

436 | September 1983

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

H. Söding

Methoden zur Berechnung der Strömung um Körper in unbegrenzter idealer Flüssigkeit

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Methoden zur Berechnung der Strömung um Körper in unbegrenzter idealer Flüssigkeit

Söding, H., Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1983

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

METHODEN ZUR BERECHNUNG DER STRÖMUNG UM KÖRPER
IN UNBEGRENZTER IDEALER FLÜSSIGKEIT

von
H. Söding

Abschlußbericht des DFG-Vorhabens So 99/2-1 "Doppelkörperströmung"

An den im Bericht beschriebenen Arbeiten wirkten mit:

Dipl.-Ing. Y. Yi

Dipl.-Ing. G. Jensen

Problemdefinition

Behandelt wird die dreidimensionale Strömung um einen Körper mit glatter Oberfläche in homogener, inkompressibler, reibungsfreier Flüssigkeit. Die Strömung sei zirkulationsfrei. Die Flüssigkeit erstreckt sich außerhalb des Körpers bis ins Unendliche und geht dort in eine Parallelströmung über.

Das Problem ist vielfach gelöst worden; in der Schiffstechnik werden am häufigsten die Methoden von Hess und Smith /1/ sowie Abwandlungen davon benutzt. Die folgende Untersuchung hat zum Ziel, an diesem relativ einfachen Problem andere numerische Verfahren zu untersuchen, um daraus Rückschlüsse auf die numerische Behandlung komplizierterer Fälle, insbesondere mit freier Oberfläche, zu ziehen.

Die Strömung wird durch eine Potentialfunktion $\phi(x,y,z)$ beschrieben. x,y,z sind Koordinaten in einem körperfesten kartesischen Koordinatensystem. ϕ muß folgende Bedingungen erfüllen:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \text{ im ganzen Flüssigkeitsraum} \quad (1)$$

$$\phi_n = 0 \text{ auf der Körperoberfläche} \quad (2)$$

Dabei bezeichnet $n = (n_x, n_y, n_z)$ den in den Körper hineinzeigenden Normalenvektor; der Index n bezeichnet die Ableitung in Richtung von n : $\phi_n = \text{grad } \phi \cdot n$.

$$\text{grad } \phi \rightarrow (-U, 0, 0) \text{ für } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \text{Unendlich.} \quad (3)$$

Statt des Potentials ϕ wird im folgenden meist die Abweichung φ von der Parallelströmung $-Ux$ behandelt:

$$\phi = \varphi - Ux \quad (4)$$

Aus (4) ergeben sich mit (1) bis (3) die folgenden Bedingungen für φ :

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \text{ im ganzen Flüssigkeitsraum} \quad (5)$$

$$\varphi_n = Un_x \text{ auf der Körperoberfläche} \quad (6)$$

$$\text{grad } \varphi \rightarrow 0 \text{ für } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \text{Unendlich} \quad (7)$$

Lösung mit einem Differenzenverfahren

Das Verfahren der alternierenden Richtungen

Marsal /2/ empfiehlt zur Lösung der 3-dimensionalen Laplacegleichung das Verfahren der alternierenden Richtungen nach Douglas und Rachford /3/, das auch unter dem Kürzel ADIP (alternating direction implicit procedure) bekannt ist und folgendermaßen arbeitet: Die Lösung der Laplacegleichung (5) wird als Grenzwert für $t \rightarrow \text{Unendlich}$ der Lösung der Wärmeleitungsgleichung angesehen, in der φ außer von x , y und z auch von der Zeit t abhängt:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \varphi_t \quad (8)$$

Die Lösung beider Gleichungen stimmt natürlich überein, wenn solch ein Grenzwert existiert, d. h. $\varphi_t \rightarrow 0$ konvergiert.

Eine explizite Lösung der Gleichung (8), bei der φ_t durch Vorwärts-Differenzen angenähert wird, erfordert aus Stabilitätsgründen relativ kleine Zeitschrittweiten und damit viele Schritte bis zur Konvergenz. Eine implizite Lösung, bei der φ_t durch Rückwärts-Differenzen angenähert wird, würde ebenso wie die direkte Lösung von (5) die Auflösung eines sehr großen linearen Gleichungssystems mit großer Bandbreite erfordern, was zu aufwendig ist. ADIP verwendet deshalb eine zwischen diesen Extremen stehende Strategie: Es werden außer $\varphi^n = \varphi(t_n)$ zwei Hilfspotentiale φ^* und φ^{**} eingeführt, die folgende Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}^n + \varphi_{yy}^n + \varphi_{zz}^* &= (\varphi^* - \varphi^n) / \Delta t_n \\ \varphi_{xx}^n + \varphi_{yy}^{**} + \varphi_{zz}^* &= (\varphi^{**} - \varphi^n) / \Delta t_n \\ \varphi_{xx}^{n+1} + \varphi_{yy}^{**} + \varphi_{zz}^* &= (\varphi^{n+1} - \varphi^n) / \Delta t_n \end{aligned} \quad (9)$$

Hierbei bezeichnen die oberen Indizes n und $n+1$ zwei Zeitpunkte t_n und $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$. Ausgehend von einem beliebigen Anfangspotential φ^0 (z. B. $\varphi^0 \equiv 0$) werden für jeden Zeitschritt φ^* , φ^{**} und φ^{n+1} aus den Gleichungen (9) berechnet. Die Ableitungen werden dabei durch Differenzenquotienten in einem Quadrigitter angenähert, also z. B. bei konstanten Gitterabständen Δx in x -Richtung:

$$\varphi_{xx}^n(x, y, z) = [\varphi^n(x - \Delta x, y, z) - 2\varphi^n(x, y, z) + \varphi^n(x + \Delta x, y, z)] / \Delta x^2$$

Die Gleichungen (9) bilden dann tridiagonale Gleichungssysteme (Systeme mit der Bandbreite 3) jeweils für alle Potentiale φ^* an einer Netzlinie in z -Richtung, für alle φ^{**} an einer Netzlinie in y -Richtung und für alle φ^{n+1} an einer Netzlinie in x -Richtung. Daraus wird der Zweck der Hilfspotentiale φ^* und φ^{**}

ersichtlich: Bei einer expliziten Lösung mit Vorwärts-Differenzen für φ_t^n würden sich Fehler der Laplacegleichung bei jedem Zeitschritt nur um eine Maschenweite "verschmieren"; dagegen verteilt φ^* diese Fehler über den gesamten Flüssigkeitsbereich in z-Richtung; φ^{**} verteilt die Fehler in y-Richtung, und φ^{n+1} verteilt sie weiter in x-Richtung. Und gegenüber der impliziten Lösung mit Rückwärts-Differenzen brauchen hier nur viele Gleichungssysteme mit der Bandbreite 3 gelöst zu werden.

Die Gleichungen (9) sind nicht gleichbedeutend mit (8), konvergieren aber bei den hier vorliegenden Randbedingungen (die hier als stationär vorausgesetzt werden) gegen dieselben Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$. Für die Steuerung der Schrittweite Δt_n hat sich folgendes Verfahren bewährt: Man beginnt mit einem kleinen Wert Δt_1 ; die folgenden Zeitschritte werden dann jeweils doppelt so groß gewählt, bis sich die Fehler

$$\sum (\varphi_{xx}^{n+1} + \varphi_{yy}^{n+1} + \varphi_{zz}^{n+1})^2 \quad (10)$$

(dabei bezeichnet \sum eine Summenbildung für alle Gitterpunkte im Flüssigkeitsraum) nur noch wenig verringern. Dann wirderneut mit einem relativ kleinen Δt -Wert gerechnet und dieser wie vorher verdoppelt. Die Anfangswerte dieser Δt -Zyklen werden dabei zweckmäßigerweise davon abhängig gemacht, bei welchen Δt -Werten sich im vorhergehenden Zyklus die stärksten Fehlerverkleinerungen ergeben hatten.

