

Flatternachweis von Brücken mittels Finiter Balkenelemente

Zusammenfassung

Winderregtes Flattern von Brücken mit plattenähnlichem Querschnitt erfolgt in einer gekoppelten Biege-Torsions-Form. Sein rechnerischer Nachweis kann u. U. an einem ebenen Ersatzsystem geführt werden. Die hierfür erforderliche Generalisierung ist allerdings unmöglich oder äußerst konservativ, falls die Eigenformen der Biege- und Torsionsschwingungen stark nichtaffin sind. Dem Flatternachweis ist dann eine räumliche Modellierung zugrunde zu legen. Die klassischen Verfahren des Flugzeugbaus zur Lösung des räumlichen Problems gehen von differentiellen Bewegungsgleichungen aus. Für Anwendungen des Brückenbaus erweist sich die Methode der Finiten Elemente als vorteilhafter. Es werden zwei Balkenelemente verschiedener Komplexität definiert und die entsprechenden Element-Matrizen angegeben. Aufstellen und Lösen der diskretisierten Bewegungsgleichungen wird beschrieben. Ergebnisse einer numerischen Studie werden vorgestellt und erörtert.

Summary

Flutter Prediction for Bridges by Means of Finite Beam Elements. Wind-induced flutter of bridges with streamlined, plate-like cross-section occurs as coupled torsional and vertical oscillation. Prediction can possibly be facilitated by representing the spatial system by a generalized 2-DOF system. This, however, may be inadmissible or extremely conservative if the modes of torsional and vertical vibration differ strongly. In this case, flutter prediction should be based on spatial modeling. Classical methods of aircraft engineering for solving the spatial problem proceed from partial differential equations of motion. For applications in bridge engineering, the finite-element concept proves more efficient. In this paper, two beam elements of different complexity are defined, and corresponding matrices are given. Formulation and solution of the resulting MDOF equations of motion is described. Results of a numerical study are presented and discussed.

1 Einleitung

Die realistische Einschätzung des dynamischen Verhaltens von Brücken gewinnt angesichts der zunehmenden Kühnheit heutiger Bauwerke ständig an praktischer Bedeutung. Abgespannte oder aufgehängte Fußgängerbrücken etwa sind so leicht, daß sie von Passanten zu deutlich wahrnehmbaren Schwingungen angeregt werden. Wesentlich gefürchteter, da katastrophal, ist eine Anregung zu Flatterschwingungen durch die Wirkung selbstinduzierter Windkräfte. Diesbezügliche Überlegungen und Nachweise stehen beim Bau von Großbrücken (doch nicht nur dort) im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit und sind entwurfsbestimmend.

Der wesentliche und praktisch meist einzig interessierende strukturelle Kennwert der Flatterstabilität von Brücken ist die kritische Windgeschwindigkeit. Liegt diese höher als der anzusetzende Erwartungswert, so gilt das Bauwerk als flatterstabil. Da die kritische Windgeschwindigkeit theoretisch dem Verzweigungspunkt eines (dynamisch-aeroelastischen) Stabilitätsproblems entspricht, können ihrer

rechnerischen Bestimmung lineare Betrachtungsweisen und Theorien zugrundegelegt werden. Erst der praktisch weniger relevante Nachweis von Flatterstabilität bei überkritischen Windgeschwindigkeiten würde eine Berücksichtigung strukturell und aerodynamisch nichtlinearer Einflüsse erforderlich machen.

Winderregtes Flattern von Brücken mit plattenähnlichem Querschnitt (beschrieben in [11], [12]) erfolgt in einer gekoppelten Biege-Torsions-Form. Der rechnerische Nachweis am ebenen Ersatzsystem – sofern zulässig – erfordert die simultane Lösung der beiden generalisierten Bewegungsgleichungen für Vertikalverschiebung und Verdrehung (zweireihiges komplexes Eigenwertproblem). Die Luftkräfte werden hierbei mittels sechs bis acht reeller aerodynamischer Beiwertfunktionen berücksichtigt, die theoretisch oder – an Teilmodellen im Windkanal – experimentell bestimmt werden [8], [10]. Abbildung auf ein ebenes Ersatzsystem ist nicht möglich oder äußerst konservativ, falls die (Vakuum-)Eigenformen der Biege- und Torsionsschwingungen stark nichtaffin sind [14]. Die dann durchzuführende räumliche Diskretisierung kann auf dieselben aerodynamischen Beiwertfunktionen zurückgreifen, führt aber auf ein Eigenwertproblem höherer Ordnung. Während der Nachweis am ebenen Ersatzsystem als das rechnerische Pendant zu einem direkten Flatterversuch am Teilmodell aufgefaßt werden kann, sind die auf räumliche Diskretisierung beruhenden Verfahren Alternativen zu Vollmodellversuchen.

Thema dieser Arbeit ist der lineare rechnerische Nachweis der Flatterstabilität von Brücken, deren Eigenformen der Biege- und Torsionsschwingungen nichtaffin sind und deren Querschnitt plattenähnlich ist. (Brücken mit nicht-plattenähnlichem Querschnitt neigen eher zu einem entkoppelten Torsionsflattern; die Eigenformen bzw. deren Affinität sind dann von untergeordneter Bedeutung für das Flattern.)

