

466 | März 1986

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Yuanxie Zhao

Hydrodynamische Kräfte an manövrierenden Schiffen auf flachem Wasser

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Hydrodynamische Kräfte an manövrierenden Schiffen auf flachem Wasser

Yuanxie Zhao, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1986

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 466

Hydrodynamische Kräfte an manövrierenden Schiffen
auf flachem Wasser

von

Y.-X. Zhao

März 1986

Hydrodynamische Kräfte an manövrierenden Schiffen
auf flachem Wasser

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Yuan-Xie ZHAO
aus der V.R. China

Hamburg

1985

ISBN 3 - 89220 - 466 - 7

Copyright Institut für Schiffbau
 Universität Hamburg
 Lämmersieth 90
 D-2000 Hamburg 60

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen
Akademischen Austauschdienstes

Zur Vorhersage der Manöviereigenschaften von Schiffen werden die Kräfte und Momente berechnet, die das Wasser auf einen Schiffskörper mit Ruder und Propeller ausübt, der sich beliebig in der Horizontalebene durch ruhiges Wasser konstanter Tiefe bewegt. Das Wasser wird als zähigkeitsfrei, der Schiffskörper als schlank, die Geschwindigkeit als so klein vorausgesetzt, daß Verformungen der Wasseroberfläche vernachlässigbar bleiben. Die Berechnungsergebnisse werden mit bereits vorliegenden Ergebnissen von Modellversuchen verglichen.

For predicting the manoeuvrability of ships, hydrodynamic forces and moments acting on a ship's hull and its rudder are calculated. The ship is assumed to move arbitrarily in the horizontal plane on shallow water. Water viscosity as well as water surface deformations due to the ship's speed are neglected; the ship is presupposed to be a slender body. Computed results are compared to published data measured in model experiments.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Flachwasser-Effekt und Versperrungskoeffizient	8
1.1 Das Potential des Nah- und des Fernfeldes	10
1.2 Die Eigenschaften des Versperrungskoeffizienten C	12
1.3 Numerische Bestimmung des Versperrungskoeffizienten C für beliebige Querschnittsform	12
1.4 Analyse der Ergebnisse für C(x)	17
1.4.1 Prüfung für ellipsenähnliche Querschnitte	17
1.4.2 Berechnungen für beliebige Querschnittsformen	23
2. Quergeschwindigkeitsverteilung U(x) in flachem Wasser	34
2.1 Formulierung der Integro-Differentialgleichung	34
2.1.1 Reine Querströmung	34
2.1.2 Schräge Strömung	39
2.2 Numerische Methode zur Berechnung der Geschwindigkeit U(x)	41
2.2.1 Erfüllung der Integro-Differentialgleichung	41
2.2.2 Erfüllung der Randbedingungen	46
2.3 Ergebnisse für U und U·C	47
3. Berechnung der hydrodynamischen Masse und des Massenträgheitsmoments	57
3.1 Hydrodynamische Grundlagen	57
3.2 Ergebnisse für zwei Beispielschiffe	

	Seite
4. Der Flachwasser-Einfluß auf die Querkraft und das Giermoment infolge Driftwinkel und Giergeschwindigkeit	66
4.1 Theorie	66
4.2 Resultate	72
4.3 Analyse der Ergebnisse	81
4.4 Einige Erläuterungen	82
4.4.1 Über den Einfluß der Längsgeschwindigkeit auf die Ableitungen	82
4.4.2 Vergleich mit der Methode von Hess	84
4.5 Einfluß des flachen Wassers auf die Gierstabilität	87
5. Der Einfluß des Flachwassers auf die Ruderkraft und das Rudermoment	92
5.1 Kräfte und Momente am Ruder ohne Wechselwirkung mit dem Schiffsrumpf	92
5.1.1 Theorie	92
5.1.2 Berechnungsergebnisse	100
5.2 Wechselwirkung zwischen Ruder und Schiff	104
5.2.1 Theoretisches Modell	104
5.2.2 Analyse der rechnerischen Ergebnisse	111
5.2.3 Vergleich mit Berechnungen von Hess	114
Zusammenfassung	122
Formelzeichen	125
Literaturverzeichnis	128

Einleitung

Schiffe ähnlicher Größe reagieren häufig ganz verschieden auf das Legen des Ruders: Einige sprechen schnell, andere viel langsamer auf Änderungen des Ruderwinkels an; die asymptotisch erreichte Bahnkrümmung bei konstantem Ruderwinkel und die Geschwindigkeitsminderung im Drehkreis können bei gleichem Ruderwinkel für verschiedene Schiffe nicht nur sehr verschieden groß sein, sondern auch nahezu linear vom Ruderwinkel abhängen oder stark unterproportional mit dem Ruderwinkel anwachsen. Während für viele Schiffe bei jedem Ruderwinkel nur eine stationäre Bahnkrümmung möglich ist, haben sog. gierinstabile Schiffe einen Ruderwinkelbereich, in dem drei verschiedene stationäre Bahnkrümmungen beim gleichen Ruderwinkel einen Gleichgewichtszustand darstellen; zwei dieser Krümmungen entsprechen einem stabilen Bewegungszustand. Um diese Manövriereigenschaften beim Entwurf von Schiffen günstig beeinflussen zu können, benötigt man ein Vorhersageverfahren. Es kann auf Modellversuchen oder auf Berechnungen beruhen.

Wichtig ist das Manövrierverhalten vor allem in Häfen, Flüssen, Kanälen und Schelfmeeren, d.h. in Wassertiefen, die im Vergleich zum Tiefgang großer Schiffe und zur Länge der Fahrtwellen nicht als groß angesehen werden können. Die Wassertiefe beeinflusst dann die Manövrierfähigkeit.

Aus theoretischen Berechnungen, Modellversuchen und Messungen an manövrierenden Schiffen kann man die hydrodynamischen Kräfte und Momente, die auf das Schiff wirken, abhängig von der Längs-, Quer- und Drehgeschwindigkeit des Schiffes, den zugehörigen Beschleunigungen, dem Ruderwinkel, der Propellerdrehzahl und manchmal auch abhängig von der Krängung (seitlichen Neigung) bestimmen. Weitere Einflüsse, z.B. die Drehbeschleunigung des Ruders oder die Vorgeschichte der Schiffsbewegung, spielen bei den praktisch interessierenden niedrigen Bewegungsfrequenzen kaum eine Rolle und werden daher vernachlässigt. Diese Einflüsse können aber wichtig werden bei Modellversuchen mit periodisch zwangsgeführten Modellen, sog. PMM- (Planar-Motion-Mechanism-) Versuchen, wenn die Versuche mit kleinen Bewegungsamplituden und dementsprechend unrealistisch hohen Frequenzen durchgeführt

werden. Wenn der Zusammenhang zwischen hydrodynamischen Kräften und Schiffsbewegungen bekannt ist, kann das Manövrierverhalten leicht durch Simulation von Testmanövern auf einem Rechner beurteilt werden; dabei können dann auch weitere Kräfte z.B. durch Wind oder Seegang berücksichtigt werden.

Messungen an manövrierenden Schiffen werden in diesem Zusammenhang zur Überprüfung theoretischer Berechnungen und der Übertragbarkeit von Modellversuchsergebnissen benutzt. Schwierigkeiten bestehen in einer genügend genauen Ortsbestimmung des Schiffes während der Manöver sowie in Störungen durch Wind, Seegang, Strömungen und wechselnde Wassertiefe. Als Beispiele seien Messungen von CRANE /1/ an einem 278 000-tdw-Tanker und von CLARKE /2/ an einem 193 000-tdw-Tanker genannt.

Bei Versuchen mit verkleinerten Modellen wählt man die Froudezahl (und damit das Verhältnis zwischen Gewichtskräften und Beschleunigungskräften) ebenso groß wie bei dem Schiff, für das Voraussagen gemacht werden sollen. Denn die Froudezahl beeinflusst den Wellenwiderstand; dieser ist für die Beziehung zwischen Schiffsgeschwindigkeit und Propellerdrehzahl entscheidend; und die Propellerdrehzahl ist für die Ruderkräfte entscheidend, wenn das Ruder wie üblich hinter dem Propeller angeordnet ist. Außerdem hat die Froudezahl über die Wellenbildung am Schiff und die Absenkung und Vertrimmung des Schiffes infolge der Schiffsgeschwindigkeit auch einen direkten Einfluß auf die Kräfte am Schiffsrumpf.

Die Reynoldszahl (und damit das Verhältnis zwischen Zähigkeits- und Beschleunigungskräften) ist dann jedoch am großen Schiff mehr als zwei Zehnerpotenzen größer als am Modell. Dies beeinflusst den durch die Zähigkeit bedingten Anteil des Schiffswiderstandes und damit über die Propellerdrehzahl wieder die Ruderkräfte; und es verändert die durch Strömungsablösung entstehenden Druckkräfte am schräg angeströmten Schiffsrumpf und am Ruder bei größeren Anstellwinkeln des Ruders. Während der Einfluß der nicht ähnlichen Propellerdrehzahl durch Berechnungen oder spezielle Versuchstechniken einigermaßen korrigiert werden kann, bleibt der Einfluß der unähnlichen Strömungsablösung mangels Kenntnis unkorrigiert.

Für Modellversuche auf flachem Wasser sind nur in ganz wenigen Versuchsanstalten die erforderlichen Einrichtungen vorhanden. Versuchsergebnisse auf flachem Wasser mit zwangsgeführten Modellen publizierten FUJINO /3/, /4/, KLEINAU und PULS /5/, HIRANO et al. /6/ und FUJINO und ISHIGURO /7/.

Berechnungen der Strömung um manövrierende Schiffe nach vollständig dreidimensionalen numerischen Methoden sind nicht bekannt geworden, nicht einmal bei Vernachlässigung der Zähigkeit und Turbulenz des Wassers, der Verformung der Wasseroberfläche und der endlichen Wassertiefe. PETERSEN /8/ nähert sich diesem Ziel, indem er die Strömung um das Vor- und das Hinterschiff mit einem dreidimensionalen Quell-Senken-Verfahren berechnet und dabei das Mittelschiff näherungsweise nach der "Theorie schlanker Körper" (siehe unten) durch zweidimensionale Strömungsberechnung in den Spantebenen behandelt. Er berücksichtigt dabei endliche Wassertiefen, vernachlässigt aber Einflüsse der Zähigkeit, die Verformung der Wasseroberfläche und vor allem die Zirkulation der Strömung, die an einem schräg angeströmten Schiffsrumpf wie an einem Tragflügel entsteht und die für die Auftriebskraft entscheidend ist. Er kann deshalb im wesentlichen nur die Kräfte und Momente infolge von Quer- und Drehbeschleunigungen berechnen, nicht die praktisch wichtigeren Kräfte infolge der Schiffsgeschwindigkeit.

Berechnungen des Manövrierverhaltens erfolgen heute fast durchweg nach der "Theorie schlanker Körper", in der Regel allerdings nur für tiefes Wasser. Für flaches Wasser wurde die Theorie von NEWMAN /9/ entwickelt. Sie vernachlässigt Zähigkeitseinflüsse und Verformungen der Wasseroberfläche. Die Theorie beruht auf der Perturbationsmethode und dem Verfahren der angepaßten asymptotischen Entwicklungen. Breiten- und Tiefenabmessungen des Schiffes und die Wassertiefe werden dabei als klein im Vergleich zur Schiffslänge angesehen. Im "Fernfeld", d.h. in einem seitlichen Abstand vom Schiff, der der Schiffslänge vergleichbar ist, verläuft die Strömung in horizontalen Ebenen; sie kann durch eine Wirbelverteilung auf der Symmetrieebene des Schiffes dargestellt werden. Im "Nahfeld", d.h. bis zu seitlichen Abständen vom Schiff, die der Schiffsbreite vergleichbar sind, muß getrennt für jede Spantebene die zweidimensionale Strömung um

den Schiffsquerschnitt bei Queranströmung untersucht werden. Paßt man den inneren Grenzwert (an der Schiffs-Symmetrieebene) des Fernfeldes an den äußeren Grenzwert (weit seitlich vom Schiff) des Nahfeldes an, so erhält man Bedingungen für die Wirbelbelegung, die das Fernfeld erzeugt, und für die Anströmgeschwindigkeit der Schiffsspanten im Nahfeld.

Newman wertet diese Theorie nur für einfache geometrische Körperformen aus, vor allem für eine vertikale Rechteckplatte. Numerische Berechnungen der Nahfeldströmung um wirkliche Schiffsquerschnitte wurden von TAYLOR /10/ und KLEINAU /11/ durchgeführt. KLEINAU /11/, /12/ benutzt diese Lösungen, um mit der Theorie von Newman die hydrodynamischen Kräfte und Momente am Schiffsrumpf abhängig von der Beschleunigung und der Geschwindigkeit zu bestimmen. Dabei zeigt sich - ebenso wie bei Messungen an Modellen -, daß bei praktisch wichtigen Verhältnissen zwischen Schiffstiefgang und Wassertiefe von 0,6 bis 0,95 die Rumpfkkräfte um ein Vielfaches größer als auf tiefem Wasser werden. Für die praktische Anwendung fehlen bei Kleinau jedoch noch die Kräfte auf das Ruder, der Propellereinfluß und diverse empirische Korrekturen vor allem für Einflüsse der Zähigkeit.

Die Kräfte auf das Ruder können im Prinzip mit den in der Flugzeugtechnik entwickelten Methoden der tragenden Linie oder der tragenden Fläche berechnet werden, bei denen die Strömung durch Wirbelschichten dargestellt wird. Bei Schiffsrudern jedoch muß der Einfluß der ungleichmäßigen Zuströmung vor allem durch die am Schiffsrumpf gebildete Grenzschicht und den Propellerstrahl berücksichtigt werden. Hinzu kommt eine Wechselwirkung zwischen Rumpf und Ruder: Ein schräg zur Strömung stehender Tragflügel induziert auch stromaufwärts eine erhebliche Änderung der Strömungsrichtung gegenüber der ungestörten Zuströmung. Befindet sich vor dem Flügel (Ruder) der Schiffsrumpf, ist eine solche Änderung der Strömungsrichtung nicht möglich. Rechnerisch kann dies durch eine zusätzliche Wirbelbelegung des Schiffsrumpfes berücksichtigt werden. Diese Belegung führt zu vom Ruder induzierten, querschiffs gerichteten Kräften am Schiffsrumpf und zu einer Verringerung des Anstellwinkels und damit der Kräfte am Ruder. Diese Wechselwirkung zwischen Ruder, Rumpf und Propeller wurde für tiefes Wasser von SÖDING /13/ berechnet.

Für flaches Wasser wurden theoretische Berechnungen der Kräfte und Momente bei seitlich gelegtem Ruder bisher nur von HESS /14/ bekannt. Hess untersuchte nach der Tragflächentheorie einen stark idealisierten Fall: Ruder und Schiff werden durch eine senkrechte, rechteckige Platte dargestellt, die im hinteren Bereich (Ruder) abknickt. Vernachlässigt wird dabei nicht nur die Dicke des Rumpfes, sondern auch die in der Praxis fast immer vorhandene Lücke zwischen Rumpf und Ruder (der Schraubenbrunnen), der vor allem für die Rudermomente wesentlich ist.

Die genannten theoretischen Berechnungsverfahren sind für praktische Vorhersagen des Manövrierverhaltens von Schiffen auf flachem Wasser zu ungenau. Deshalb werden auch "empirische" Berechnungsverfahren entwickelt, die auf Regressionsformeln für die Kräfte und Momente an Ruder und Schiff beruhen. Während der Typ dieser Formeln teilweise in Anlehnung an theoretische Überlegungen gewählt wird, werden die Koeffizienten durch Analyse von Modellversuchen bestimmt. Solche Verfahren haben FUJINO und ISHIGURO /7/ sowie HIRANO et al. /6/ vorgestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, für die einzelnen Teilprobleme die jeweils am besten geeigneten theoretischen Ansätze auszuwählen, z.T. neu herzuleiten und von tiefem auf flaches Wasser umzustellen, nach neu entwickelten numerischen Verfahren genau auszuwerten und die Ergebnisse mit vorhandenen Modellversuchsergebnissen zu vergleichen, um so zu einem praktisch brauchbaren Vorhersageverfahren für die Manövriereigenschaften von Schiffen auf flachem Wasser zu kommen. Vernachlässigt werden dabei Einflüsse der Zähigkeit und die Verformung der Wasseroberfläche; bei einer praktischen Anwendung müßten hierfür empirische Korrekturen vorgenommen werden.

Für die Bestimmung der Rumpfkkräfte wird die Theorie schlanker Körper benutzt. Sie benötigt Kennwerte der zweidimensionalen Nahfeld-Strömung in den Spantebenen, die sog. Versperrungskoeffizienten. Diese werden in Kapitel 1 nach einer Kollokationsmethode berechnet, indem die Spantumströmung durch eine Reihe von Punktquellen innerhalb der Spantkontur angenähert wird. Jede Quelle wird dabei unendlich oft an der Wasseroberfläche und am Wasserboden gespiegelt, um die dort einzuhaltenden Randbedin-

gungen zu erfüllen. Die berechneten Versperrungskoeffizienten werden mit theoretischen Ergebnissen für elliptische Querschnitte verglichen. Außerdem werden Werte für Serien von Lewis-Spannten (das sind konforme Abbildungen eines Halbkreises durch die Funktion $z + az^{-1} + bz^{-3}$) sowie für die Querschnitte eines Frachters (Mariner) und eines Tankers (Tokyo Maru) bei verschiedenen Wassertiefen angegeben.

In Kapitel 2 wird die zentrale Gleichung der Theorie von NEWMAN /9/ neu (direkter und detaillierter) hergeleitet. Es ist eine Integro-Differentialgleichung, deren Kern den Versperrungskoeffizienten enthält und deren Lösung die Anströmgeschwindigkeit der Schiffsquerschnitte in Querschiffsrichtung abhängig von der Schiffs-Längenkoordinate ergibt. Zur Lösung der Gleichung wird ein spezielles Finite-Elemente-Verfahren entwickelt und auf die zwei genannten Beispielschiffe angewendet. Das FE-Verfahren erscheint für diese Anwendungen besser geeignet als die in der Aerodynamik verwendete Methode von MULTHOFF /15/.

In Kapitel 3 wird der schon von Newman angegebene Zusammenhang zwischen Versperrungskoeffizient, Anströmgeschwindigkeit der Schiffsquerschnitte und den von der Beschleunigung abhängigen hydrodynamischen Kräften und Momenten am Schiffsrumpf detailliert abgeleitet. Für die zwei Beispielschiffe werden die hydrodynamische Masse für Querbewegung und das Trägheitsmoment bei Drehbewegung um die Hochachse berechnet und mit Versuchsergebnissen von FUJINO /3/ verglichen.

Kapitel 4 befaßt sich mit den Kräften und Momenten am Schiffsrumpf bei stationärer Quer- und Drehbewegung und einer überlagerten Längsbewegung. Nach einer theoretischen Herleitung dieser Kräfte entsprechend der Theorie schlanker Körper wird diskutiert, wie der Einfluß der Zähigkeit des Wassers näherungsweise berücksichtigt werden kann, indem statt der Kutta-Bedingung am Hinterende des Rumpfes eine entsprechende Bedingung weiter vorn am Schiff angesetzt wird; damit soll der Strömungsablösung bei Schräganströmung des Rumpfes Rechnung getragen werden. Die nach diesem Verfahren berechneten Kräfte und Momente an den zwei Beispielschiffen werden wieder mit Modellversuchsergebnissen verglichen. Außerdem werden berechnete und gemessene Stabilitätskennwerte für die stationäre Drehbewegung miteinander ver-

glichen.

In Kapitel 5 werden die vom Ruder hervorgerufenen, am Ruder und am Rumpf angreifenden Kräfte und Momente bestimmt. Hierfür werden die von SÖDING /13/ für tiefes Wasser angegebenen Methoden auf flaches Wasser erweitert. Im einzelnen sind dabei erfaßt: die Kontraktion des Propellerstrahls hinter dem Propeller; die Veränderlichkeit der Zuströmung zum Ruder in Querschiffsrichtung; die vertikale Veränderlichkeit der Ruderzuströmung und der Einfluß der Wasseroberfläche; die Wechselwirkung zwischen Rumpf und Ruder. Für die zwei zuerst genannten Einflüsse wird der Flachwassereinfluß als vernachlässigbar angesehen, so daß die Tiefwasserergebnisse in Form von Regressionsgleichungen übernommen werden können. Für die beiden zuletzt genannten Einflüsse werden numerische Strömungsmodelle benutzt, die mit Wirbelbelegungen arbeiten, die unendlich oft am Boden und an der Wasseroberfläche gespiegelt sind. Die Ergebnisse werden wieder mit Modellversuchsergebnissen von Fujino und mit theoretischen Ergebnissen von HESS /14/ verglichen.

1. Flachwasser-Effekt und Versperrungskoeffizient

Zunächst wird ein Schiffskörper bei seitlicher oder schräger Anströmung untersucht. Wenn das Wasser tief und der Schiffskörper schlank ist, ist das Strömungsfeld nahezu zweidimensional in den Querschnittsebenen (Spantebenen) senkrecht zur Schiffslängsachse. Auf flachem Wasser bildet der Schiffskörper dagegen eine Versperrung. Das Wasser strömt nicht nur unter dem Schiff hindurch, sondern zum Teil seitlich um den Körper herum. Die Umströmung eines Querschnitts hängt dann auch von den Nachbarquerschnitten ab. Die Strömung ist dann zwar dreidimensional; in großem Abstand vom Schiff nähert sie sich aber einer zweidimensionalen Strömung in horizontalen Ebenen an, und dicht beim Schiff verläuft sie nahezu zweidimensional in den Spantebenen. Dementsprechend untersucht man zunächst getrennt eine Fernfeldströmung in der Horizontalebene und Nahfeldströmungen in allen Querschnittsebenen. Durch Verknüpfen der Ansätze für beide Bereiche erhält man Randbedingungen, mit denen die Lösung in beiden Bereichen ermittelt werden kann.

Die Strömung wird unter folgenden Voraussetzungen untersucht: Das Wasser sei inkompressibel, reibungsfrei und wirbelfrei. Weit vom Körper entfernt gehe die Strömung in eine zunächst querschiffs vorausgesetzte Parallelströmung konstanter Geschwindigkeit v über. v wird so klein vorausgesetzt, daß sich keine Wellen an der Wasseroberfläche bilden. Das Schiff sei schlank, d.h. seine Breiten- und Höhenabmessungen sind viel kleiner als die Schiffslänge. Das Wasser sei seitlich unbegrenzt und nach unten durch eine horizontale Ebene begrenzt.

Die Randbedingung an der Wasseroberfläche wird durch Spiegelung des Schiffsrumpfes und des Wasserbodens an der Wasseroberfläche erfüllt. Zu untersuchen ist damit die Bewegung eines doppelt-symmetrischen Körpers in einer durch zwei parallele Ebenen begrenzten Flüssigkeit. Der Abstand zwischen den beiden Ebenen entspricht der doppelten Wassertiefe.

Zur Beschreibung der Strömung wird ein körperfestes Koordinatensystem benutzt, dessen Ursprung auf der Schnittgeraden beider Symmetrieebenen etwa auf halber Schiffslänge (in der Hauptspantebene) liegt, wie Abb. 1.1 zeigt.

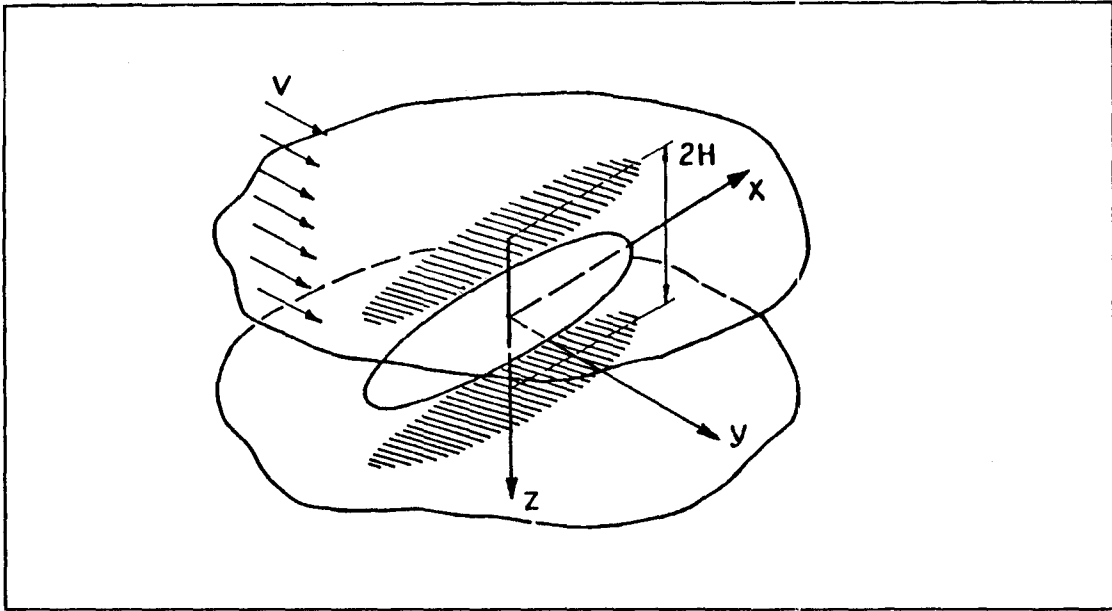


Abb. 1.1 Koordinatensystem und Bezeichnungen

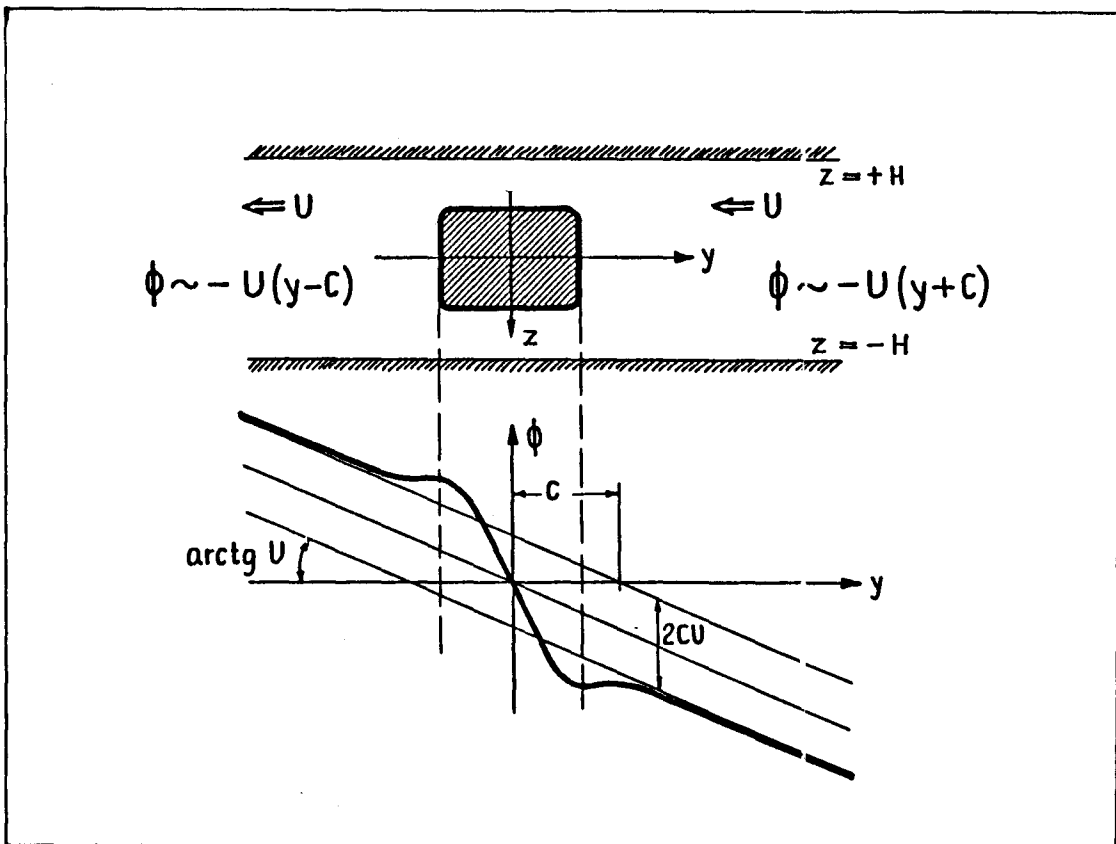


Abb. 1.2 Nahfeld: Ebene Strömung eines Querschnittes und ihr Potential

1.1 Das Potential des Nah- und des Fernfeldes

Für das beschriebene Strömungsfeld ist das Strömungspotential Φ zu berechnen. Φ muß folgende Bedingungen erfüllen:

i) Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeit:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad \text{im gesamten Flüssigkeitsraum}$$

ii) Bedingung an der Wasseroberfläche:

$$\Phi_z = 0 \quad \text{bei } z = 0$$

iii) Bedingung am Wasserboden für flaches Wasser:

$$\Phi_z = 0 \quad \text{bei } z = \pm H$$

iv) Bedingung im Unendlichen: Weit vom Körper entfernt soll die ungestörte Anströmung mit dem Geschwindigkeitsvektor $(0, v, 0)$ herrschen.

v) Stromlinien verlaufen entlang der Oberfläche des Körpers, die hier durch $y = Y(x, z)$ beschrieben sei:

$$\left. \frac{Dy}{Dt} \right|_{y=Y(x,z)} = Y_x \Phi_x + Y_z \Phi_z \quad \text{bei } y = Y(x, z)$$

NEWMAN /9/ hat dieses Problem nach der Perturbationsmethode durch Aufspaltung in ein Strömungs-Nahfeld und ein Fernfeld behandelt, die in einem Übergangsbereich aneinander angepaßt werden. Die Methode setzt voraus, daß die Schiffslänge wesentlich größer als Breite und Wassertiefe ist. Diese Methode soll hier ebenfalls verwendet werden. Sie ist in Kapitel 2 detailliert begründet. Dabei ergibt sich, daß das Nahfeld um den Körper bis zu seitlichen Abständen von der Größenordnung der Schiffsbreite und der Wassertiefe eine zweidimensional in den Spantebenen des Schiffes ($x = \text{konstant}$) verlaufende Strömung ist, die die zweidimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

im gesamten Flüssigkeitsraum erfüllt und für jede Spantebene getrennt berechnet werden kann. Abb. 1.2 zeigt das zu behandelnde Strömungsproblem: Der Schiffsquerschnitt befindet sich zwischen zwei parallelen Wänden und wird mit der Geschwindigkeit U in negativer y -Richtung angeströmt. U ergibt sich erst durch Anpassung des Nah- und des Fernfeldes aneinander und ist im allgemeinen

kleiner als die Quergeschwindigkeit v des betreffenden Schiffsquerschnitts relativ zum weit entfernten Wasser.

Infolge der Versperrung des Flüssigkeitsquerschnittes durch den umströmten Körper (Abb. 1.2) unterscheiden sich die Asymptoten des Potentials für großen Abstand $|y|$ vom Körper:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \phi = -U(y \pm C) \quad (1.1)$$

C charakterisiert die Versperrung und wird deshalb Versperrungskoeffizient genannt.

Als Fernfeld wird der Bereich größerer Abstände vom Schiff - von der Größenordnung der Schiffslänge - bezeichnet. Die Strömung ist dort zweidimensional in horizontalen Ebenen. Im Grenzfall unendlicher Schlankheit, d.h. wenn Breite $B \ll$ Länge L gilt, erscheint der Körper als eine gerade Linie oder eine poröse Platte, die die Strömung schneidet (Abb. 1.3). Die Strömung kann dann beschrieben werden als Überlagerung einer Parallelströmung mit der Quergeschwindigkeit v des Schiffsquerschnitts und einer Störströmung durch das Schiff, die von einer Dipolverteilung auf der x -Achse im Bereich des Schiffskörpers zwischen $-L/2$ und $+L/2$ erzeugt wird.

Das Potential ergibt sich damit zu:

$$\phi = -v \left[y + \int_{-L/2}^{L/2} f(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] \quad (1.2)$$

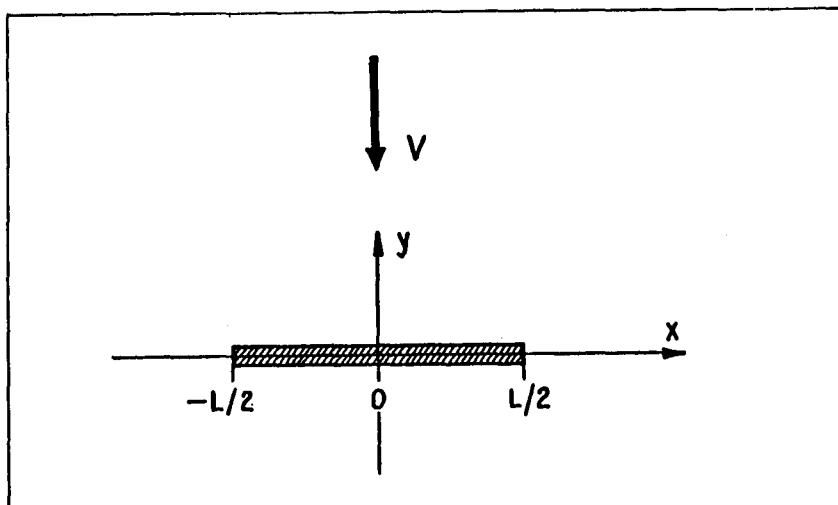


Abb. 1.3 Fernfeld

Auf der Grundlage der Theorie schlanker Körper findet man mit der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen eine Integro-Differentialgleichung für die zunächst unbekannte Anströmungsgeschwindigkeit $U(x)$ im Nahfeld:

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\frac{d}{dt} [U(t)C(t)]}{t-x} dt + v \quad (1.3)$$

Diese Gleichung entsteht durch Verknüpfen der Lösung im Nahfeld mit der Fernfeldlösung.

Um diese Gleichung zu lösen, muß man zuerst den Versperrungskoeffizienten C berechnen. Zu diesem Zweck untersucht man das Nahfeld.

1.2 Die Eigenschaften des Versperrungskoeffizienten C

- i) C hat die Dimension einer Länge.
- ii) C hängt von der Form des Querschnitts und von der Wassertiefe ab. Deshalb variiert C in der Regel entlang der Schiffslänge, d.h. $C = C(x)$.
- iii) Für festen Schiffstiefgang D gilt: Je größer die Wassertiefe H ist, desto kleiner ist C . C geht für große Wassertiefe H gegen Null und für $H \rightarrow D$ gegen unendlich.
- iv) C wächst mit der Querschnittsbreite. Für vorn und hinten spitze Schiffe wird C an den Schiffsenden Null.

Der Versperrungskoeffizient C kann z.B. mit der Methode der konformen Abbildung, mit Singularitäten-, Finite-Elemente- oder Finite-Differenzen-Methoden berechnet werden.

1.3 Numerische Bestimmung des Versperrungskoeffizienten C für beliebige Querschnittsform

Das Potential muß im Nahfeld die Kontinuitätsgleichung

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad \text{im gesamten Flüssigkeitsraum erfüllen. Außerdem}$$

sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

$\phi_n = 0$ für alle Punkte y, z , die auf der Kontur des Querschnitts liegen. Der Index n bezeichnet hier eine Ableitung in Richtung der Normalen auf der Querschnittskontur. Außerdem muß an den Wänden $z = \pm H$ die Bedingung $\phi_z = 0$ gelten.

Da der Querschnitt zu den Ebenen $y=0$ und $z=0$ symmetrisch ist, wird nur ein Quadrant betrachtet.

Die Querschnittskontur ist bekannt. Im Innern hinter der Kontur des Querschnitts werden M Quellen Q_j ($j=1, \dots, M$) angeordnet (Abb. 1.4). Ihre Quellergiebigkeit sei g_j . Weiter werden M Punkte P_k ($k=1, \dots, M$) auf der Kontur des Querschnitts angeordnet. Nur an diesen Kollokationspunkten wird die Bedingung $\phi_n = 0$ erfüllt.

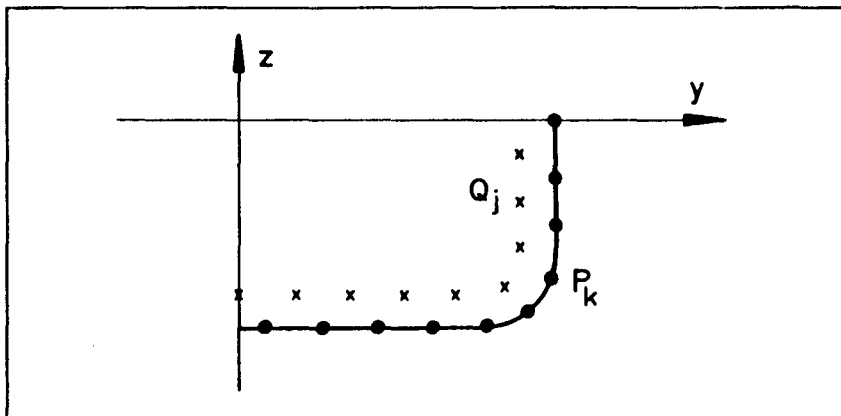


Abb. 1.4 Quellverteilung hinter der Kontur des Querschnitts

Zur Beschreibung der Strömung wird die komplexe Variable ζ eingeführt:

$$\zeta = y + iz$$

Das Potential infolge einer Quelle der Ergiebigkeit g_j im Punkt ζ_j ist:

$$\phi_j = \operatorname{Re} \left[\frac{g_j}{2\pi} \cdot \log (\zeta - \zeta_j) \right] \quad (1.4)$$

Wegen der Symmetrie des Körpers und der Randbedingungen genügt es, nur die Quellstärken der in einem Quadranten des Querschnitts

liegenden Quellen als unbekannt anzusehen und jeder dieser "Urquellen" ein Spiegelbild auf der anderen Seite der Wasseroberfläche von gleicher Quellergiebigkeit und diesen beiden Quellen Spiegelbilder auf der entgegengesetzten Schiffseite von umgekehrtem Vorzeichen zuzuordnen. Einer Urquelle und ihren drei Spiegelbildern entspricht das Potential

$$\phi_j = \operatorname{Re} \left\{ \frac{q_j}{2\pi} \left[\log(\zeta - \zeta_j) + \log(\zeta - \zeta_j^*) - \log(\zeta + \zeta_j) - \log(\zeta + \zeta_j^*) \right] \right\} \quad (1.5)$$

Dabei bedeutet * das Konjugiert-Komplexe. Zur Vereinfachung wird im folgenden die Abkürzung

$$\sum_s \log(\zeta - \zeta_j) = \log(\zeta - \zeta_j) + \log(\zeta - \zeta_j^*) - \log(\zeta + \zeta_j) - \log(\zeta + \zeta_j^*) \quad (1.6)$$

benannt.

Für M Quellen und zusätzlich die Querströmung mit der Geschwindigkeit U ergibt sich dann das Potential

$$\phi = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^M \sum_s \frac{q_j}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_j) - U\zeta \right] \quad (1.7)$$

Damit auch die festen Wände bei $z = \pm H$ Stromlinien werden, werden die Quellen an diesen Linien unendlich oft gespiegelt. So ergibt sich schließlich das Potential:

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^M \sum_s \frac{q_j}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_j + 2ikH) - U\zeta \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^M \sum_s \frac{q_j}{2\pi} \log \sinh \frac{\pi}{2H} (\zeta - \zeta_j) - U\zeta \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

(Dabei ist die Darstellung der sinh-Funktion durch ein unendliches Produkt benutzt worden:

$$\sinh \frac{\pi}{2H} (\zeta - \zeta_j) = (\zeta - \zeta_j) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\zeta - \zeta_j}{2Hk} \right)^2 + 1 \right] + \text{Konstante}$$

Die Konstante spielt keine Rolle und wird deshalb weggelassen.)

Das Potential ϕ ist dann gegeben durch:

$$\phi = \sum_{j=1}^M g_j \cdot G(y, z, y_j, z_j) - Uy \quad (1.9)$$

mit:

$$G(y, z, y_j, z_j) = \operatorname{Re} \sum_s \left[\frac{1}{2\pi} \log \sinh \frac{\pi}{2H} (\zeta - \zeta_j) \right] \quad (1.10)$$

Hier ist $G(y, z, y_j, z_j)$ die Greenfunktion für die Wirkung einer Quelle im Punkt $\{y_j, z_j\}$ und aller Spiegelbilder dieser Quelle auf den "Feldpunkt" $\{y, z\}$.

Dann ergibt sich aus der Randbedingung am Punkt $P_k = (y_k, z_k)$ auf der Körperkontur:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} (y_k, z_k) = \frac{\partial}{\partial n} \sum_{j=1}^M g_j \cdot G(y, z, y_j, z_j) \Big|_{\substack{y=y_k \\ z=z_k}} - \frac{\partial}{\partial n} Uy \Big|_{y=y_k} \quad (1.11)$$

Umgeformt:

$$\sum_{j=1}^M g_j \cdot \frac{\partial}{\partial n} G(y, z, y_j, z_j) \Big|_{\substack{y=y_k \\ z=z_k}} = U \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \Big|_{y=y_k} \quad (1.12)$$

Um die Quellergiebigkeit g_j zu ermitteln, ist daher folgendes Gleichungssystem aufzulösen:

$$\sum_{j=1}^M g_j \cdot B_{kj} = T_k \quad (1.13)$$

mit

$$T_k = U \cdot \frac{\partial y}{\partial n} \Big|_{y=y_k} = U \cdot n_{y_k} ; \quad (1.14)$$

$$B_{kj} = \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\substack{y=y_k \\ z=z_k}} = \left[n_y \cdot \frac{\partial G}{\partial y} + n_z \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \right] \Big|_{\substack{y=y_k \\ z=z_k}} \quad (1.15)$$

$k=1$ bis M .

(n_y, n_z) ist hier der Normalenvektor auf der Querschnittskontur.

Setzt man in (1.15) den Ausdruck (1.10) für G ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 B_{kj} &= n_y \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_s \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \log \sinh \frac{\pi}{2H} [(y+iz) - (y_j+iz_j)] \right\} \right) \Big|_{\substack{y=y_k \\ z=z_k}} \\
 &+ n_z \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_s \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \log \sinh \frac{\pi}{2H} [(y+iz) - (y_j+iz_j)] \right\} \right) \Big|_{\substack{y=y_k \\ z=z_k}} \\
 &= n_{y_k} \cdot \sum_s \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi}{H} (y_k - y_j)}{\cosh \frac{\pi}{H} (y_k - y_j) - \cos \frac{\pi}{H} (z_k - z_j)} \right\} \\
 &+ n_{z_k} \cdot \sum_s \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi}{H} (z_k - z_j)}{\cosh \frac{\pi}{H} (y_k - y_j) - \cos \frac{\pi}{H} (z_k - z_j)} \right\}
 \end{aligned}$$

(1.16)

Hat man aus diesem Gleichungssystem die Quellergiebigkeit ϑ_j bestimmt, kann man das Potential ϕ an beliebigen Punkten (y, z) aus (1.9) berechnen.

Insbesondere ergibt sich für $|y| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \phi = -U(y \pm c) = \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \left\{ \sum_{j=1}^M \vartheta_j \cdot G(y, z, y_j, z_j) - Uy \right\}$$

(1.17)

$$\begin{aligned}
 &\lim_{y \rightarrow \pm \infty} G(y, z, y_j, z_j) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_s \left\{ \log \sinh \frac{\pi}{2H} [(y - y_j) + i(z - z_j)] \right\} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_s \left[\log \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2H} \left[(y-y_j) + i(z-z_j) \right]} - e^{-\frac{\pi}{2H} \left[(y-y_j) + i(z-z_j) \right]} \right) \right] \right\} \\
 &= \pm \operatorname{Re} \left(\sum_s \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2H} \left[(y-y_j) + i(z-z_j) \right] - \log 2 \right\} \right) \\
 &= \pm \frac{1}{4H} \left[(y-y_j) + (y-y_j) - (y+y_j) - (y+y_j) \right] \\
 &= \mp \frac{y_j}{H}
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Hier gilt: "-" für $y \rightarrow +\infty$
 "+" für $y \rightarrow -\infty$

Damit wird

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \phi = -U(y \pm C) = \mp \sum_{j=1}^M g_j \cdot \frac{y_j}{H} - Uy$$

Daher folgt

$$C = \frac{1}{UH} \sum_{j=1}^M g_j y_j \tag{1.19}$$

1.4 Analyse der Ergebnisse für C(x)

1.4.1 Prüfung für ellipsenähnliche Querschnitte

Ein horizontaler Dipol in der Wasseroberfläche erzeugt zusammen mit seinen unendlich vielen Spiegelbildern an den Ebenen $z = \pm H$ eine Querschnittsform, die ungefähr einer Ellipse entspricht, wenn das Verhältnis D/H nicht in der Nähe von 1 liegt. Für diesen Querschnitt wurde von LAMB /26/ das komplexe Potential bei der Umströmung in einem durch $z = H$ und $z = -H$ begrenzten

Kanal angegeben:

$$W(\zeta) = U \left(\zeta + C \cdot \coth \frac{\pi \zeta}{H} \right) \quad (1.20)$$

mit $\zeta = y + iz$; U = Anströmungsgeschwindigkeit;

C ist eine beliebige reelle Zahl.

