationen gilt dann $\varphi = \gamma - w'$. Damit verschiebt sich die Imbalance vom Querschub auf die Krümmungen

$$\kappa = \gamma' - w'' \quad , \quad \gamma = \gamma \quad . \quad (3)$$

Wegen der trivialen Gleichung für den Querschub ist diese w - γ -Formulierung frei von Querschublocking, es verbleiben jedoch kleine Oszillationen in den Querkräften.

Vollständig ausbalanciert ist eine Formulierung, bei der die Verschiebung w in einen Biegeanteil w_b und einen Schubanteil w_s aufgespalten wird, $w = w_b + w_s$, [3], [8]. Verwendet man w und w_s als Freiheitsgrade, [9], ergeben sich die kinematischen Gleichungen zu

$$\kappa = w_s'' - w'' \quad , \quad \gamma = w_s' \quad . \quad (4)$$

Diese w - w_s -Formulierung ist vollkommen frei von Locking und Querschuboszillationen. Der konstante Anteil von w_s muss durch eine Nebenbedingung eliminiert werden, weil sonst künstliche Nullenergiemoden auftreten. Das liegt daran, dass die Zuordnung einer Starrkörperverschiebung zum Biege- oder Schubanteil nicht eindeutig bzw. nicht definiert ist.

2.2 Platten und Schalen

Die kinematischen Gleichungen für das schubweiche Plattenmodell in der üblichen Variante mit Verschiebungen w und Rotationen φ_x und φ_y um die x - bzw. y -Achse sind

$$\kappa_{xx} = \varphi_{y,x} \quad , \quad \kappa_{yy} = \varphi_{x,y} \quad , \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{2}(\varphi_{y,y} - \varphi_{x,x}) \quad , \quad (5)$$

$$\gamma_x = w_{,x} + \varphi_y \quad , \quad \gamma_y = w_{,y} - \varphi_x \quad , \quad (6)$$

wobei $(\blacksquare)_{,x}$ und $(\blacksquare)_{,y}$ eine partielle Ableitung nach x bzw. y bezeichnet. Für die w - γ_x - γ_y -Formulierung erhält man zunächst $\varphi_x = w_{,y} - \gamma_y$ und $\varphi_y = -w_{,x} + \gamma_x$ für die Rotationen und die kinematischen Gleichungen ergeben sich zu

$$\kappa_{xx} = -w_{,xx} + \gamma_{x,x} \quad , \quad \kappa_{yy} = -w_{,yy} + \gamma_{y,y} \quad , \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy} + \frac{1}{2}(\gamma_{x,y} + \gamma_{y,x}) \quad , \quad (7)$$

$$\gamma_x = \gamma_x \quad , \quad \gamma_y = \gamma_y \quad . \quad (8)$$

Die Erweiterung der Formulierung mit Schubverschiebungen auf Platten und Schalen ist nicht trivial. Das liegt daran, dass, im Gegensatz zum Balken, die Verschiebung bei Platten und Schalen nicht eindeutig in Biege- und Schubanteile aufgespalten werden kann. In [8], [9] wird eine w - w_{sx} - w_{sy} -Formulierung vorgeschlagen, wobei w_{sx} mit Querschub in x -Richtung und Biegung in y -Richtung korrespondiert (und umgekehrt bei w_{sy}). Für die Rotationen folgt daraus $\varphi_x = (w - w_{sy})_{,y}$ bzw. $\varphi_y = -(w - w_{sx})_{,x}$ und die kinematischen Gleichungen sind

$$\kappa_{xx} = w_{sx,xx} - w_{,xx} \quad , \quad \kappa_{yy} = w_{sy,yy} - w_{,yy} \quad , \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy} + \frac{1}{2}(w_{sx,xy} + w_{sy,xy}) \quad (9)$$

$$\gamma_x = w_{sx,x} \quad , \quad \gamma_y = w_{sy,y} \quad . \quad (10)$$

Die entsprechende Formulierung für Schalen in krummlinigen Koordinaten ist in [8] und [9] dargestellt und enthält die obigen Gleichungen für ebene Systeme als Sonderfall.

