

3 | Februar 1954

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Eggers

**Über die Integrieranlage „Integromat“
des Instituts für angewandte
Mathematik der Universität Hamburg**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Bearbeiter: K. Eggers
Institut für Schiffbau,
Hamburg

Februar 1954

Bericht

über die Integrieranlage " I n t e g r o m a t " des
Instituts für angewandte Mathematik der Universität Hamburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr. - Ing. G. Weinblum

Bericht

über die Integrieranlage "Integromat" des
Instituts für angewandte Mathematik der
Universität Hamburg.

von Dipl. Math. K. Eggers

Hamburg, Februar 1954

Inhaltsübersicht:

	Seite
I. <u>Einleitung</u>	1
II. <u>Technische Beschreibung</u>	2
1) Gesamtwirkungsweise	
2) Beschreibung der Einzelelemente	
3) Technische Erfahrungen	
III. <u>Beschreibung des mathematischen Umfangs</u>	10
1) Pfaffsche Gleichungssysteme und Entwurf von Schaltskizzen	
2) Günstige Ausnutzung des Wertebereiches	
3) Wahl der Einheit, Anfangsgenauigkeit, Arbeitszeitberechnung.	
4) Darstellbarkeit von Integrandenfunktionen auf Lochstreifen, Vorschläge und Versuche	
IV. <u>Fehlerquellen</u>	17
1) Stufenintegrationsfehler	
2) Quantelungsfehler	
3) Quantelungsfehler bei indirektem Kraftfluss, instabile Schaltungen	
4) Technische Fehler	
V. <u>Behandelte Aufgaben, Weitere Planung</u>	28

I. E i n l e i t u n g

Der Integromat, eine Integrieranlage zur Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen nach dem Prinzip des Bush-Analysators, wurde in den Jahren 1949 - 1953 entwickelt von der Firma Schoppe & Faser, Minden, unter Leitung von Dr. H. Bückner. Mit der Schaffung des Integromaten sollte ein Versuch gemacht werden, mit relativ geringen Kosten ein Gerät zu schaffen, das den modernen Grossintegrieranlagen an Flexibilität nicht nachsteht - den meisten sogar an Kapazität Überlegen ist - dafür aber auf exakte Annäherung der Lösungen verzichtet und nur für die technischen Fragen angemessene Genauigkeitsgrenzen hat, deren Eingangsdaten selbst nur innerhalb gewisser Unsicherheitsgrenzen bekannt sind.

Der Integromat unterscheidet sich prinzipiell von den bekannten Reibrad- oder Schneidenrad-Differentialanalysatoren in zwei Punkten:

1. Der Wertevorrat der Integranden ist diskret.
2. Die Variablen der Differentialgleichung werden nicht dargestellt durch kontinuierlich variable Drehwinkel, sondern durch "gequantelte" Grössen, nämlich durch diskrete Anzahlen positiver bzw. negativer elektrischer Impulse, welche einen Teil des Gerätes passieren.

Damit steht der Integromat zwischen analogen und digitalen Maschinen; dem Worte nach ist er digital; seine Schaltungen erfolgen jedoch nach den Prinzipien der analogen Reibradmaschine, die man als seinen Grenzfall ansehen kann bei Verfeinerung des Integrandenwertevorrates und der Dichte der Impulsfolgen. Die Diskretheit bedingt eine Berechenbarkeit aller Schritte unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sie erfolgen - (zumindest bei direkten Schaltungen) - und damit prinzipiell die Möglichkeit numerischer Fehlerberechnung.

Der folgende Bericht soll Unterlagen geben für Untersuchungen über die Anwendungsmöglichkeiten des Gerätes. Es werden Vorschläge gemacht, durch einfache Änderungen das Gerät zu verbessern. Darüber hinaus werden Kriterien für die Stabilität indirekter Schaltungen abgeleitet.

II. T e c h n i s c h e B e s c h r e i b u n g

Der Integromat rechnet mit positiven und negativen Gleichstromimpulsen. In seinen Elementen werden Impulsfolgen übersetzt in mechanische Drehbewegungen und dann als neue, modulierte Impulsfolgen, i.a. mit anderer Dichte, wieder ausgesandt. Zur Umformung von Impulsfolgen in Drehbewegungen dient das Schrittwerk, auch kurz Empfänger genannt; zur Umformung von Drehbewegungen in Impulsfolgen dient der "Geber" oder "Sender".

Ein Schrittwerk besteht aus Motor, Rutschkupplung, Welle mit Stachelrad, Schrittmagnet und Unterbrecher. Der permanent angeregte Motor wirkt über die Rutschkupplung auf das Stachelrad, dessen Drehbewegung durch den Unterbrecher aufgehalten wird. Der Unterbrecher wird vom Schrittmagneten hin- und herbewegt entsprechend der ins Schrittwerk eingehenden Impulse; während der Bewegung des Unterbrechers dreht der Motor die Welle um einen Schritt weiter bis zum nächsten Anschlag des Stachelrades. Das Stachelrad trägt 20 Stacheln. Je 10 Impulse am Schrittmagneten bewirken einen vollen Umlauf; - sowohl beim Einsetzen wie auch beim Abklingen des Stromstosses erfolgt ein Schritt.

Der Geber besteht aus einer Anzahl ringförmiger Kollektoren auf einer Welle, welche verschiedene Zahlen äquidistanter Lamellen am Umfang tragen. Zu jedem Kollektor gehört ein Schleifer. Ist n die Anzahl der Lamellen eines Kollektors, so wird

einmal $\delta = -0,5$, d.h. der Mittelwert von δ liegt bei 0,4, genau wie im obigen Fall.

Der Integromat enthält 8 Untersetzer. -

Eine Erweiterung der Untersetzer finden wir in dem nächst zu besprechenden Baustein des Integromaten, dem Tochtersender. Im Prinzip ist ein Tochtersender analog aufgebaut, nur trägt er nicht nur 3, sondern 20 Kollektoren mit 1 - 20 Lamellen. Ausserdem hat man am Tochtersender die Möglichkeit, das Vorzeichen der ausgehenden Impulse, das beim Untersetzer gleich dem der eingehenden ist, nach Wahl zu schalten.

Falls die Anzahl der Lamellen eines Kollektors nicht mehr Teiler von 20, der Anzahl der Stacheln am Rad, ist, so werden auch zeitlich äquidistante Eingangsimpulsfolgen nicht bewirken, dass eine gleichmässige Impulsfolge über den Kollektor ausgesendet wird, vielmehr wird die Dichter der Ausgangsimpulsfolge zeitlich variieren, i.a. periodisch. Dies wirkt sich aber ungünstig aus auf Schrittwerke, die von dieser Folge angetrieben werden sollen und führt eventuell zu Impulsunterschlagungen vermöge der Trägheit des Unterbrechers. Um diesen Effekt auszugleichen, sind beim Tochtersender Empfängerwelle und Geber elastisch gekoppelt, um diesen möglichst stossfrei laufen zu lassen. Dadurch wird allerdings der Sender fähig zu Drehschwingungen, während derer die Kontakte sich zusätzlich öffnen und schliessen, d.h. zuviel Impulse abgegeben werden, - deshalb sitzen auf der Geberwelle quecksilbergefüllte Dämpfungsscheiben.

Die maximale Stufenzahl von 20 ergibt sich daraus, dass bei mehr als 20 Lamellen auf einem Kollektor bei einem Schritt des Stachelrades eine Lamelle Kontakt schliessen und öffnen müsste, was einen zu kurzen Impuls ergibt. - Ein Tochtersender ist mit einem Wahlschalter für die 20 Übersetzungsstufen versehen.