Aufgespalten in Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= \phi + i\psi \\ &= U \left(y + iz + C \frac{\sinh \frac{2\pi y}{H} - i \sin \frac{2\pi z}{H}}{\cosh \frac{2\pi y}{H} - \cos \frac{2\pi z}{H}} \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\phi = U \left(y + \frac{C \sinh \frac{2\pi y}{H}}{\cosh \frac{2\pi y}{H} - \cos \frac{2\pi z}{H}} \right) \quad (1.22)$$

$$\psi = U \left(z - \frac{C \sin \frac{2\pi z}{H}}{\cosh \frac{2\pi y}{H} - \cos \frac{2\pi z}{H}} \right) \quad (1.23)$$

Die Stromlinie $\psi = 0$ besteht aus zwei Teilen: der Geraden $z = 0$ und der Ellipse mit den Halbachsen Y, Z , wobei Y und Z durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\begin{cases} \sinh^2 \frac{\pi Y}{H} = \frac{\pi C}{H} \\ z \cdot \tan \frac{\pi Z}{H} = C \end{cases} \quad (1.24)$$

Zu gegebenem C sind Y und Z aus der Wassertiefe H zu bestimmen. Aus (1.22) folgt: Für $y \rightarrow \pm \infty$ geht $\phi \rightarrow U(y \pm C)$; C ist also der schon bekannte Versperrungskoeffizient. Hier wird diese Lösung benutzt, um die Genauigkeit der numerischen Berechnung zu überprüfen. Für Ellipsen, deren Achsenverhältnis (1.24) entspricht, werden C nach (1.24) und C_1 nach dem numerischen Programm mit verschiedenen Anzahlen M von Quellen pro Quadrant bestimmt. Die Resultate sind in den Tabellen 1.1 - 1.4 angegeben.

TABELLE 1.1 DIE VERSPERRUNGSAKTOREN FUER QUERSCHNITTE
DER ELLIPTISCHEN FORMEN

(M=21)

1	H/D	1	THEORETISCHER VER- SPERRUNGSFAKTOR C/D	1	RECHNERISCHER VER- SPERRUNGSFAKTOR C1/D	1	RELATIVER FEHLER	1
1	1.1	1	6.955152	1	6.143701	1	0.1165	1
1	1.2	1	3.732050	1	3.591322	1	0.0375	1
1	1.3	1	2.036783	1	2.583708	1	0.0227	1
1	1.4	1	2.076522	1	2.044686	1	0.0154	1
1	1.5	1	1.732051	1	1.709711	1	0.0135	1
1	1.6	1	1.496606	1	1.478211	1	0.0120	1
1	1.7	1	1.324214	1	1.309375	1	0.0113	1
1	1.8	1	1.191754	1	1.179292	1	0.0109	1
1	1.9	1	1.086290	1	1.075520	1	0.0099	1
1	2.0	1	1.000000	1	0.990975	1	0.0090	1
1	3.0	1	0.577350	1	0.572951	1	0.0080	1
1	4.0	1	0.414214	1	0.411071	1	0.0070	1
1	5.0	1	0.324920	1	0.322505	1	0.0074	1
1	6.0	1	0.267949	1	0.265979	1	0.0070	1
1	7.0	1	0.228243	1	0.226576	1	0.0073	1
1	8.0	1	0.198912	1	0.197644	1	0.0075	1
1	9.0	1	0.176327	1	0.175048	1	0.0072	1
1	10.0	1	0.158384	1	0.157238	1	0.0070	1
1	11.0	1	0.142778	1	0.142739	1	0.0072	1
1	21.0	1	0.074940	1	0.074400	1	0.0072	1
1	31.0	1	0.050714	1	0.050349	1	0.0072	1
1	41.0	1	0.038331	1	0.038056	1	0.0072	1
1	51.0	1	0.030810	1	0.030588	1	0.0072	1
1	61.0	1	0.025756	1	0.025571	1	0.0072	1
1	71.0	1	0.022128	1	0.021950	1	0.0080	1
1	81.0	1	0.019395	1	0.019243	1	0.0078	1
1	91.0	1	0.017263	1	0.017140	1	0.0071	1

=====

TABELLE 1.2 DIE VERSPERRUNGSFAKTOREN FUER QUERSCHNITTE DER ELLIPTISCHEN FORMEN

(M=41)

1	1	1	1	1	1	1	1
1	H/D	1	THEORETISCHER VER-	1	RECHNERISCHER VER-	1	RELATIVER
1		1	SPERRUNGSFAKTOR	1	SPERRUNGSFAKTOR	1	FEHLER
1		1	C/D	1	C1/D	1	
1		1		1		1	
1	1.01	1	64.293945	1	23.272406	1	
1	1.02	1	32.457455	1	18.340195	1	
1	1.03	1	21.842054	1	15.264640	1	
1	1.04	1	16.532009	1	12.710716	1	
1	1.05	1	13.344089	1	10.912447	1	
1	1.06	1	11.217291	1	9.571024	1	
1	1.07	1	9.696905	1	8.530066	1	
1	1.08	1	8.555549	1	7.698318	1	
1	1.09	1	7.666838	1	7.018476	1	
1	1.1	1	6.955152	1	6.516384	1	0.0630
1	1.2	1	3.732050	1	3.654644	1	0.0210
1	1.3	1	2.636783	1	2.609339	1	0.0100
1	1.4	1	2.076522	1	2.060783	1	0.0075
1	1.5	1	1.732051	1	1.721298	1	0.0062
1	1.6	1	1.496606	1	1.488491	1	0.0054
1	1.7	1	1.324214	1	1.317697	1	0.0049
1	1.8	1	1.191754	1	1.186298	1	0.0045
1	1.9	1	1.086290	1	1.081586	1	0.0043
1	2.0	1	1.000000	1	0.996043	1	0.0040
1	3.0	1	0.577350	1	0.575357	1	0.0035
1	4.0	1	0.414214	1	0.412906	1	0.0032
1	5.0	1	0.324920	1	0.323875	1	0.0032
1	6.0	1	0.267949	1	0.267097	1	0.0032
1	7.0	1	0.228243	1	0.227550	1	0.0030
1	8.0	1	0.198912	1	0.198286	1	0.0031
1	9.0	1	0.176327	1	0.175773	1	0.0031
1	10.0	1	0.158384	1	0.157888	1	0.0031
1	11.0	1	0.142778	1	0.143328	1	0.0031
1	21.0	1	0.074940	1	0.074668	1	0.0036
1	31.0	1	0.050714	1	0.050531	1	0.0036
1	41.0	1	0.038331	1	0.038192	1	0.0036
1	51.0	1	0.030810	1	0.030684	1	0.0041
1	61.0	1	0.025756	1	0.025649	1	0.0042
1	71.0	1	0.022128	1	0.022029	1	0.0045
1	81.0	1	0.019395	1	0.019301	1	0.0048
1	91.0	1	0.017263	1	0.017162	1	0.0059

TABELLE 1.3 DIE VERSPERRUNGSFAKTOREN FUER QUERSCHNITTE
DER ELLIPTISCHEN FORMEN

(M=61)

1	H/D	1	THEORETISCHER VER- SPERRUNGSFAKTOR C/D	1	RECHNERISCHER VER- SPERRUNGSFAKTOR C1/D	1	RELATIVE FEHLER	1
1		1		1		1		1
1	1.01	1	64.293945	1	26.136890	1		1
1	1.02	1	32.457455	1	20.032135	1		1
1	1.03	1	21.842054	1	15.794571	1		1
1	1.04	1	16.532009	1	13.095776	1		1
1	1.05	1	13.344089	1	11.201884	1		1
1	1.06	1	11.217291	1	9.971943	1		1
1	1.07	1	9.696905	1	8.835905	1		1
1	1.08	1	8.555549	1	7.936693	1		1
1	1.09	1	7.666888	1	7.207727	1		1
1	1.1	1	6.955152	1	6.605256	1	0.0503	1
1	1.2	1	3.732050	1	3.674857	1	0.0153	1
1	1.3	1	2.636783	1	2.617524	1	0.0073	1
1	1.4	1	2.076522	1	2.066697	1	0.0047	1
1	1.5	1	1.732051	1	1.725395	1	0.0038	1
1	1.6	1	1.496606	1	1.491611	1	0.0033	1
1	1.7	1	1.324214	1	1.320217	1	0.0030	1
1	1.8	1	1.191754	1	1.188417	1	0.0028	1
1	1.9	1	1.086290	1	1.083415	1	0.0027	1
1	2.0	1	1.000000	1	0.997474	1	0.0025	1
1	3.0	1	0.577350	1	0.576142	1	0.0021	1
1	4.0	1	0.414214	1	0.413389	1	0.0019	1
1	5.0	1	0.324920	1	0.324248	1	0.0020	1
1	6.0	1	0.267949	1	0.267401	1	0.0021	1
1	7.0	1	0.228243	1	0.227780	1	0.0020	1
1	8.0	1	0.198912	1	0.198510	1	0.0020	1
1	9.0	1	0.176327	1	0.175941	1	0.0022	1
1	10.0	1	0.158384	1	0.158038	1	0.0024	1
1	11.0	1	0.142778	1	0.143465	1	0.0022	1
1	21.0	1	0.074940	1	0.074777	1	0.0022	1
1	31.0	1	0.050714	1	0.050602	1	0.0022	1
1	41.0	1	0.038331	1	0.038602	1	0.0029	1
1	51.0	1	0.030810	1	0.030734	1	0.0025	1
1	61.0	1	0.025756	1	0.025660	1	0.0037	1
1	71.0	1	0.022128	1	0.022068	1	0.0027	1
1	81.0	1	0.019395	1	0.019316	1	0.0040	1
1	91.0	1	0.017263	1	0.017164	1	0.0057	1

TABELLE 1.4 DIE VERSPERRUNGSFAKTOREN FUER QUERSCHNITTE
DER ELLIPTISCHEN FORMEN

(M=81)

1	1	1	THEORETISCHER VER-	1	RECHNERISCHER VER-	1	RELATIVER	1
1	H/D	1	SPERRUNGSFAKTOR	1	SPERRUNGSFAKTOR	1	FEHLER	1
1	1	1	C/D	1	C1/D	1		1
1	1	1		1		1		1
1	1.01	1	64.243945	1	26.114923	1		1
1	1.02	1	32.457455	1	20.219185	1		1
1	1.03	1	21.842054	1	15.970471	1		1
1	1.04	1	16.532009	1	13.246513	1		1
1	1.05	1	13.344089	1	11.326287	1		1
1	1.06	1	11.217291	1	9.895119	1		1
1	1.07	1	9.696905	1	8.787185	1		1
1	1.08	1	8.555549	1	7.904937	1		1
1	1.09	1	7.666888	1	7.265596	1		1
1	1.1	1	6.955152	1	6.652398	1	0.0435	1
1	1.2	1	3.732050	1	3.685480	1	0.0124	1
1	1.3	1	2.636783	1	2.621807	1	0.0059	1
1	1.4	1	2.076522	1	2.069094	1	0.0036	1
1	1.5	1	1.732051	1	1.726585	1	0.0031	1
1	1.6	1	1.496606	1	1.492558	1	0.0026	1
1	1.7	1	1.324214	1	1.321005	1	0.0024	1
1	1.8	1	1.191754	1	1.189092	1	0.0023	1
1	1.9	1	1.086290	1	1.084185	1	0.0019	1
1	2.0	1	1.000000	1	0.998002	1	0.0020	1
1	3.0	1	0.577350	1	0.576472	1	0.0016	1
1	4.0	1	0.414214	1	0.413570	1	0.0015	1
1	5.0	1	0.324920	1	0.324460	1	0.0015	1
1	6.0	1	0.267949	1	0.267547	1	0.0015	1
1	7.0	1	0.228243	1	0.227867	1	0.0013	1
1	8.0	1	0.198912	1	0.198586	1	0.0015	1
1	9.0	1	0.176327	1	0.176039	1	0.0017	1
1	10.0	1	0.158384	1	0.158126	1	0.0018	1
1	11.0	1	0.142778	1	0.143544	1	0.0016	1
1	21.0	1	0.074940	1	0.074798	1	0.0019	1
1	31.0	1	0.050714	1	0.050579	1	0.0023	1
1	41.0	1	0.038331	1	0.038232	1	0.0026	1
1	51.0	1	0.030810	1	0.030758	1	0.0017	1
1	61.0	1	0.025756	1	0.025691	1	0.0025	1
1	71.0	1	0.022128	1	0.022059	1	0.0031	1
1	81.0	1	0.019395	1	0.019325	1	0.0036	1
1	91.0	1	0.017263	1	0.017169	1	0.0054	1

Sie zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen dem numerischen und dem analytischen Ergebnis außer für Verhältnisse Wassertiefe H /Tiefgang D unter 1,2. Dies gilt schon bei der geringsten benutzten Anzahl von Quellen $M = 21$. Für H/D nahe 1 ist keine genaue Übereinstimmung zwischen C_1 und C möglich, weil dabei die Querschnittsform, die der analytischen Lösung zugrunde liegt, von einer Ellipse deutlich abweicht. Die Übereinstimmung der numerisch mit $M = 61$ und $M = 81$ berechneten C -Werte untereinander, selbst für den kleinsten untersuchten Wert $H/D = 1,01$, zeigt jedoch die Zuverlässigkeit des Verfahrens auch für die kleinsten praktisch interessierenden Verhältnisse.

Für die untersuchten Quellanzahlen $M = 81, 61, 41$ bzw. 21 betrug die Rechenzeit 5,8, 3,08, 1,33 bzw. 0,51 Sekunden auf einer VAX 11-780.

1.4.2 Berechnungen für beliebige Querschnittsformen

Mit dem Rechenprogramm kann man beliebige symmetrische und un-symmetrische Querschnittsformen behandeln. Abb. 1.5 zeigt den Versperrungskoeffizienten C für Lewis-Spanten¹⁾ mit einem Seitenverhältnis $HH = \text{Breite } B/\text{Tiefgang } D = 3,0$ und mit Völligkeiten $C_S = \text{Spantfläche}/(B \cdot D)$ zwischen 0,5 und 1 bei verschiedenen Wassertiefen. Tabelle 1.5 zeigt die Resultate für zwei Lewis-Spanten mit gleicher Völligkeit $C_S = 0,8$ und verschiedenen Seitenverhältnissen. Wie zu erwarten, führen eine größere Völligkeit des Querschnitts und ein größeres Seitenverhältnis zu größeren Versperrungskoeffizienten.

Bei der Berechnung zeigte sich, daß der Abstand zwischen der Kontur des Querschnitts und den Quellen und Senken für die Resultate wichtig ist. Der Abstand darf nicht zu klein sein, weil sonst die Strömung entlang der Kontur zu ungleichmäßig wird. Dies führt dann auch dazu, daß die Ergebnisse stark davon abhängen, ob die Quellen den Kollokationspunkten gegenüber liegen oder ob die Quellen gegenüber den Lücken zwischen zwei Kolloka-

1) Lewis-Spanten sind ein schiffbauliches Analogon zum Joukowski-Profil. Es sind konforme Abbildungen von Kreisen um den Nullpunkt $|z| = r$ durch die Funktion $\zeta = Z + a/Z + b/Z^3$. Die von LEWIS /16/ angegebene Transformation ergibt Figuren, die an der Wasseroberfläche gespiegelten Schiffsquerschnitten ähnlich sind.

tionspunkten liegen. Bei zu großem Abstand zwischen Quellen und Kontur wird dagegen das Gleichungssystem fast singular, so daß die numerische Genauigkeit der Lösung schlecht wird. Es hat sich bewährt, den Abstand zwischen Quellen und Kontur etwa zwei- bis dreimal so groß wie zwischen benachbarten Quellen zu wählen.

Als weitere Berechnungsbeispiele werden Ergebnisse für ein Frachtschiff vom Typ "Mariner" und für den Tanker "Tokyo Maru" angegeben, d.h. für ein Schiff mit geringer Völligkeit (Frachter) und ein Schiff mit größerer Völligkeit (Tanker). Da diese beiden Schiffsformen auch für die weiteren Berechnungen benutzt werden, werden ihre Hauptabmessungen in Tabelle 1.6, Spantenriß und Seitenansicht für beide Schiffe in Abb. 1.6 und 1.7 angegeben.

Abb. 1.8 zeigt die Verteilung der Versperrungskoeffizienten über der Schiffslänge für das Mariner-Schiff. Die Koeffizienten wurden für elf Spantquerschnitte nach dem beschriebenen Verfahren für verschiedene Wassertiefen berechnet. Der C-Wert ist im Mittelschiff am größten und geht an beiden Enden gegen Null. Der Verlauf über der Schiffslänge entspricht etwa der Spantflächenverteilung. In den Tabellen 1.7(1) bis (3) sind die Ergebnisse auch für größere Wassertiefen angegeben.

Abb. 1.9 zeigt die entsprechenden Ergebnisse für den Tanker. Im Vergleich zum Mariner-Schiff sind die C-Kurven für die "Tokyo Maru" im Mittelschiff relativ flach und fallen am Bug und am Heck schnell ab. Das entspricht dem längeren parallelen Mittelschiff des dicken Tanker-Modells.

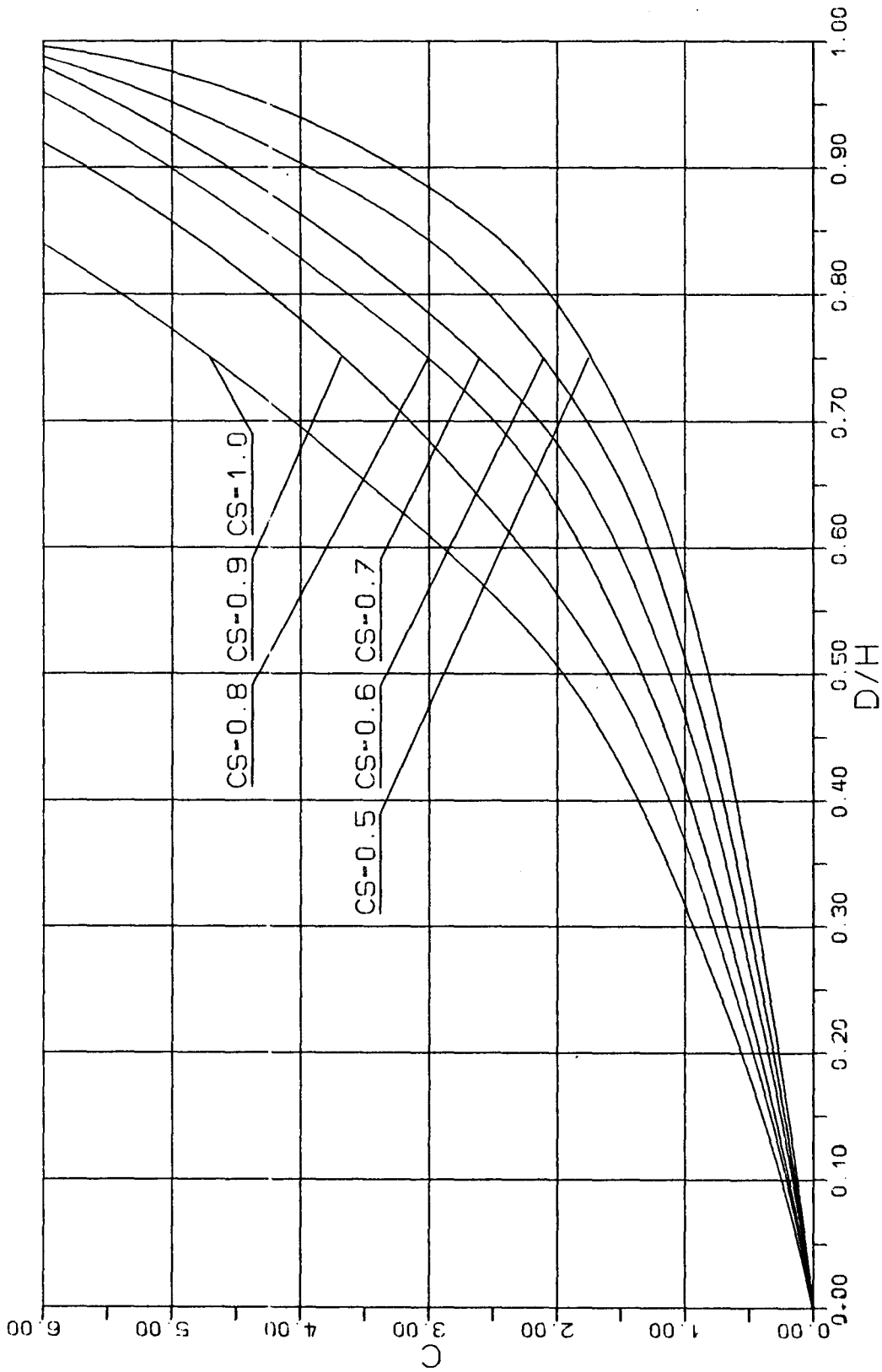


Abb. 1.5 Versperrungskoeffizienten für Lewis-Spanten mit $D = 1,0$ und $B = 3,0$ und verschiedenen Völligkeiten C_S zwischen 0,5 und 1,0 bei verschiedenen Wassertiefen H .

TABELLE 1.5 DIE VERSPERRUNGSFAKTOREN C FUER QUERSCHNITTEN DER LEWIS-SPANTEN

(SEITENVERHAELTNIS $HH=B/D$)

(VOELLIGKEIT $BETA=A/(B*D)=0.8$)

(M=41)

L		1	HH=2.4	1	HH=3.0	1
L	H/D	1	-----+		-----	
L		1	C/D	1	C/D	1
L		1		1		1
=====						
L		1		1		1
L	1.1	1	6.101464	1	7.428668	1
L	1.2	1	3.785350	1	4.563456	1
L	1.3	1	2.827495	1	3.384711	1
L	1.4	1	2.286952	1	2.722388	1
L	1.5	1	1.934699	1	2.292446	1
L	1.6	1	1.684847	1	1.988579	1
L	1.7	1	1.497358	1	1.761326	1
L	1.8	1	1.350876	1	1.584347	1
L	1.9	1	1.232902	1	1.442249	1

L	2.0	1	1.135609	1	1.325402	1
L	3.0	1	0.653358	1	0.752568	1
L	4.0	1	0.467184	1	0.535271	1
L	5.0	1	0.365793	1	0.418011	1
L	6.0	1	0.301329	1	0.343842	1
L	7.0	1	0.256503	1	0.292429	1
L	8.0	1	0.223440	1	0.254586	1
L	9.0	1	0.198008	1	0.225517	1
L	10.0	1	0.177819	1	0.202465	1

L	11.0	1	0.161393	1	0.183722	1
L	21.0	1	0.084071	1	0.095630	1
L	31.0	1	0.056886	1	0.064698	1
L	41.0	1	0.042993	1	0.048896	1
L	51.0	1	0.034558	1	0.039301	1
L	61.0	1	0.028890	1	0.032855	1
L	71.0	1	0.024820	1	0.028227	1
L	81.0	1	0.021754	1	0.024739	1
L	91.0	1	0.019360	1	0.022018	1

Tabelle 1.6 Hauptabmessungen der für die Berechnung benutzten Schiffe

	Mariner	"Tokyo Maru"
Länge zwischen den Loten	160,934 m	290,000 m
Länge in der Wasserlinie	158,728 m	296,446 m
Breite auf Spanten	23,175 m	47,500 m
Tiefgang am vorderen Lot	6,850 m	16,196 m
Tiefgang am hinteren Lot	8,075 m	15,964 m
Mittlerer Tiefgang	7,463 m	16,063 m
Verdrängung	$1,663 \times 10^4$	$1,781 \times 10^5$
Völligkeitsgrad	0,588	0,805
Hauptspantvölligkeit	0,980	0,994
Verdrängungsschwerpunkt vor Hauptspant	-3,550 m	7,243 m
Längenträgheitsmoment/ Wasserdichte	$2,78 \times 10^7$	$1,193 \times 10^9$
Trägheitsradius	37,694 m	66,360 m
Anzahl der Propeller	1	1
Propellerdurchmesser	6,700 m	7,910 m
Steigung am Radius R = 0,7	6,459 m	5,893 m
Steigungsverhältnis	0,964	0,745
Flächenverhältnis	0,660	0,600
Längenkoordinate des Propellers	-77,930 m	-141,750 m
Propeller-Flügelzahl	4	5
Ruderfläche	28,700 m	71,275 m
Längenkoordinate des Ruderdruckpunkts	81,675 m	-146,764 m

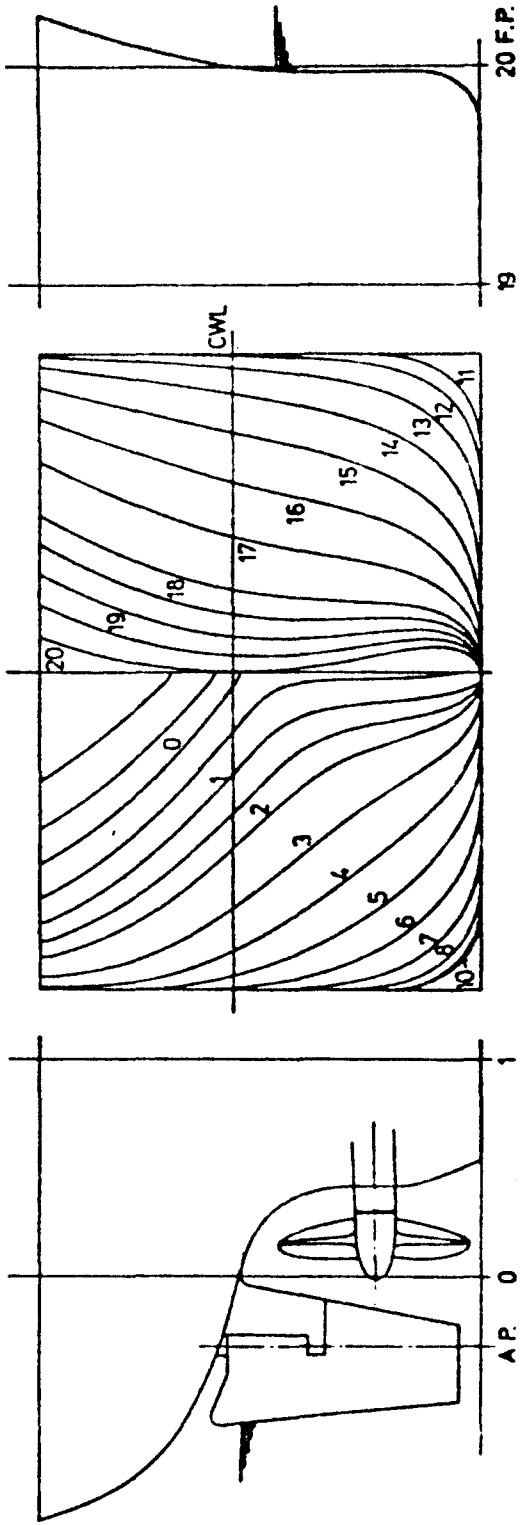


Abb. 1.6 Spantenriß und Seitenansicht des Modells — MARINER

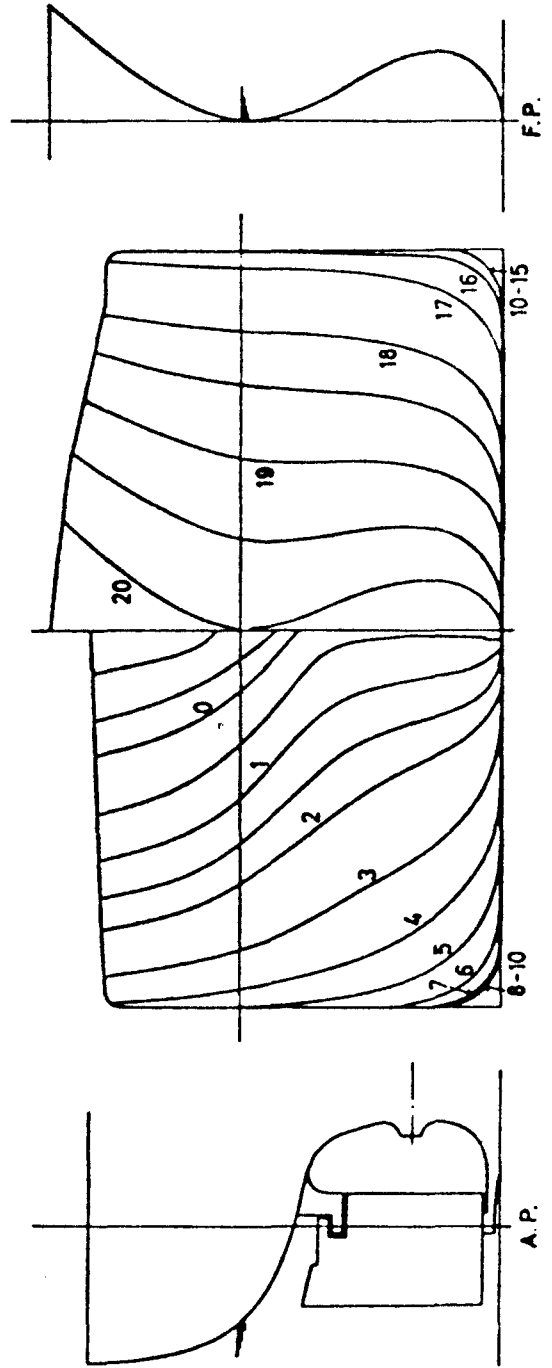


Abb. 1.7 Spantenriß und Seitenansicht des Tanker-Modells — "Tokyo Maru"

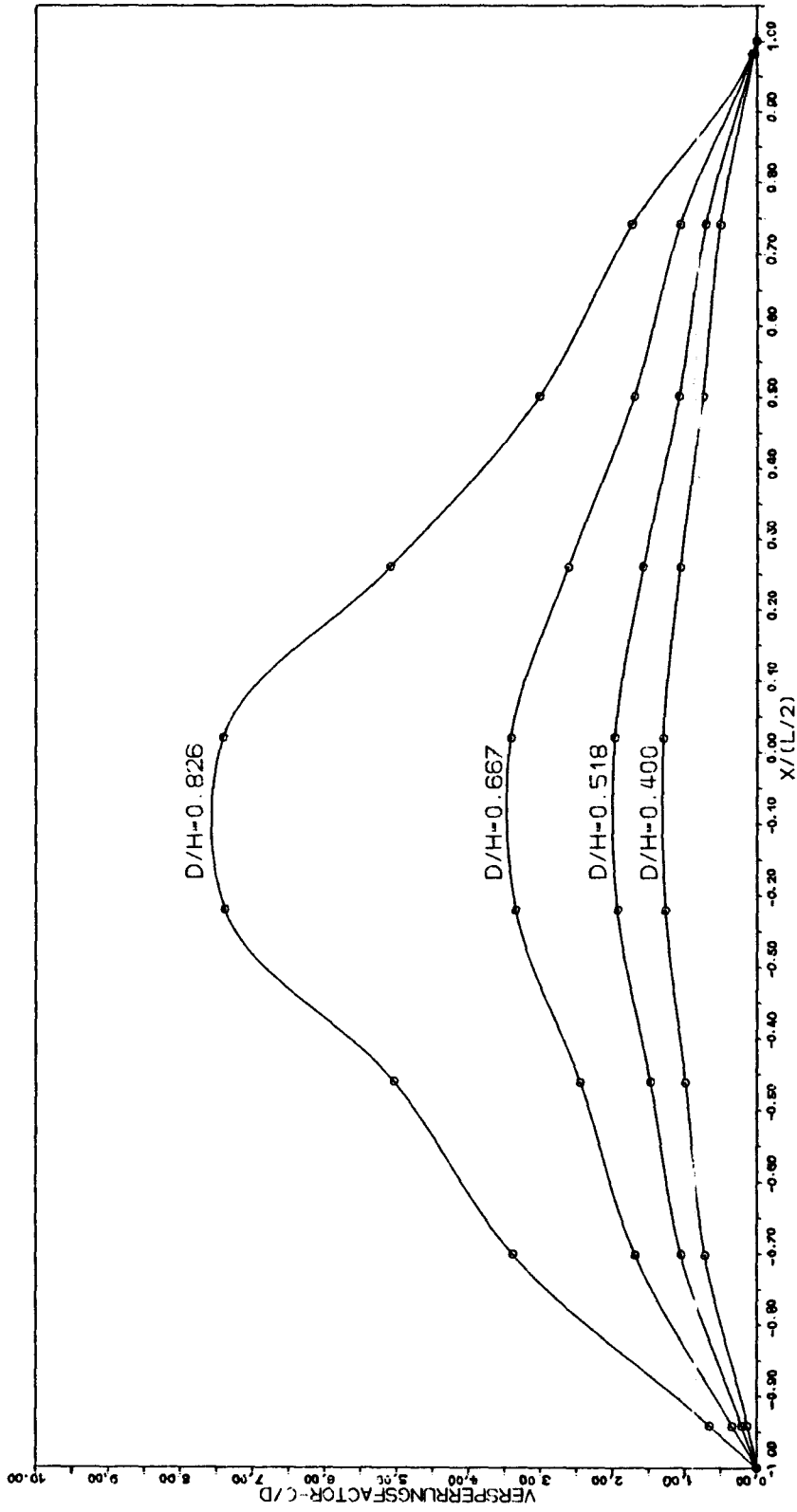


Abb. 1.8 Vergleich der ermittelten Versperrungskoeffizienten C bei verschiedenen Wassertiefen für das Mariner-Schiff

Tabelle 1.7 (1)

DIMENSIONSLOSE VERSPERRUNGSKOEFFIZIENTEN C
FUER DAS MARINER-SCHIFF BEI VERSCHIEDENEN WASSERTIEFEN

	H/D=12.00	H/D=14.00	H/D=16.00	H/D=20.00
X= -1.0356	0.00088717	0.00076049	0.00066556	0.00053245
X= -0.9884	0.00088717	0.00076049	0.00066556	0.00053245
X= -0.9412	0.00103473	0.00088703	0.00077613	0.00062111
X= -0.7008	0.01224259	0.01047757	0.00915887	0.00731839
X= -0.4603	0.01615166	0.01381647	0.01207364	0.00964416
X= -0.2198	0.01998459	0.01708787	0.01492795	0.01191977
X= 0.0206	0.02037449	0.01741905	0.01521606	0.01214970
X= 0.2610	0.01719001	0.01470289	0.01284731	0.01026116
X= 0.5014	0.01268921	0.01085932	0.00949224	0.00758466
X= 0.7418	0.00888472	0.00760683	0.00665127	0.00531643
X= 0.9822	0.00069850	0.00059883	0.00052403	0.00041921

Tabelle 1.7 (2)

DIMENSIONSLOSE VERSPERRUNGSKOEFFIZIENTEN C
FUER DAS MARINER-SCHIFF BEI VERSCHIEDENEN WASSERTIEFEN

	H/D= 1.21	H/D= 1.50	H/D= 1.93	H/D= 2.50
x= -1.0356	0.00835697	0.00688751	0.00542353	0.00421772
x= -0.9884	0.00835697	0.00688751	0.00542353	0.00421772
x= -0.9412	0.00964584	0.00798959	0.00630694	0.00491104
x= -0.7008	0.31433004	0.15742181	0.09775904	0.06741821
x= -0.4603	0.46728364	0.22777084	0.13691859	0.09228024
x= -0.2198	0.68496686	0.31087661	0.17962101	0.11829928
x= 0.0206	0.68764007	0.31682006	0.18351512	0.12086394
x= 0.2610	0.47229847	0.24282213	0.14694338	0.09891673
x= 0.5014	0.28054053	0.15855530	0.10090033	0.06993158
x= 0.7418	0.16116744	0.09877859	0.06601369	0.04707507
x= 0.9822	0.00666945	0.00546188	0.00428673	0.00332796

Tabelle 1.7 (3)

DIMENSIONSLOSE VERSPERRUNGSKOEFFIZIENTEN C
FUER DAS MARINER-SCHIFF BEI VERSCHIEDENEN WASSERTIEFEN

	H/D= 4.00	H/D= 6.00	H/D= 8.00	H/D=10.00
x= -1.0356	0.00265248	0.00177209	0.00133004	0.00106439
x= -0.9884	0.00265248	0.00177209	0.00133004	0.00106439
x= -0.9412	0.00309176	0.00206631	0.00155108	0.00124134
x= -0.7008	0.03850927	0.02491639	0.01849717	0.01472845
x= -0.4603	0.05152243	0.03304845	0.02445802	0.01944653
x= -0.2198	0.06461978	0.04110489	0.03032897	0.02408058
x= 0.0206	0.06595191	0.04192435	0.03092564	0.02455029
x= 0.2610	0.05501702	0.03522029	0.02604522	0.02070092
x= 0.5014	0.03995970	0.02583913	0.01917655	0.01526705
x= 0.7418	0.02758386	0.01799579	0.01339712	0.01068123
x= 0.9822	0.00209002	0.00139567	0.00104740	0.00083812

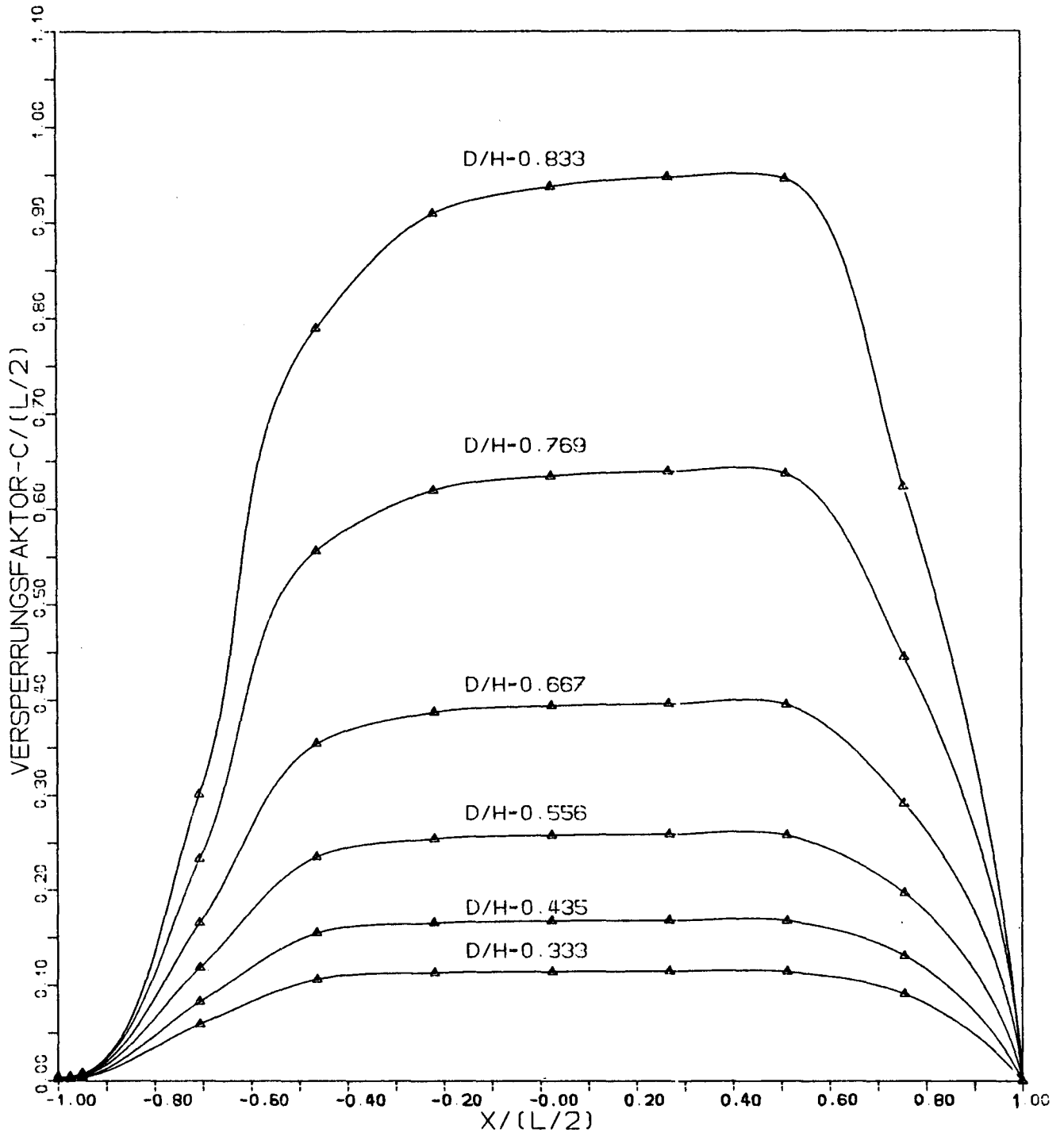


Abb. 1.9 Vergleich der ermittelten Versperrungskoeffizienten C bei verschiedenen Wassertiefen für die "Tokyo Maru"

2. Quergeschwindigkeitsverteilung U(x) in flachem Wasser

2.1 Formulierung der Integro-Differentialgleichung

Bei den bisherigen Berechnungen des Strömungs-Nahfeldes um die Schiffsquerschnitte wurde von einer bekannt vorausgesetzten Anströmgeschwindigkeit U ausgegangen. U ergibt sich nach einem Verfahren von NEWMAN /9/ aus einer Reihenentwicklung der Potentiale im Nah- und im Fernfeld der Strömung nach einem Parameter ε . Die Bestimmungsgleichung für U, eine Integro-Differentialgleichung, wird im Folgenden detailliert und direkter als in /9/ hergeleitet.

2.1.1 Reine Querströmung

i) Potentialansatz

Man setzt an:

$$\begin{aligned}\Phi &= \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \varepsilon^3 \Phi^{(3)} + \dots \\ Y &= \varepsilon Y', \quad H = \varepsilon H', \quad Z = \varepsilon Z'\end{aligned}\tag{2.1}$$

ε ist ein Maß für die Schlankheit des Schiffes, da Breiten- und Höhenkoordinaten des Schiffskörpers und die Wassertiefe proportional zu ε sind, nicht aber die Schiffslänge.

$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)} \dots$, sind von ε unabhängig. Ebenso werden Y', H' und Z' von ε unabhängig vorausgesetzt.

Die Strömung nahe dem Schiff muß untersucht werden, um die Kräfte auf das Schiff zu ermitteln. Man muß dazu aber auch das Fernfeld untersuchen.

ii) Berechnung des Fernfeldes

Im Fernfeld wird y unabhängig von ε vorausgesetzt.

