510 | August 1990

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Odo Krappinger

Kapazitätsplanung bei zufälligem Auftragseingang und -umfang

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Kapazitätsplanung bei zufälligem Auftragseingang und -umfang

Odo Krappinger, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1990

ISBN: 3-89220-510-8

Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 510

Kapazitätsplanung bei zufälligem Auftragseingang und -umfang

von

Odo Krappinger

August 1990

1. Einführung

Bei vielen Dienstleistungsunternehmen sind sowohl die Zeitpunkte der Auftragseingänge als auch der Umfang der einzelnen Aufträge zufällig. Außerdem muß die Bearbeitung der Aufträge möglichst umgehend nach ihrer Erteilung begonnen werden. Als typisches Beispiel seien die Verhältnisse in einer kommerziell betriebenen Schiffbau-Versuchsanstalt erwähnt: Die Aufträge werden in unregelmäßigen, nicht vorhersehbaren Abständen erteilt und sind von recht unterschiedlichem Umfang. Hinzu kommt, daß die Abwicklung auch größerer Aufträge selten determiniert geplant werden kann. Von den meist nicht vorhersehbaren Ergebnissen der ersten Widerstands- und Propulsionsversuche hängt es ab, ob Modelländerungen notwendig werden; diese können geringfügig oder auch recht umfangreich sein (z.B. Auftragen von Knetmasse oder Herstellen eines neuen Vor- oder Hinterschiffes.) Damit sind die Termine für den Beginn der folgenden Programmschritte zunächst offen. Sie können aber auch deshalb unbestimmt sein, weil der Auftraggeber technische Details erst längere Zeit nach der Auftragserteilung liefert. Wenn dann zu einem zufälligen Zeitpunkt alle Voraussetzungen für einen weiteren Programmschritt erfüllt sind, erwartet der Auftraggeber, daß die Arbeiten möglichst ohne längere Unterbrechung fortgesetzt werden. Im Zusammenhang mit der Kapazitätsplanung sind deshalb häufig Teile eines größeren Auftrags wie eigenständige Aufträge mit zufälligem Beginn und Umfang zu behandeln.

Die Schwierigkeiten einer rationalen Erfassung der Zusammenhänge liegen nicht nur in der Berücksichtigung der Zufallseinflüsse. Die vorgehaltene Kapazität beeinflußt neben den Kosten auch die möglichen Liefertermine. Lange Lieferfristen (oder der Zwang, angefragte Aufträge wegen Kapazitätsmangels gar ablehnen zu müssen) sind langfristig für die wirtschaftliche Situation der Firma ebenso nachteilig wie hohe Kosten.

Im folgenden werden einige Modelle vorgestellt, mit denen in der Wirklichkeit auftretende Situationen zumindest tendenziell erfaßt werden können. Ihr Nutzen ist darin zu sehen, daß damit aufgezeigt werden kann, wie wenig sinnvoll es ist, Verfahren der Kapazitätsplanung der Investitionsgüterindustrie, wo die eigentliche Auftragsabwicklung erst nach einer längeren Vorlaufzeit beginnt, auch für bestimmte Dienstleistungsunternehmen anzuwenden.

2. Kapazitätsmodell I

Je Zeiteinheit (z.B. Quartal, Halbjahr etc.) wird die Abarbeitung von x Aufträgen nachgefragt. Die Zahl x ist eine diskrete Zufallsvariable. Zur Vereinfachung der Rechnungen werden die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten bestimmter x-Werte zu einer Verteilungsdichte f(x) "verschmiert" (Bild 1a). Die mittlere Zahl der je Zeiteinheit nachgefragten Aufträge ist $\bar{x}$.

Angesichts der Streuung von x stellt sich die Frage, welche Kapazität C zur Abarbeitung der Aufträge vorgehalten werden soll. Dabei wird angenommen, daß je Zeiteinheit höchstens C Aufträge abgearbeitet werden können. Fallen mehr als C Aufträge an (d.h. $x > C$), muß die Annahme von $(x-C)$ Aufträgen abgelehnt werden. Es liegt nahe, als günstigste Kapazität C_{opt} die anzunehmen, für die die Erwartung des Überschusses G der Einnahmen E über die durch das Vorhalten einer bestimmten Kapazität C entstehenden Kosten K ein Maximum annimmt. Die Einnahmen E werden proportional der Zahl der abgearbeiteten Aufträge x, die Kosten proportional der Kapazität C angesetzt (siehe Bild 1b). Mit $K = k.C$ und $E = e.x$ für $x < C$ und $E = e.C$ für $x > C$ wird der Erwartungswert von $G = E - K$:[x)]

---

x) Der Ansatz für die Kosten $K = k.C$ impliziert, daß kapazitätsunabhängige Gemeinkosten nicht berücksichtigt werden. Der Einnahmeüberschuß G ist deshalb nicht als Gewinn zu interpretieren. Der Faktor e steht für den am Markt erzielbaren Preis pro Auftrag.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a} \\ F(x) &= \frac{1}{a}\left(x + \frac{a}{2} - 1\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{für } 1 - \frac{a}{2} \leq x \leq 1 + \frac{a}{2} \\ &0 \leq a \leq 2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{sonst.}$$

$$F(x) = 0 \qquad \text{für } x < 1 - \frac{a}{2}$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{für } x > 1 + \frac{a}{2}$$

Damit wird die Erwartung des Einnahmeüberschusses G nach Gleichung (2.1):

$$E[G] = \frac{((2+a)e - 2ak)C - eC^2 - (1 - a + 0{,}25a^2)e}{2a} \tag{2.6}$$

Aus Gleichung (2.3) ergibt sich für die optimale Kapazität

$$C_{opt} = 1 + 0.5a - ak/e \tag{2.7}$$

Mit der mittleren Zahl der angenommenen Aufträge (siehe Gl. (2.4))

$$\bar{z} = \int_{1-\frac{a}{2}}^{C} x \frac{1}{a}\, dx + C \int_{C}^{1+\frac{a}{2}} \frac{1}{a}\, dx \qquad (2.8)^{x)}$$

wird der Ausnutzungsgrad

$$u = 1/2 + 1/a - C/2a - 1/2aC - a/8C + 1/2C \qquad (2.9)^{x)}$$

Für die in Bild 2 gezeigten Verteilungen sowie für den determinierten Fall x=1 (d.h. a=0) wurden die Erwartungswerte der Einnahmeüberschüsse E[G], die Ausnutzungsgrade u und die Wahrscheinlichkeiten W, daß Aufträge abgelehnt werden für e=3 und k=2 Geldeinheiten (GE) berechnet und in Bild 3 als Funktion von C dargestellt.

---

x) Die Gleichungen gelten für $C \leq 1+a/2$

Zunächst wird der Fall mit der größten Streuung von x betrachtet (a=2). Wird die Kapazität C so ausgelegt, daß die größte vorkommende Zahl von Aufträgen angenommen werden kann, so führt dies zu einem Verlust von 1GE. Der Ausnutzungsgrad ist dabei 0.5. Das optimale Ergebnis $E[G] = 0.33$ GE erhält man für eine Kapazität $C_{opt} = 0.67$. Der dazugehörende Ausnutzungsgrad ist u = 0.833. Eine weitere Verminderung der Kapazität führt zwar zu größeren Ausnutzungsgraden u, gleichzeitig aber zu einem Rückgang der Ergebnisse $E[G]$.

