

441 | Februar 1984

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

H. Streckwall

### Behandlung der Profilkavitation durch Lösung einer singulären Fredholmschen Integralgleichung 2. Art

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

**Behandlung der Profilkavitation durch Lösung einer singulären Fredholschen Integralgleichung  
2. Art**

Streckwall, H., Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1984

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 441

Behandlung der Profilkavitation durch Lösung einer  
singulären Fredholmschen Integralgleichung 2. Art

von

H. Streckwall

Februar 1984

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungen	
1. Einführung	1
2. Das Integralgleichungssystem für die Zusatzbelegungen - Die Möglichkeit der Inversion	2
3. Lösung des Integralgleichungssystems durch einen geeigneten Reihenansatz	5
4. Rechnungen und Diskussion	16
5. Literatur	19
 Anhang	
Beweis verschiedener Integralformeln	A1
Abbildungen	A8

## Bezeichnungen

$A$	halbe Profillänge
$a_{\lambda}^i, a_{\lambda}^{-j}$	$i=0,1,2; j=1,2; \lambda=0,1,\dots,N_0$ Koeffizienten einer Fourier-Kosinusreihe mit $N_0$ Gliedern
$b$	$1/2 \sqrt{(A+C_E)/(A-C_E)}$
$b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$	Koeffizienten des speziellen Reihenansatzes für $\gamma_{\eta}$
$c_E$	Ende der Kavitationsschicht ( $-A \leq c_E \leq A$ )
$c_p(x)$	Druckbeiwert ohne Kavitation
$\delta_0$	Anstellwinkel
$\eta(x)$	halbe Kavitationsschichtdicke
$\gamma(x), \gamma_{\eta}(x)$	Wirbeldichte, Zusatzbewirbelung
$I_n^3, I_n^1, I_{-k}^3, I_{-k}^1$	$n=0,1,2; k=1,2$ indizierte Integrale trigonometrischer Funktionen
$I_0^2, I_1^2$	indizierte Integrale trigonometrischer Funktionen
$i_j^-, i_j^+$	$j=3,4,\dots$ indizierte Integrale trigonometrischer Funktionen
$J_{\lambda}^k(b)$	$k=0,1,2; \lambda=1,\dots,N_0$ indiziertes Integral trigonometrischer Funktionen
$N_0$	Begrenzung der Glieder einer Fourier-Kosinusreihe
$p_v$	Dampfdruck
$\psi, \psi_0$	... transformiert den Bereich $-A \leq s \leq A$ ( $-A \leq \xi \leq A$ ) auf das Intervall $[0, \pi]$
$q(x), q_{\eta}(x)$	Quell-Senkendichte, Zusatzbelegung
$\vartheta$	Wasserdichte
$s$	Sehnenkoordinate ( $-A \leq s \leq A$ )
$S_i^0, S_i^1, S_{-j}^1, S_{-j}^2$	$i=0,1,2; j=1,2$ indizierte Summen
$z$	... transformiert den Bereich $-1 \leq z \leq 1$ auf das Intervall $[0, \pi]$
$z_{\tau}$	Dampfdruckbeiwert
$\tau$	... transformiert den Bereich $-1 \leq z' \leq 1$ auf das Intervall $[0, \pi]$
$u_0$	Zuströmgeschwindigkeit

$x, \xi$	Sehnenkoordinate ( $-A \leq x, \xi \leq A$ )
$y, y_0$	... transformiert den Bereich $-A \leq x \leq A$ ( $-A \leq C_E \leq A$ ) auf das Intervall $[0, 1]$
$Y_D(x)$	Dickenlinie
$Y_S(x)$	Skelettlinie
$z, z'$	... transformiert den Bereich $-A \leq x \leq C_E$ ( $-A \leq \xi \leq C_E$ ) auf das Intervall $[-1, 1]$

## 1. EINFÜHRUNG

Zur Beschreibung ausgebildeter Kavitationsbereiche (Schichtkavitation) an Flügelprofilen steht eine Methode zur Verfügung, bei der die Kavitationsschicht als zusätzlicher Verdrängungskörper interpretiert wird /1/. Die Verdrängungseigenschaften der Kavitationsschicht sowie ihr Beitrag zum Auftrieb werden durch die zusätzlichen Singularitätenbelegungen  $q_\eta$  (für die Anordnung von Quellen und Senken) und  $\gamma_\eta$  (für die Anordnung von Wirbeln) simuliert. Ein Lösungsverfahren zur Bestimmung dieser Singularitätenbelegungen gab zuerst Hanaoka /2/ an. Es wurde später von Chao /3/ sowie Alwardt und Isay /4/ weiter ausgebaut.

Eine Übertragung dieses Verfahrens auf den kavitierenden Propeller stößt auf zwei Schwierigkeiten. Erstens sind die beiden Integralgleichungen (Strömungsrandbedingung und Druckbedingung) zur Errechnung von  $q_\eta$  und  $\gamma_\eta$  weitaus komplizierter als im zweidimensionalen Fall. Zweitens ist unsicher, inwieweit die empirische Nishiyama-Beziehung, aus der sich in der oben erwähnten Methode das Ende der Kavitationsschicht ableiten läßt, auf den Propeller übertragbar ist.

Im zweidimensionalen Fall (Profile) gelingt die Inversion der einen Integralgleichung nach  $\gamma_\eta$  aufgrund einer exakten Lösungsformel /1/. Damit läßt sich das Problem auf eine einzige (ebenfalls streng lösbare) Gleichung für  $q_\eta$  reduzieren. Beim Propeller ist eine Auflösung der entsprechenden Gleichungen nach  $\gamma_\eta$  bzw.  $q_\eta$  nicht möglich. Vielmehr erscheint es hier für die Behandlung des Integralgleichungssystems aus Strömungsrandbedingung und Druckbedingung unerläßlich, zunächst einen geeigneten Reihenansatz für die Zusatzbelegungen zu finden. In diesem Bericht wird diskutiert - als Vorstufe zum Problem des kavitierenden Propellers -, wie sich ohne Verwendung der exakten Inversionsformel für  $\gamma_\eta$  das Integralgleichungssystem im zweidimensionalen Fall lösen läßt. Da für Profile auch die vorher erwähnte Methode existiert, welche von der Invertierbarkeit der Integralgleichungen Gebrauch macht, kann so die Qualität des neuen Lösungsverfahrens überprüft werden. Es wird außer-

dem diskutiert, welche zusätzlichen Bedingungen geeignet sind, um das Ende der Kavitationsschicht festzulegen.

## 2. DAS INTEGRALGLEICHUNGSSYSTEM FÜR DIE ZUSATZBELEGUNGEN - DIE MÖGLICHKEIT DER INVERSION

Die Beschreibung von Schichtkavitation mit Hilfe der Profiltheorie geht von der Vorstellung aus, daß die Kavitationsschicht wie ein zusätzlicher Verdrängungskörper wirkt. Bei der Aufstellung der Strömungsrandbedingung und der Druckgleichung sind zusätzliche Singularitätenbelegungen zu berücksichtigen. Im Folgenden soll nur die Teilkavitation (Kavitationsschicht endet vor der Profilhinterkante) mit Beginn an der Vorderkante behandelt werden.

Man betrachte ein Flügelprofil in stationärer Anströmung mit  $\delta_0$  als Anstellwinkel und  $u_0$  als Zuströmgeschwindigkeit. Weiter seien Punkte auf der Profilhinterkante durch die Koordinate  $x$  mit  $-A \leq x \leq A$  beschrieben. Die geometrische Dickenlinie sei  $Y_D(x)$  genannt, die Skelettlinie mit  $Y_S(x)$  bezeichnet (Abb. 1). Das Profil besitze auf der Saugseite im Bereich  $-A \leq x \leq c_E$  eine Kavitationsschicht der Dicke  $2\eta(x)$ . Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Skelettlinie  $\eta(x)$  lautet die Strömungsrandbedingung, aus der sich die Wirbelbelegung auf der Sehne errechnet (linearisierte Profiltheorie) /1/ :

$$\delta_0 - \frac{dY_D}{dx} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \gamma_\eta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (1)$$

wobei  $\gamma(\xi)$  für die Wirbelbelegung ohne Kavitation steht und  $\gamma_\eta(\xi)$  den Einfluß der Kavitationsschicht auf die Auftriebsverteilung (Wirbelbelegung) bezeichnet.

Die Verdrängungswirkung der Kavitationsschicht bedingt neben der Quell-Senkenverteilung

$$q(x) = 2 u_0 \frac{dY_D}{dx}$$

eine zusätzliche Verteilung im Bereich  $-A \leq x \leq c_E$

$$q_\eta(x) = 2 u_0 \frac{d\eta}{dx} \quad . \quad (2)$$

Um die Stetigkeit der effektiven Skelettlinie  $\gamma_s(x) + \eta(x)$  zu gewährleisten, muß am Ende der Kavitationsschicht gelten

$$q_\eta(c_E) = 0 \quad . \quad (3)$$

Auch die Druckgleichung wird zu einer Bestimmungsgleichung für die Zusatzbelegungen  $\gamma_\eta$  und  $q_\eta$ . Da im Bereich  $-A \leq x \leq c_E$  exakt der Dampfdruck  $p_v$  herrscht, lautet diese ( $p_0$  gibt den Druck in großer Entfernung vom Flügel an) /1/ :

$$z_v = \frac{(p_0 - p_v)}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \frac{\gamma(x)}{u_0} + \frac{\gamma_\eta(x)}{u_0} + \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^A q(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^{c_E} q_\eta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad . \quad (4)$$

Der Anteil des Druckbeiwertes ohne Kavitation

$$c_p(x) = \frac{\gamma(x)}{u_0} + \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^{c_E} q(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (5)$$

ist ebenso wie der konstante Dampfdruckbeiwert  $z_v$  bekannt. Mit der Gleichung (1) sowie den Gleichungen (4) und (5) sind die Zusatzbelegungen  $\gamma_\eta$  und  $q_\eta$  aus den gekoppelten Integralgleichungen

$$-q_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \gamma_\eta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad ; \quad -A \leq x \leq A \quad (6)$$

$$z_v - c_p(x) = \frac{\gamma_\eta(x)}{u_0} + \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^{c_E} q_\eta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad ; \quad -A \leq x \leq c_E \quad (7)$$

zu errechnen.

Es handelt sich bei der Integralgleichung (6) um eine Fredholmsche Integralgleichung 1. Art. Der Kern ist singular. Die Gleichung (6) kann exakt nach  $\gamma_\eta$  aufgelöst (invertiert) werden /5/. Man erhält eine Darstellung von  $\gamma_\eta$ , die

$$\begin{aligned} q_\eta(c_E) &= 0 \\ q_\eta(x) &= 0 \quad ; \quad c_E < x \leq A \end{aligned} \quad (8)$$

bereits berücksichtigt /1/. Wenn man diese Darstellung in (7) einsetzt, ergibt sich eine Integralgleichung mit lediglich einer unbekanntem Funktion  $q_\eta$ . Diese ist von der gleichen Art wie die Gleichung /6) und nach  $q_\eta$  auflösbar /1/. Chao /3/ sowie Isay und Alwardt /4/ gelangten so für  $q_\eta(x) = 0 \quad ; \quad c_E \leq x \leq A$  zu einer Darstellung von  $q_\eta(x)$  und  $\gamma_\eta(x)$  in Abhängigkeit von  $\omega_\nu - c_p(x)$ . Insbesondere ergaben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_\eta &\sim \frac{1}{4\sqrt{A+x}^3} \quad ; \quad x \rightarrow -A \\ q_\eta &\sim \frac{1}{4\sqrt{A+x}^3} \quad ; \quad x \rightarrow -A \end{aligned} \quad (9)$$

Am Ende der Kavitationsschicht ist das von Isay und Alwardt bestimmte  $\gamma_\eta$  endlich und stetig, aber nicht stetig differenzierbar.

