

# RECHNERVORFUEHRUNG

## Pakete fuer Standardprobleme der Numerik

Siegfried M. Rump

+++++++ Dies ist eine kurze Demonstration des Systems PASCAL-SC.  
+++++++  
+++++++ Der Rechner verfuegt ueber eine genaue Gleitpunkt-Arithmetik und  
+++++++ ein genaues Skalarprodukt. Dies gestattet es, nicht nur Naecherungs-  
+++++++ loesungen eines Problems zu berechnen, sondern es koennen sogar  
+++++++ Bereiche angegeben werden, in denen sich genau eine Loesung des  
+++++++ gestellten Problems befindet. Und dies fuer lineare Gleichungs-  
+++++++ systeme ebenso wie fuer Eigenwerte/Eigenvektoren, Nullstellen von  
+++++++ Polynomen, Loesung von Differentialgleichungen etc. Dabei wird die  
+++++++ Existenz und Eindeutigkeit der Loesung in den ausgegebenen  
+++++++ Schranken vom Rechner vollautomatisch bewiesen ohne jedes Hinzutun  
+++++++ seitens des Benutzers.  
+++++++  
+++++++ Die Spracherweiterung PASCAL-SC (Pascal for Scientific Computation)  
+++++++ gestattet es, die Programme in einfacher und uebersichtlicher Form  
+++++++ zu entwerfen und zu schreiben.  
+++++++  
+++++++ Nachfolgend bezeichnen die Zeilen, die mit ++++++ beginnen,  
+++++++ einen Kommentar; die Zeilen die mit \* beginnen, eine Eingabe vom  
+++++++ vom Terminal aus.  
+++++++  
+++++++ Intervalle werden jeweils bis zur ersten differierenden Stelle  
+++++++ gedruckt. Somit kann die Guete einer Einschliessung bereits optisch  
+++++++ an der Laenge (Anzahl der Stellen) der linken und rechten Grenze  
+++++++ erkannt werden.

P recise  
A rithmetic  
S afe and  
C orrect  
A ppropriate  
L anguage  
- for  
S cientific  
C omputation

+++++++ Intervall-Newton-Verfahren in PASCAL-SC

```
BEGIN (* HAUPTPROGRAMM *)
  WRITELN ('ANFANGSINTERVALL EINGEBEN. ETWA [1,1.5]');
  IREAD( INPUT,X1 );
  REPEAT
    XO := X1;
    XM := MITTE XO;
    X1 := ( XM - FKT(XM)/ABL(XO) ) ** XO;
    IWRITE( OUTPUT,X1 ); WRITELN
  UNTIL XO = X1
END.
```

+++++++ Intervall-Newton-Verfahren in gewoehnlichem PASCAL

```
(* H A U P T P R O G R A M M *)
BEGIN WRITELN(' ANFANGSINTERVALL EINGEBEN ');
  READI(INPUT,X1);
  REPEAT XO:=X1;
    MITTE(XO,XM);
    FKT(XM,YM);
    ABL(XO,YO);
    DIVI(YM,YO,Y);
    SUBI(XM,Y,Z);
    DS(Z,XO,X1);
    WRITEI(OUTPUT,X1);
  WRITELN
  UNTIL EQ(XO,X1)
END.
```

+++++++ Ausfuehrung des Intervall-Newton-Verfahrens fuer

+++++++  $F(X) = X * (X ** 9 - 1) - 1$

ANFANGSINTERVALL EINGEBEN. ETWA [1,1.5]

\* [1,1.6]

```
[          1.0E+00,          1.3E+00]
[          1.0E+00,          1.2E+00]
[          1.07E+00,          1.09E+00]
[          1.0755E+00,          1.0761E+00]
[          1.0757659E+00,          1.0757662E+00]
[ 1.07576606608E+00, 1.07576606609E+00]
```

+++++++ Bei der Programmierung des Intervall-Newton-Verfahrens in gewoehn-  
 ++++++++ lichem Pascal muessen die verwendeten Unterprogramme READI, MITTE,  
 ++++++++ DIVI, SUBI, DS und WRITEI vom Benutzer programmiert werden. Das  
 ++++++++ sind etwa 180 lines of code. Bei der Programmierung in PASCAL-SC  
 ++++++++ sind alle Prozeduren vorprogrammiert und zudem in der leicht  
 ++++++++ lesbaren Operator-Schreibweise aufrufbar.

```
+++++++ Ausführung eines kombinierten Gleitpunkt-Intervall-Newton-Verfahrens
+++++++ fuer die gleiche Funktion wie oben  $F(X) = X * (X ** 9 - 1) - 1$ 
```

ANFANGSWERT EINGEBEN. ETWA 1.0

\* 1.3

```
1.300000000000E+00
1.19065781455E+00
1.11558133052E+00
1.08181447152E+00
1.07592376424E+00
1.07576617573E+00
[ 1.07576606608E+00, 1.07576606609E+00]
```

```
+++++++ Hier wird zunaechst gleitpunktmaessig iteriert und im letzten
+++++++ Schritt erst eine Intervall-Iteration angesetzt.
+++++++
+++++++ In jedem Fall wird vom Rechner automatisch bewiesen, dass im
+++++++ Ergebnisbereich genau eine Nullstelle der Ausgangsfunktion liegt.
```

```
+++++++ Aufruf des Algorithmus zur genauen Berechnung von Skalarprodukten.
+++++++
+++++++ Der Algorithmus berechnet das Ergebnis nicht nur genau sondern auch
+++++++ schneller, als der in gewöhnlichem PASCAL programmierte Algorith-
+++++++ mus. Und zwar fuer jedes Skalarprodukt, auch bei noch so grosser
+++++++ Ausloeschung.
```

Bitte Dimension eingeben :

\* 3

Bitte X[i], Y[i] eingeben (i=1..DIM) :

```
* 1000000.00 1000000.00
* 1.00 1.00
* 1000000.00 -1000000.00
```

Ergebnis des genauen Skalarprodukts :

SUMME = 1.0000000000000E+00

Ergebnis des Skalarprodukts programmiert in gewöhnlichem PASCAL :

SUMME = 0.0000000000000E+00

+++++++ Algorithmus fuer lineare Gleichungssysteme.  
 ++++++++  
 ++++++++ Das Programm berechnet eine bewiesene Einschliessung der Loesung  
 ++++++++ eines linearen Gleichungssystems.