Die klassischen Methoden des Flugzeugbaus zur Lösung dieses allgemeineren Problems gehen von den für das differentielle Balkenelement angeschriebenen Bewegungsgleichungen (oder von entsprechenden Energiefunktionalen) aus [2], [7]. Das hiermit exakt formulierte Randwertproblem muß im allgemeinen numerisch gelöst werden. Stets ist die Auswertung einer Reihe von Integralen erforderlich, die außer den Ansatzfunktionen auch Systemparameter enthalten. Ansatzfunktionen und Integrationen erstrecken sich über das ganze System, strukturelle Segmentierung wird vermieden. Derartige Methoden sind auch bei der aeroelastischen Untersuchung von Hängebrücken bereits benutzt worden [3], [9]. Die ebenfalls mögliche Behandlung als Anfangswertaufgabe führt auf Formulierung und Anwendung von Übertragungsmatrizen [14]. Eine weitere von den Differentialgleichungen ausgehende Methode ist die Aufstellung und Auswertung dynamischer Steifigkeitsmatrizen [11].

Die komplizierte Topologie etwa von Schrägkabelbrücken und die im Brückenbau relativ große Gleichförmigkeit der Systemparameter lassen hier ein anderes Vorgehen – die Anwendung der Finite-Element-Methode – als günstiger erscheinen. Es werden zwei Balkenelemente verschiedener Komplexität definiert und die entsprechenden Element-Matrizen dargestellt. Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen (komplexes Matrizen-Eigenwertproblem) wird beschrieben. Zur Illustration werden Ergebnisse einer numerischen Studie vorgestellt und diskutiert.

Dr. Ing. Uwe Starossek ist Mitarbeiter am Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, 7000 Stuttgart 80

2 Bezeichnungen

A	globale Luftkraftmatrix
a	Luftkraftmatrix für Balkenelement
b	halbe Breite der aerodynamischen Kontur des Querschnitts
C_m, C_v	globale Dämpfungsmatrizen
C_{hh}, C_{ha}, C_{ah}, C_{aa}	instationäre Luftkraftbeiwerte
E	Elastizitätsmodul
F	globaler Knotenkraftvektor
f_i	lokale Knotenkraftgröße eines Balkenelements
f^I, f^{II}, f	Vektor der f _i
G	Gleitmodul
g	Dämpfungsverlustwinkel
h	Vertikalverschiebung
I	Massenträgheitsmoment bezogen auf Länge
i	imaginäre Einheit
J	Flächenträgheitsmoment
J_d	Drillungswiderstand
K	globale Steifigkeitsmatrix
k	reduzierte Frequenz
k	Steifigkeitsmatrix für Balkenelement
l	Länge des Balkenelements
M	globale Massenmatrix
m	Masse bezogen auf Länge
m	Massenmatrix für Balkenelement
N	axiale Zugkraft
ℝ	Menge der reellen Zahlen
t	Zeit
v	(kritische) Geschwindigkeit der ungestörten Anströmung
x	Koordinate in Richtung von Balkenachse
α	Verdrehung um die Balkenachse
A	globaler Knotenverschiebungsvektor
δ_i	lokale Knotenverschiebungsgröße eines Balkenelements
δ^I, δ^{II}, δ	Vektor der δ _i
δ_j	logarithmisches Dekrement des j-ten Modus
ρ	Dichte des Strömungsmediums (Luft)
ψ_i	lokale Verschiebungsansätze für Balkenelement
ω	Kreisfrequenz bzw. Flatterkreisfrequenz
ω_j	Kreisfrequenz des j-ten Modus
D	infolge Dämpfung
I	infolge Massenträgheit
L	infolge selbstinduzierter Luftkräfte
S	infolge Steifigkeit
'	Kennzeichnung des Real- bzw. Imaginärteils einer komplexen Größe
·	Ableitung nach x
·	Ableitung nach t

3 Flatterberechnung mittels Finiter Balkenelemente

3.1 Allgemeines

Die Finite-Element-Methode (FEM) erweist sich aus verschiedenen Gründen als vorteilhaft. Durch die Einführung einer begrenzten Anzahl von lokalen, d. h. für das Element definierten Ansatzfunktionen ist es möglich, das aeroelastische Gesamtsystem (d. i. das Bauwerk zuzüglich des umgebenden instationären Strömungsfeldes) mittels einfach und gleichförmig gebildeter Elementmatrizen darzustellen, die entweder konstant sind (Steifigkeit, Masse) oder in einfacher Weise allein von der reduzierten Frequenz *k* (s. u.) abhängen und in geschlossener Form dargestellt werden können (Luft-

kraft). Durch Addieren in den Knotenpunkten lassen sich die Elementmatrizen leicht zu den Bewegungsgleichungen auch komplexer Systeme zusammenfassen (direkte Steifigkeitsmethode). Ein weiterer Vorteil der Methode – etwa im Vergleich mit dem in [14] vorgestellten Verfahren der Übertragungsmatrizen – ist ihre gute Genauigkeit schon bei grober Diskretisierung; dies zeigten numerische Test- und Vergleichsrechnungen [11].

Zur flexiblen Anpassung an die zu untersuchenden Strukturen wurden zwei verschiedene Elemente entwickelt. Eine Leitidee war hierbei, die Modellgenauigkeit bezüglich Biegung und Torsion möglichst ausgeglichen zu halten und so das Verhältnis zwischen numerischem Aufwand und Gesamtgenauigkeit zu optimieren. Die beiden Elemente unterscheiden sich lediglich bezüglich Torsion. Das aufwendigere hat hierfür drei statt zwei Ansätze und führt zu einer im obigen Sinne ausgeglicheneren Modellierung. Das einfachere Element dagegen ist vorzuziehen, wenn aus strukturellen Gründen – z. B. durch die Seilangriffspunkte – eine so starke Segmentierung vorgegeben ist, daß schon die einfacheren Torsionsansätze ausreichende Genauigkeit gewährleisten.