Für den Fall a=1 erhält man für eine für alle vorkommenden Aufträge x ausreichende Kapazität C das Ergebnis $E[G] = 0$ GE. Der Ausnutzungsgrad ist dabei u = 0.67. Die optimale Kapazität ist auch hier kleiner als die mittlere Zahl $\bar{x}$ von Aufträgen: Für $C_{opt} = 0.83$ erhält man $E[G] = 0.67$ GE. Der Ausnutzungsgrad ist dabei u = 0.93.

Für a = 0.5 liegt das optimale Ergebnis $E[G] = 0.83$ GE, das bei einer Kapazität $C_{opt} = 0.917$ erreicht wird, schon recht nahe dem Ergebnis für den determinierten Fall mit $E[G] = G = 1$. Auch hier würde das Streben nach einer weiteren Verbesserung des Ausnutzungsgrades das Ergebnis verschlechtern.

In allen Fällen, in denen die Zahl der Aufträge zufallsabhängig schwankt, ist bei Wahl der optimalen Kapazität die Wahrscheinlichkeit, daß Aufträge wegen zu geringer Kapazität abgelehnt werden müssen W = 0.67. Optimalwerte, die bedingen, daß von drei angebotenen Aufträgen zwei abgelehnt werden müssen, scheinen etwas wirklichkeitsfremd. Für eine bessere Anpassung an die Wirklichkeit gibt es zwei Möglichkeiten: Wenn auch die Konkurrenz nur sehr knappe Kapazitäten vorhält wird es sicher möglich sein, den Preis für die Auftragsausführung e zu erhöhen. Dies führt gemäß Gleichung (2.7) zu größeren optimalen Kapazitäten und wegen Gleichung (2.3) zu kleineren Wahrscheinlichkeiten W für die Ablehnung von Aufträgen. Bild 4 zeigt für den Fall a=1 die optimalen Kapazitäten C_{opt}, die zu diesen gehörenden Erwartungen der Einnahmenüberschüsse $E[G]$, die Auslastungsgrade u und die Wahrscheinlichkeiten W in Abhängigkeit von e. Es ist interessant, daß die Verbesserung der Einnahmesituation einhergeht mit der Verschlechterung der Auslastung.

Wenn die Konkurrenzsituation eine Preiserhöhung nicht erlaubt (dies impliziert, daß die Kapazitäten am Markt nicht zu knapp sind), kann man folgende Überlegung anstellen: Der hohe Anteil von Aufträgen, die nicht angenommen werden können, führt längerfristig dazu, daß potentielle Kunden abwandern. Damit ändert sich die Verteilung von x; ihr Mittelwert $\bar{x}$ wird abnehmen. Die mit der neuen Verteilung berechneten "optimalen" Kapazitäten werden kleiner, was wiederum zum Abwandern von Kunden führt usw. Die konsequente Anwendung des oben beschriebenen Modells zur "Optimierung" der Kapazität führt also langfristig zu einem Ausstieg aus dem Markt (wobei der Auslastungsgrad sich dem Wert 1 immer mehr nähern würde). Dieser Mangel des Modells läßt sich beheben, wenn man für die mit dem Ablehnen von Aufträgen verbundenen Nachteile fiktive Kosten M einführt. Es liegt nahe, diese Kosten proportional der Zahl abgelehnter Aufträge (x-C) anzusetzen:

$$\begin{aligned} M &= m.(x-C) \qquad &&\text{für } x-C > 0 \\ &= 0 &&\text{sonst.} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die Erwartung dieser Kosten

$$\begin{aligned} E[M] &= \int_C^\infty m.x.f(x)\,dx - \int_C^\infty m.C.f(x)\,dx = \\ m.\bar{x} &- \int_0^C m.x.f(x)\,dx - (1-F(C)).m.C \end{aligned} \tag{2.11}$$

ist vom Erwartungswert der Einnahmeüberschüsse $E[G]$ nach Gleichung (2.6) abzuziehen. Nullsetzen der Ableitung des so erweiterten Erwartungswertes führt zur Bestimmung der optimalen Kapazität C^*_{opt} auf die Beziehung

$$1 - F(C^*_{opt}) = \frac{k}{e + m} \tag{2.12}$$

Für die Optimierung der Kapazität wirken sich die fiktiven Kosten genau gleich aus wie eine ebenso große Erhöhung des Preises. Der zu C^*_{opt} gehörende Wert $E[G]$ ist allerdings mit $E[G]$ nach Gl. (2.6) zu berechnen. Er ist kleiner als $E[G]$ mit C_{opt} aus Gleichung (2.7). Auch die Auslastung wird geringer. Diese Nachteile müssen jedoch in Kauf genommen werden, um langfristig im Markt bestehen zu können.

3. Kapazitätsmodell II

In diesem und den folgenden Kapazitätsmodellen sollen die Auswirkungen unterschiedlicher Kapazität etwas eingehender als im Kapazitätsmodell I, jedoch in einem kleineren Rahmen, untersucht werden. Von der Kapazität hängen ja nicht nur Einnahmen und Kosten ab, sondern auch - bei zufälligem Auftragsanfall und zufälliger Bearbeitungsdauer der einzelnen Aufträge - die sich ergebenden zufälligen Wartezeiten zwischen Auftragseingang und Bearbeitungsbeginn. Diese Wartezeit wiederum kann verschiedene Konsequenzen haben: Eine denkbare Konsequenz wäre, daß auch lange Wartezeiten akzeptiert werden, aber nur dann, wenn wartezeitabhängige Preisnachlässe gewährt werden. Eine im Gegensatz dazu extreme Annahme wäre, daß Aufträge nur dann erteilt werden, wenn mit ihrer Bearbeitung sofort begonnen werden kann. Das bedeutet, daß an sich zu gewinnende Aufträge immer dann verloren gehen, wenn die vorhandene Kapazität voll ausgelastet ist. Zwischen diesen beiden Annahmen liegt der Fall, daß zwar relativ kurze Wartezeiten akzeptiert werden, daß aber längere Wartezeiten zum Verlust von Aufträgen führen.

Als Rahmen für die Untersuchungen wird angenommen, daß die mittlere Zahl möglicher Aufträge je Zeiteinheit (z.B. je Jahr) in einem Bereich liegt, in dem für ihre Abarbeitung eine oder zwei Bearbeitungsstellen infrage kommen. Die Bearbeitungsstellen können Sachbearbeiter oder Teams oder Arbeitsgeräte einschließlich Bedienung sein. Weiter wird angenommen, daß jeder Auftrag jeweils ausschließlich von einer Bearbeitungstelle ausgeführt wird. Dies ist eine für viele Fälle realistische Annahme. Eine Erweiterung der Modelle auf mehr als zwei Bearbeitungsstellen wäre zwar möglich. Da damit aber keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse erzielt werden würden, wird hier auf eine solche Erweiterung verzichtet (abgesehen von einem in Anhang 2 gebrachten Beispiel).