Das Programm berechnet Schranken fuer die Loesung eines  
 linearen Gleichungssystems.

Geben Sie bitte einen der folgenden Buchstaben ein:

S wenn Sie selbst die Matrix und rechte Seite eingeben wollen.  
 Z wenn Matrix und rechte Seite zufaellig erzeugt werden sollen.  
 H wenn eine Hilbertmatrix erzeugt werden soll. Die rechte Seite koennen.  
 Sie dann selbst eingeben.  
 Q wenn Sie aufhoeren wollen.  
 L schaltet die Ausgabe von Zwischenergebnissen ein.  
 N schaltet die Ausgabe von Zwischenergebnissen ab.  
 R gibt nur die gleitpunktmaessig berechnete Naehering als  
 Zwischenergebnis aus.  
 I gibt diese Information aus.

\* H

Welche Dimension?

\* 15

Die Matrix ist:

|                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1.16454478140E+12 | 5.82272390700E+11 | 3.88181593800E+11 | 2.91136195350E+11 |
| 2.32908956280E+11 | 1.94090796900E+11 | 1.66363540200E+11 | 1.45568097675E+11 |
| 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 |
| 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 |                   |
| 5.82272390700E+11 | 3.88181593800E+11 | 2.91136195350E+11 | 2.32908956280E+11 |
| 1.94090796900E+11 | 1.66363540200E+11 | 1.45568097675E+11 | 1.29393864600E+11 |
| 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 |
| 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 |                   |
| 3.88181593800E+11 | 2.91136195350E+11 | 2.32908956280E+11 | 1.94090796900E+11 |
| 1.66363540200E+11 | 1.45568097675E+11 | 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 |
| 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 |
| 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 |                   |
| 2.91136195350E+11 | 2.32908956280E+11 | 1.94090796900E+11 | 1.66363540200E+11 |
| 1.45568097675E+11 | 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 |
| 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 |
| 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 |                   |
| 2.32908956280E+11 | 1.94090796900E+11 | 1.66363540200E+11 | 1.45568097675E+11 |
| 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 |
| 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 |
| 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 |                   |
| 1.94090796900E+11 | 1.66363540200E+11 | 1.45568097675E+11 | 1.29393864600E+11 |
| 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 |
| 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 |
| 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 |                   |
| 1.66363540200E+11 | 1.45568097675E+11 | 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 |
| 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 |
| 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 |
| 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 |                   |
| 1.45568097675E+11 | 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 |
| 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 |
| 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 |
| 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 | 5.29338537000E+10 |                   |

|                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1.29393864600E+11 | 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 | 7.70453984500E+10 |
| 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 |
| 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 |
| 5.54545134000E+10 | 5.29338537000E+10 | 5.06323818000E+10 |                   |
| 1.16454478140E+11 | 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 |
| 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 |
| 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 |
| 5.29338537000E+10 | 5.06323818000E+10 | 4.85226992250E+10 |                   |
| 1.05867707400E+11 | 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 |
| 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 |
| 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 | 5.29338537000E+10 |
| 5.06323818000E+10 | 4.85226992250E+10 | 4.65817912560E+10 |                   |
| 9.70453984500E+10 | 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 |
| 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 |
| 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 | 5.29338537000E+10 | 5.06323818000E+10 |
| 4.85226992250E+10 | 4.65817912560E+10 | 4.47901839000E+10 |                   |
| 8.95803678000E+10 | 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 |
| 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 |
| 5.54545134000E+10 | 5.29338537000E+10 | 5.06323818000E+10 | 4.85226992250E+10 |
| 4.65817912560E+10 | 4.47901839000E+10 | 4.31312882000E+10 |                   |
| 8.31817701000E+10 | 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 |
| 6.46969323000E+10 | 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 |
| 5.29338537000E+10 | 5.06323818000E+10 | 4.85226992250E+10 | 4.65817912560E+10 |
| 4.47901839000E+10 | 4.31312882000E+10 | 4.15908850500E+10 |                   |
| 7.76363187600E+10 | 7.27840488375E+10 | 6.85026342000E+10 | 6.46969323000E+10 |
| 6.12918306000E+10 | 5.82272390700E+10 | 5.54545134000E+10 | 5.29338537000E+10 |
| 5.06323818000E+10 | 4.85226992250E+10 | 4.65817912560E+10 | 4.47901839000E+10 |
| 4.31312882000E+10 | 4.15908850500E+10 | 4.01567166000E+10 |                   |

Geben Sie bitte die rechte Seite ein.