Beiden Elementen liegt die Annahme konstanter Systemparameter zugrunde. Es werden die in Bild 1 angegebenen Kraftgrößen *f_i* und gleichsinnige Weggrößen *δ_i* benutzt. Die Kraft- und Wegvektoren werden definiert zu

$$\delta^I := \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h'_0 \\ h'_1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}; \quad f^I := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (1a)$$

für Element I und

$$\delta^{II} := \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h'_0 \\ h'_1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_{1/2} \\ \alpha_1 \end{bmatrix}; \quad f^{II} := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (1b)$$

für Element II.

Als Ansatzfunktionen für die Vertikalverschiebung (Biegung) werden für beide Elemente die üblichen Hermite-Polynome

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \psi_2 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \psi_3 &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) l \\ \psi_4 &= (-\xi^2 + \xi^3) l \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mit

$$\xi := x/l \quad (3)$$

verwendet [5]. Als Verdrehungsansätze (Torsion) für Element I kommen nur die linearen Funktionen

$$\left. \begin{aligned} \psi_5^I &= 1 - \xi \\ \psi_6^I &= \xi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

in Frage. Die Verdrehungsansätze (Torsion) für Element II lauten

$$\left. \begin{aligned} \psi_5^{II} &= 1 - 3\xi + 2\xi^2 \\ \psi_6^{II} &= 4\xi - 4\xi^2 \\ \psi_7^{II} &= -\xi + 2\xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

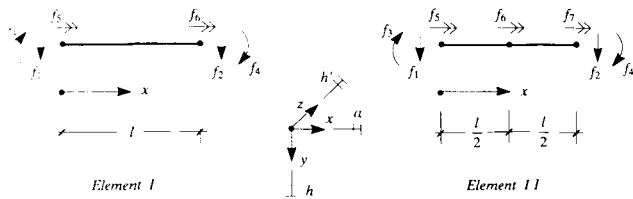


Bild 1. Zwei Finite Balkenelemente
Fig. 1. Two finite beam elements

3.2 Darstellung der Elementmatrizen

Die explizite Darstellung beschränkt sich auf die Element-Luftkraftmatrizen. Die anderen Elementmatrizen (Steifigkeit, Masse) sind entweder bekannt oder aus den angegebenen Integralen leicht zu berechnen. Diese Integrale sind zwar ebenfalls bekannt, doch werden sie hier zum Vergleich mit den Luftkraft-Integralen und der Vollständigkeit halber nochmals angegeben. Dabei gilt folgendes: Torsionsverwölbung, Querschubverformung, Normalkraftverformung und Biegeträgheit werden vernachlässigt; das System ist im Querschnitt symmetrisch, die Symmetrieebene ist gleich der senkrechten Fläche durch die Längsachse. Bezüglich vollständiger Angabe aller Elementmatrizen sei auf [11] verwiesen. Die Element-Steifigkeitsmatrizen **k** stellen gemäß

$$f_s = \mathbf{k} \delta \tag{6}$$

eine lineare Beziehung zwischen den Knotenverschiebungen und den aus der Elementsteifigkeit herrührenden Knotenkräften her. Eine Partitionierung entsprechend den Definitionen (1a, b) führt auf

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}^{hh} & \mathbf{k}^{ha} \\ \mathbf{k}^{ah} & \mathbf{k}^{aa} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Für die Elemente der Matrix **k** findet man mittels des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PVV) die Darstellungen

$$k_{ij}^{hh} = \int_0^l EJ \psi_i'' \psi_j'' dx + \int_0^l N \psi_i' \psi_j' dx \tag{8a}$$

$$k_{ij}^{aa} = \int_0^l GJ_a \psi_i' \psi_j' dx \tag{8b}$$

sowie $k_{ij}^{ha} = k_{ij}^{ah} = 0. \tag{8c}$

Die lineare Transformation

$$f_i = \mathbf{m} \delta \tag{9}$$

der Knotenbeschleunigungen in die aus der Massenträgheit des Elements resultierenden Knotenkräfte wird geleistet durch die Element-Massenmatrix

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^{hh} & \mathbf{m}^{ha} \\ \mathbf{m}^{ah} & \mathbf{m}^{aa} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Unter Anwendung des Prinzips von d'Alembert führt das PVV nun auf die Ausdrücke

$$m_{ij}^{hh} = \int_0^l m \psi_i \psi_j dx \tag{11a}$$

$$m_{ij}^{aa} = \int_0^l I \psi_i \psi_j dx \tag{11b}$$

$$m_{ij}^{ha} = m_{ij}^{ah} = 0. \tag{11c}$$

Den bewegungsinduzierten Luftkräften entsprechen Knotenkräfte, die sich ebenfalls als lineare Transformation der Knotenverschiebungen darstellen lassen. Hierbei wird angenommen, daß das Strömungsgeschehen in jedem Schnitt senkrecht zur Balkenachse unbeeinflusst von den Nachbarschnitten bleibt, räumliche Querströmungseffekte also vernachlässigbar klein sind; ist schon die Richtung der Anströmung nicht senkrecht zur Balkenachse, so wird nur die senkrechte Komponente der Anströmung berücksichtigt (aerodynamische Streifentheorie). Es wird angesetzt