Die zufällige Zeit t zwischen zwei Auftragseingängen (bzw. Nachfragen) sei nach einer negativen Exponentialverteilung mit dem Mittelwert $\bar{t} = 1/\lambda$ (λ ist die mittlere Zahl von Aufträgen je Zeiteinheit) verteilt:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{3.1}$$

Die Bearbeitungsdauer s der Aufträge sei ebenfalls exponentialverteilt mit dem Mittel $\bar{s} = 1/\mu$ (μ ist die mittlere Zahl von Aufträgen, die je Zeiteinheit von einer Bearbeitungsstelle erledingt werden können):

$$f(s) = \mu e^{-\mu s} \tag{3.2}$$

Für das in diesem Abschnitt behandelte Modell wird vorausgesetzt, daß alle Aufträge unabhängig von den sich einstellenden Wartezeiten erteilt werden. (D.h. die Wahrscheinlichkeit W, daß Aufträge nicht erteilt werden, ist gleich Null). Die je Auftrag erzielbaren Einnahmen werden zunächst proportional der Bearbeitungszeit s angesetzt:

$$R_1 = e.s \tag{3.3}$$

Damit und mit der Verteilungsdichte (3.2) wird der Erwartungswert der Einnahmen je Auftrag

$$E[R_1] = \int_0^{\infty} e.s.f(s).ds = e/\mu \tag{3.4}$$

Bei im Mittel λ Aufträgen je Zeiteinheit ergibt sich für den Erwartungswert der Einnahmen je Zeiteinheit

$$E[R] = \lambda.E[R_1] = e.\varrho \tag{3.5}$$

wobei für $\lambda/\mu = \varrho$ gesetzt wurde.

Mit den von der Zahl n der Bearbeitungsstellen abhängenden Kosten K wird die Erwartung des Überschusses der Einnahmen über die Kosten

$$E[G] = E[R] - K \tag{3.6}$$

Der Erwartungswert $E[w]$ für die Wartezeit w vom Eingang eines Auftrages bis zum Beginn seiner Bearbeitung kann ebenso wie der Ausnutzungsgrad u mit Hilfe von Methoden der Warteschlangentheorie berechnet werden (siehe Anhang 1, Gl. (A1) bis (A3)).

Bild 5a zeigt die Erwartungswerte der Einnahmen $E[R]$ sowie der Einnahmenüberschüsse $E[G]$ in Abhängigkeit von $\varrho = \lambda/\mu$. Die Werte gelten für e = 1 und K = 0.05 + 0.2n. In Bild 5b sind die Ausnutzungsgrade u und die Erwartungen $E[w]$ der mit der mittleren Bearbeitungsdauer normierten Wartezeiten w über ϱ aufgetragen. Für den Vergleich des Falles einer Bearbeitungsstelle (n=1) mit dem von zwei Bearbeitungsstellen (n=2) ist der Bereich $\varrho \leq 1$ von Interesse. (Für den Bereich $1 < \varrho \leq 2$ könnten ähnliche Überlegungen für den Vergleich der Fälle n=2 und n=3 angestellt werden.) Aus Bild 5a ist ersichtlich, daß für $\varrho < 0.25$ der Erwartungswert $E[G]$ für n = 1 negativ wird. Das bedeutet, daß bei durch diese ϱ-Werte gekennzeichneten Auftragslagen bei den angenommenen Preisen und Kosten nicht kostendeckend gearbeitet werden kann. Mit wachsendem ϱ steigen die mittleren Einnahmenüberschüsse $E[G]$. Gleichzeitig steigen, wie Bild 5b zeigt, aber auch die mittleren Wartezeiten stark an. Für ϱ gegen eins streben sie sogar gegen unendlich. Praktisch wird man deshalb schon für ϱ-Werte unter eins auf die größere Kapazität (n=2) übergehen müssen, obwohl dadurch eine Verschlechterung der Ertragslage eintritt.

Bevor auf eine Möglichkeit zur Erweiterung des Modells hinsichtlich einer Berücksichtigung der Wartezeit eingegangen wird, sei noch auf eine Folge der Zufälligkeit von Auftragseingang und -umfang hingewiesen. Sowohl in dem Bereich, in dem die kleinere Kapazität wegen noch erträglichen Wartezeiten akzeptabel ist, als auch bei großen ϱ-Werten, wo eine Erhöhung der Kapazität zwecks Verminderung der Wartezeiten notwendig wird, muß man sich mit relativ kleinen Ausnutzungsgraden u abfinden. Der illusionäre Wunsch mancher "Praktiker", bei bestimmten, durch ϱ gekennzeichneten Auftragssituationen durch Erhöhung der Ausnutzung die Ertragslage zu verbessern, kann deshalb nur in die Irre, d.h. zu falschen Vorstellungen über die tatsächlichen Gegebenheiten führen.

Um bei dem oben beschriebenen Modell die Wartezeiten w zu berücksichtigen, wird angenommen, daß die erzielbaren Einnahmen mit zunehmender Wartezeit w abnehmen. Mit einer Reduktionsfunktion g(w), die von eins für w = 0 mit w abnimmt, wird die Erwartung der reduzierten Einnahmen

$$E^{*}[R] = (1-P_b)E[R] + \int_0^{\infty} E[R].g(w).f(w)dw \tag{3.7}$$

In dieser Gleichung bedeutet P_b die "Besetztwahrscheinlichkeit" (d.i. die Wahrscheinlichkeit, daß alle Bearbeitungsstellen beschäftigt sind) und f(w) die Verteilungsdichte der Wartezeiten (siehe Anhang 1, Gleichungen (A4) und (A5)). Es kann gezeigt werden, daß man bezüglich eines Wertes w^{*} (wobei $g(w^{*}) = 0.5$) schiefsymmetrische Funktionen g(w) mit guter Näherung durch eine Sprungfunktion

$$g(w) = 1 \quad \text{für } 0 < w \leq w^{*}$$

$$g(w) = 0 \quad \text{für } w > w^{*}$$

ersetzen kann. Damit erhält man anstelle von Gleichung (3.7) die einfachere Beziehung

$$E^{*}[R] = F(w^{*}).E[R] \tag{3.8}$$

F(w) ist die Verteilungsfunktion der Wartezeiten (siehe Anhang 2, Gleichung (A6)).

Bild 5c zeigt die reduzierten Einnahmeerwartungen für eine bzw. zwei Bearbeitungsstellen als Funktion von ϱ. Sie wurden für e = 1 und $w^{*} = 0.5$ berechnet. Für ϱ/n gegen 1 geht E[R] gegen Null. Dies bedeutet, daß bei sehr langen Wartezeiten praktisch keine Einnahmen mehr zu erzielen sind.

Der reduzierte Einnahmeüberschuß $E^{*}[G]$ (wie oben wurde mit Kosten K = 0.05 + 0.2n gerechnet) ist in Bild 5d dargestellt. Abgesehen vom Bereich sehr kleiner ϱ-Werte ist es sehr viel günstiger, zwei Bearbeitungsstellen statt einer vorzuhalten, obwohl dabei die Ausnutzungsgrade wesentlich kleiner sind.

4. Kapazitätsmodell III

Für dieses Modell wird angenommen, daß Aufträge nur dann erteilt werden, wenn mit ihrer Bearbeitung sofort begonnen werden kann. Wenn dies nicht der Fall ist, gehen die Aufträge verloren. Für die erteilten Aufträge ist die Wartezeit gleich Null.

Von λ nachgefragten Aufträgen kommen im Mittel nur

$$\bar{z} = \lambda.(1-W) \tag{4.1}$$

zur Ausführung. W ist dabei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag verlorengeht (siehe Anhang 1, Gleichung (A7) und (A8)). Die Erwartung der Einnahmen je Zeiteinheit wird damit

$$E[R] = e.\varrho.(1-W) \tag{4.2}$$

Für den Ausnutzungsgrad findet man mit Gleichung (4.1)

$$u = \frac{\varrho}{n}(1-W) \tag{4.3}$$

Bild 6a zeigt die Erwartungswerte der Einnahmen $E[R]$ sowie der Einnahmenüberschüsse $E[G]$. Auch hier gelten die Werte für $e = 1$ und Kosten $K = 0.05 + 0.2n$. In Bild 6b sind die Wahrscheinlichkeiten W, daß Aufträge verloren gehen und die Ausnutzungsgrade u aufgetragen. Man entnimmt dem Bild, daß bei zwei Bearbeitungsstellen die Einnahmeerwartungen $E[R]$ durchweg höher sind als bei einer. Abgesehen vom Fall sehr kleiner ϱ-Werte sind auch die Erwartungen der Einnahmeüberschüsse $E[G]$ bei zwei Bearbeitungsstellen wesentlich größer als bei einer. Die Wahrscheinlichkeiten W sind bei der größeren Kapazität wie zu erwarten deutlich geringer. Daß der Ausnutzungsgrad bei der kleineren Kapazität größer ist zeigt nur, daß dieser auch in diesem Fall nicht als Gütemaß geeignet ist.