Eine Abwandlung von ADIP

Das Verfahren wurde programmiert und an der Umströmung von Quadern und einer Kugel getestet. Dabei zeigte sich, daß sich die Fehler (10) bei größeren Netzen (z. B. $25 \cdot 25 \cdot 25$ Punkte) nach etwa 20 Zeitschritten nur noch wenig verringerten. Als Ursache dafür konnte die begrenzte Stellenzahl des Computers bei der Berechnung der Potentiale φ^* , φ^{**} und φ^{n+1} ermittelt werden. Die mittleren Fehler in der Laplacegleichung müssen um mehrere Zehnerpotenzen kleiner sein als das durch das Quadrat der Netzweite geteilte mittlere Potential φ^n , wenn φ^n selbst auf einige Prozent genau angenähert werden soll.

Die Schwierigkeiten konnten vollständig beseitigt werden, indem die Gleichungen (9) so umformuliert wurden, daß statt φ^* , φ^{**} und φ^{n+1} die Differenzen

$$\bar{\varphi} = \varphi^* - \varphi^n, \quad \bar{\bar{\varphi}} = \varphi^{**} - \varphi^n, \quad \bar{\bar{\bar{\varphi}}} = \varphi^{n+1} - \varphi^n$$

berechnet wurden. Die Potentiale $\bar{\varphi}$, $\bar{\bar{\varphi}}$ und $\bar{\bar{\bar{\varphi}}}$ verringern sich im Laufe der Iteration ständig, so daß die immer kleineren Korrekturen aus Rechnungen mit immer

kleineren Zahlen folgen. Man erhält so die folgenden Gleichungen:

$$\bar{\varphi} - \Delta t \cdot \bar{\varphi}_{zz} = (\varphi_{xx}^n + \varphi_{yy}^n + \varphi_{zz}^n) / \Delta t$$

$$\bar{\bar{\varphi}} - \Delta t \cdot \bar{\bar{\varphi}}_{yy} = \bar{\varphi}$$

$$\bar{\bar{\bar{\varphi}}} - \Delta t \cdot \bar{\bar{\bar{\varphi}}}_{xx} = \bar{\bar{\varphi}}$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \bar{\bar{\bar{\varphi}}}$$

Diese Formulierung der Gleichungen hat noch zwei weitere Vorteile: Es brauchen an jedem Netzknoten nur zwei Potentiale gespeichert zu werden (φ^n und entweder $\bar{\varphi}$ oder $\bar{\bar{\varphi}}$ oder $\bar{\bar{\bar{\varphi}}}$), während bei dem ursprünglichen Schema je drei Größen zu speichern sind (φ^n , φ^* und φ^{**}). Außerdem sind die Formeln einfacher und damit in etwa der halben Rechenzeit auszuwerten.

Körperrandbedingung

Das schnelle Rechenschema der ADIP-Methode setzt ein Quadergitter mit konstanten Netzweiten Δx , Δy und Δz voraus; eine Anpassung des Netzes an nicht quaderförmige Körperoberflächen würde die Rechenzeit und den Speicherbedarf erheblich vergrößern. Die Körperkontur verläuft daher im allgemeinen quasi zufällig durch das Quadergitter hindurch, wie in Bild 1 in zwei statt drei Dimensionen gezeigt ist. Berechnet wird φ an den Punkten im Flüssigkeitsraum sowie an einer Schicht von Punkten im Inneren des Körpers, z. B. am Punkt A.

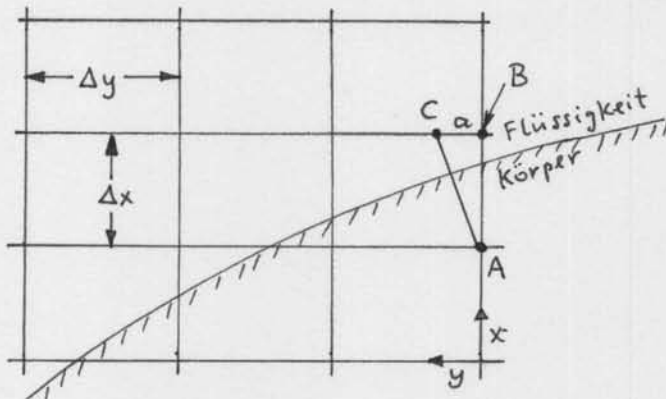


Bild 1

Für das Folgende sei vorausgesetzt, daß der Normalenvektor (n_x, n_y, n_z) auf der Körperoberfläche in unmittelbarer Nähe von A nur positive Komponenten hat und daß $n_x / \Delta x \geq \max(n_y / \Delta y, n_z / \Delta z)$ ist. (Andernfalls ist das Folgende in naheliegender Weise abzuändern.) In der Randbedingung $\varphi_n = U n_x$ wird dann φ_n als Differenzenquotient zwischen den Potentialen bei A und bei C gebildet. Der Punkt C liege (Bild 1) in der Ebene $x = x_B$ auf der durch A in Richtung der Körperrnormale verlaufenden Geraden; seine Koordinaten seien $x_C = x_B$,

$y_C = y_B + a$ und $z_C = z_B + b$. Zur Vereinfachung wird die folgende Schreibweise eingeführt:

$$A = (x_i, y_j, z_k) = (i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, k \cdot \Delta z); \quad \varphi(x_i, y_j, z_k) = \varphi_{i,j,k}$$

Das Potential am Punkt C wird linear aus dem Potential von B und von drei Nachbarn von B interpoliert:

$$\begin{aligned} \varphi_C = & \varphi_{i+1,j,k} \cdot \left(1 - \frac{a}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{b}{\Delta z}\right) + \varphi_{i+1,j+1,k} \cdot \frac{a}{\Delta y} \left(1 - \frac{b}{\Delta z}\right) \\ & + \varphi_{i+1,j,k+1} \cdot \left(1 - \frac{a}{\Delta y}\right) \frac{b}{\Delta z} + \varphi_{i+1,j+1,k+1} \cdot \frac{a}{\Delta y} \frac{b}{\Delta z} \end{aligned}$$

Einfacher läßt sich dies mit dem normierten Normalenvektor

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_z) &= (n_x/\Delta x, n_y/\Delta y, n_z/\Delta z) \text{ ausdrücken:} \\ \varphi_C = \frac{1}{N_x^2} & \left[(N_x - N_y)(N_x - N_z), N_y(N_x - N_z), (N_x - N_y)N_z, N_y N_z \right] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{i+1,j,k} \\ \varphi_{i+1,j+1,k} \\ \varphi_{i+1,j,k+1} \\ \varphi_{i+1,j+1,k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Dieser Ausdruck wird in der numerisch angenäherten Randbedingung

$$\varphi_C - \varphi_{i,j,k} = U \cdot \Delta x \quad (14)$$

verwendet.

Beim ADIP-Verfahren genügt es, diese Randbedingung für das Potential $\bar{\bar{\varphi}}$ anzusetzen; die Zwischenpotentiale $\bar{\varphi}$ und $\bar{\varphi}$ werden mit der einfacheren Randbedingung $\bar{\varphi}_A = \bar{\varphi}_A = 0$ bestimmt. Es hat sich gezeigt, daß dies die Konvergenz nicht verschlechtert und die Rechenzeit deutlich herabsetzt.

Die Randbedingung (14) ist ohne Iteration exakt erfüllbar, wenn - bei einer Normalenrichtung wie im Fall des Bildes 1 - die $\bar{\bar{\varphi}}$ von großem Index j zu kleinerem j fortschreitend berechnet werden. Bei Körpern mit Dellen (wenn das Vorzeichen von n_y oder n_z bei konstantem k bzw. j und variierendem j bzw. k mehr als einmal wechselt) ist dies allerdings nicht möglich.