$$f_L = -\omega^2 \mathbf{a} \delta. \tag{12}$$

Die Koeffizienten der Element-Luftkraftmatrix

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{hh} & \mathbf{a}^{ha} \\ \mathbf{a}^{ah} & \mathbf{a}^{aa} \end{pmatrix} \tag{13}$$

können unter der Annahme harmonischer Schwingung konstanter Amplitude (grenzstabiler Flutterfall) und unter nochmaligem Rückgriff auf das PVV zu

$$a_{ij}^{hh} = \pi \int_0^l \rho b^2 c_{hh} \psi_i \psi_j dx \tag{14a}$$

$$a_{ij}^{ha} = \pi \int_0^l \rho b^3 c_{ha} \psi_i \psi_j dx \tag{14b}$$

$$a_{ij}^{ah} = \pi \int_0^l \rho b^3 c_{ah} \psi_i \psi_j dx \tag{14c}$$

$$a_{ij}^{aa} = \pi \int_0^l \rho b^4 c_{aa} \psi_i \psi_j dx \tag{14d}$$

berechnet werden [11]. Die vier komplexen Luftkraftbeiwerte c_{mn} (bzw. die acht reellen Beiwerte c'_{mn}, c''_{mn}) sind theoretisch oder experimentell als Funktionen der reduzierten Frequenz

$$k = \frac{\omega b}{v}; \quad k \in \mathbb{R} \tag{15}$$

zu bestimmen. Sie geben den Einfluß der aerodynamischen Kontur des Querschnitts wieder. Die so berechnete Matrix ist im allgemeinen voll besetzt. Biegung und Torsion – bisher voneinander unabhängig – sind durch Strömungskräfte miteinander gekoppelt.

Windgeschwindigkeit und Querschnittskontur und somit auch k und die c_{mn} seien über die ganze Elementlänge unveränderlich. Die Auswertung der Integrale führt dann für beide Elemente auf

$$a^{hh} = \pi \rho b^2 c_{hh} \frac{l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 54 & 22l & -13l \\ 54 & 156 & 13l & -22l \\ 22l & 13l & 4l^2 & -3l^2 \\ -13l & -22l & -3l^2 & 4l^2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Für Element I erhält man weiter

$$a_I^{ha} = \pi \rho b^3 c_{ha} \frac{l}{60} \begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 9 & 21 \\ 3l & 2l \\ -2l & -3l \end{pmatrix} \tag{17a}$$

$$a_I^{ah} = \pi \rho b^3 c_{ah} \frac{l}{60} \begin{pmatrix} 21 & 9 & 3l & -2l \\ 9 & 21 & 2l & -3l \end{pmatrix} \tag{17b}$$

$$a_I^{aa} = \pi \rho b^4 c_{aa} \frac{l}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{17c}$$

und für Element II schließlich

$$\mathbf{a}_{II}^{ha} = \pi \rho b^3 c_{ha} \frac{l}{60} \begin{pmatrix} 11 & 20 & -1 \\ -1 & 20 & 11 \\ l & 4l & 0 \\ 0 & -4l & -l \end{pmatrix} \quad (18a)$$

$$\mathbf{a}_{II}^{ah} = \pi \rho b^3 c_{ah} \frac{l}{60} \begin{pmatrix} 11 & -1 & l & 0 \\ 20 & 20 & 4l & -4l \\ -1 & 11 & 0 & -l \end{pmatrix} \quad (18b)$$

$$\mathbf{a}_{II}^{aa} = \pi \rho b^4 c_{aa} \frac{l}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (18c)$$

Diese Submatrizen werden gemäß Gleichung (13) zu den vollständigen Element-Luftkraftmatrizen zusammengesetzt. Deren Diagonalblöcke \mathbf{a}^{hh} und \mathbf{a}^{aa} stimmen bis auf skalare Faktoren mit den entsprechenden Diagonalblöcken der Element-Massenmatrizen überein (da auszuwertende Integrale ähnlich).

In der Arbeit [4] ist die Luftkraftmatrix für ein Finites Element entsprechend dem hier beschriebenen Element I angegeben. Dabei wird die unvorteilhafte reelle Schreibweise nach Scanlan verwendet, in der die reellen Anteile von c_{hh} und c_{ah} keine Entsprechung finden (vgl. Diskussion in [11]). Hiervon abgesehen läßt sich die in [4] angegebene Element-Luftkraftmatrix in die hier gefundenen Ausdrücke (16) und (17) überführen.

3.3 Bewegungsgleichungen und Lösung

Der Verschiebungszustand der mit Finiten Elementen modellierten Gesamtstruktur wird durch eine endliche Anzahl generalisierter Koordinaten, den Knotenverschiebungen, beschrieben. Bezüglich jeden Freiheitsgrades werden die Kraftbeiträge der beteiligten Elemente addiert und gemäß dem Prinzip von *d'Alembert* ins Gleichgewicht gesetzt. Faßt man die resultierenden Knotenkräfte – getrennt nach Ursachen – zu globalen Kraftvektoren zusammen, so folgt mit den bisher betrachteten Anteilen zuzüglich den Beiträgen aus struktureller Dämpfung

$$\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_L = \mathbf{0} \quad (19)$$