Das Ende der Kavitationsschicht wird aus der von Nishiyama /6/ aufgestellten Relation

$$\eta(c_E) = \delta_0(c_E + A) \quad (10)$$

bestimmt.

Die in Abhängigkeit von  $\omega_\nu$  vorausgesagten Werte von  $c_E$  stimmen mit den beobachteten gut überein, sofern nicht Grenzschiefeinflüsse, insbesondere Ablösung, für das Kavitationsverhalten von ausschlaggebender Bedeutung sind wie etwa beim Profil NACA 16006 für Anstellwinkel über  $2,5^\circ$  /7/.

### 3. LÖSUNG DES INTEGRALGLEICHUNGSSYSTEMS DURCH EINEN GEEIGNETEN REIHENANSATZ

Das oben skizzierte Verfahren zur Behandlung von Schichtkavitation läßt sich nicht auf den Propeller ausdehnen. Man ist in diesem Fall nicht in der Lage, die der Gleichung (6) entsprechende Strömungsrandbedingung zu invertieren. Es erscheint hier angebracht, die Form der Lösung für  $\gamma_\eta$  durch eine Funktionenreihe mit unbestimmten Koeffizienten

$$\gamma_\eta(x) = d_1 \varphi_1(x) + d_2 \varphi_2(x) + \dots + d_n \varphi_n(x)$$

vorzugeben. Das Integralgleichungssystem aus Strömungsrandbedingung und Druckbedingung wäre dann in eine Bedingung zur Bestimmung der Koeffizienten  $d_1, d_2, \dots, d_n$  umzuformen. Weiter ist eine für dieses Verfahren geeignete Relation zur Festlegung von  $c_E$  aufzustellen. Ein solches Lösungsverfahren muß, wenn es im dreidimensionalen Fall Erfolg haben soll, natürlich auch am kavitierenden Profil möglich sein. Dabei können die Gleichungen (6) und (7) Aufschluß darüber geben, welcher Reihenansatz zur Lösung eines dreidimensionalen Kavitationsproblems geeignet ist.

Durch einfaches Einsetzen von (6) in (7) erhält man folgende Fredholmsche Integralgleichung 2. Art

$$z_V - c_p(x) = \frac{\gamma_\eta(x)}{u_0} - \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^{c_E} \frac{1}{x-\xi} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma_\eta(s)}{\xi-s} ds \right] d\xi \quad (11)$$

Hierbei ist zu bemerken, daß in (11)  $q_\eta(x) = 0$ ;  $c_E < x \leq A$  vorausgesetzt wird (Integration nur bis  $c_E$ ). Somit ist außer der Gleichung (11) auch noch die Bedingung

$$q_\eta(x) = 0 \quad ; \quad c_E < x \leq A \quad (12)$$

vorhanden. Mit Hilfe der Substitutionen

$$\sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} = b(1+z'), \quad \sqrt{\frac{A+x}{A-x}} = b(1+z) \quad ; \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A+c_E}{A-c_E}}$$

$$s = -A \cos \psi$$

ergibt sich aus (11), wie im Anhang gezeigt wird

$$b_V - c_p(z) = \frac{\gamma_\eta(z)}{u_0} \quad (13)$$

$$- \frac{1}{\pi u_0} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma_\eta(\psi)}{\cos \psi + \frac{\xi}{A}} \sin \psi \, d\psi \right] 2 \frac{(1+z')}{1+b^2(z'+1)^2} \cdot \frac{1+b^2(z+1)^2}{[2+z+z'] [z-z']} \, dz' .$$

Die linke Seite von (13) besitzt in der linearisierten Theorie bis auf einen Term

$$-2 \delta_0 \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = -2 \delta_0 \frac{1}{b(1+z)} \quad (14)$$

der dem  $\cotg$ -Term in der Birnbaumreihe für  $\gamma(x)$  entstammt, nur stetige Anteile. Die rechte Seite von (13) muß also in der linearisierten Theorie diesen Term ebenfalls enthalten; darüber hinaus dürfen nur stetige Funktionen auftreten.

Bei der Ableitung eines Lösungsansatzes für die singuläre Integralgleichung 2. Art (11) bzw. (13) ist zu fordern, daß sich nach zweifacher Integration über  $\gamma_\eta$  die in  $\gamma_\eta$  enthaltenen Singularitäten in ihrem Charakter reproduzieren. Es dürfen keinesfalls Singularitäten auftauchen, die in  $\gamma_\eta$  selbst nicht vorhanden sind. Ein Ansatz der Form

$$\gamma_\eta(s) = c_0 \left\{ \sqrt[4]{\frac{A-s}{A+s}}^3 - \sqrt[4]{\frac{A-s}{A+s}} \right\} = c_0 \left\{ (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} - (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \right\} \quad (15)$$

für  $\gamma_\eta$  im Bereich  $-A \leq s \leq A$  ergibt mit Hilfe der Integralformeln (19a) und (20a) im Falle  $x \rightarrow -A$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{c_E} \frac{1}{x-\xi} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma_\eta(s)}{\xi-s} \, ds \right] \, d\xi = \\ & = c_0 \left\{ \sqrt[4]{\frac{A-x}{A+x}}^3 - \sqrt[4]{\frac{A-x}{A+x}} \right\} + \text{stetige Terme} . \end{aligned} \quad (16)$$

(Unter Verwendung von (19a) und (20a) ist die erste Integration exakt, die zweite näherungsweise ausführbar.) Der Ansatz (15) würde schon der oben aufgestellten Forderung genügen, enthält aber keinen reinen  $\cotg$ -Term und erlaubt nur einen freien Koeffizienten.

Eine Erweiterung des Ansatzes (15) ist die folgende Wirbeldichte (vgl. auch Abb. 3):

$$\begin{aligned} f_{\eta}(\psi) = & \left[ \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{3/2} - \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{1/2} \right] (c_0 + c_1 \cos \psi + c_2 \cos^2 \psi) \\ & + \left[ \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{3/2} + \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{1/2} \right] (b_1 \sin \psi + b_2 \sin 2\psi) \\ & - \sqrt{2} \cotg \frac{\psi}{2} \left\{ b_1 + 2 b_2 \cos \psi + c_1 + c_2 \cos \psi \right\} . \end{aligned} \quad (17)$$

Die Berücksichtigung des reinen  $\cotg$ -Termes in dieser Weise geschieht zur Vermeidung logarithmischer Singularitäten (diese sind in (17) ja nicht enthalten).

Mit Hilfe der Substitution

$$\xi = -A \cos \psi_0 \quad (18)$$

sowie der im Anhang abgeleiteten Integralformeln

$$I_0^3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{3/2} \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \sqrt{2} + \left( \cotg \frac{\psi_0}{2} \right)^{3/2} \quad (19a)$$

$$I_1^3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{3/2} \frac{\cos \psi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{3}{\sqrt{2}} + I_0^3 \cos \psi_0 \quad (19b)$$

$$I_2^3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cotg \frac{\psi}{2} \right)^{3/2} \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{9}{4\sqrt{2}} + I_1^3 \cos \psi_0 \quad (19c)$$

$$\bar{I}_0^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \sqrt{2} - (\cotg \frac{\psi_0}{2})^{1/2} \quad (20a)$$

$$\bar{I}_1^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \frac{\cos \psi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} + \bar{I}_0^{-1} * \cos \psi_0 \quad (20b)$$

$$\bar{I}_2^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \bar{I}_1^{-1} * \cos \psi_0 \quad (20c)$$

$$\bar{I}_0^{-2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cotg \frac{\psi}{2} \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = 1 \quad (21a)$$

$$\bar{I}_1^{-2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cotg \frac{\psi}{2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = 1 + \cos \psi_0 \quad (21b)$$

$$\bar{I}_1^{-3} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \psi_0 - \sin \psi_0 (\cotg \frac{\psi_0}{2})^{3/2} \quad (22a)$$

$$\bar{I}_2^{-3} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} \frac{\sin 2\psi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{10}{4\sqrt{2}} + \bar{I}_1^{-3} * 2 \cos \psi_0 \quad (22b)$$

$$\bar{I}_{-1}^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos \psi_0 + \sin \psi_0 (\cotg \frac{\psi_0}{2})^{1/2} \quad (23a)$$

$$\bar{I}_{-2}^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \frac{\sin 2\psi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{6}{4\sqrt{2}} + \bar{I}_{-1}^{-1} * 2 \cos \psi_0 \quad (23b)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 -q_\eta(\xi) &= c_0 [\bar{I}_0^3 - \bar{I}_0^1] + c_1 [\bar{I}_1^3 - \bar{I}_1^1] + c_2 [\bar{I}_2^3 - \bar{I}_2^1] + & (24) \\
 &+ b_1 [\bar{I}_{-1}^3 + \bar{I}_{-1}^1] + b_2 [\bar{I}_{-2}^3 + \bar{I}_{-2}^1] - \\
 &- \sqrt{2} [(c_1 + b_1) \bar{I}_0^2 + (c_2 + 2b_2) \bar{I}_1^2] = \\
 &= [(\cotg \frac{\psi_0}{2})^{3/2} + (\cotg \frac{\psi_0}{2})^{1/2}] (c_0 + c_1 \cos \psi_0 + c_2 \cos^2 \psi_0) - \\
 &- [(\cotg \frac{\psi_0}{2})^{3/2} - (\cotg \frac{\psi_0}{2})^{1/2}] (b_1 \sin \psi_0 + b_2 \sin 2\psi_0) .
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu erkennen, daß der reine  $\cotg \frac{\psi_0}{2}$ -Term nach der Integration nicht auftritt.