Größere Wahrscheinlichkeiten, daß Aufträge verlorengehen, können in der Realität nicht zugelassen werden: Wenn Kunden zu häufig keine freie Kapazität vorfinden, werden sie abwandern. Das bedeutet, daß die mittlere Zahl λ von Anfragen im Laufe der Zeit abnehmen wird. Dies kann berücksichtigt werden, indem man ähnlich wie im Kapazitätsmodell I fiktive Kosten für verlorene Aufträge in Ansatz bringt. Setzt man für diese Kosten m mal die mittlere Einnahme, so werden die reduzierten Einnahmeerwartungen

$$E^{*}[R] = E[R] - \varrho . e . m . W \qquad (4.4)$$

Entsprechend findet man reduzierte mittlere Einnahmeüberschüsse

$$E^{*}[G] = E[G] - \varrho . e . m . W \qquad (4.5)$$

In Bild 6c bzw. d sind diese für m = 0.5 berechneten Erwartungswerte dargestellt. Man kann den Diagrammen entnehmen, daß die größere Kapazität für nahezu alle durch ϱ gekennzeichneten Auftragssituationen günstiger ist.

5. Kapazitätsmodell IV

Hier wird angenommen, daß nachgefragte Aufträge nur dann erteilt werden, wenn entweder sofort mit ihrer Bearbeitung begonnen werden kann oder wenn nur die restliche Abarbeitungszeit für einen Auftrag abgewartet werden muß. Auch hier besteht eine Wahrscheinlichkeit W dafür, daß ein nachgefragter Auftrag verlorengeht (siehe Anhang 2, Gleichungen (A7) und (A8). Von λ nachgefragten Aufträgen kommen deshalb im Mittel nur

$$\bar{z} = \lambda . (1-W) \qquad (5.1)$$

zur Ausführung. Die Erwartung der Einnahmen je Zeiteinheit wird damit

$$E[R] = e . \varrho . (1-W) \qquad (5.2)$$

Für den Ausnutzungsgrad erhält man

$$u = \frac{\varrho}{n} (1-W) \tag{5.3}$$

Im vorliegenden Fall können auch Wartezeiten w zwischen Auftragserteilung und Bearbeitungsbeginn auftreten. Ihr Erwartungswert $E[w]$ kann mit der in Anhang 2 angegebenen Beziehung (A9) berechnet werden.

Bild 7a bis c zeigt die für das Kapazitätsmodell IV kennzeichnenden Größen. Auch hier kann festgestellt werden, daß abgesehen von sehr kleinen ϱ-Werten die größere Kapazität (n=2) nicht nur hinsichtlich der mittleren Einnahmen und des mittleren Einnahmeüberschusses günstiger ist, sondern besonders auch hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit für den Verlust von Aufträgen sowie der mittleren Wartezeit. Eine Beurteilung der beiden Kapazitäten auf der Basis ihrer Ausnutzungsgrade würde auch hier zu einer Fehleinschätzung führen.

6. Abschließende Bemerkungen

Der Ausnutzungsgrad u beeinflußt auf zweierlei Weise den Gemeinkostensatz: Einerseits gehen in den Gemeinkostensatz die Kosten für die vorgehaltene, aber nicht genutzte Kapazität ein. Andererseits vergrößert sich der aus den der Kapazität proportionalen Gemeinkosten (z.B. Urlaub, Feiertage, Krankheit, soziale Aufwendungen) resultierende und für volle Auslastung geltende Gemeinkostenzuschlag y. Wenn man von kapazitätsunabhängigen Gemeinkosten absieht, wird die Abhängigkeit des resultierenden Gemeinkostenzuschlags GKZ vom Ausnutzungsgrad durch

$$GKZ = \frac{1-u}{u} + \frac{y}{u} \tag{6.1}$$

beschrieben. Bild 8 zeigt, daß der Gemeinkostenzuschlag mit fallendem Ausnutzungsgrad dramatisch ansteigt. Bei vordergründiger Betrachtung erscheinen deshalb hohe Ausnutzungsgrade außerordentlich erstrebenswert. In den vorstehenden Abschnitten ist jedoch gezeigt worden, daß der Versuch, durch Reduzierung der Kapazität den Ausnutzungsgrad zu erhöhen, oft nicht zu einer Erhöhung des Überschusses der Einnahmen über die Kosten (die ja implizit auch die Gemeinkosten enthalten) führt. Wenn Zufallseinflüsse auftreten, muß man sich mit höheren Kosten als im determinierten Fall abfinden.

Daß sich die Kostensituation durch Erhöhung der Arbeitseffektivität (d.h. durch Vergrößerung von μ) verbessern läßt, ist trivial. Weniger offensichtlich ist, daß die negativen Zufallseinflüsse bei gleichen oder sogar etwas geringeren Ausnutzungsgraden umso geringer sind, je größer die Zahl n der Bearbeitungsstellen ist, weil dadurch ein gewisser Mittelungseffekt eintritt; d.h. der "Zufälligkeitsgrad" für die einzelnen Bearbeitungsstellen vermindert sind. Es ist häufig nachteilig, im Hinblick auf bessere Ausnutzungsgrade die Kapazität zu reduzieren. Eine Erhöhung der Kapazität ist oft die bessere Alternative, auch wenn dabei ihre Ausnutzung schlechter wird.

Obwohl es die Frage der Kapazitätsplanung nicht unmittelbar betrifft sei erwähnt, daß wegen der zufallsabhängigen Einnahmen eine Liquiditätsreserve vorgehalten werden muß. Wenn diese nicht genügend groß ist oder wenn die mittleren Einnahmenüberschüsse klein sind, ist nicht auszuschließen, daß Zahlungsunfähigkeit eintritt. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür könnte von den vorstehenden Überlegungen ausgegangen werden.

Es mag sein, daß bei den vorgestellten Kapazitätsmodellen der Rolle des Zufalls ein etwas zu großes Gewicht gegeben worden ist. Ich möchte die Modelle deswegen auch weniger als Vorhersagemodelle (predictive models) denn als erklärende Modelle (explanatory models) verstanden wissen. Für solche gilt in besonderem Maße das weise Wort, daß Rechnungen nicht Zahlen sondern Einsichten liefern sollen.

7. Schrifttum:

[1] Ferschl, F.: Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse, Wien u. Würzburg 1964

[2] Page, E.: Quening Theory in OR, London 1972

[3] Krappinger,O.: Wartesysteme, IfS-Vorlesungsmanuskript, Hamburg 1976

[4] Vahl, A.: Optimierung der Kapazität für die Abarbeitung von Aufträgen. Unveröffentlichte Prüfungsarbeit, Hamburg 1990

Anhang 1

In diesem Anhang sind die zur Berechnung von Kennwerten der Kapazitätsmodelle benutzten Beziehungen aus der Warteschlangentheorie zusammengestellt. Bezüglich ihrer Herleitung sei auf das Schrifttum [1], [2], [3] verwiesen, das auch weitere Quellenangaben enthält. Die Bezeichnungen wurden in Anlehnung an [3] gewählt.