Die Vektoren $\mathbf{F}_S, \mathbf{F}_I, \mathbf{F}_L$ lassen sich mittels der linearen Transformationen

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_S &= \mathbf{K}\mathbf{A} \\ \mathbf{F}_I &= \mathbf{M}\dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{F}_L &= -\omega^2 \mathbf{A}(k)\mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

in Abhängigkeit vom globalen Verschiebungsvektor \mathbf{A} darstellen. Die hiermit eingeführten globalen Steifigkeits-, Massen- und Luftkraftmatrizen ergeben sich in bekannter Weise aus den hergeleiteten Elementmatrizen. Im Falle von Seil-Balken-Systemen enthalten sie außerdem das Seilverhalten repräsentierende Anteile. Axialverschiebungen – sofern vorhanden – sind ebenfalls in die Globalmatrizen einzuarbeiten. Setzt man für die strukturelle Dämpfung gemäß

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{C}_m \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{C}_v \mathbf{A} \quad (21)$$

die Summe aus innerer Materialdämpfung und viskoser Dämpfung an [1, § 26.5.2], so bleibt das Gleichungssystem (19) linear bezüglich der Verschiebungen. Erfahrungsgemäß ist die strukturelle viskose Dämpfung sehr klein [1], [7] und wird im allgemeinen außer Betracht bleiben. Enthält das System jedoch planmäßig viskose Dämpfungsglieder (z. B. Stoßdämpfer), so ist die dann notwendige Darstellung der Matrix \mathbf{C}_v leicht möglich. Für die Matrix der inneren

Materialdämpfung kann bei schwacher Dämpfung (etwa $g \leq 0,05$)

$$\mathbf{C}_m = ig\mathbf{K} \quad (22)$$

angesetzt werden [1]. Hierbei ist g der globale Dämpfungsverlustwinkel. Die so beschriebenen Dämpfungskräfte werden als proportional zu den elastischen Rückstellkräften und in Phase mit den Geschwindigkeiten angenommen. Der Dämpfungsverlustwinkel wird überdies als über das Tragwerk unveränderlich vorausgesetzt. Setzt sich die Struktur aus Teilen stark unterschiedlichen Dämpfungsverhaltens zusammen – etwa bei Verwendung verschiedener Baustoffe oder Tragwerkselemente –, so ist der Ausdruck (22) entsprechend zu modifizieren [11]. Diese vereinfachenden Methoden zur Einbeziehung der strukturellen Dämpfung sind angesichts der vielschichtigen Natur des Dämpfungsphänomens und wegen dessen oft geringen Einflusses auf das Flatterverhalten gerechtfertigt.

Mit dem für die Luftkraft- und Dämpfungsmatrizen bereits implizit vorausgesetzten Ansatz

$$\mathbf{A}(t) = \tilde{\mathbf{A}} e^{i\omega t} \quad (23)$$

folgt nun aus Gleichung (19) bei Berücksichtigung einer inneren Materialdämpfung gemäß Gleichung (22) das in ω^2 lineare Matrizen-Eigenwertproblem

$$[(1 + ig)\mathbf{K} - \omega^2(\mathbf{M} + \mathbf{A}(k))]\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (24)$$

Dieses Gleichungssystem ist komplex, nichthermitesch und – außer von ω – auch von der reduzierten Frequenz k abhängig. Lösung bei festgehaltenem k führt auf n im allgemeinen komplexe Eigenwerte ω_j^2 . Für den grenzstabilen Flutterfall ist k so vorzugeben, daß mindestens ein ω_j^2 positiv reell wird (Nebenbedingung). Die zugehörige Windgeschwindigkeit folgt aus Gleichung (15). Maßgebend für den Flatternachweis ist die kleinste so ermittelte Windgeschwindigkeit. Sie ergibt sich in der Regel in Verbindung mit einem der ersten, d. h. absolut kleinsten Eigenwerte ω_j^2 .

Übrigens war die Voraussetzung konstanter Windgeschwindigkeit und unveränderlicher Kontur des Querschnitts ausschließlich zur Herleitung der Element-Luftkraftmatrizen erforderlich und bezieht sich deshalb nur auf das Element. Über die Gesamtlänge dürfen sich diese Vorgaben – wie alle anderen Systemparameter – durchaus ändern. In diesem Falle hat jedes Element p seine eigene reduzierte Frequenz k_p . Das Verhältnis der k_p untereinander aber ist durch die räumliche Verteilung von Windgeschwindigkeit und Querschnittsbreite vorgegeben, und sämtliche k_p sind durch einen einzigen, frei wählbaren Bezugswert k^* festgelegt. Läßt man k^* im oben beschriebenen Algorithmus die Stelle von k einnehmen, so kann auch der allgemeinere Fall veränderlicher aerodynamischer Parameter ohne grundsätzliche Erschwerung behandelt werden.