Eine wesentliche Verfeinerung der Tochtersender gegenüber den Untersetzern liegt in der Ausstattung mit automatisch steuerbaren

Impulswählern, welchendem Gerät erlauben, Integrationen nachzubilden. Die 20 Schleifer der Kollektoren stehen mit 20 Sammelschienen in Verbindung, an diese sind die Impulswähler angeschlossen. - Impulswähler sind Schrittschalter mit 21 Kontakten, von denen einer frei ist, die anderen mit den Sammelschienen verbunden sind. Je nach Stellung des Kontaktarmes dieser Schalter wird er also von null bis zwanzig Impulsen pro Umlauf des Tochtersenders durchflossen. Diese Impulse steuern wieder ein Relais, das einem dem Impulswähler zugeordnetem Strom denselben Rhythmus aufprägt. Die Anfangslage des Impulswählers kann von Hand eingestellt werden; Veränderungen der Stellung während des Betriebes werden zeitlich und in der Richtung des Sprunges gesteuert durch Schaltimpulse, welche durch Abtasten eines Lochstreifens im zugehörigen Funktionstrieb gewonnen werden.

Ein Funktionstrieb enthält zunächst ein Schrittwerk, dessen Motor seinen Drehsinn mit dem Vorzeichen der eingehenden Impulse wechselt. Das Schrittwerk betreibt den Hin- und Herschub eines Filmstreifens über eine Abtastungsvorrichtung. Der Filmstreifen enthält Löcher in zwei Zeilen. Die Abtastung eines Loches der ersten Zeile bewirkt einen Sprung des Impulswählers auf eine der beiden benachbarten Stellungen; bei Abtastung eines Loches der zweiten Zeile ändert sich die Sprungrichtung des Impulswählers für die nächsten Sprünge; sprang er vorher jeweils zur dichteren Impulsfolge, d.h. zur höheren Übersetzungsstufe, dann jetzt zur nächst niederen.

Beim Erreichen der Stellung Null des Impulswählers wird das Vorzeichen der Ausgangsimpulsfolge automatisch umgeschaltet, dadurch sind Übersetzungsverhältnisse von -2,0 bis +2,0 möglich.

Die Lochung des Filmstreifens erfolgt mittels eines Handlochers, bevor der Streifen in den Funktionstrieb eingelegt und die Anlage eingeschaltet wird.

Identifizieren wir nun die Antriebsimpulsfolge des Tochtersenders

mit der Variablen x, die Antriebsimpulsfolge des Funktionstriebes mit der Variablen y, die Ausgangsimpulsfolge des Impulswählers mit der Variablen z und legen wir weiter fest, dass die Recheneinheit durch N Impulse dargestellt werden soll, so wird durch die gesamte hier beschriebene Einrichtung die Relation

$$\Delta z = \frac{n_a}{N} = \sum_i (f(y_i) \frac{\Delta x_i}{N} + \frac{\delta_i}{N}) = \sum_i f(y_i) \Delta x_i + \frac{1}{N} \sum \delta_i$$

dargestellt als Annäherung der Relation

$$z - z_0 = \int_{x=x_0}^x f(y(x)) dx$$

$$|\delta_i| < 1$$

Δx_i sind dabei die x-Impulszahlen, die dem Tochtersender zufließen, solange $f(y)$ konstant ist, d.h. die Anzahl der Summanden der Summe ist gleich der Anzahl der Veränderungen des Übersetzungsverhältnisses $f(y)$, vermehrt um eins.

Die Funktion $f(y)$ ist eine diskretwertige Treppenfunktion, die nur Werte aus dem Wertebereich $B(2,0; 1,9; \dots -1,9; -2,0)$ annehmen kann. Sie bestimmt das Lochmuster des Filmstreifens. Auf der Breite einer Filmperforation kann höchstens ein Loch in einer oder der anderen Zeile auftreten, damit ist eine obere Schranke für die Steigung der Funktion $f(y)$ gegeben.

Der Integromat enthält 4 Tochtersender. 3 davon sind mit je 2 Impulswählern verbunden, zu denen je ein Funktionstrieb gehört; der Tochtersender 1 ist mit 4 Impulswählern ausgerüstet, aber trotzdem mit nur 2 Funktionstrieben; die zugehörigen Lochstreifen tragen 4 Lochzeilen, zwei für jeden Impulswähler. Die Integrandenfunktionen je zweier Impulswähler müssen Funktionen derselben Variablen (des Antriebes für den Funktionstrieb) sein.

Der Muttersender unterscheidet sich von den Tochtersendern wesentlich dadurch, dass er nicht durch ein Schrittwerk, sondern durch einen Gleichstrommotor angetrieben wird, deshalb auch einen sehr gleichmässigen Lauf hat. Er bedarf keiner elastischen Kupp-

lung zwischen Antrieb und Geber und sein Stufenbereich geht hinauf bis $\pm 2,7$ Ausgangsimpulsen pro Umlauf. Zum Muttersender gehören 3 Wahlschalter und 8 Impulswähler zu 27 Stufen, die zu je zwei einem Funktionstrieb angehören wie beim Tochtersender 1. Die Geschwindigkeit des Muttersenders lässt sich über einen Widerstand regeln. Sie beträgt 12 bis 18 Umdrehungen pro Minute.

Die Addition von Variablen wird dargestellt von der Summentriebskette. Die Impulsfolgen werden durch Schrittwerke in Drehbewegungen verwandelt, der Drehsinn der Motore wechselt mit dem Vorzeichen der eingehenden Impulsfolge. Die Drehbewegungen werden über mechanische Differentialgetriebe addiert und Gebern zugeführt, die elastisch - gedämpft angeschlossen sind. Das Vorzeichen der ausgehenden Impulsfolge des Gebers wird gesteuert über einen Schleppkontakt, der je nach Drehsinn der Geberwelle einen von zwei Anschlägen berührt; das Vorzeichen bleibt erhalten bis zum Zeitpunkt, in dem der andere Anschlag berührt wird. Die Geber tragen Kollektoren zu 10, 5 und 2 Lamellen, liefern also die Summe mit dem Faktor 1,0; 0,5 und 0,2 je nach Stellung eines zugehörigen Wahlschalters.

Eine Summentriebskette hat 4 Eingänge a, b, c, d und je einen Geber für die Summen $a + b$; $a + b + c$ und $a + b + c + d$; durch Lösen einer Kupplung kann man auch stattdessen die Werte $a + b$, c und $c + d$ mit den zugehörigen Ausgangsfaktoren aussenden. Der Integromat besitzt 3 Summentriebsketten.

Die Summentriebsketten sind besonders empfindlich gegen die Erregung von Eigenschwingungen, welche sich den Drehbewegungen überlagern. Sobald diese Schwingungen eine Amplitude in der Größenordnung von 20° erreichen, können an den Gebern nur noch die Ausgangsfaktoren 0,5 und 0,2 geschaltet werden; an den Kollektoren mit 10 Lamellen entstehen zusätzliche Impulse. Es ist wegen der grösseren Dämpfung angebracht, stets den Ausgang $a + b + c + d$ zu wählen, auch wenn c und d null sind.

Bei langsamen Drehbewegungen, die als Differenz hochfrequenter Impulsfolgen resultieren, können die Schwingungen Einfluss auf das Ausgangsvorzeichen gewinnen, das dann häufig wechselt, angeschlossenene Lochstreifentransporte flattern in der Schubrichtung. Abhilfe ist möglich durch Wahl der minimalsten Geschwindigkeit für den Muttersender und gegebenenfalls Auseinanderbiegen der Anschläge des Schleppkontaktes.

Das Verhalten der Summentriebe, insbesondere Impulsrhythmus und Vorzeichen, kann gut überprüft werden durch das Impulsprüfgerät, dem man die Ausgangsimpulse zuleiten kann. Das Gerät enthält Gleichrichter und zwei Kontrollampen, die bei positiven bzw. negativen Impulsen aufleuchten.