\* 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

#### 1. Gleitpunktaessig berechnete Naeherung:

|                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| -3.70144248083E-06 | 3.90101713089E-04  | -9.93527792450E-03 | 1.05104981172E-01  |
| 5.56103731082E-01  | 1.52452075214E+00  | -1.76642775931E+00 | -9.59186415565E-01 |
| 4.90243939872E+00  | -4.09472893569E+00 | -7.96632647673E-01 | 1.88744082265E+00  |
| 1.12694074067E+00  | -2.02683453639E+00 | 6.63018130949E-01  |                    |

#### 2. Neues, genaues Verfahren

Durch den Algorithmus wurde bewiesen, dass die Matrix des Gleichungssystems nicht singular ist und dass die Loesung garantiert in folgendem Bereich liegt:

|    |   |                     |                     |
|----|---|---------------------|---------------------|
| 1  | [ | -5.78999254704E-03, | -5.78999254703E-03] |
| 2  | [ | 1.14415175302E+00,  | 1.14415175303E+00]  |
| 3  | [ | -5.65419358902E+01, | -5.65419358901E+01] |
| 4  | [ | 1.22731367521E+03,  | 1.22731367522E+03]  |
| 5  | [ | -1.46321958521E+04, | -1.46321958520E+04] |
| 6  | [ | 1.07653530434E+05,  | 1.07653530435E+05]  |
| 7  | [ | -5.23134225398E+05, | -5.23134225397E+05] |
| 8  | [ | 1.74885780475E+06,  | 1.74885780476E+06]  |
| 9  | [ | -4.11439182702E+06, | -4.11439182701E+06] |
| 10 | [ | 6.86925162911E+06,  | 6.86925162912E+06]  |
| 11 | [ | -8.09380818008E+06, | -8.09380818007E+06] |
| 12 | [ | 6.57904885545E+06,  | 6.57904885546E+06]  |
| 13 | [ | -3.51015512694E+06, | -3.51015512695E+06] |
| 14 | [ | 1.10616242295E+06,  | 1.10616242296E+06]  |
| 15 | [ | -1.56024600400E+05, | -1.56024600399E+05] |

Geben Sie H,S,Z oder Q ein. Die Beschreibung erhalten Sie durch I.

\* S

Geben Sie bitte die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten ein.

\* 3 2

Geben Sie die Matrix zeilenweise ein und dann die rechte Seite.  
Einzugeben sind 3 Gleichungen in 2 Unbekannten.

```
* 665857 -941664
* 470832 -665857
* 470833 -665857
* 1
* 0
* 665858
```

1. Gleitpunktmässig berechnete Naehering :

```
1      6.65858261006E+05
2      4.70832085775E+05
```

2. Durch den neuen Algorithmus wurde bewiesen, dass die Matrix maximalen Rang hat und dass die beste Approximation garantiert in folgenden Bereich liegt :

```
1 [ 6.65858000000E+05, 6.65858000001E+05]
2 [ 4.70832707107E+05, 4.70832707108E+05]
```

Geben Sie H,S,Z oder Q ein. Die Beschreibung erhalten Sie durch I.

\* Q

```
+++++++ Offensichtlich muss eine gleitpunktmässig berechnete Naehering
+++++++ nicht notwendig viel mit der wahren Loesung zu tun haben; auch
+++++++ wenn ein so bewaehrter Algorithmus wie der Gauss'sche verwendet
+++++++ wird mit optimaler Arithmetik.
```

```
+++++++ Der vorliegende Algorithmus berechnet genaue Schranken fuer die
+++++++ Loesung linearer Gleichungssysteme; und zwar auch fuer ueber-
+++++++ oder unterbestimmte Systeme (mehr Gleichungen bzw. mehr Unbe-
+++++++ kannte). Im Fall ueberbestimmter Systeme wird die Loesung mit
+++++++ kleinstem Residuum; im Fall unterbestimmter Systeme die Loesung
+++++++ kleinster Laenge bestimmt.
```

```
+++++++ In jedem Fall wird durch den Rechner bewiesen; dass die Matrix
+++++++ des gegebenen Gleichungssystems maximalen Rang hat und zwar
+++++++ automatisch ohne ein Hinzutun des Benutzers.
```

```
+++++++ Fuer Spezialisten die Information: Die Konditionszahl der
+++++++ Hilbert 15*15 Matrix ist ca. 10**22 und sie ist die groesste
+++++++ exakt speicherbare Hilbertmatrix in 12-stelliger Genauigkeit.
+++++++ Trotz der extrem hohen Kondition sind die Loesungen bis auf
+++++++ die letzte Stelle genau eingeschlossen.
```

```

+++++++ Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer Matrix.
+++++++
+++++++ Das Programm invertiert eine reelle Matrix A. Das Ergebnis ist
+++++++ eine Intervall-Matrix, die die Inverse von A bewiesenermassen
+++++++ enthaelt wobei die Nicht-Singularitaet der Matrix gleichzeitig
+++++++ durch den Rechner bewiesen wird.

```

Das Programm LINV berechnet Schranken fuer die Inverse einer Matrix.  
Geben Sie einen der folgenden Buchstaben ein:

```

S wenn Sie selbst die Matrix eingeben wollen.
Z wenn die Matrix zufaellig erzeugt werden soll.
H wenn eine Hilbertmatrix erzeugt werden soll.
Q wenn Sie aufhoeren wollen.
L schaltet die Ausgabe der Zwischenergebnisse ein.
N schaltet die Ausgabe der Zwischenergebnisse ab.
R gibt nur die gleitpunktmaessig berechnete Naehung als
  Zwischenergebnis aus.
I gibt diese Information aus.

```

\* S

Welche Dimension?

\* 2

Geben Sie die Matrix zeilenweise ein. Die Dimension ist 2.

```

* 1 1
* 9 9

```

1. Gleitpunktmaessig berechnete Inverse:

```

-9.999999999999E+11 1.111111111111E+11
 1.000000000000E+12-1.111111111111E+11

```

2. Berechnung der Inversen durch neues Verfahren:

Gemessen an der Kondition der Matrix ist die Rechengenauigkeit  
nicht ausreichend, d.h. bei dem Problem ist grosse Vorsicht geboten.

Geben Sie H,S,Z oder Q ein. Die Beschreibung erhalten Sie durch I.

\* S

Welche Dimension?