4 Flutterstudie an einer Schrägkabelbrücke

Gegenstand der numerischen Beispielrechnung ist die Schrägkabelbrücke entsprechend Bild 2. Das Seilsystem ist fächerartig und liegt in der senkrechten Ebene durch die Längsachse (Mittelaufhängung). Die Brücke ist im Querschnitt symmetrisch. Der Schwerpunkt des Versteifungsträgers liegt in der elastischen Achse, die mit der Längsachse zusammenfällt. Der Träger ist bei den Pylonen vertikal gelagert und bezüglich Torsion eingespannt. Die Pylonen selbst sind in Höhe des Trägers, zu dem keine direkte Verbindung besteht, eingespannt. Mit Vernachlässigung der Normalkraftverformung ist das System – unabhängig von der gewählten Lagerung in Längsrichtung – auch in der Ansicht symmetrisch. Den angesetzten Systemparametern liegt die übersichtliche Bemessung für eine Straßenbrücke in Stahl-

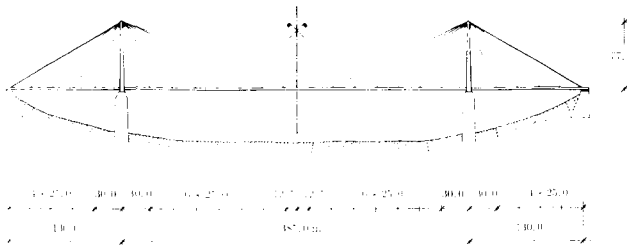


Bild 2. Untersuchte Schrägkabelbrücke
Fig. 2. Cable-stayed bridge configuration

bauweise zugrunde. Für die Querschnittsbreite wird $2b = 18,0$ m angesetzt.

Versteifungsträger und Pylonen der untersuchten Brücke werden mit dem Finiten Element II nach Abschnitt 3 modelliert, wobei Luftkräfte aber nur für den Versteifungsträger rechnerisch zum Ansatz kommen. Die in den Element-Luftkraftmatrizen auftauchenden Luftkraftbeiwerte C_{mn} werden nach der klassischen Flattertheorie berechnet [8], [13]; sie gelten für die dünne, ebene Platte. (Für praktische Nachweise wären gemessene Beiwertfunktionen in dem Maße vorzuziehen oder notwendig, wie das Profil von einer plattenähnlichen Form abweicht; vgl. [11].) Der Einfluß der statischen Normalkräfte auf die Biegesteifigkeit von Versteifungsträger und Pylonen wird berücksichtigt, nicht aber der Einfluß der Normalkraftverformung; es wird eine lineare Berechnung nach Theorie II. Ordnung durchgeführt.

Die Seile werden durch biegeschlafte, masselose Stabelemente modelliert, deren Dehnsteifigkeit dem fiktiven E-Modul nach [6] entspricht; auf die in [11] geschaffene Möglichkeit zur Berücksichtigung der Seildynamik und der dynamischen Interaktion zwischen Seilen und Balken soll an dieser Stelle verzichtet werden. Dieses vereinfachte Vorgehen ist zulässig, sofern interne Resonanz nicht auftritt, oder wenn sie das globale Schwingungsverhalten nicht nennenswert beeinflusst. (Mit interner Resonanz ist das Auftreten gekoppelter Eigenformen, d.h. von Schwingungen mit sowohl deutlicher Balkenverschiebung als auch Seilverschiebung quer zur Seilsehne, gemeint.)

Unter den beschriebenen strukturellen Voraussetzungen lassen sich die Eigenformen der Schwingung im Vakuum bezüglich des Versteifungsträgers in die drei Klassen Vertikalverschiebung, Horizontalverschiebung quer zur Längsachse und Torsionsverdrehung einteilen. Gemischte Formen treten nicht auf; die Horizontalverschiebung braucht deshalb nicht weiter betrachtet zu werden. Bezüglich der Pylonen ist nur die Horizontalverschiebung in Längsrichtung von Interesse; sie ist über die Seile verknüpft mit der Vertikalverschiebung des Trägers.

Die Berechnung erfolgte mit Hilfe eines eigens entwickelten FORTRAN-Programmes. Für das System im Vakuum findet man die in Bild 3 dargestellten ersten sechs Eigenformen und Eigenkreisfrequenzen (die Darstellung beschränkt sich vereinfachend auf den Versteifungsträger). Die aeroelastische Berechnung führt auf die in Bild 4 dargestellten Ergebnisse. Gezeigt sind die ersten sechs Eigenwerte als Funktionen von $1/k$. Die Darstellung jeder der komplexen Lösungen erfolgt durch den Realteil ω_j' der Kreisfrequenz $\omega_j = \omega_j' + i\omega_j''$ und das logarithmische Dekrement $\delta_j = 2\pi\omega_j''/\omega_j'$. (Da die benutzten Luftkraftbeiwerte und damit die ganze Rechnung streng genommen nur für harmonische Schwingungen konstanter Amplitude gelten, verliert das berechnete logarithmische Dekrement an physikalischer Bedeutung in dem Maße, wie es von null verschieden ist; es hat mehr die Funktion einer Hilfsgröße.)

Bei $1/k = 0$ herrscht Windstille, die zugehörigen Lösungen weichen von denen im Vakuum nur wenig ab. Aus-