Aus $Z = \varepsilon Z'$ folgt:

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Z'}, \quad \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial Z'^2},\tag{2.2}$$

Die Kontinuitätsgleichung (vgl. Abschnitt 1.1) wird damit:

$$\begin{aligned} & \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \\ & = \varepsilon \Phi_{xx}^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi_{xx}^{(2)} + \dots + \varepsilon \Phi_{yy}^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi_{yy}^{(2)} + \dots + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \Phi_{z'z'}^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \Phi_{z'z'}^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Da die Gleichung für einen endlichen ε -Bereich gelten soll, folgt:

$$\Phi_{z'z'}^{(1)} = 0; \quad \Phi_{z'z'}^{(2)} = 0; \quad \Phi_{xx}^{(1)} + \Phi_{yy}^{(1)} + \Phi_{z'z'}^{(3)} = 0; \quad (2.3)$$

2faches Integrieren über z' der ersten beiden Gleichungen in (2.3) liefert:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \Psi^{(1)}(x, y) + a^{(1)}(x, y) z' \\ \Phi^{(2)} &= \Psi^{(2)}(x, y) + a^{(2)}(x, y) z' \end{aligned}$$

Die Randbedingung $\Phi_{z=0}$ bei $z = \pm H$ am Wasserboden ergibt beim Einsetzen der Reihenentwicklung (2.1) für die Glieder mit den zwei kleinsten ε -Potenzen:

$$\Phi_{z'}^{(1)} = a^{(1)}(x, y) = 0; \quad a^{(2)}(x, y) = 0.$$

Folglich:

$$\Phi^{(1)} = \Psi^{(1)}(x, y); \quad \Phi^{(2)} = \Psi^{(2)}(x, y). \quad (2.4)$$

Das bedeutet, daß die erste und die zweite Näherung für Φ in großem Abstand vom Schiff ($y = O(L)$, $H, B = O(y)$) nur von x und y abhängen und eine horizontale Strömung beschreiben. Sie erfüllen die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\Psi_{xx}^{(1)} + \Psi_{yy}^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad \Psi_{xx}^{(2)} + \Psi_{yy}^{(2)} = 0 \quad (2.5)$$

Es muß ein Ansatz für $\Psi^{(1)}$ gefunden werden, der diese Kontinuitätsgleichung erfüllt und der genügend freie Größen enthält, um die Fernfeldströmung ausdrücken zu können. Dazu ist der folgende Ansatz geeignet:

$$\Psi^{(1)} = -v(y) \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right\} \quad (2.6)$$

Diese Gleichung beschreibt das Potential einer Dipolverteilung auf der x-Achse im Bereich der Schiffslänge, d.h. $-L/2 \leq x \leq L/2$, mit der Dipolstärke $f(\xi) \cdot V$

iii) Berechnung des Nahfeldes

Im Nahfeld ist y von gleicher Größenordnung wie die Schiffsbreite: $y = \varepsilon \bar{y}$.

Entsprechend zum Fernfeld wird angesetzt:

$$z = \varepsilon \bar{z} \quad (\bar{z} = z')$$

$$\Phi = \varepsilon^{(1)} \Phi + \varepsilon^2 {}^{(2)} \Phi + \varepsilon^3 {}^{(3)} \Phi + \dots \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \quad .$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt damit

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

$$= \varepsilon^{(1)} \Phi_{xx} + \varepsilon^2 {}^{(2)} \Phi_{xx} + \dots + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} {}^{(1)} \Phi_{\bar{y}\bar{y}} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} {}^{(2)} \Phi_{\bar{y}\bar{y}} + \dots + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} {}^{(1)} \Phi_{zz} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} {}^{(2)} \Phi_{zz} + \dots$$

Zusammenfassung der Glieder mit gleichen ε -Potenzen ergibt

$${}^{(1)} \Phi_{\bar{y}\bar{y}} + {}^{(1)} \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.8)$$

$${}^{(2)} \Phi_{\bar{y}\bar{y}} + {}^{(2)} \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

In erster und zweiter Näherung erfüllt die Nahfeld-Strömung die zweidimensionale Kontinuitätsgleichung in den Spantebenen $x = \text{konstant}$. Das bedeutet, die Umströmung ist praktisch eine reine Querströmung. Die Geschwindigkeit der Querströmung in großem Abstand vom Körper wird mit $U(x)$ bezeichnet

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \Phi_y = -U(x)$$

$$\lim_{|\bar{y}| \rightarrow \infty} \Phi_{\bar{y}} = \lim_{|\bar{y}| \rightarrow \infty} \varepsilon \Phi_y = -\varepsilon U(x) \quad (2.9)$$

Integrieren über \bar{y} liefert:

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \pm \infty} \Phi = -\varepsilon U(x) [y \pm C(x)], \quad \begin{array}{l} \text{bei } y > 0 \text{ mit "+"} \\ \text{bei } y < 0 \text{ mit "-"} \end{array} \quad (2.10)$$

Hier ist C eine Integrationskonstante, die nur von x abhängt und so gewählt wird, daß der Mittelwert der asymptoti-

schen Grenzwerte für positives und für negatives \bar{y} verschwindet. $C(x)$ steht dann in direkter Beziehung zur hydrodynamischen Masse.

Die Entwicklung wird bis zur zweiten Ordnung durchgeführt:

$$\begin{aligned}\Phi|_{y \rightarrow \pm\infty} &= \varepsilon^{(1)} \Phi + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Phi \\ &= \bar{\mp} \varepsilon U(x) C(x) - \varepsilon^2 \bar{y} U(x)\end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow \pm\infty} {}^{(1)}\Phi &= \bar{\mp} U(x) C(x) \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} {}^{(2)}\Phi &= -U(x) \bar{y}\end{aligned}\tag{2.11}$$

iv) Anpassung des Fern- und Nahfeldes aneinander

Die noch unbekanntenen Funktionen in den Lösungen für das Nah- und das Fernfeld werden aneinander angepaßt, indem übereinstimmendes Potential für den Ansatz in einem Überlappungsbereich gefordert wird:

$$y = \varepsilon^{1/2} \cdot \tilde{y}\tag{2.12}$$

(\tilde{y} ist unabhängig von ε , $\bar{y} = \varepsilon^{-1/2} \cdot \tilde{y}$)

Das heißt, man wählt die Größenordnung von y zwischen den beiden bisher betrachteten Werten $O(L)$ und $O(B)$.

Das bedeutet: Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht y gegen Null für das Fernfeld und y gegen Unendlich für das Nahfeld. Der innere Grenzwert des Fernfeldes und der äußere Grenzwert des Nahfeldes müssen für alle ε -Potenzen einander gleich sein.

Durchführung der Gleichsetzung mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung des Fernfeld-Potentials um $y = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi &= \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots = \varepsilon \Psi^{(1)}(x, 0) + \varepsilon^{1.5} |\tilde{y}| \Psi_y^{(1)}(x, 0) + \varepsilon^2 \Psi^{(2)}(x, 0) + \dots \\ &= \varepsilon {}^{(1)}\Phi + \varepsilon^2 {}^{(2)}\Phi + \dots = \varepsilon [\bar{\mp} U(x) C(x)] - \varepsilon^{1.5} |\tilde{y}| U(x) + \dots\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)}(x, 0) &= \mp U(x) C(x) \\ \Psi_y^{(1)}(x, 0) &= -U(x)\end{aligned}\tag{2.13}$$

Mit der Gleichung der Dipolverteilung (2.6) wird

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)}(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[-v \left(y + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right) \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ -v \left[y + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(f(x) + (x-\xi)f'(x) + \frac{1}{2}(x-\xi)^2 f''(x) + \dots \right) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ -v \left[y + f(x) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi + f'(x) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(x-\xi)y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi + \dots \right] \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ -v \left[y + f(x) \cdot \operatorname{sign} y \left(\arctg \frac{x+\frac{L}{2}}{|y|} - \arctg \frac{x-\frac{L}{2}}{|y|} \right) + f'(x) \cdot 0 + \dots \right] \right\} \\ &= \pm v \pi f(x) = \mp U(x) C(x)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Daher:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{v} U(x) C(x)\tag{2.15}$$

Entsprechend ergibt sich für $\Psi_y^{(1)}$, wenn man beachtet, daß für $x = \pm \frac{L}{2}$ (d.h. an den Schiffsenden) $U \cdot C = 0$ und damit die Dipolstärke $f(\pm L/2) = 0$ ist:

$$\begin{aligned}\Psi_y^{(1)}(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dy} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{f(\xi) \cdot y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi + 1 \right\} \cdot (-v) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dy} \left[f(\xi) \arctg \frac{x-\xi}{y} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f'(\xi) \arctg \frac{x-\xi}{y} d\xi \right] + 1 \right\} \cdot (-v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ f(\xi) \frac{X-\xi}{\left[1 + \frac{(X-\xi)^2}{y^2}\right] y^2} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{f'(\xi)(X-\xi)}{\left[1 + \frac{(X-\xi)^2}{y^2}\right] y^2} d\xi + 1 \right\} \cdot (-V) \\
 &= \left\{ -f(\xi) \frac{1}{X-\xi} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{f'(\xi)}{X-\xi} d\xi + 1 \right\} (-V) \\
 &= \left\{ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{f'(\xi)}{X-\xi} d\xi + 1 \right\} \cdot (-V)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Mit der 2. Gleichung in (2.13) folgt

$$\Psi_y^{(4)}(x, 0) = -v \left[1 + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{f'(\xi)}{X-\xi} d\xi \right] = -U(x) \tag{2.17}$$

und mit (2.15) ergibt sich dann eine Bestimmungsgleichung für $U(x)$:

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[U(x)C(x)]'}{t-x} dt + v$$

Das ist die Gleichung (4.19) von Newman.

2.1.2 Schräge Strömung

Im zweidimensionalen Fernfeld wird das Potential durch eine Wirbelbelegung auf der x -Achse im Bereich der Schiffslänge und eine schräge Parallelströmung beschrieben:

$$\Phi_{\text{Fern.}} = uX + v(x)y + \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \arctg \frac{t-x}{y} dt \tag{2.18}$$

mit der Kutta-Bedingung: $f(t) = 0$ bei $t = -\frac{L}{2}$.

Im Nahfeld ist

$$\Phi_{\text{Nah.}} = g(x) + U(x)[y \pm C(x)] \quad \text{für } y \rightarrow \pm \infty \tag{2.19}$$

Anpassung der Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $U(x)$ aneinander:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \Phi_{\text{Fern.}y} &= v(x) - \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \frac{t-x}{\left[1 + \frac{(t-x)^2}{y^2}\right] y^2} dt \\ &= v(x) - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{f(t)}{t-x} dt \\ &= \lim_{|y| \rightarrow \infty} \Phi_{\text{Nah.}y} = U(x), \quad \text{also:} \end{aligned}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{f(t)}{t-x} dt = v - U(x) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \pm 0} \Phi_{\text{Fern.}x} &= u - \lim_{y \rightarrow \pm 0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{f(t) \cdot y}{\left[1 + \frac{(t-x)^2}{y^2}\right] y^2} dt \\ &= u - \pm \pi f(x) \\ &= \lim_{|y| \rightarrow \infty} \Phi_{\text{Nah.}x} = g'(x) + U'(x) \cdot y \pm [U(x) \cdot C(x)]' \end{aligned}$$

Es folgt dann:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} [U(x) \cdot C(x)]' \quad (2.21)$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[U(x) \cdot C(x)]'}{t-x} d(t) = v - U(x) \quad (2.22)$$

Dies ist praktisch wieder Gleichung (4.19) von Newman.

Und $f(t)$ bedeutet dann: $[U(x)C(x)]' = 0$ am Hinterende.

2.2 Numerische Methode zur Berechnung der Geschwindigkeit U(x)

2.2.1 Erfüllung der Integro-Differentialgleichung

Bei Kenntnis der Versperrungskoeffizienten $C(x)$ läßt sich aus der Integro-Differentialgleichung

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\frac{d}{dt} \{U(t)C(t)\}}{t-x} dt + V(x) \quad (2.22)$$

die lokale Anströmungsgeschwindigkeit $U(x)$ im Nahfeld berechnen.

Zur Lösung dieser Gleichung nähert man $U \cdot C$ durch folgende Reihe an:

$$U(x)C(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(x) \quad (2.23)$$

Eine zu (2.22) analoge Integro-Differentialgleichung ist in der Aerodynamik bekannt. Sie wird dort für die Bestimmung der Zirkulationsverteilung $f(x)$ (anstelle von $U(x) \cdot C(x)$) längs der Skelettlinie eines Tragflügels benutzt. Als Lösungsansatz wird von Multhopp /15/ eine Reihe angesetzt, mit $f_0(x) = \tan \theta/2$, $f_n(x) = \sin n\theta$, wobei θ definiert ist durch $x = \frac{L}{2} \sin \theta$. Wenn dann auch $v(t)$ in eine trigonometrische Reihe entwickelt wird, können die auftretenden Integrale geschlossen gelöst werden.

Dieser Ansatz erscheint für unser Problem weniger geeignet, weil unsere Randbedingung $U \cdot C = 0$ bzw. $(U \cdot C)' = 0$ den Ansatzfunktionen f_0 und f_n widersprechen. Deshalb wählen wir statt dessen für die $f_i(x)$ nach dem Prinzip der Finite-Elemente-Methode dachförmige (bereichsweise lineare) Funktionen:

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_{i-1}, x > x_{i+1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{für } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{für } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.24)$$

Die gesuchten Koeffizienten α_i sind unabhängig von x .

x_i sind N verschiedene, zweckmäßig im Bereich der Schiffslänge $(-L/2 < x_i < L/2)$ angeordnete Stellen; $x_1 = -L/2$, $x_N = L/2$. Die in der Definition (2.24) vorkommenden Größen x_0 und x_{N+1} werden gleich x_1 bzw. x_N gesetzt.

Exakt ist zu fordern:

$$F(x) = U(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[U(t) \cdot C(t)]'}{t-x} dt - v(x) = 0 \quad (2.25)$$

für alle x im Intervall $[-L/2, L/2]$

Nach der Galerkin-Methode wird statt dessen angesetzt:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} F(x) f_k(x) dx = 0 \quad \text{für alle } k \text{ von } 1 \text{ bis } N$$

(Bei Multhopp wird $F(x)$ mit trigonometrischer Funktion multipliziert und das Verschwinden des Integrals über diese Produkte gefordert.)

Es ergibt sich dann:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f_k(x) \left\{ U(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[U(t)C(t)]'}{t-x} dt - v(x) \right\} dx = 0$$

Mit (2.23) folgt daraus:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{f_i(x) f_k(x)}{C(x)} dx - \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{f_i(x) f_k(x)}{t-x} dt dx \right\} \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f_k(x) v(x) dx \quad k = 1 \text{ bis } N \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem können die α_i berechnet werden.

Man schreibt die Gleichung um:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i B_{ik} = v_k \quad k = 1, \dots, N \quad (2.27)$$

mit: $B_{ik} = B1_{ik} + B2_{ik}$

$$B1_{ik} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{f_i(x) f_k(x)}{C(x)} dx \quad (2.28)$$

$$B2_{ik} = - \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{f_i(t) f_k(x)}{t-x} dt dx$$

$$V_k = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f_k(x) V(x) dx$$

Für C wird ebenfalls ein Summenansatz gemacht:

$$C(x) = \sum_{i=1}^N C_i f_i(x) \quad (2.29)$$

Die Koeffizienten $B1_{ik}$ und $B2_{ik}$ werden analytisch berechnet:

- i) $B1_{ik}$ ist Null, falls $i \neq k$, $i \neq k-1$ und $i \neq k+1$ gilt.
Bei $i = k$ ergibt sich, wenn man $T_k = x_k - x_{k-1}$ schreibt:

$$\begin{aligned} B1_{ik} &= \frac{T_k}{(C_k - C_{k-1})^3} \left[C_{k-1}^2 \ln \frac{C_k}{C_{k-1}} + \frac{1}{2} C_k^2 + \frac{3}{2} C_{k-1}^2 - 2 C_{k-1} C_k \right] \\ &+ \frac{T_{k+1}}{(C_k - C_{k+1})^3} \left[C_{k+1}^2 \ln \frac{C_k}{C_{k+1}} + \frac{1}{2} C_k^2 + \frac{3}{2} C_{k+1}^2 - 2 C_k C_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Für den Fall $C_k \rightarrow C_{k-1}$:

$$\lim_{C_k \rightarrow C_{k-1}} \frac{T_k}{(C_k - C_{k-1})^3} \left[C_{k-1}^2 \ln \frac{C_k}{C_{k-1}} + \frac{1}{2} C_k^2 + \frac{3}{2} C_{k-1}^2 - 2 C_{k-1} C_k \right] = \frac{T_k}{3 C_{k-1}}$$

Ebenfalls:

$$\lim_{C_k \rightarrow C_{k+1}} \frac{T_{k+1}}{(C_k - C_{k+1})^3} \left[C_{k+1}^2 \ln \frac{C_k}{C_{k+1}} + \frac{1}{2} C_k^2 + \frac{3}{2} C_{k+1}^2 - 2 C_k C_{k+1} \right] = \frac{T_k}{3 C_{k+1}}$$

Bei $i = k-1$:

$$B1_{ik} = \frac{T_k}{(C_k - C_{k-1})^3} \left[\frac{1}{2} C_k^2 - \frac{1}{2} C_{k-1}^2 - C_k C_{k-1} \ln \frac{C_k}{C_{k-1}} \right] \quad (2.31)$$

Für den Fall $C_k \rightarrow C_{k-1}$:

$$B1_{ik} = \lim_{C_k \rightarrow C_{k-1}} \frac{T_k}{(C_k - C_{k-1})^3} \left[\frac{1}{2} C_k^2 - \frac{1}{2} C_{k-1}^2 - C_k C_{k-1} \ln \frac{C_k}{C_{k-1}} \right] = \frac{T_k}{6 C_{k-1}}$$

Bei $\bar{l} = k+1$:

$$B1_{ik} = \frac{T_{k+1}}{(C_k - C_{k+1})^3} \left\{ \frac{1}{2} C_k^2 - \frac{1}{2} C_{k+1}^2 - C_k C_{k+1} \ln \frac{C_k}{C_{k+1}} \right\} \quad (2.32)$$

Für den Fall $\bar{l} = K$

$$B1_{ik} = \lim_{C_k \rightarrow C_{k+1}} \frac{T_{k+1}}{(C_k - C_{k+1})^3} \left\{ \frac{1}{2} C_k^2 - \frac{1}{2} C_{k+1}^2 - C_k C_{k+1} \ln \frac{C_k}{C_{k+1}} \right\} = \frac{T_{k+1}}{6 C_{k+1}}$$

ii) Die Glieder $B2_{ik}$ ergeben eine voll besetzte Koeffizienten-Matrix.

Durch Integration bekommt man:

$$\begin{aligned} B2_{ik} = & -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2 T_k} (X_{k-1} - X_{\bar{l}})^2 \cdot \left(\frac{1}{T_{\bar{l}}} + \frac{1}{T_{\bar{l}+1}} \right) \cdot \ln (X_{k-1} - X_{\bar{l}}) \right. \\ & + \frac{1}{2 T_{k+1}} (X_{k+1} - X_{\bar{l}})^2 \cdot \left(\frac{1}{T_{\bar{l}}} + \frac{1}{T_{\bar{l}+1}} \right) \cdot \ln (X_{k+1} - X_{\bar{l}}) \\ & - \frac{1}{2 T_k T_{\bar{l}}} (X_{k-1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}})^2 \cdot \ln (X_{k-1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}}) \\ & - \frac{1}{2 T_k T_{\bar{l}+1}} (X_{k-1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1})^2 \cdot \ln (X_{k-1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1}) \\ & - \frac{1}{2 T_{\bar{l}} T_{k+1}} (X_{k+1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}})^2 \cdot \ln (X_{k+1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}}) \\ & - \frac{1}{2 T_k T_{\bar{l}+1}} (X_{k+1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1})^2 \cdot \ln (X_{k+1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1}) \\ & - \frac{1}{2 T_{k+1}} [(X_{k+1} - X_{\bar{l}})^2 - T_{k+1}^2] \cdot \left(\frac{1}{T_{\bar{l}}} + \frac{1}{T_{\bar{l}+1}} \right) \cdot \ln (X_{k+1} - X_{\bar{l}} - T_{k+1}) \\ & - \frac{1}{2 T_k} [(X_{k-1} - X_{\bar{l}})^2 - T_k^2] \cdot \left(\frac{1}{T_{\bar{l}}} + \frac{1}{T_{\bar{l}+1}} \right) \cdot \ln (X_{k-1} - X_{\bar{l}} + T_k) \\ & + \frac{1}{2 T_k T_{\bar{l}}} [(X_{k-1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}})^2 - T_k^2] \cdot \ln (X_{k-1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}} + T_k) \\ & + \frac{1}{2 T_{k+1} T_{\bar{l}}} [(X_{k+1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}})^2 - T_{k+1}^2] \cdot \ln (X_{k+1} - X_{\bar{l}} + T_{\bar{l}} - T_{k+1}) \\ & + \frac{1}{2 T_k T_{\bar{l}+1}} [(X_{k-1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1})^2 - T_k^2] \cdot \ln (X_{k-1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1} + T_k) \\ & \left. + \frac{1}{2 T_{k+1} T_{\bar{l}+1}} [(X_{k+1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1})^2 - T_{k+1}^2] \cdot \ln (X_{k+1} - X_{\bar{l}} - T_{\bar{l}+1} - T_{k+1}) \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dieses komplizierte Ergebnis wird wesentlich einfacher, wenn man die X_i äquidistant im Abstand T auf der x -Achse anordnet. Dann ergibt sich:

$$B_{2ik} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \cdot 4 \ln \frac{1}{2} & \text{für } i=k \\ -\frac{1}{\pi} \left(\frac{7}{2} \ln 2 + \frac{9}{2} \ln 3 \right) & \text{für } i=k-1, k+1 \\ -\frac{1}{\pi} \left(2 \ln \frac{1}{2} + 10 \ln \frac{3}{2} + 8 \ln \frac{3}{4} \right) & \text{für } i=k-2, k+2 \\ -\frac{1}{\pi} \left[-3(k-i)^2 \ln(k-i)T + 2(k-i+1)^2 \ln(k-i+1)T \right. \\ \quad \left. + 2(k-i-1)^2 \ln(k-i-1)T - \frac{1}{2}(k-i+2)^2 \ln(k-i+2)T \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2}(k-i-2)^2 \ln(k-i-2)T \right] & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.34)$$

iii) Das Glied V_k hängt von der Verteilung der Quergeschwindigkeit über der x -Achse ab. Hier werden zwei Fälle unterschieden:

$$V(x) = V_0 \quad , \text{ d.h. reine Quer- oder Schrägbewegung ohne Drehung}$$

und $V(x) = r x \quad , \text{ d.h. Drehbewegung um den Koordinatenursprung mit der Winkelgeschwindigkeit } r \text{ um die } z\text{-Achse und überlagerte Längsbewegung.}$

Durch Integration erhalten wir:

$$V_k = \frac{1}{2} V_0 (X_{k+1} - X_{k-1}) \quad \text{bei } V(x) = V_0$$

$$\text{oder: } V_k = V_0 T \quad \text{für gleiche Intervalle} \quad (2.35)$$

$$V_k = \frac{1}{6} T [X_{k+1}^2 - X_{k-1}^2 + X_k (X_{k+1} - X_{k-1})] \quad \text{bei } V(x) = r x$$

$$\text{oder: } V_k = r X_k T \quad \text{für gleiche Intervalle} \quad (2.36)$$

Mit diesen Koeffizienten kann man das lineare Gleichungssystem (2.27) mit den zwei verschiedenen rechten Seiten für Quer- bzw. Drehbewegung des Schiffes nach den unbekanntem

α_i auflösen. Nach (2.23) ergibt sich dann die lokale Quergeschwindigkeit $U(x)$ zu:

$$U(x) = \frac{1}{C(x)} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(x) \quad (2.37)$$

Für ein Schiff, das gleichzeitig eine Quer- und eine Drehbewegung ausführt, kann $U \cdot C$ als Summe der Potentiale für die Quer- und für die Drehbewegung berechnet werden, weil die Integro-Differentialgleichung linear in $U \cdot C$ und in $v(x)$ ist.

2.2.2 Erfüllung der Randbedingungen

Für die Berechnung der Geschwindigkeit $U(x)$ sind Endbedingungen an den Stellen $x = \pm L/2$ zu beachten. Diese hängen von der Art der Bewegung ab:

- i) Bei reiner Quer- und Drehbewegung ohne überlagerte Längsbewegung muß $U(x)C(x)$ die folgende Bedingung erfüllen:

$$U(x) \cdot C(x) = 0 \quad \text{bei } x = \pm L/2 \quad (2.38)$$

Der Grund ist: Für einen Körper, dessen Spantfläche an beiden Enden stetig gegen Null geht, ist $C(\pm \frac{L}{2})$ gleich Null. Falls die Spantfläche an den Enden nicht gleich Null ist, ist es physikalisch offensichtlich, daß die Strömung an den Enden infolge der Versperrung vollständig in Schiffslängsrichtung abbiegen wird und daher $U(\pm \frac{L}{2})$ gleich Null ist. Deshalb ist in beiden Fällen $U \cdot C$ an den Schiffsenden gleich Null.

In diesem Fall wird die Gleichung (1.3) mit der oben beschriebenen Methode dadurch gelöst, daß die Ansatzfunktionen f_1 und f_N weggelassen werden; es wird also ein lineares Gleichungssystem mit $N-2$ Gleichungen gelöst.

- ii) Für den Fall, daß das Schiff auch eine Längsbewegung macht, waren die folgenden Randbedingungen abgeleitet worden:

$$\begin{aligned} U(x)C(x) &= 0, & \text{für } x &= L/2 \\ [U(x)C(x)]' &= 0, & \text{für } x &= -L/2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Während die Bedingung am vorderen Ende wie zuvor durch Weglassen der Funktion F_N erfüllt wird, wird die Bedingung am Hinterende durch die Gleichung

$$U(x_1)C(x_1) = U(x_2)C(x_2)$$

oder die Gleichung

$$U(x_1)C(x_1) = \frac{4}{3} U(x_2)C(x_2) - \frac{1}{3} U(x_3)C(x_3)$$

usw. angenähert, die an die Stelle der Gleichung (2.27) mit $K=1$ tritt.

2.3 Ergebnisse für U und U·C

Bei der Berechnung der Quergeschwindigkeit $U(x)$ hat sich gezeigt, daß die Resultate, die mit $N=21$ und $N=41$ erhalten werden, sich nur um 0,2 % unterscheiden. Normalerweise benötigt man nur 16 bis 20 Punkte .

In Abb. 2.1 und 2.2 sind die Verteilungen $U(x)/v$ bei reiner Querbewegung in verschiedenen Wassertiefen, getrennt für das Mariner-Schiff und die "Tokyo Maru" dargestellt. Es ist zu erkennen:

- i) Über den größten Teil der Schiffslänge ist die Quergeschwindigkeit $U(x)$ der Flüssigkeit relativ zum Rumpf kleiner als die Geschwindigkeit v des Rumpfes. Dies ist eine Folge der Versperrung des Flüssigkeitsquerschnitts durch das Schiff. Nur am Vor- und Hinterschiff wird die Geschwindigkeit U größer als die Schiffsgeschwindigkeit.
- ii) Mit abnehmender Wassertiefe nimmt das Geschwindigkeitsverhältnis $U(x)/v$ im Mittelschiff wesentlich ab. Diese Tendenz ist für das schlanke Schiff und für das völlige Schiff gleich.
- iii) Wegen der verschiedenen Gestalt des Schiffsrumpfes sind auch die Geschwindigkeitsverteilungen unterschiedlich: Für den völligen Schiffstyp "Tokyo Maru" ist die Versperrung im Mittelschiff größer und daher U kleiner als für den schlanken Typ; außerdem bleiben die U -Werte für den Tanker mit seinem langen parallelen Mittelschiff über einen relativ großen Längenbereich nahezu konstant.

Bei einer Drehbewegung reduziert sich die Verteilung der Quergeschwindigkeit $U(x)$ nicht so beträchtlich gegenüber v wie bei der Querbewegung, wie aus Abb. 2.3 zu erkennen ist. Für $D/H = 0.4$ ist die Reduzierung kaum noch zu bemerken, während dies bei Querbewegung erst etwa für $D/H = 0.05$ gilt.

Abb.2.4 zeigt den Versperrungskoeffizienten C und die lokale Quergeschwindigkeit U für den Hauptspantsquerschnitt des Mariner-Schiffes. Für $C \rightarrow \infty$, d.h. wenn der Spalt zwischen Schiff und Wasserboden sehr klein wird, geht die Quergeschwindigkeit U gegen Null. Für $C \rightarrow 0$, d.h. große Wassertiefe, geht U/v natürlich gegen 1.

Abb. 2.5 bis 2.8 zeigen die Verläufe der Ausdrücke $U_{\beta}C$ und $U_{\gamma}C$ für die beiden Beispielschiffe. Diese Ausdrücke sind durch die obere Berechnung ermittelt und charakterisieren die hydrodynamische Masse und das Massenträgheitsmoment in flachem Wasser, wie in folgendem Abschnitt beschrieben.

Die Werte von $U_{\beta}C$ und $U_{\gamma}C$ nehmen mit abnehmender Wassertiefe deutlich zu; diese Tendenz wird die hydrodynamischen Werte wesentlich beeinflussen.

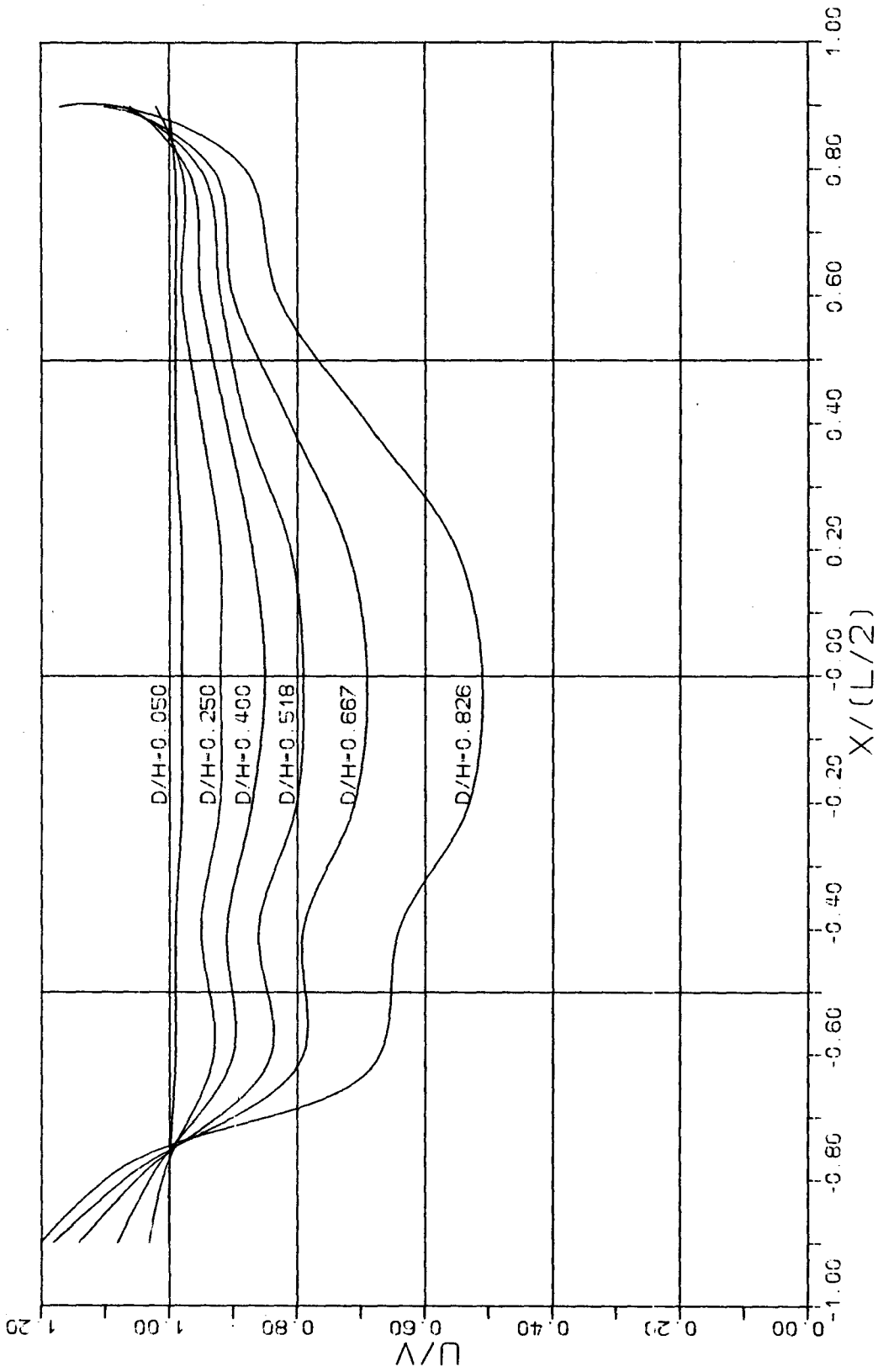


Abb. 2.1 Verteilung der Quergeschwindigkeit U/v in verschiedenen Wassertiefen für das Mariner-Schiff bei reiner Querbewegung

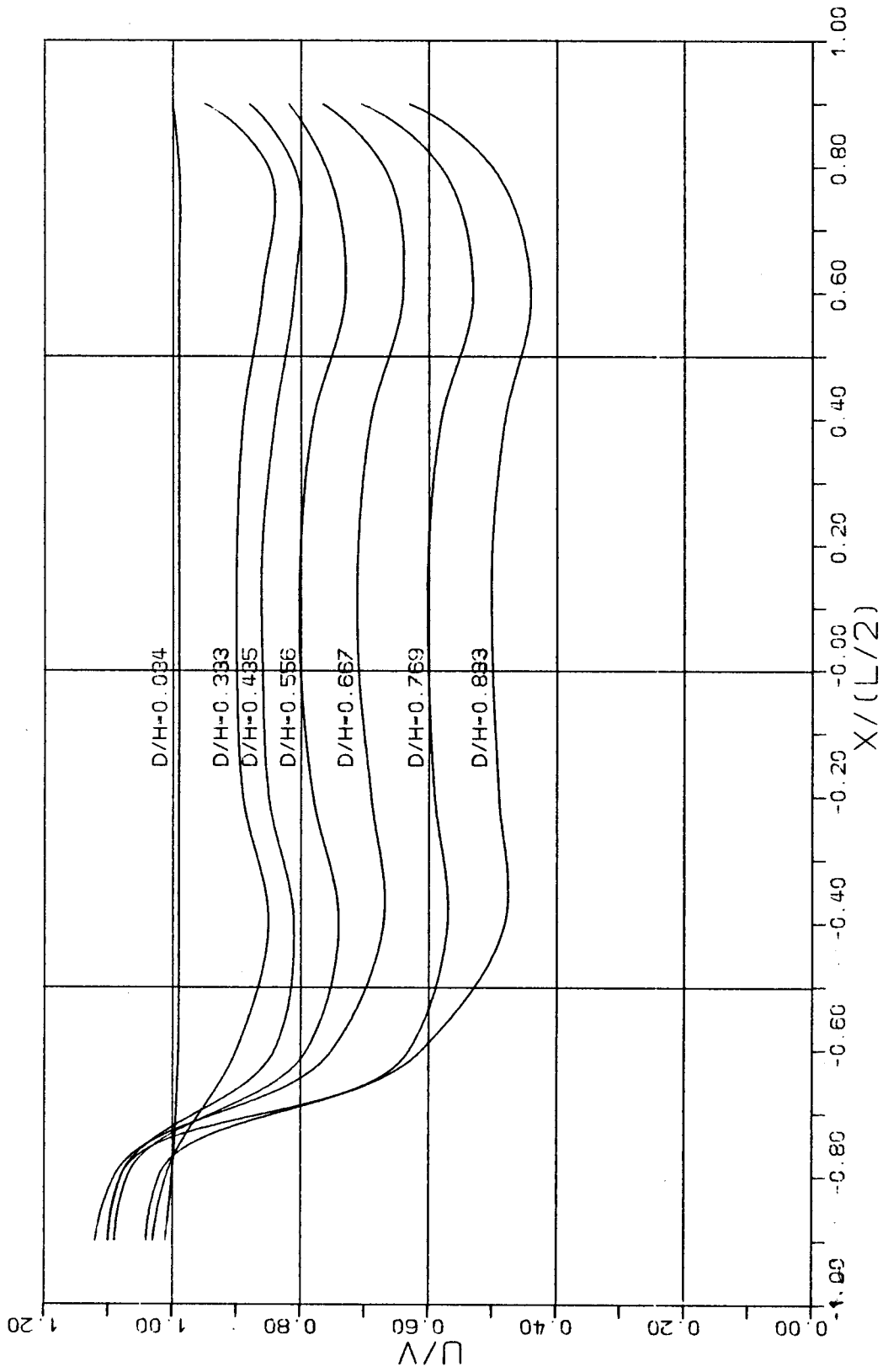


Abb. 2.2 Verteilung der Quergeschwindigkeit U/v in verschiedenen Wassertiefen für die "Tokyo Maru" bei reiner Querbewegung

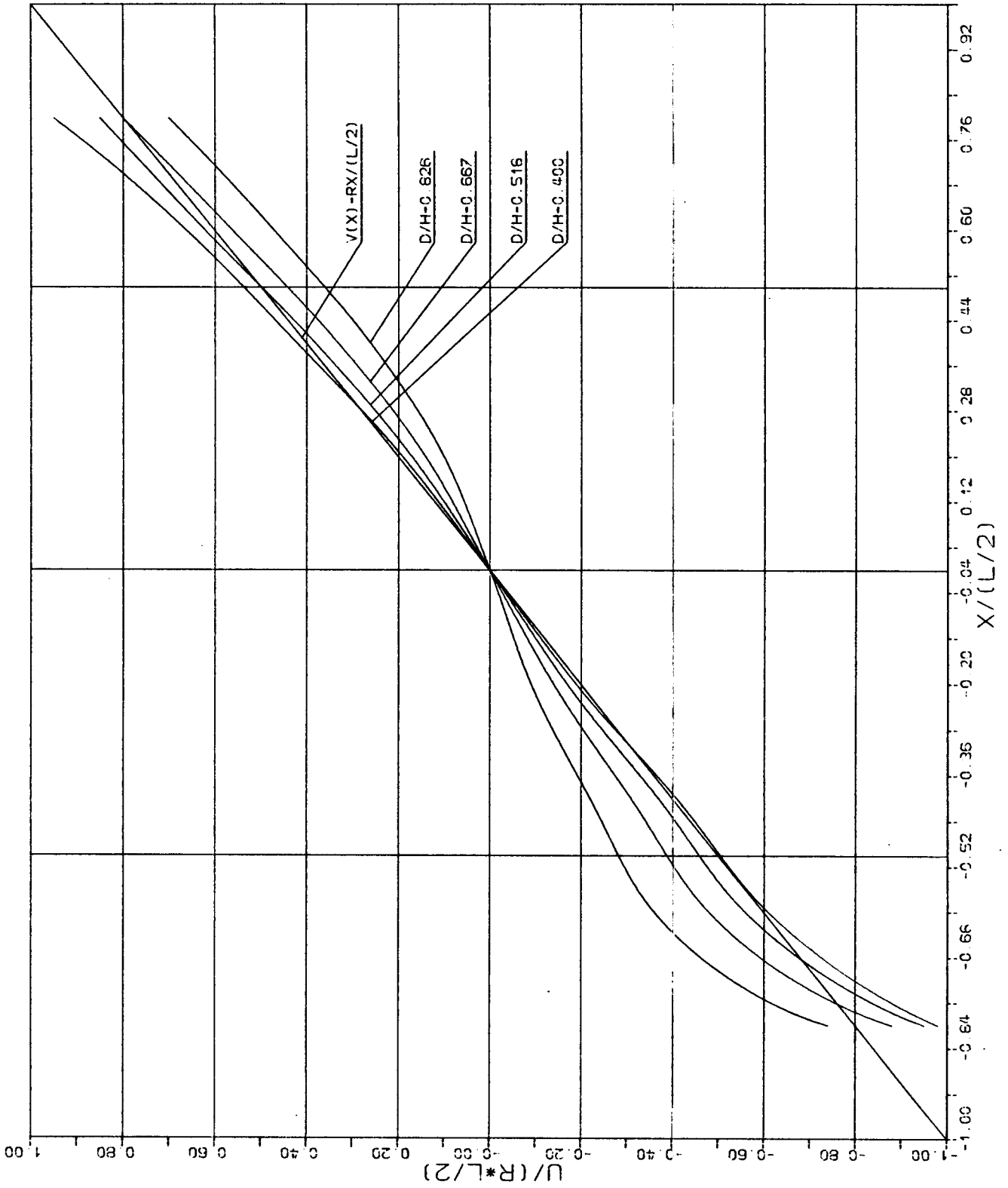


Abb. 2.3 Verteilung der Geschwindigkeit $U(x)$ über der Schiffslänge bei reiner Drehbewegung in verschiedenen Wassertiefen für das Mariner-Schiff

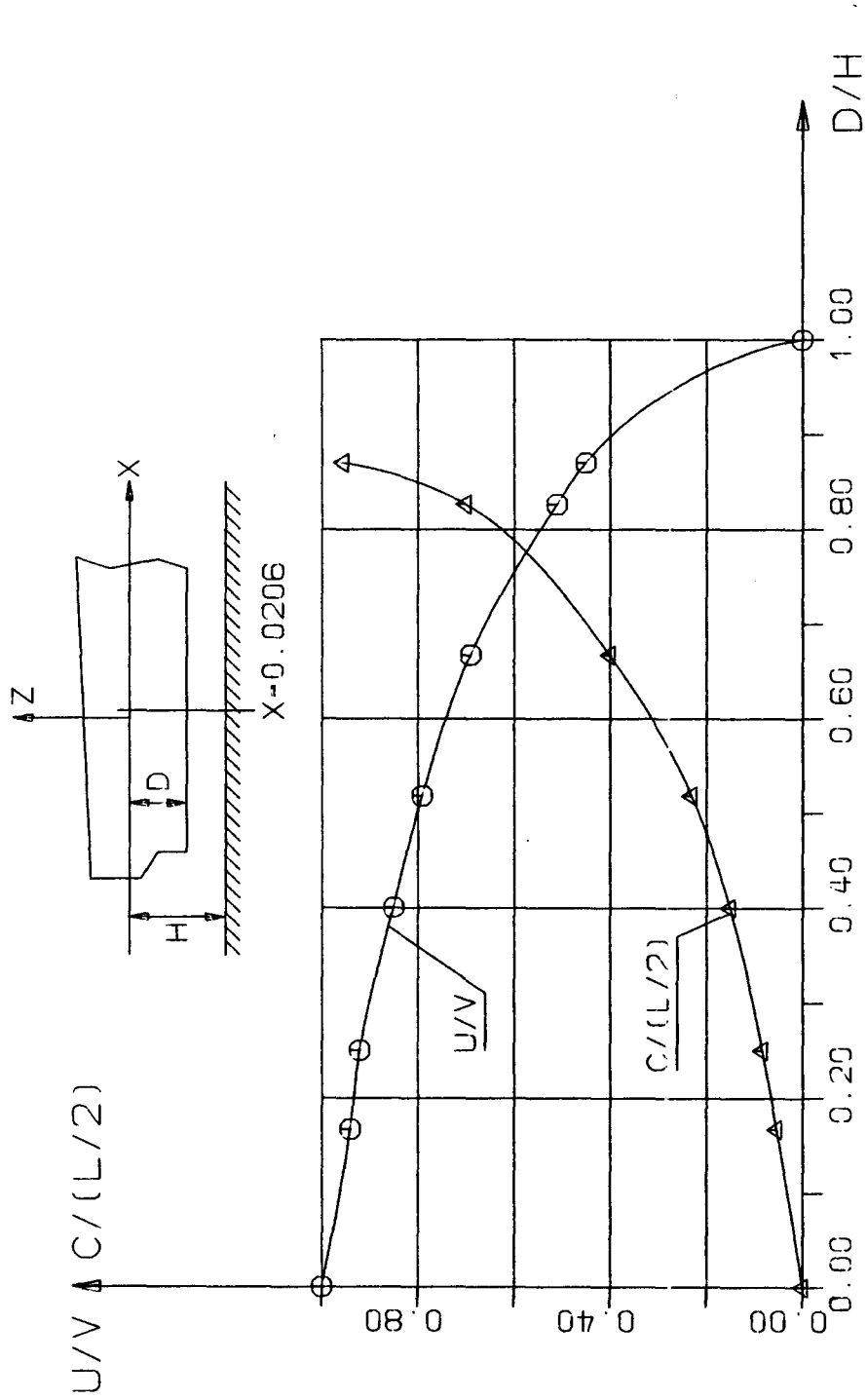


Abb. 2.4 Versperrungskoeffizient C und Geschwindigkeitsverhältnis U/v für den Mittschiffsquerschnitt des Mariner-Schiffes