Die Verkoppelung der Bausteine des Integromaten zu einer Rechenschaltung gemäss der zu behandelnden Aufgabe geschieht auf der Schalttafel, in der sämtliche Schrittwerke mit (gelben) Buchsen Impulse aufnehmen, sämtliche Geber auf Reihen von 4 - 8 Buchsen Impulse abgeben. Die roten Buchsen geben den jeweiligen Ausgang mit umgekehrtem Vorzeichen, ersetzen also Umkehrtriebe. Die Verkopplung der Buchsen erfolgt durch einpolige Steckschnüre.

Die Darstellung der Rechenresultate erfolgt durch Aufzeichnen von Integralkurven auf dem Zeichentisch. Ein Schrittwerk betätigt den Vorschub eines 25 cm breiten, 20 m langen Registrierstreifens in Abhängigkeit von der Abszisse, ein zweites Schrittwerk betätigt die Bewegung der Schreibfeder quer zur Transportung entsprechend der Variation der Ordinate. Der Papiertransport geht nur in einer Richtung voll automatisch. Es wäre erstrebenswert, auch den Transport in anderer Richtung schalten zu können: Im allgemeinen zwar wird man als Abszisse die Zeit oder eine monoton wachsende Variable wählen; kennt man aber z.B. die Grösse des interessierenden Zeitintervalls bei Schwingungen, nicht aber die Grösse der zu erwartenden Amplituden, so trägt man zweckmässig die Zeit in geeignetem Masstab ^{als Ordinate} auf, um auf jeden Fall frei von den Einschränkungen durch die Begrenzungen des Papiers zu sein.

Der Abszissen - Papiertransport hat zudem eine ^{Lose}~~Loose~~ von nur ca. 0,5 mm, während das Papier in Ordinateurichtung gegen die Feder eine Lose von mehr als 1 mm hat. Es empfiehlt sich deshalb die Verwendung von nichtliniertem Schreibpapier und die Anbringung eines festangebrachten Zeichenstiftes für eine Nullbezugslinie der Ordinate auf dem Papier, der i.a. nicht genau parallel mit der Papierlinierung verlaufen wird.

10 Impulse am Abszissen- oder Ordinateurmotor bewirken einen Schrieb von 1 mm Länge. An einem Lochstreifentransport entspricht derselben Impulszahl ein Weg von 4,7 mm bei einer Lochstreifenlose von 1 mm gegenüber den Transporträdern. Die Lose liegt hier in der Grössenordnung von 2 Impulsen, beim Ordinateurmotor von 10 Impulsen - für sorgfältige Ablesung empfiehlt sich deshalb, die zu beobachtende Variable auf einen Lochstreifentransport zu schicken und einen Messtreifen relativ zu einer Marke verschieben zu lassen. Man hat gegenüber dem Ordinateurmotor zudem den Vorteil eines praktisch unbegrenzten Wertebereiches für die Variable.

Technische Erfahrungen.

In der Erprobungszeit (1.XII.53 - 15.II.54) ereignete sich eine grössere Zahl technischer Störungen, welche aber meistens nach Erkennen der Ursache dauerhaft beseitigt werden konnten.

Zur Zeit werden noch folgende Störungen beobachtet:

- 1) Unruhiger Lauf von Tochtersendern, dadurch unregelmässige Impulsabgabe (bei T_1 und T_3).
- 2) Lockerung der Rutschkupplungen, die fast alle nachgezogen werden mussten.
- 3) Bruch der am stärksten beanspruchten Unterbrecherfeder (Ordinateurschreibwerk).
- 4) Versagen von Lochstreifenabtastungen bei nicht genügend

justiertem Kontaktabstand.

- 5) Versagen von Feldumschaltern der Motore (Vorzeichenumschaltern).

Die Störungen 4) und 5) lassen sich durch sorgfältiges Justieren praktisch ausschalten.

III. B e s c h r e i b u n g d e s m a t h e m a t i - s c h e n U m f a n g e s

Der Integromat ist ein Gerät zur physikalischen Darstellung von Systemen Pfaffscher Gleichungen der Form

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} du_k + b_i dx = 0 \quad i = 1 \dots n, \quad (3.1)$$

deren Koeffizienten Summen von Funktionen je einer Variablen sind; insbesondere zur Darstellung der zu diesen Systemen gehörenden Integralkurven zu gegebenen Anfangswerten. Es ist an anderer Stelle gezeigt worden, wie jede gewöhnliche Differentialgleichung auf ein System dieser Form transformiert werden kann.

[2]

Für den Integromaten müssen die Koeffizientenfunktionen einer Variablen überdies noch einen beschränkten, diskreten Wertevorrat haben; innerhalb dieses Wertevorrats können sie, jeweils nur um eine Stufe, nur in Abständen eines ganzen Vielfachen eines Elementarbetrages des Argumentes springen (nämlich des durch 10 Impulse dargestellten Betrages).

Wir unterscheiden 5 Wertebereiche:

Wertebereich A besteht aus den 55 Zahlen							-2,7; -2,6 -0,1; 0; 0,1 +2,7
"	B	"	"	"	41	"	-2,0; -1,9; 1,9; 2,0
"	C	"	"	"	3	"	0,1; 0,2; 0,5
"	D	"	"	"	7	"	0; $\pm 0,2$; $\pm 0,5$; $\pm 1,0$
"	E	"	"	"	2	"	0; 1.

Zahlen dieser Bereiche werden im folgenden mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ entsprechend gekennzeichnet. Für Funktionen mit Wertebereich A wählen wir die Symbole f, g ; für Funktionen mit Wertebereich B die Symbole h, k . Dann lautet das allgemeinste, mit dem Integromaten darstellbare System:

Zugeordneter Trieb:	Schaltgleichungen:
Muttersender $J_1 - J_8$ $W_1 W_2 W_3$	$dz_{2j-1}^{(1)} = f_j(u_j^{(1)})dx_1 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$ $dz_{2j}^{(1)} = g_j(u_j^{(1)})dx_1$ $dz_{8+v}^{(1)} = \alpha_v^{(1)}dx_1 \quad v = 1, 2, 3$
Tochtersender 1 $J_9 - J_{12}, W_4$	$dz_{2i-1}^{(2)} = h_i(u_i^{(2)})dx_2 \quad i = 1, 2$ $dz_{2i}^{(2)} = k_i(u_i^{(2)})dx_2$ $dz_5^{(2)} = \beta_2 dx_2$
Tochtersender 2, 3, 4 W_5, W_6, W_7	$dz_k^{(m)} = h_k^{(m)}(u_k^{(m)})dx_m \quad k = 1, m2$ $dz_3^{(m)} = \beta_m dx_m \quad m = 2, 3, 4$
Untersetzungstriebe $V_1 - V_8$	$dz_h = \gamma_e dx_{5+h} \quad h = 1, 2, \dots, 8$
Summentriebkette σ $\sigma = 1, 2, 3$	$dw_1 = \delta_1^{(\sigma)} [\xi^{(\sigma)}(dy_1^{(\sigma)} + dy_2^{(\sigma)}) + dy_3^{(\sigma)} + dy_4^{(\sigma)}]$ $dw_2 = \delta_2^{(\sigma)} [\xi^{(\sigma)}(dy_1^{(\sigma)} + dy_2^{(\sigma)}) + dy_3^{(\sigma)}]$ $dw_3 = \delta_3^{(\sigma)} [dy_1^{(\sigma)} + dy_2^{(\sigma)}]$

Schreibwerte	$d \int = dv_2$	$d\eta = dv_2$	$(\xi, \eta = \text{Koordinaten})$
--------------	-----------------	----------------	------------------------------------

Jeder der rechts stehenden Schaltgleichungen ist einer der links stehenden Triebe des Integromaten zugeordnet, der sie realisiert. -

Alle mit Symbol w oder z gekennzeichneten Variablen und x_1 nennen wir abhängig, alle mit x, y oder u gekennzeichneten Variablen bis auf x_1 unabhängig. Alle im Gleichungssystem vorkommenden unabhängigen Variablen müssen mit je einer abhängigen identifiziert werden; dieses ergibt ein zusätzliches Gleichungssystem von Identitäten, welches am Gerät realisiert wird durch Herstellen der Steckschnurverbindungen an der Hauptschalttafel, unabhängigen Variablen entsprechen Antriebe zu Schrittwerken (gelbe Buchsen). Nach Substitution der Identitäten bleibt als allgemeinstes System 36 Pfaffsche Gleichungen in 37 Variablen. -

Die Verkopplung wird zweckmässig festgelegt auf einer Schaltskizze, welche die Hauptschalttafel schematisch wiedergibt. Die verkoppelten Anschlussbuchsen werden durch Striche verbunden mit Pfeilen in der Richtung vom Ausgang zum Eingang.