Die Näherung $\varphi_n \approx (\varphi_C - \varphi_A) \cdot n_x / \Delta x$ ist richtig, wenn φ zwischen A und C linear verläuft. Wenn nicht, ist die Näherung wenigstens im Mittel über größere Bereiche der Körperoberfläche richtig, wenn der zufällige Schnittpunkt zwischen Körperkontur und der Geraden AC gleichverteilt über der Strecke \overline{AC} ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn für A alle Punkte gewählt werden, die die beiden folgenden naheliegenden Bedingungen erfüllen:

1. A liegt im Körperinneren.
2. A ist Nachbarpunkt wenigstens eines Gitterpunktes B, der im Flüssigkeitsraum liegt.

Nachbarpunkte sind dabei entweder nur in x um Δx verschieden, oder nur in y um Δy , oder nur in z um Δz .

Wenn die Punkte A nach diesem Schema gewählt werden, kann der Schnittpunkt zwischen der Geraden AC und der Körperoberfläche nur zwischen A und D, aber nicht zwischen D und C liegen (Bild 2), wenn - wie vorausgesetzt wird - die

Krümmungsradien der Körperoberfläche groß gegenüber den Maschenweiten sind.

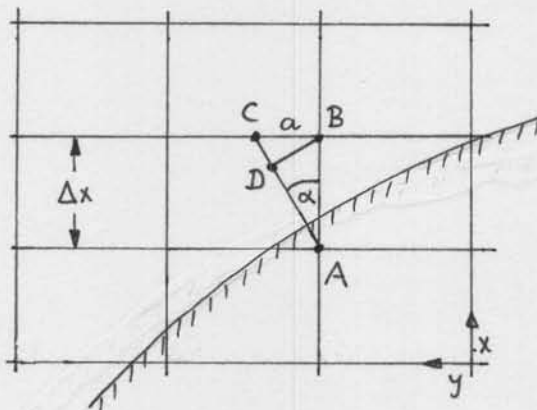


Bild 2

Um diesen systematischen Fehler zu vermeiden, wird der Punkt B wie ein Punkt im Flüssigkeitsraum behandelt, wenn er um weniger als die

$$\text{halbe Länge } CD = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \text{ mit } \cos \alpha = n_x / |n|$$

im Körperinneren liegt. Dies verbessert die mit einer bestimmten Netzweite erhaltene Genauigkeit des Potentials in einigem Abstand vom Körper erheblich.

Bedingung am Außenrand

Statt der Bedingung im Unendlichen muß bei der numerischen Berechnung mit finiten Differenzen eine möglichst äquivalente Bedingung am Außenrand des Berechnungsraumes angesetzt werden. Speicherbedarf und Rechenzeit für eine vorgegebene Genauigkeit werden umso kleiner, je kleiner der Berechnungsraum ist; dafür wird es bei kleinerem Berechnungsraum schwieriger, eine ausreichend genaue Bedingung am Außenrand anzugeben. Verschiedene Möglichkeiten hierzu sind:

1. $\varphi = 0$ oder $\varphi_n = 0$. Die so erhaltenen Lösungen ließen sich bei Bedarf mit aus der Versuchstechnik bekannten "Kanalkorrekturen" verbessern.
2. Abschätzung eines angenäherten Potentials $\tilde{\varphi}$ z. B. aus der Strömung um ein dem Körper möglichst ähnliches Rankin-Ovoid. Als Randbedingung kann dann angesetzt werden:

$$\varphi = \tilde{\varphi} \quad \text{oder} \quad \varphi_m = \tilde{\varphi}_m \quad \text{oder} \quad \varphi_m / \varphi = \tilde{\varphi}_m / \tilde{\varphi} .$$

3. Abschätzung des Potentials durch eine Berechnung mit grobem Netz und großem Berechnungsraum, an dessen Außenrand z. B. nach 1. vorgegangen wird. Das Ergebnis $\tilde{\varphi}$ wird dann wie in 2. weiterverwendet zur Berechnung in einem feineren Netz und kleinerem Berechnungsraum.

4. Anwendung der Greenschen Formel:

$$\varphi(M) = \int_S \left[\varphi(P) \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) - G(M, P) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(P) \right] d s_P . \quad (15)$$

Darin bedeutet $\int_S \dots d s_P$ eine Integration über die Körperoberfläche; $G(M, P)$ ist eine geeignete Green-Funktion, z. B. der reziproke Abstand zwischen den Punkten M und P . P sind dabei Punkte auf der Körperoberfläche, M Punkte auf dem Außenrand.

Um bei der Anwendung dieser Formel die Vorteile des ADIP-Verfahrens nicht zu verlieren, müßte $\varphi(M)$ am Außenrand aus im vorhergehenden Iterationsschritt bestimmten Potentialen am Körper bestimmt werden. Vermutlich genügt es auch, $\varphi(M)$ nur bei einigen wenigen Iterationsschritten zu bestimmen und in den folgenden Iterationsschritten z. B. das Verhältnis φ_n / φ beizubehalten; in Frage kommt auch eine Berechnung von $\varphi(M)$ nur an einigen Punkten des Außenrandes; dazwischen könnte interpoliert werden.

Programm

Anhang 1 zeigt ein Fortran-IV-Programm, das das modifizierte ADIP-Verfahren anwendet. Die dargestellte Programmversion ist auf dem Rechner TR 440 benutzt worden. Sie berechnet das Potential bei Anströmung einer Kugel von einzugebendem Radius. Der Berechnungsraum umfaßt 1/4 der Kugeloberfläche; die Symmetrie der Kugel bezüglich der x-Richtung wurde hier nicht ausgenutzt. Für andere, bezüglich y- und z-Richtung symmetrische Körper ist nur die den Körper definierende Funktion HULL zu ersetzen, z. B. durch eine Interpolationsroutine, die die Körperform zwischen gegebenen Stützpunkten interpoliert. Allerdings empfiehlt sich ev. eine Anpassung der Randbedingungen am Außenrand des Berechnungsraumes; in der dargestellten Programmversion wurde die unter 2. genannte Methode verwendet, wobei das bekannte Dipol-Potential der Kugelumströmung an je einem Punkt jeder Fläche des Berechnungsquaders benutzt wurde.

Ergebnisse

Im Folgenden werden numerische Ergebnisse am Beispiel einer Kugelumströmung entsprechend Bild 3 angegeben. Die Anzahl der Gitterpunkte in x-Richtung betrug 29, in y- und z-Richtung je 15. Die Maschenweite war in allen drei Richtungen gleich 1, der Kugelradius 5,5.