Die Berechnung der rechten Seite in Gleichung (13) geschieht unter Verwendung von (24) sowie den Umrechnungen (vgl. Anhang)

$$\begin{aligned}
 \cotg \frac{\psi_0}{2} &= \frac{1}{b(1+z')} \\
 \cos \psi_0 &= -\frac{\xi}{A} = \frac{1-b^2(z'+1)^2}{1+b^2(z'+1)^2} \\
 \sin \psi_0 &= \frac{1+\cos \psi_0}{\cotg \frac{\psi_0}{2}} = \frac{2b(1+z')}{1+b^2(1+z')^2} ; \quad 2b = \sqrt{\frac{A+c_E}{A-c_E}} .
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis für  $\mathcal{C}_V - \mathcal{C}_P$  lautet dann

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_V - \mathcal{C}_P(z) &= \frac{\gamma_\eta(z)}{u_0} - \frac{1}{\pi u_0} 2 b^{-3/2} \int_{-1}^1 \frac{(1+b^2(z+1)^2)}{[2+z+z'][z-z']} * \\
 &* \left\{ (1+b(1+z')) \sum_{i=0}^2 c_i \frac{(1-b^2(1+z')^2)^i}{(1+b^2(1+z')^2)^{(i+1)} (1+z')^{1/2}} - \right. & (25) \\
 &\left. - (1-b(1+z'))(1+z') \sum_{i=1}^2 b_i \frac{2b}{(1+z')^{1/2}} 2^{(i-1)} \frac{(1-b^2(1+z')^2)^{(i-1)}}{(1+b^2(1+z')^2)^{(i+1)}} \right\} dz' .
 \end{aligned}$$

Mit  $z = -\cos b$  ( $0 \leq b \leq \pi$ ) und  $z^1 = -\cos \tau$  ( $0 \leq \tau \leq \pi$ ), sowie den Reihendarstellungen

$$\frac{(1-b^2(1-\cos\tau)^2)^i \sin\tau}{(1+b^2(1-\cos\tau)^2)^{i+1} (1-\cos\tau)^{1/2}} = \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^i \cos \lambda \tau ; \quad i=0,1,2 \quad (26)$$

$$2b^2 \frac{(1-b^2(1-\cos\tau)^2)^{(i-1)} \sin\tau}{(1+b^2(1-\cos\tau)^2)^{i+1} (1-\cos\tau)^{1/2}} = \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} \cos \lambda \tau ; \quad i=1,2 \quad (27)$$

läßt sich (25) auf die folgende Form bringen

$$b_v - c_p(z) = \frac{\gamma_q(z)}{u_0} - \quad (28)$$

$$- 2(1+b^2(1+z)^2) b^{-3/2} \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^2 c_i \int_0^{\pi} \frac{(1+b(1-\cos\tau)) \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^i \cos \lambda \tau}{(2-\cos\tau-\cos b)(\cos\tau-\cos b)} d\tau +$$

$$+ 2(1+b^2(1+z)^2) b^{-3/2} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^2 b_i \int_0^{\pi} \frac{(1-b(1-\cos\tau))(1-\cos\tau) \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} \cos \lambda \tau}{(2-\cos\tau-\cos b)(\cos\tau-\cos b)} d\tau .$$

Zur endgültigen Berechnung von (28) sind auszuwerten

$$J_{\lambda}^k(b) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau (1-\cos\tau)^k}{(2-\cos\tau-\cos b)(\cos\tau-\cos b)} d\tau ; \quad k=0,1,2 \quad (29)$$

Wie im Anhang gezeigt wird, lautet mit  $\cosh \phi = 2 - \cos b$  das Ergebnis für die in (28) einzusetzende Kombination ( $J_{\lambda}^0 + b J_{\lambda}^1$ ) bzw. ( $J_{\lambda}^1 - b J_{\lambda}^2$ )

$$(J_{\lambda}^0(b) + b J_{\lambda}^1(b)) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1-\cos b} \left( \frac{\sin \lambda b}{\sin b} + \frac{e^{-\lambda \phi}}{\sinh \phi} \right) + b \left( \frac{\sin \lambda b}{\sin b} - \frac{e^{-\lambda \phi}}{\sinh \phi} \right) \right\} \quad (30)$$

$$(J_{\lambda}^1(b) - b J_{\lambda}^2(b)) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \lambda b}{\sin b} - \frac{e^{-\lambda \phi}}{\sinh \phi} - \frac{b}{2} (1-\cos b) \left( \frac{\sin \lambda b}{\sin b} + \frac{e^{-\lambda \phi}}{\sinh \phi} \right) \right\} ; \quad (31a)$$

$\lambda \geq 1$

$$(J_0^1(b) - b J_0^2(b)) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{\sinh \phi} - b \left( \frac{1-\cos b}{\sinh \phi} - 2 \right) \right\} ; \quad (\lambda=0) \quad (31b)$$

Als endgültige Formulierung der Druckbedingung (11) erhält man

$$\begin{aligned}
 b_{\nu} - c_p(b) &= \frac{\gamma_1(b)}{u_0} - & (32) \\
 &- 2 (1+b^2(1-\cos b)^2) b^{-3/2} \sum_{i=0}^2 c_i \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_{\lambda}^i (J_{\lambda}^0(b) + b J_{\lambda}^1(b)) \\
 &+ 2 (1+b^2(1-\cos b)^2) b^{-3/2} \sum_{i=1}^2 b_i \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_{\lambda}^{-i} (J_{\lambda}^1(b) - b J_{\lambda}^2(b)) .
 \end{aligned}$$

Die Transformation der trigonometrischen Variablen  $b$  auf die Koordinate  $x$  geschieht durch die Formel

$$x = A \frac{b^2(1-\cos b)^2 - 1}{1 + b^2(1-\cos b)^2} . \quad (33)$$

Auf der linken Seite der Gleichung (32) tritt in der linearisierten Theorie eine Wurzelsingularität

$$b_{\nu} - c_p(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x+A}} \quad \text{für } x \rightarrow -A$$

auf. Es soll gezeigt werden, daß die rechte Seite von (32) ebenfalls nur diese Singularität besitzt. Hierzu sei zunächst

$$2 (1+b^2(1-\cos b)^2) b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_{\lambda}^i (J_{\lambda}^0(b) + b J_{\lambda}^1(b))$$

für  $b \rightarrow 0$  betrachtet.

Mit

$$\sinh \phi = \sqrt{\cosh \phi + 1} \sqrt{\cosh \phi - 1} = \sqrt{2+(1-\cos b)} \sqrt{1-\cos b} \quad (34)$$

ist der Nenner von

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1-\cos b} \left[ \frac{\sin \lambda b}{\sin b} + \frac{e^{-\lambda \phi}}{\sinh \phi} \right] = J_{\lambda}^0(b)$$

proportional zu  $b^3$ .

Zur Bestimmung der singulären Terme in

$$S_i^\sigma = 2 (1 + b^2(1 - \cos b)^2) b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_\lambda^i J_\lambda^0(b) \quad (35)$$

ist demnach der Zähler nur bis zu Termen  $\sim b^2$  auszuwerten.  
Es gelten nun für  $b \rightarrow \sigma$  die Näherungen

$$\frac{\sin \lambda b}{\sin b} = \lambda + o(b^2) \quad (36a)$$

$$e^{-\lambda \phi} = 1 - \lambda \phi + \frac{\lambda^2 \phi^2}{2} + o(\phi^3) \quad (36b)$$

$$-\frac{\chi}{A} = \frac{1 - b^2(1 - \cos b)^2}{1 + b^2(1 - \cos b)^2} = 1 + o(b^4) \quad (36c)$$

wobei  $o(b^n)$  die Ordnung der vernachlässigten Glieder bedeutet.  
Mit Hilfe von (36a - 36c) erhält man

$$S_i^\sigma = b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_\lambda^i \frac{1}{1 - \cos b} \left\{ \frac{1 + \frac{\lambda^2 \phi^2}{2}}{\sinh \phi} \right\} + \text{stetige Terme} \quad (37)$$

und mit (34) sowie

$$\phi^2 = b^2 + o(b^3)$$

schließlich

$$\begin{aligned} S_i^\sigma &= 2 (1 + b^2(1 - \cos b)^2) b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_\lambda^i J_\lambda^0(b) = \\ &= b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_\lambda^i \frac{1}{\sqrt{1 - \cos b}^3} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + (1 - \cos b) \left( \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} + \text{stetige Terme.} \end{aligned} \quad (38)$$

Die Summe

$$S_i^1 = 2 (1 + b^2(1 - \cos b)^2) b^{-1/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_\lambda^i J_\lambda^1(b)$$

ist einfacher abzuschätzen. Das Ergebnis lautet

$$S_i^1 = \frac{-b^{-1/2}}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos b}} \sum_{\lambda=0}^{N_0} \alpha_\lambda^i + \text{stetige Terme} \quad (39)$$

Die Summen

$$S_{-i}^1 = 2 (1 + b^2 (1 - \cos b)^2) b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} J_{\lambda}^1(b) \quad (40)$$

$$S_{-i}^2 = 2 (1 + b^2 (1 - \cos b)^2) b^{-1/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} J_{\lambda}^2(b) \quad (41)$$

lassen sich wie folgt darstellen

$$S_{-i}^1 = -b^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos b}} + \text{stetige Terme} \quad (42)$$

$$S_{-i}^2 = b^{-1/2} + \{ \text{stetige Terme} \} \quad (43)$$

$S_{-i}^2$  besitzt also keine Singularität für  $x \rightarrow -A$ .

Mit Hilfe der Summenformeln (vgl. mit (26) und (27))

$$\sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \tau (1 - b^2 (1 - \cos \tau)^2)^i}{(1 + b^2 (1 - \cos \tau)^2)^{i+1} (1 - \cos \tau)^{1/2}} = \sqrt{2} \quad (44a)$$

$$\sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^{-i} \cos \lambda \tau = 2 \sqrt{2} b 2^{(i-1)} \quad (44b)$$

$$\sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^i \lambda^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\tau^2} \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^i (1 - \cos \lambda \tau) = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (44c)$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda=0}^{N_0} a_{\lambda}^i \left[ \lambda^2 - \frac{1}{4} \right] = 0 \quad (44d)$$

und der aus (33) abzuleitenden Beziehung

$$b (1 - \cos b) = \sqrt{\frac{x+A}{A-x}}$$

erhält man schließlich die folgende Beschreibung von (32)

$$v_{\nu} - c_p(x) = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \{ b_1 + 2b_2 + c_1 + c_2 \} + \text{stetige Terme} \quad (45)$$

Zur Kompensation der in  $\mathcal{L}_v - c_p(x)$  enthaltenen Wurzelsingularität (Gleichung (14)) müssen demnach die Koeffizienten  $c_1, c_2, b_1, b_2$  die Bedingung

$$2\delta_0 = \sqrt{2} \{ b_1 + 2b_2 + c_1 + c_2 \} \quad (46)$$

erfüllen. Von den ehemals 5 freien Koeffizienten des Lösungsansatzes (17) für  $\gamma_\eta$  verbleiben damit noch 4. Diese sind so zu bestimmen, daß sowohl die Druckbedingung (11) bzw. (32) im Bereich  $-A \leq x \leq c_E$  gilt, als auch das Verschwinden von  $q_\eta$  im Bereich  $c_E < x \leq A$  gewährleistet ist (Gleichung (12)). Mit den verbleibenden 4 freien Koeffizienten können diese beiden Bedingungen nur annähernd berücksichtigt werden. Eine Erweiterung des Lösungsansatzes für  $\gamma_\eta$  (Gleichung (17)) durch Terme wie

$$\left[ (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} - (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \right] c_j \cos^j \psi \quad ; \quad j = 3, 4, \dots$$

$$\left[ (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} + (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \right] b_j \sin(j\psi) \quad ; \quad j = 3, 4, \dots$$

ist bisher nicht durchgeführt worden, weil dann die erste Integration in der Druckbedingung (11) auch noch die Auswertung der Integrale

$$i_j^- = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} - (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \right] \cos^j \psi \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi \quad ; \quad j = 3, 4, \dots \quad (47)$$

$$i_j^+ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ (\cotg \frac{\psi}{2})^{3/2} + (\cotg \frac{\psi}{2})^{1/2} \right] \sin(j\psi) \frac{\sin \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi \quad ; \quad j = 3, 4, \dots \quad (48)$$

erfordert. Schon im Falle  $j = 3$  wird der Rechenaufwand sehr groß. Die Aufstellung einer Rekursionsformel für die  $i_j^-$  und  $i_j^+$  aus (47) bzw. (48) ist noch nicht gelungen.

Sollte sich eine Erweiterung des Ansatzes (17) als zu aufwendig erweisen, wäre es vielleicht von Vorteil, auf das Verschwinden von  $q_\eta$  im Bereich  $c_E \leq x \leq A$  zu verzichten, hingegen aber

$$q_\eta(c_E) = 0 \quad (49)$$

identisch zu erfüllen. Dadurch wäre, ähnlich wie in Gleichung (46),

ein weiterer Koeffizient bestimmt. In diesem Fall ließe sich jedoch das Abschneiden der Integration über  $q_\eta$  an der Stelle  $c_E$ , wie dies in (11) geschieht, nicht mehr rechtfertigen. Eine Integration bis zur Hinterkante  $A$  wäre notwendig (das Ergebnis könnte mit Hilfe der Formeln (19a bis 23b) sogar exakt angegeben werden).