3 Intrinsisch selektive Massenskalierung

Für einen Balken bzw. eine Platte oder Schale mit der Dichte ρ und der Querschnittsdicke t können die Querschnittsträgheiten matriziell mit

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho t & 0 \\ 0 & \frac{\rho t^3}{12} \end{bmatrix} \text{ bzw. } \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho t^3}{12} \end{bmatrix} \quad (11)$$

dargestellt werden. Dabei sind die erste Spalte und Zeile den Verschiebungen und die zweite (und dritte) den Rotationen zugeordnet. Die konsistente Massenmatrix eines Elements (oder eines Patches bei der isogeometrischen Analyse) für die Standardformulierung ist

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N} d\Omega . \quad (12)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{N} die Matrix der Formfunktionen, bezogen auf die üblichen Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade. Für die hierarchischen Formulierungen müssen die Einträge in \mathbf{N} so gewählt werden, dass die hierarchischen Freiheitsgrade auf Verschiebungen und Verdrehungen projiziert werden. Für die hierarchische Rotationsformulierung für den Timoschenko-Balken führt das beispielsweise an jedem Knoten, bzw. Kontrollpunkt, auf

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} N_K & 0 \\ -N_K' & N_K \end{bmatrix}, \quad (13)$$

wobei die erste Zeile trivial die Verschiebung w mit den Verschiebungsfreiheitsgrad w_K assoziiert und die zweite die Rotation φ mit der Ableitung der Verschiebungen und den Schubfreiheitsgraden γ_K .

Die diagonale konzentrierte Massenmatrix \mathbf{M}_L entsteht durch Aufaddieren derjenigen Einträge in den Zeilen der konsistenten Massenmatrix die dem entsprechenden Freiheitsgrad zugeordnet sind (*row sum lumping*). Es werden also nur Verschiebungsträgheiten auf Verschiebungsträgheiten und Rotationsträgheiten auf Rotationsträgheiten addiert. Bei der hierarchischen Verschiebungsformulierung ergibt sich dabei eine Summe aus den Ableitungen der Formfunktionen, die immer gleich null ist, weil die Formfunktionen eine Zerlegung der Eins sind (*partition of unity*). Die daraus resultierende singuläre Massenmatrix kann nicht direkt im Zeitintegrationsalgorithmus verwendet werden, weil sie nicht invertierbar ist.

Die skalierte Massenmatrix erhält man durch komponentenweise Multiplikation von \mathbf{M}_L mit einer Skalierungsmatrix $\boldsymbol{\alpha}$ (Hadamard-Produkt \odot). Für Platten und Schalen ergibt sich

$$\mathbf{M}_L^\circ = \boldsymbol{\alpha} \odot \mathbf{M}_L, \text{ mit } \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \alpha_n \end{bmatrix} \text{ und } \alpha_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Dabei ist n die Anzahl der Knoten, bzw. Kontrollpunkte und $\mathbf{0}$ eine 3×3 Null-Matrix. Die Untermatrix α_K ist so konstruiert, dass die Verschiebungsfreiheitsgrade unskaliert bleiben. Der Skalierungsfaktor α wirkt bei der Standardformulierung auf die Rotationen φ_x und φ_y , bei den hierarchischen Formulierungen auf γ_x und γ_y bzw. w_{sx} und w_{sy} . Theoretisch können so an jedem Knoten oder Kontrollpunkt unterschiedliche Skalierungsfaktoren verwendet

werden, worauf jedoch im folgenden numerischen Beispiel verzichtet wird. Darin werden drei verschiedene Formulierungen verwendet:

1. **unskaliert**: Standard-Formulierung ohne Massenskalierung als Referenzlösung.
2. **RMS**: Standard-Formulierung mit Rotationsmassenskalierung.
3. **ISMS**: hierarchische Rotationsformulierung mit intrinsisch selektiver Massenskalierung.

Die hierarchische Verschiebungsformulierung wird wegen des Problems der singulären Massenmatrix hier zunächst nicht betrachtet (vgl. Abschnitt 4). Die Verschiebungen werden mit biquadratischen B-Splines approximiert. Um bei der Standardformulierung Locking zu vermeiden, werden reduzierte Ansatzräume für die Rotationen verwendet. Wegen der Vergleichbarkeit der Ergebnisse werden auch die Ansätze für die Schubrotationen der hierarchischen Formulierung reduziert, obwohl das nicht notwendig ist um Locking zu vermeiden.