\* 2

Geben Sie die Matrix zeilenweise ein. Die Dimension ist 2.

```

* 941664 665857
* 665857 470832

```

## 1. Gleitpunktmaessig berechnete Inverse:

```
-1.66666666667E+05 2.35702260396E+05  
2.35702260396E+05 -3.33333333333E+05
```

## 2. Berechnung der Inversen durch neues Verfahren:

Durch den Algorithmus wurde bewiesen, dass die Matrix nicht singulaer ist und dass die Inverse garantiert in folgendem Bereich liegt:

1-te Spalte:

```
[ -4.70832000000E+05, -4.70832000000E+05]  
[ 6.65857000000E+05, 6.65857000000E+05]
```

2-te Spalte:

```
[ 6.65857000000E+05, 6.65857000000E+05]  
[ -9.41664000000E+05, -9.41664000000E+05]
```

Geben Sie H,S,Z oder Q ein. Die Beschreibung erhalten Sie durch I.

\* Q

```
+++++++ Die gleitpunktmaessige Naehering der Inversen ist voellig falsch  
+++++++ bzw. es wird die Inverse einer singulaeren Matrix berechnet. Die  
+++++++ berechnete Einschliessung ist bis auf die letzte Dezimale genau.
```

+++++++ Algorithmus zur bewiesenermassen Einschliessung von Eigenwerten/  
 ++++++ Eigenvektoren einer Matrix.

LEIG berechnet Einschliessungen fuer Eigenwerte und Eigenvektoren  
 reeller symmetrischer Matrizen.  
 Geben Sie bitte einen der folgenden Buchstaben ein.

S wenn Sie selbst eine Matrix eingeben wollen.  
 Z wenn eine Zufallsmatrix erzeugt werden soll.  
 Q wenn Sie aufhoeren wollen.  
 W um Naehierungen und bereits berechnete Einschliessungen der  
 Eigenwerte auszugeben.  
 (n) um das (n)-te Eigenwert/Eigenvektor-Paar auszugeben (Naehierungen  
 und bereits berechnete Einschliessungen).  
 E (n) um das (n)-te Eigenwert/Eigenvektor-Paar einzuschliessen.  
 E A um alle Eigenwert/Eigenvektor-Paare einzuschliessen.  
 L Zwischenergebnisse ausgeben.  
 N keine Zwischenergebnisse ausgeben.  
 I gibt diese Information aus.

Dabei steht (n) immer fuer eine natuerliche Zahl zwischen 1 und  
 der Dimension.

\* S

Welche Dimension?

\* 5

Geben Sie das linke untere Dreieck der symmetrischen Matrix  
 zeilenweise ein.

\* 0  
 \* 1 0  
 \* 0 1 0  
 \* 0 0 1 0  
 \* 0 0 0 1 0

Berechnung der Naehierungen fuer Eigenwerte und Eigenvektoren  
 durch das Jacobi-Verfahren.  
 Die Naehierungen fuer die Eigenwerte sind:

1 -1.73205080758E+00  
 2 1.73205080756E+00  
 3 9.99999999999E-01  
 4 -1.00000000000E+00  
 5 6.50343964109E-13

\* E 5

5-ter Eigenwert:  
 5 6.50343964109E-13 [ -1.0E-99, 1.0E-99]  
 5-ter Eigenvektor:  
 1 5.77350269190E-01 [ 5.77350269190E-01, 5.77350269192E-01]  
 2 -3.49563760223E-12 [ -1.0E-99, 1.0E-99]  
 3 -5.77350269191E-01 [ -5.77350269191E-01, -5.77350269191E-01]  
 4 9.56258596272E-14 [ -1.0E-99, 1.0E-99]  
 5 5.77350269190E-01 [ 5.77350269190E-01, 5.77350269192E-01]

\* Q

```

+++++++ Zeichnung des Polynoms 2030 x**4 - 5741 x**3 - x**2 + 11482 x
+++++++ - 8118 .
+++++++ Die Auswertung der Polynomwerte erfolgt mit dem Gleitpunkt-Horner-
+++++++ Schema.
+++++++
+++++++ Trotz der best-moeglichen Gleitpunktarithmetik werden die Funk-
+++++++ tionswerte durch Ausloeschungen, Rundungsfehler etc. voellig ver-
+++++++ faelst.
    
```

Geben Sie den Grad des Polynoms und dann die Koeffizienten in aufsteigender Reihenfolge ein.

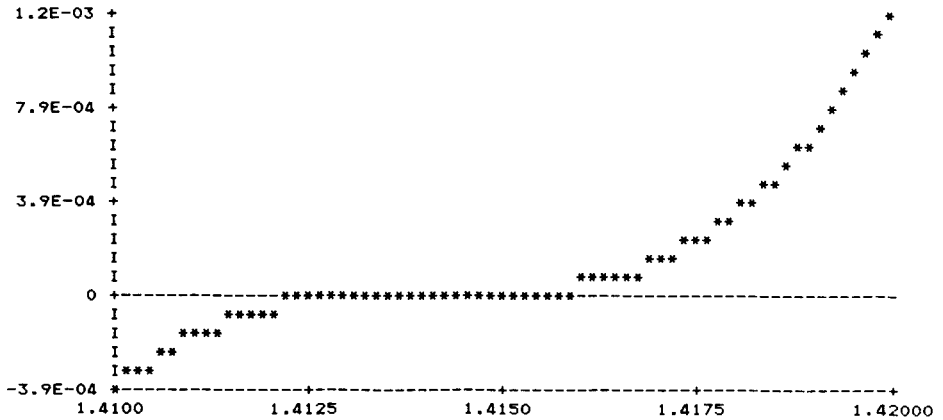
```

* 4
* -8118 11482 -1 -5741 2030
    
```

In welchem Bereich soll das Polynom gezeichnet werden?