Auch wenn eine Differentialgleichung bereits durch ein System der Form (3.1) ersetzt ist, sind doch im allgemeinen noch einige Kunstgriffe nötig, um es dem Integromaten anzupassen. Die Koeffizientenfunktionen des Systems werden im allgemeinen den Wertebereich der Integrandenfunktionen entweder überschreiten oder in ihrer gesamten Variation nicht voll ausnutzen. Die letztere Erscheinung kann man vermindern durch Einschaltung von Untersetzungstrieben bzw. Stufenausgangsfaktoren der Summentriebe, indem man etwa einen Term $a_{ik} du_k$ ersetzt durch

$(\frac{a_{ik}}{\gamma}) \cdot (\gamma du_k)$, d.h. die $\frac{1}{\gamma}$ fache Integrandenfunktion wird nach dem γ -fachen Differential integriert, welches uns durch den Untersetzer geliefert wird ($\gamma = 0,5; 0,2; 0,1$).

Die Verwendung des Untersetzers kann erspart werden, wenn du_k

den Ausgang eines Impulswählers bildet, $du_k = h_k(u_j)du_1$, dessen Integrandenfunktion $h_k(u_j)$ gerade mit γ multipliziert werden muss, um den Wertebereich für Integranden nicht zu überschreiten und wenn du_k nicht noch an anderer Stelle als Integrationsdifferential auftritt - man ersetzt $h_k(u_j)$ durch $\gamma \cdot h_k(u_j)$.

Bei direkten und quasidirekten Schaltungen - Begriffe, die wir hier vorwegnehmen, aber im Teil IV behandeln - lässt sich die Gesamtheit sämtlicher Koeffizienten durch solche von kleinerem Betrag ersetzen, wenn man die Variable des Hauptauftriebs, bei uns x_1 , herauftransformiert; dazu sind keine Übersetzungsgetriebe erforderlich, man setzt die durch die Umdrehung des Muttersenders repräsentierte Variable gleich $\frac{1}{\alpha} x_1$, $\alpha = 0,1; 0,2 \dots 0,9$ und setzt damit den Ausgang des Muttersenders gleich x_1 , der den Wahlschalter bei Stellung α fließt. Dies bedeutet, bei konstanter Umdrehung des Muttersenders, i.a. eine Vergrößerung der Rechenzeit - es zeigt sich aber durch diese Möglichkeit, dass ein Differentialanalysator ganz allgemein nicht mit Übersetzungstrieben ausgerüstet zu sein braucht, dass nicht einmal die Integratoren ein maximales Übersetzungsverhältnis vom Betrage grösser oder auch nur gleich eins zu besitzen brauchen - wenn auf optimale Rechenzeiten kein Wert gelegt wird.

Die Übertragung der Koeffizientenfunktionen auf die Lochstreifen erfordert die Festlegung der "Einheit", d.h. die Festlegung der Zahl N von Impulsen, durch welche der Wert eins der abzubildenden Variablen dargestellt werden soll. Soll an einem Integrator z.B. die Relation $dz = ydx$ dargestellt werden, so müssen dann N y -Impulse bewirken, dass der Schrittschalter des Impulswählers vom Übersetzungsverhältnis null zur Übersetzung 1 : 1 wandert. 10 Impulse am Schrittwerk des Funktionstriebes bewegen den Lochstreifen um eine Perforation; der Schrittschalter kann nur an ganzen Vielfachen einer Perforationsbreite springen, hat den Wertebereich 0,1; 0,2; 0,9 zu durchlaufen - damit ergibt sich die Zahl von $10 \cdot 10 = 100$ Impulsen als minimale

Einheit.

Die meistgebrauchten Lochstreifen müssen äquidistant gelocht werden zur Darstellung linearer Integrandenfunktionen. Bei der vorliegenden Ausführung des Integromaten ist es erforderlich, für die Sprungrichtungs- und Vorzeichenänderung beim Nulldurchgang 3 Perforationen für besondere Schaltbefehle zu lochen, damit ergibt sich als minimaler Abstand für lineare Streifen 4 Perforationen, d.h. eine Einheit von 400 Impulsen, als grössere Einheiten kommen 500, 600, 700 u.s.w. in Frage. Es kann eine Änderung der Anlage mit geringen Mitteln vorgeschlagen werden, welche erlaubt, tatsächlich mit minimaler Einheit von 100 bei linearen Funktionen zu arbeiten.

Aus der Wahl der Einheit bestimmt sich im wesentlichen die Rechenzeit für eine Aufgabe. Betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung: $y'' + y = 0$
Das entsprechende Pfaffsche System lautet

$$dy = -y'dx \qquad dy' = -ydx$$

x werde durch die Umdrehung des Muttersenders dargestellt, d.h. durch die Ausgangsimpulse bei Stellung 1,0 am Wahlschalter. Ist $1 = 400$ Impulse, so müssen diesen Schalter $2\pi \cdot 400$ Impulse passieren, der Muttersender erzeugt 120 - 180 Impulse pro Minute, daraus ergibt sich eine Rechenzeit von 14 bis 21 Minuten pro volle Schwingung; - bei einer Einheit von 100 nur ein Viertel dieser Zeit.

Im Falle der gedämpften Schwingung $y'' + ky' + y = 0$ lauten die entsprechenden Pfaffschen Gleichungen

$$dy = y'dx \qquad dy' = -(kdy + ydx)$$

Für den Summentrieb, der zur Schaltung der zweiten Gleichung benutzt wird, ist es bei grösserer Stufenzahl den Faktor 0,5 am Ausgang zu wählen, man schreibt formal dann

$$dy = 0,5y' d(2x) \quad dy' = -0,5 (2kdy + yd(2x)) ;$$

die hierzu gehörige Schaltung entspricht der vorher erwähnten Möglichkeit, die Variable x durch die Ausgangsimpulsfolge bei

Wahlschalterstellung 0,5 am Muttersender darzustellen. Wir erhalten effektiv eine Verdoppelung der Einheit, d.h. eine Zeit von 28 - 42 Minuten für eine volle Schwingung.

Wesentlich ist die Einsicht, dass die Rechenzeit direkt von der Einheit, von der Grösse der Amplitude der Schwingung aber nur soweit abhängig ist, als eine grosse Stufenzahl Herabsetzung der Geschwindigkeit des Mutterseinders erfordert.

Eine Mindestgrösse der Einheit im Verhältnis zur minimalen Einheit ist gegeben durch die maximale Steigung aller auftretenden Integrandenfunktionen, da diese nur im Abstand von $1/10$ der minimalen Einheit, d.h. in dem Abstand von 10 Impulsen einen Sprung machen können.

Während vom Gesichtspunkt der Arbeitszeit die Wahl einer kleinen Einheit erstrebenswert erscheint, gibt es andere Argumente für die Wahl grosser Einheiten.