Dem Kapazitätsmodell II entspricht das Wartesystem M/M/n mit unbeschränktem Warteraum (exponential verteilte Ankunfts- und Bedienzeiten, n Bedienstellen, Ankunftsrate λ, Bedienrate μ, $\varrho = \lambda/\mu$). Für dieses Wartesystem gelten folgende Beziehungen:

Wahrscheinlichkeit für 0 Elemente im Wartesystem:

$$p_o = \left(1 + \varrho + \frac{\varrho^2}{2!} + \dots \frac{\varrho^{n-1}}{(n-1!)} + \frac{\varrho^n}{n!\,(1-\varrho/n)}\right)^{-1} \qquad \text{(A1)}$$

Erwartungswert der Wartezeit (bezogen auf die mittlere Bedienzeit $\bar{s} = 1/\mu$):

$$E[w] = \frac{\varrho^n}{(n-1)!\;(n-\varrho)^2} \cdot p_o \qquad \text{(A2)}$$

Ausnutzungsgrad:

$$u = \frac{\varrho}{n} \qquad \text{(A3)}$$

Besetztwahrscheinlichkeit:

$$P_b = \frac{\varrho^n}{(n-1)!\;(n-\varrho)} \cdot p_o \qquad \text{(A4)}$$

Verteilungsdichte der auf die mittlere Bedienzeit bezogenen Wartezeiten:

$$f(w) = P_b \cdot \varrho(n-\varrho)e^{-(n-\varrho)w} \tag{A5}$$

Verteilungsfunktion der auf die mittlere Bedienzeit bezogenen Wartezeiten:

$$F(w) = 1-P_b e^{-(n-\varrho)w} \tag{A6}$$

Den Kapazitätsmodellen III und IV entspricht das Wartesystem M/M/n mit dem Warteraum N=O (Modell III) bzw. N=n (Modell IV).

Wahrscheinlichkeit für O Elemente im Wartesystem:

$$p_o = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\varrho^\nu}{\nu!} + \frac{\varrho^n}{n!} \frac{1-\left(\frac{\varrho}{n}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{\varrho}{n}\right)} \right)^{-1} \tag{A7}$$

Wahrscheinlichkeit, daß ankommende Elemente nicht in das System eintreten:

$$W = \frac{\varrho^n}{n!} \left(\frac{\varrho}{n}\right)^N \cdot p_o \tag{A8}$$

Erwartungswert der auf die mittlere Bedienzeit bezogenen Wartezeit:

$$E[w] = \frac{1}{n} \frac{\varrho^n}{n!} \left(\frac{1-\left(\frac{\varrho}{n}\right)^N}{\left(1-\frac{\varrho}{n}\right)^2} - \frac{N\left(\frac{\varrho}{n}\right)^N}{1-\frac{\varrho}{n}} \right) \frac{p_o}{1-W} \tag{A9}$$

Anhang 2

Anhand des folgenden, einer Arbeit von Vahl [4] entnommenen Beispiels werden die Ergebnisse einer Erweiterung des Kapazitätsmodells II für 3 und 4 Bearbeitungsstellen gezeigt. Die Erwartung der Einnahmen $E^*[R]$ wurden mit der Beziehung (3.8) bzw. (A6) berechnet. Ferner wurden folgende Annahmen gemacht:

μ = 12.5 / Jahr (entsprechend $\bar{s}$ = 20 Tage bei 250 Arbeitstagen/Jahr)

w^* = 10 Arbeitstage (entsprechend 14 Kalendertagen)

e = 12.5 GE

K = (1 + 4,5 n) GE

Die Bilder A2.1 bzw. A2.2 zeigen $E^*[R]$ bzw. $E^*[G]$ und u.

Die reduzierten Einnahmeerwartungen $E^*[R]$ werden umso grösser, je grösser die Zahl n der Bearbeitungsstellen ist. Positive Erwartungswerte für die Einnahmenüberschüsse $E^*[G]$ erhält man erst für $\rho = \lambda/\mu > 1$, allerdings nur für n=2. Für n=1 ergeben sich bei den gemachten Annahmen nur Verluste. Über weite Bereiche von ρ ist die jeweils grössere Zahl von Bearbeitungsstellen günstiger als die nächst kleinere, obwohl im letzteren Falle die Ausnutzungsgrade u immer grösser sind. Man kann feststellen: Für eine günstige Ertragslage ist eine möglichst grosse mittlere Zahl von Aufträgen pro Jahr ($\lambda = \rho \cdot \mu$) mit entsprechend grossen Kapazitäten günstig. Die Reduktion von Kapazitäten mit dem Ziel, bessere Ausnutzungsgrade zu erreichen, führt häufig zu einer Verschlechterung der Ertragslage !