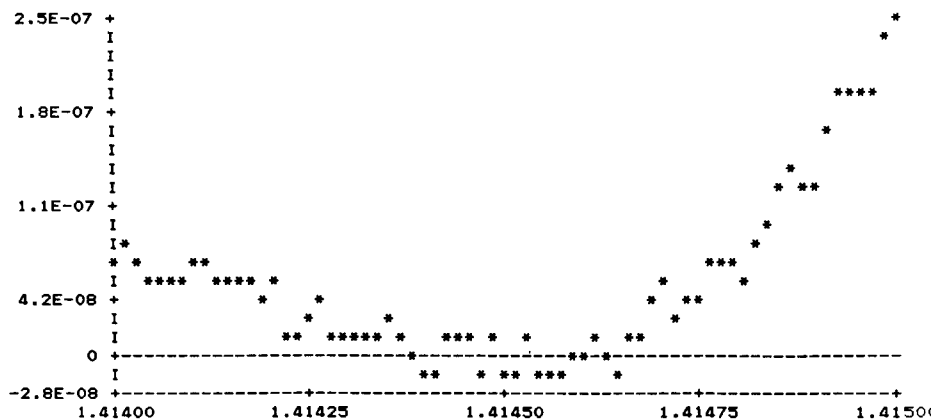
```

* 1.41 1.42
    
```



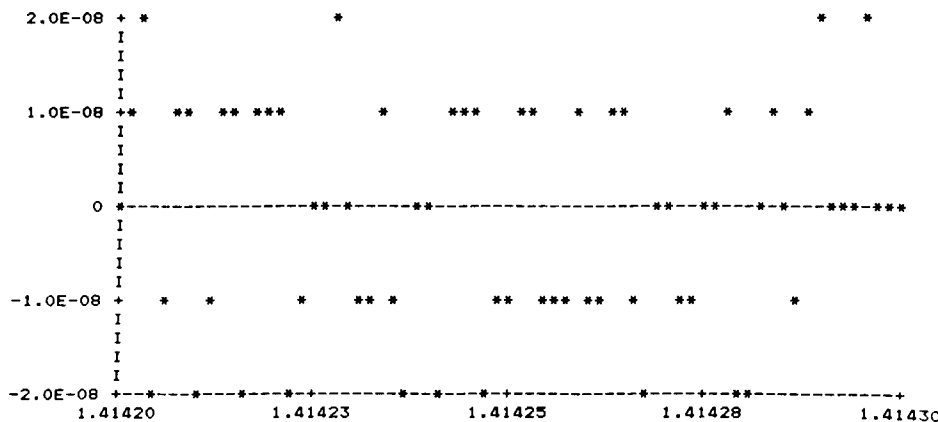
Geben Sie entweder einen neuen Bereich ein oder P oder Q.

\* 1.414 1.415



Geben Sie entweder einen neuen Bereich ein oder P oder Q.

\* 1.4142 1.4143



Geben Sie entweder einen neuen Bereich ein oder P oder Q.

\* Q

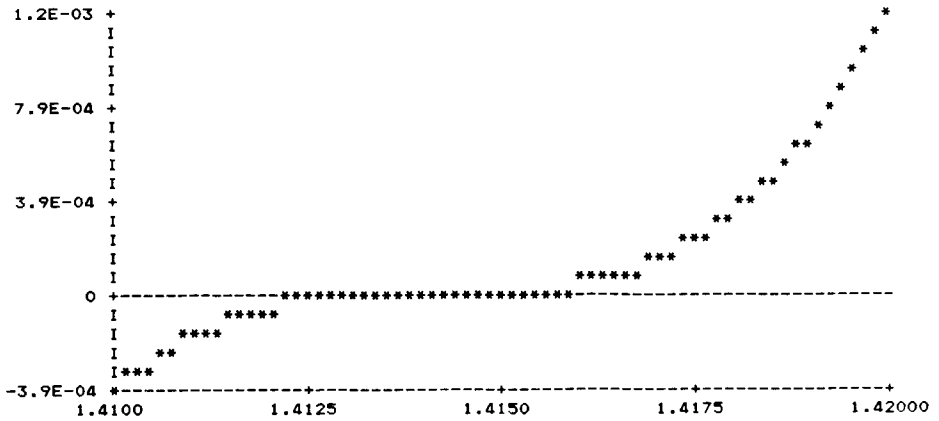
+++++++ Zeichnung desselben Polynoms wie oben in denselben Bereichen.  
 ++++++ Die Berechnung der Polynomwerte erfolgt jetzt mit einem neuen Algo-  
 rithmus unter Verwendung der genauen Arithmetik.  
 ++++++ Alle Funktionswerte werden bis auf 12 Dezimalen genau berechnet.

Geben Sie den Grad des Polynoms und dann die Koeffizienten  
 in aufsteigender Reihenfolge ein.

\* 4  
 \* -8118 11482 -1 -5741 2030

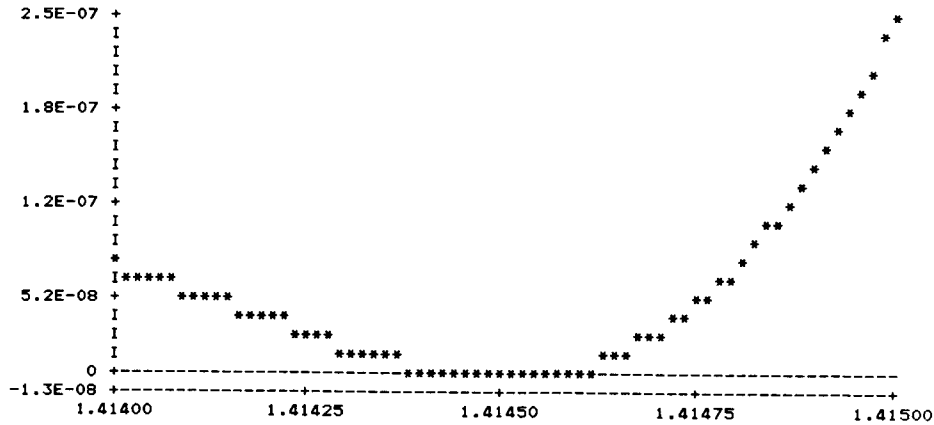
In welchem Bereich soll das Polynom dargestellt werden?