Grosse Einheiten sind erforderlich für Differentialgleichungen, welche in ihren Lösungen sensibel sind in bezug auf die Genauigkeit der Anfangswerte. Die Anfangswerte werden dargestellt durch die Anfangspositionen der Lochstreifen relativ zur Abtastung - die Einstellung der Wähler auf die Anfangsstufen bedeutet nur eine Grobeinstellung. Bei einer Einheit von 100 kann ein Anfangswert von 1,0 nur auf 1 % Genauigkeit eingestellt werden, i.a. verschiebt sich die Anfangslage der Streifen beim Herausziehen der Steckschnüre (da der Muttersender für die Anfangseinstellung anderer Streifen benötigt wird) und beim Wiedereinführen der Stecker in den Funktionstriebsanschluss um je einen halben Impulsschritt, falls das Ein- und Ausstöpseln unter Spannung erfolgt.

Sollten gleichzeitig zwei lineare Funktionen, $y_1 = n_1 x$, $y_2 = n_2 x$ als Integrandenfunktionen auftreten, so lässt sich das mit äquidistant gelochten Streifen nur durchführen, falls d , der grösste gemeinsame Teiler von n_1 und n_2 , durch die minimale Einheit oder ein vielfaches davon dargestellt wird.

Für $n_1 = 0,75$ $n_2 = 0,55$ ergibt das z.B. eine Einheit von mindestens $20 \cdot 100 = 2000$, falls 100 die minimal mögliche Einheit ist ($d = 0,05$).

Die Bindung der Funktionssprünge an die Lochstreifenperforation sowie der geringe Vorrat an Untersetzungsstufen bedingt eine schlechte Anpassungsfähigkeit des Gerätes in der vorliegenden Form an praktisch anfallende Aufgaben mit vorgegebenen Funktionen und Konstanten, falls nicht grobe Fehler in Kauf genommen werden können. Der Mangel tritt nicht in Erscheinung, wenn charakteristische Beispiele mit abgerundeten Werten gerechnet werden sollen, um ein qualitatives Bild eines physikalischen Vorganges zu erhalten.

Mit einigem Aufwand, nämlich mit dem Verzicht auf automatische Abtastung, kann dem abgeholfen werden. Dann nämlich kann man die Lochstreifen mit Markierungen an beliebigen Stellen versehen, bei deren Passieren über gewisse Fixpunkte der Abtastungen der zugehörige Impulswähler von Hand um einen Schritt verschaltet werden muss. Je nach Umfang der Aufgabe sind hierzu 1 - 2 Personen erforderlich.

Für diesen Fall wäre es sogar möglich, Funktionen zweier Variabler als Kurvenscharen auf den Lochstreifen unterzubringen, derart, dass der Wählersprung erfolgen muss, wenn eine Kurve über eine Ablesemarke wandert, dass diese Ablesemarke aber entsprechend dem Werte einer zweiten Variablen, von der die Integrandenfunktion nur schwach abhängt, quer zur Lochstreifenrichtung von Hand verschoben werden könnte. In den überwiegenden Fällen werden Integrandenfunktionen i.a. nur lineare oder trigonometrische Funktionen sein; - so empfiehlt sich die Anlage für Kurven für $f(y) = \frac{1}{a} y$ bzw. $f(y) = \frac{1}{a} \sin y$, für die a ein Intervall $a_0 < a < a_1$ kontinuierlich quer zum Lochstreifen durchläuft.

Ebenso bietet sich Möglichkeit zur Unterbringung empirischer Funktionen zweier Variabler, wie sie z.B. in den Bewegungsgleichungen eines Schiffes auftreten.

IV. Fehlerquellen

Beim Integromat sind 3 Typen von Fehlern zu unterscheiden:

1. Stufenintegrationsfehler, die sich daraus ergeben, dass die i.a. stetigen Integrandenfunktionen durch Stufenfunktionen mit diskretem Wertevorrat ersetzt werden müssen. Aus Sätzen über die Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen von ihren Koeffizienten ergibt sich, dass diese Stufenfehler i.a. durch Wahl einer genügend grossen Anzahl von Stufen beliebig klein gemacht werden kann, falls die Schrittweite der Stufe klein genug ist. Ein prinzipieller Ansatz zur Abschätzung des Stufenintegrationsfehlers ist in [1] gegeben; - er wird aber kaum praktisch brauchbare Fehlerschranken liefern.

2. Quantelungsfehler sind dadurch bedingt, dass die Variablen nicht durch kontinuierliche Grössen, sondern durch diskrete Impulszahlen dargestellt werden. Wir haben gesehen, dass sich dadurch an Tochtersendern und Untersetzern nicht die Relation ergibt

$$z - z_0 = f(y_1) \Delta x_1 \quad \text{sondern stattdessen}$$

$$z - z_0 = \sum_1^N (f(y_1) \Delta x_1 + \frac{\delta_1}{N}) \quad , \quad \text{wobei } N \text{ die}$$

Einheit ist und die δ_1 Zahlen vom Betrag kleiner als eins, die im Mittel grösser als null sind, d.h. allgemein werden zuviel Impulse ausgesandt. Der Fehler $\sum_1^N \delta_1$ ist auf jeden Fall kleiner als die Anzahl von $f(y)$ monoton durchlaufener Stufen. Daraus ergibt sich, dass der Quantelungsfehler i.a. zunehmen wird mit der Verfeinerung des Wertevorrats der Integrationsstufen; er kann aber wieder herabgedrückt werden durch Wahl einer grösseren Recheneinheit, die ja sowieso erst die Voraussetzung ist, dass der Stufenintegrationsfehler durch Verfeinerung

unter vorgegebene Schranken gedrückt werden kann.

3. Technisch bedingte Fehler ergeben sich aus den im ersten Teil dieses Berichtes geschilderten Eigenarten der Elemente des Gerätes.

1. Impulsunterschlagungen treten an Schrittwerken auf, wenn Impulsfolgen zu dicht oder unregelmässig sind, so dass der Unterbrecher vermöge seiner Trägheit das Stachelrad nicht freigibt oder wenn mechanische Reibung den Umlauf der Welle stört.

2. Zu viel Impulse werden ausgesandt bei unruhigem Lauf der Senderwelle von Tochtersendern und Summentriebsausgängen, insbesondere bei hohen Stufen (d.h. grosser Lamellenzahl), wenn die Kollektoren hin und herschwingen und mehrfach Kontaktöffnen und schliessen.

3. Ein geringfügiges Nachhinken der Impulsabgabe der Sender tritt ein am Summentrieb und an den Funktionstrieben durch die endliche Umsteuerzeit der Schrittmotore bei Drehrichtungsänderung, die Lose des Unterbrechers zwischen zwei Anschlägen in verschiedener Richtung und bei den Gebern der Summentriebe durch die elastische Verdrehung der Geberwelle gegen die Schrittwerkswelle.

Der relative Einfluss dieser Fehler kann beliebig klein gemacht werden durch Wahl einer grossen Einheit und niedrigen Ausgangsstufen an den Summentrieben und der Wahl von niedrigeren, aber damit durchaus nicht weniger Übersetzungsstufen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Die bisher gewonnenen Einsichten lassen sich darstellen in einem Assoziationsdiagramm. Die Zeilen der folgenden Tafel sind erstrebenswerten Eigenschaften des Gerätes zugeordnet, die Spalten den vorhandenen Umständen und Massnahmen als Faktoren. Es wird der Einfluss jedes Faktors unter Festhaltung des Wertes der anderen Faktoren dargestellt durch die Symbole + , - und 0 wird ausgedrückt, welchen Einfluss eine Zunahme des

auf die zur Zeile gehörige Eigenschaft hat; + bedeutet fördernden Einfluss, - entsprechend nachteiligen Einfluss, Null = kein Einfluss. Wir unterscheiden hier zwischen Stufenzahl, d.i. der Anzahl von Übersetzungsstufen im Wertebereich und der Stufenhöhe, d.i. der absoluten Grösse der Übersetzungsstufe.