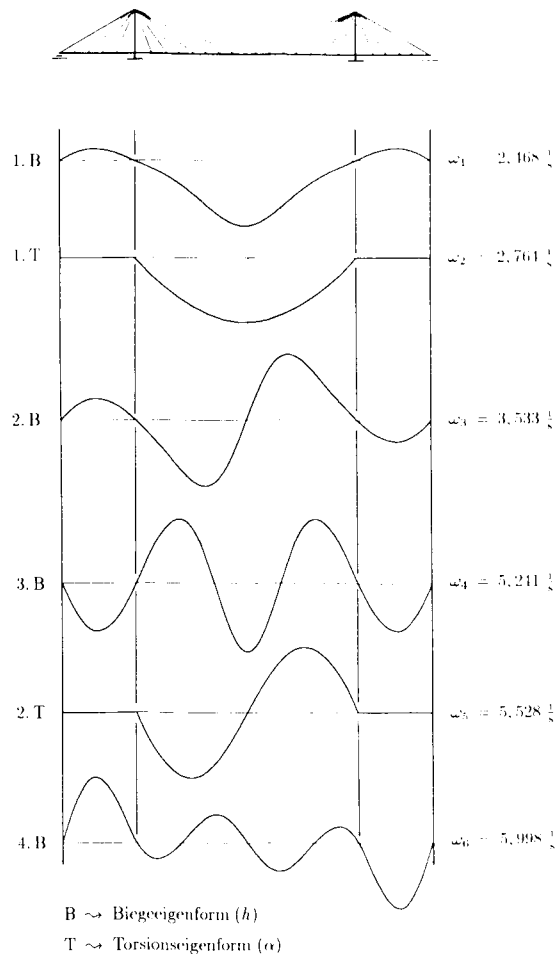


Bild 3. Eigenschwingungsformen im Vakuum

Fig. 3. Modes of vibration in vacuum

gehend von den jeweiligen Eigenformen bei Windstille (bzw. im Vakuum) kann jeder Lösungsast als Biege- oder Torsionsast bestimmter Stufe identifiziert werden. Dies dient der eindeutigen Benennung, beinhaltet aber keine Aussage über die tatsächlichen aeroelastischen Eigenformen, da diese sich aus sowohl Biege- als auch Torsionsanteilen zusammensetzen.

Die kritischen Fälle sind durch die Dämpfungskurven der Torsionsäste eindeutig markiert (Nulldurchgänge). Bei deren Übergängen ins Negative (untere Grenze eines kritischen Bereiches) erfolgt gleichzeitig eine Annäherung jeweils zweier Frequenzkurven. Die obere gehört zur entsprechenden Dämpfungskurve und damit zu einem Torsionsast, die untere zum Biegeast gleicher Stufe. Aus den Angaben für die kritischen Windgeschwindigkeiten (s. Bild 5) geht hervor, daß hier der erste Nulldurchgang – vollzogen vom ersten Torsionsast – für den Flatternachweis maßgebend wird.

Bild 5 zeigt die aeroelastischen Eigenformen für die ersten zwei grenzstabilen Fälle nach Bild 4. Dargestellt sind Real- und Imaginärteile der nun gekoppelten Biege-Torsions-Schwingung. Zur Normierung wird der Biegeanteil auf die halbe Querschnittsbreite b bezogen und das absolute Maximum gleich eins gesetzt. Deutlich erkennbar ist in beiden Fällen eine Phasenverschiebung zwischen Biege- und Torsionsanteilen. Jeder Anteil für sich aber hat starke Ähnlichkeit mit den (reellen) Vakuum-Eigenformen der jeweils beteiligten Lösungsäste. Dies gilt besonders im ersten, hier

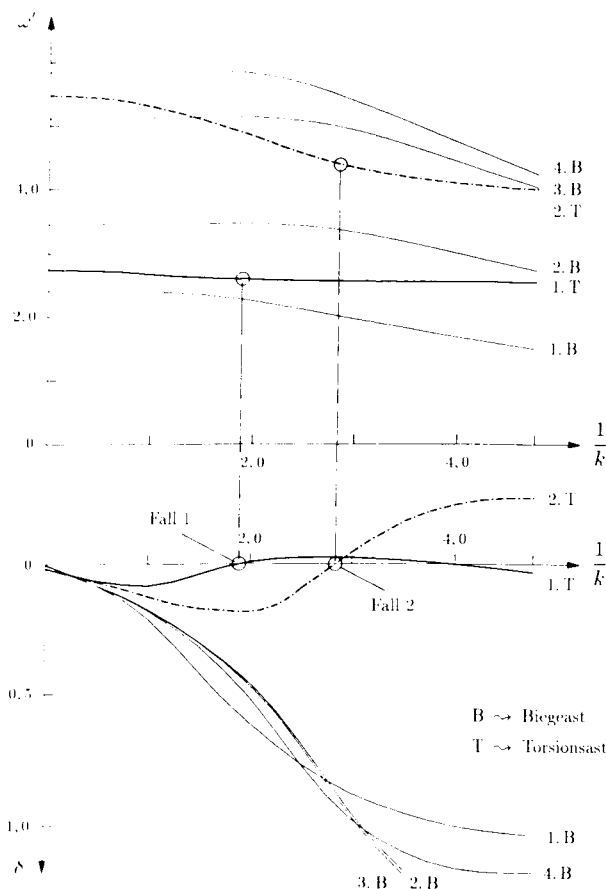


Bild 4. Aeroelastische Eigenwerte in Abhängigkeit von $1/k$

Fig. 4. Aeroelastic eigenvalues versus $1/k$

maßgebenden Fall (Kopplung der Grundschwingungsformen). Im zweiten Fall (Kopplung der zweiten Schwingungsformen) werden beide Anteile – jeweils für sich normiert – deutlich komplex und weichen damit stärker von den Eigenformen im Vakuum ab. Dies liegt an der nun größeren Nichtaffinität der Vakuum-Modi: Der relativ großen Biegeverformung in den Seitenfeldern steht keine Torsionsverformung gegenüber; diese wird erst durch die koppelnden Luftkräfte induziert.