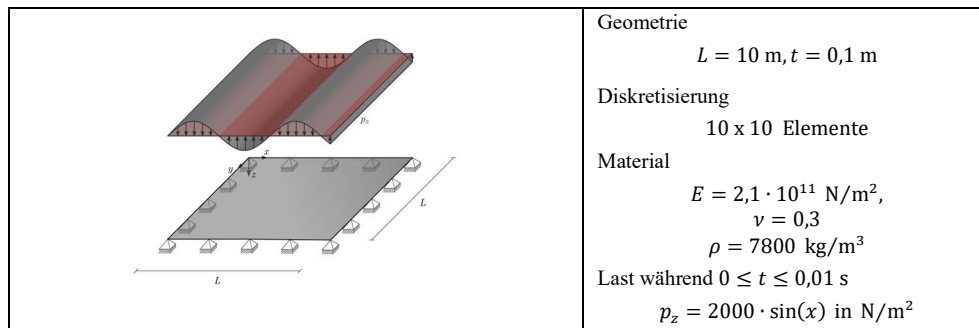


Abbildung 1: Quadratische Platte mit sinusförmiger Last, Problemstellung

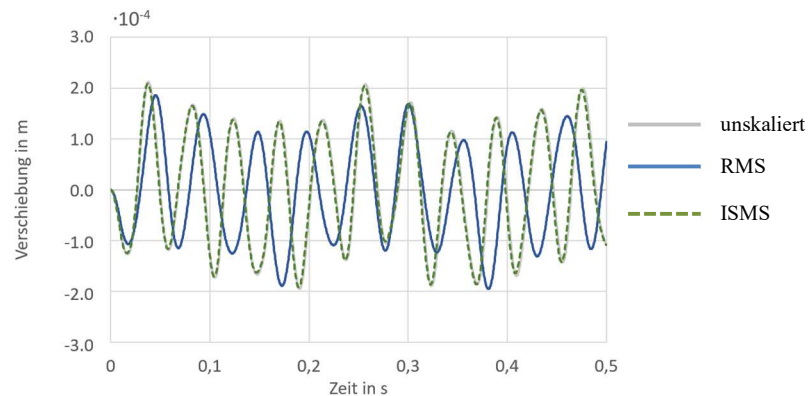


Abbildung 2: Quadratische Platte mit sinusförmiger Last, Verschiebungs-Zeitverlauf in Plattenmitte

Abb. 1 zeigt eine allseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte, samt Informationen über Geometrie, Material, Diskretisierung und Last. Letztere wird in einem kurzen Impuls von 0,01 s aufgebracht, danach schwingt die Platte frei und ungedämpft. Das Diagramm in Abb. 2 zeigt den Verschiebungs-Zeitverlauf in Plattenmitte. Für die Referenzlösung (unskaliert) werden 25697 Zeitschritte benötigt. Um die Anzahl der Schritte deutlich zu verringern wird mit $\alpha = 500$ ein verhältnismäßig großer Skalierungsfaktor verwendet. Mit RMS werden dann

nur noch 1426 Zeitschritte benötigt. Die Lösung weicht allerdings deutlich von der Referenzlösung ab. Der Phasenfehler zeigt ein zu träges Verhalten. Bei der hierarchischen Variante (ISMS) werden nur 1150 Schritte benötigt. Das bedeutet eine Verringerung der Rechenzeit auf 4,5 % bzw. eine Beschleunigung um den Faktor 22. Die Ergebnisse sind aber praktisch identisch mit denen der Referenzlösung ohne Massenskalierung.

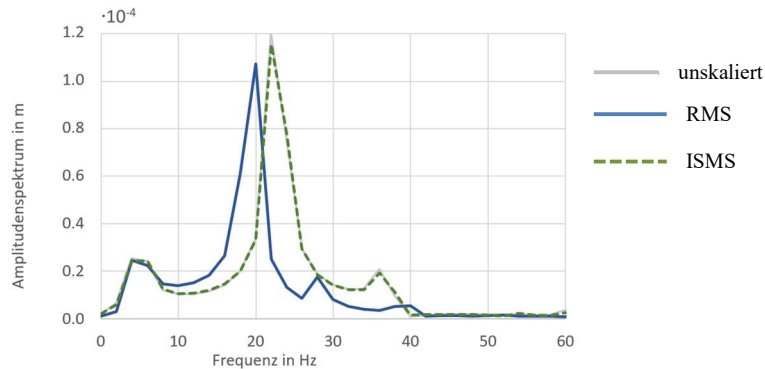


Abbildung 3: Quadratische Platte mit sinusförmiger Last, Amplitudenantwortspektrum

Das mithilfe einer Fouriertransformation errechnete Antwortspektrum in Abb. 3. zeigt, dass die RMS-Variante die niedrigste Frequenz zwar gut trifft, die für die gegebene Beanspruchung maßgeblichere höhere Frequenz aber unterschätzt. Auch hier stimmt die ISMS-Variante praktisch perfekt mit der Referenzlösung überein.