	Stufen- zahl	Stufen- höhe	Grösse der minimalen Einheit	Grösse d. gewählten Einheit	Grösse d. Aus- gangsstufe an Summentrieb
Technische Exaktheit bzw. vertretbare Geschwindigkeit des Mottersenders	0	-	0	0	-
Rechengeschwindigkeit bei konstanter Mottersenderdrehzahl	-	+	0	-	+
relative Anfangsgenauigkeit	0	0	0	+	0
Herabsetzung des Quantenfehlers 8	0	0	0	+	0
Herabsetzung des Stufenintegrationsfehlers	+	0	0	+	0
Darstellbarkeit von Funktionen auf Lochstreifen	+	0	-	+	0

Optimale Ausnutzung der gegebenen Möglichkeiten

Die Möglichkeit, beim Mottersender und beim Tochttersender zwei Funktionen auf einem Lochstreifen gleichzeitig abtasten zu lassen, legt es nahe, eine Integrandenfunktion in 2 Summanden aufzuspalten, diese durch die beiden zum Funktionstrieb gehörigen Impulswähler integrieren zu lassen und die Ergebnisse im Summentrieb zusammenzufassen; i.a. erhält man so eine grössere Stufenzahl.

Wir wollen uns im folgenden beschränken auf den häufigsten Fall einer linearen Integrandenfunktion.

So könnte man z.B. auf beide Lochstreifenreihen die Integrandenfunktion lochen, aber gegeneinander versetzt, dass die Löcher einer Reihe auf die Mitte zwischen den Löchern der anderen fallen. Die zugehörigen Integrale werden addiert im Summentrieb und mit Faktor 0,5 ausgesandt. Wir erreichen so eine Verdoppelung der Stufenzahl; der Quantenfehler wäre für beide Lochstreifenreihen von derselben Grössenordnung. Da aber beide Summanden (und damit auch ihre Quantenfehler) mit dem Faktor 0,5 erscheinen, bleibt der Quantenfehler von derselben Grössenordnung wie bei einfacher Integration auf einer Lochstreifenreihe. Die minimale Einheit wird verdoppelt; bei Faktor 1,0 am Summentriebsausgang hingegen hätten wir Beibehaltung der minimalen Einheit, Verdoppelung der wirksamen Stufenzahl und -höhe. Man könnte aber nur mit kleineter Muttersenderdrehzahl fahren.-

In der Aufspaltung der Integrandenfunktion in zwei gleichartige Summanden liegt eine Willkür. Es soll hier eine andere Möglichkeit diskutiert werden, für deren Realisierung der Integromat mit einfachen Mitteln erweitert werden kann. Wir zerlegen die lineare Funktion in einen grobstufigen und einen feinstufigen Summanden, derart, dass der feinstufige Teil periodisch ist und zwischen je zwei Sprüngen des grobstufigen Teils einen Zyklus durchläuft. Der Zyklus besteht in dem Durchlaufen der 10 Stufen $-0,4$ bis $+0,5$ mit anschliessendem Zurückspringen auf $-0,4$ usw.: Das Integral dieser "Sägezahnfunktion" wird mit dem Faktor 0,1 multipliziert und dem Grobintegral zuaddiert. Wir erhalten folgende Ergebnisse:

- 1) Verzehnfachung der Stufenzahl gegenüber der einfachen Integration (z.B. 410 Stufen auf Tochtersender 1), ohne Zunahme der maximalen Stufenhöhe.
- 2) Festlegung der Einheit auf ganze Vielfache von 1000.
- 3) Ruhiger Lauf des Summentriebes, vor allem, wenn nicht der volle Stufenbereich des Grobintegrators ausgenutzt zu werden braucht. Dadurch ist Ausgangsfaktor 1,0 am Summentrieb möglich und schneller Lauf des Muttersenders als

teilweiser Ausgleich für die grosse Einheit.

- 4) Der Quantenfehler setzt sich additiv ^{zusammen} aus dem Fehler des Grobintegrators, der i.a. nicht den vollen Wertebereich durchlaufen wird und dem des Feinintegrators, multipliziert mit dem Faktor 0,1, d.h. ^{er ist} in der Grössenordnung des Fehlers am Grobintegrator, der durch die grosse Einheit niedrig gehalten wird.

Um diese Form der Grob- und Feinintegration durchführen zu können, ist es notwendig, die Impulswähler um 5 Schaltstellungen jenseits des Nullanschlusses zu erweitern, mit Kanälen der Übersetzungsstufen 0,1 bis 0,5. Sie müssten so verändert werden, dass sie beim Erreichen der Null und der neuen Stufe 0,5 automatisch Sprungrichtung und Ausgangsvorzeichen ändern. Diese Erweiterungen der Schrittschalter lassen sich praktisch ohne Aufwand von Material durchführen, die automatische Umschaltung bei Null würde darüber hinaus auch für andere Schaltungen einen beachtlichen Gewinn an Rechensicherheit bedeuten.

Das hier geschilderte Verfahren eignet sich zwar nur für lineare Integranden des Muttersenders und Tochtersenders I, wenn die Einheit ein Vielfaches von 1000 ist; bei sehr vielen Schaltungen werden aber überhaupt keine anderen Integranden auftreten; überdies erlaubt die grosse Einheit auch eine gleichzeitige günstige Darstellung anderer Funktionen auf Lochstreifen mit geringem Quantenfehler.

Indirekte Schaltungen

Für die folgenden Untersuchungen wollen wir absehen von der Abhängigkeit der Integranden von irgendwelchen Variablen. Wir nehmen an, sämtliche Übersetzungsstufen seien konstant. Für kleine Zeitintervalle ist diese Voraussetzung exakt erfüllt.

Lassen wir in der Schaltskizze alle die Verbindungen aus, welche zu Funktionstrieben führen, so entsteht eine reduzierte

Schaltskizze, die man nach H. Poesch [4] den "Kraftflussplan" nennt. Wir fassen den Muttersender auf als Energiequelle, die Verkopplungen dienen der gerichteten Verteilung und Übertragung der Energie.

In der topologischen Struktur des Kraftflussplanes unterscheidet man 2 Fälle:

1.) Direkter Kraftfluss: Der Kraftfluss verläuft vom Muttersender eindeutig, wehn auch mit Verzweigungen an den Geberbuchsen, zum Schreibwerk und zu Buchsen, aus denen Lochstreifentransporte angetrieben werden.

2.) Indirekter Kraftfluss: Es kommen im Kraftflussplan Zyklen vor, in denen Ausgangsgeber von Summentrieben über andere Schrittwerke und Geber zu den Eingängen des Summentriebes und damit zur ihrer Drehbewegung beitragen.

Bei direktem Kraftfluss kann man einen kausalen Wirkungsfluss, vom Muttersender ausgehend, eindeutig verfolgen. Für das zugehörige System von Schaltgleichungen heisst das, dass es sich durch einen reinen *S u b s t i t u t i o n s* prozess umformen lässt auf eine Gestalt, in der die Differentiale der abhängigen Variablen als Vielfache des Differentials des Muttersenderantriebs erscheinen: $du_i = c_i dx_1 \quad i = 1, 2, \dots$

Im Falle nicht konstanter Integrandenfunktionen sind die c_i Polynome, welche als Argumente Funktionen je einer Variablen (nämlich die Integrandenfunktionen) haben.

Als einfachstes Beispiel für indirekten Kraftfluss betrachten wir die Gleichung $du = adu + dx$.

Die zugehörige Schaltung lässt sich darstellen durch einen Summentrieb. Ein Summandeneingang wird direkt vom Muttersender betrieben, der andere aus dem Ausgang des Summentriebes mit Faktor a , was durch einen zwischengeschalteten Tochtersender oder Untersetzer, oder noch einfacher, durch Wahl des Faktors

a am Geber des Summentriebes erreicht werden kann, falls $a = \pm 0,2$ oder $\pm 0,5$.