\* 1.41 1.42



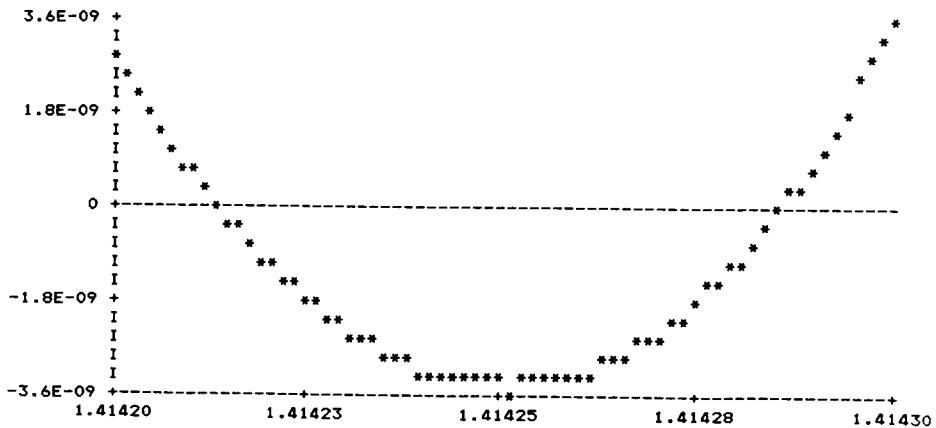
Geben Sie entweder einen neuen Bereich ein oder P oder Q.

\* 1.414 1.415



Geben Sie entweder einen neuen Bereich ein oder P oder Q.

\* 1.4142 1.4143



Geben Sie entweder einen neuen Bereich ein oder P oder Q.

\*Q

+++++++ Die hier implementierte Arithmetik ist die best-moegliche Gleit-  
 ++++++ punkt-Arithmetik. Trotzdem ist bei naiver Anwendung von Gleitpunkt-  
 ++++++ Algorithmen grosse Vorsicht geboten.

## Auswertung des Polynoms

$$p(x) = 543339720 x^3 - 768398401 x^2 - 1086679440 x + 1536796802$$

An der Stelle 1.41420000000E+00  
 Horner-Schema gleitpunktmaessig: 2.80000000000E-01  
 Horner-Schema intervallmaessig: [ 2.7E-01, 3.0E-01]  
 Genaues Verfahren unter Verwendung des genauen Skalarprodukts:  
 [ 2.82673919360E-01, 2.82673919361E-01]

An der Stelle 1.41421356238E+00  
 Horner-Schema gleitpunktmaessig: 1.00000000000E-02  
 Horner-Schema intervallmaessig: [ -1.0E-02, 1.0E-02]  
 Genaues Verfahren unter Verwendung des genauen Skalarprodukts:  
 [ 7.32719247117E-14, 7.32719247118E-14]

An der Stelle 1.41421356100E+00  
 Horner-Schema gleitpunktmaessig: -1.00000000000E-02  
 Horner-Schema intervallmaessig: [ -1.0E-02, 1.0E-02]  
 Genaues Verfahren unter Verwendung des genauen Skalarprodukts:  
 [ 2.89746134368E-09, 2.89746134369E-09]

+++++++ In jedem Fall liefert das neue Verfahren den Wert des Polynoms  
 ++++++ bis auf die letzte Dezimale genau.

```

+++++++ Newton-Verfahren; angewandt auf das Polynom
+++++++
+++++++ P(x) = 67872320568 x**3 - 95985956257 x**2 - 135744641136 x
+++++++ + 191971912515
+++++++
+++++++ mit dem Startwert x0 = 2.0
+++++++
+++++++ Die Funktionsauswertungen erfolgen nach dem Gleitpunkt-Horner-Schema.
+++++++ In der linken Spalte sind die Iterierten gezeigt, in der rechten die
+++++++ Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterierten.
+++++++
+++++++ Das Newton-Verfahren iteriert monoton (!) auf den Wert 1.41421353154
+++++++ zu, bei dem es stehen bleibt !
+++++++
+++++++ In Wirklichkeit besitzt das Polynom P gar keine positive Nullstelle
+++++++ und der kleinste Wert P(x) des Polynoms fuer positives x ist etwa 1.
+++++++ positive x .

```

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| 1.73024785661E+00 | 2.698E-01 |
| 1.57979152125E+00 | 1.505E-01 |
| 1.49923019011E+00 | 8.056E-02 |
| 1.45733317058E+00 | 4.190E-02 |
| 1.43593403289E+00 | 2.140E-02 |
| 1.42511502231E+00 | 1.082E-02 |
| 1.41967473598E+00 | 5.440E-03 |
| 1.41694677731E+00 | 2.728E-03 |
| 1.4158082832E+00  | 1.366E-03 |
| 1.41489735833E+00 | 6.835E-04 |
| 1.41455549913E+00 | 3.419E-04 |
| 1.41438453509E+00 | 1.710E-04 |
| 1.41429903606E+00 | 8.550E-05 |
| 1.41425628589E+00 | 4.275E-05 |
| 1.41423488841E+00 | 2.140E-05 |
| 1.41422414110E+00 | 1.075E-05 |
| 1.41421847839E+00 | 5.663E-06 |
| 1.41421582935E+00 | 2.649E-06 |
| 1.41421353154E+00 | 2.298E-06 |
| 1.41421353154E+00 | 0.000E+00 |
| 1.41421353154E+00 | 0.000E+00 |
| 1.41421353154E+00 | 0.000E+00 |
| 1.41421353154E+00 | 0.000E+00 |
| 1.41421353154E+00 | 0.000E+00 |
| 1.41421353154E+00 | 0.000E+00 |

Wert des Polynoms an der Stelle 1.41421353154 :  
 [ 1.00018250381E+00, 1.00018250382E+00 ] ,  
 ausgewertet mit dem genauen Algorithmus unter Verwendung des genauen  
 Skalarproduktes.