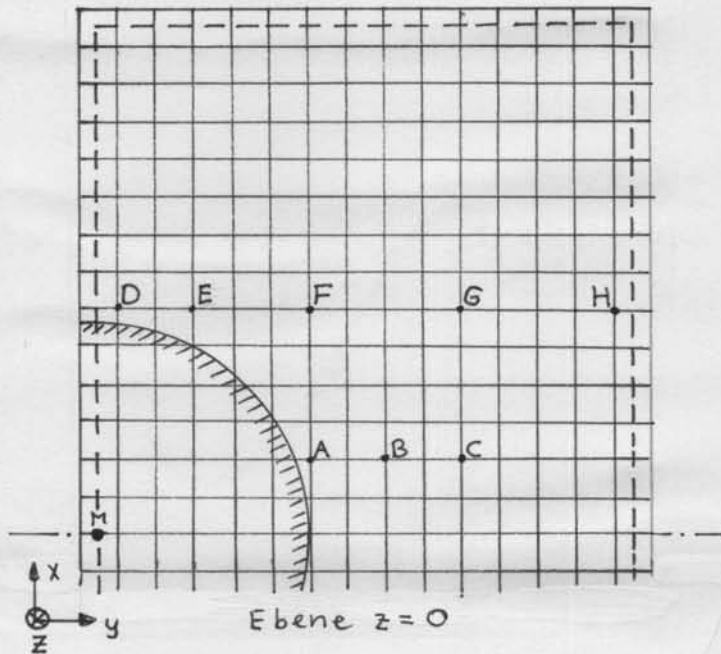


Bild 3

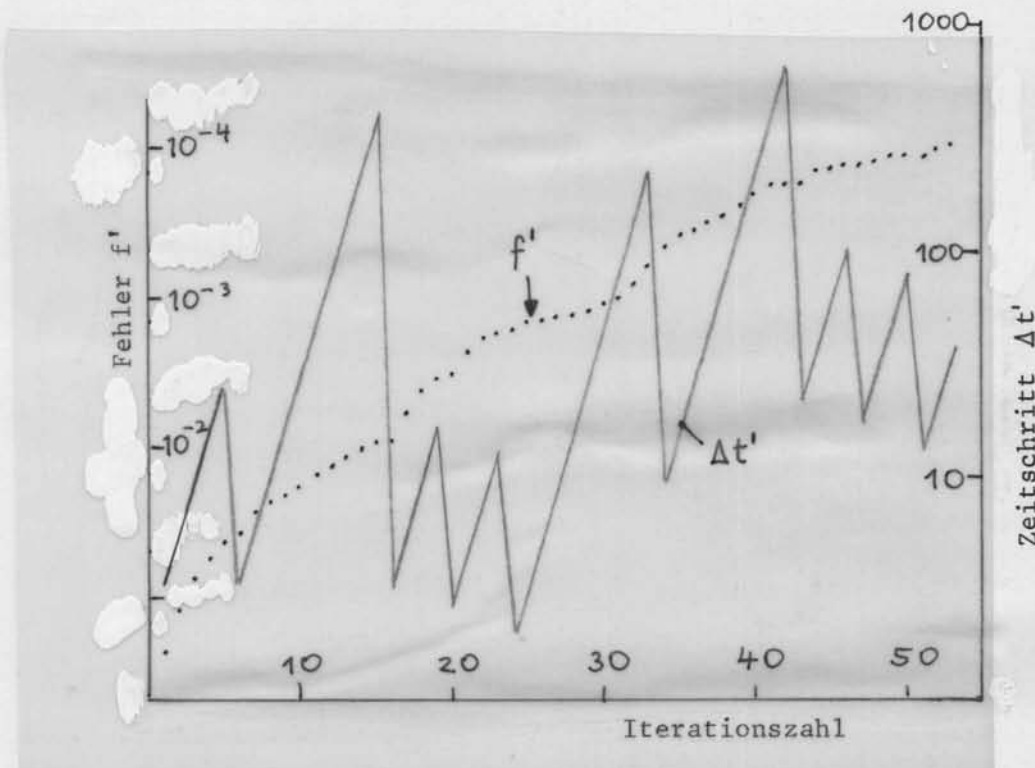


Bild 4

Bild 4 zeigt, wie sich die dimensionslose Zeitschrittweite

$$\Delta t' = \Delta t \cdot u / \Delta x$$

und die mittlere dimensionslose Verletzung der Laplace-Gleichung

$$\sqrt{\sum (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz})^2} / u \cdot \Delta x \cdot \text{Anzahl der Gitterpunkte im Flüssigkeitsraum} = f'$$

mit wachsender Iterationszahl veränderten. Nach 40 Iterationsschritten verkleinert sich f' nur noch langsam; vermutlich spielt hierfür die Rechengenauigkeit des Rechners (Wortlänge 45 bit) eine Rolle. Bis dahin ist die Konvergenz befriedigend. Die Zacken in der $\Delta t'$ -Kurve entsprechen jeweils einem Δt -Zyklus. Die Rechenzeit betrug 3 s pro Iterationsschritt.

Die untenstehende Tabelle zeigt die Fehler des Potentials

$$\frac{\varphi - \varphi_{Ex}}{\varphi_{Ex}} \quad \text{mit} \quad \varphi_{Ex} = \frac{u}{2} R^3 \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Dabei ist der Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung angesetzt worden; R ist der Kugelradius. Die Punkte A bis G der Tabelle sind in Bild 3 eingezeichnet; sie liegen in der Ebene $z = 0.5\Delta z$.

Iterat.- zahl	A	B	C	D	E	F	G	H
12	-0.176	-0.264	-0.372	-0.130	-0.180	-0.305	-0.485	-0.464
24	-0.043	-0.040	-0.042	0.003	-0.023	-0.059	-0.072	0.181
36	-0.022	-0.003	0.013	0.026	0.004	-0.017	0.003	0.229
48	-0.017	0.006	0.027	0.031	0.009	-0.007	0.022	0.329

Die Fehler konvergieren mit wachsender Iterationszahl nicht gegen 0, sondern gegen die durch die endliche Gitterweite und durch die ungenaue Randbedingung am Außenrand des Berechnungsraumes verursachten Fehler. Die ersteren haben ihre Größtwerte an der Körperoberfläche, die zweiten am Außenrand. Dies zeigt auch die Tabelle.

Beurteilung

Das Verfahren liefert der Grobheit der Diskretisierung angemessene Fehler. Die Korrelation zwischen Genauigkeit und Rechenzeit erscheint günstig für Fälle, in denen an einer großen Zahl von Punkten nicht nur auf der Körperoberfläche, sondern auch im Inneren der Flüssigkeit das Potential oder das Geschwindigkeitsfeld zu bestimmen ist. Durch den iterativen Lösungsalgorithmus dürfte die Einbeziehung von nichtlinearen Randbedingungen wesentlich erleichtert werden.

Lösung nach Noblesse und Triantafyllou

Theorie

Nach Noblesse und Triantafyllou /4/ läßt sich φ wie folgt annähern:

$$\varphi(\underline{\xi}) = [\varphi'(\underline{\xi})]^2 / [\varphi'(\underline{\xi}) - L(\underline{\xi}, \varphi')] \quad (16)$$

mit

$$\varphi'(\underline{\xi}) = - \iint_H \frac{n_x ds dt}{4\pi r(\underline{x}, \underline{\xi})} \quad (17)$$

$$L(\underline{\xi}, \varphi') = \iint_H [\varphi'(\underline{x}) - \varphi'(\underline{\xi})] \cdot \frac{n_x(\underline{x} - \underline{\xi}) ds dt}{4\pi [r(\underline{x}, \underline{\xi})]^3} \quad (18)$$

Unterstrichene Größen bezeichnen dabei Vektoren:

$$\underline{x} = (x, y, z); \quad \underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta).$$

\underline{n} ist der auf der Körperoberfläche H definierte, in den Körper hineinzeigende Normalenvektor (n_x, n_y, n_z) . $r(\underline{\xi}, \underline{x})$ ist der Abstand zwischen den Punkten mit den Ortsvektoren $\underline{\xi}$ und \underline{x} .

Die Körperoberfläche werde durch den Parameterbereich $-1 \leq s \leq 1, -2 \leq t \leq 2$ (von Punkten oder Linien abgesehen) genau einmal überdeckt, so daß gilt:

$$\iint_H \dots ds dt = \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 \dots dt ds.$$

In dem folgenden Programm wird mit der in Bild 5 gezeigten Parametrisierung gearbeitet:

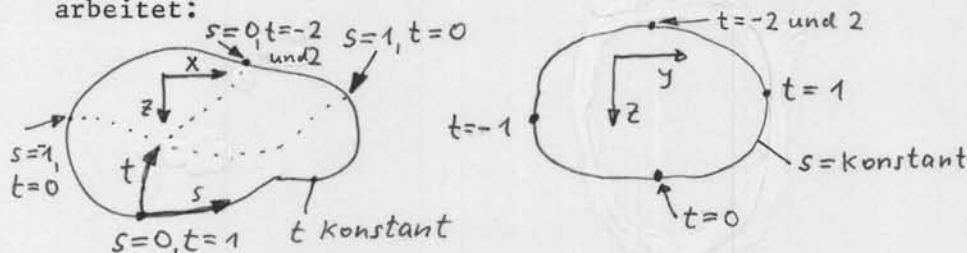


Bild 5

Der Parameter s nimmt von hinten nach vorn zu; der Parameter t läuft um den Körper herum.