Nehmen wir an, dass dem Summentrieb eine Anzahl von n_0 Impulsen vom Mittersender zufliesst; die gleiche Zahl wird vom Geber über den Kollektor zum Ausgangsfaktor 1,0 wieder ausgesandt; über den Kollektor mit Ausgangsfaktor a hingegen werden

$$n_1 = an_0 - \varepsilon_0 \quad |\varepsilon_0| < 1$$

Impulse dem zweiten Eingang des Summentriebes wieder zufliesen und ebenfalls über den Kollektor zu 1,0 wieder ausgesandt; über den Kollektor mit Faktor a gehen

$$n_2 = an_1 - \Delta_1 = an_1 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1$$

Impulse; dabei ist wiederum $|\Delta_1| < 1$, aber auch

$$|\varepsilon_1| = |\Delta_1 - \varepsilon_0| < 1;$$

denn insgesamt sind dem Summentrieb jetzt zugeflossen $n_0 + n_1$ Impulse, die Zahl der daraufhin vom Kollektor a abgegebenen Impulse ist

$$n_1 + n_2 = a(n_0 + n_1) + \varepsilon_1, \text{ und die Zahl der}$$

ausgesandten Impulse eines Gebers unterscheidet sich stets um weniger als eins von der Zahl der ihm zugeflossenen, multipliziert mit dem Ausgangsfaktor. - Die n_2 Impulse werden wieder die Aussendung von n_3 Impulsen bewirken u.s.f. Uns interessiert die Frage nach Konvergenz und Grösse von

$$\sum n_i = n_0 + n_1 + \dots$$

Die Frage wird gelöst durch formale mathematische Behandlung:

Rekursionsformel: $n_j = an_{j-1} + \varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j = an_{j-1} + \Delta_j$

Voraussetzung:

$$\begin{array}{ll} |\varepsilon_j| < 1 & \text{für alle } j \\ |\Delta_j| < 1 & \text{für alle } j \\ n_j & \text{ganzzahlig} \end{array}$$

Daraus folgt zunächst für $n_j \neq 0$

$$\text{sign.}(n_j) = \text{sign.}(a) \text{sign.}(n_{j-1}) \quad (\text{sign. bedeutet Vorzeichen})$$

Behauptung I: Für $|a| < 1$ ist $|n_{j+1}| \leq |n_j|$

Sei $n_{i+1} = n_i + l_i$, (l_i ganzzahlig), d.h.

$l_i = n_i(a-1) + \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = n_i(a-1) + \Delta_{i+1}$; daraus folgt

$\text{sign.}(l_i) = -\text{sign.}(n_i)$ für $l_i \neq 0$ - ausserdem aber

auch $|l_i| \leq |2 n_i|$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Für $|a| > 1$ gilt entsprechend

$\text{sign.}(l_i) = \text{sign.}(n_i)$ für $a > 0$

$\text{sign.}(l_i) = -\text{sign.}(n_i)$ aber $|l_i| \geq |2 n_i|$ für $a < 0$,

also in jedem Fall $|n_{i+1}| \geq |n_i|$

Weiter lässt sich zeigen:

Für $|a| < 1$ gilt nur für endlich viele Indizes i die Relation $n_{i+1} = n_i$, solange $n_i \neq 0$ ist.

Sei $n_i = n_{i+1} = n_{i+2} = \dots = n_{i+k}$,

so gibt es eine obere Schranke für k , welche abhängt von n_i und a .

Es ist dann nämlich:

$n_i(1-a) = \Delta_{i+1} = \Delta_{i+2} = \dots = \Delta_{i+k-1}$, daraus folgt:

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i+k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_{i+j} = (k-1)(1-a) n_i$$

Andererseits aber ist $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+k-1}$ vom Betrag kleiner als eins, als Restbetrag zu dem Eingang von $k-1$ mal n_i Impulsen.

Daraus folgt

$$|k| \leq \frac{1}{(1-a)|n_i|} = M(n_i, a) \quad \text{qu.e.d.}$$

Damit ist gezeigt, dass für $|a| < 1$ die Folge der n_i abbricht, die Summe also endlich ist. Die Anzahl s der Summanden lässt sich überdies von unten abschätzen: Aus

$$n_s = 0, n_{s-1} \neq 0 \quad \text{folgt} \quad |a n_{s-1}| \leq |\Delta_s| < 1$$

Durch wiederholte Substitution der Rekursionsformel

$$n_i = a n_{i-1} + \Delta_i$$

ergibt sich

$$n_i = a^i n_0 + a^{i-1} \Delta_1 + \dots + a^0 \Delta_i = a^i n_0 + R_i$$

da alle Δ vom Betrage kleiner als eins sind, ergibt sich für

R_i die Abschätzung $|R_i| \leq \left| \frac{1 - a^i}{1 - a} \right|$; daraus folgt für s

$$|a^{s-1} n_0| \leq \left| \frac{1 - a^{s-1}}{1 - a} \right| \leq 1$$

Damit wird

$$\sum_{i=0}^{s-1} n_i = n_0 \sum_{i=0}^{s-1} a^i + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^i a^{i-j} \Delta_j$$

$$= n_0 \frac{1 - a^s}{1 - a} + \sum_{j=1}^{s-1} \Delta_j \sum_{k=0}^{s-1-j} a^k$$

$$= n_0 \frac{1 - a^s}{1 - a} + \sum_{j=1}^{s-1} \Delta_j \frac{1 - a^{s-j}}{1 - a}$$

und wegen $\Delta_j = \xi_{j-1} - \xi_j$

$$= n_0 \frac{1 - a^s}{1 - a} + \xi_0 \frac{1 - a^s}{1 - a} - \sum_{j=1}^{s-1} \xi_j a^{s-j}$$

$$= \frac{n_0}{1 - a} + \frac{1}{1 - a} (n_0 a^{s-1} + \xi_0 (1 - a^{s-1}) - \sum_{j=1}^{s-1} \xi_j a^{s-1})$$

damit

$$\left| \sum_{j=0}^{s-1} n_j - \frac{n_0}{1 - a} \right| \leq \frac{1}{|1 - a|} (1 + 1 + 1) = \frac{3}{|1 - a|}$$

Die Ausgangsimpulse des Summentriebes stellten die Variable z dar, die Impulse des Muttersenders die Variable x . Dann gilt also

$$\Delta x = (1 - a) \Delta z + \frac{3}{N} \delta, \quad \text{mit } |\delta| < 1 \quad \text{wenn } N$$

wiederum die Recheneinheit ist. Für variables a können wir entsprechend setzen:

$$x - x_0 = \sum_i (1 - a(y_i)) \Delta z_i + \frac{3}{N} \sum_i \delta_i'$$

wobei Δz_i die Zunahmen von z bei konstantem a sind.

Das zweite Glied hat den Charakter des Quantenfehlers und lässt sich durch genügend grosse Einheit N beliebig klein machen. Die Relation gilt aber nur für $|a| < 1$; für $|a| > 1$ treten durch die Rückkopplung aufschaukelnde Effekte ein, es entstehen unkontrollierbare Impulsfolgen, deren Anwachsen nur durch die Trägheit der mechanischen Teile des Gerätes begrenzt wird. - Für kontinuierlich arbeitende Reibrad-Differentialanalysatoren ist übrigens das hier gewonnene Stabilitätskriterium $|a| < 1$ ebenfalls gültig und seit langem bekannt [3]. Die Voraussetzung, dass die Impulsfolge x direkt vom Muttersender fließt, wird übrigens nicht benötigt - es genügt, dass sie der Variablen des Muttersenders eindeutig proportional ist. Ebenso ist es unwesentlich, ob die Folge a z direkt am Ausgang des Summentriebes oder erst nach Durchlaufen einer Teilschaltung gebildet wird. In jedem Fall könnten wir den Kraftflusszyklus ersetzen durch einen Übersetzungstrieb mit Faktor $\frac{1}{1-a}$:

$$\Delta z = \frac{1}{1-a} \Delta x$$

Solche Schaltungen, in denen wir sämtliche Kraftflusszyklen durch Übersetzungstrieb in ihrer Wirkung ersetzen können, wollen wir quasidirekte nennen.