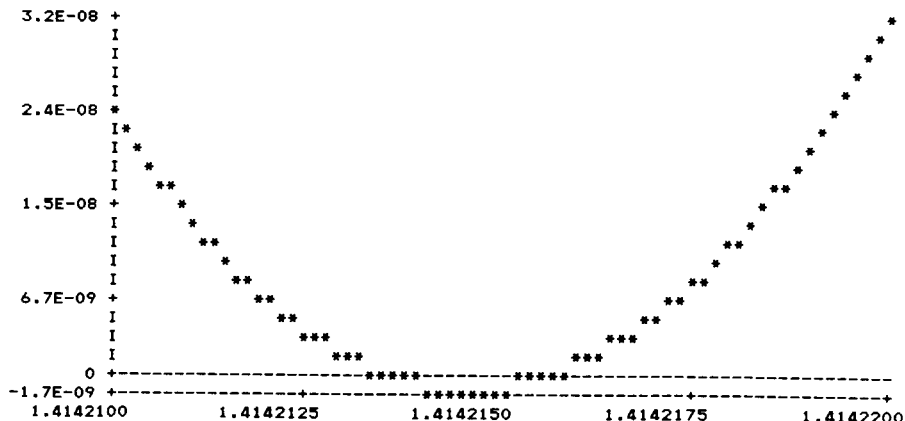


+++++++ Statt des Gleitpunkt-Horner-Schemas wird jetzt der genaue Algo-  
 rithmus unter Verwendung des genauen Skalarprodukts zur Auswertung  
 der Funktionswerte benutzt.

\* S  
 \* G

In welchem Intervall soll das Polynom dargestellt werden?

\* 1.41421 1.41422



\* E

Geben Sie eine Naehering fuer eine Nullstelle an.

\* 1.414

Im Intervall [ 1.41421356237E+00, 1.41421356238E+00 ]  
 liegt bewiesenermassen genau eine Nullstelle des Polynoms.

\* 1.415

Im Intervall [ 1.41421568627E+00, 1.41421568628E+00 ]  
 liegt bewiesenermassen genau eine Nullstelle des Polynoms.

\* Q

+++++++ Die Auswertung nach dem Horner-Schema liefert ein hoechst ungenaues  
 Bild des Polynoms. Erst das neue, genaue Verfahren gibt Aufschluss  
 ueber den Verlauf des Polynoms.

+++++++ Trotz der eingegebenen ungenauen Naehering liefert der neue, genaue  
 Algorithmus die Loesung bis auf die letzte Dezimale.

+++++++ Algorithmus zur Berechnung des Werts einer beliebigen aus +,-,\*,  
 ++++++ /,(, ) gebildeten Formel fuer eine Variablenbelegung. Das Programm  
 ++++++ stellt in gewisser Weise die Fortfuehrung des Algorithmus zur  
 ++++++ genauen Berechnung von Skalarprodukten dar.

Geben Sie bitte eine Formel ein.

\*  $X**4 + 2Y**2 - 4Y**4$

Geben Sie bitte einen der folgenden Buchstaben ein :

F fuer eine neue Formel.  
 E fuer eine Einschliessung des Werts der Formel.  
 L um die Zwischenergebnisse zu sehen.  
 N um keine Zwischenergebnisse zu sehen.  
 D um die momentan bearbeitete Formel zu sehen.  
 Q um aufzehoeren.  
 I fuer diese Information.

\* E

Geben Sie die Werte der Variablen ein.

Wert fuer X :  
 \* 665857

Wert fuer Y :  
 \* 470832

Reelle Naehierung : -3.000000000000E+12  
 Naive Intervallrechnung : [ -3.0E+12, 5.0E+12]  
 Neues, genaues Verfahren : [ 1.000000000000E+00, 1.000000000000E+00]

Geben Sie E,F oder Q ein. Die Information erhalten Sie durch I.

\* Q

+++++++ Offensichtlich kann bereits bei einfachsten Formeln das Ergebnis  
 ++++++ durch Ausloeschung beliebig verfaelscht werden. Der neue Algorithmus  
 ++++++ liefert alle Funktionswerte bis auf die letzte Dezimale genau.

```

+++++++ Algorithmus zur bewiesenen Loesung eines nicht-linearen Gleichungs-
+++++++ systems.
+++++++
+++++++ Die einzelnen Gleichungen duerfen beliebig aus +,-,*,/,() zusammen-
+++++++ gesetzt sein. Der Algorithmus gibt einen Loesungsbereich aus, in dem
+++++++ bewiesenermassen genau eine Loesung des nicht-linearen Gleichungs-
+++++++ systems ist.

```

Dies ist ein Programm zur bewiesenen Einschliessung der Loesung eines nicht-linearen Gleichungssystems.

Geben Sie bitte die Dimension des Systems ein.

\* 4

Geben Sie bitte die 1-te Gleichung des nicht-linearen Systems ein.

\* A+B+D-1

Geben Sie bitte die 2-te Gleichung des nicht-linearen Systems ein.

\* B-0.6D/C

Geben Sie bitte die 3-te Gleichung des nicht-linearen Systems ein.

\* C+D-1

Geben Sie bitte die 4-te Gleichung des nicht-linearen Systems ein.