Die oben angegebenen Integranden sind bei $r = 0$ undefiniert, d. h. wenn $\underline{x} = \underline{\xi}$ ist. Das Integral für φ' wird deshalb wie folgt umgeformt:

$$\varphi'(\underline{\xi}) = - \iint_H \frac{1}{4\pi} \left(\frac{n_x(s, t)}{r(\underline{x}, \underline{\xi})} - \frac{n_x(\xi, \tau)}{r^*} \right) ds dt - \frac{n_x(\xi, \tau)}{4\pi} \iint_H \frac{1}{r^*} ds dt. \quad (19)$$

Dabei bezeichnet $n_x(s, t)$ den Normalenvektor an der Stelle $\underline{x}(s, t)$; $n_x(\xi, \tau)$ ist entsprechend der Normalenvektor an der Stelle $\underline{\xi}(\xi, \tau)$;

$$r^* = |\underline{x}_s(s - \xi) + \underline{x}_t(t - \tau)| = \sqrt{\underline{x}_s^2(s - \xi)^2 + \underline{x}_t^2(t - \tau)^2 + 2(s - \xi)(t - \tau)\underline{x}_s \underline{x}_t}$$

Auf grund dieser Definition wird

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \zeta \\ t \rightarrow \tau}} \left(\frac{n_x(s, t)}{r(\underline{x}, \underline{\xi})} - \frac{n_x(\zeta, \tau)}{r^*} \right) = 0.$$

Damit verschwindet die Singularität des 1. Summanden von (19) an der Stelle $s = \zeta, t = \tau$. Falls es andere Punktepaare $s, t \neq \zeta, \tau$ gibt, die den Abstand 0 haben, wie z. B. die Punkte mit $t=2$ und $\tau = -2$, so wird der Integrand dort 0 gesetzt. Dies ist nur dann gerechtfertigt, wenn an diesen Stellen \underline{x}_s oder \underline{x}_t genügend schnell gegen 0 gehen, so daß der Integrand dort verschwindet, oder wenn infolge von Symmetriebedingungen an diesen Stellen keine φ^1 bestimmt werden müssen. Das Letztere ist der Fall bei Schiffen, die als Doppelkörper berechnet werden. Eine Verletzung dieser Bedingungen dürfte sich allerdings höchstens auf die Rechenzeit, aber kaum auf die berechneten Ergebnisse auswirken, da durch den dann unstetigen Verlauf des Integranden der Integrationsalgorithmus selbsttätig eine entsprechend feine Unterteilung vornimmt, so daß der Integrationsfehler klein bleibt.

Das rechts in (19) stehende Integral läßt sich geschlossen lösen. Bild 6 zeigt dazu den Integrationsbereich H und den Punkt $\underline{\xi}(\zeta, \tau)$. Mit den eingezeichneten Größen a und b ist das Integral über den schraffierten Teil von H gleich

$$\iint_{H'} \frac{1}{r^*} ds dt = \frac{a}{|\underline{\xi}_s| \cdot |\underline{\xi}_t|} \ln \frac{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a - b + \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (21)$$

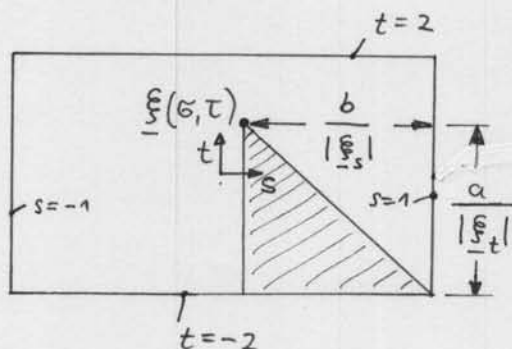


Bild 6

Der Integrand von $L(\underline{\xi}, \varphi^1)$ nimmt für \underline{x} gegen $\underline{\xi}$ einen endlichen Wert an, der im allgemeinen ungleich 0 ist. Er wird im Fall $|\underline{x} - \underline{\xi}| < 0.01$ nicht nach der Formel (18) bestimmt, sondern gleich dem Mittelwert des Integranden an den umgebenden Stützstellen für die Integration gesetzt.

Für Körper mit 1, 2 oder 3 Symmetrieebenen werden die Integrale nur über jeweils eine Symmetriehälfte erstreckt und die Integranden entsprechend um die gespiegelten Terme ergänzt.

Numerische Durchführung

Die Integrationen werden mit der Routine GINT /5/ durchgeführt. Die Stützstellen für die Integration werden von GINT selbst nach einem Fehlerkriterium gewählt. Da der Integrand von L die Funktion φ^1 enthält und φ^1 selbst ein Integral ist, wird - um rekursive Aufrufe zu vermeiden - φ^1 mit einer anderen Routine GINT1 berechnet, die jedoch fast identisch mit GINT ist. Der Unterschied besteht in der Benutzung des Mittelwertes der umliegenden Integranden in GINT (nicht in GINT1) im Falle $\underline{x} \approx \underline{\xi}$. Die im Laufe der Integrationen ausgewerteten Punkte (x,t) lassen sich durch den Ausdruck des Feldes IBILD erkennen: die ausgedruckten Zahlen geben an, wie oft Punkte in jedem s,t-Intervall der Größe $1/32 \cdot 1/32$ ausgewertet wurden. Einmal berechnete Daten der Oberfläche und berechnete Potentiale φ^1 werden in dem Feld TAB nach der Methode des Hash-Coding abgespeichert, um später nicht neu berechnet werden zu müssen.

Die Koordinaten x, y und z der Körperoberfläche werden über s und t mit der Routine D123I über die gegebenen Stützstellen in einem Rechteckraster über s und t interpoliert. Die Routine nähert die Oberfläche in beiden Richtungen durch Polynome 3. Grades an, die stetig bezüglich der Ordinaten und der ersten, aber nicht der zweiten Ableitungen sind. Die Ableitungen der Koordinaten nach s bzw. t werden an den Stützpunkten gleich den Steigungen der Sehnen durch die jeweils benachbarten zwei Stützpunkte gesetzt (mit passenden Erweiterungen am Rande).

Anhang 2 enthält eine Programm-Beschreibung sowie Programmtext und Beispiel-Rechnung eines nach dieser Methode arbeitenden Programms NOBLE.

Ergebnisse

Die folgenden Angaben beziehen sich auf Testrechnungen am Schiffskörper des Forschungsschiffes "Meteor". Sie wurden mit verschiedenen für die Integrationen geforderten Genauigkeitsangaben GEN1 und GEN2 (vgl. Programmbeschreibung) durchgeführt. Für kleine GEN1 und GEN2 konvergieren die Ergebnisse fast gegen die wirklichen Potentiale; es verbleiben nur kleine Fehler wegen der nicht absolut genauen Annäherung der Schiffsform und weil das Verfahren von Noblesse und Triantafyllou in der hier angewendeten Form ein Näherungsverfahren ist. Da keine absolut richtigen Potentiale bekannt sind, werden im Folgenden die für verschiedene Genauigkeiten erhaltenen Ergebnisse auf die mit GEN1 = GEN2 = 0.012 erhaltenen Werte bezogen. Die folgende Tabelle gibt die so gebildeten relativen Fehler an 6 Punkten der Schiffsoberfläche bei 4 anderen, größeren Fehlermargen.