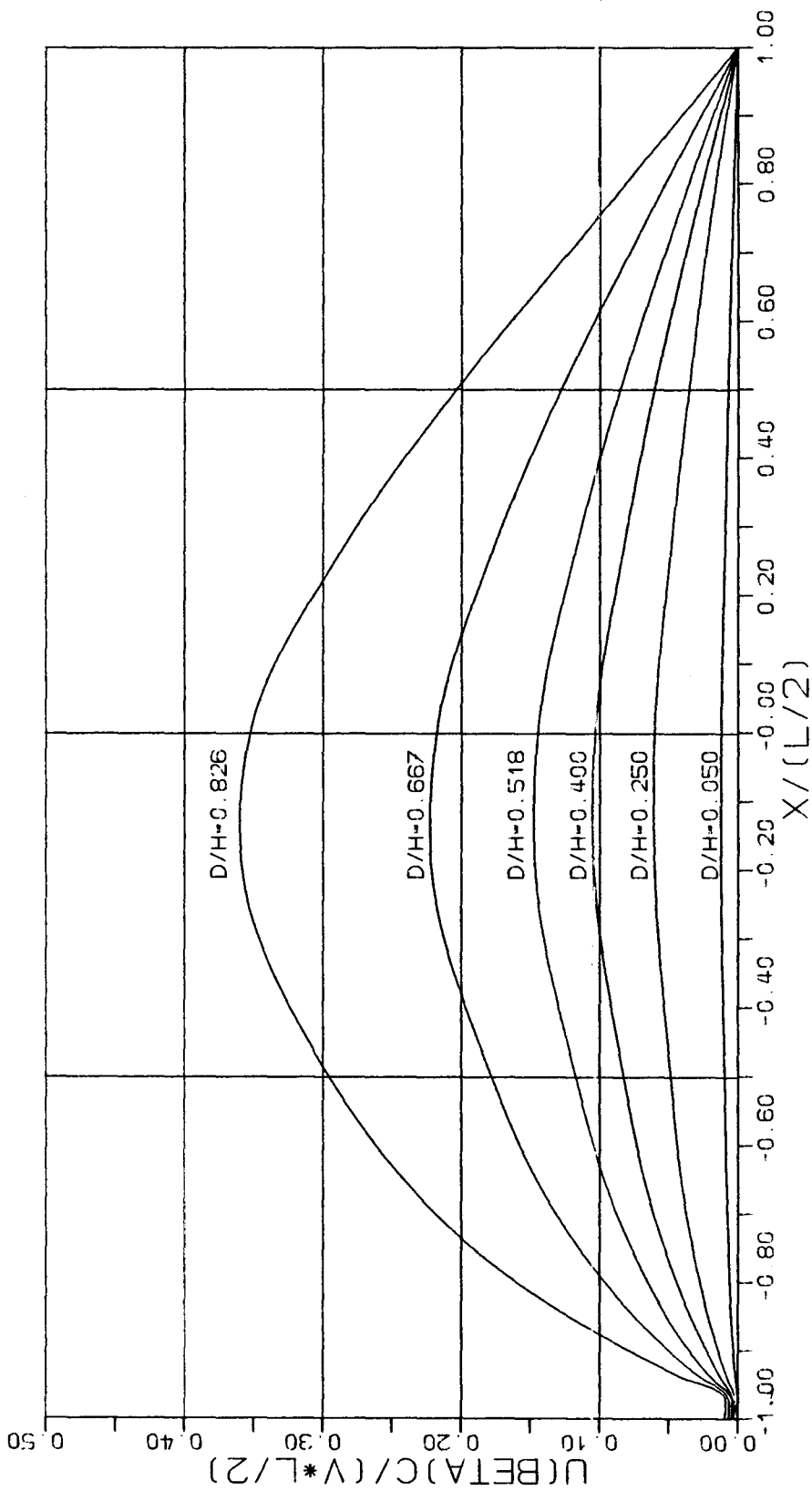


Abb. 2.5 Dimensionslose Funktion $U_{\beta}C/(VL/2)$ in verschiedenen Wassertiefen für "Mariner" bei schräger Bewegung

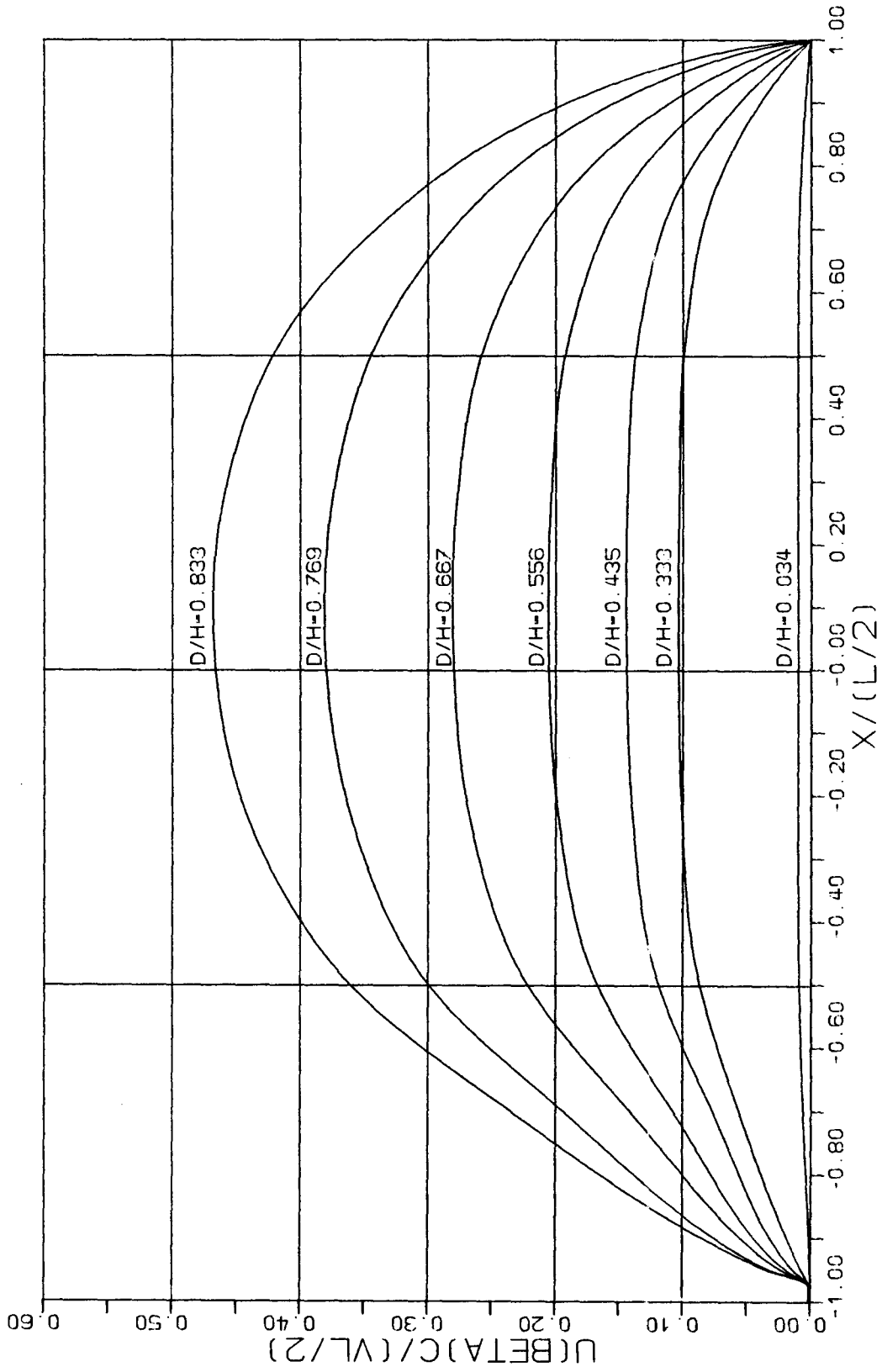


Abb. 2.6 Dimensionslose Funktion $U_{\beta}C/(VL/2)$ in verschiedenen Wassertiefen für "Tokyo Maru" bei schräger Bewegung

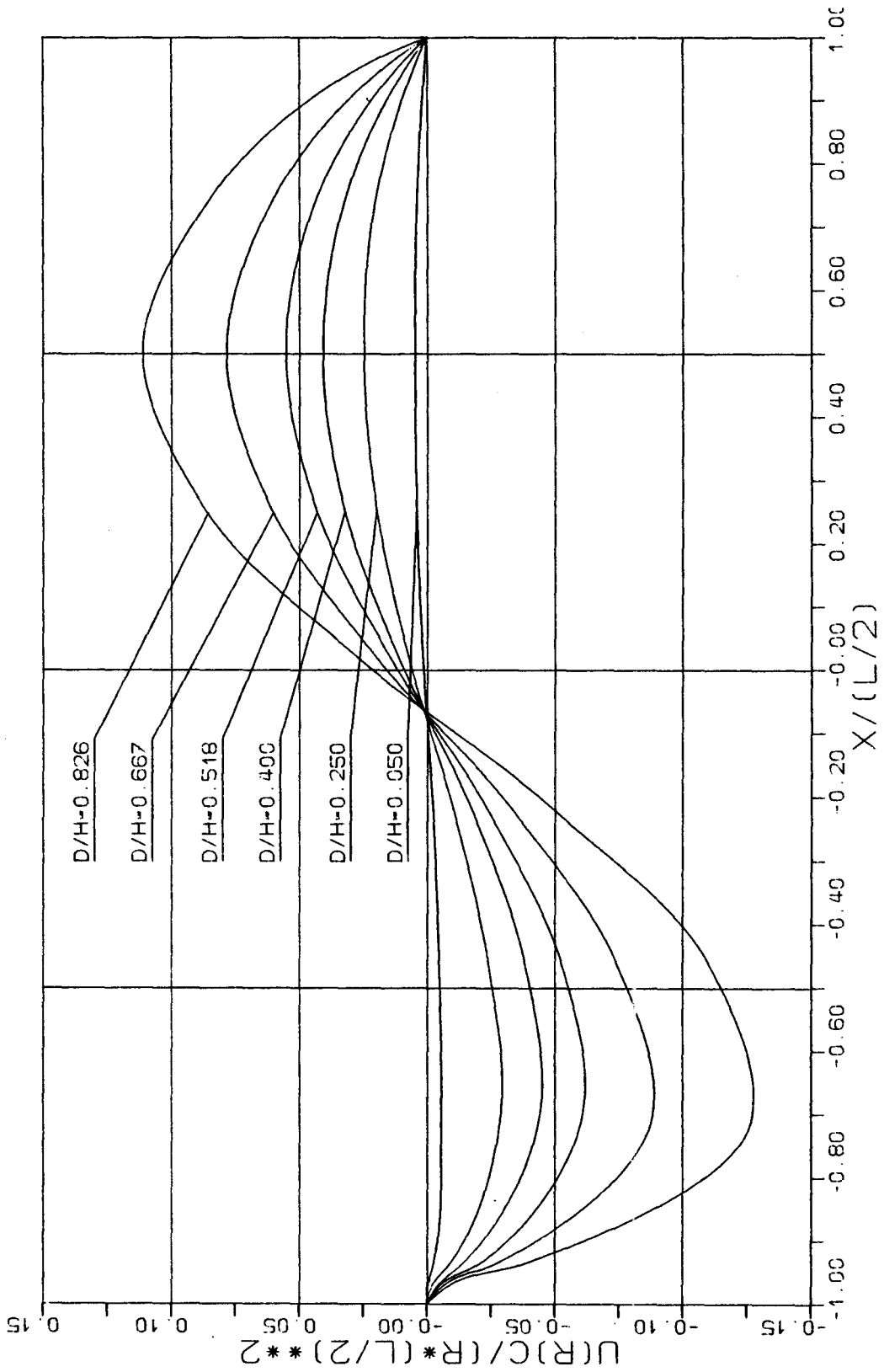
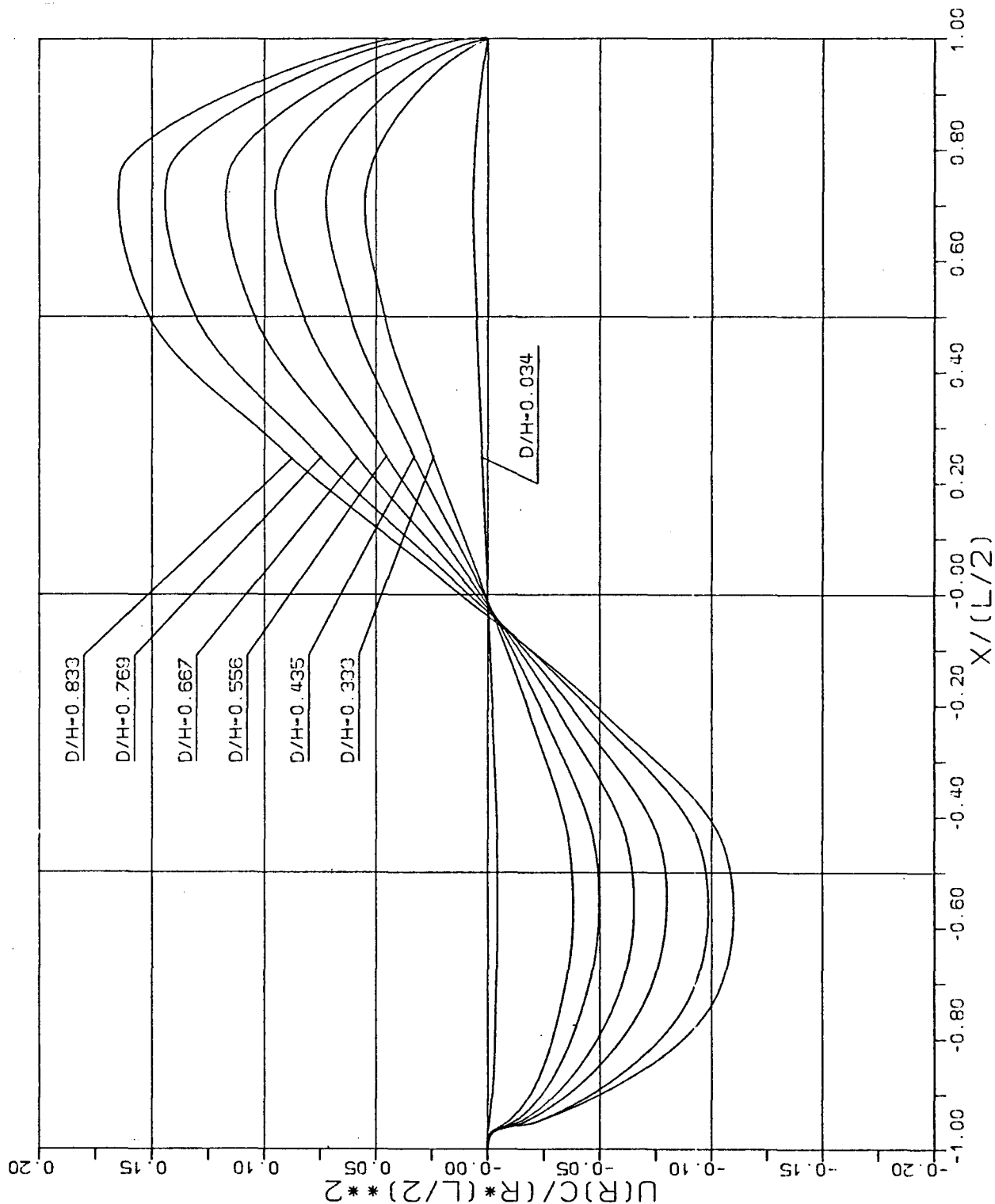


Abb. 2.7 Dimensionslose Funktion $U(r)C/[r(\frac{L}{2})^2]$ in verschiedenen Wassertiefen für das Mariner-Schiff bei reiner Drehung ohne Längsgeschwindigkeit



2.8 Dimensionslose Funktion $U(r)C/(r(\frac{L}{2})^2)$ in verschiedenen Wassertiefen für die "Tokyo Maru" bei reiner Drehbewegung ohne Längsgeschwindigkeit

3. Berechnung der hydrodynamischen Masse und des Massenträgheitsmoments

3.1 Hydrodynamische Grundlagen

Entsprechend der eingangs gemachten Voraussetzung wird zunächst die Verteilung der hydrodynamischen Querschnittsmasse für den Doppelkörper berechnet; für das Schiff ergibt sich die Hälfte davon. Durch Integrieren über die Schiffslänge werden die hydrodynamische Masse in Querrichtung und das Massenträgheitsmoment ermittelt.

Für einen Körper, der in ruhigem Wasser beschleunigt wird, ist der von der Beschleunigung abhängige Druckanteil

$$p = -\rho \dot{\Phi} \quad (3.1)$$

und die resultierende Kraftkomponente auf den Körper in y -Richtung ist:

$$F_y = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{S_0} p n_y ds dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{S_0} \dot{\Phi} n_y ds dx \quad (3.2)$$

Hier ist S_0 die Spantkontur an der Stelle X , n_y die y -Komponente der vom Körper ins Wasser zeigenden Normalen auf der Spantkontur.

Das Potential für einen nach rechts mit der Geschwindigkeit v (unabhängig von x) bewegten Körper ist:

$$\dot{\Phi} = \dot{\phi} - vy = v \left(\frac{\dot{\phi}}{v} - y \right) \quad \text{für } y \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

Aus der C-Berechnung ist $\dot{\phi}$ im Nahfeld bekannt, $\dot{\phi}$ ist das innere Potential (Grenzwert für $|y| \rightarrow \infty$) für Anströmung mit Geschwindigkeit U .

Da $\dot{\phi}/v$ auch bei zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit v unverändert bleibt, ist

$$\dot{\Phi} = \dot{v} \left(\frac{\dot{\phi}}{v} - y \right) \quad (3.4)$$

Daher ist

$$F_y = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{S_0} \dot{v} \left(\frac{\phi}{V} - y \right) n_y dS dx \quad \text{für } y \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

und die hydrodynamische Masse ergibt sich zu:

$$M_{yD} = \frac{F_y}{\dot{v}} = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{S_0} \left(\frac{\phi}{V} - y \right) n_y dS dx \quad \text{für } y \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Zunächst ist $\int_{S_0} \phi n_y dS$ zu berechnen.

Es gilt der Greensche Satz:

$$\oint_{\text{Randkurve}} (\phi \psi_n - \psi \phi_n) dS = \iint_{\text{Eingeschlossene Fläche}} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dF \quad (3.7)$$

für beliebige ϕ und ψ , die zweimal partiell differenzierbar sind. Man wählt als ϕ das oben definierte Potential, als ψ wählt man y .

Dann ist $\Delta \psi = 0$ und $\Delta \phi = 0$. Also:

$$\int_S (\phi \psi_n - \psi \phi_n) dS = 0 \quad (3.8)$$

Hier ist die Randkurve S wie im Bild gezeigt:

$$S = S_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Auf dem Körpertrand gilt:

$$\psi_n = \frac{dy}{dn} = n_y$$

$$\phi_n = 0 \quad , \text{ nach Randbedingung.}$$

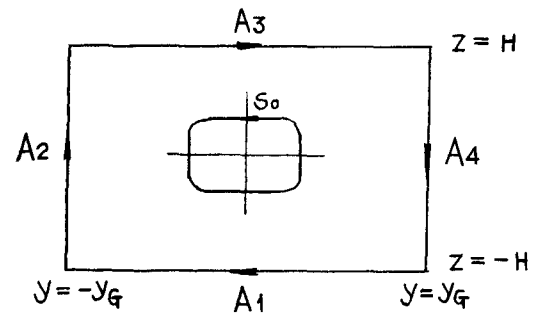
Daher

$$\int_{S_0} (\phi \psi_n - \psi \phi_n) dS = \int_{S_0} \phi n_y dS \quad (3.9)$$

Auf dem Außenrand gilt für $y_G \rightarrow \infty$

$$\int_{A_1+A_2+A_3+A_4} \phi \psi_n dS = \int_{A_3+A_4} \phi \psi_n dS \quad (3.10)$$

$$= \int_{-H}^H -U(-y_G - c)(-1) dz + \int_{-H}^H -U(y_G + c)(+1)(-dz) = -4UH(y_G + c)$$



$$\int_{A_1+A_2+A_3+A_4} -\Psi\phi_n dS = \int_{A_2+A_4} -y\phi_n dz = 4HY\epsilon U$$

Daher:

$$\int_{A_1+A_2+A_3+A_4} (\phi\psi_n - \Psi\phi_n) dS = -4HUC \quad (3.11)$$

Folglich:

$$\int_{S_0} \phi\psi_n dS = \int_{S_0} \phi n_y dS = 4HUC \quad (3.12)$$

Man setzt das in die Gleichung für die hydrodynamische Masse ein:

$$\begin{aligned} M_{yD} &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{4HUC}{V} - \int_{S_0} y n_y dS \right) dx \\ &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[4HC \frac{U}{V} - 2S(x) \right] dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dabei ist $S(x)$ die Spantfläche (ohne Spiegelbild) an der Stelle x .

Für das Schiff ist die hydrodynamische Masse eine Hälfte davon:

$$M_y = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[2HC \frac{U}{V} - S(x) \right] dx = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} m_y dx \quad (3.14)$$

Aus dieser Gleichung können mit den zuvor berechneten Funktionen $C(x)$ und $U(x)$ die hydrodynamische Masse $M_y(x)$ und ihre Verteilung $m_y(x)$ über die Schiffslänge ermittelt werden.

Bei der Ermittlung des Massenträgheitsmoments ist für $v(x)$ die lokale Geschwindigkeit rx infolge der Drehung des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit r einzusetzen. Entsprechend ist die Geschwindigkeit U aus der Integro-Differentialgleichung für drehendes Schiff zu berechnen. Für das hydrodynamische Massenträgheitsmoment ergibt sich schließlich:

$$J_z = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(x)x^2 dx + 2\rho H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} xC \frac{U}{r} dx \quad (3.15)$$

Mit oben berechneter Kraftkomponente in y-Richtung F_y (siehe Gl. (3.5)) können die hydrodynamischen Ableitungen $N\dot{v}$ und $Y\dot{r}$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 N\dot{v} &= d \text{ (Moment infolge } \dot{v}) / d\dot{v} \\
 &= \frac{1}{\dot{v}} \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \int_{s_0}^{\frac{\phi}{\dot{v}} - y} \dot{v} \left(\frac{\phi}{\dot{v}} - y \right) n_y ds dx \\
 &= \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \left(\frac{4HUC}{\dot{v}} - \int_{s_0} y n_y ds \right) dx \\
 &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \left[2HC \frac{U}{\dot{v}} - S(x) \right] dx \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y\dot{r} &= d \text{ (Kraft infolge } \dot{r}) / d\dot{r} \\
 &= \frac{1}{\dot{r}} \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{s_0}^{\frac{\phi}{rX} - y} \dot{r} x \left(\frac{\phi}{rX} - y \right) n_y ds dx \\
 &= \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(4HC \frac{U}{\dot{r}} - \int xy n_y ds \right) dx \\
 &= \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[2HC \frac{U}{\dot{r}} - xS(x) \right] dx \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

3.2 Ergebnisse für zwei Beispielschiffe

Abb. 3.1 und 3.2 zeigen die Verteilung der dimensionslosen hydrodynamischen Masse $m_y' = m_y / (\frac{1}{2} \rho S_L)$ über die Schiffslänge für den Frachter vom Typ Mariner und den Tanker "Tokyo Maru". Im Mittelschiff, wo der Versperrungskoeffizient am größten ist, ist auch die hydrodynamische Masse am größten. Am Bug und am Heck strebt m_y' gegen Null. Der m_y' -Wert vergrößert sich mit abnehmender Wassertiefe, sowohl im Mittelschiff als auch an den

Schiffsenden. Für $D/H = 1/4$ bis $1/3$ erreicht $M_{y'}$ fast den Wert in tiefem Wasser. Die $M_{y'}$ -Kurve für das völligere Schiff "Tokyo Maru" ist völliger als für den schlanken Mariner-Typ.

Abb. 3.3 und 3.4 zeigen die Änderung der Summe von hydromechanischer Masse und Schiffsmasse bei verschiedenen Wassertiefen. Die Werte wurden jeweils bezogen auf den Wert bei $D/H \rightarrow 0$. Zum Vergleich sind die Modellversuchsergebnisse von FUJINO /3/ für dasselbe Schiff eingetragen. Daraus kann man ersehen, daß sich die hydrodynamische Masse für Querbewegung in flacherem Wasser progressiv erhöht. Diese Tendenz ist für beide Schiffe gleich; der Zuwachs ist für das Mariner-Schiff ein wenig größer als für die "Tokyo Maru".

Abb. 3.5 und 3.6 zeigen die Summe von hydrodynamischem Massenträgheitsmoment und Schiffsträgheitsmoment (beide um die z-Achse), abhängig von der Wassertiefe. Die Werte sind bezogen auf den Wert in tiefem Wasser. Die Vergrößerung des berechneten Trägheitsmoments auf flachem Wasser ist für das Mariner-Schiff wesentlich größer als für die "Tokyo Maru". Für beide Schiffe ist der Einfluß des Flachwassers auf die hydrodynamische Masse M_y wesentlich größer als auf das hydrodynamische Massenträgheitsmoment J_z .

Beim Vergleich mit den experimentellen Werten ist zu beachten, daß die Rechenergebnisse für den Grenzfall positiver, gegen 0 konvergierender Froudezahlen gelten. Für endliche Froudezahlen müßten die Verformung der Wasseroberfläche und die Absenkung und Vertrimmung des Schiffes beachtet werden; für Froudezahl 0 oder für den Grenzwert negativer, gegen 0 gehender Froudezahlen wären andere Randbedingungen bei der Berechnung von $U(x)$ anzusetzen.

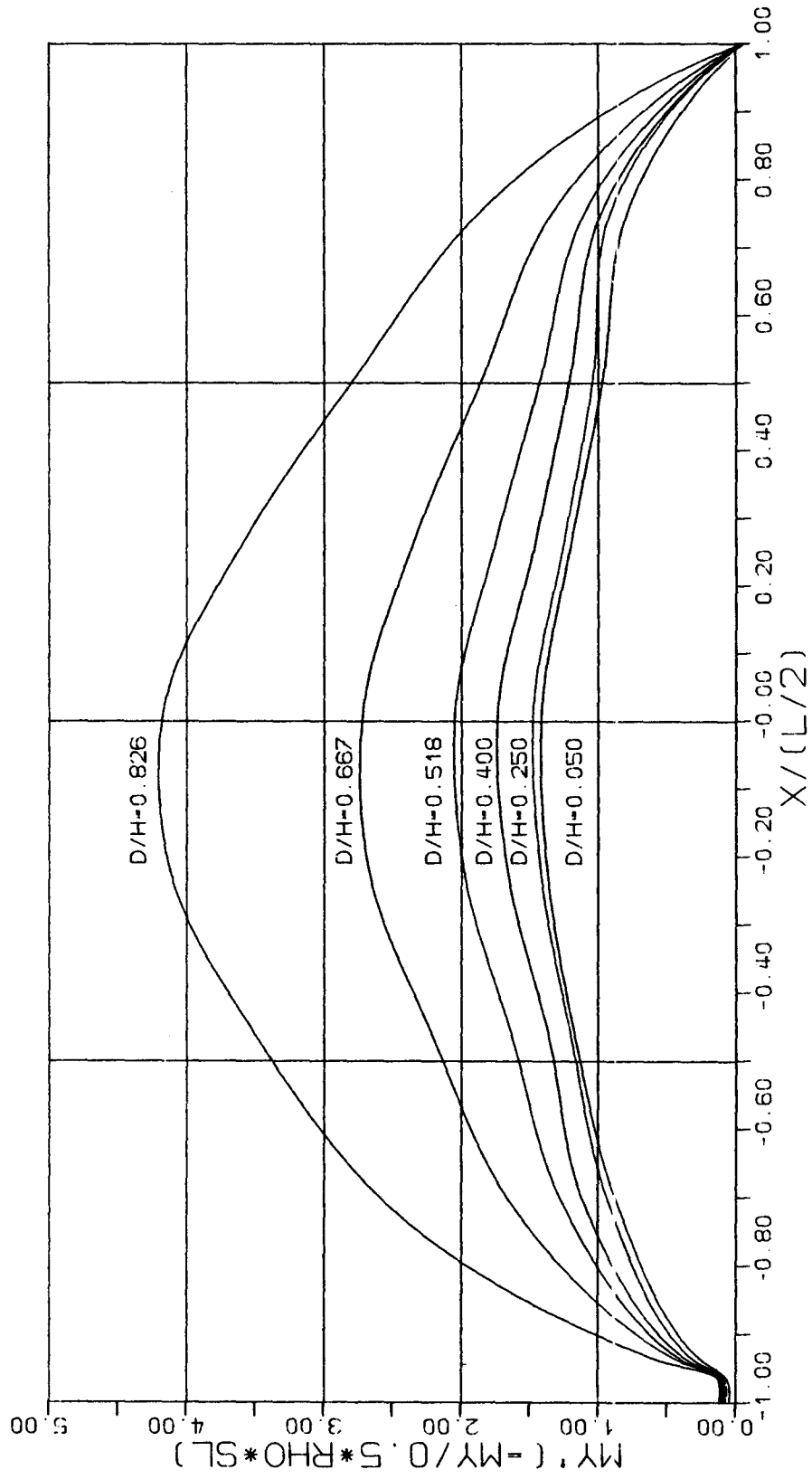


Abb. 3.1 Verteilung der hydrodynamischen Masse my' bei verschiedenen Wassertiefen für das Mariner-Schiff

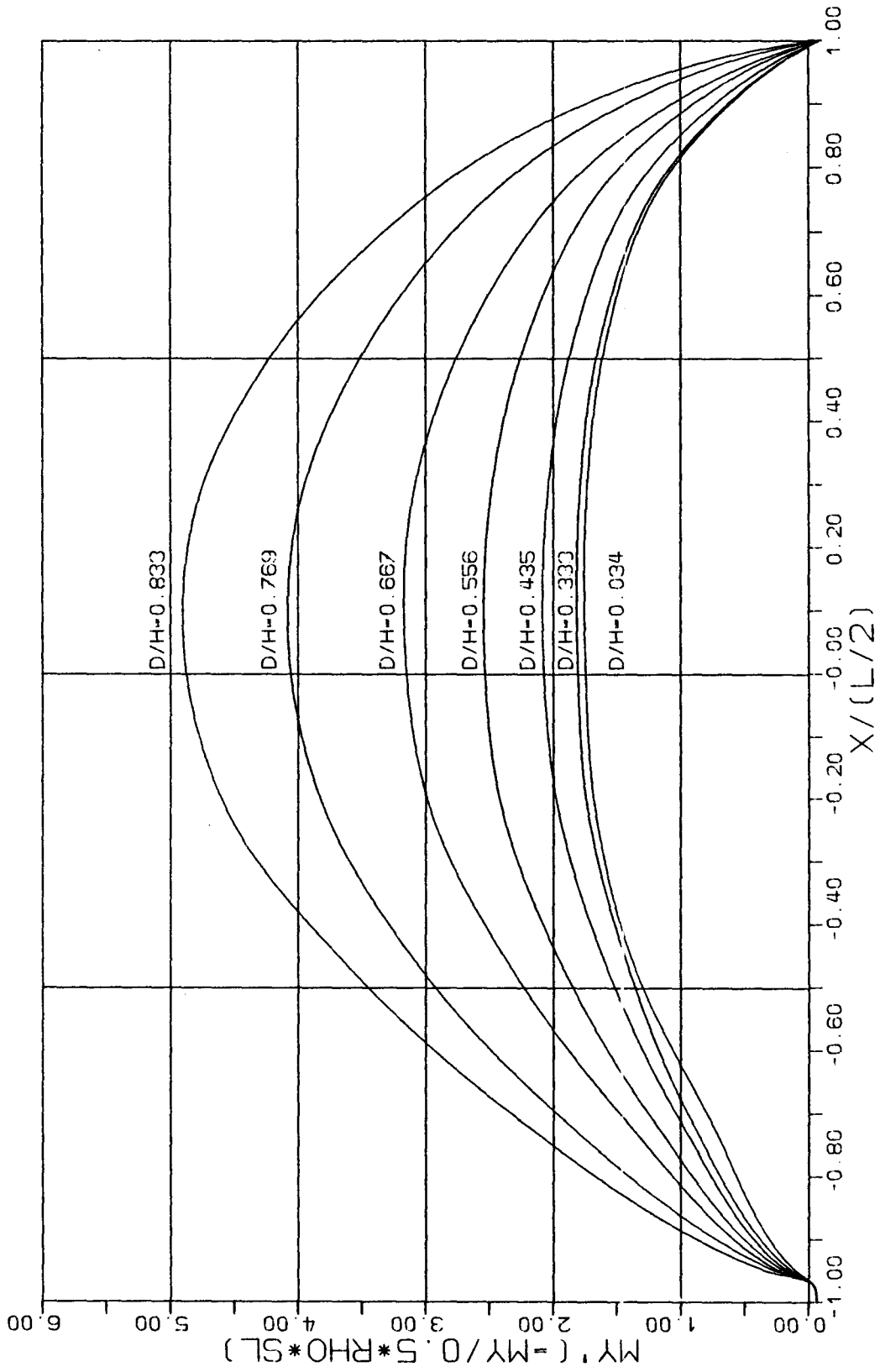


Abb. 3.2 Verteilung der hydrodynamischen Masse My' bei verschiedenen Wassertiefen für das Tankschiff "Tokyo Maru"

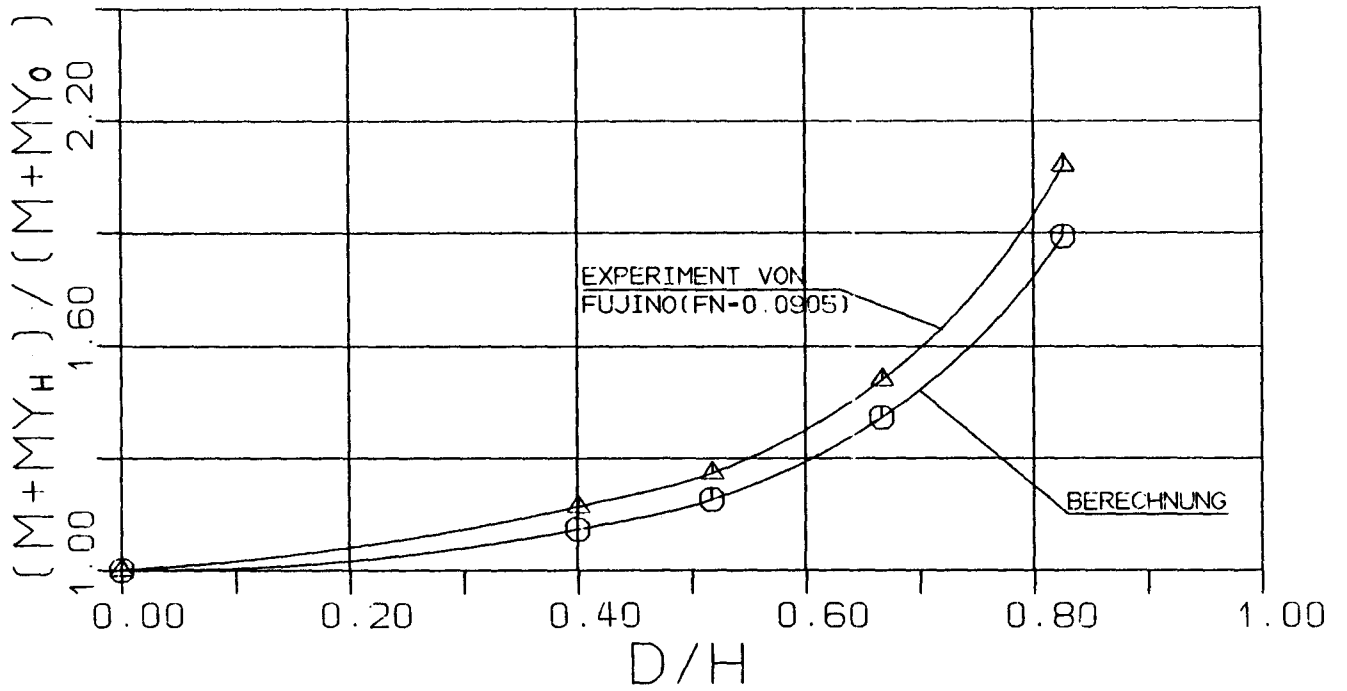


Abb. 3.3 Summe von hydrodynamischer Masse und Schiffsmasse in Abhängigkeit von der Wassertiefe, bezogen auf den Wert für tiefes Wasser, für das Mariner-Schiff

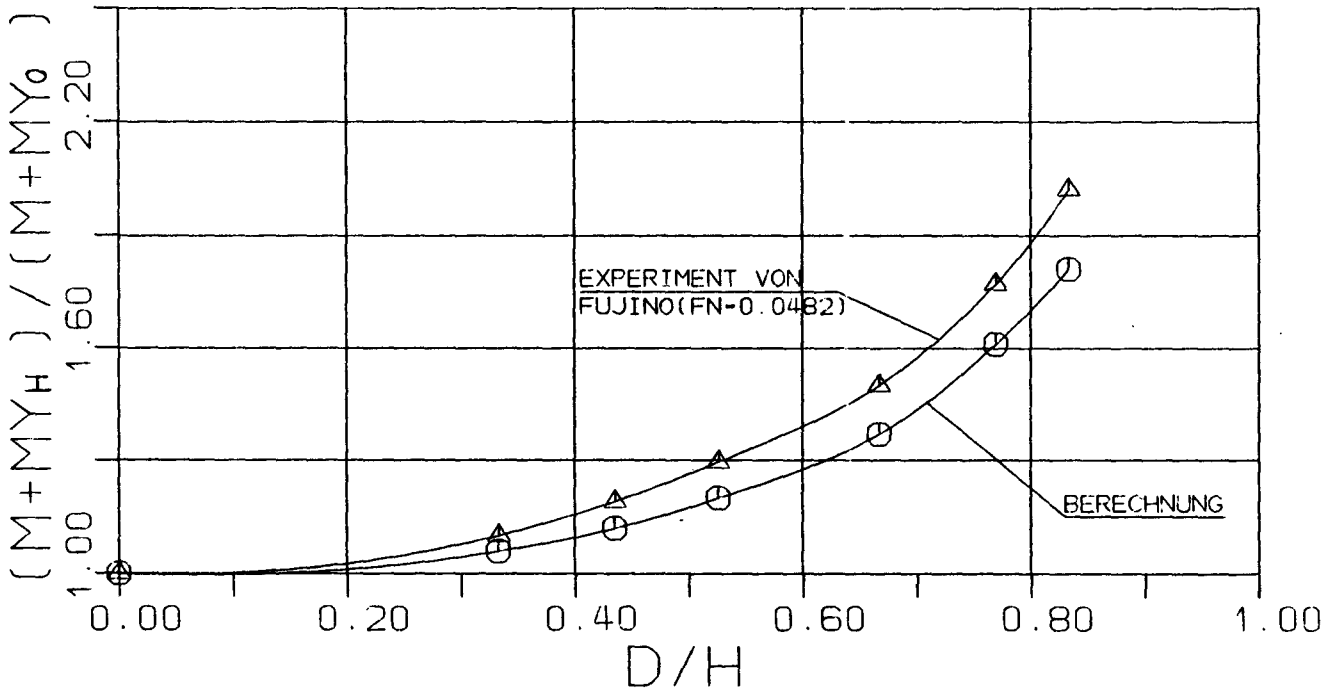


Abb. 3.4 Summe von hydrodynamischer Masse und Schiffsmasse in Abhängigkeit von der Wassertiefe, bezogen auf den Wert für tiefes Wasser, für den Tanker "Tokyo Maru"

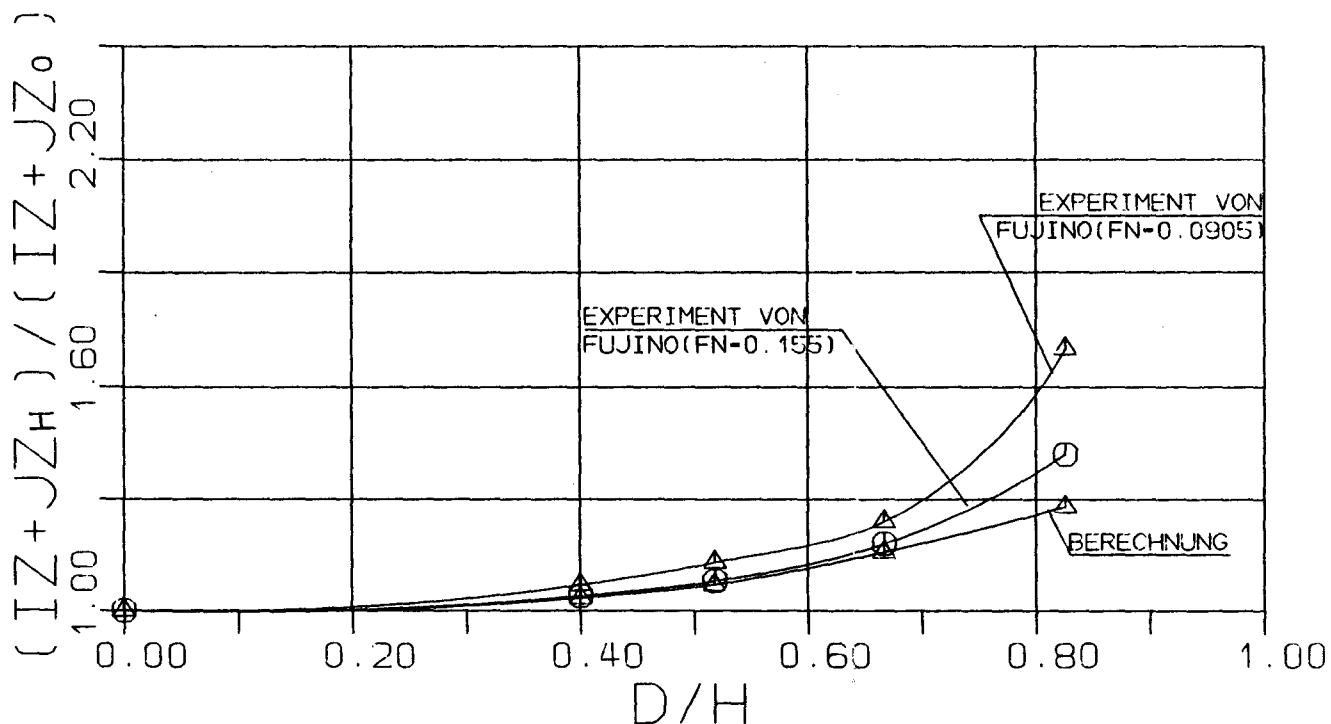


Abb. 3.5 Summen von hydrodynamischem Trägheitsmoment und Massenträgheitsmoment des Schiffes um die z-Achse in Abhängigkeit von der Wassertiefe, bezogen auf den Wert in tiefem Wasser, für das Mariner-Schiff

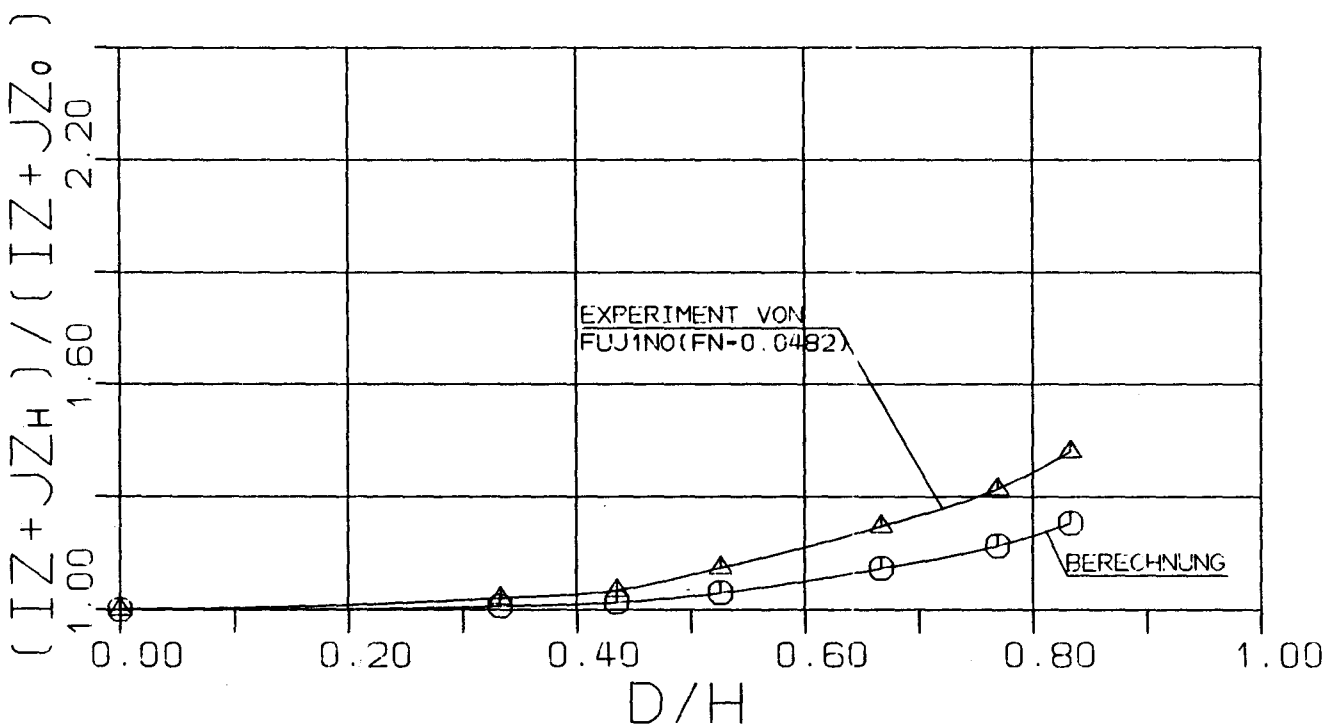


Abb. 3.6 Summen von hydrodynamischem Trägheitsmoment und Massenträgheitsmoment des Schiffes um die z-Achse in Abhängigkeit von der Wassertiefe, bezogen auf den Wert in tiefem Wasser, für den Tanker "Tokyo Maru"

4. Der Flachwasser-Einfluß auf die Querkraft und das Giermoment infolge Driftwinkel und Giergeschwindigkeit

4.1 Theorie

Die Querkraftverteilung an einem schlanken Körper läßt sich auf einfache Weise aus der Impulsänderung der Flüssigkeit in Querrichtung ableiten. Dazu wird ein schlanker Körper betrachtet, der sich schräg zu seiner Längsachse durch eine Flüssigkeit bewegt und gleichzeitig um die senkrechte Achse rotiert. Die Flüssigkeit sei weit vom Körper entfernt in Ruhe und werde nur in der Umgebung des Körpers gestört. Der seitliche Impuls der Flüssigkeit, die sich in der Ebene $x = \text{konstant}$ befindet, ist pro Längeneinheit $v(x)A(x)$. Dabei ist v die Quergeschwindigkeit des Querschnitts relativ zum ruhenden Wasser; $A(x)$ ist die hydrodynamische Masse pro Längeneinheit in Querrichtung.