Es lässt sich zeigen, dass alle die Schaltgleichungssysteme zu quasidirekten Schaltungen gehören, die lediglich durch Substitution ihrer Gleichungen ineinander überführt werden können in Systeme der Form

$$du_i = a_{ii} du_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} du_k + b_i dx_i$$

mit $|a_{ii}| < 1$

$i = 1, 2, \dots, n$

d.h. bei geeigneter Anordnung der Gleichungen und der Variablen erhält man nach der Substitution eine Dreiecksmatrix mit Diagonalgliedern vom Betrag kleiner als eins und Nullen unter der

Diagonale. Durch weitere Substitutionen kann man erreichen, dass die Diagonalglieder beliebig klein werden. Sind alle Diagonalglieder schon null, so handelt es sich um eine direkte Schaltung, d.h. die zugehörige Schaltskizze hat direkten Kraftfluss.

Wichtige Beispiele quasidirekter Schaltgleichungen.

Das System

$$du_1 = a_{11}du_1 + a_{12}du_2 + c_1dx$$

$$du_2 = a_{21}du_1 + a_{22}du_2 + c_2dx$$

lässt sich, falls sämtliche Koeffizienten ungleich null sind, nicht durch Substitution auf Dreiecksgestalt bringen.

Fall I $a_{21} = 0$ Die Schaltung ist quasidirekt, falls
 $|a_{11}| < 1$ und $|a_{22}| < 1$

Fall II $a_{22} = 0$ Substitution ergibt:
 $du_1 = (a_{11} + a_{12}a_{21})du_1 + (c_1 + a_{12}c_2)dx$
 $du_2 = a_{21}du_1 + c_2dx$

Die Schaltung ist quasidirekt, falls $|a_{11} + a_{21}a_{12}| < 1$

Fall III $c_2 = 0$

Die zweite Schaltgleichung lässt dann u_2 eindeutig (quasidirekt) von u_1 abhängen, falls $|a_{22}| < 1$. Dann gilt äquivalent

$$du_2 = \frac{1}{1 - a_{22}} a_{21}du_1 \quad . \text{ Dies ist die erste Gleichung eingesetzt, ergibt:}$$

$$du_1 = \left\{ a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}} \right\} du_1 + c_1dx$$

für Stabilität ist offenbar erforderlich:

- 1.) $|a_{22}| < 1$
- 2.) $\left| a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}} \right| < 1$

Die Fälle $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$ und $c_1 = 0$ lassen sich durch Vertauschen der Indizes auf die oben beschriebenen zurückführen.

Die hier auf rein theoretischem Wege gewonnenen Kriterien wurden an praktischen Schaltungen des Integromaten durch Versuch verifiziert. Nur in den quasidirekten Fällen entsprach das Verhalten des Gerätes den formalen Schaltgleichungen.

IV. Behandelte Aufgaben.

=====

1.) Zirkeltest (siehe Schaltskizze)

Es wurde ein Kreis mit dem vorher berechneten Radius von 10,4 cm gezeichnet, der nach Umlauf im Rahmen der Zeichengenauigkeite tangential wieder in den Anfang einlief. Beim Rückwärtsgang musste dem Papiertransport von Hand nachgeholfen werden.

Gewählte Einheit $N = 400$

Die Schaltung kann erweitert werden, um die Relation

$$y^2 + y'^2 = \text{constans}$$

nachzubilden. Die Abweichungen des Schriebes von einer Geraden betrugen $\pm 0,5$ mm, d.h. ~~und~~ $\frac{1}{2}$ %. Die Schaltung bietet eine gute Kontrolle der Tochttersender und Summentriebe.

2. Gedämpfte Schwingung.

Die Differentialgleichung $y'' + 0,05y' + y$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2,7$ $y'(0) = 0$ wurde mit einer effektiven Einheit von 1200 Impulsen, d.h. ca 45 Min. pro Periode gefahren, um den Quantenfehler niedrig zu halten. Trotzdem ergab sich ein ,monoton zunehmender Fehler von 4,5 % nach 5 Perioden, d.h. ca 1% pro Periode. y und y'

durchliefen einen Wertebereich von ± 27 Stufen.

3. Gekoppeltes System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$y' = 0,05y + 0,5z \quad y(0) = 2,0$$

$$z' = 0,05z - 0,5y \quad z(0) = 0,3$$

Das System hat die als Lösung ebenfalls eine gedämpfte Schwingung

$$y = e^{0,05x}(A \cos 0,5x + B \sin 0,5x)$$

Bei einer Einheit von 600 Impulsen und ± 27 Stufen für y und z ergab sich für den Quotienten der ersten beiden Extremwerte

$$Q = \frac{y_{\min}}{y_{\max}} \quad \text{der Wert } 0,755 \quad ;$$

der exakte Wert ergibt sich zu 0,7300,

damit ergab sich ein Fehler von 3,2 % schon nach einer halben Periode. Um festzustellen, wie gross der Anteil des Stufenintegrationsfehlers an diesem Resultat ist, wurden die einzelnen Rechenschritte des Integromaten mit elektrischen Tischrechenmaschinen in einer Arbeitszeit von 8 Stunden für diese halbe Periode nach gerechnet. Der errechnete Wert des Quotienten war 0,746, was also auf einen Stufenintegrationsfehler von 2 % schliessen lässt.

Daraufhin wurde die Schaltung wiederholt mit Doppellochstreifen (d.h. mit doppelt soviel Stufen) für y und y' und einer Einheit von 400 Impulsen. Es ergab sich ein Quotientenwert von 0,721, d.h. ein Fehler von nur noch 1,2 %.

Der Integromat rechnet, im Gegensatz zu den üblichen numerischen Verfahren, mit einer veränderlichen Schrittweite für die Variable x . Bei der Rechnung mit 27 Stufen ergaben sich eine durchschnittliche Schrittweite von 0,035.

Die Aufgabe wurde nach numerischem Verfahren gerechnet, das sich in diesem speziellen Falle einfach durchführen lässt.

Es ergab sich für

Schrittweite	$x =$	$Q =$	Fehler =
	0,1	0,716	2,1 %
	0,04	0,7320	0,27 %
	0,03	0,7366	0,075 %
	0,02	0,7303	0,035 %

Die Überlegenheit des numerischen Verfahrens liegt nicht so sehr in der kleinen Schrittweite als darin, dass mit unabgerundeten Funktionswerten y_i, z_i an den Intervallteilpunkten x_i gerechnet wurde. Die Resultate wurden durch Matrizenpotenzierung gewonnen, was bei allgemeineren Gleichungen doch sehr schwierig ist.

Die hier behandelte Aufgabe zeigt deutlich, dass die Genauigkeit oft wesentlich abhängt von der Wahl des Gleichungssystem und der dazugehörigen Schaltung. - Die Schaltung, welche sich aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gedämpfte Schwingung ergab, war sicher günstiger als die hier benutzte - offenbar weil nur ein Summentrieb benötigt wurde. Andererseits ist die letzte Schaltung charakteristisch für viele Systeme, die sich nicht so einfach in andere Gestalt umformen lassen. Für derartige Systeme muss die Integrationsgenauigkeit als unbefriedigend angesprochen werden. Es bleibt abzuwarten, wie weit sie sich durch die hier vorgeschlagene Verfeinerung der Stufenintegration verbessern lässt.

Literatur zur Theorie der Schaltungen
=====

1. Bückner:
The Differential Analyser.
Minden 1948.
2. Eggers:
Über den Wirkungsbereich von
Differentialanalysatoren.
Diplomarbeit. Universität Hamburg 1953.
3. Mitchell:
Extensions in Differential Analyser
Technic.
Journal of Scientific Instruments. 1949.
4. H. Poesch:
Zur Theorie der Integriermaschine für
gewöhnliche Differentialgleichungen.
Z A M M 1944.