Die im vorigen Absatz benutzte Vorstellung einer aerodynamisch bedingten Kopplung von Eigenformen ist hilfreich, aber etwas irreführend. Durch das Wirken selbstinduzierter Strömungskräfte entsteht nämlich ein qualitativ neues System. Die ihm zugeordnete Eigenwertaufgabe ist gegenüber dem Vakuumzustand mehr oder weniger stark verändert und führt auf qualitativ neue Lösungen, in denen Biege- und Torsionsanteile gemeinsam auftreten.

In weiteren Rechnungen wurde die Torsionssteifigkeit und damit das Verhältnis $\epsilon_{11} = \omega_{a1}/\omega_{h1}$ der Grundeigenfrequenzen der Torsions- und Biegeschwingungen (sowie das Verhältnis aller Obertöne) variiert. Die berechneten kritischen Windgeschwindigkeiten wurden mit den Ergebnissen der vereinfachten Rechnung am ebenen Ersatzsystem verglichen [11]. Die vereinfachte Rechnung liefert in allen Fällen niedrigere kritische Windgeschwindigkeiten. Der entsprechende Zuwachs durch Rechnung am räumlichen System lag je nach Vorgabe von ϵ_{11} zwischen 3 % und 150 %. Starke Zuwächse über einen größeren Bereich entstanden durch Ansatz von Frequenzkombinationen (als Eingangsgrößen im vereinfachten Nachweis), die sich im räumlichen Nachweis als unrealistisch erwiesen.

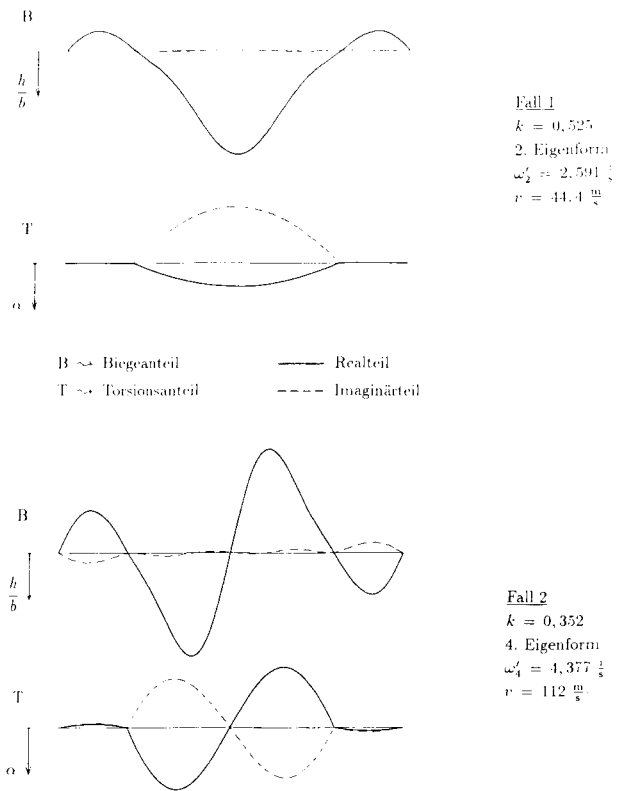


Bild 5. Eigenschwingungsformen für zwei grenzstabile Fälle

Fig. 5. Modes of vibration for two critical cases

Literatur:

- [1] J. Argyris, H.-P. Mlejnek: Die Methode der Finiten Elemente. Band III, Einführung in die Dynamik. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988.
- [2] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley: Principles of Aeroelasticity. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [3] Fr. Bleich: Dynamic instability of truss-stiffened suspension bridges under wind action. ASCE, Transactions, 114, Paper No. 2385, pp. 1177-1232, 1949.
- [4] D. Bruno, A. Leonardi, F. Maceri: On the nonlinear dynamics of cable-stayed bridges. Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, November 18-20, 1987, Vol. 1, pp. 529-544, 1987.
- [5] R. W. Clough, J. Penzien: Dynamics of Structures. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [6] H.-J. Ernst: Der E-Modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges. Der Bauingenieur 40 (1965), S. 52-55.
- [7] H. W. Försching: Grundlagen der Aeroelastik. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [8] K. Klöppel, F. Thiele: Modellversuche im Windkanal zur Bemessung von Brücken gegen die Gefahr winderegter Schwingungen. Der Stahlbau 36 (1967), S. 353-365.
- [9] J. R. Richardson: Advances in techniques for determining the aeroelastic characteristics of suspension bridges. Proceedings of the Fourth International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures, Heathrow 1975, Session 3, pp. 251-258, 1975.
- [10] E. Simiu, R. H. Scanlan: Wind Effects on Structures. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1986.
- [11] U. Starossek: Zum dynamischen Verhalten von Seilbrücken unter Windeinwirkung. Dissertation, Universität Stuttgart, 1991; unter dem Titel „Brückendynamik - Winderegte Schwingungen von Seilbrücken“ erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.
- [12] U. Starossek: Ein Beitrag zum Brückenflattern - Nachweis am ebenen Ersatzsystem und Einfluß des Profils. Bauingenieur, eingereicht im Dez. 1991.
- [13] Th. Theodoresen: General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington, D. C., 1934, Technical Report No. 496, pp. 413-433, January 1935.
- [14] F. Thiele: Zugeschärfte Berechnungsweise der aerodynamischen Stabilität weitgespannter Brücken (Sicherheit gegen winderegte Flatterschwingungen). Der Stahlbau 45 (1976), S. 359-365.