Bild 1

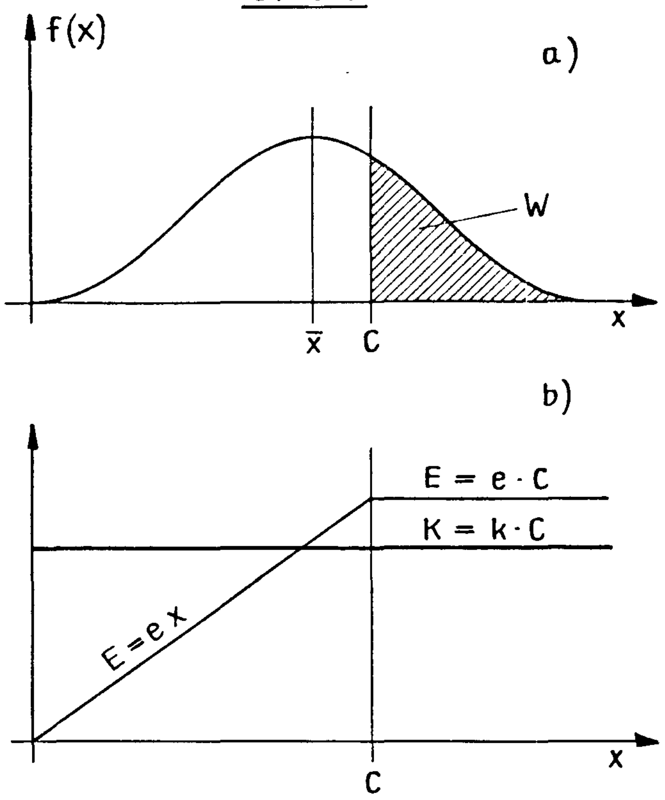

Bild 2

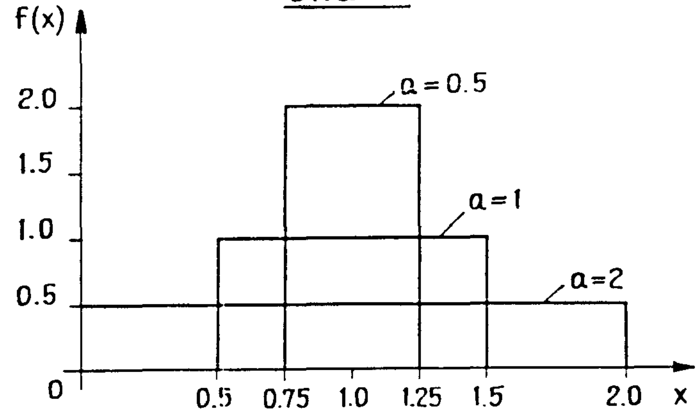

Bild 4

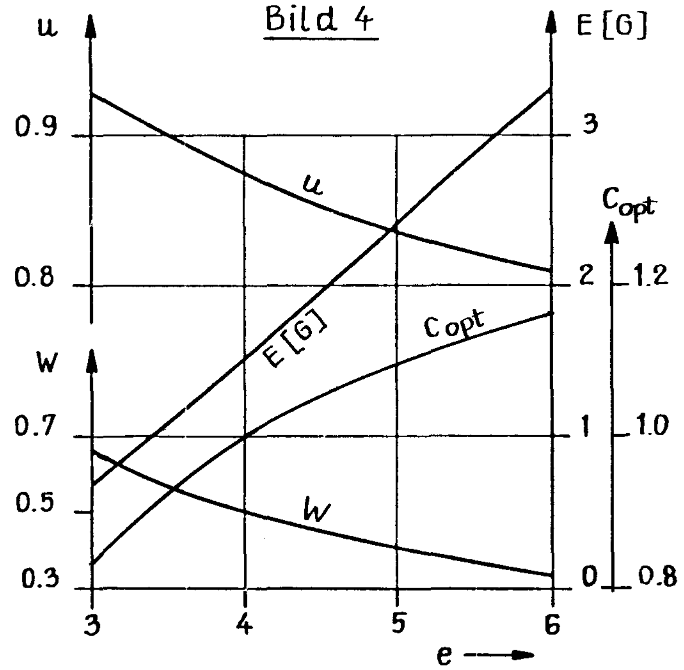

Bild 3

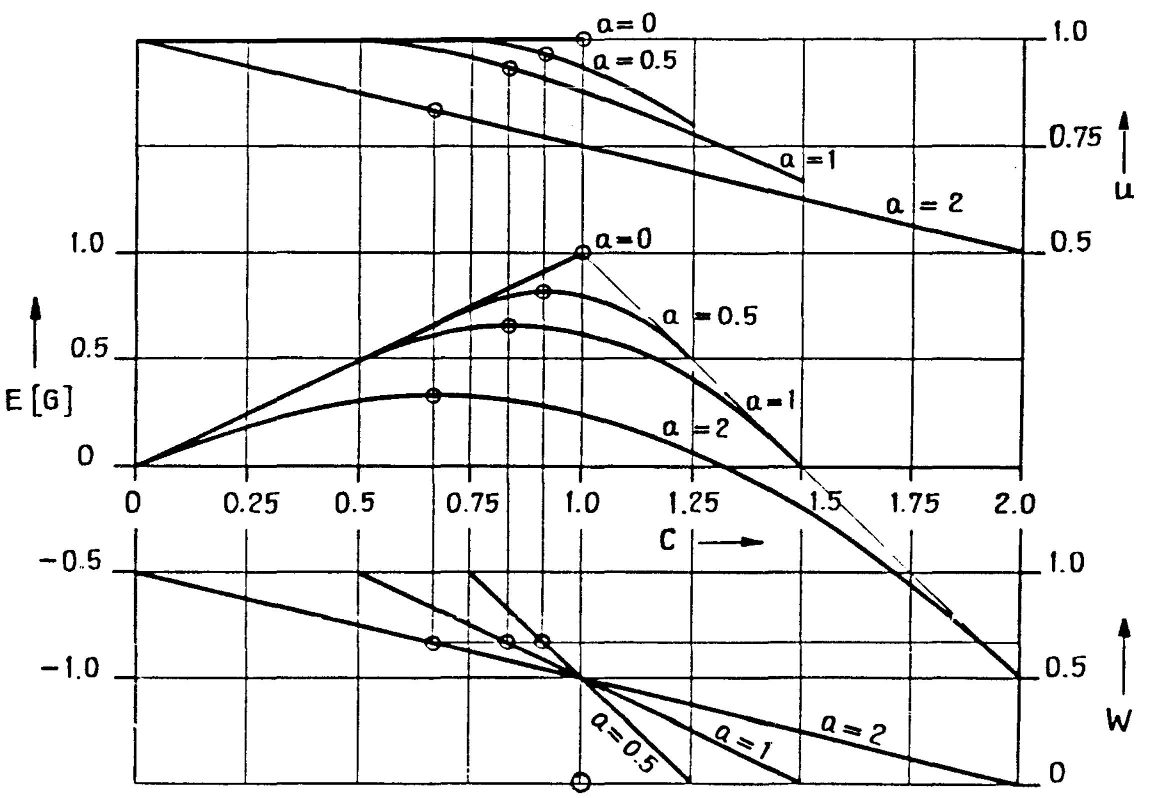

Bild 5

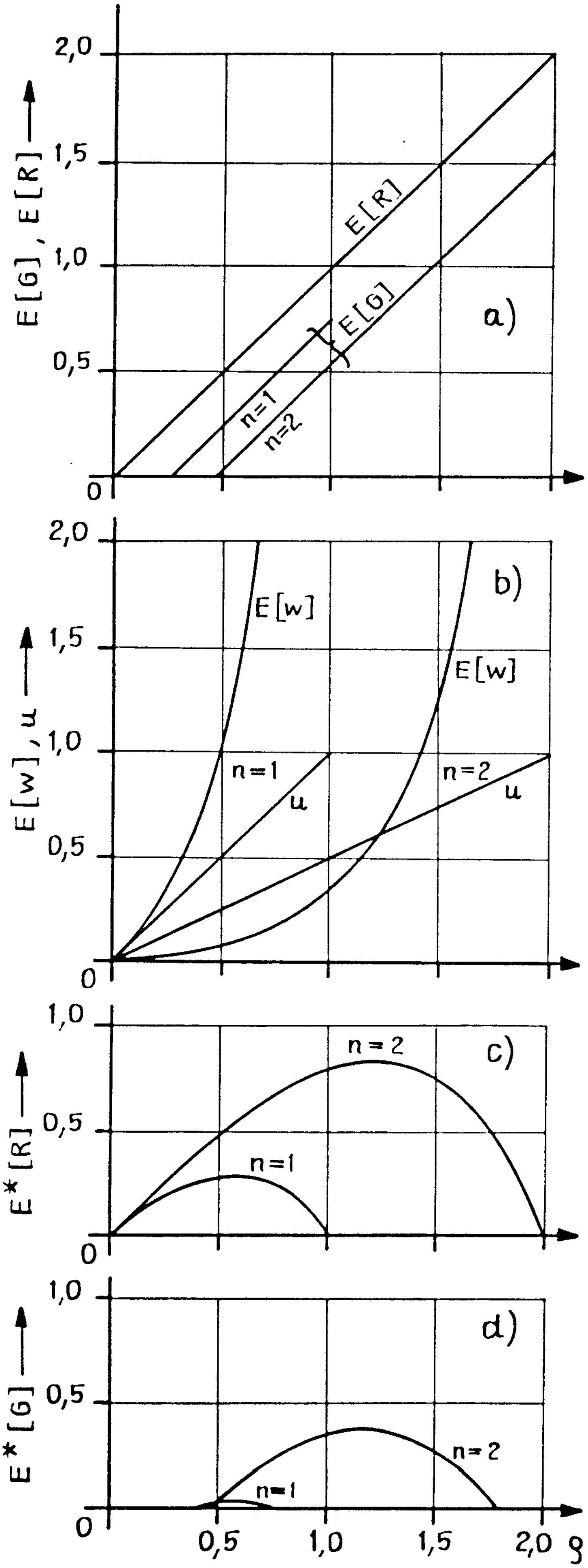
a)
b)
c)
d)
E[G], E[R]
E[R]
E[G]
n=1
n=2
E[w], u
E[w]
u
E*[R]
E*[G]
2,0
1,5
1,0
0,5
0
ϱ