Sowohl die Bedingung, daß  $q_\eta$  im Gebiet  $c_E < x \leq A$  zu verschwinden hat, als auch die weniger strenge Forderung (49) zeichnen zwar den Punkt  $x = c_E$  aus und schränken die Lösungsvielfalt der Druckbedingung (11) bzw. (32) ein, doch bei beliebiger Vorgabe von  $c_E$  und festgehaltenem Dampfdruckbeiwert  $z_v$  liefert die Druckbedingung (11) stets Lösungsfunktionen  $\gamma_\eta$  und  $q_\eta$ . Es fehlt noch eine Aussage über die physikalische Realisierbarkeit dieser Lösungen (nur einer der vorgegebenen  $c_E$ -Werte kann der richtige sein). In der zweidimensionalen Theorie dient dazu, wie schon mehrfach erwähnt, die Nishiyama-Beziehung (10). Für das dreidimensionale Problem des kavitierenden Propellers erscheint die Ableitung des Endes der Kavitationsschicht  $c_E$  aus einer lokalen Eigenschaft der Lösungsfunktionen  $\gamma_\eta$  bzw.  $q_\eta$  notwendig. Hierzu bietet sich bei Verwendung des neuen Lösungsansatzes folgende Forderung an:

Das Maximum der Zusatzbewirbelung  $\gamma_\eta$  fällt mit dem Ende der Kavitationsschicht  $c_E$  zusammen.

Dieser Bedingung liegt die Vorstellung zugrunde, daß zur Kompensation der großen Unterdrücke an der Vorderkante  $\gamma_\eta$  im vorderen Profilbereich stark negativ ist, während es zum Ende der Kavitationsschicht hin positiv wird, um im hinteren Bereich der Schicht für zusätzlichen Unterdruck zu sorgen (der Druckbeiwert  $c_p(x)$  ist hier stets kleiner als  $z_v$ ). Weiter erfüllt  $\gamma_\eta$  die Kutta'sche Abflußbedingung, so daß  $\gamma_\eta$  hinter der Kavitationsschicht gegen 0 strebt. Bei Rechnungen mit der herkömmlichen Methode zeigt  $\gamma_\eta$  an der Stelle  $x = c_E$  stets ein Maximum und zudem eine Unstetigkeit der Ableitung. Dieses Verhalten ist aber durch die Lösungsmethode bedingt und gibt hier kein Kriterium zur Bestimmung von  $c_E$ .

#### 4. RECHNUNGEN UND DISKUSSION

Zur Festlegung der Druckverteilung im von Kavitation freien Zustand wurde ein Programm erstellt, welches für beliebige Profile den Druckbeiwert  $c_p(x)$  streng nach der linearen Theorie bestimmt. Die Berechnung der Zusatzwirbeldichte geschah unter Berücksichtigung der Druckbedingung (11) im Intervall  $-A \leq x \leq c_E$  sowie der Bedingung (12) ( $q_\eta(x) = 0$ ) im Bereich  $c_E < x \leq A$ . Um eine möglichst gute Erfüllung beider Forderungen zu gewährleisten, erfolgte die Bestimmung der Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2, b_1, b_2$  mit Hilfe eines Fehlerquadratverfahrens. Der in diesem Bereich zur Diskussion gestellte alternative Ansatz, welcher  $q_\eta(c_E) = 0$  identisch erfüllt, jedoch auf die Bedingung (12) völlig verzichtet, wurde bisher nicht programmiert.

Um einen Vergleich mit der herkömmlichen Methode zu ermöglichen, wurden die Rechnungen am Profil NACA 0015 durchgeführt, für das sowohl Messungen der Kavitationsausdehnung /8/ vorliegen, als auch eingehende theoretische Untersuchungen mit der herkömmlichen Methode existieren /4/. Als Anstellwinkel  $\delta_0$  wurde  $6^\circ$  gewählt. Die Abbildung zeigt, welcher Zusammenhang zwischen dem Dampfdruckbeiwert  $\zeta_v$  und dem Ende der Kavitationsschicht  $c_E$  das Experiment liefert. So ist z.B. im Falle  $\zeta_v = 9 \cdot \delta_0$  das Ende der Kavitationsschicht in der Profilmitte. Die im vorangegangenen Abschnitt postulierte Bedingung zur theoretischen Ermittlung von  $c_E$  besagt, daß als richtige Lösung diejenige zu wählen ist, für die vorgegebenes  $c_E$  und Maximum der Zusatzbewirbelung  $\gamma_\eta$  zusammenfällt. In der Abbildung 5 ist verdeutlicht, wie man auf der Suche nach dem (physikalisch) richtigen  $c_E$  bei gegebener  $\zeta_v = 9 \cdot \delta_0$  vorzugehen hätte. Man zeichne sich die Schar der mathematisch möglichen Lösungen auf und untersuche, welche Lösung die Maximum-Bedingung erfüllt. Gemäß der Abbildung 5 trifft dieses Maximum-Kriterium zunächst auf zwei Lösungen ( $(c_E + A)/2A = 0,3$  und  $(c_E + A)/2A = 0,5$ ) gleichermaßen zu. Betrachtet man jedoch zusätzlich den Verlauf der Belegung  $q_\eta$  für die Kombination  $(c_E + A)/2A = 0,3$ ;  $\zeta_v = 9 \cdot \delta_0$  (Abb. 11), so ist aufgrund des negativen  $q_\eta$  an der Vorder-

kante die erste der oben genannten 2 Lösungen auszuschließen. (Ein negatives  $q_\eta$  im vorderen Profilbereich bedeutet eine vorn negative Kavitationsschichtdicke  $2\eta(x)$ ). Hingegen ist die Kombination  $(c_E + A)/2A = 0,5$ ;  $b_V = 9 \cdot \delta_0$  auch vom Verlauf des  $q_\eta$  her möglich (Abb. 12). Geeigneter als die reine Maximum-Bedingung scheint also eine Kombination dieser Forderung mit der Bedingung

$$q_\eta(-A) \cong 0 \quad . \quad (50)$$

Unter Berücksichtigung beider Forderungen lassen sich in etwa folgende Zuordnungen durchführen (Abb. 6,7,9 sowie Abb. 10,11,12)

$$(c_E + A)/2A = 0,2 \quad b_V = 12 \cdot \delta_0 \quad (51a)$$

$$(c_E + A)/2A = 0,3 \quad b_V = 11 \cdot \delta_0 \quad (51b)$$

$$(c_E + A)/2A = 0,5 \quad b_V = 9 \cdot \delta_0 \quad . \quad (51c)$$

Dieser Zusammenhang stimmt mit dem Experiment und den ebenfalls in Abb. 4 dargestellten Ergebnissen der konventionellen Theorie annähernd überein. Im Falle  $(c_E + A)/2A = 0,7$  liegt für realistische Werte von  $b_V/\delta_0$  das Maximum der  $\gamma_\eta$ -Verteilung stets vor  $c_E$  (Abb. 8). Dieses unerwünschte Verhalten mag durch die geringe Zahl der Reihenglieder im Lösungsansatz (17) bedingt sein.

Indem man in den Abbildungen 6 - 9 jeweils auf dasjenige  $\gamma_\eta$  schaut, welches mit dem experimentellen Dampfdruckbeiwert behaftet ist, lassen sich auch allgemeine Aussagen über die Qualität der Lösungen treffen. So steht für kleine Werte von  $(c_E + A)/2A$  zu erwarten, daß die Zusatzbelegung  $\gamma_\eta$  erstens im hinteren Profilbereich unbedeutend ist und zweitens keinen wesentlichen Beitrag zur Zirkulation liefert. Beide Eigenschaften besitzen die "richtigen"  $\gamma_\eta$  aus Abb. 9 ( $(c_E + A)/2A = 0,2$ ) und Abb. 6 ( $(c_E + A)/2A = 0,3$ ). Im Falle großer  $c_E$ -Werte ist eine Verminderung der Zirkulation durch die Zusatzbewirbelung zu erwarten, was Abb. 8 ( $(c_E + A)/2A = 0,7$ ) bestätigt. Die Darstellungen von  $q_\eta$  (Abb. 10-13) lassen sich auch unter der Fragestellung untersuchen, inwieweit die Verwendung der Nishiyama-Beziehung bei gegebenem  $c_E$  zum richtigen Dampfdruck-

beiwert  $\zeta_r$  führt. Dazu schreibe man mit (2) die Nishiyama-Bedingung (10) in der Form

$$u_0 2 \delta_0 y_0 = \int_0^{y_0} q_\eta(y) dy \quad ; \quad y = \frac{A+x}{2A} \quad , \quad y_0 = \frac{A+c_E}{2A} \quad . \quad (52)$$

Für  $\delta_0 = 6^\circ$  ist im Bogenmaß

$$2\delta_0 \cong 0,21 \quad .$$

Die Fläche unter den Kurven der Abbildungen 10 - 13, genommen bis zur Stelle  $(A+c_E)/2A$  ist demnach zu vergleichen mit einem Rechteck der Höhe 0,21 und der Länge  $(A+c_E)/2A$ . Das Ergebnis einer groben Abschätzung der Bedingung (52) anhand der Diagramme Abb. 10 - 13 stimmt gut mit den Beziehungen (51 a-c) überein.

An dieser Stelle möchte ich vor allem Herrn Prof. Dr. W.H. Isay danken. Ohne seine unermüdliche Diskussionsbereitschaft und seine wertvollen Hinweise wäre die Entstehung dieser Arbeit nicht möglich gewesen. Ein besonderer Dank gilt auch Frau v. Maydell, die die handschriftliche Textvorlage in Maschinenschrift übertrug.

Literatur

- /1/ W.H. Isay:  
Kavitation; Schiffahrts-Verlag "Hansa", C. Schroedter & Co. Hamburg (1981)
- /2/ T. Hanaoka:  
Linearized theory of cavity flow past a hydrofoil of arbitrary shape; Selected papers from the Journal of the Soc. of Nav. Architects of Japan Vol. 3 (1963)
- /3/ K.J. Chao:  
Beiträge zur Berechnung von Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern; IfS-Bericht Nr. 369 (1978)
- /4/ P. Alwardt; W.H. Isay:  
Zur Behandlung von Teilkavitation an Flügeln mit Methoden der Profiltheorie; IfS-Bericht Nr. 399 (1980)
- /5/ W. Schmeidler:  
Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik; Leipzig 1950
- /6/ T. Nishiyama; J. Ito:  
Linearized theory of partially cavitated hydrofoils by singularity method; Techn. Report of the Tohoku University Vol. 42 (1977)
- /7/ H. Gasau:  
Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen; IfS-Bericht Nr. 428 (1983)
- /8/ N. Westphal:  
Keimverteilungsmessungen mit dem Laserstreulichtverfahren bei Tragflügel- und Propellerströmungen; IfS-Bericht Nr. 408 (1981)

ANHANG

a) Umformung der Gleichung (11) in die Darstellung (13)

Ausgehend von der Substitution

$$\sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} = b(1+z') \quad ; \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A+c_E}{A-c_E}}$$

sowie

$$\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} = b(1+z)$$

errechnet man zunächst

$$-\frac{\xi}{A} = \frac{1-b^2(1+z')^2}{1+b^2(1+z')^2} \quad ; \quad -\frac{x}{A} = \frac{1-b^2(1+z)^2}{1+b^2(1+z)^2}$$

Aus der Differenz  $x-\xi$  wird ein etwas komplizierter Ausdruck :

$$\frac{x-\xi}{A} = \frac{2b^2[(1+z)+(1+z')][z-z']}{(1+b^2(1+z)^2)(1+b^2(1+z')^2)}$$

Außerdem ist  $d\xi$  zu ersetzen durch

$$d\xi = \frac{d\xi}{dz'} dz' = \frac{4b^2 A (z'+1)}{(1+b^2(z'+1)^2)^2} dz'$$

Zusammenfassend ist also

$$\frac{1}{x-\xi} d\xi = \frac{2(1+b^2(z'+1)^2)(z'+1)}{(1+b^2(z'+1)^2)[2+z'+z]} \cdot \frac{dz'}{[z-z']}$$

b) Herleitung der Integralformeln (19a) - (23b)

Der Beweis aller Integralformeln geschieht mit Hilfe der Residuen-Methode. Die Ausgangsintegrale sind so umzuformen, daß sie sich als Ringintegral über eine analytische Funktion einer komplexen Variablen  $z$  darstellen lassen. Da Residuen von Polstellen bis zur 3. Ordnung auszuwerten sind, werden nur deren Werte angegeben, ohne auf die Durchführung der Berechnung weiter einzugehen (die Rechnung ist zum Teil sehr länglich). Ein großer Teil der Integrale (19a) - (23b) ist bereits von Alwardt und Isay berechnet worden /4/.