4 ISMS für die hierarchische Verschiebungsformulierung

Die konzentrierte Massenmatrix der w - w_s -Formulierung ist singulär, weil die den Schubverschiebungen w_s zugeordneten Diagonaleinträge null sind. Physikalisch kann das so interpretiert werden, dass eine reine Starrkörperverschiebung ($w = \text{konst.}$) nur im ersten Verschiebungsfreiheitsgrad w enthalten ist. Wie bereits erwähnt, wird der konstant Anteil von w_s durch eine Nebenbedingung eliminiert, um die Regularität der Steifigkeitsmatrix zu gewährleisten. Das bedeutet, dass entsprechende Nicht-Null-Einträge auf der Diagonalen der Massenmatrix keine künstliche Trägheit der Starrkörperverschiebung verursachen würden.

Im Folgenden wird anhand eines numerischen Experiments der Ansatz untersucht, für die w_s -Freiheitsgrade in der konzentrierten Massenmatrix einfach die Diagonaleinträge der konsistenten Massenmatrix zu verwenden. Sie ist dann regulär und invertierbar. Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken mit Länge $L = 10$ m, Breite $b = 1$ m und Dicke $t = 0,5$ m wird im Drittelpunkt bei $x = 3, \bar{3}$ m, durch eine vertikale Einzellast dynamisch beansprucht. Der Zeitverlauf der Last (in Newton) ist $F = 12.500 \cdot \sin(500 t)$ während der ersten 0,01257 Sekunden, was einer Sinuswelle entspricht, danach schwingt der Balken frei und ungedämpft. Die Materialdaten sind dieselben wie im Beispiel aus Abschnitt 3. Für die Diskretisierung werden für beide Freiheitsgrade je 12 quadratische B-Splines verwendet.

Wegen der geringen Schlankheit von $L/t = 20$ ist das Potenzial zur Vergrößerung des Zeitschritts durch Massenskalierung nicht sehr groß. Mit einem Skalierungsfaktor von $\alpha = 30$

wird die Anzahl der Zeitschritte von 2190 auf 416 reduziert, immerhin noch eine Beschleunigung um mehr als den Faktor 5. Das Diagramm in Abb. 4 zeigt, dass die Lösungen mit der unskalierten und der skalierten konzentrierten Massenmatrix praktisch identisch sind (grüne und blaue Kurve). Zum Vergleich ist auch der Verlauf dargestellt, der sich mit der konsistenten Massenmatrix ergibt. Die Lösung mit dieser naiven Stabilisierung der Massenmatrix der hierarchischen Verschiebungsformulierung ist auch praktisch identisch mit der für die hierarchische Rotationsformulierung (nicht dargestellt).

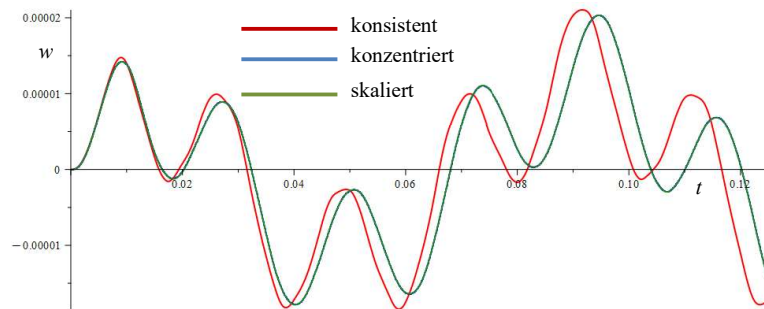


Abbildung 4: Balken unter dynamischer Belastung, hierarchische Verschiebungsformulierung

5 Vergleich mit schubstarreren Modellen

Eine Motivation zur Verwendung schubweicher Modelle im Zusammenhang mit dynamischen Problemen ist der Einfluss der Rotationsträgheit, der bei schubstarreren Modellen (nach Bernoulli bzw. Kirchoff und Love) ignoriert wird. Tatsächlich war dies die Hauptmotivation für die Arbeit von Mindlin [6]. Es stellt sich die Frage, ob die Skalierung der Schubträgheit die Genauigkeit so stark beeinflusst, dass der entsprechende Vorteil wieder verloren geht.