Die Querkraft pro Längeneinheit, die die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, ist gleich der substantiellen Ableitung des Querimpulses:

$$L(x) = - \frac{D}{Dt} [v(x)A(x)] \quad (4.1)$$

mit

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x}$$

Für stationäre Bewegung des Körpers wird

$$L(x) = - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} [v(x)A(x)] \quad (4.2)$$

Ein schlanker Körper bewirkt fast keine Störströmung in der Flüssigkeit in Längsrichtung, so daß sich die Flüssigkeit relativ zum Körper praktisch mit der Geschwindigkeit $-u$ in x -Richtung bewegt. Daher wird

$$L(x) = u \frac{d}{dx} [v(x)A(x)] \quad (4.3)$$

Die gesamte Querkraft (in y -Richtung) ist dann

$$Y = \int_{x_h}^{x_v} L(x) dx = u \int_{x_h}^{x_v} \frac{d}{dx} [v(x)A(x)] dx ; \quad (4.4)$$

dabei bedeuten x_h und x_v die Grenzen des Bereichs, in dem $l(x)$ von Null verschieden ist.

Das Giermoment (um die z-Achse) ist entsprechend

$$N = \int_{x_h}^{x_v} x l(x) dx = u \int_{x_h}^{x_v} x \frac{d}{dx} [v(x)A(x)] dx \quad (4.5)$$

Zunächst wird der Fall der Schrägbewegung des Schiffes ohne Drehung behandelt, d.h. v ist unabhängig von x . Dann ergibt sich:

$$Y = uv [A(x_v) - A(x_h)];$$

und nach partieller Integration von (4.5):

$$N = uv \left[x_v A(x_v) - x_h A(x_h) - \int_{x_h}^{x_v} A(x) dx \right]$$

Die Integrationsgrenzen x_h und x_v müssen den Bereich einschließen, in dem sich der Impuls der Flüssigkeit in Querrichtung durch Kräfte, die der Körper auf die Flüssigkeit ausübt, verändert. Vor dem Körper ist der Impuls gleich 0 und A gleich 0. Beginnen wir dort mit der Integration, so ist in den obigen Formeln $A(x_v) = 0$ zu setzen:

$$Y = -uvA(x_h) \quad (4.6)$$

$$N = uv [-x_h A(x_h) - M_y] \quad (4.7)$$

$$\text{mit } M_y = \int_{x_h}^{x_v} A(x) dx$$

Für ein Schiff, dessen hydrodynamische Masse $A(x)$ am hinteren Ende gegen 0 geht, ergibt sich nach (4.6) in idealer Flüssigkeit eine verschwindende Querkraft. Es existiert in diesem Fall nur das sogenannte Munk-Moment $-uvM_y$, das den Drift (d.i. der Winkel zwischen Anströmgeschwindigkeit und Schiffslängsachse) zu vergrößern sucht. Ist dagegen am hinteren Ende des Körpers die hydrodynamische Masse des Querschnitts größer als Null, so tritt nach (4.6) eine endliche Querkraft (entsprechend dem Auftrieb von Tragflügeln) auf. Entscheidend für den Auftrieb ist danach die Spantform am Heck.

Dies wird verständlich, wenn man den Impulssatz auf einen Flüssigkeitsbereich anwendet, dessen Rand den Körper in weitem Abstand umschließt. Die Querkraft auf den Körper entspricht dann einem Unterschied im Querimpuls der Flüssigkeit, die aus diesem Bereich austritt, im Vergleich zu dem der eintretenden Flüssigkeit. Der Querimpuls der austretenden Flüssigkeit kann sich hinter dem Körper nicht mehr ändern und entspricht deshalb dem Querimpuls am hinteren Ende des Körpers; welchen Verlauf der Querimpuls über der Schiffslänge hat, ist für die gesamte Querkraft ohne Einfluß.

Entscheidend für die anzusetzende Stelle x_h ist, wo sich die Strömung vom Körper ablöst und daher der Querimpuls der Flüssigkeit nicht mehr an den Körper zurückgegeben wird. Bei einem Tragflügel ist dies die Profil-Hinterkante; deshalb ist an dieser Kante eine Kutta-Bedingung anzusetzen. Bei einem Schiff in idealer Flüssigkeit ist dies im Bereich des Hinterschiffs und des Ruders der Fall. Bei einem Schiff in realer Flüssigkeit mit Zähigkeit ist dies jedoch schon weiter vorn der Fall: Messungen des Druckverlaufs an unbeschleunigten, schräg fahrenden Schiffen zeigen, daß etwa bis zum Mittschiffsbereich die experimentell bestimmten Drücke den nach der Theorie für reibungsfreie Strömung bestimmten Drücken entsprechen; dahinter, im Bereich abnehmender $A(x)$ -Werte (wenn man sich wie die Flüssigkeit von vorn nach hinten am Schiff entlang bewegt), löst sich die Strömung vom Körper ab und ändert daher ihren Querimpuls kaum noch, so daß im Hinterschiff nur noch geringe Druckunterschiede zwischen beiden Schiffsseiten auftreten. Deshalb hat es sich bei der Anwendung der Theorie schlanker Körper auf tiefem Wasser für die Kräfte und Momente infolge stationärer Bewegungen bewährt, in den Gleichungen (4.6) und (4.7) für x_h die Stelle x_m zu wählen, an der $A(x)$ maximal wird. Im Gegensatz dazu wird bei den Kräften infolge von Beschleunigungen über die gesamte Körperlänge integriert, weil sich die Strömung bei beschleunigter Bewegung kaum oder gar nicht vom Körper ablöst.

Genauso soll hier auch für flaches Wasser vorgegangen werden. Wir erhalten damit für den unter einem Winkel β zur Körperlängsachse mit der Gesamtgeschwindigkeit V bewegten Körper mit Beziehung

$$v = V \cdot \beta$$

die Querkraft

$$Y = -V^2 \beta A(x_m) \quad (4.8)$$

und das Moment um die z-Achse

$$N = -V^2 \beta \left[x_m A(x_m) + \int_{x_m}^{\frac{L}{2}} A(x) dx \right] \quad (4.9)$$

Für Drehbewegung des Körpers um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit r ist:

$$v(x) = -r x$$

Damit wird die Querkraftverteilung über die Schiffslänge nach Gleichung (4.3):

$$L(x) = -Vr \frac{d}{dx} [x A(x)] = -Vr \left[x \frac{dA(x)}{dx} + A(x) \right] \quad (4.10)$$

Plausibilitätsüberlegungen ähnlich denen, die zuvor für konstantes v angestellt wurden, ergeben in Übereinstimmung mit Modellversuchsergebnissen, daß der erste Summand auf der rechten Seite von (4.10) nur etwa zwischen Bug und Maximum von A auftritt, während der zweite Teil über die gesamte Schiffslänge gilt. Damit erhält man für die Kraft in Querschiffsrichtung infolge der Drehung r mit überlagerter Längsgeschwindigkeit V :

$$\begin{aligned} Y^*(r) &= -Vr \left[\int_{x_m}^{\frac{L}{2}} x \frac{d}{dx} A(x) dx + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A(x) dx \right] \\ &= -Vr \left[-x_m A(x_m) - \int_{x_m}^{\frac{L}{2}} A(x) dx + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A(x) dx \right] \\ &= -Vr \left[x_m A(x_m) - \int_{-\frac{L}{2}}^{x_m} A(x) dx \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Entsprechend wird das Giermoment N_r infolge r :

$$\begin{aligned}
 N(r) &= -Vr \left\{ \int_{x_m}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{d}{dx} A(x) dx + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x A(x) dx \right\} \\
 &= -Vr \left\{ \left[x^2 A(x) \right]_{x_m}^{\frac{L}{2}} - 2 \int_{x_m}^{\frac{L}{2}} x A(x) dx + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x A(x) dx \right\} \\
 &= -Vr \left\{ x_m^2 A(x_m) - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x A(x) \operatorname{sign}(x - x_m) dx \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Diese Querkräfte und Giermomente bei Schräg- und Drehbewegung gelten sowohl in tiefem als auch in flachem Wasser. In flachem Wasser ist, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, die hydrodynamische Masse

$$A(x) = -\rho S(x) + 2\rho H \frac{U(x)}{V(x)} C(x)$$

Dabei ist $S(x)$ die Querschnittsfläche, $C(x)$ der Versperrungskoeffizient und $U(x)$ die modifizierte Quergeschwindigkeit in flachem Wasser. Für $U(x)$ ist - abhängig von der Art der Bewegung - $U_\beta(x)$ oder $U_r(x)$ einzusetzen.

Oft werden die hydrodynamischen Kräfte und Momente durch ihre Ableitungen nach den Bewegungen charakterisiert:

$$\begin{aligned}
 Y_\beta &= \frac{\partial Y}{\partial \beta} \Big|_{u=V_0, \beta, \dot{\beta}, r, \dot{r}, \delta, \dot{\delta} = 0} \\
 N_\beta &= \frac{\partial N}{\partial \beta} \Big|_{u=V_0, \beta, \dot{\beta}, r, \dot{r}, \delta, \dot{\delta} = 0} \\
 Y_r^* &= \frac{\partial Y}{\partial r} \Big|_{u=V_0, \beta, \dot{\beta}, r, \dot{r}, \delta, \dot{\delta} = 0} \\
 N_r &= \frac{\partial N}{\partial r} \Big|_{u=V_0, \beta, \dot{\beta}, r, \dot{r}, \delta, \dot{\delta} = 0}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Hier ist V_0 die Geschwindigkeit in Längsrichtung, die das Schiff bei stationärer Geradeausfahrt erreicht.

Mit dieser Definition ergeben sich wegen der Linearität die hydrodynamischen Ableitungen in flachem Wasser zu:

$$Y_\beta = -V^2 \left\{ -\rho S(x) + 2\rho H \frac{U_\beta(x)}{V_\beta} C(x) \right\}_{x=x_{m\beta}}
 \tag{4.14}$$

$$N_{\beta} = -V^2 \left\{ x \left[-\rho S(x) + 2\rho H \frac{U_{\beta}(x)}{V_{\beta}} C(x) \right]_{x=x_{m\beta}} + \int_{x_{m\beta}}^{\frac{L}{2}} \left[-\rho S(x) + 2\rho H \frac{U_{\beta}(x)}{V_{\beta}} C(x) \right] dx \right\} \quad (4.15)$$

$$Y_r^* = VL \left\{ \left[-\frac{x}{L} \rho S(x) + 2\rho H \frac{U_r(x)}{rL} C(x) \right]_{x=x_{mr}} - \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{x_{mr}} \left[-\rho S(x) + 2\rho H \frac{U_r(x)}{rL} \frac{L}{x} C(x) \right] dx \right\} \quad (4.16)$$

$$N_r = -VL \left\{ -x_{mr} \left[-\frac{x}{L} \rho S(x) + 2\rho H \frac{U_r(x)}{rL} C(x) \right]_{x=x_{mr}} + \int_{-\frac{L}{2}}^{x_{mr}} \left[-\frac{x}{L} \rho S(x) + 2\rho H \frac{U_r(x)}{rL} C(x) \right] dx - \int_{x_{mr}}^{\frac{L}{2}} \left[-\frac{x}{L} \rho S(x) + 2\rho H \frac{U_r(x)}{rL} C(x) \right] dx \right\} \quad (4.17)$$

Zur Berechnung der hydrodynamischen Ableitungen der Querkräfte und Giermomente nach Gleichung (4.4) bis (4.17) sind zunächst die Versperrungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Wassertiefe im einzelnen für die Spantquerschnitte zu ermitteln. Danach werden die modifizierten Geschwindigkeiten U in Querrichtung nach Gleichung (2.43) und (2.44) numerisch berechnet. Damit können dann die Ableitungen Y_{β} , Y_r^* , N_{β} und N_r bestimmt werden. Es läßt sich zeigen (siehe z.B. NEWMAN /28/), daß zu der nach der Theorie schlanker Körper berechneten hydrodynamischen Kraft infolge Drehbewegung $Y_r^* \cdot r$ bei nur mäßig schlanken Körpern noch im Anteil addiert werden muß, der einer Zentrifugalbeschleunigung der hydrodynamischen Masse des Schiffes in Schiffslängsrichtung entspricht. Dieser Anteil geht zwar etwa mit der dritten Potenz des Schlankheitsgrades gegen Null, ist aber bei üblich proportionierten Schiffen nicht vernachlässigbar. Die gesamte dimensionslose hydrodynamische Kraft in Querrichtung infolge Drehbewegung ist dann

$$Y_r' = Y_r^{*'} - M_x' u r \quad (4.18)$$

Dabei ist $M_x' = M_x / (\frac{1}{2} \rho L^3)$ die dimensionslose hydrodynamische Masse des Schiffes für Längsbeschleunigung.

4.2 Resultate

Für die in Tabelle 1.6 sowie Abb. 1.6 und 1.7 beschriebenen zwei Schiffe wurden Beispielrechnungen durchgeführt und mit experimentellen Ergebnissen von FUJINO /3/ und /4/ verglichen. Die hydrodynamischen Koeffizienten Y_β , N_β , Y_r^* und N_r wurden dazu nach den Gleichungen (4.14) bis (4.17) ermittelt und wie folgt in dimensionslose Werte Y_β' , N_β' , $Y_r^{*'}$ und N_r' umgerechnet:

$$Y_\beta' = \frac{Y_\beta}{\frac{1}{2} \rho L^2 V^2} ; \quad N_\beta' = \frac{N_\beta}{\frac{1}{2} \rho L^3 V^2} ;$$

$$Y_r^{*' } = \frac{Y_r^*}{\frac{1}{2} \rho L^3 V} ; \quad N_r' = \frac{N_r}{\frac{1}{2} \rho L^4 V} .$$

(4.19)

Tabelle 4.1 zeigt diese Koeffizienten für das Mariner-Schiff zusammen mit experimentellen Werten von FUJINO /3/, /4/ für dasselbe Schiff. Dabei ist zu beachten, daß FUJINO in seinen Veröffentlichungen nicht Y_r' angibt, sondern (nach den hier benutzten Symbolen) $Y_r' + M'$.

Die rechnerischen Ergebnisse weichen im allgemeinen nur wenig von den experimentellen Ergebnissen ab, vor allem bei kleinen D/H-Werten. Die berechneten Y_β' -Werte sind allerdings durchweg etwas kleiner als die gemessenen. Bei der kleinsten Wassertiefe (D/H= 0.826) versagt die Übereinstimmung. Dieselben Tendenzen zeigt Tabelle 4.2 für die "Tokyo Maru".

Die Ursache für die Abweichung zwischen Berechnung und Experiment bei der kleinsten Wassertiefe hierfür wird in der Verformung der Wasseroberfläche sowie der Änderung der Schwimmlage

infolge der Fahrt gelten: Bei kleinen Wassertiefen ist dieser Einfluß schon bei verhältnismäßig kleiner Schiffsgeschwindigkeit wesentlich.

Tabelle 4.1 Dimensionslose hydrodynamische Koeffizienten des Mariner-Schiffes in flachem und tiefem Wasser

D/H		0.0	0.4	0.518	0.667	0.826
$10^3 \cdot Y_{\beta}'$	Berechnung	9.187	11.160	13.312	17.672	27.128
	Experiment	14.6	15.0	18.7	29.8	86.9
$10^3 \cdot N_{\beta}'$	Berechnung	3.768	4.820	5.629	7.468	11.420
	Experiment	3.53	4.52	6.25	8.67	12.5
$10^3 \cdot Y_r'$	Berechnung	2.561	2.621	2.960	3.765	5.549
	Experiment	3.06	3.72	3.78	5.34	11.53
$10^3 \cdot N_r'$	Berechnung	-2.316	-2.390	-2.516	-3.014	-3.986
	Experiment	-2.28	-2.30	-2.62	-3.23	-6.32

- i) Die zum Vergleich angeführten Werte des Experiments von FUJINO entsprechen einer Froude-Zahl $F_n = 0.0905$
- ii) Die berechneten Werte Y_r' wurden mit $M_x' = 0.029 M'$ bestimmt.

Tabelle 4.2 Dimensionslose hydrodynamische Koeffizienten des Tankers "Tokyo Maru" in flachem und tiefem Wasser

D/H		0.0	0.333	0.453	0.556	0.667	0.769	0.833
$10^3 Y_{\beta}'$	Berechnung	14.346	16.340	18.722	22.876	28.526	36.668	44.035
	Experiment	23.097	25.147	26.310	30.077	37.73	58.159	79.761
$10^3 N_{\beta}'$	Berechnung	5.539	6.259	7.090	8.585	10.524	13.515	16.229
	Experiment	4.930	5.982	7.921	11.078	14.069	18.445	22.377
$10^3 Y_r'$	Berechnung	4.031	3.698	4.031	4.695	5.526	6.911	8.019
	Experiment	4.197	3.809	4.141	4.751	5.969	7.354	12.887
$10^3 N_r'$	Berechnung	-3.379	-3.523	-3.645	-3.933	-4.276	-5.052	-5.594
	Experiment	-2.969	-3.218	-3.002	-3.246	-3.578	-4.608	-5.927

- i) Die zum Vergleich angeführten Werte des Experiments von FUJINO entsprechen einer Froude-Zahl $Fn = 0.0482$.
- ii) Die berechneten Werte Y_r' wurden mit $M_x' = 0.059 M'$ bestimmt.

Die Tabellen 4.3 und 4.4 sowie die Abb. 4.1 bis 4.8 zeigen für dieselben zwei Schiffe die Verhältnisse $Y_{\beta H}/Y_{\beta 0}$, $N_{\beta H}/N_{\beta 0}$, Y_{rH}/Y_{r0} und N_{rH}/N_{r0} , d.h. die hydrodynamischen Koeffizienten in flachem Wasser (Index H) im Verhältnis zu denen in tiefem Wasser (Index 0).

Tabelle 4.3 Verhältnis der hydrodynamischen Koeffizienten in flachem Wasser zu denen in tiefem Wasser für das Mariner-Schiff

D/H		0.0	0.400	0.518	0.667	0.826
$\frac{Y_{\beta H}}{Y_{\beta 0}}$	Berechnung	1.0	1.215	1.449	1.924	2.953
	Experiment	1.0	1.027	1.281	2.041	5.952
$\frac{N_{\beta H}}{N_{\beta 0}}$	Berechnung	1.0	1.279	1.494	1.982	3.031
	Experiment	1.0	1.280	1.770	2.456	3.541
$\frac{Y_{rH}^*}{Y_{r0}^*}$	Berechnung	1.0	1.061	1.175	1.442	2.044
	Experiment	1.0	1.208	1.227	1.719	3.670
$\frac{N_{rH}}{N_{r0}}$	Berechnung	1.0	1.032	1.086	1.301	1.721
	Experiment	1.0	1.009	1.149	1.417	2.770

(Die experimentellen Werte wurden von FUJINO bei einer Froude-Zahl $F_n = 0.0905$ gemessen)

Tabelle 4.5 $10^3 \cdot Y_r^*$ in verschiedenen Wassertiefen

D/H	0.0	0.400	0.518	0.667	0.826
Berechnung	2.980	3.162	3.562	4.297	6.091
Experiment ($F_n=0.095$)	3.172	3.832	3.892	5.452	11.642

Tabelle 4.4 Verhältnis der hydrodynamischen Koeffizienten in flachem Wasser zu denen in tiefem Wasser für die "Tokyo Maru"

D/H		0.0	0.333	0.435	0.556	0.667	0.769	0.833
$\frac{Y_{\beta H}}{Y_{\beta 0}}$	Berechnung	1.0	1.141	1.305	1.596	1.987	2.557	3.073
	Experiment	1.0	1.089	1.139	1.302	1.633	2.518	3.45
$\frac{N_{\beta H}}{N_{\beta 0}}$	Berechnung	1.0	1.20	1.55	2.04	2.50	3.21	3.855
	Experiment	1.0	1.20	1.59	2.22	2.82	3.70	4.48
$\frac{Y_{rH}^*}{Y_{r0}^*}$	Berechnung	1.0	1.048	1.073	1.221	1.407	1.704	1.948
	Experiment	1.0	0.923	0.989	1.110	1.352	1.626	2.725
$\frac{N_{rH}}{N_{r0}}$	Berechnung	1.0	1.040	1.079	1.164	1.266	1.495	1.662
	Experiment	1.0	1.026	1.034	1.063	1.192	1.527	1.778

(Die experimentellen Werte wurden von FUJINO bei einer Froude-Zahl $F_n = 0.0482$ gemessen)

Tabelle 4.6 $10^3 \cdot Y_r^*$ in verschiedenen Wassertiefen

D/H	0.0	0.333	0.435	0.556	0.667	0.769	0.833
Berechnung	4.542	4.764	4.874	5.539	6.370	7.755	8.862
Experiment ($F_n=0.0482$)	5.040	4.653	4.985	5.594	6.813	8.198	13.737

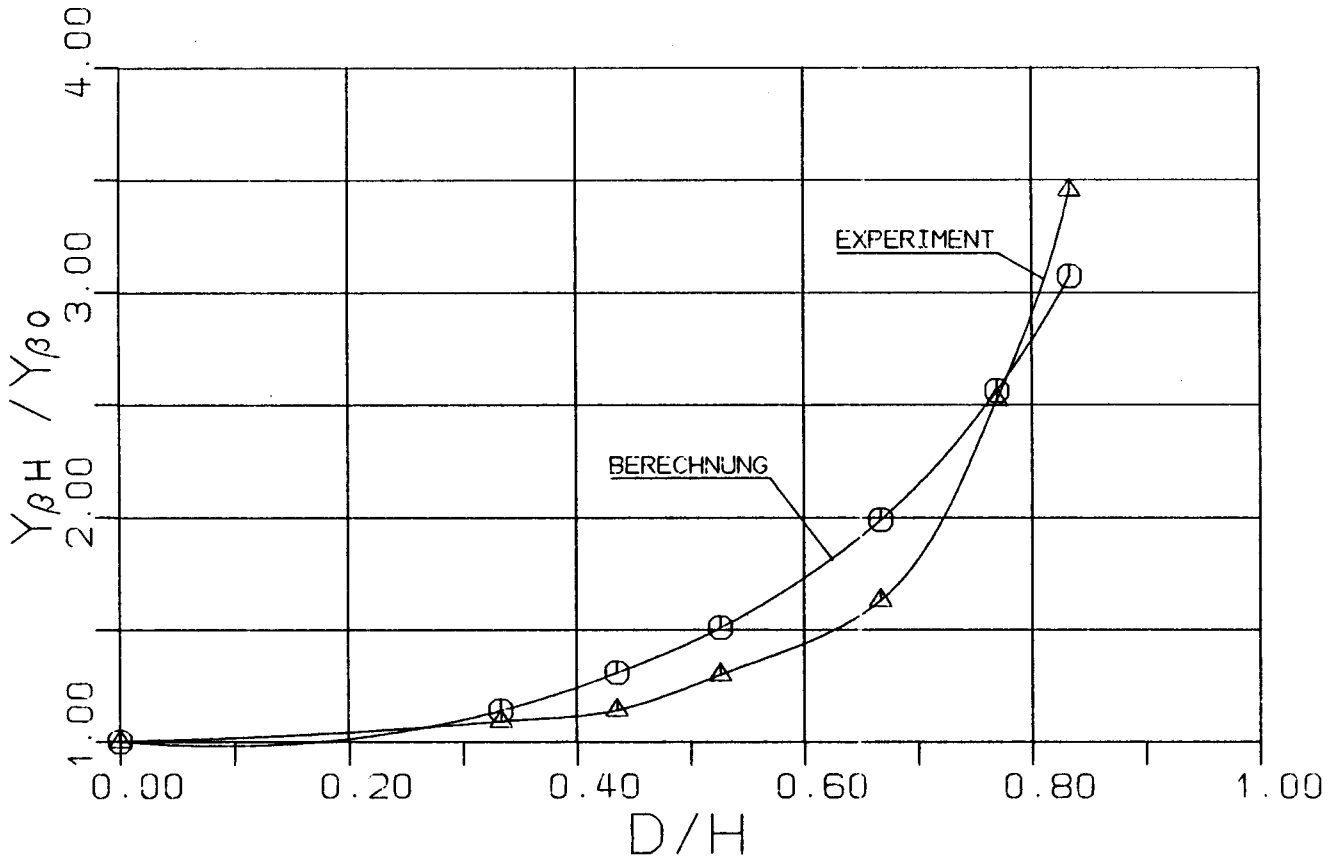


Abb. 4.1 Zunahme der Querkraft pro Driftwinkel Y_{β} in flachem Wasser für die "Tokyo Maru"

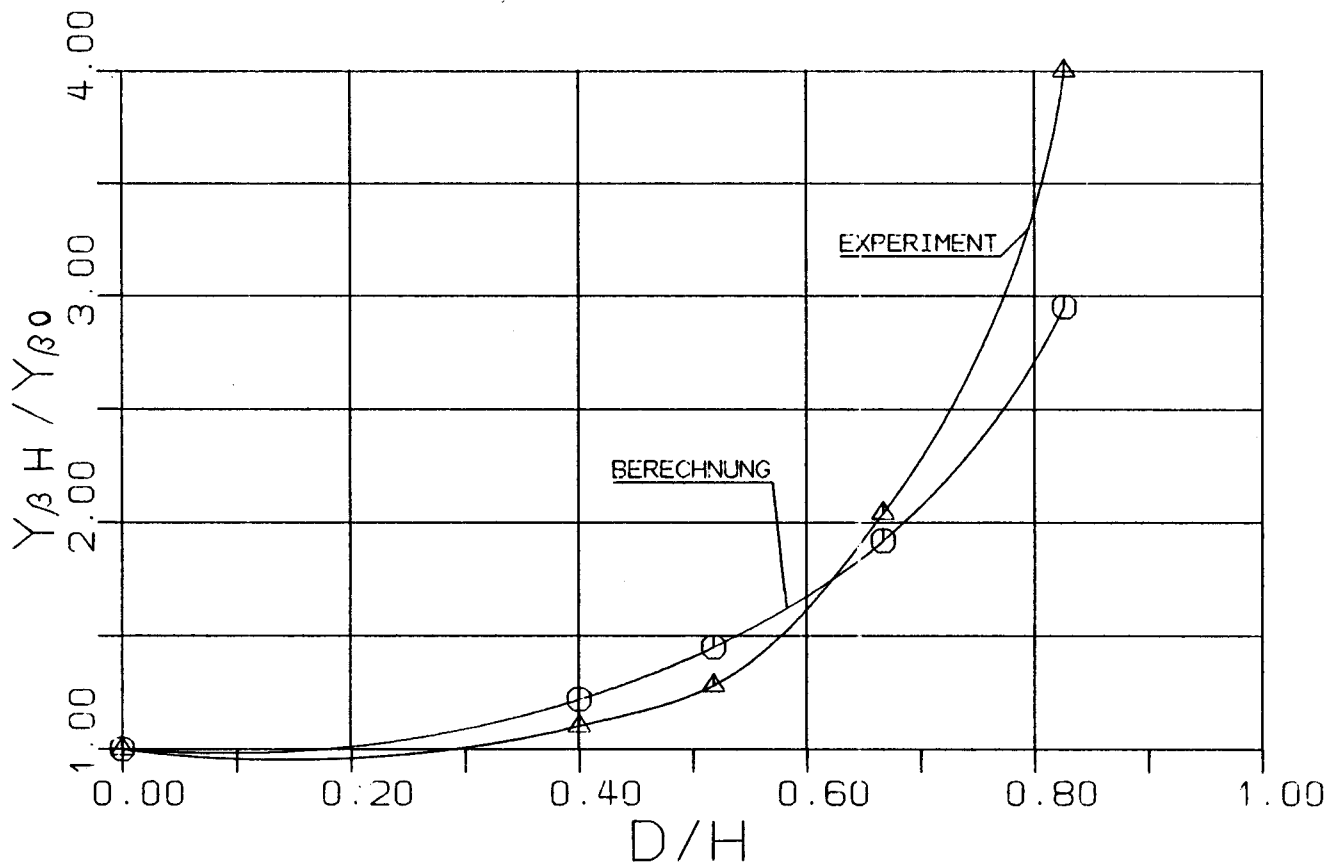


Abb. 4.2 Zunahme der Querkraft pro Driftwinkel Y_{β} in flachem Wasser für das Mariner-Schiff

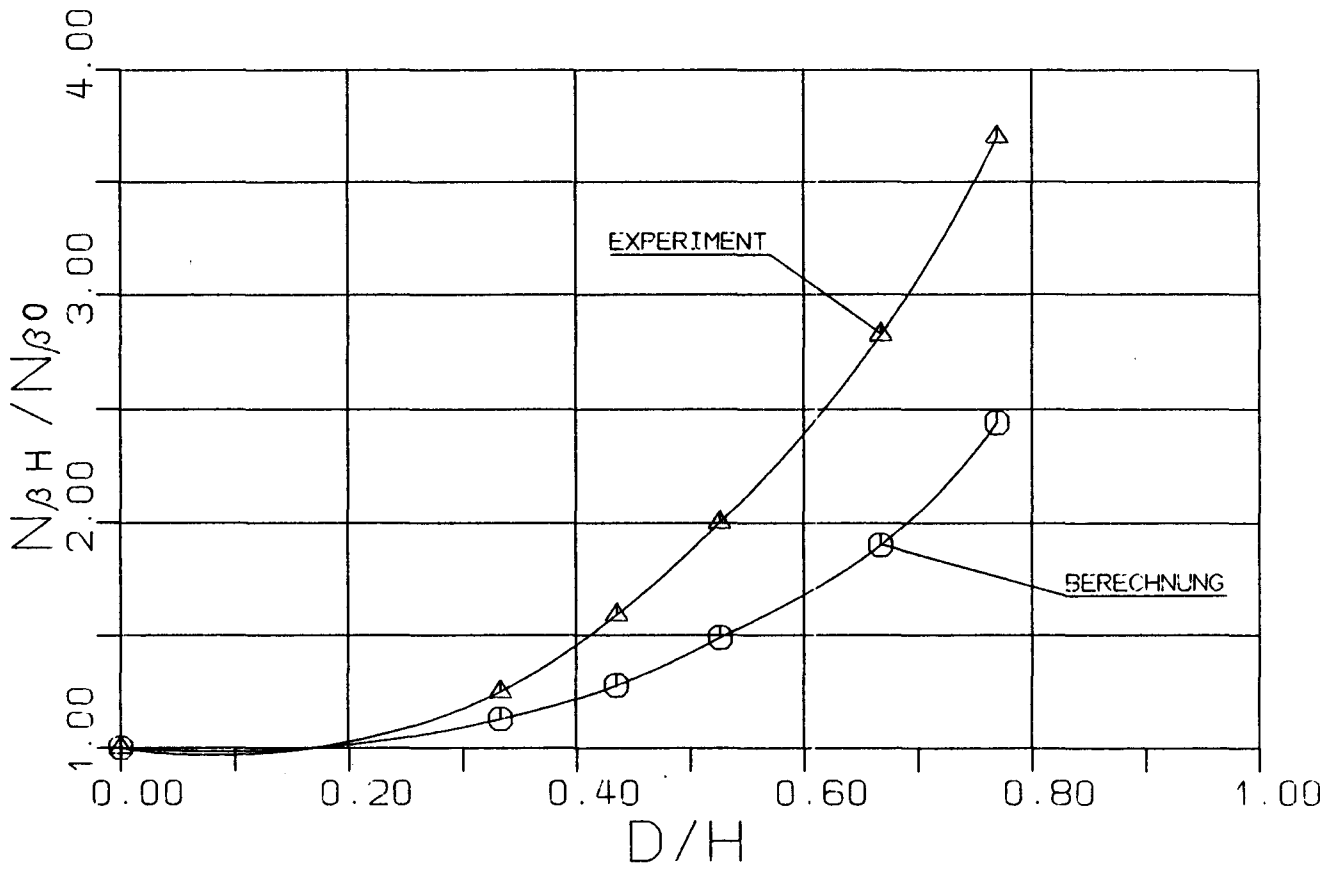


Abb. 4.3 Zunahme des Giermoments pro Driftwinkel N_{β} in flachem Wasser für die "Tokyo Maru"

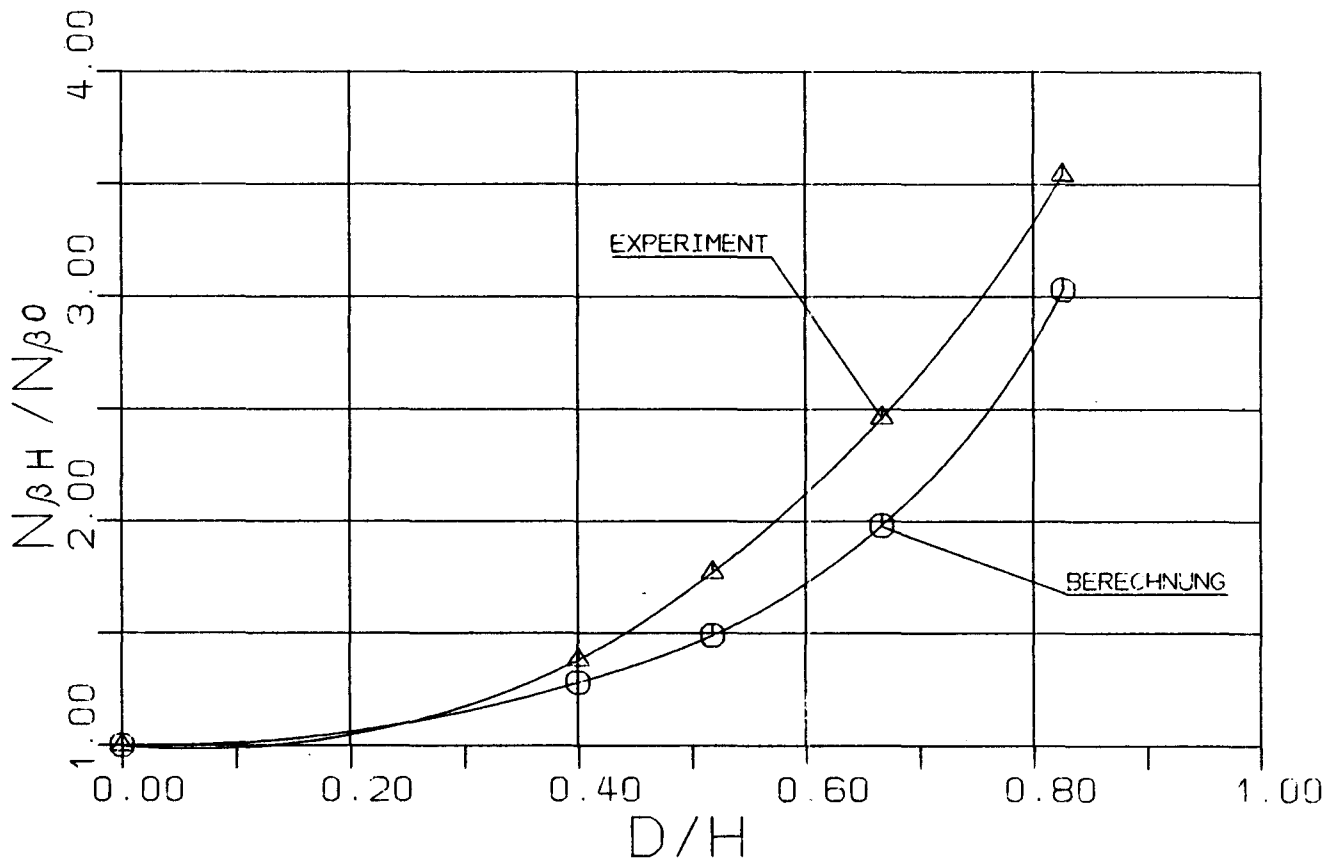


Abb. 4.4 Zunahme des Giermoments pro Driftwinkel N_{β} in flachem Wasser für das Mariner-Schiff

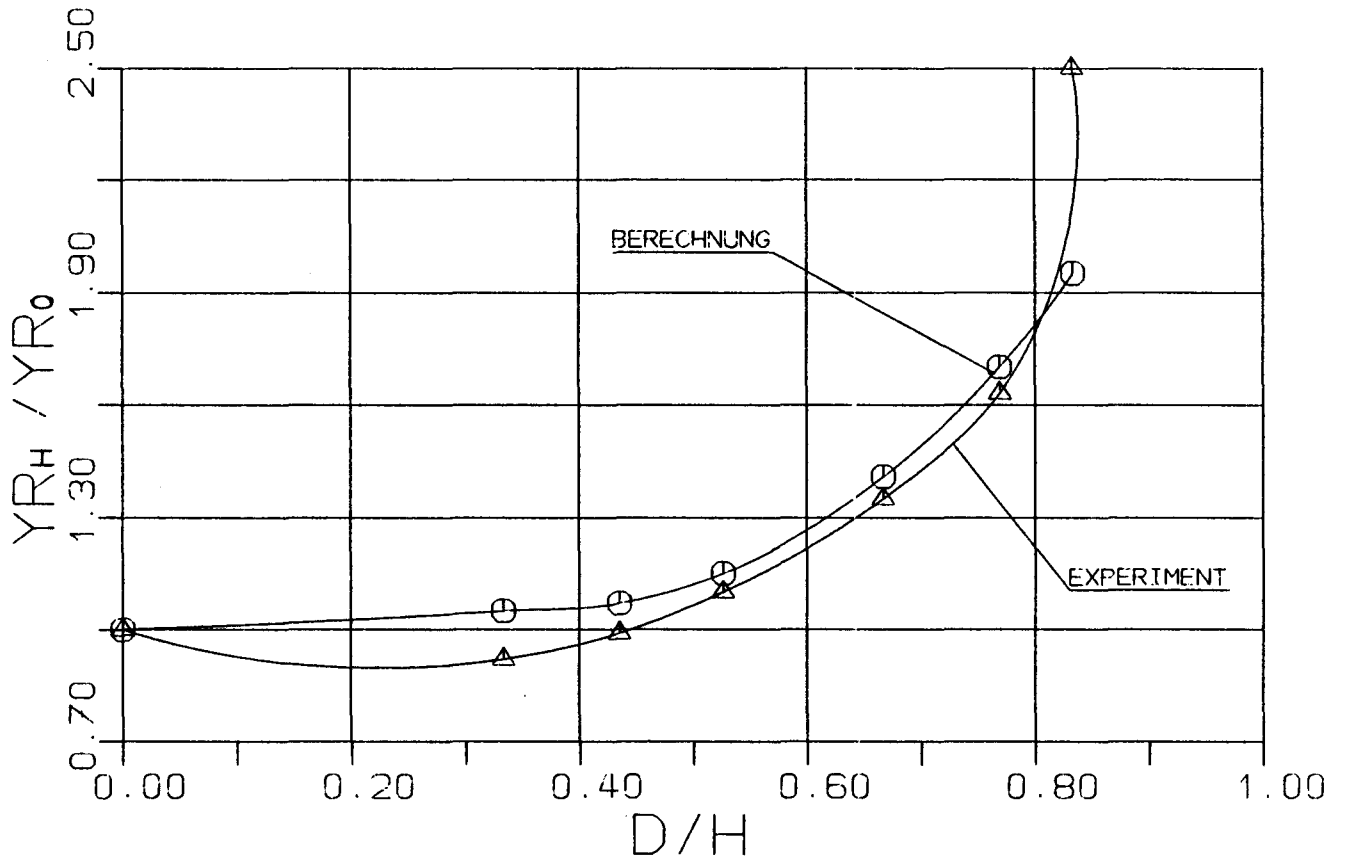


Abb. 4.5 Zunahme der Querkraft pro Drehgeschwindigkeit Y_r in Abhängigkeit von der Wassertiefe für die "Tokyo Maru"

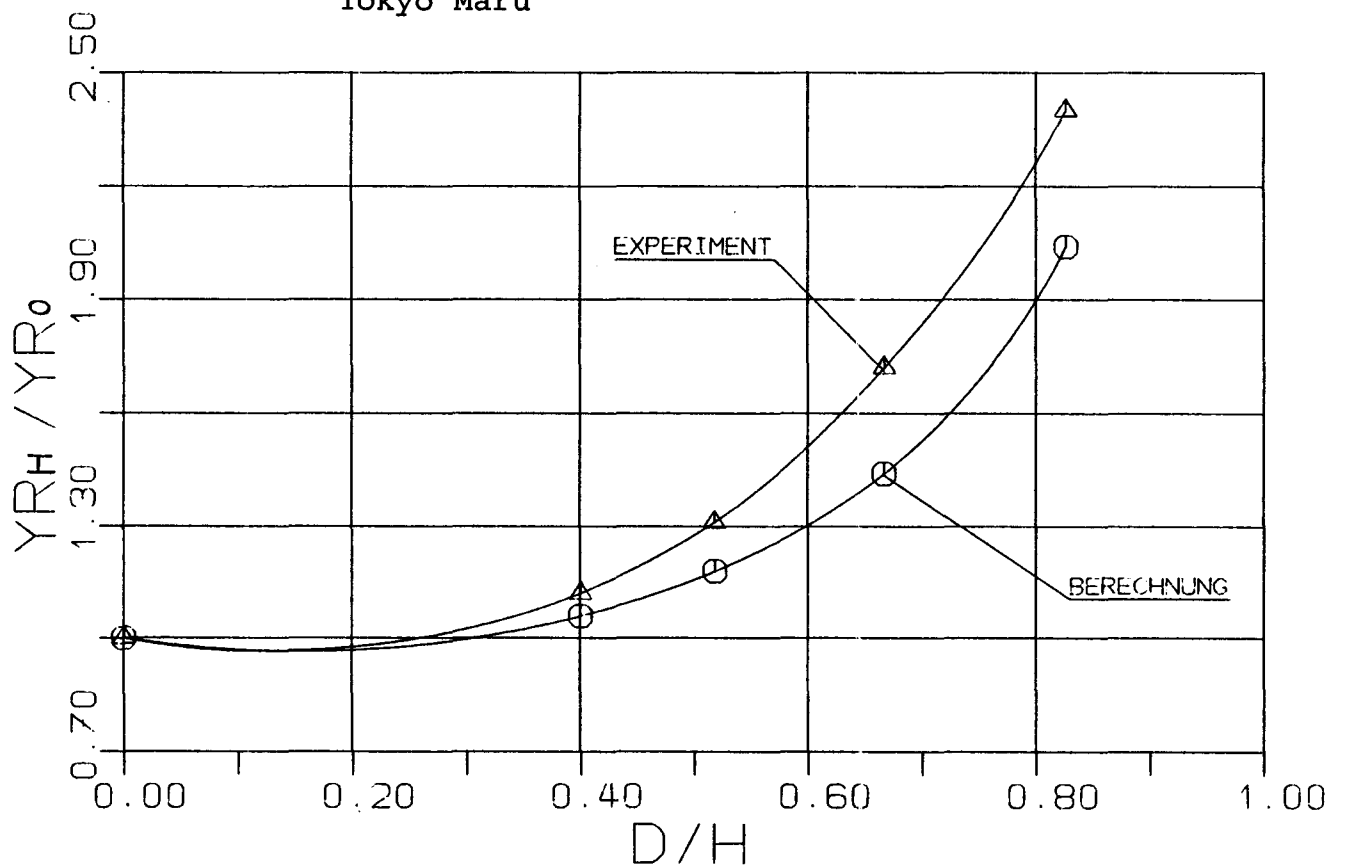


Abb. 4.6 Zunahme der Querkraft pro Drehgeschwindigkeit Y_r in Abhängigkeit von der Wassertiefe für das Mariner-Schiff