Zunächst soll die Auswertung der Integrale

$$I_n^3 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cot \frac{\psi}{2}\right)^{3/2} \frac{\sin \psi \cos^n \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi \quad ; \quad n = 0, 1, 2$$

und

$$I_n^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cot \frac{\psi}{2}\right)^{1/2} \frac{\sin \psi \cos^n \psi}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi \quad ; \quad n = 0, 1, 2$$

skizziert werden.

Mit Hilfe der Substitutionen

$$x^4 = \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \psi} \quad ; \quad \rho^4 = \frac{1 + \cos \psi_0}{1 - \cos \psi_0}$$

erhält man zunächst

$$I_n^3 = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \cos \psi_0} \int_0^\infty \frac{x^6}{(x^4 - \rho^4)(1 + x^4)} \left(\frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}\right)^n dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2$$

$$I_n^1 = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \cos \psi_0} \int_0^\infty \frac{x^4}{(x^4 - \rho^4)(1 + x^4)} \left(\frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}\right)^n dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2 .$$

$I_n^3$  und  $I_n^1$  sind mit folgenden Ringintegralen identisch:

$$I_n^3 = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1+i} \frac{1}{1-\cos\psi_0} \oint_{(IQ)} \frac{z^6 (z^4-1)^n}{(z^4-\rho^4)(1+z^4)^{n+1}} dz$$

$$I_n^1 = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\cos\psi_0} \oint_{(IQ)} \frac{z^4 (z^4-1)^n}{(z^4-\rho^4)(1+z^4)^{n+1}} dz .$$

(IQ) steht dabei für die Integration über den ersten Quadranten der komplexen  $z$ -Ebene. In beiden Fällen liegen auf dem Integrationsweg bei  $z = i\rho$  und  $z = \rho$  Polstellen 1. Ordnung. Weiter besitzen beide Integranden eine Polstelle  $(n+1)$ -ter Ordnung an der Stelle

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

Betrachtet man zunächst  $I_n^3$  und bezeichnet

$$\frac{z^6 (z^4-1)^n}{(z^4-\rho^4)(1+z^4)^{n+1}}$$

mit  $f_n(z)$ , so berechnen sich die Residuen dieser Funktion zu

$$\begin{aligned} \text{Res. } f_n(z)_{z=i\rho} + \text{Res. } f_n(z)_{z=\rho} &= \\ &= \frac{1}{8} (1-\cos\psi_0) \left(\cos\frac{\psi_0}{2}\right)^{3/2} \cos^n\psi_0 \cdot (1-i) \end{aligned}$$

$$\text{Res. } f_n(z)_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \begin{cases} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \frac{1}{8} (1-\cos\psi_0) & ; n=0 \\ \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \frac{1}{16} (1-\cos\psi_0) (3+2\cos\psi_0) & ; n=1 \\ \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \frac{1}{16} (1-\cos\psi_0) \left\{ \frac{9}{4} + 3\cos\psi_0 + 2\cos^2\psi_0 \right\} & ; n=2 \end{cases} .$$

Mit

$$I_n^3 = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1+i} \frac{1}{1-\cos\psi_0} 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} (\text{Res. } f_n(z)_{z=i\rho} + \text{Res. } f_n(z)_{z=\rho}) + \text{Res. } f_n(z)_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} \right\}$$

gelangt man zu dem Resultat aus (19a) - (19c). Der Faktor  $1/2$  tritt bei den Polstellen auf, die auf dem Integrationsweg liegen.

Zur Berechnung von  $I_n^1$  wird der Integrand mit  $g_n(z)$  abgekürzt:

$$g_n(z) = \frac{z^4 (z^4 - 1)^n}{(z^4 - j^4)(1 + z^4)^{n+1}} .$$

Die Werte der Residuen lauten hier

$$\begin{aligned} \text{Res. } g_n(z)_{z=ij} + \text{Res. } g_n(z)_{z=j} &= \\ &= (1+i) \frac{1}{8} (1 - \cos \psi_0) \left( \cot \frac{\psi_0}{2} \right)^{1/2} \cos^n \psi_0 \end{aligned}$$

$$\text{Res. } g_n(z)_{z=e^{i\pi/4}} = \begin{cases} -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{1}{8} (1 - \cos \psi_0) & ; n=0 \\ -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{1}{16} (1 - \cos \psi_0) (1 + 2 \cos \psi_0) & ; n=1 \\ -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{1}{16} (1 - \cos \psi_0) \left\{ \frac{1}{4} + \cos \psi_0 + 2 \cos^2 \psi_0 \right\} & ; n=2 . \end{cases}$$

Das Aufsummieren der Residuen führt schließlich auf die Integrale (20a) - (20c).

Die Integralformeln (21a) und (21b) erhält man leicht aus dem Standardintegral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\psi)}{\cos \psi - \cos \psi_0} d\psi = \frac{\sin(n\psi)}{\sin \psi} ; n=0,1,\dots .$$

Die Integrale (22a-b) erweisen sich mit

$$\sin 2\psi \cot \frac{\psi}{2} = 2 \cos \psi (1 + \cos \psi)$$

$$\sin \psi \cot \frac{\psi}{2} = (1 + \cos \psi)$$

als Kombination von  $I_2^1$  und  $I_1^1$  bzw.  $I_1^1$  und  $I_0^1$  .

Ebenso kann man zeigen, daß sich (23a) - (23b) aus einer Kombination von  $I_2^1$  und  $I_1^1$  bzw.  $I_1^1$  und  $I_0^1$  ergeben, wenn noch

$$\cot_g^{-1}\left(\frac{\psi}{2}\right) = \cot_g\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right)$$

berücksichtigt wird und eine Substitution  $\pi - \psi = \psi'$  erfolgt.

c) Berechnung der Integrale (30) und (31a-b)

Die Integrale (30) und (31a-b) basieren auf der Formel

$$J_\lambda^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau \, d\tau}{(2 - \cos \tau - \cos b)(\cos \tau - \cos b)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cos b} \left( \frac{\sin \lambda b}{\sin b} + \frac{e^{-\lambda \phi}}{\sinh \phi} \right)$$

$$\lambda = 0, 1, 2, \dots$$

$$\cosh \phi = 2 - \cos b$$

Zum Beweis dieser Formel ist  $J_\lambda^0$  in ein Integral über dem Einheitskreis der komplexen Ebene umzuformen. Auf dem Einheitskreis  $|z|=1$  ist mit

$$z = e^{i\tau}$$

der Nenner

$$(2 - \cos \tau - \cos b)(\cos b - \cos \tau)$$

identisch mit

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{z} (z - e^\phi)(z - e^{-\phi}) \frac{1}{2} \frac{1}{z} (z - e^{ib})(z - e^{-ib}) ; \quad \cosh \phi = 2 - \cos b.$$

Man erhält so die Darstellung

$$J_\lambda^0 = \frac{2i}{\pi} \oint_{(EK)} \frac{z^{\lambda+1}}{(z - e^{ib})(z - e^{-ib})(z - e^\phi)(z - e^{-\phi})} dz$$

Da  $\phi > 0$  vorausgesetzt ist, sind nur die 3 Residuen an den Stellen

$$z = e^{i\phi}, \quad z = e^{-i\phi}, \quad z = e^{-\phi}$$

zur Auswertung von  $J_\lambda^0$  mit Hilfe der Residuenmethoden heranzuziehen. Auf eine ausführliche Berechnung der Residuen soll verzichtet werden. Das Integral

$$J_\lambda^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau (1 - \cos \tau)}{(2 - \cos \tau - \cos \phi)(\cos \tau - \cos \phi)} d\tau$$

errechnet sich für  $\lambda \geq 1$  aus  $J_\lambda^0$  mit Hilfe der Formel

$$\cos \lambda \tau \cos \tau = \frac{1}{2} [\cos(\lambda-1)\tau + \cos(\lambda+1)\tau] .$$

Die Anwendung dieser Formel ergibt zunächst einen recht länglichen Ausdruck, der sich aber unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned} \sin \lambda \phi - \frac{1}{2} \sin(\lambda-1)\phi - \frac{1}{2} \sin(\lambda+1)\phi &= (1 - \cos \phi) \sin \lambda \phi \\ e^{-\lambda\phi} - \frac{1}{2} e^{-(\lambda-1)\phi} - \frac{1}{2} e^{-(\lambda+1)\phi} &= e^{-\lambda\phi} (\cos \phi - 1) \end{aligned}$$

schnell zu einem übersichtlichen Term reduziert. Falls  $\lambda=0$  ist, wird  $J_\lambda^1$  sofort aus  $J_0^0, J_1^0$  bestimmt. Sowohl für  $\lambda \geq 1$  als auch im Falle  $\lambda=0$  lautet das Ergebnis

$$J_\lambda^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \lambda \phi}{\sin \phi} - \frac{e^{-\lambda\phi}}{\sinh \phi} \right\} ; \quad \cosh \phi = 2 - \cos \phi .$$

Das Integral

$$J_\lambda^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau (1 - \cos \tau)^2}{(2 - \cos \tau - \cos \phi)(\cos \tau - \cos \phi)} d\tau ; \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots$$

ergibt sich aus  $J_{\lambda}^1$  unter Verwendung von

$$(1 - \cos \tau)^2 = (1 - \cos \tau) - \cos \tau (1 - \cos \tau)$$

und

$$\cos \lambda \tau \cos \tau = \frac{1}{2} \{ \cos (\lambda-1) \tau + \cos (\lambda+1) \tau \} .$$

Ist  $\lambda=0$  , so wird (ebenfalls mit Hilfe von  $J_{\lambda}^1$  ) ausgewertet :

$$\begin{aligned} J_0^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos \tau) - \cos \tau (1 - \cos \tau)}{(2 - \cos \tau - \cos 2\tau)(\cos \tau - \cos 2\tau)} d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sinh \phi} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{-\phi}}{\sinh \phi} \right) . \end{aligned}$$