GEN1=GEN2=	0.02	0.03	0.04	1.00
s t				
0.5 1.0	0.002	-0.009	-0.004	0.020
-0.5 0.0	-0.004	-0.002	0.015	-0.223
0.5 0.0	-0.003	-0.031	0.065	0.176
1.0 0.0	-0.007	0.040	0.090	0.195
-0.5 1.0	0.002	-0.032	0.049	-0.353
-1.0 0.0	-0.006	-0.335	-0.563	-1.114
Rechenzeit für 8 Punkte	4 min	2 min	1 min	0.2 min

Die angegebene Rechenzeit gilt für den Rechner TR 440. Sie steigt weniger als proportional mit der Anzahl der zu bestimmenden Potentialwerte; der Anstieg ist besonders langsam, wenn die Potentiale an dicht benachbarten Punkten zu berechnen sind. Das folgende Bild zeigt die Abhängigkeit der Rechenzeit von der Anzahl der zu berechnenden Potentiale im Fall GEN1 = GEN2 = 0.03; die Punkte waren über die gesamte Oberfläche des Schiffes verteilt.

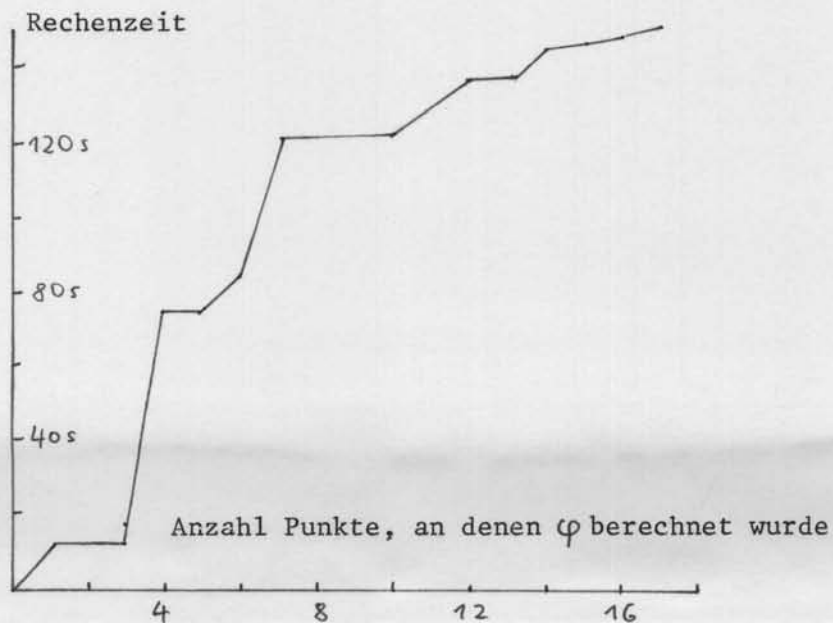


Bild 7

Beurteilung

Das Verfahren ist sehr schnell, wenn das Potential nur an wenigen Punkten zu bestimmen ist; bei vielen Punkten wird es zunehmend uneffektiver im Vergleich zu anderen Verfahren. Da die Fehler der Potentiale im Gegensatz zum ADIP-Verfahren unabhängig voneinander sind, ist zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes aus Potentialdifferenzen eine große Genauigkeit der Potentiale erforderlich. - Das erstellte Programm berechnet das Potential nur auf der Körperoberfläche.

Weitere Lösungsmöglichkeiten

Das Verfahren von Hess und Smith /1/ erfüllt die Randbedingung (6) auf der Körperoberfläche nur an einzelnen Punkten. Bei gleicher Anzahl von Quellelementen würde die Ritz-Methode, bei der die Randbedingung im Mittel über Oberflächenbereiche erfüllt wird, genauer sein. Diese Methode erfordert aber die Berechnung der 4-fach-Integrale

$$\iint_{S_i} \iint_{S_j} \frac{(\underline{x} - \underline{\xi}) \cdot \underline{n}(\underline{\xi})}{|\underline{x} - \underline{\xi}|^3} dS_i dS_j \quad (22)$$

für alle Paare von je zwei Quellelementen i und j . Dabei sind ds_i und ds_j Flächenelemente an den Orten \underline{x} bzw. $\underline{\xi}$ in den Teilflächen S_i bzw. S_j , in die die Körperoberfläche aufgeteilt wird. $\underline{n}(\underline{\xi})$ ist der Normalenvektor auf der Fläche am Punkt $\underline{\xi}$. Bei der Methode /1/ kommen dagegen nur 2-fach-Integrale vor.

Die analytische Berechnung der Integrale (22) ist zumindest schwierig; die numerische Auswertung der entstehenden Formeln wäre in jedem Fall rechenzeitintensiv, ebenso wie eine rein numerische oder halb-numerische Integration von (22). Deshalb wurde versucht, ob es eine Verbesserung gegenüber /1/ darstellt, wenn der Integrand von (22) in eine Taylor-Reihe um den Flächenschwerpunkt bis zu quadratischen Gliedern entwickelt wird und für diese Ersatzfunktion die Integrale (22) bestimmt werden. Es zeigte sich, daß man dann recht einfache Ausdrücke erhält, die sich auch schnell berechnen lassen. Potentialbestimmungen nach dieser Methode zeigten dann aber, daß der Fehler durch das Abbrechen der Taylor-Entwicklung zu groß ist, wenn die Flächen i und j dicht beieinander liegen.

Ein besserer Weg, die Ritzmethode anzuwenden und trotzdem die Auswertung der Integrale (22) zu vermeiden, ist die Finite-Elemente-Methode. In ihrer üblichen Ausprägung erfordert diese Methode aber eine Belegung nicht nur der Körperoberfläche, sondern des gesamten Flüssigkeitsraumes (ähnlich wie in dem zuerst beschriebenen Verfahren) mit finiten Elementen. Von Lenoir und Jami /6/ wurde jedoch eine FE-Methode vorgeschlagen, die es erlaubt, nur einen schmalen Bereich um den Körper herum (z. B. von der Dicke eines Elementes) mit Elementen zu überdecken; am Außenrand dieses Bereichs wird die Randbedingung entsprechend Gleichung 15 (S. 7) angesetzt.

Dies Verfahren wurde in einer Diplomarbeit /7/ programmiert und zunächst an 2-dimensionalen Strömungen getestet. Dabei bestätigten sich die in /6/ angegebenen sehr günstigen Relationen zwischen Genauigkeit und Elementanzahl. Bevor Aussagen über die Relation von Rechenzeit und Genauigkeit bei 3-dimensionalen Strömungen möglich sind, sind jedoch weitere Programmierarbeiten erforderlich.

Literatur

- 1 Hess, L.; Smith, A. M. O.: Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary 3-dimensional bodies. Journal of ship research 1964, S. 22
- 2 Marsal, D.: Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen in Wissenschaft und Technik. Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich 1976
- 3 Douglas, Jr., J. und Rachfor, Jr., H. H.: On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), S. 421-439
- 4 Noblesse, F.; Trinatafyllou, A.: On the calculation of potential flow about a body in an unbounded fluid. MIT Ocean Engineering Report 80-8 (1980)
- 5 Söding, H.: Routinen zur Interpolation, Integration und Optimierung. Bericht des Instituts für Entwerfen von Schiffen und Schiffstheorie, Universität Hannover, Nr. 33 (1979)
- 6 Lenoir, M.; Jami, A.: A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics. Computer methods in applied mechanics and engineering 16 (1978)
- 7 Jensen, G.: Eine Finite-Elemente-Methode zur Berechnung von Potentialströmungen. Diplomarbeit am Institut für Schiffbau Hamburg (1983)