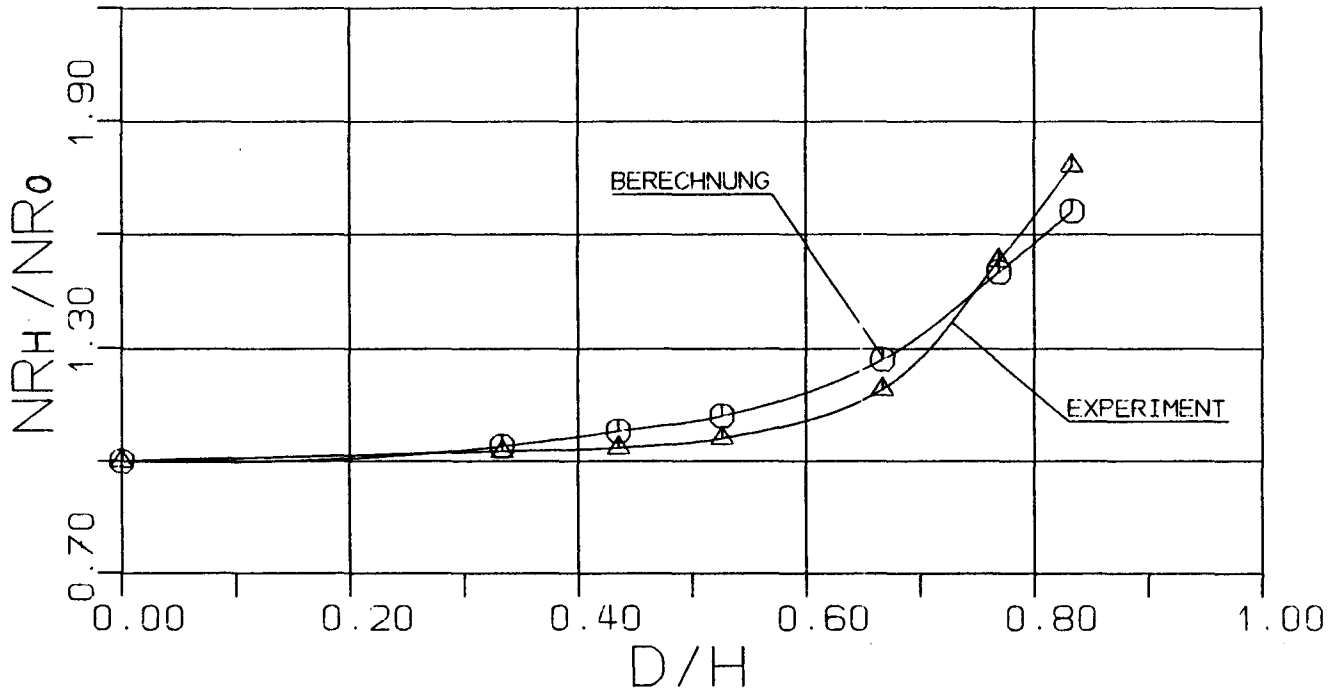


Abb. 4.7 Zunahme des Giermoments pro Drehgeschwindigkeit N_r in Abhängigkeit von der Wassertiefe für die "Tokyo Maru"

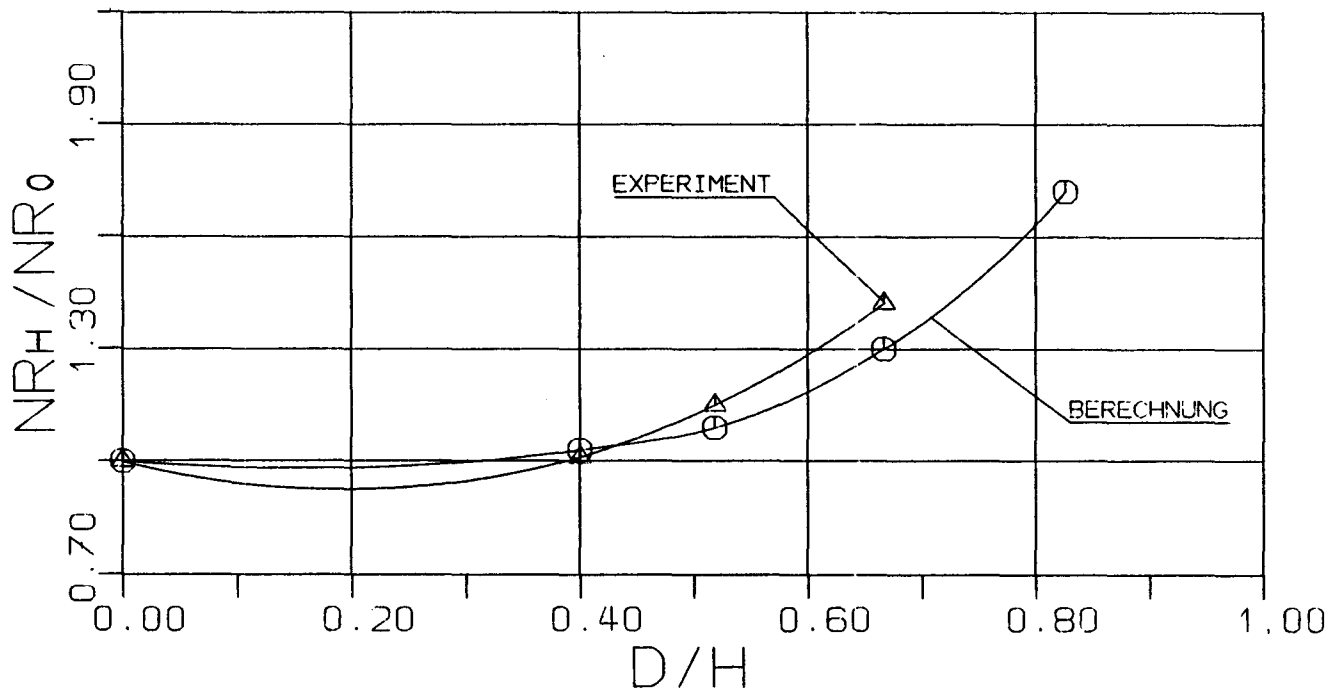


Abb. 4.8 Zunahme des Giermoments pro Drehgeschwindigkeit N_r in Abhängigkeit von der Wassertiefe für das Mariner-Schiff

4.3 Analyse der Ergebnisse

- i) Alle vier Ableitungen Y_{β}' , N_{β}' , Y_r^{*}' und N_r' werden wesentlich von der Wassertiefe beeinflusst, wenn diese geringer als etwa der 3fache Schiffstiefgang ist. Für $H-D \ll D$ können sie auf mehr als das Vierfache ihres Wertes in tiefem Wasser anwachsen. Dies beeinflusst natürlich entscheidend das Manövrierverhalten.
- ii) Der Einfluß des Flachwassers auf die Kräfte und Momente Y_{β}' und N_{β}' infolge Drift ist größer als auf Y_r' und N_r' infolge der Drehgeschwindigkeit. Hierin stimmen die berechneten Werte mit den Meßwerten von FUJINO /3/ sowie denen von GILL & PRICE /20/ überein.
- iii) Der Einfluß des flachen Wassers ist bei beiden untersuchten Schiffen etwa gleich. Nach den Berechnungen ist der Flachwasser-Effekt auf Y_{β}' und N_{β}' bei dem völligeren Tanker ein wenig größer als der bei dem schlankeren Frachtschiff, während für Y_r' und N_r' das Umgekehrte gilt. Diese Tendenz stimmt auch mit den experimentellen Resultaten von FUJINO überein.
- iv) Die Flachwasser-Wirkung auf die Querkraft ist sowohl nach der Berechnung als auch nach der Messung durchweg größer als auf das Giermoment.
- v) Die quantitativen Abweichungen der berechneten hydrodynamischen Koeffizienten von den experimentellen Werten sind für die "Tokyo Maru" ein wenig geringer als für das Mariner-Schiff.

Gründe für die Abweichungen zwischen Berechnung und Experiment können außer den schon genannten Einflüssen auch der Propeller sowie die pauschale Berücksichtigung der Strömungsablösung bei der Berechnung sein. Trotz dieser Abweichungen können die rechnerischen Ergebnisse bereits für die Praxis hilfreich sein, z.B. zur Beurteilung, wie sich das Manövrierverhalten bei Verringerung der Wassertiefe ändert.

4.4 Einige Erläuterungen

4.4.1 Über den Einfluß der Längsgeschwindigkeit auf die Ableitungen

Nach der theoretischen Berechnung hängen die dimensionslosen Koeffizienten γ_{β}' , γ_r' , N_{β}' und N_r' nicht von der Geschwindigkeit V ab.

Nach den Experimenten von FUJINO /4/ vergrößern sich die Beträge dieser Koeffizienten dagegen meistens mit zunehmender Längsgeschwindigkeit, vor allem bei kleiner Wassertiefe $H/D < 1.8$, während die Geschwindigkeit in tiefem Wasser kaum Einfluß hat (Abb. 4.9).

Der Grund hierfür ist leicht einzusehen: Auf flachem Wasser ergibt sich unter dem Schiffsboden und seitlich vom Schiff infolge der Versperrung des Strömungsquerschnitts durch den Schiffskörper eine höhere Relativgeschwindigkeit zwischen Wasser und Schiff als die Schiffsgeschwindigkeit relativ zum ungestörten Wasser. Dies führt nach der Bernoulli-Gleichung zu verringertem statischen Druck in der Flüssigkeit und damit zu einem Absinken des Wasserspiegels seitlich vom Schiff sowie zu einer Absenkung des Schiffes selbst im Vergleich zu seiner Schwimmlage ohne Fahrt. Die als Bezugsgrößen benutzten Werte Wassertiefe und Tiefgang beziehen sich aber sowohl bei der Berechnung als auch bei der Messung auf die Werte ohne Fahrt. Deshalb verschieben sich die Kurven in Abb. 4.9 bei zunehmender Geschwindigkeit nach rechts.

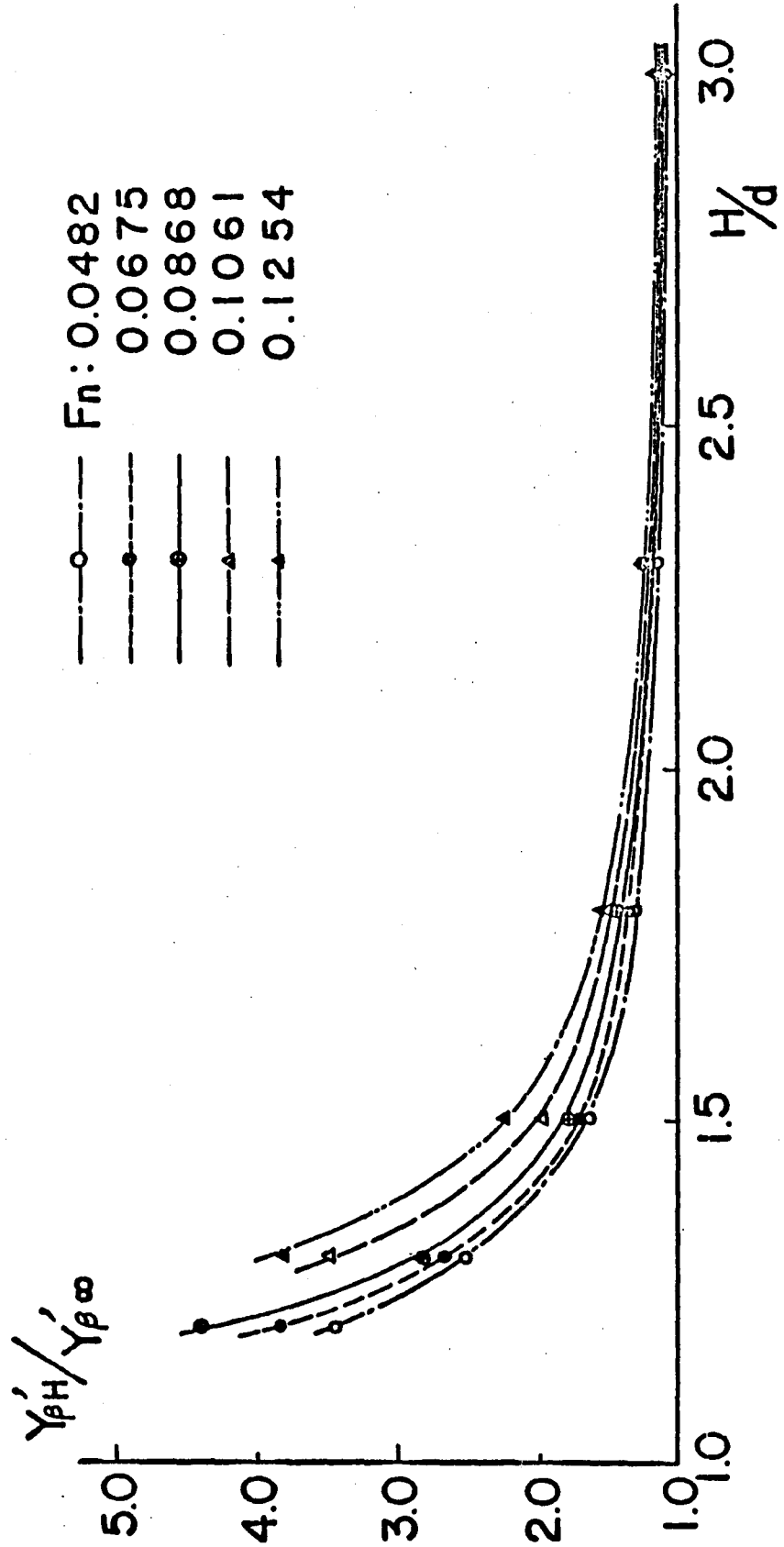


Abb. 4.9 Der Einfluß der Geschwindigkeit in Längsrichtung auf den Koeffizienten γ'_{β} in flachem Wasser nach Experimenten von FUJINO

4.4.2 Vergleich mit der Methode von Hess

HESS /14/ benutzt eine ähnliche Methode zur Berechnung der Querkraft und des Giermoments infolge Quer- und Drehbewegung eines schlanken Schiffskörpers auf flachem Wasser. Die Hauptunterschiede gegenüber der hier beschriebenen Methode sind:

- i) Hess benutzt eine Kollokationsmethode zur Lösung der Gleichung (1.3) (in Verbindung mit denselben Ansatzfunktionen (2.24), wie sie auch hier benutzt wurden). Nach seinen Angaben müssen wesentlich mehr (z.B. 90) Ansatzfunktionen für ausreichende numerische Genauigkeit gewählt werden.
- ii) Hess berechnet die Versperrungskoeffizienten nur für rechteckige Querschnitte. Dies dürfte wesentlichen Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse haben.
- iii) Hess setzt die potentialtheoretisch berechnete Querkraftverteilung über die gesamte Schiffslänge einschließlich Ruder an, während hier die Terme, die proportional zur Änderung der hydrodynamischen Masse $A(x)$ der Schiffsquerschnitte über der Schiffslänge sind, nur bis zu der Stelle x_m integriert werden, an der $A(x)$ maximal wird. Dies bewirkt, daß bei Hess die Querkraft Y_β infolge Driftwinkel nach (4.8) nicht mit der maximalen Masse $A(x_m)$, sondern mit der kleineren Masse $A(x_{\text{Ruder}})$ gebildet wird und entsprechend kleiner wird.

Noch wesentlicher ist der Einfluß auf das Moment N_r infolge Drehbewegung bei kleiner Wassertiefe $D/H \rightarrow 1$:

Es läßt sich leicht zeigen, daß bei verschwindender Schiffsbreite im Fall $D/H = 1$, d.h. bei zweidimensionaler Umströmung einer vertikalen Rechteckplatte in horizontalen Ebenen, die Randbedingung "Quergeschwindigkeit der Flüssigkeit = $X \cdot$ Drehgeschwindigkeit des Schiffes", für ein Schiff, dessen Koordinatenursprung (und Schwerpunkt) auf halber Schiffslänge liegt, durch eine elliptische Verteilung von Potentialwirbeln über der Schiffslängsachse erfüllt wird. Diese Verteilung erfüllt auch die Kutta-Bedingung. Da die Querkraft der Wirbelstärke proportional ist und diese symmetrisch über der Schiffslänge verteilt ist, wird in diesem Fall $N_r = 0$.

Die von Hess berechneten Kurven N_r tendieren für $D/H \rightarrow 1$ (in Abb. 4.11 ist $C^*/D \rightarrow 0$) tatsächlich gegen kleine oder verschwindende Werte. Die hier benutzte Formel (4.12) würde zu demselben Ergebnis führen; wenn für X_m die Ruder-Hinterkante gewählt würde: $A(x)$ würde nach (3.14) wegen der verschwindenden Breite des hintersten Querschnitts gleich 0 werden; das erste Integral in (4.12) wäre 0 wegen verschwindender Integrationslänge; und das letzte Integral in (4.12) wäre Null wegen der Längs-Symmetrie von $A(x)$. Wählt man dagegen für X_m einen Wert in der Nähe der Schiffsmitte, z.B. $X_m = 0$, so addieren sich die Beiträge der beiden Integrale in (4.12) zu einem großen endlichen Wert. Wie Abb. 4.11 zeigt, entspricht dies den experimentellen Werten, die bis $D/H = 0.833$ reichen, wesentlich besser als die von Hess berechnete Kurve für N_r . Ob dies auch für den (praktisch nicht interessierenden) Grenzwert $D/H \rightarrow 1$ gilt, ist allerdings fraglich; denn die Strömungsablösung wird sicher nicht wesentlich von der Querschnittsform des Schiffes bestimmt, wenn die Quergeschwindigkeit U gegen 0 geht. Daher ist die Definition $X_m = \text{Stelle, wo } A(x) \text{ maximal ist}$, für den Grenzfall $D/H \rightarrow 1$ besonders fragwürdig.

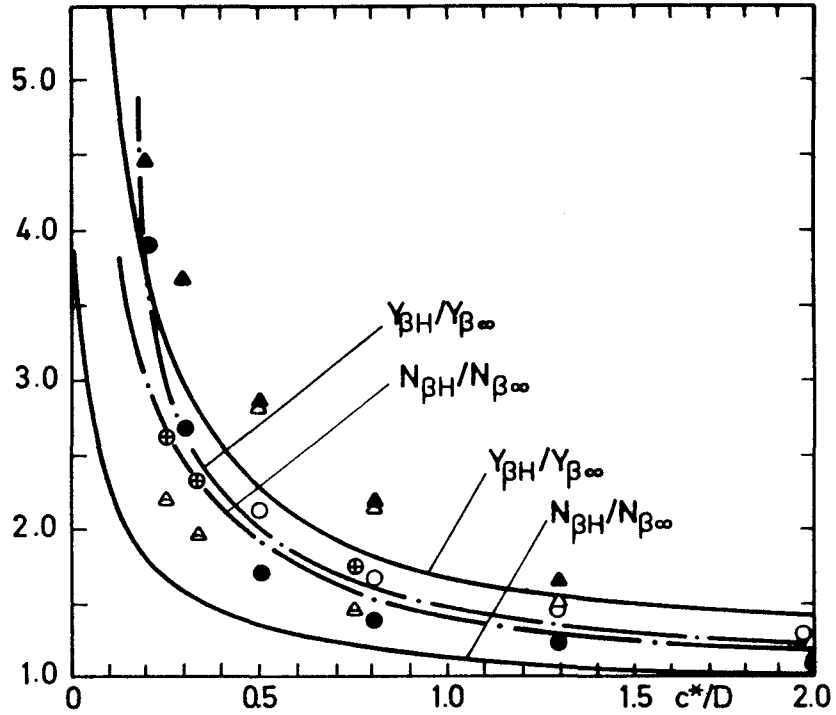


Abb. 4.10 Statische Ableitungen für Tanker-Modell
 — Rechnerische Resultate von HESS
 - · - Rechnerische Resultate der vorliegenden Arbeit
 Experimentelle Punkte: Kreis Y_{β} , Dreiecke N_{β}
 ⊕ Δ [BRAND, 1951] ●▲, ○Δ [FUJINO, 1972]

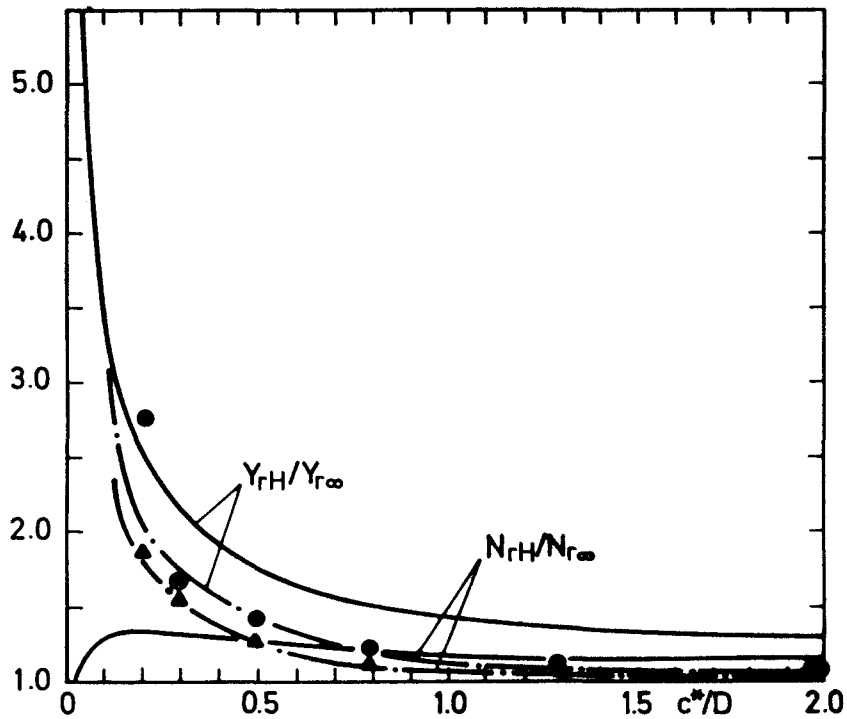


Abb. 4.11 Rotierende Ableitungen für Tanker-Modell
 — Rechnerische Resultate von HESS
 - · - Rechnerische Resultate der vorliegenden Arbeit
 Experimentpunkt: ● $Y_{rH}/Y_{r\infty}$
 von FUJINO [1972] ▲ $N_{rH}/N_{r\infty}$

4.5 Einfluß des flachen Wassers auf die Gierstabilität

Aus den zuvor berechneten hydrodynamischen Ableitungen kann die Gierstabilität des Schiffes ermittelt werden. Gierstabil ist ein Schiff, wenn zu jedem Ruderwinkel nur eine stationäre Drehgeschwindigkeit gehört, bei der das Schiff im Kräfte- und Momentengleichgewicht ist. Im Bereich verschwindender Ruderwinkel ist dies der Fall, wenn

$$C = Y_{\beta}'(N_r' - M'x_g') - N_{\beta}'(Y_r' - M') < 0 \quad (4.20)$$

gewährleistet ist.

Y_{β}' ist immer positiv und Y_r' immer negativ. Die Stabilitätsbedingung kann deshalb umgewandelt werden:

$$\frac{C}{Y_{\beta}' Y_r'} = \frac{N_r' - M'x_g'}{Y_r' - M'} - \frac{N_{\beta}'}{Y_{\beta}'} > 0$$

oder:

$$l_r' > l_{\beta}' \quad (4.21)$$

mit $l_r' = \frac{N_r' - M'x_g'}{Y_r' - M'} = \frac{N_r' - M'x_g'}{Y_r^{*'} - (M' + Mx')}$ und $l_{\beta}' = \frac{N_{\beta}'}{Y_{\beta}'}$

l_r' bezeichnet die mit der Schiffslänge dimensionslos gemachte x -Koordinate des Angriffspunkts der querschiffs gerichteten Gierdämpfungskraft. Sie ist positiv, wenn der Angriffspunkt vor dem Koordinatenursprung liegt. l_{β}' bezeichnet entsprechend den Angriffspunkt der Schiebedämpfungskraft. Die Gierstabilität des Schiffes hängt also von der relativen Lage der Angriffspunkte der Schiebedämpfungskraft und der Gierdämpfungskraft ab: Wenn die Gierdämpfungskraft vor der Schiebedämpfungskraft angreift, ist das Schiff gierstabil.

In den Tabellen 4.7 und 4.8 sind berechnete und von FUJINO /3/, /4/ gemessene Werte für l_r' und l_{β}' bei verschiedenen Wassertiefen angegeben.

In Abb. 4.12 und 4.13 sind die Werte für die Beispielschiffe "Mariner" und "Tokyo Maru" dargestellt. Die Bilder zeigen:

- i) Der berechnete Wert für l_{β}' hängt fast nicht von der Wassertiefe ab. Die experimentellen Werte sind auf tiefem Wasser durchweg kleiner als die berechneten. Bei abnehmender Wassertiefe wachsen die experimentellen Werte von l_{β}' zunächst etwas an und fallen dann wieder ab.

- ii) Sowohl die berechneten als auch die experimentellen Werte von l_r' wachsen in flacher werdendem Wasser an. In tiefem oder mäßig flachem Wasser stimmen die berechneten mit den gemessenen Werten gut überein.

Tabelle 4.7

l_{β}' -Wert und l_{r}' -Wert für das Mariner-Schiff

D/H		0.0	0.400	0.518	0.667	0.826
Berechnung	l_{β}'	0.4100	0.4319	0.4229	0.4226	0.4029
	l_{r}'	0.424	0.446	0.501	0.713	1.642
Experiment von FUJINO	l_{β}'	0.259	0.299	0.291	0.228	-
	l_{r}'	0.406	0.501	0.443	0.579	-

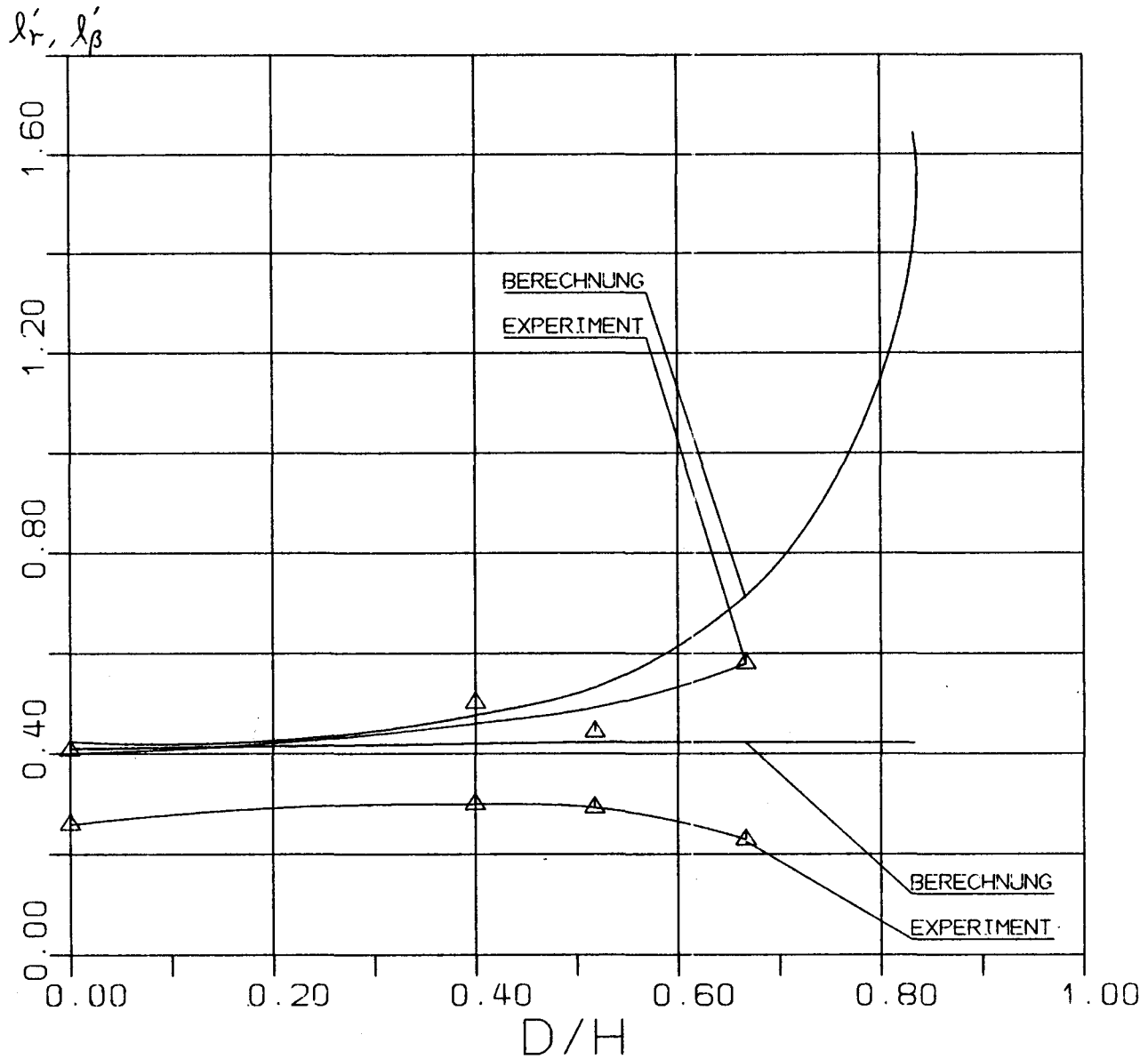


Abb. 4.12 Abhängigkeit von l_{β}' und l_{r}' von der Wassertiefe für das Mariner-Schiff

Tabelle 4.8 l_{β}' -wert und l_r' -wert für den Tanker
"Tokyo Maru"

D/H		0.0	0.333	0.435	0.556	0.667	0.769	0.833
Berechnung	l_{β}'	0.3861	0.3831	0.3786	0.3753	0.3689	0.3686	0.3686
	l_r'	0.320	0.320	0.344	0.396	0.470	0.656	0.852
Experiment von FUJINO	l_{β}'	0.261	0.303	0.349	0.396	0.400	0.363	-
	l_r'	0.280	0.307	0.337	0.365	0.424	0.644	-

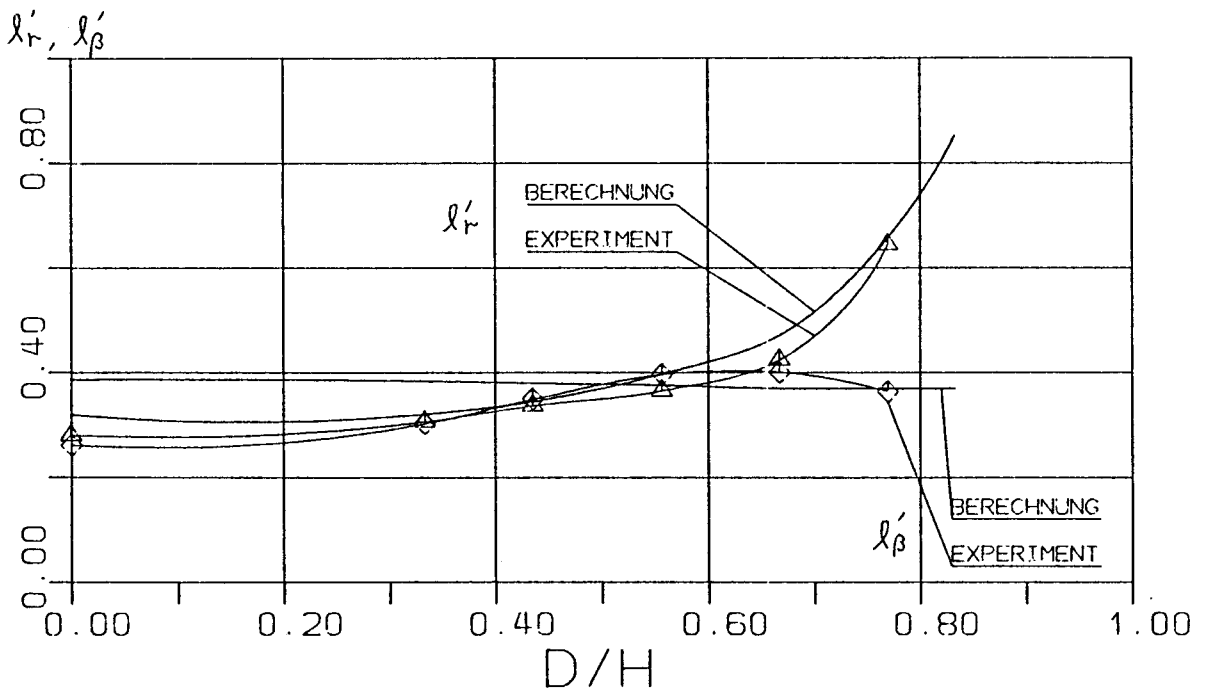


Abb. 4.13 Abhängigkeit von l_{β}' und l_r' von der Wassertiefe für die "Tokyo Maru"

iii) Die Folge von i) und ii) ist, daß die Gierstabilität für beide untersuchten Schiffe in sehr flachem Wasser wesentlich größer ist als in tiefem Wasser. Der Frachter ist gierstabil für alle Wassertiefen; der Tanker dagegen ist in mittleren und großen Wassertiefen (für $D/H < 0.7$) etwa an der Stabilitätsgrenze.

Tendenziell wurden die unter iii) angegebenen Ergebnisse auch in den Experimenten von GILL /20/ an einem Tanker-Modell und in den Berechnungen von HESS /14/ für ein tankerähnliches Schiff gefunden.

5. Der Einfluß des Flachwassers auf die Ruderkraft und das Rudermoment

5.1 Kräfte und Momente am Ruder ohne Wechselwirkung mit dem Schiffsrumpf

5.1.1 Theorie

Das Ruder ist meistens hinter dem Schiff und seinem Propeller angeordnet und befindet sich daher in einem sehr ungleichförmigen Strömungsfeld. Um dessen Einfluß auf die Ruderkräfte zu ermitteln, werden folgende hydrodynamische Probleme getrennt behandelt:

- i) Die asymptotische Strahlgeschwindigkeit u_s und der Strahlradius r_s weit hinter dem Propeller sind nach der bekannten Strahltheorie, d.h. bei Vernachlässigung der über die Propellerkreisfläche veränderlichen Propellerbelastung, der turbulenten Vermischung des Propellerstrahls mit dem umgebenden Wasser und der endlichen Wassertiefe:

$$u_s = u_a \cdot \sqrt{1 + c_T} \quad (5.1)$$

$$r_s = r_p \cdot \sqrt{\frac{1}{2} (1 + u_a/u_s)} \quad (5.2)$$

mit u_a : Anströmgeschwindigkeit des Propellers
 r_p : Propellerradius
 c_T : Schubbelastungsgrad = Propellerschub / $\frac{1}{2} \rho u_a^2 \cdot \pi r_p^2$

Normalerweise ist das Ruder aber nicht weit genug hinter dem Propeller, um diese asymptotischen Werte direkt anwenden zu können. Es dürfte aber ausreichend sein, die Ruderkraft mit den Daten für Strahlradius und Strahlgeschwindigkeit zu bestimmen, die bei Mitte Ruder vorliegen, und die Veränderlichkeit der Strahldaten entlang des Ruders zu vernachlässigen (Abb. 5.1).

Der Radius r_R des Strahls am Ruder kann durch eine Belegung des Strahlrandes mit Ringwirbeln bestimmt werden. Aufgrund solcher Berechnungen für tiefes Wasser schlägt SÖDING /13/ die folgende Näherungsformel vor:

$$\tau_R = \frac{0.14 (\tau_S/\tau_P)^3 + (\tau_S/\tau_P) \cdot (X_0/\tau_P)^{1.5}}{0.14 (\tau_S/\tau_P)^3 + (X_0/\tau_P)^{1.5}} \quad (5.3)$$

Der Fehler dieser Formel im Vergleich zu potentialtheoretischen Berechnungen wird mit weniger als 0.8 % angegeben.

Gemäß der Kontinuitätsgleichung wird die Geschwindigkeit u_i am gleichen Ort gewonnen:

$$u_i \cdot \tau_R^2 = u_s \cdot \tau_S^2 \quad ; \quad \text{daraus folgt}$$
$$u_i = u_s (\tau_S/\tau_R)^2 \quad (5.4)$$

Der Flachwasser-Einfluß auf den Propellerstrahl ist relativ klein (ISAY /23/); daher kann der Einfluß des Flachwassers hier vernachlässigt werden.

- ii) In der horizontalen Ebene (Abb. 5.1) wird das Ruder mit der hier diskontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilung angeströmt, die im bzw. außerhalb des Propellerstrahls als konstante Geschwindigkeit u_i bzw. u_a angesetzt wird.

u_a ist auch die Anströmgeschwindigkeit des Propellers. Diese diskontinuierliche Strömung beeinflusst den Auftrieb des Ruders, denn der Auftrieb hängt nicht nur von der Geschwindigkeit am Ort des Ruders ab, sondern auch von der Geschwindigkeit in seiner Umgebung. Diese außen kleinere Geschwindigkeit vermindert den Auftrieb im Vergleich zu einer Anströmung mit konstanter Geschwindigkeit u_i .

Der Auftriebsbeiwert einer ebenen Platte in zweidimensionaler stationärer Strömung beträgt bekanntlich für kleinen Anstellwinkel δ :

$$C_L = 2\pi\delta \quad (5.5)$$

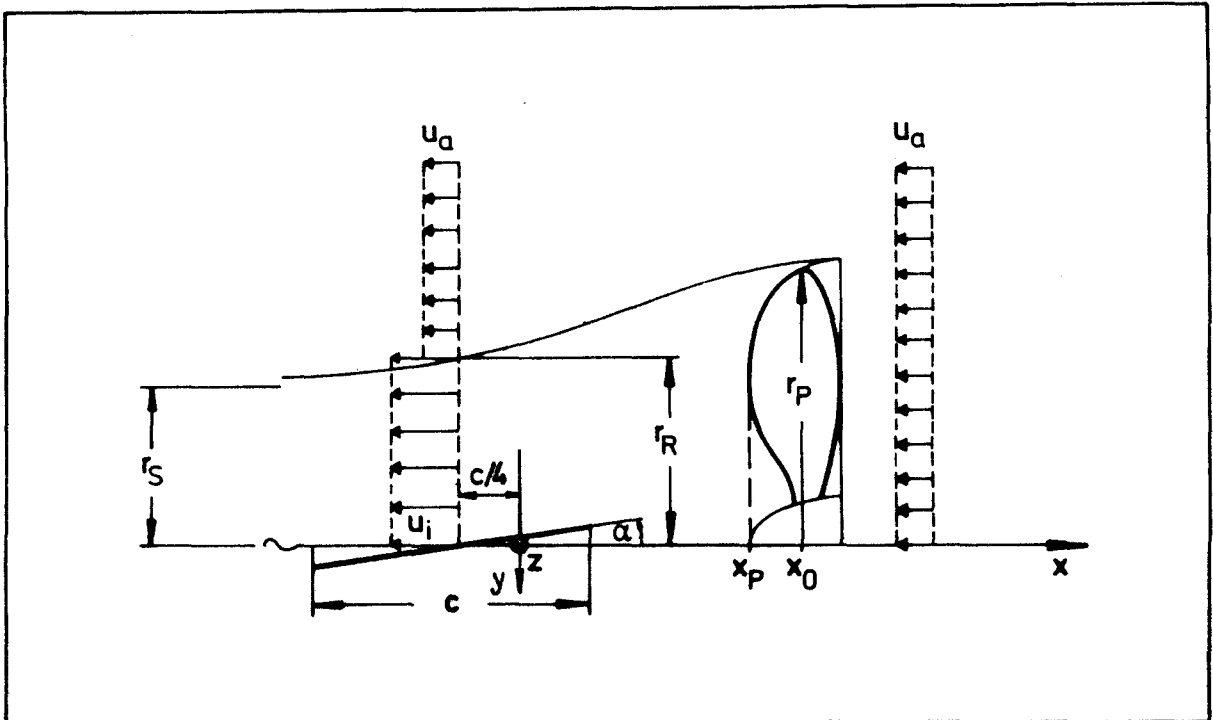


Abb. 5.1 Idealisierung der Umströmung des Ruders (schräge Platte) hinter dem Propeller in einer horizontalen Ebene

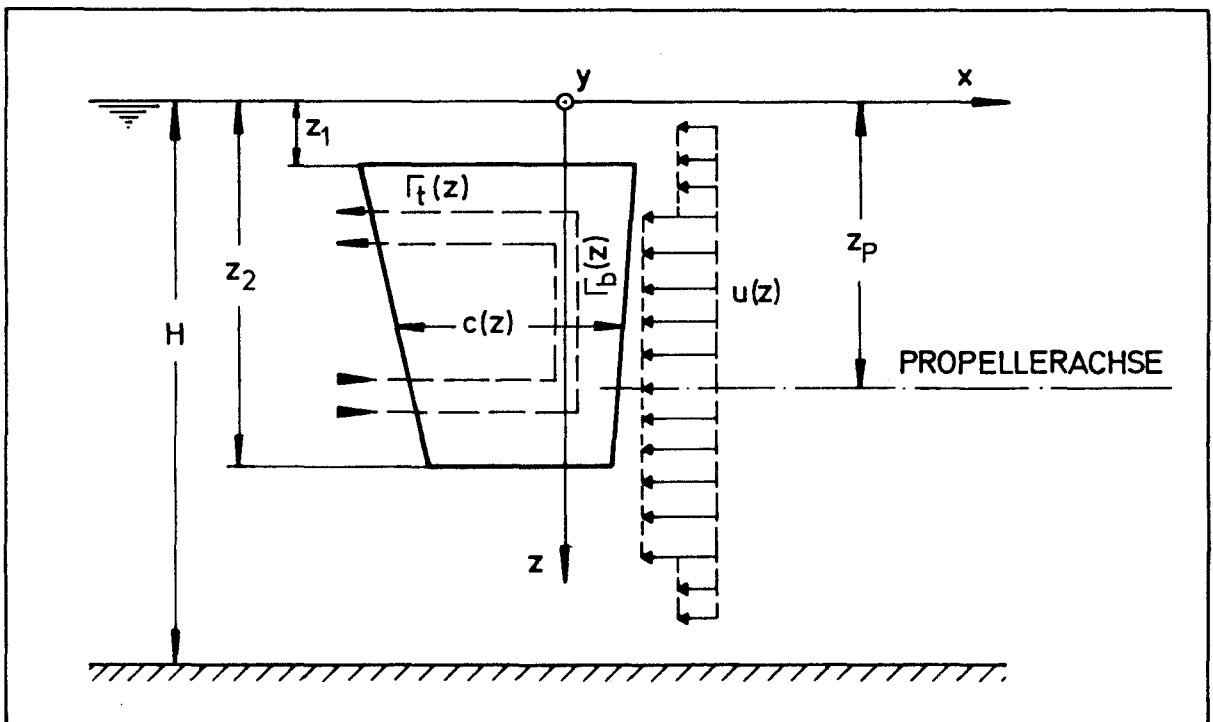


Abb. 5.2 Ruder in diskontinuierlicher Strömung in senkrechter Ebene

C_L wird auch in der diskontinuierlichen Strömung auf bezogen. Man definiert dafür

$$C_L = 2\pi\delta \cdot \lambda \quad (5.6)$$

Dabei ist λ ein "Auftriebsreduktionsfaktor". Aufgrund von Berechnungen in idealer Flüssigkeit gibt SÖDING /13/ als Näherungsformel an:

$$\lambda = \left(\frac{u_a}{u_i}\right)^f \quad \text{mit } f = 2\left(\frac{2}{2 + r_i/c}\right)^8 \quad (5.7)$$

Dabei ist r_i der Abstand von der Symmetrieebene, bis zu dem die höhere Geschwindigkeit u_i herrscht. Bei einem Strahl mit Kreisquerschnitt vom Radius r_R hinge r_i von der Höhe Z ab. Zur Vereinfachung wird deshalb mit einem Strahl von flächengleichem quadratischen Querschnitt gerechnet. Im Bereich dieses quadratischen Strahls ist dann r_i konstant:

$$r_i = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} r_R \quad (5.8)$$

Da der Auftrieb des Ruders proportional zum Quadrat der Anströmgeschwindigkeit ist, entspricht die Auftriebsreduzierung durch den Faktor λ einer effektiven konstanten Anströmgeschwindigkeit u_e von der Größe

$$u_e = u_i\sqrt{\lambda} \quad (5.9)$$

- iii) Die Veränderlichkeit des Ruderzustroms mit der Höhenkoordinate Z wird nach der Theorie der tragenden Linie erfaßt, die hier auf flaches Wasser erweitert wird. Das Strömungsproblem ist in Abb. 5.2 dargestellt: Das Ruder mit der bekannten Profillänge $C(Z)$ befindet sich in ungleichförmiger Anströmung mit der Geschwindigkeit $u(Z)$ in Richtung der negativen x-Achse:

$$u(Z) = \begin{cases} u_a & \text{für } Z < Z_p - r_i \\ u_e & \text{für } Z_p - r_i < Z < Z_p + r_i \\ u_a & \text{für } Z_p + r_i < Z \end{cases} \quad (5.10)$$

Der Ruderauftrieb greift $C/4$ hinter der Rudervorderkante auf der z -Achse an. Das Ruder hat einen kleinen Anstellwinkel δ , so daß das Problem linearisiert werden kann.