 Kavitationsschicht

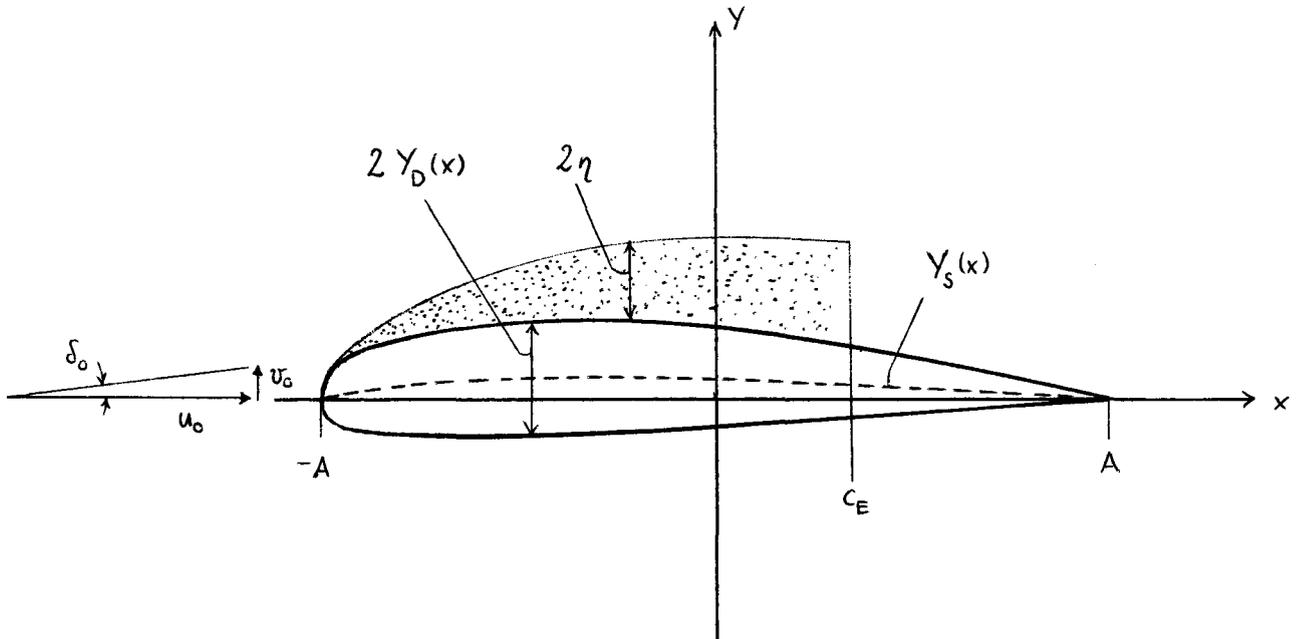


Abb. 1 Bezeichnungen am Profil

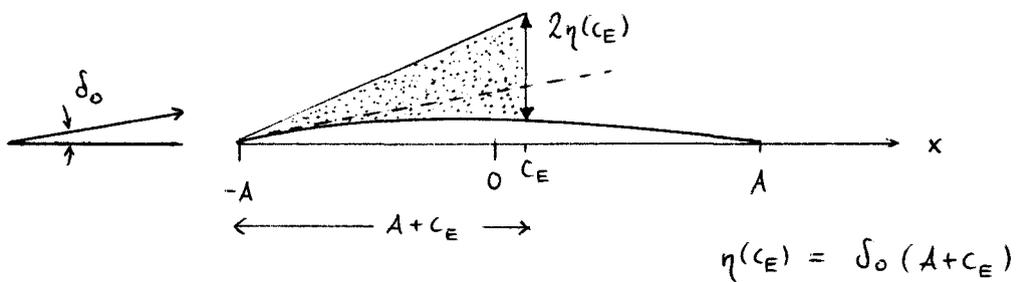


Abb. 2 Die Nishiyama - Bedingung

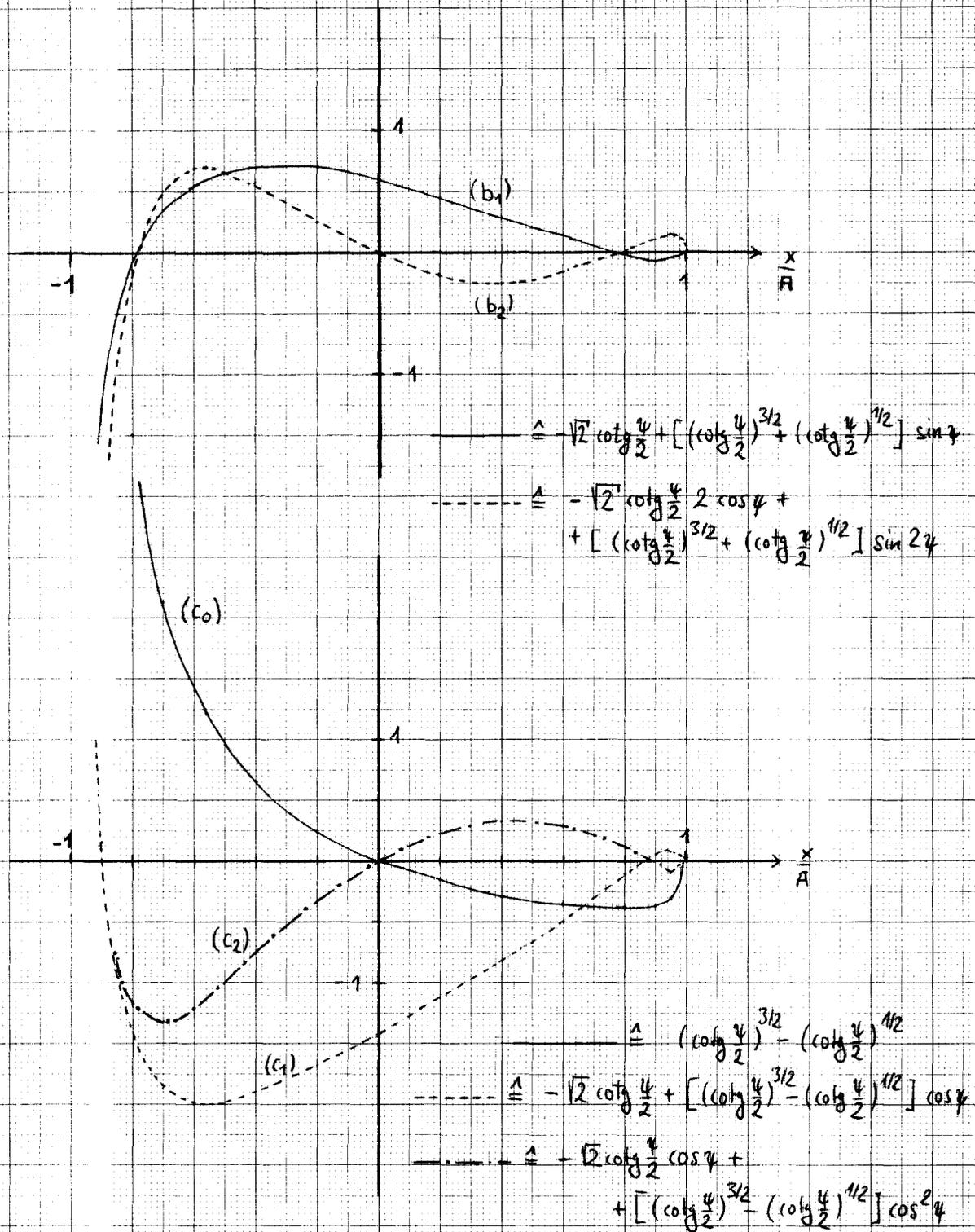


Abb. 3 Beiträge der Reihenglieder des Lösungsansatzes (17) zur Wirbeldichte  $\gamma_\eta$ .  $x = -A \cos \psi$ .