Bild 6

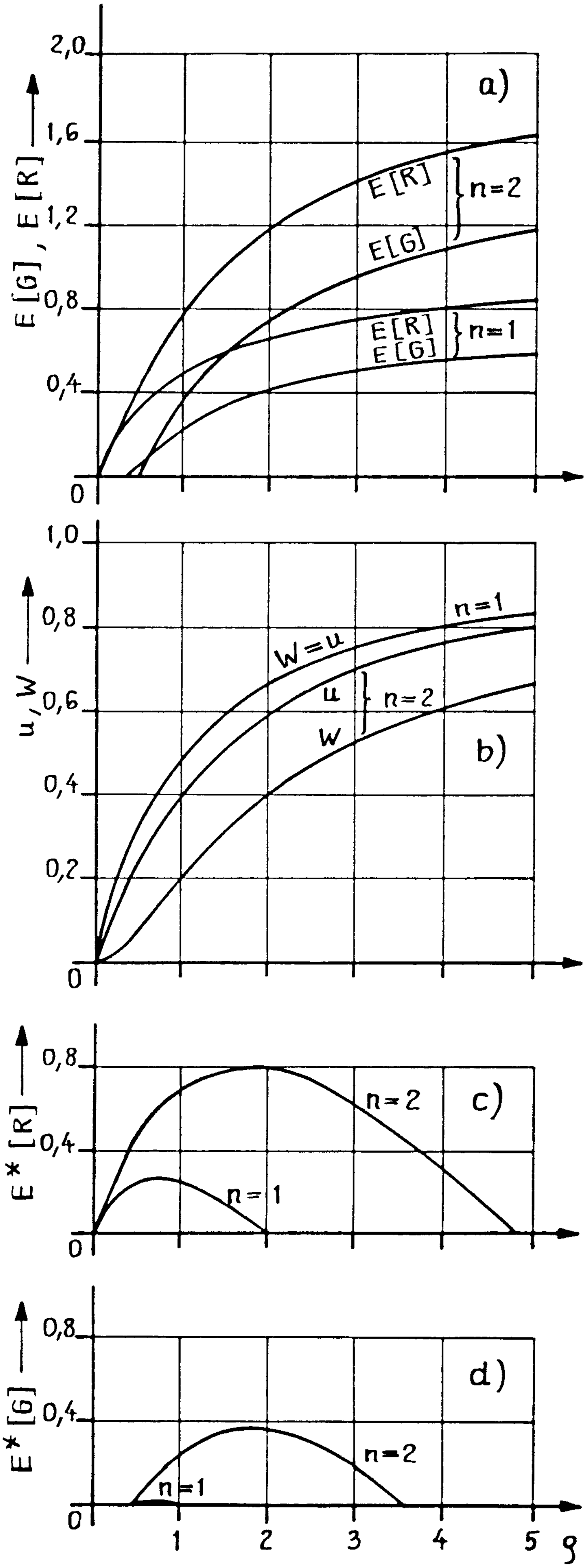
a)
b)
c)
d)
E[G], E[R]
E[R]
E[G]
n=2
n=1
u, W
W=u
u
W
E*[R]
E*[G]
2,0
1,6
1,2
0,8
0,4
0
1
2
3
4
5
ϱ

Bild 7

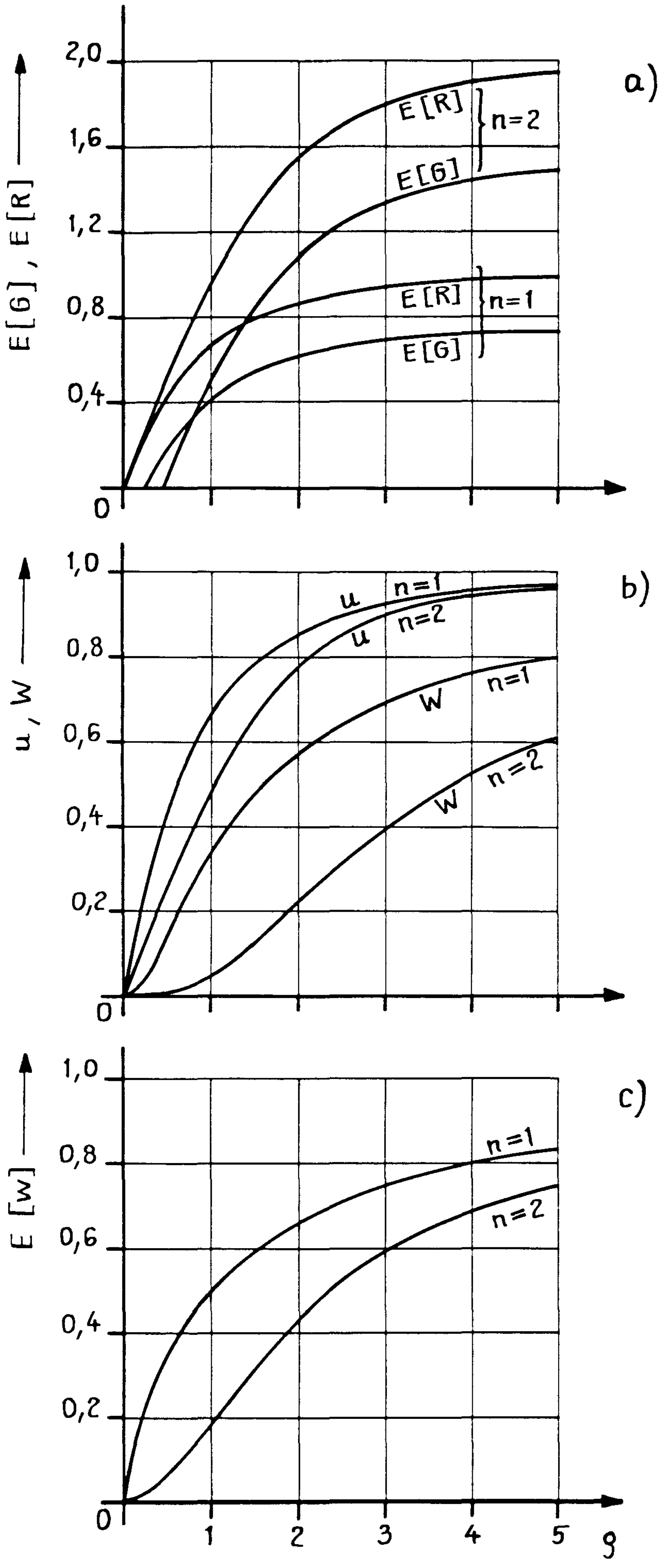
a)
E[G] , E[R]
2,0
1,6
1,2
0,8
0,4
0
E[R]
E[G]
n=2
E[R]
E[G]
n=1
b)
u, W
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
u n=1
u n=2
W n=1
W n=2
c)
E[W]
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
n=1
n=2
1
2
3
4
5
ϱ