Anhang 1: Programm ADIP

```

FUNCTION HULL(I,J,K,VN,IGR)
C HULL KLEINER 0 IM KOERPER,GROESSER 0 AUSSERHALB
C VN=(NX/DX,NY/DY,NZ/DZ) MIT (NX,NY,NZ)=NORMALVEKTOR (NICHT NORMIERT)
C IGR GIBT GROESSTE NORMALVEKTORKOMPONENTE AN
COMMON DX,DY,DZ,IO,GR
DIMENSION VN(3)
100 X=(I-IO)*DX
Y=(J-1.5)*DY
Z=(K-1.5)*DZ
C HIER FUER KUGEL MIT RADIUS GR
HULL=X**2+Y**2+Z**2-GR**2
IF(HULL.GT.0.)RETURN
VN(1)=X/DX
VN(2)=Y/DY
VN(3)=Z/DZ
IGR=1
IF(ABS(VN(2)).GT.ABS(VN(1)))IGR=2
IF(ABS(VN(3)).GT.ABS(VN(IGR)))IGR=3
C KORREKTUR BEI SCHRAEGER OBERFLAECHE FUER IM MITTEL MITTIGE OBERFL. IM NETZ
COSA=ABS(VN(IGR))/SQRT(VN(1)**2+VN(2)**2+VN(3)**2)
DN=WENN(IGR.EQ.1,DX,WENN(IGR.EQ.2,DY,DZ))*(1./COSA-COSA)/2.
HULL=HULL+GR**2-(GR-DN)**2
RETURN
END

C KOERPER IN PARALLELSTROEMUNG. HAUPTPROGRAMM ZUM KONFIGURIEREN VON FELD
DIMENSION FELD(29000)
C LESEN DER MAXIMALEN IR, JR, KR FUER ALLE FOLGENDEN RECHNUNGEN
IC=RDB(19.,3.,100.,'(12H MAXIMALES I,T30,1F10.0)',FLOAT(IC))
JC=RDB(19.,3.,100.,'(12H MAXIMALES J,T30,1F10.0)',FLOAT(JC))
KC=RDB(19.,3.,100.,'(12H MAXIMALES K,T30,1F10.0)',FLOAT(KC))
N2=IC*JC*KC+1
N4=2*N2-1
N5=N4+JC*KC*2
N6=N5+IC*KC
N7=N6+IC*JC
IF(N7.GT.29001)GOTO 5
CALL ADIP(FELD(1),FELD(N2),FELD(N4),FELD(N5),FELD(N6),IC,JC,KC)
5 WRITE(6,6)
6 FORMAT(' IC*JC*KC ZU GROSS')
END

```

```

SUBROUTINE ADIP(FI,FIS,IAF,JAF,KAF,IC,JC,KC)
  DIMENSION FI(IC,JC,KC),FIS(IC,JC,KC),IAF(JC,KC,2),JAF(IC,KC),
& KAF(IC,JC),R(100),Q(100),VN(3)
  COMMON DX,DY,DZ,IO,GR
440 DX=RDB(1.,1.E-10,1.E10,'(3H DX,T30,1F10.3)',DX)
  DY=RDB(1.,1.E-10,1.E10,'(3H DY,T30,1F10.3)',DY)
  DZ=RDB(1.,1.E-10,1.E10,'(3H DZ,T30,1F10.3)',DZ)
  IO=RDB(9.,3.,FLOAT(IC),'(10H I BEI X=0,T30,1F10.0)',FLOAT(IO))
C IR,JR,KR SIND RANDINDEXE (INDEXE DER PUNKTE AUSSERHALB AUSSEN RAND)
  IR=RDB(19.,3.,FLOAT(IC),'(28H ANZAHL PUNKTE IN X-RICHTUNG,T30,
& 1F10.0)',99999.)
  JR=RDB(19.,3.,FLOAT(JC),'(28H ANZAHL PUNKTE IN Y-RICHTUNG,T30,
& 1F10.0)',99999.)
  KR=RDB(19.,3.,FLOAT(KC),'(28H ANZAHL PUNKTE IN Z-RICHTUNG,T30,
& 1F10.0)',99999.)
  U=RDB(1.,0.,1.E10,'(24H ANSTROMGESCHWINDIGKEIT,T30,1F10.3)',U)
  IDR=RDB(1000.,1.,1.E10,'(27H DRUCKEN NACH ? ITERATIONEN,T30,
& 1F10.0)',FLOAT(IDR))
  ID1=RDB(1.,1.,1.E10,'(16H ANFANGS-X-INDEX,T30,1F10.0)',FLOAT(ID1))
  ID2=RDB(1.,1.,1.E10,'(12H END-X-INDEX,T30,1F10.0)',FLOAT(ID2))
  ID3=RDB(1.,1.,1.E10,'(16H X-INDEX-SCHRITT,T30,1F10.0)',FLOAT(ID3))
  JD1=RDB(1.,1.,1.E10,'(16H ANFANGS-Y-INDEX,T30,1F10.0)',FLOAT(JD1))
  JD2=RDB(1.,1.,1.E10,'(12H END-Y-INDEX,T30,1F10.0)',FLOAT(JD2))
  JD3=RDB(1.,1.,1.E10,'(16H Y-INDEX-SCHRITT,T30,1F10.0)',FLOAT(JD3))
  KD1=RDB(1.,1.,1.E10,'(16H ANFANGS-Z-INDEX,T30,1F10.0)',FLOAT(KD1))
  KD2=RDB(1.,1.,1.E10,'(12H END-Z-INDEX,T30,1F10.0)',FLOAT(KD2))
  KD3=RDB(1.,1.,1.E10,'(16H Z-INDEX-SCHRITT,T30,1F10.0)',FLOAT(KD3))
  GR=RDB(99999.,1.E-10,1.E10,'(12H KUGELRADIUS,T30,1F10.3)',GR)
490 F2MIN=RDB(1.,1.E-10,1.E10,'(18H FEHLERKENNGROSSE,T28,1G12.3)',
& F2MIN)
C ANFANGSWERTE
  IR1=IR-1
  JR1=JR-1
  KR1=KR-1
  DO 650 J=1,JR
  DO 650 K=1,KR
  DO 653 I=1,IR
653 FI(I,J,K)=0.
654 IAF(J,K,1)=1
650 IAF(J,K,2)=IR
  DO 651 I=1,IR
  DO 651 K=1,KR
651 JAF(I,K)=1
  DO 652 I=1,IR
  DO 652 J=1,JR
652 KAF(I,J)=1
  UX=U*DX
  IDZ=0
C BERECHNUNG VON IAF,JAF,KAF UND ANFANGS-PHI IM KOERPER
C IAF,JAF,KAF SIND INDEXE DER RANDPUNKTE IM KOERPER
  DO 605 IVH=1,2
C IVH=1 BEI X POSITIV = VORN, IVH=2 HINTEN
  I=IWENN(IVH.EQ.1,IR1,2)
  DO 605 J=2,JR1
  DO 601 K=2,KR1
600 X=HULL(I,J,K,VN,IGR)
  IF(X.LT.0.)GOTO 602
  I=I-(3-2*IVH)
  IF(I.EQ.0.OR.I.GT.IR)GOTO 604
  GOTO 600