$\frac{v_w}{\delta_0}$

NACA 0015 KLEIN  $\delta_0 = 6^\circ$

----- Theorie nach Alwardt und Isay

• Experiment mit Streuung nach Westphal

~~~~~ abgelöste Wirbelkavitation

10

5

0,2

0,4

0,6

0,8

1

$\frac{c_E + A}{2A}$

Abb. 4

$v_w/\delta_0$  in Abhängigkeit vom Ende der Kavitationsschicht  $c_E$





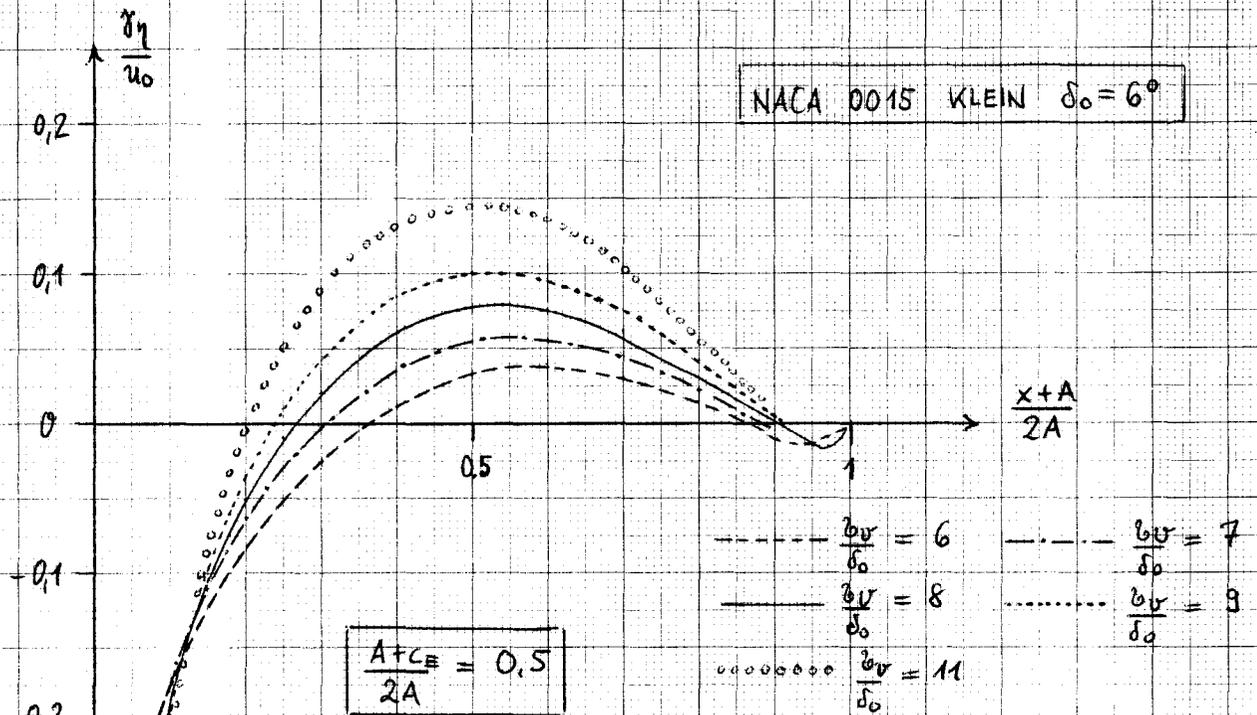


Abb. 7 Variation der Lösung für  $\gamma_1$  durch Vorgabe verschiedener Dampfdruckbeiwerte  $b_V$  bei konstantem  $(A+C_E)/2A = 0,5$

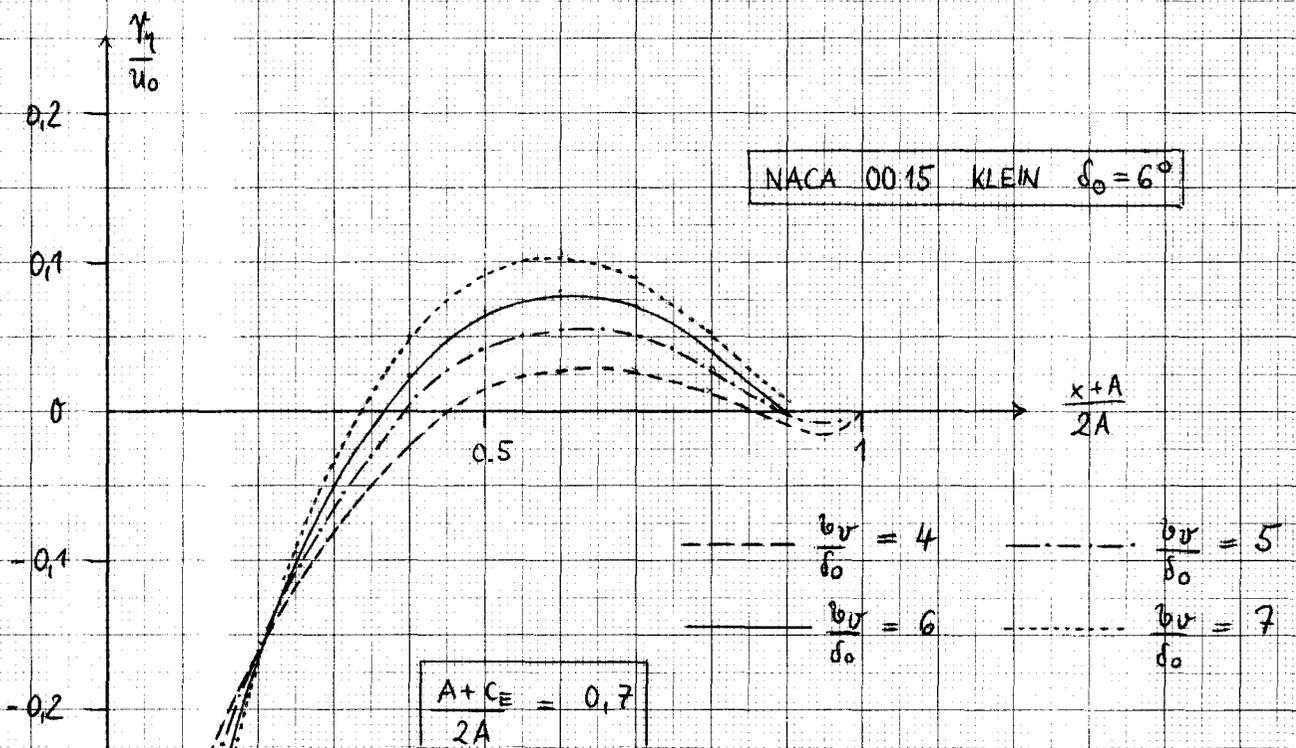


Abb. 8 Variation der Lösung für  $\gamma_1$  durch Vorgabe verschiedener  $b_V$  bei konstantem  $(A+C_E)/2A = 0,7$

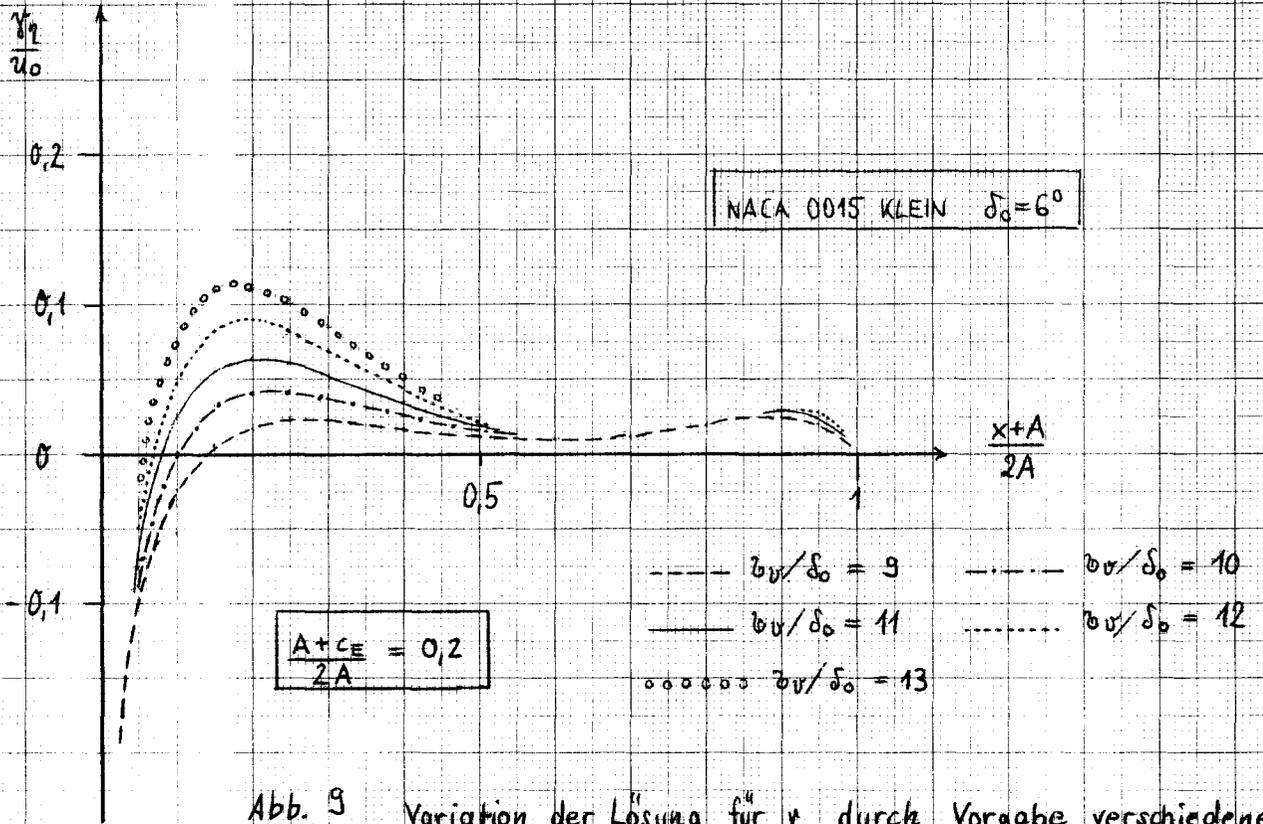


Abb. 9 Variation der Lösung für  $u_1$  durch Vorgabe verschiedener Dampfdruckbeiwerte  $b_v$  bei konstantem  $(A+c_E)/2A = 0,2$