Das Ruder wird als ein Tragflügel betrachtet, dessen Dicke vernachlässigbar klein ist. Die Strömung wird durch einen gebundenen Wirbel der Zirkulation $\Gamma_b(z)$ in der z -Achse und durch freie Wirbel mit der Zirkulation $\Gamma_f(z)$ parallel zur x -Achse hinter dem gebundenen bis ins Unendliche modelliert. Die Randbedingung des Körpers wird nach Weissinger im Punkt $3/4 C$ hinter der Profilvorderkante in der Ebene $y=0$ erfüllt.

Damit der Wasserboden bei $z=H$ und die unverformt vorausgesetzte Wasseroberfläche bei $z=0$ Stromlinien werden, müssen die Wirbel an diesen Linien unendlich oft gespiegelt werden.

Die von den freien und dem gebundenen Wirbel induzierte Geschwindigkeit v in y -Richtung in Punkt $(x, 0, z)$ ist dann:

$$\begin{aligned}
 v(x, 0, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_f(\xi + 2kH)(z - \xi - 2kH)}{[(x - \xi)^2 + (z - \xi - 2kH)^2]^{3/2}} d\xi d\xi \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_b(\xi + 2kH) \cdot x}{[x^2 + (z - \xi - 2kH)^2]^{3/2}} d\xi \\
 & - \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_f(\xi + 2kH)(z + \xi - 2kH)}{[(x - \xi)^2 + (z + \xi - 2kH)^2]^{3/2}} d\xi d\xi \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_b(\xi + 2kH) \cdot x}{[x^2 + (z + \xi - 2kH)^2]^{3/2}} d\xi
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Die Körperwandbedingung im Punkt $x = -C(z)/2$ wird dadurch erfüllt, daß $\Gamma_b(z)$ so gewählt wird, daß die durch die Wirbel induzierte Geschwindigkeit v zusammen mit der Anströmgeschwindigkeit $u(z)$ keine Komponente normal zur Plattenoberfläche haben darf:

$$\sqrt{\left(-\frac{C(Z)}{2}, 0, Z\right) + \delta U(Z) = 0 \quad \text{für} \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2 \quad (5.12)}$$

Wegen der Kontinuität der Wirbellinien gilt:

$$\Gamma_t(Z) = \frac{d\Gamma_b(Z)}{dZ} \quad (5.13)$$

Die Integration über ξ in (5.11) kann analytisch durchgeführt werden:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{d\xi}{[(X-\xi)^2 + (Z \pm \xi - 2KH)^2]^{3/2}} = \frac{1}{(Z \pm \xi - 2KH)^2} \left[1 - \frac{X}{\sqrt{X^2 + (Z \pm \xi - 2KH)^2}} \right] \quad (5.14)$$

Werden die Gleichungen (5.11), (5.13) und (5.14) in die Randbedingung (5.12) eingesetzt, läßt sich die folgende Integro-Differentialgleichung für $\Gamma_b(Z)$ herleiten:

$$\begin{aligned} & \int_{Z_1}^{Z_2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma_b(\xi + 2KH)/d\xi}{Z - \xi - 2KH} \left\{ 1 + \frac{C(Z)/2}{\sqrt{\left(\frac{C(Z)}{2}\right)^2 + (Z - \xi - 2KH)^2}} \right\} d\xi \\ & + \int_{Z_1}^{Z_2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_b(\xi + 2KH) \cdot \frac{C(Z)}{2}}{\left[\left(\frac{C(Z)}{2}\right)^2 + (Z - \xi - 2KH)^2\right]^{3/2}} d\xi \\ & - \int_{Z_1}^{Z_2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma_b(\xi + 2KH)/d\xi}{Z + \xi - 2KH} \left\{ 1 + \frac{C(Z)/2}{\sqrt{\left(\frac{C(Z)}{2}\right)^2 + (Z + \xi - 2KH)^2}} \right\} d\xi \\ & + \int_{Z_1}^{Z_2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_b(\xi + 2KH) \cdot \frac{C(Z)}{2}}{\left[\left(\frac{C(Z)}{2}\right)^2 + (Z + \xi - 2KH)^2\right]^{3/2}} d\xi \\ & = 4\pi\delta U(Z) \quad \text{für} \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2 \quad (5.15) \end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird das Intervall $[Z_1, Z_2]$ äquidistant in J kleine Strecken unterteilt:

$$\Delta Z = (Z_2 - Z_1) / J \quad (5.16)$$

Wenn Γ_j die Zirkulation des gebundenen Wirbels im Mittelpunkt Z_j der Strecke j ist, kann die Gleichung (5.15) transformiert werden in

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_j - \Gamma_{j-1}}{Z_m - \bar{Z}_j - 2KH} \left[1 + \frac{\frac{C_m}{2}}{\sqrt{\left(\frac{C_m}{2}\right)^2 + (Z_m - \bar{Z}_j - 2KH)^2}} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^J \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_j \cdot \frac{C_m}{2} \cdot \Delta Z}{\left[\left(\frac{C_m}{2}\right)^2 + (Z_m - Z_j - 2KH)^2 \right]^{3/2}} \\
 & - \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_j - \Gamma_{j-1}}{Z_m + \bar{Z}_j - 2KH} \left[1 + \frac{\frac{C_m}{2}}{\sqrt{\left(\frac{C_m}{2}\right)^2 + (Z_m + \bar{Z}_j - 2KH)^2}} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^J \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_j \cdot \frac{C_m}{2} \cdot \Delta Z}{\left[\left(\frac{C_m}{2}\right)^2 + (Z_m + Z_j - 2KH)^2 \right]^{3/2}} \\
 & = 4\pi\delta u_m
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

für $m = 1, \dots, J$

Hier:

$$\begin{aligned}
 C_m &= C(Z_m) \\
 u_m &= u(Z_m) \\
 \Gamma_0 &= \Gamma_{J+1} = 0 \\
 \bar{Z}_j &= \frac{1}{2}(Z + Z_{j-1})
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Das lineare Gleichungssystem (5.17) wird nach Γ_j aufgelöst. Die Auftriebskraft des Ruders läßt sich dann bestimmen als

$$Y(\delta) = \rho \cdot \Delta Z \cdot \sum_{j=1}^J u_j \Gamma_j
 \tag{5.19}$$

mit u_j nach Gleichung (5.10).

Die hydrodynamische Ruderkraft-Ableitung ergibt sich wegen der Linearisierung zu:

$$Y_{\delta} = \rho \cdot \Delta Z \sum_{j=1}^J u_j \frac{\Gamma_j}{\delta} \quad (5.20)$$

Die mit einer festen Zahl J erreichte Genauigkeit läßt sich verbessern, wenn im ersten und letzten Abschnitt nicht von konstanter Stärke des gebundenen Wirbels in diesem Abschnitt, sondern mit entsprechend einer Wurzelfunktion auf Null abfallender Zirkulation Γ_b ausgegangen wird. Das bedeutet, daß der oberste und unterste freie Wirbel nicht genau an der Unterkante des Ruders anzuordnen sind, sondern $\frac{1}{6}$ der Abschnittlänge weiter innen. So wurde auch bei den folgenden Beispielen vorgegangen mit Ausnahme der Oberkante des Ruders des Mariner-Schiffes, das die Wasseroberfläche durchstößt. Zu diesem Fall ist der Ansatz einer konstanten Stärke des gebundenen Wirbels im obersten Abschnitt zutreffender.

Die beschriebene "Methode der tragenden Linie" (damit ist der gebundene Wirbel gemeint) läßt sich zu der "Methode der tragenden Fläche" erweitern. Dazu wird die Profillänge $C(z)$ in jedem Höhengschnitt in gleichviele (N) Abschnitt eingeteilt. In jedem dieser Abschnitte wird ein gebundener Wirbel am "1/4-Punkt" angeordnet; die Randbedingung wird am "3/4-Punkt" jedes Abschnitts erfüllt. Für Ruder in tiefem Wasser wurden derartige Berechnungen von GRAF /24/ durchgeführt, um Ruder mit einer getrennt beweglichen Flosse behandeln zu können. Für den Fall flachen Wassers erhält man dann an Stelle von (5.17) die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i,j-1}) \frac{1}{z_m - \bar{z}_j - 2KH} \left[1 - \frac{x_i - x_l}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (z_m - \bar{z}_j - 2KH)^2}} \right] \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_{i,j} \frac{(x_i - x_l) \cdot \Delta Z}{[(x_i - x_j)^2 + (z_m - z_j - 2KH)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left\{ (\Gamma_{i,j} - \Gamma_{i,j-1}) \frac{1}{Z_m + \bar{Z}_j - 2KH} \left[1 - \frac{X_i - X_j}{\sqrt{(X_i - X_l)^2 + (Z_m + \bar{Z}_j - 2KH)^2}} \right] \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left\{ \Gamma_{i,j} \frac{(X_i - X_j) \cdot \Delta Z}{[(X_i - X_j)^2 + (Z_m + Z_j - 2KH)^2]^{3/2}} \right\} \\
 & = 4\pi V(X_l, X_m) \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} m = 1, \dots, J \\ l = 1, \dots, J \end{array} \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen bei senkrechter Vorderkante des Ruders

$$\begin{aligned}
 X_i &= -\frac{C(Z_m)}{N} (i - 0.75), \quad i = 1, \dots, N \\
 X_l &= -\frac{C(Z_m)}{N} (i - 0.25), \quad i = 1, \dots, N \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Bei schräger Vorderkante des Ruders sind diese Ausdrücke in naheliegender Weise zu modifizieren.

5.1.2 Berechnungsergebnisse

Als Beispiel wird das trapezförmige Ruder des Mariner-Schiffes gewählt (Abb. 1.6), das bis über die Wasserlinie reicht.

Für J wurde nach einigen Testrechnungen 25 gewählt. Die unendliche Summe über k für die Spiegelbilder der Wirbel wird bei praktischer Berechnung von -K bis K erstreckt; K wird dazu aus numerischen Experimenten bestimmt.

Tabelle 5.1 zeigt die Ruderkraft pro Anstellwinkel γ_0 für verschiedene Wassertiefen H und Spiegelungszahlen K.

Daraus sieht man: Je flacher das Wasser ist, desto größer sollte die Spiegelungszahl K sein. Bei K=5 wird selbst für die kleinste untersuchte Wassertiefe der asymptotische Wert mit einer Genauigkeit von besser als 1 % angenähert.

Abb. 5.3 zeigt die Zirkulationsverteilung $\Gamma_b(z)$ des gebundenen Wirbels längs der z-Achse über die Höhe des Ruders bei diskontinuierlicher Anströmgeschwindigkeit $u(z)$ für zwei verschiedene Wassertiefen. Das Bild zeigt ebenso wie Tabelle 5.1, daß der Ruderauftrieb auf flachem Wasser nur wenig (bei der kleinsten untersuchten Wassertiefe rund 10 %) größer als auf tiefem Wasser wird.

Tabelle 5.1 Ruderauftrieb pro Anstellwinkel γ_0 in verschiedener Wassertiefe, mit unterschiedlicher Spiegelung K berechnet

Spiegelungszahl K	D/H = 0.05	D/H = 0.111	D/H = 0.400	D/H = 0.518	D/H = 0.667	D/H = 0.826
0	2014.251	2014.251	2014.251	2014.251	2014.251	2014.251
2	2014.638	2016.180	2042.026	2064.444	2109.260	2199.362
5		2016.507	2046.435	2072.083	2122.652	2222.157
10			2048.199	2075.124	2127.967	2231.162
20			2049.145	2076.758	2130.816	2235.986
30			2049.471	2077.320	2131.979	2237.644
40				2077.605	2132.293	2238.485
50					2132.592	2238.994

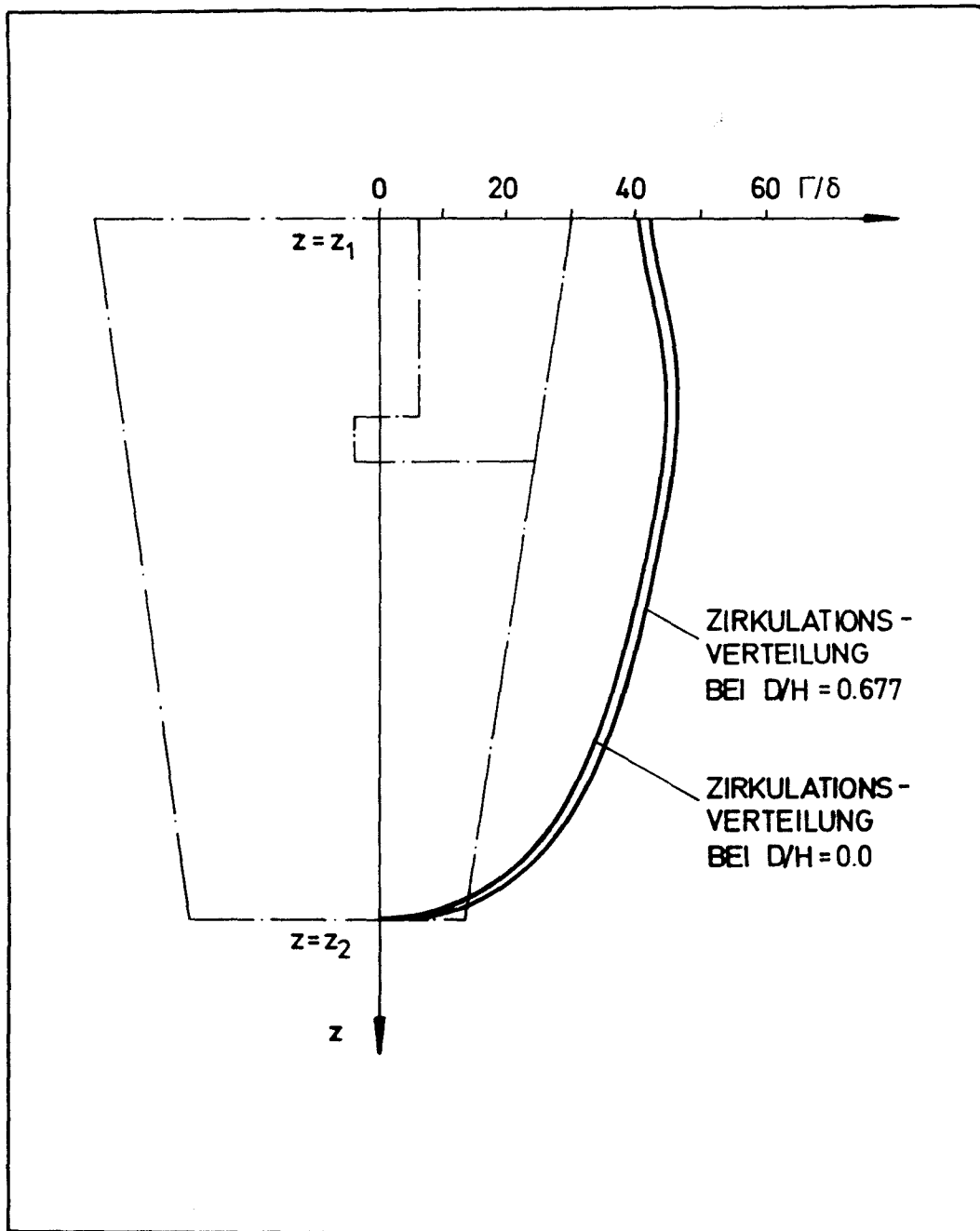


Abb. 5.3 Zirkulationsverteilung des gebundenen Wirbels längs der z-Achse

5.2 Wechselwirkung zwischen Ruder und Schiff

Ein schräg angeströmter Tragflügel ruft in unbegrenzter Flüssigkeit schon weit vor dem Flügel eine wesentliche Änderung der Strömungsrichtung hervor. Wenn sich vor dem Flügel (Ruder) der Schiffsrumpf befindet, ist diese Änderung der Strömungsrichtung behindert. Dies führt zu Änderungen der Ruderquerkraft und zu zusätzlichen Querkräften am Schiffsrumpf infolge des Ruders. Diese querschiffs gerichteten Kräfte an Rumpf und Ruder und ihr Moment um die z-Achse soll hier für flaches Wasser bei stationärer Fahrt des Schiffes in Richtung seiner Längsachse berechnet werden. Sie werden im Folgenden Ruderkraft und Steuermoment genannt.

5.2.1 Theoretisches Modell

Das Problem wird stark vereinfacht: Schiffsrumpf und Ruder werden als ebene Platten idealisiert (Abb. 5.5), deren Höhen gleichgroß sind, nämlich - zusammen mit ihren Spiegelbildern über der Wasserlinie - gleich $2D$. Die beiden Platten liegen in einer parallelen Anströmung mit der Geschwindigkeit u_0 ; nur die hintere Platte hat einen kleinen Anstellwinkel δ . Die Vernachlässigung des Propellers und der am Schiffsrumpf gebildeten Grenzschicht und die Ersetzung des Schiffes durch eine ebene Platte sind wesentliche Vereinfachungen, deren Zulässigkeit durch Vergleich mit Versuchsergebnissen überprüft werden soll.

Wegen des sehr kleinen Seitenverhältnisses $2D/L$ des Schiffsrumpfes mit seinem Spiegelbild ist die Methode der tragenden Linie hier nicht mehr anwendbar. Statt dessen wird die Methode der tragenden Fläche in vereinfachter Weise angewendet: Es wird eine elliptische Verteilung der gebundenen Zirkulation längs der z-Achse vorausgesetzt. Dies ist korrekt für den Grenzfall eines Tragflügels mit kleinem Seitenverhältnis in tiefem Wasser, dürfte aber auch für die tatsächlich interessierenden Seitenverhältnisse und Wassertiefen eine gute Näherung sein, nicht $D/H = 1$ der Grenzfall. Wir setzen also entsprechend Abb. 5.6 an:

$$\Gamma_b(x, z) = \Gamma(x) \sqrt{1 - \left(\frac{z}{D}\right)^2} \quad (5.23)$$

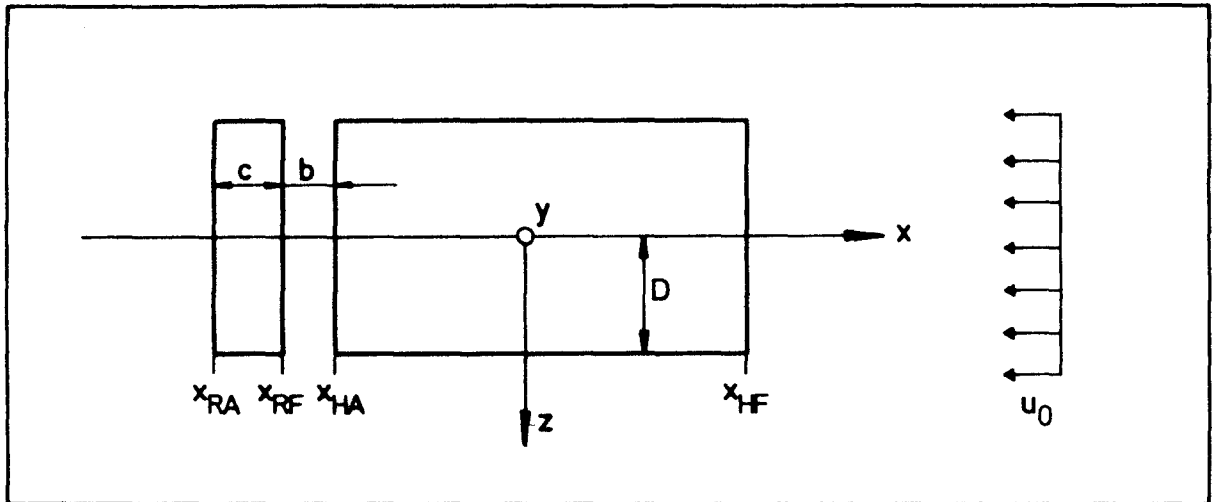


Abb. 5.4 Theoretisches Modell zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Ruder und Schiff

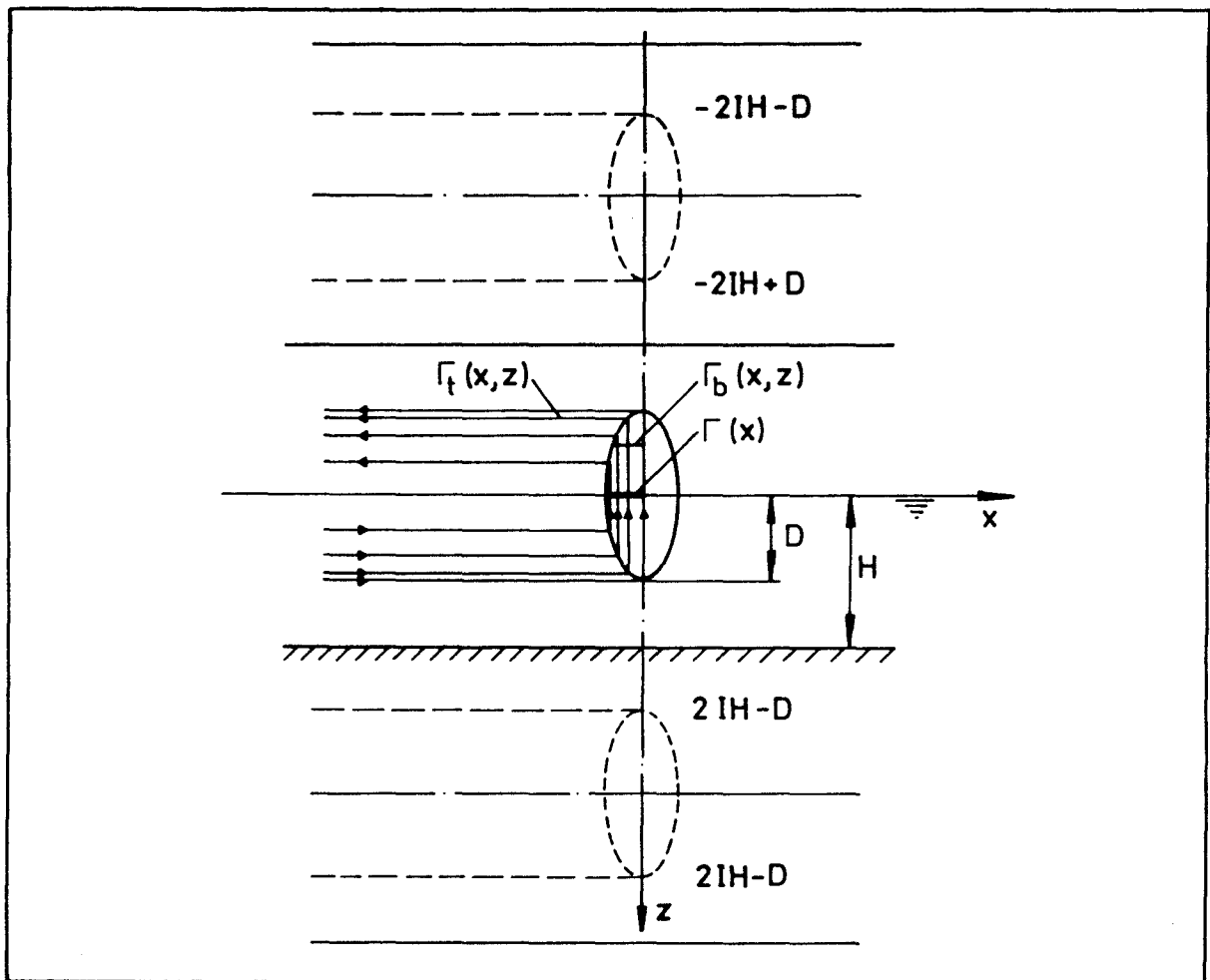


Abb. 5.5 Die elliptische Zirkulationsverteilung mit der Spiegelung in endlicher Wassertiefe

Wegen der Kontinuität der Wirbellinien gilt für die Zirkulation der freien Wirbel parallel zur z-Achse

$$\frac{\partial \Gamma_t(x, z)}{\partial x} = - \frac{\partial \Gamma_b(x, z)}{\partial z} \quad (5.24)$$

Dabei sind Γ_b und Γ_t die Zirkulation pro Längeneinheit in x- bzw. z-Richtung.

Aus (5.23) und (5.24) folgt:

$$\Gamma_t(x, z) = \Gamma_{t0}(x) \cdot \frac{\frac{z}{D^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{D}\right)^2}} \quad (5.25)$$

$$\frac{d\Gamma_{t0}(x)}{dx} = \Gamma(x)$$

Γ_t ist gleich Null an der Vorderkante der vorderen Platte. Und es wird dann:

$$\Gamma_{t0}(x) = - \int_x^{X_{HF}} \Gamma(\xi) d\xi \quad (5.27)$$

Die gebundene Zirkulation in Höhe der Wasserfläche $\Gamma(x)$ ist gleich 0 im Intervall $X_{RF} < x < X_{HA}$ und für $x < X_{RA}$

Die Randbedingung, daß die Strömung parallel zu den Platten verläuft, wird an der x-Achse (Wasseroberfläche) erfüllt:

$$v(x, 0, 0) = u_0 \cdot \delta \quad \text{für} \quad X_{RA} \leq x \leq X_{RF}$$

$$v(x, 0, 0) = 0 \quad \text{für} \quad X_{HA} \leq x \leq X_{HF}$$

Das bedeutet, der Anstellwinkel des Schiffes ist gleich Null und der des Ruders gleich δ .

Um die Symmetrie bezüglich der Wasseroberfläche $z = 0$ und bezüglich des Bodens $z = H$ zu erreichen, werden die Wirbelverteilungen wieder unendlich oft an diesen Flächen gespiegelt. Nach dem Gesetz von Biot-Savart induzieren diese Wirbel in der Wasseroberfläche eine Quergeschwindigkeit (in y-Richtung) von

$$\begin{aligned}
 v(x, 0, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{X_{RA}}^{X_{HF}} \frac{\Gamma_b(\xi, \zeta)(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + \zeta^2]^{3/2}} d\xi d\zeta \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{X_{HF}} \frac{\Gamma_t(\xi, \zeta) \cdot \zeta}{[(x-\xi)^2 + \zeta^2]^{3/2}} d\xi d\zeta
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Hierin sind (vgl. Abb. 5.6):

$$\Gamma_b(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{für } 2(I-1)H+D \leq \zeta \leq 2IH-D \\ \Gamma(\xi) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta-2IH}{D}\right)^2} & \text{für } 2IH-D \leq \zeta \leq 2IH+D \end{cases} \tag{5.29}$$

und

$$\Gamma_t(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{für } 2(I-1)H+D \leq \zeta \leq 2IH-D \\ -\int_{\xi}^{X_{HF}} \Gamma(\lambda) d\lambda \cdot \frac{\zeta-2IH}{D^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta-2IH}{D}\right)^2} & \text{für } 2IH-D \leq \zeta \leq 2IH+D \end{cases} \tag{5.30}$$

mit: $I = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$

Die Geschwindigkeit kann dann so geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 v(x, 0, 0) &= \frac{1}{4\pi D} \int_{X_{RA}}^{X_{HF}} \Gamma(\xi)(x-\xi) \left\{ \sum_{I=-\infty}^{\infty} \int_{2IH-D}^{2IH+D} \frac{\sqrt{D^2 - (\zeta-2IH)^2}}{[(x-\xi)^2 + \zeta^2]^{3/2}} d\zeta \right\} d\xi \\
 &- \frac{1}{4\pi D} \int_{-\infty}^{X_{HF}} \left\{ \sum_{I=-\infty}^{\infty} \int_{2IH-D}^{2IH+D} \frac{(\zeta-2IH) \cdot \zeta}{\sqrt{D^2 - (\zeta-2IH)^2} [(x-\xi)^2 + \zeta^2]^{3/2}} d\zeta \right\} \int_{\xi}^{X_{HF}} \Gamma(\lambda) d\lambda d\xi
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Mit der Transformation

$$\xi' = \xi - 2IH$$

und $\xi' \rightarrow \xi$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 v(x, 0, 0) &= \frac{1}{4\pi D} \int_{X_{RA}}^{X_{HF}} \Gamma(\xi) (x - \xi) \left\{ \sum_{I=-\infty}^{\infty} \int_{-D}^D \frac{\sqrt{D^2 - \xi^2}}{[(x - \xi)^2 + (\xi + 2IH)^2]^{3/2}} d\xi \right\} d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi D} \int_{-\infty}^{X_{HF}} \left\{ \sum_{I=-\infty}^{\infty} \int_{-D}^D \frac{\xi(\xi + 2IH)}{\sqrt{D^2 - \xi^2} [(x - \xi)^2 + (\xi + 2IH)^2]^{3/2}} d\xi \right\} \int_{\xi}^{X_{HF}} \Gamma(\lambda) d\lambda d\xi \\
 &= \begin{cases} u_0 \delta & \text{für } X_{RA} \leq x \leq X_{RF} \\ 0 & \text{für } X_{HA} \leq x \leq X_{HF} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

mit den Bedingungen:

$$\Gamma(x) = 0 \quad \text{für } X_{RF} \leq x \leq X_{HA}$$

$$\lim_{x \rightarrow X_{HA}} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow X_{RA}} \Gamma(x) = 0 \quad (\text{Kutta-Bedingung})$$

Das erste Integral der Gleichung (5.32) bezeichnet den Einfluß der gebundenen Wirbel, das zweite den der freien Wirbel.

(5.32) ist eine Integralgleichung für die Zirkulation $\Gamma(x)$.

Da die Gleichung eine komplizierte Form hat, kann keine analytische Lösung gefunden werden. Die Gleichung wird deshalb numerisch gelöst.

Dazu werden drei Intervalle über x äquidistant in Teilstrecken unterteilt: Die Lücke zwischen den beiden Platten ($X_{RF} \leq x \leq X_{HA}$), die hintere Platte, die das Ruder darstellt ($X_{RA} \leq x \leq X_{RF}$), und der freie Wirbel bis zu einem ausreichenden Abstand ($x < X_{RA}$) für die vordere Platte (den Schiffsrumpf) mit seinem kleinen Seitenverhältnis werden an den beiden Enden kürzere Teilstrecken

als Mittelbereich benutzt, um eine bessere Genauigkeit zu erreichen.

Die Integralgleichung wird damit auf ein lineares Gleichungssystem zurückgeführt. Die Kutta-Bedingung wird indirekt erfüllt, indem die Integranden für die gebundene Zirkulation an den Stellen $X_j = 1/4$ der Teilstreckenlänge hinter dem vorderen Ende jeder Teilstrecke berechnet werden. Der $3/4$ -Punkt X_i jeder Teilstrecke ist entsprechend der Kollokationspunkt, an dem die Gleichung (5.32) innerhalb der beiden Intervalle $X_{RA} \leq X \leq X_{RF}$ und $X_{RA} \leq X \leq X_{HF}$ erfüllt wird.

Das Intervall $(-\infty, X_{RA})$ wird durch J_1 Teilstrecken unterteilt; für $[X_{RA}, X_{RF}]$ werden $J_2 - J_1$, für (X_{RF}, X_{HA}) $J_3 - J_2$ und für $[X_{HA}, X_{HF}]$ $J_4 - J_3$ Teilstrecken angesetzt, so daß insgesamt J_4 Teilstrecken und $(J_2 - J_1) + (J_4 - J_3)$ unbekannte Zirkulationen Γ_j zu berechnen sind.

Die Gleichung (5.32) wird in folgende Form transformiert :

$$\sum_{j=J_1}^{J_4} \Gamma_j (X_i - X_j) A_{ij} \cdot \Delta X_j - \sum_{j=1}^{J_4} B_{ij} (\Delta X_j)^2 \sum_{n=j}^{J_4} \Gamma_n = \begin{cases} 4\pi\delta \cdot u_0 \cdot D & \text{für } J_1 \leq i \leq J_2 \\ 0 & \text{für } J_3 \leq i \leq J_4 \end{cases} \quad (5.33)$$

mit:

$$A_{ij} = \sum_{I=-\infty}^{\infty} \sum_{K=-M}^M \frac{\sqrt{D^2 - Z_K^2} \cdot \Delta Z}{\left\{ (X_i - X_j)^2 + (Z_K + 2IH)^2 \right\}^{3/2}}$$

$$B_{ij} = \sum_{I=-\infty}^{\infty} \sum_{K=-M}^M \frac{Z_K (Z_K + 2IH) \cdot \Delta Z}{\sqrt{D^2 - Z_K^2} \left\{ (X_i - X_j)^2 + (Z_K + 2IH)^2 \right\}^{3/2}}$$

$$\Delta Z = \frac{D}{M}, \quad Z_K = K\Delta Z$$

Der Ausdruck mit den B_{ij} in (5.33) wird wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{J4} B_{ij} (\Delta x_j)^2 \cdot \sum_{n=j}^{J4} \Gamma_n \\ &= \sum_{j=1}^{J4} \Gamma_j \sum_{l=1}^j B_{il} (\Delta x_l)^2 \\ &= \sum_{j=J1}^{J4} \Gamma_j \sum_{l=1}^j B_{il} (\Delta x_l)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus

$$\Gamma_j = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq J1 \quad (\text{im Kielwasser}).$$

Damit wird (5.33) umgeschrieben:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=J1}^{J4} \frac{\Gamma_j}{\delta} \left[A_{ij} \cdot \Delta x_j (x_i - x_j) - \sum_{l=1}^j B_{il} (\Delta x_l)^2 \right] \\ &= \begin{cases} 4\pi u_0 D & \text{für} \quad J1 \leq i \leq J2 \\ 0 & \text{für} \quad J3 \leq i \leq J4 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Wenn die Γ_j berechnet sind, können die Ruderkraft und das Rudermoment einschließlich der am Schiff vom Ruder induzierten Kräfte und Momente berechnet werden:

$$Y(R) = \rho u_0 D \int_{x_{RA}}^{x_{HF}} \Gamma(x) dx \cdot \frac{\pi}{4} \tag{5.36}$$

$$N(R) = \rho u_0 D \int_{x_{RA}}^{x_{HF}} x \Gamma(x) dx \cdot \frac{\pi}{4} \tag{5.37}$$

Die Ableitungen der Querkraft Y und des Moments N nach dem Ruderwinkel ergeben sich durch numerische Approximation der vorstehenden Integrale zu

$$Y_{\delta} = \frac{\pi}{4} \rho u_0 D \sum_{j=J1}^{J4} \frac{\Gamma_j}{\delta} \cdot \Delta x_j \quad (5.38)$$

$$N_{\delta} = \frac{\pi}{4} \rho u_0 D \sum_{j=J1}^{J4} x_j \frac{\Gamma_j}{\delta} \cdot \Delta x_j \quad (5.39)$$

5.2.2 Analyse der rechnerischen Ergebnisse

Durch den Schiffsrumpf wird der am Ruder angreifende Auftrieb reduziert; gleichzeitig wird ein zusätzlicher Auftrieb auf den Schiffsrumpf induziert. Dies zeigt Abb. 5.12, die die Verteilung der Zirkulation über der Schiffslänge und dem Ruder für verschiedene Abstände zwischen Ruder und Rumpf darstellt. Die gesamte Ruderkraft (auf Ruder und Rumpf) wird für ein Ruder hinter dem Rumpf größer als ohne Wechselwirkung zwischen Ruder und Schiff. Dies gilt bereits in tiefem Wasser. In flachem Wasser vergrößert sich der Effekt noch erheblich: Mit abnehmender Wassertiefe nimmt die hydrodynamische Querkraft auf den Schiffsrumpf stark zu, und der Angriffspunkt der gesamten Querkraft verschiebt sich nach vorn (siehe Abb. 5.11). Dies wird auch durch die Experimente von FUJINO /17/ bestätigt.

Die Tabellen 5.3 und 5.4 zeigen die berechnete Ruderkraft und das Rudermoment, bezogen auf die Schiffsmittle für die beiden Beispielschiffe. Der Vergleich mit FUJINOS /3/ Ergebnissen zeigt verhältnismäßig gute Übereinstimmung. Während die Querkraft mit abnehmender Wassertiefe größer wird, ändern sich die Momente mit der Wassertiefe nur wenig.

Tabelle 5.3 Berechnete und im Modellversuch gemessene Querkraft und Moment um die z-Achse auf Schiff und Ruder infolge Ruderwinkel für das Mariner-Schiff

D/H		0.0	0.40	0.518	0.667	0.826	0.909
$10^3 \cdot Y_{\delta}'$	Berechnung	3.31	3.408	3.503	3.683	4.0	4.245
	Experiment	2.94	3.12	3.85	3.43	5.21	-
$10^3 \cdot N_{\delta}'$	Berechnung	-1.653	-1.670	-1.698	-1.754	-1.857	-1.934
	Experiment	-1.49	-1.64	-1.59	-1.68	-1.48	-

Die Experimente wurden von FUJINO /3/ mit $F_n = 0.0905$ durchgeführt.

Tabelle 5.4 Berechnete und im Modellversuch gemessene Querkraft und Moment um die z-Achse auf Schiff und Ruder infolge Ruderwinkel für die "Tokyo Maru"

D/H		0.0	0.333	0.435	0.556	0.667	0.769	0.833
$10 \cdot Y_{\delta}'$	Berechnung	3.287	3.329	3.370	3.473	3.588	3.731	2.885
	Experiment	3.49	-	3.96	4.18	3.98	4.18	-
$10 \cdot N_{\delta}'$	Berechnung	-1.629	-1.629	-1.633	-1.662	-1.692	-1.732	-1.777
	Experiment	-1.85	-	-1.85	-1.90	-1.80	-1.66	-

Die Experimente wurden von FUJINO /3/ mit $F_n = 0.0905$ durchgeführt.

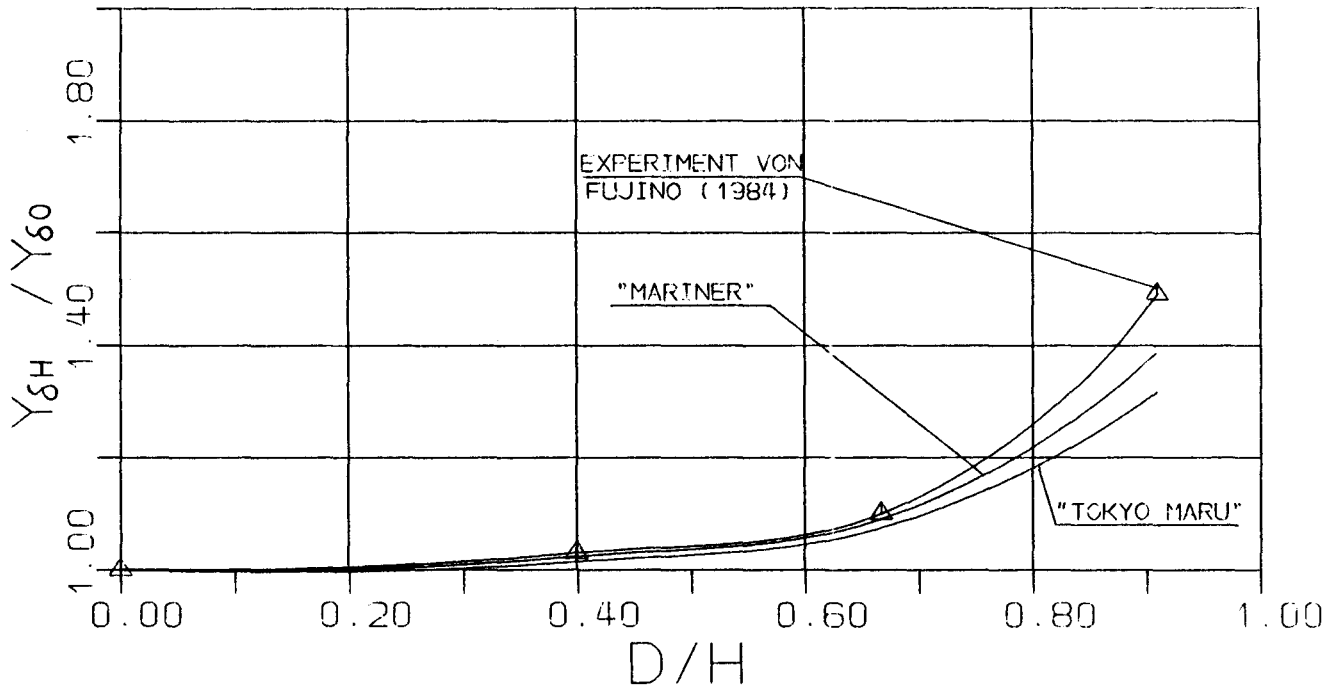


Abb. 5.6 Berechnete und von FUJINO /7/ gemessene Verhältnisse zwischen der Ruderkraft auf flachem und auf tiefem Wasser

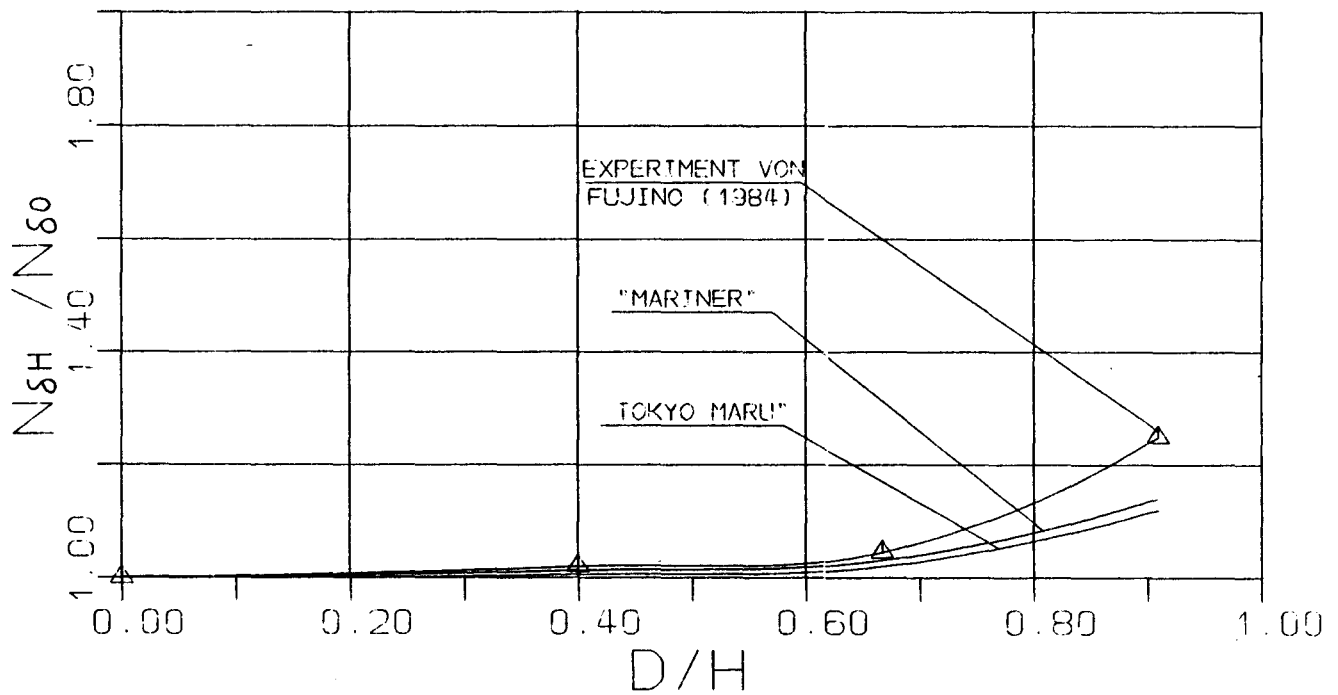


Abb. 5.7 Berechnete und von FUJINO /7/ gemessene Verhältnisse zwischen dem Rudermoment auf flachem und auf tiefem Wasser

Um die Abhängigkeit der Ruderkraft und des Rudermomentes von der Wassertiefe genauer festzustellen, führte FUJINO /7/ mit einem anderen Schiffsmodell weitere Experimente mit D/H bis zu 0.9 durch. Abb. 5.6 und 5.7 zeigen das Verhältnis zwischen diesen Kräften und Momenten in flachem Wasser und denen in tiefem Wasser nach den Messungen und den hier durchgeführten Berechnungen für die zwei auch zuvor untersuchten Schiffe. Da diese Verhältnisse für beide berechneten Schiffe nahezu übereinstimmen, ist ein Vergleich mit dem wieder anderen im Experiment benutzten Modell doch sinnvoll.