Diese Frage wird beispielhaft anhand des numerischen Experiments aus Abschnitt 4 untersucht. Wir vergleichen Lösungen nach der Bernoulli-Balkentheorie mit verschiedenen Varianten auf Basis der Timoschenko-Balkentheorie, alle mit konzentrierten Massenmatrizen. Bei der w - φ -Formulierung werden dabei reduzierte Ansätze für die Rotationsfreiheitsgrade gewählt, um Locking zu vermeiden.

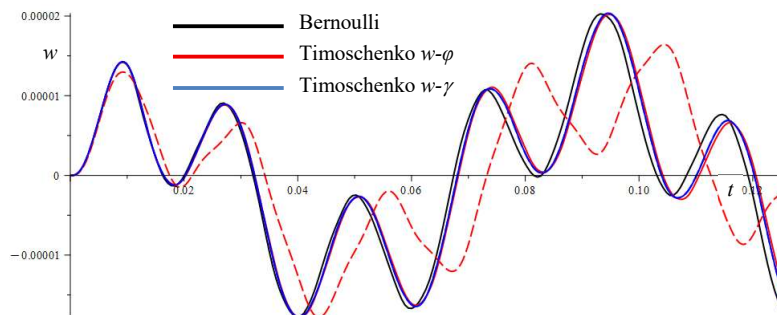


Abbildung 4: Balken unter dynamischer Belastung, Vergleich verschiedener Timoschenko-Formulierungen mit der Bernoulli-Balkentheorie; gestrichelte Linien: skalierte Massenmatrix

Abb. 4 zeigt, dass die beiden Timoschenko-Lösungen fast identisch sind und mit der Zeit immer mehr von der Bernoulli-Lösung abweichen. Die gestrichelten Linien zeigen die Ergebnisse mit Massenskalierung ($\alpha = 30$). Für die w - γ -Formulierung (ISMS) ist die Kurve praktisch identisch mit der unskalierten. Für die w - φ -Formulierung (RMS) sieht man deutliche Abweichungen. Für das Bernoulli-Modell werden 205 Zeitschritte benötigt, für die w - φ -Formulierung 1454 Schritte (unskaliert) bzw. 359 (mit Massenskalierung). Bei der w - γ -Formulierung reduziert die Massenskalierung die Anzahl der Schritte von 1454 auf 266.

6 Schlussfolgerungen und Ausblick

Intrinsisch selektive Massenskalierung mit hierarchischen Schalenformulierungen hat ein großes Potenzial zur Steigerung der Effizienz expliziter dynamischer Simulationen. Eine einfache Machbarkeitsstudie zeigt, dass das Problem der singulären Massenmatrix bei der hierarchischen Verschiebungsformulierung lösbar ist. Hier sind aber weitere Entwicklungen notwendig. Das numerische Experiment in Abschnitt 5 bestätigt, dass die Massenskalierung die Genauigkeitsvorteile schubweicher Modelle gegenüber schubstarreren nicht einschränken.

Literatur

- [1] BENSON, D.J. ; BAZILEVS, Y. ; HSU, M.-C. ; HUGHES, T.J.R. : Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 199 (2010), 276–289
- [2] ECHTER, R. ; OESTERLE, B. ; BISCHOFF, M. : A hierarchic family of isogeometric shell finite elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 254 (2013), 170–180
- [3] KIENDL, J. ; AURICCHIO, F. ; HUGHES, T.J.R. ; REALI, A. : Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 284 (2015), 988–1004
- [4] KRAUB, L.-M. ; THIERER, R. ; BISCHOFF, M. ; OESTERLE, B. : Intrinsically selective mass scaling with hierarchic plate formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 432 (2024)
- [5] LONG, Q. ; BURKHARD BORNEMANN, P. ; ÇIRAK, F. : Shear-flexible subdivision shells, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 90 (2012) 1549–1577
- [6] MINDLIN, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), 31–38
- [7] OESTERLE, B. ; TRIPPMACHER, J. ; TKACHUK, A. ; BISCHOFF, M. : Intrinsically Selective Mass Scaling with Hierarchic Structural Element Formulations. In: *Book of Extended Abstracts of the 6th ECCOMAS Young Investigators Conference*, Valencia, Spain (2021)
- [8] OESTERLE, B. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : A shear deformable, rotation-free isogeometric shell formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 307 (2016), 235–255
- [9] OESTERLE, B. ; SACHSE, R. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Hierarchic isogeometric large rotation shell elements including linearized transverse shear parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 321 (2017), 383–405
- [10] OLOVSSON, L. ; SIMONSSON, K. ; UNOSSON, M. : Selective mass scaling for explicit finite element analyses. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 63 (2005), 1436–1445