\* D-0.3AC

Die Dimension des nicht-linearen Gleichungssystems ist 4.  
Geben Sie bitte Anfangswerte der Variablen ein.

Wert fuer A :

\* 1

Wert fuer B :

\* 1

Wert fuer C :

\* 1

Wert fuer D :

\* 1

Die Dimension des nicht-linearen Gleichungssystems ist 4.  
Das System lautet :

$$A+B+D-1 = 0$$

$$B-0.6D/C = 0$$

$$C+D-1 = 0$$

$$D-0.3AC = 0$$

Momentane Naehierung fuer A : 1.000000000000E+00

Momentane Naehierung fuer B : 1.000000000000E+00

Momentane Naehierung fuer C : 1.000000000000E+00

Momentane Naehierung fuer D : 1.000000000000E+00

Geben Sie bitte einen der folgenden Buchstaben ein :

G zur Durchfuehrung eines Schritts einer Gleitpunkt-Newton-Iteration.  
 L um die Zwischenergebnisse zu sehen.  
 N um keine Zwischenergebnisse zu sehen.  
 P um eine neue Gleitpunktnaeherung einzugeben.  
 E fuer eine bewiesene Einschliessung der Loesung des Systems.  
 D um das momentan bearbeitete Problem zu sehen.  
 C fuer Kommentare der Arbeitsgaenge.  
 S um ein neues nicht-lineares System einzugeben.  
 Q um aufzehoeren.  
 I fuer diese Information.

Geben Sie bitte E,G,S oder Q ein. Die Information erhalten Sie durch I.

\* E

Das nicht-lineare Gleichungssystem ist bewiesenermassen loesbar.

Durch den Algorithmus wurde bewiesen, dass die Loesung mit Sicherheit in folgendem Bereich liegt :

[ 7.00322250679E-01, 7.00322250680E-01]  
 [ 1.26058005122E-01, 1.26058005123E-01]  
 [ 8.26380255801E-01, 8.26380255802E-01]  
 [ 1.73619744198E-01, 1.73619744199E-01]

Ausser der Existenz der Loesung wurde durch den Algorithmus darueberhinaus sogar die Eindeutigkeit der Loesung in diesem Bereich bewiesen !

Geben Sie bitte E,G,S oder Q ein. Die Information erhalten Sie durch I.

\* Q

+++++++ Die Loesung der nachfolgenden Randwertaufgabe ist  $y = \cos x$ .

$$Y'' + Y = 0$$

$$Y(0) = 1$$

$$Y'(0) = 0$$

Zur vorliegenden Randwertaufgabe existiert genau eine Loesung  $Y(X)$  und diese liegt in dem folgenden Funktionsstreifen  $V(X)$ :

$$V(X) = + V[0]*X^0 + V[1]*X^1 + V[2]*X^2 + V[3]*X^3 + V[4]*X^4 + V[5]*X^5 + V[6]*X^6 + V[7]*X^7 + V[8]*X^8 + V[9]*X^9 + V[10]*X^{10} + V[11]*X^{11} + V[12]*X^{12}$$

Mit den Intervallkoeffizienten :

```
V[0] = [ 9.999999999999E-01, 1.00000000001E+00]
V[1] = [ -1.0E-99, 1.0E-99]
V[2] = [-5.00000000001E-01, -4.99999999999E-01]
V[3] = [ -2.0E-99, 2.0E-99]
V[4] = [ 4.16666666606E-02, 4.16666666607E-02]
V[5] = [ -2.0E-99, 2.0E-99]
V[6] = [-1.38888886079E-03, -1.38888886078E-03]
V[7] = [ -2.0E-99, 2.0E-99]
V[8] = [ 2.48015230275E-05, 2.48015230276E-05]
V[9] = [ -2.0E-99, 2.0E-99]
V[10] = [-2.75495951432E-07, -2.75495951430E-07]
V[11] = [ -2.0E-99, 2.0E-99]
V[12] = [ 2.04071075133E-09, 2.04071075135E-09]
```

Wertetabelle fuer  $X = -(0.1)1$  :

```
V(-1.00) = [ 5.4030230586E-01, 5.4030230588E-01]
V(-0.90) = [ 6.2160996826E-01, 6.2160996829E-01]
V(-0.80) = [ 6.9670670934E-01, 6.9670670936E-01]
V(-0.70) = [ 7.6484218728E-01, 7.6484218730E-01]
V(-0.60) = [ 8.2533561490E-01, 8.2533561493E-01]
V(-0.50) = [ 8.7758256188E-01, 8.7758256191E-01]
V(-0.40) = [ 9.2106099400E-01, 9.2106099402E-01]
V(-0.30) = [ 9.5533648912E-01, 9.5533648914E-01]
V(-0.20) = [ 9.8006657784E-01, 9.8006657786E-01]
V(-0.10) = [ 9.9500416527E-01, 9.9500416529E-01]
V(0.00) = [ 9.9999999999E-01, 1.00000000001E+00]
V(0.10) = [ 9.9500416527E-01, 9.9500416529E-01]
V(0.20) = [ 9.8006657784E-01, 9.8006657786E-01]
V(0.30) = [ 9.5533648912E-01, 9.5533648914E-01]
V(0.40) = [ 9.2106099400E-01, 9.2106099402E-01]
V(0.50) = [ 8.7758256188E-01, 8.7758256191E-01]
V(0.60) = [ 8.2533561490E-01, 8.2533561493E-01]
V(0.70) = [ 7.6484218728E-01, 7.6484218730E-01]
V(0.80) = [ 6.9670670934E-01, 6.9670670936E-01]
V(0.90) = [ 6.2160996826E-01, 6.2160996829E-01]
V(1.00) = [ 5.4030230586E-01, 5.4030230588E-01]
```