5.2.3 Vergleich mit Berechnungen von Hess

HESS /14/ berechnet die Ruderkräfte (einschließlich der Anteile, die am Schiffsrumpf wirken) nach dem schon in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren: Das Ruder wird zusammen mit dem Schiff nach der von NEWMAN /19/ vorgeschlagenen Perturbationsmethode behandelt; es unterscheidet sich vom Schiff allein durch seine von der Schiffslängsachse abweichende Richtung. Es gibt keine Lücke zwischen Ruder und Rumpf. Die Schiffsquerschnitte werden als Rechtecke angenähert.

Abb. 5.8 zeigt die von Hess berechneten Ergebnisse für die Ruderkraft pro Ruderwinkel Y_{δ} und das Rudermoment pro Ruderwinkel N_{δ} in flachem Wasser im Verhältnis zu den Werten in tiefem Wasser, zusammen mit den hier berechneten Werten und mit experimentellen Resultaten von FUJINO /3/ für die "Tokyo Maru" und das Mariner-Schiff. Bemerkenswert ist:

- i) Das Ruderkraftverhältnis ist nach Hess für $0.3 < D/H < 0.7$ kleiner als 1. Möglicherweise liegt hier ein Zeichenfehler vor.
- ii) Das Rudermoment geht für $D/H \rightarrow 1$ (d.h. verschwindenden Spalt c^* zwischen Schiffsboden und Wasserboden im Vergleich zum Schiffstiefgang D) nach Hess gegen sehr kleine Werte oder Null, während die hier berechneten Werte in sehr flachem Wasser ansteigen. Die experimentellen Daten für $N_{\delta H}/N_{\delta 0}$ zeigen nur geringe Abhängigkeit von der Wassertiefe.

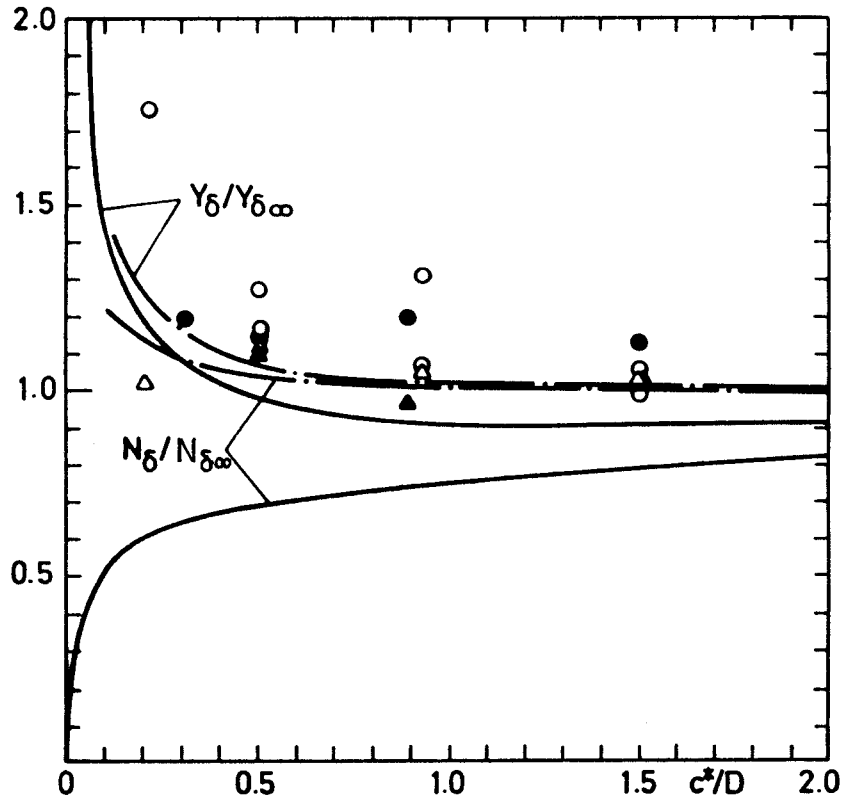


Abb. 5.8 Ruderkraft und Rudermoment

— Rechenerische Resultate von HESS
 - · - Rechenerische Resultate der vor-
 liegenden Arbeit

Experimentelle Punkte: Kreis $Y_\delta/Y_{\delta\infty}$
 Dreiecke $N_\delta/N_{\delta\infty}$

●▲ [FUJINO, 1968] Tokyo-Maru
 ○△ [FUJINO, 1968] Mariner-Schiff

Um den Verlauf von $N\delta$ für $D/H \rightarrow 1$ zu klären, wurde die zweidimensionale Strömung um eine Platte ohne Anstellwinkel und ein dahinter angeordnetes Plattenruder mit Anstellwinkel δ gesondert berechnet. δ wurde klein vorausgesetzt, so daß das Strömungsproblem linearisiert behandelt werden konnte. Dazu wurde eine Wirbelschicht der Stärke $\gamma(x)$ auf der x-Achse im Bereich $-L/2 \leq x \leq L/2$ angeordnet; dieser Bereich umfaßt

1. zwischen $-L/2$ und X_{RF} das Ruder mit Anstellwinkel δ ,
2. eine Lücke (Schraubenbrunnen) zwischen X_{RF} und X_{HA} , in der die Wirbelstärke γ gleich 0 ist,
3. den Schiffsrumpf zwischen X_{HA} und $L/2$; hier ist der Anstellwinkel gleich 0.

Die von der Wirbelschicht induzierte Quergeschwindigkeit auf der x-Achse

$$\phi_y(x, 0) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\gamma(\xi)}{2\pi} \cdot \frac{1}{x-\xi} d\xi \quad (5.40)$$

muß gleich 0 im Bereich des Schiffskörpers und gleich $u \cdot \delta$ im Bereich des Ruders sein, wenn u die Anströmgeschwindigkeit in x-Richtung ist. Führt man statt der Wirbelschicht $\gamma(x)$ die Querkraftverteilung

$$F(x) = \rho u \gamma(x) D \quad (5.41)$$

als unbekannte Funktion ein, so ergibt sich die Integralgleichung

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi = 2\pi\rho u^2 D \alpha(x) \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} -\frac{L}{2} \leq x \leq X_{RF} \\ X_{HA} \leq x \leq \frac{L}{2} \end{array} \quad (5.42)$$

mit $\alpha(x) = \delta$ im Bereich des Ruders $(-\frac{L}{2} \leq x \leq X_{RF})$,
sonst $\alpha(x) = 0$.

Die Gleichung muß Kutta-Bedingungen $F(x) = 0$ an der Hinterkante des Ruders und des Schiffes erfüllen außer in dem von Hess behandelten Fall ohne Spalt zwischen Rumpf und Ruder; in diesem Fall ist nur an der Ruderhinterkante $F(x) = 0$ zu fordern.

Die Gleichung wurde wieder diskretisiert durch Ansatz von Punkt-
wirbeln in den 1/4-Punkten von Teilstrecken von Rumpf und Ruder
und Erfüllung der Gleichung in Kollokationspunkten, die bei $\frac{3}{4}$
der Teilbereichslängen angeordnet wurden. Dann ergibt sich ein
lineares Gleichungssystem für die diskreten Querkräfte in den
1/4-Punkten.

Für den Fall ohne Spalt zwischen Rumpf und Ruder ergab sich so
numerisch die schon von Hess angegebene Näherungsformel

$$x_{\delta} = \frac{N_{\delta}}{Y_{\delta}} \approx -\frac{1}{6} \cdot \text{Ruderlänge};$$

der Schwerpunkt der Ruderkraft liegt danach fast am Hauptspant
 $x = 0$.

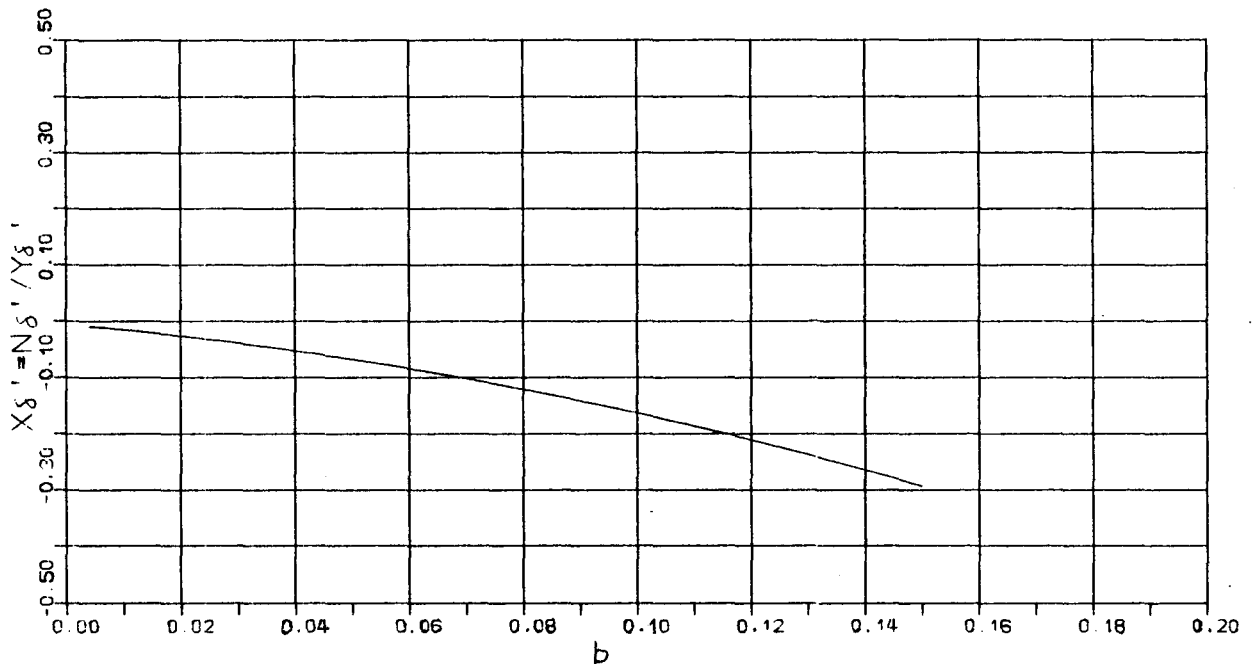


Abb. 5.9 Die Verschiebung des Ruderkraftangriffspunktes
bei Grenzfall ($D/H = 1$) mit zunehmender Länge
des Schraubenbrunnens

Rechnet man dagegen mit endlicher Länge des Schraubenbrunnens zwischen Ruder und Rumpf, so ergeben sich weiter hinten liegende Angriffspunkte der Ruderkraft. Dies zeigt Abb. 5.9 für den Fall Ruderlänge = 2.5 % von L. Die tatsächlichen Längen des Schraubenbrunnens betragen beim Mariner-Schiff 2.5 % und bei der "Tokyo Maru" 1.7 % von L. Die Unterschiede zwischen den hier berechneten Ergebnissen und denen von Hess sind damit eine Folge davon, daß Hess den Schraubenbrunnen vernachlässigt.

Abb. 5.10 zeigt die Querkraftverteilung infolge des Ruders nach Hess bei verschiedenen Wassertiefen. Mit abnehmender Wassertiefe erhöht sich die Querkraft am Bug (Bereich a); es vermindert sich die Kraft am Heck und am Ruder (Bereich b). Deswegen verschiebt sich auf flachem Wasser der Angriffspunkt der gesamten Querkraft erheblich nach vorn bis in die Nähe des Hauptspants bei $x = 0$.

Abb. 5.11 zeigt dagegen die Querkraftverteilung nach eigenen Berechnungen für den Fall, daß das Ruder vom Schiff durch eine Lücke von 2.5 % der Schiffslänge getrennt ist. Hier nimmt bei flacher werdendem Wasser ($D/H \rightarrow 1$) die Querkraft sowohl im Vorschiff als auch im Hinterschiff zu, während die reine Ruderkraft (man beachte den anderen Maßstab für die Ruderkraft) fast unverändert bleibt.

Abb. 5.12 zeigt, wie sich die Querkraftverteilung mit wachsendem Abstand $b \cdot L/2$ des Ruders vom Schiffsrumpf verändert. Der Mittelschiffsbereich, in dem nur sehr kleine vom Ruder induzierte Querkräfte auftreten, ist hier nicht dargestellt worden. Die praktische Schlußfolgerung aus diesem Bild ist, daß man immer eine Lücke zwischen Rumpf und Ruder lassen sollte, da sonst die Rudermomente in flachem Wasser zu klein werden und das Schiff schlecht auf das Ruder reagiert. Dieser Fehler ist z.B. bei einigen Zwei-Schrauben-Containerschiffen gemacht worden, da Manövrierversuche an Modellen in tiefem Wasser keine wesentlichen Unterschiede zwischen Ruderanordnungen ohne und mit Lücke zwischen Ruder und Totholz zeigten.

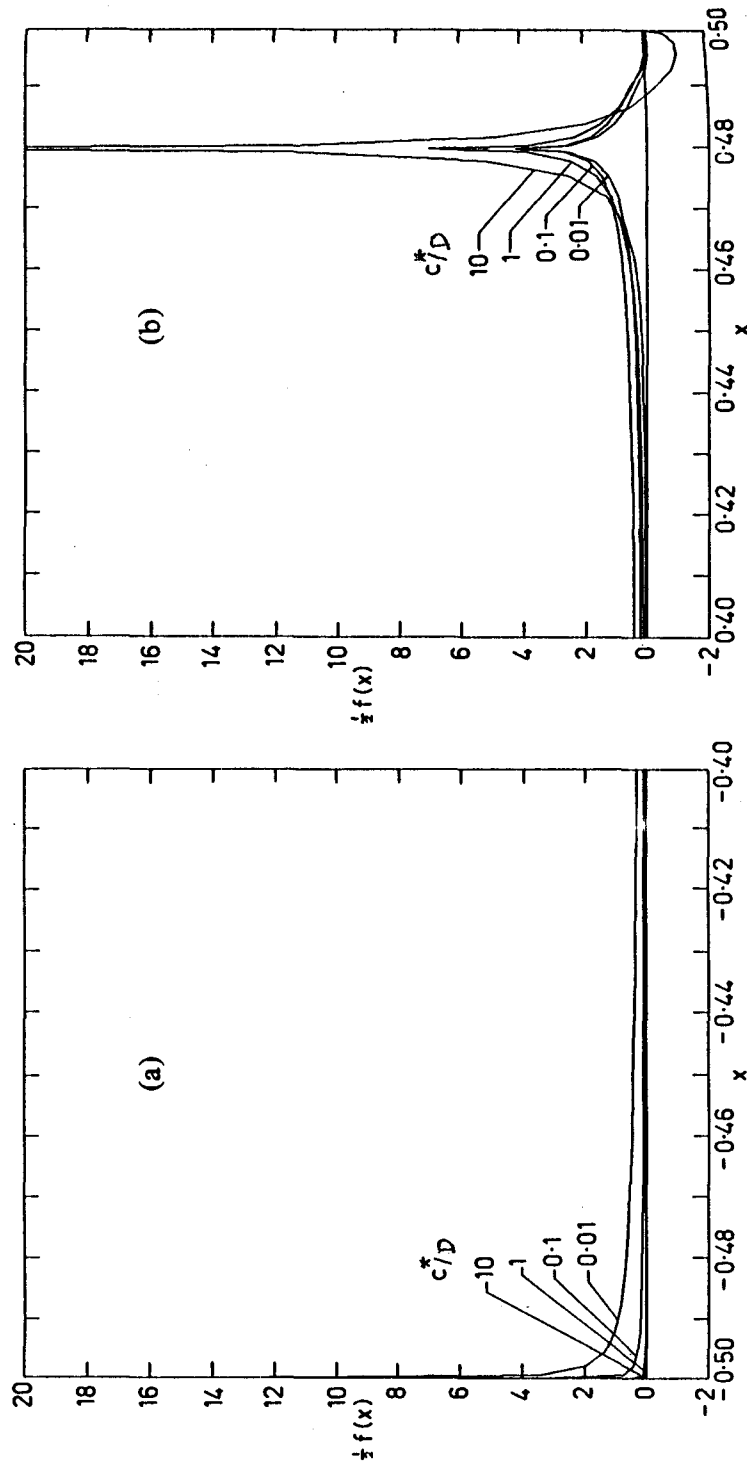


Abb. 5.10 Querkraftverteilung infolge Ruderwinkel in verschiedenen Wassertiefen nach Berechnungen von HESS - Der Ruder-Drehpunkt liegt bei $x = 0.48$

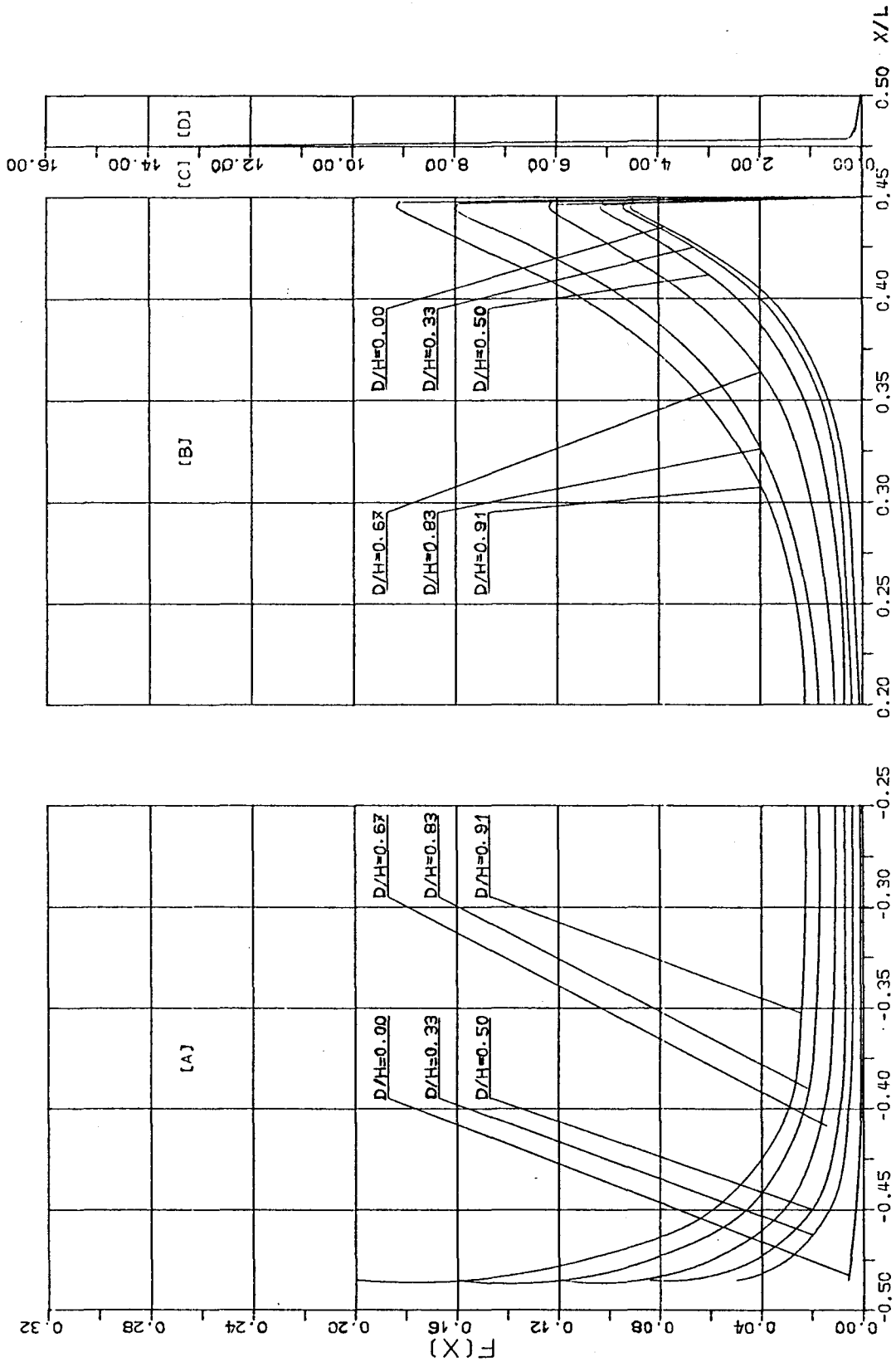


Abb. 5.11 Berechnete Querkraftverteilung über der Längskoordinate für eine senkrechte Rechteckplatte (Rumpf) mit Anstellwinkel 0 und ein Ruder (Profillänge 2.5 % von L) mit Anstellwinkel für verschiedene Wassertiefen. Die Querkräfte vom Ruder sind im anderen Maßstab gezeichnet.

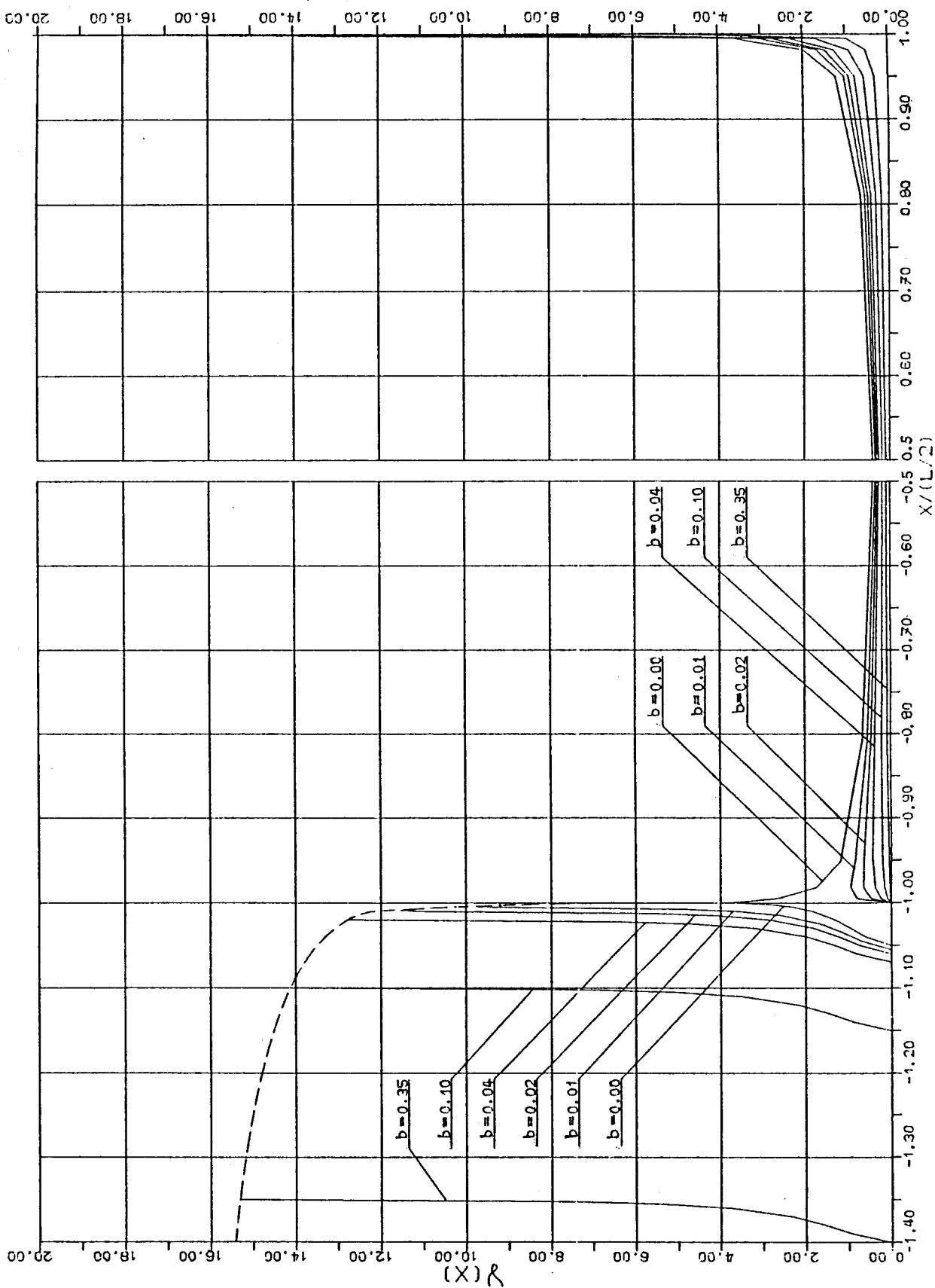


Abb. 5.12 Zirkulationsverteilung über der Längskoordinate für eine senkrechte Rechteckplatte (Rumpf) mit Anstellwinkel 0 und ein Ruder (Profillänge 2.5 % von L) mit Anstellwinkel für sechs verschiedene Abstände $b \cdot L/2$ zwischen Rumpf und Ruder.

Zusammenfassung

Zur theoretischen Berechnung der Kräfte und Momente, die das Wasser auf ein schräg oder auf gekrümmter Bahn fahrendes Schiff bei endlicher Wassertiefe ausübt, werden die Versperrungskoeffizienten C von idealisierten und wirklichen Schiffsquerschnitten berechnet. Das dazu benutzte Kollokationsverfahren mit Einzelquellen innerhalb der Querschnittskontur führt zu Fehlern unter 1 %, wenn - für Verhältnisse Wassertiefe zu Schiffstiefgang von 2 bzw. 1,1 - etwa 20 bzw. 60 Quellen angesetzt werden. Über der Schiffslänge verändert sich C ähnlich wie die Spantfläche; mit der Wassertiefe verändert sich C etwa proportional zu der Größe (Tiefgang/Bodenfreiheit unter dem Kiel)^{0,9}.

Mit Hilfe der Versperrungskoeffizienten läßt sich eine Integro-Differentialgleichung über der Schiffslängenkoordinate für die querschiffs gerichtete Geschwindigkeit U aufstellen, mit der die Schiffsquerschnitte angeströmt werden. U unterscheidet sich auf flachem Wasser von der Quergeschwindigkeit V , mit der sich der betreffende Schiffsquerschnitt relativ zum ungestörten Wasser bewegt, infolge der Ausweichströmung um die Schiffsenden. Die Gleichung wird mit einem Galerkin-FE-Verfahren gelöst. Es benutzt für die gesuchte Funktion $U \cdot C$ linear über den Elementen veränderliche Ansatzfunktionen. Die auftretenden Integrale werden analytisch berechnet. Die Formeln dafür vereinfachen sich erheblich, wenn alle Elemente gleichlang sind. U ist an den äußersten Schiffsenden größer, sonst immer kleiner als V .

Aus $U \cdot C$ und der Spantflächenverteilung des Schiffes folgen die hydrodynamische Masse für Querbeschleunigung, die Lage ihres Schwerpunktes und das hydrodynamische Trägheitsmoment für Drehung um die Hochachse. Die Abhängigkeit dieser Größen von der Wassertiefe stimmt einigermaßen mit Modellversuchsergebnissen überein (Bilder 3.3 bis 3.6). Unterschiede zwischen Rechnung und Messung werden vor allem auf die Vernachlässigung der Verformung der Wasseroberfläche und der Schwimmlageänderung des Schiffes infolge Fahrt bei der Rechnung zurückgeführt.

Bei stationärer Schräg- oder Drehbewegung des Schiffes ist der Querimpuls in jeder Spantebene durch die Quergeschwindigkeit des Spantes und seine hydrodynamische Masse bestimmt. Die substantielle

zeitliche Änderung des Querimpulses liefert die hydrodynamischen Kräfte und Momente. Bei stationärer Fahrt löst sich jedoch durch die Zähigkeit des Wassers die Strömung teilweise vom Schiffsrumpf ab. Dies wird näherungsweise dadurch berücksichtigt, daß bestimmte Terme in den Gleichungen für die Kräfte und Momente nur im Bereich des Vorschiffs angesetzt werden. Der Vergleich mit Modellversuchsergebnissen zeigt leidliche Übereinstimmung (Abb. 4.1 bis 4.8). Ursache für die Unterschiede können neben der Zähigkeit auch die folgenden bei der Berechnung vernachlässigten Einflüsse sein: Propeller; Wellenbildung an der Wasseroberfläche; und Absenkung und Vertrimmung des Schiffes infolge Fahrt. Die berechnete Gierstabilität nimmt mit abnehmender Wassertiefe zu; diese Tendenz wurde bis auf einige Ausnahmen auch in Modellversuchen festgestellt.

Die Ruderkräfte bei stationärer Anströmung werden nach der Methode der tragenden Linie durch Ansatz eines vertikalen gebundenen Wirbels variabler Stärke und der zugehörigen freien Wirbelschicht berechnet. Zur Erfüllung der Randbedingungen am Boden und an der Wasseroberfläche werden die Wirbel an diesen Flächen gespiegelt. Die Zuströmung zum Ruder wird als Parallelströmung angesehen, deren Geschwindigkeit von der Höhenkoordinate abhängt. Bei der Berechnung dieser Geschwindigkeitsverteilung wird der Propellerstrahl berücksichtigt. Die tatsächlich vorhandene Variation der Zuströmgeschwindigkeit in Querschiffsrichtung wird durch Abschätzung einer äquivalenten, querschiffs konstanten Geschwindigkeit ersetzt. Bei der numerischen Auswertung zeigt sich, daß die Anzahl K der pro Randfläche berücksichtigten Spiegelbilder und die Anzahl J der Stützpunkte für die numerische Integration über die Ruderhöhe mit wachsendem Verhältnis Ruderhöhe zu Wassertiefe zunehmen muß; die durch endliches K und J bedingten Fehler bleiben unter 1 %, wenn bei einem Verhältnis Ruderhöhe zu Wassertiefe von 0,83 $K = 5$ und $J = 25$ gewählt werden. Die Ruderkräfte erhöhen sich in flachem Wasser - im Vergleich zu tiefem Wasser - viel weniger als die Rumpfkkräfte; bei Ruderhöhe/Wassertiefe = 0,83 z.B. um etwa 10 %.

Die für das freifahrende Ruder in Parallelströmung berechneten Kräfte müssen korrigiert werden, weil der Schiffsrumpf vor dem Ruder die Ruderumströmung beeinflusst. Solche Korrekturgrößen

werden aus einem einfachen Strömungsmodell abgeleitet, bei dem Rumpf und Ruder durch rechteckige vertikale Platten ersetzt werden. Die Strömung wird durch Flächenverteilungen gebundener Wirbel auf diesen Platten sowie die zugehörigen freien Wirbel dargestellt. Über der Höhenkoordinate wird die Stärke der gebundenen Wirbel elliptisch verteilt vorausgesetzt. Die Wirbel werden wieder an der Wasseroberfläche und am Boden mehrfach gespiegelt. Über der Längenkoordinate wird die Wirbelverteilung aus einer Integro-Differentialgleichung numerisch so berechnet, daß die Strömungsrandbedingung entlang der Wasseroberfläche an den beiden Platten erfüllt ist.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen zeigen, daß die Wechselwirkung zwischen Rumpf und Ruder auf flachem Wasser größer als auf tiefem Wasser wird und in erster Linie dafür verantwortlich ist, daß die dem Ruderwinkel proportionale Querkraft auf Rumpf und Ruder in flachem Wasser ansteigt. Der Vergleich mit Modellversuchsergebnissen zeigt gleiche Tendenz, aber eine nicht voll befriedigende quantitative Übereinstimmung (Abb. 5.6 und 5.7). Möglicherweise ist die elliptisch über der Höhe vorausgesetzte Wirbelstärke für die Differenzen verantwortlich; Versuchsfehler sind jedoch auch nicht auszuschließen (vgl. Abb. 5.10).

Im Prinzip ähnliche Berechnungen von HESS /14/ führten zu dem unerwarteten Ergebnis, daß das Drehmoment um die Hochachse durch die Schiffsmittle infolge Ruderwinkel auf sehr flachem Wasser gegen ganz kleine Werte konvergiert. Dies steht im Widerspruch zu den hier berechneten Ergebnissen und zu experimentellen Befunden. Durch Untersuchung der zweidimensionalen horizontalen Schiffsumströmung (sie entspricht dem Fall Wassertiefe gleich Schiffstiefgang) konnte als Ursache für dies Verhalten gefunden werden, daß Hess den Spalt zwischen Rumpf und Ruder vernachlässigt.

Formelzeichen

A	Hydrodynamische Masse pro Längeneinheit für Querbewegung
A_R	Ruderfläche
b	Breite der Lücke zwischen Schiff und Ruder, bezogen auf Schiffslänge
B	Breite eines Schiffes
C	Versperrungskoeffizient
c	Profillänge des Ruders
c_L	Auftriebsbeiwert
c_T	Auftriebskoeffizient
$c_S = S/BD$	Völligkeit eines Spants
c^*	Abstand zwischen Kiel und Wasserboden
D	Tiefgang
f, F	verschiedene Funktionen der Längenkoordinate
H	Wassertiefe
$HH = B/D$	Seitenverhältnis eines Spants
h	lokale halbe Höhe des Doppelkörpers
I_z	Trägheitsmoment des Schiffes um die z-Achse
J_z	Hydrodynamisches Trägheitsmoment um die z-Achse
L	Länge des Schiffes zwischen den Loten
l'_r, l'_β	siehe Definition in Abschnitt 4.5
$l(x)$	Verteilung der Querkraft
M	Schiffsmasse
M_x	Hydrodynamische Masse für Längsbewegung
M_y	Hydrodynamische Masse für Querbewegung
m_y	Hydrodynamische Masse pro Längeneinheit für Querbewegung
M, M'_x, M'_y	Dimensionslose Werte von M, M_x bzw. M_y
N	Giermoment um die z-Achse
$N(\beta), N(r), N(R)$	Giermoment infolge Driftwinkel, Drehgeschwindigkeit bzw. Ruderwinkel

$p, \Delta p$	Druck bzw. Druckunterschied
Q_j	Quellpunkt
q_j	Quellstärke
R	Ruderkraft
r	Winkelgeschwindigkeit des Schiffes um die z-Achse = Giergeschwindigkeit
r_p	Propellerradius
r_R	Radius des Propellerstrahls am Ruder
r_S	Propellerstrahlradius
S	Spantfläche
S_L	Hauptspantfläche
u	Schiffsgeschwindigkeit in Schiffslängsrichtung
U	Quer-Anströmgeschwindigkeit der Schiffsquerschnitte bei endlicher Wassertiefe
U_β, U_r	U infolge β bzw. r
u_s	Geschwindigkeit im Propellerstrahl
u_i	Strahlgeschwindigkeit des Propellers am Ruder
u_a	Anströmgeschwindigkeit des Propellers
u_e	Reduzierte Strahlgeschwindigkeit
$u(z)$	Anströmgeschwindigkeit des Ruders abhängig von z
u_o	Mittlere Anströmgeschwindigkeit des Ruders
v, v_o	Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung
V	Geschwindigkeitsbetrag
x, y, z	Kartesische Koordinaten eines schiffsfesten Systems mit Ursprung im Hauptspant auf der Symmetrieebene in Höhe der Wasserlinie; x zeigt nach vorn, y nach Backbord, z nach oben
x_g	x -Koordinate des Schiffsschwerpunktes
$x'_\delta = N'_\delta / Y'_\delta$	x -Koordinate des Druckangriffspunktes der vom Ruder hervorgerufenen Querkraft
x_m	x -Koordinate von A_m
$x_{m\beta}, x_{mr}$	x_m für Driftbewegung bzw. Drehbewegung
x_{RA}, x_{RF}	x -Koordinate von Hinter- bzw. Vorderkante Ruder
x_{HA}, x_{HF}	x -Koordinate von Hinter- bzw. Vorderende Rumpf

x_0	x-Koordinate von Vorderkante Propellerflügel
x_R	x-Koordinate der Ruderachse
Y	Querkraft
$Y(\beta), Y^*(r), Y(R)$	Querkraft infolge Drift, Drehbewegung bzw. Ruderwinkel
$Y'_\beta, Y'^*_r, N'_\beta, N'_r$	Dimensionslose Querkräfte und Giermomente; vgl. Definition in Abschnitt 4.2
α	Anstellwinkel
β	Driftwinkel = Winkel zwischen Schiffsgeschwindigkeit am Koordinatenursprung und Schiffslängsachse
γ	Wirbelstärke
Γ_b	Stärke des gebunden (vertikalen) Wirbels
Γ_t	Stärke der freien (horizontalen) Wirbel pro Höheneinheit
ϵ	Perturbationsparameter; Maß für die Schlankheit des Schiffes
ρ	Flüssigkeitsdichte
$\lambda = u_a/u_i$	Geschwindigkeitsverhältnis
Λ	Seitenverhältnis eines Ruders
δ	Ruderwinkel
Φ, ϕ	Geschwindigkeitspotentiale
ψ	Stromfunktion
Index H	Wert für endliche Wassertiefe
Index O	Wert für unendliche Wassertiefe
Index r	Ableitung nach der Giergeschwindigkeit
Index β	Ableitung nach dem Driftwinkel
Index δ	Ableitung nach dem Ruderwinkel

Literaturverzeichnis

- /1/ CRANE, C.L.: Manoeuvring Trials of a 278 000-DWT-Tanker in Shallow and Deep Waters. SNAME Transactions, Vol., 87 (1979), S. 251-283
- /2/ CLARKE, D., PATTERSON, D.R. and WOODERSON, R.K.: Manoeuvring Trials with the 193 000 tdw Tanker ESSO BERNICIA. Trans. RINA (1971)
- /3/ FUJINO, M.: Experimental Studies on Ship Manoeuverability in Restricted Waters. Part 1. Internat. Shipb. Progress, 15 (1968), S. 279-301
- /4/ FUJINO, M.: New Experimental Results of Forced Yaw Tests in Shallow Water. Naut. Report No. 5001, Department of Naval Architecture University of Tokyo (1972), pp 1-29
- /5/ KLEINAU, D., PUIS, D.: Experimentelle Methoden zum Einfluß von Flachwasser auf die Steuerbarkeit von Schiffen. Schiffbauforschung 22, 3 (1983), pp 147-155
- /6/ HIRANO, M., TAKASHINA, J., MORIYA, S., NAKAMURA, Y.: An Experimental Study on Manoeuvring Hydrodynamic Forces in Shallow Water. Transactions of the West-Japan Society of N.A. (1984), pp 101-110
- /7/ FUJINO, M., ISHIGURO, T.: A Study of the Mathematical Model Describing Manoeuvring Motions in Shallow Water - Shallow Water Effects on Rudder-Effectiveness Parameters - Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 156 (1984), pp 180-192
- /8/ PETTERSEN, B.: Calculation of Potential Flow about Three-Dimensional Bodies in Shallow Water with Particular Application to Ship Manoeuvring. Journal of Ship Research, Vol. 26, No. 3 (Sept. 1982), pp 149-165
- /9/ NEWMAN, J.N.: Lateral Motion of a Slender Body between Two Parallel Walls. Journ. Fluid Mech. 39 (1969) 1, pp 97-115
- /10/ TAYLOR, P.J.: The Blockage Coefficient for Flow About an Arbitrary Body Immersed in a Channel. Journal of Ship Research, Vol. 17, No. 2 (June 1973), pp 97-105
- /11/ KLEINAU, D.: Hydrodynamische Masse und hydrodynamisches Massenträgheitsmoment von Schiffen bei endlicher Wassertiefe. Schiffbauforschung 20, 4 (1981), S. 247-256
- /12/ KLEINAU, D.: Zur praktischen Ermittlung der hydrodynamischen Trägheitskoeffizienten von Schiffsspantformen. Schiffbauforschung 19, 4 (1980), S. 179-184
- /13/ SÖDING, H.: Prediction of Ship Steering Capabilities. Schiffstechnik, Bd. 29 (1982), Nr. 1, S. 3-29

- /14/ HESS, F.: Rudder Effectiveness and Course-Keeping Stability in Shallow Water: A Theoretical Model. International Shipbuilding Progress, 24 (1977), No. 276, pp 206-221
- /15/ MOLTHOPP, H.: Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftfahrtforschung, Bd. 15 (1938), S. 153-169
- /16/ SÖDING, H.: Manövrieren von Schiffen II, Vorlesungsmanuskript (1982), IfS
- /17/ SÖDING, H.: The Flow around Ship Section in Waves. Schiffstechnik, Bd. 20 (1973), Heft 99, S. 9-15
- /18/ LEWIS, F.M.: The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship. Trans. SNAME, 37 (1929), pp 1-20
- /19/ MILANOV, E., LEFTEROVA, M., VASSILEV, P.: Investigation of Hydrodynamic Characteristics of a Plate Intersecting the Free Surface in Shallow Water. Conference on Seagoing Qualities of Ships and Marine Structures (Sept. 1983), pp 42.1 - 42.8
- /20/ GILL, A.D., PRICE, W.G.: Experimental Evaluation of the Effects of Water Depth and Speed on the Manoeuvring Derivatives of Ship Models. The Royal Institution of Naval Architects (1977) pp 149-160
- /21/ KLEINAU, D.: Querkraft und Giermoment infolge Schiebewinkel und Bahnkrümmung an Schiffen bei beschränkter Wassertiefe. Schiffbauforschung 22, 3 (1983) S. 155-160
- /22/ INOUE, S., MURAYAMA, K.: Calculation of Turning Ship Derivatives in Shallow Water. Transactions of the West-Japan Society of N.A. (1969), pp 73-85
- /23/ ISAY, W.H.: Der Schraubenpropeller nahe der freien Wasseroberfläche und in Flachwasser. Ingenieur-Archiv, XXXI. Band (1962), S. 194-213
- /24/ GRAF, K.: Brennstoffeinsparung durch verbesserte Kursstabilität. Jastram-Forschung, Abschlußbericht, BMFT, MTK O2729 (März 1985)
- /25/ KAN, M., HANAOKA, T.: Calculation of the Turning Manoeuvring in Shallow Water. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 115 (1964)
- /26/ LAMB, H.: Hydrodynamics (1932) New York : Dover
- /27/ ZHAO, Y.X.: Kräfte am Schiffsrumpf beim Manövrieren in flachem Wasser. IfS-Bericht Nr. 449 (April 1984)
- /28/ NEWMAN, J.N.: Marine Hydrodynamics, M.I.T. Press (1977), Cambridge, Mass.
- /29/ TUCK, E.O.: Shallow-Water Flows Past Slender Bodies, J. Fluid Mech. 26 (1966), pp 81-96