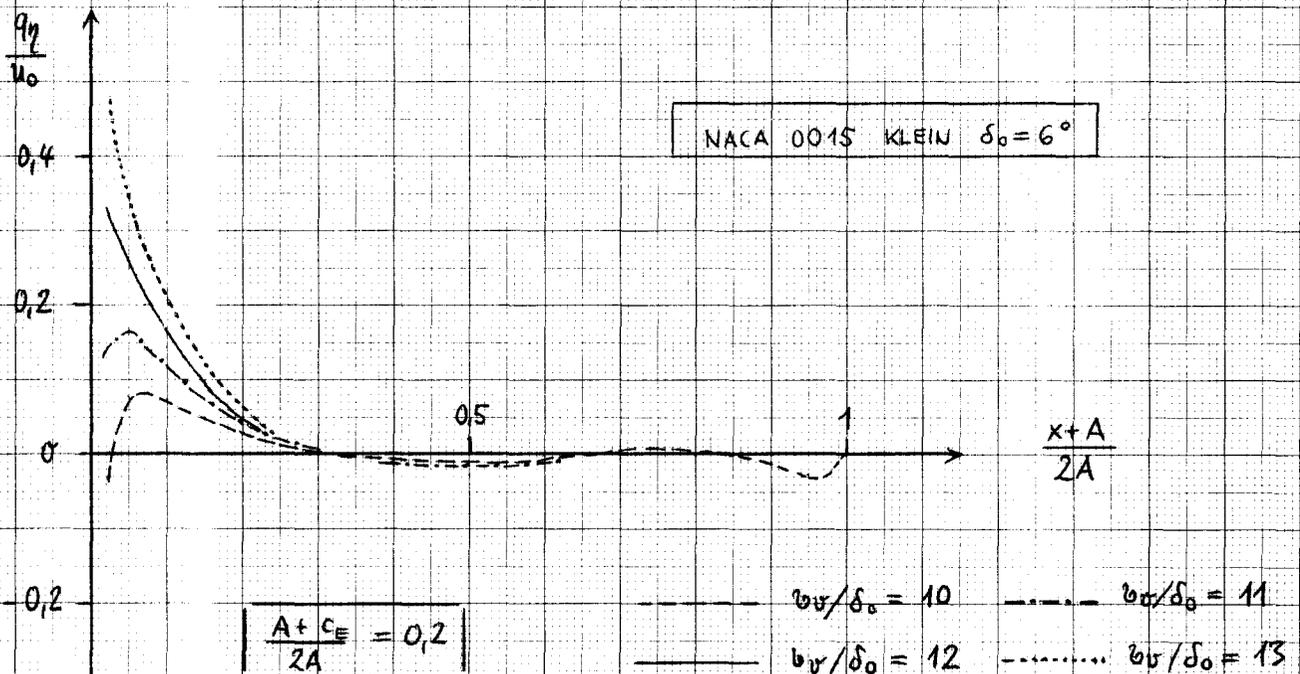


Abb. 10 Variation der Lösung für  $q_1$  durch Vorgabe verschiedener  $b_v$  bei konstantem  $(A+c_E)/2A = 0,2$

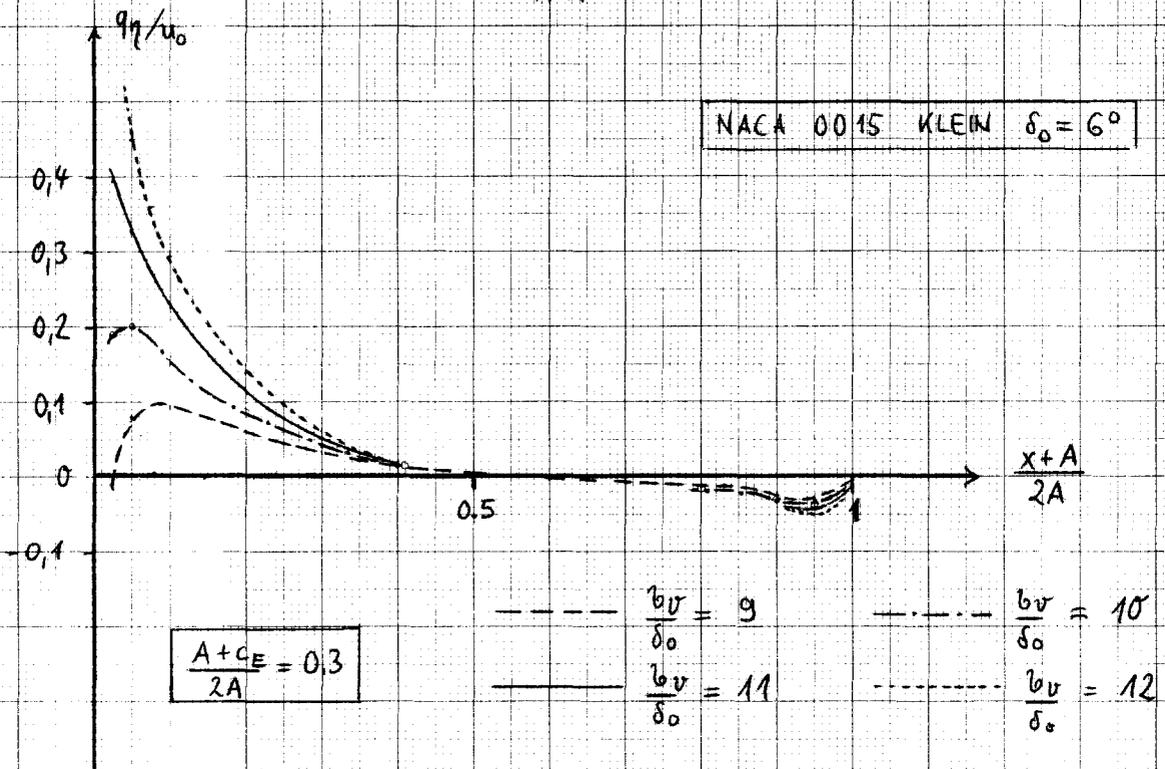


Abb. 11 Variation der Lösung für  $q_\eta$  durch Vorgabe verschiedener  $b_V$  bei konstantem  $(A+c_E)/2A = 0,3$

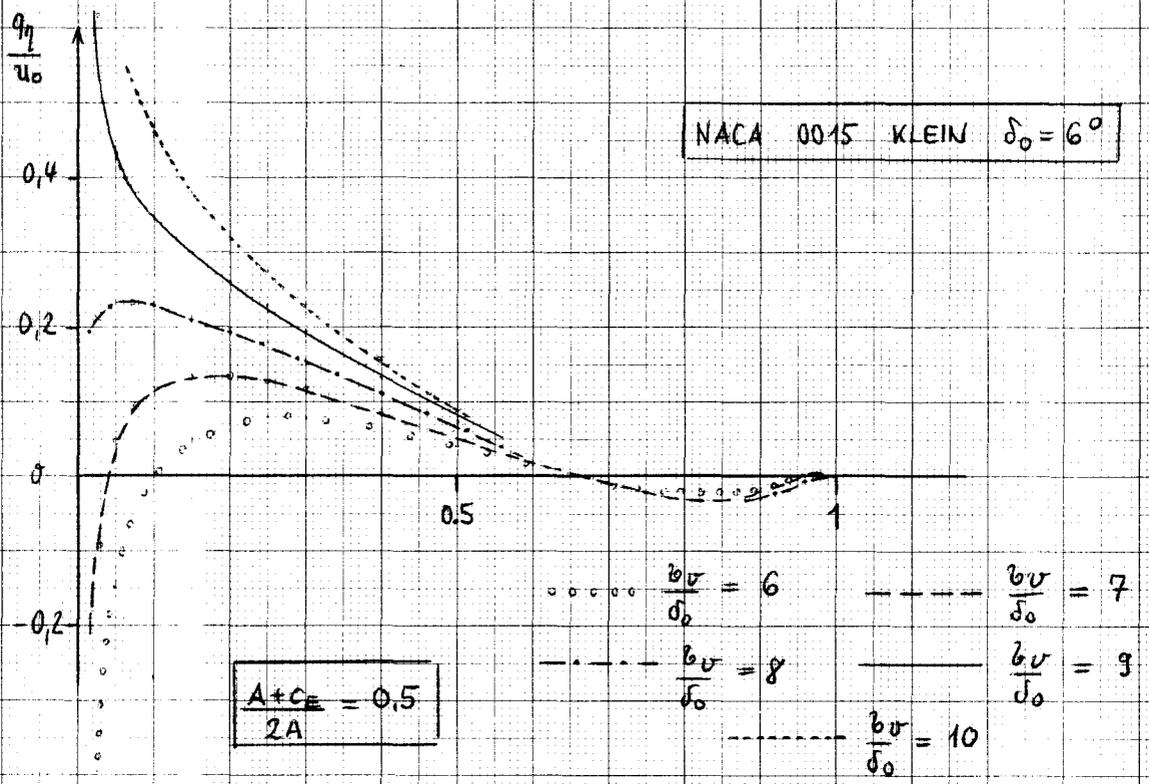


Abb. 12 Variation der Lösung für  $q_\eta$  durch Vorgabe verschiedener  $b_V$  bei konstantem  $(A+c_E)/2A = 0,5$



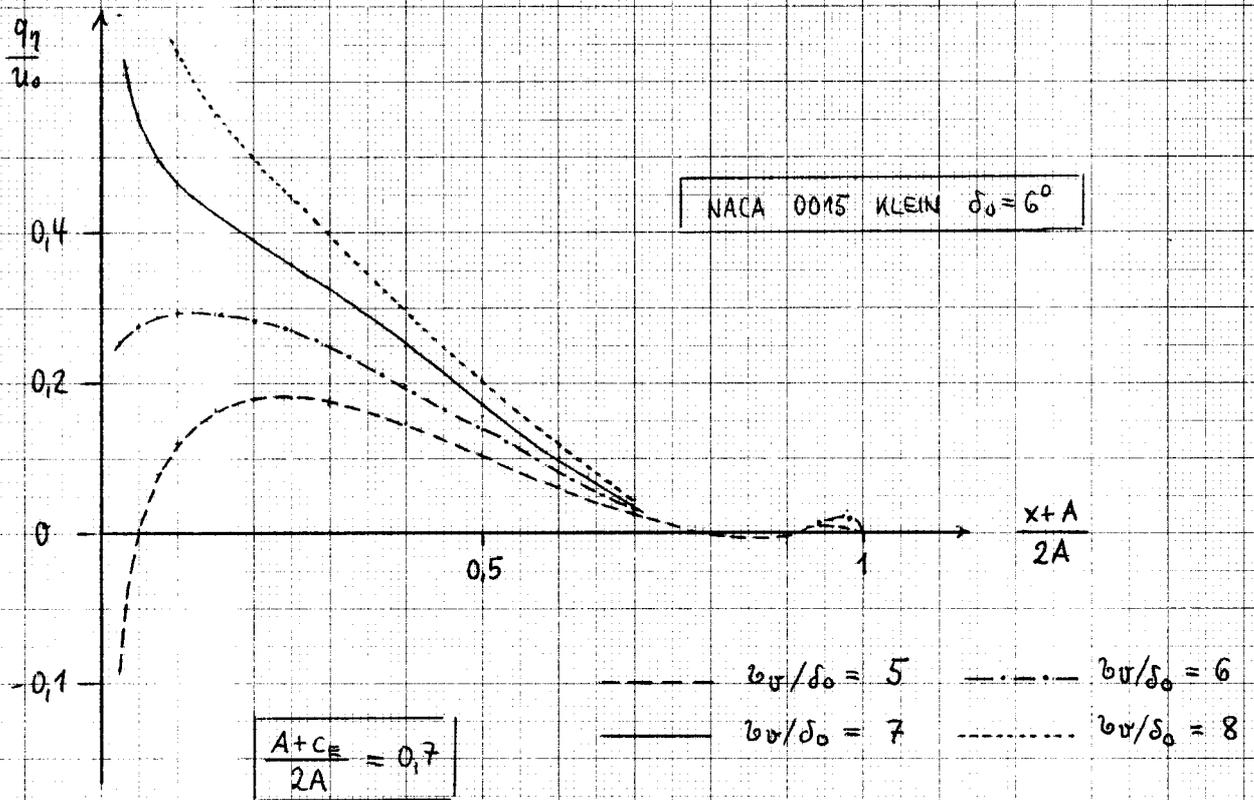


Abb. 13 Variation der Lösung für  $q_\eta$  durch Vorgabe verschiedener  $b_v$  bei konstantem  $(A+c_E)/2A = 0,7$

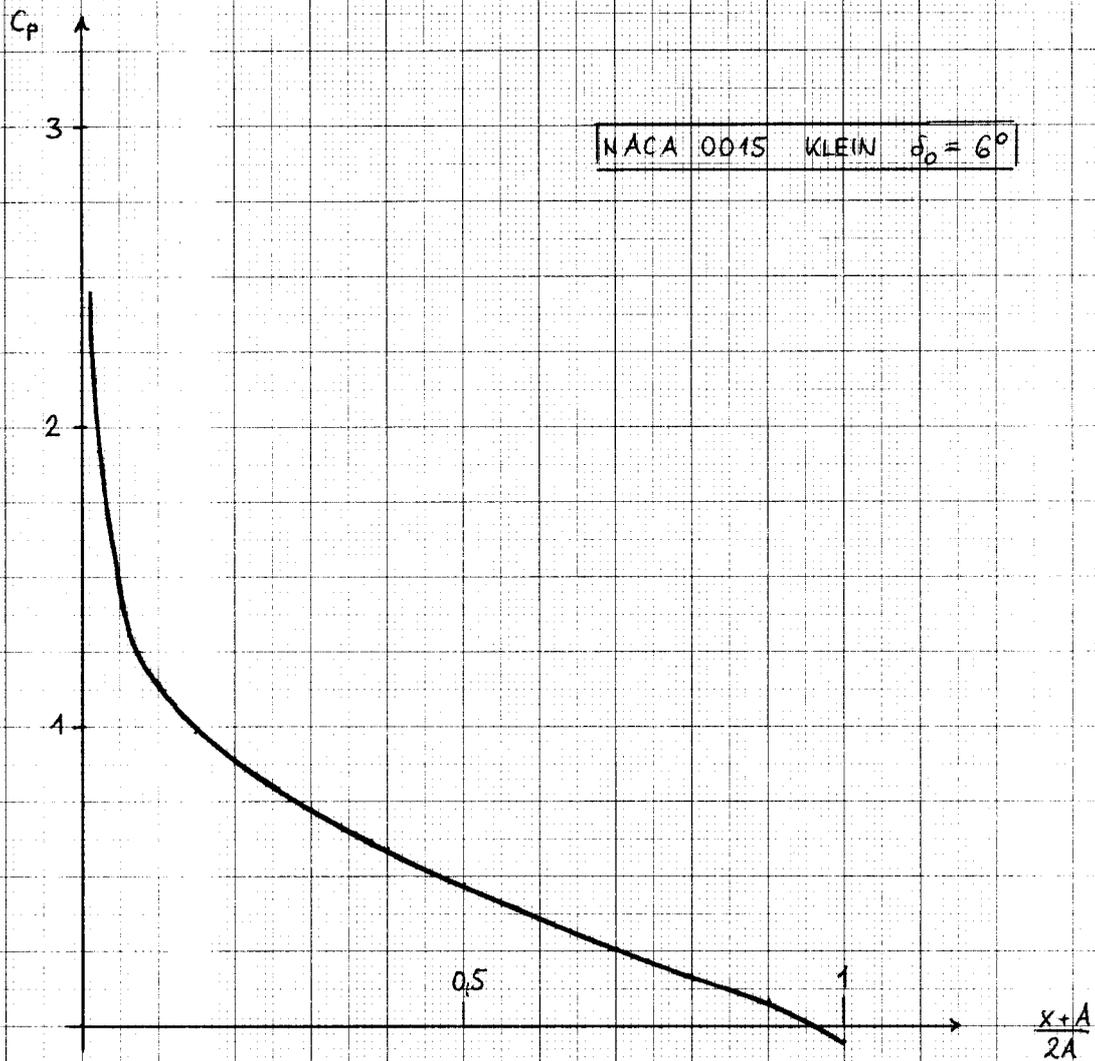


Abb. 14 Druckverteilung ohne Kavitation, streng nach der linearen Theorie berechnet  $C_p = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}$  (p ist der Druck auf der Saugseite).