Bild 8

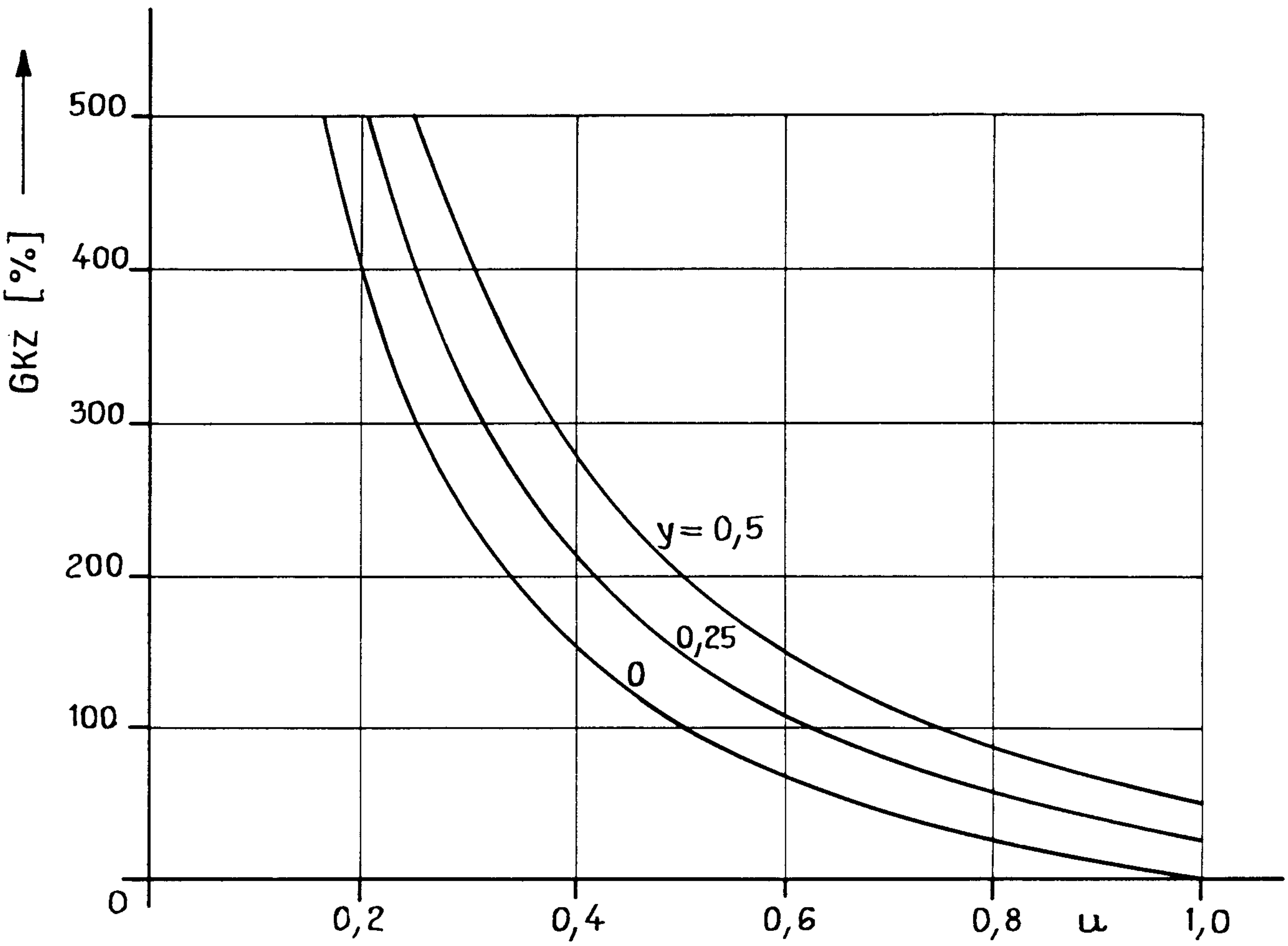

Bild A 2.1

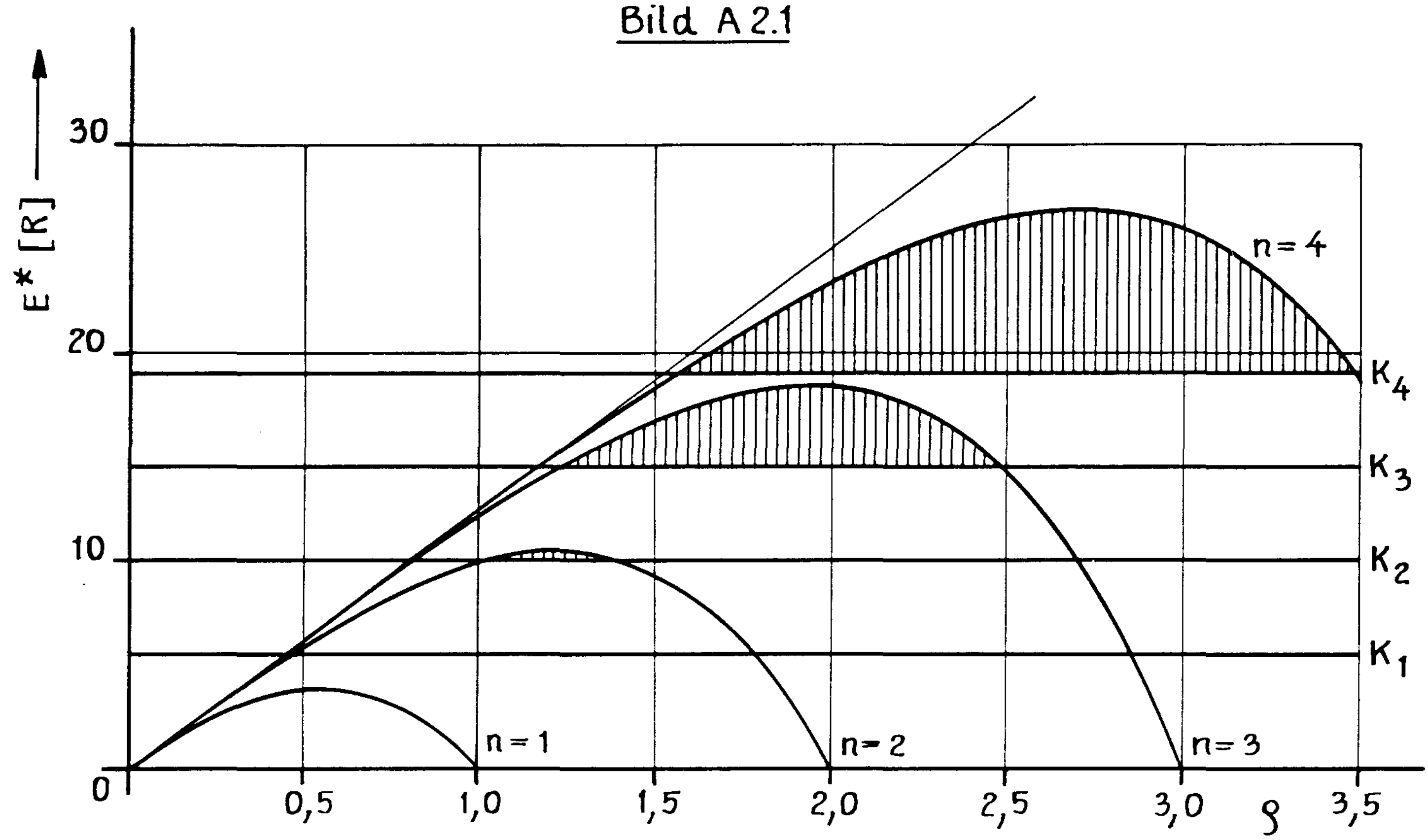

Bild A 2.2