```

```
602 IAF(J,K,IVH)=I
    FI(I,J,K)=-VN(1)*UX/ABS(VN(IGR))
601 CONTINUE
604 I=IAF(J,2,IVH)
605 CONTINUE
555 FORMAT(20I5)
    J=JR1
    DO 615 I=10,IR1
    DO 611 K=2,KR1
610 X=HULL(I,J,K,VN,IGR)
    IF(X.LT.0.)GOTO 612
    J=J-1
    IF(J.EQ.0)GOTO 614
    GOTO 610
612 JAF(I,K)=J
    FI(I,J,K)=-VN(1)*UX/ABS(VN(IGR))
611 CONTINUE
614 J=JAF(I,2)
615 CONTINUE
    J=JR1
    DO 515 I1=3,I0
    I=I0+2-I1
    DO 511 K=2,KR1
510 X=HULL(I,J,K,VN,IGR)
    IF(X.LT.0.)GOTO 512
    J=J-1
    IF(J.EQ.0)GOTO 514
    GOTO 510
512 JAF(I,K)=J
    FI(I,J,K)=-VN(1)*UX/ABS(VN(IGR))
511 CONTINUE
514 J=JAF(I,2)
515 CONTINUE
    K=KR1
    DO 625 I=10,IR1
    DO 621 J=2,JR1
620 X=HULL(I,J,K,VN,IGR)
    IF(X.LT.0.)GOTO 622
    K=K-1
    IF(K.EQ.0)GOTO 624
    GOTO 620
622 KAF(I,J)=K
    FI(I,J,K)=-VN(1)*UX/ABS(VN(IGR))
621 CONTINUE
624 K=KAF(I,2)
625 CONTINUE
    K=KR1
    DO 525 I1=3,I0
    I=I0+2-I1
    DO 521 J=2,JR1
520 X=HULL(I,J,K,VN,IGR)
    IF(X.LT.0.)GOTO 522
    K=K-1
    IF(K.EQ.0)GOTO 524
    GOTO 520
522 KAF(I,J)=K
    FI(I,J,K)=-VN(1)*UX/ABS(VN(IGR))
521 CONTINUE
524 K=KAF(I,2)
525 CONTINUE
```

C ZYKLENSCHLEIFE, D. H. DT-FESTSETZUNG

DT1=0.2*DX*DY
F2VDR=1.E10
DO 405 ICY=1,15
FVHBES=1.
DT=DT1
DO 400 IH=1,10
IDZ=IDZ+1
DT=1.7*DT

C

C GLEICHUNGEN (1) LOESEN UEBER Z

C

H=DZ**2/DT
H2=H+2
HZX=(DZ/DX)**2
HZY=(DZ/DY)**2
HBES=2.*HZX+2.*HZY+2.
F2=0.

C SCHLEIFE VON AUSSEN WEGEN RANDBEDINGUNGEN AN WASSEROBERFLAECHE

I=IR
DO 10 IL=2,IR1
I=I-1
DO 10 J=2,JR1

C BERECHNUNG DES ANFANGSINDEX

KA=KAF(I,J)

C RANDBEDINGUNG AM KOERPER UND BEI Z=0

4 R(KA)=1.
Q(KA)=0.
KA=KA+1

C TRIDIAGONAL VORWAERTS

DO 5 K=KA,KR1
R(K)=1./(H2-R(K-1))
D=(FI(I-1,J,K)+FI(I+1,J,K))*HZX+(FI(I,J-1,K)+FI(I,J+1,K))*HZY
+FI(I,J,K-1)+FI(I,J,K+1)-FI(I,J,K)*HBES
F2=F2+D**2
Q(K)=(D+Q(K-1))*R(K)

5 CONTINUE

C RANDBEDINGUNGEN AUSSEN

ERG=KR1*Q(KR1)/(KR+1-KR1*R(KR1))

C SO FUER DIPOL, GEMITTELT DIE 1 ZWISCHEN 0 UND 2

FIS(I,J,KR)=ERG

C TRIDIAGONAL RUECKWAERTS

K=KR
DO 7 K1=KA,KR
K=K-1
ERG=Q(K)+R(K)*ERG
FIS(I,J,K)=ERG

7 CONTINUE

10 CONTINUE

F2=F2/DZ**2

C

C GLEICHUNGEN LOESEN UEBER Y

C

H=DY**2/DT
H2=H+2
I=IR
DO 110 IL=2,IR1
I=I-1

DO 110 K=2,KR1

C BERECHNUNG DES ANFANGSINDEX

JA=JAF(I,K)


```

C RANDBEDINGUNG AM KOERPER UND AN Y=0
104 R(JA)=1.
    Q(JA)=0.
    JA=JA+1
C TRIDIAGONAL VORWAERTS
DO 105 J=JA,JR1
    R(J)=1./(H2-R(J-1))
    Q(J)=(FIS(I,J,K)*H+Q(J-1))*R(J)
105 CONTINUE
C RANDBEDINGUNG AUSSEN
ERG=JR1*Q(JR1)/(JR+1-JR1*R(JR1))
C SO FUER DIPOL. DIE 1 IST GEMITTELT ZWISCHEN 0 UND 2
FIS(I,JR,K)=ERG
C TRIDIAGONAL RUECKWAERTS
J=JR
DO 107 J1=JA,JR
    J=J-1
    ERG=Q(J)+R(J)*ERG
    FIS(I,J,K)=ERG
107 CONTINUE
110 CONTINUE

C
C GLEICHUNGEN LOESEN UEBER X
C
    H=DX**2/DT
    H2=H+2
C SCHLEIFEN VON AUSSEN WEGEN RANDBEDINGUNG AM KOERPER
J=JR
DO 210 JL=2,JR1
    J=J-1
    K=KR
    DO 210 KL=2,KR1
        K=K-1
C BERECHNUNG DES ANFANGSINDEX
DO 220 IHV=1,2
    L=3-2*IHV
    IA=IAF(J,K,IHV)
    IF(IA.EQ.IR)GOTO 220
    IB=IWENN(IHV.EQ.1,IR,1)
    IB1=IB-L
C RANDBEDINGUNG AM KOERPER UND AN X=0
XO=HULL(IA,J,K,VN,IGR)
AVN1=ABS(VN(1))
B1=1.
IF(XO.LT.0)GOTO 201
B1=10-1
C1=2-10
D1=0.
GOTO 204
201 IF(IGR.NE.1)GOTO 202
    C1=-(AVN1-VN(2))*(AVN1-VN(3))/VN(1)**2
    D1=(VN(2)*(AVN1-VN(3))*FIS(IA+L,J+1,K)+(AVN1-VN(2))*VN(3)
& *FIS(IA+L,J,K+1)+VN(2)*VN(3)*FIS(IA+L,J+1,K+1))/VN(1)**2
    GOTO 204
202 IF(IGR.NE.2)GOTO 203
    C1=0.
    D1=((VN(2)-AVN1)*(VN(2)-VN(3))*FIS(IA,J+1,K)
& +AVN1*(VN(2)-VN(3))*FIS(IA+L,J+1,K)+(VN(2)-AVN1)*VN(3)*FIS
& (IA,J+1,K+1)+AVN1*VN(3)*FIS(IA+L,J+1,K+1))/VN(2)**2

```



```

      GOTO 204
203 C1=0.
      D1=((VN(3)-AVN1)*(VN(3)-VN(2))*FIS(IA,J,K+1)
      & +AVN1*(VN(3)-VN(2))*FIS(IA+L,J,K+1)+(VN(3)-AVN1)*VN(2)*FIS(IA,
      & J+1,K+1)+AVN1*VN(2)*FIS(IA+L,J+1,K+1))/VN(3)**2
204 R(IA)=-C1/B1
500 FORMAT(9G12.4,115)
      Q(IA)=D1/B1
C TRIDIAGONAL VORWAERTS
      IF((IB1-IA)*L.LE.0)CALL MELDE('(34H ABSTAND KOERPER - X-RAND ZU KL
      & EIN )',999.99,10)
      I=IA
205 I=I+L
      R(I)=1./(H2-R(I-L))
      Q(I)=(FIS(I,J,K)*H+Q(I-L))*R(I)
      IF(I.NE.IB1)GOTO 205
C RANDBEDINGUNG AUSSSEN
      ERG=(IB1-IO)*Q(IB1)/(IB-IO-(IB1-IO)*R(IB1))
C SO FUER DIPOL, GEMITTELT
      FIS(IB,J,K)=ERG
      FI(IB,J,K)=FI(IB,J,K)+ERG
C TRIDIAGONAL RUECKWAERTS
      I=IB
207 I=I-L
      ERG=Q(I)+R(I)*ERG
      FIS(I,J,K)=ERG
      FI(I,J,K)=FI(I,J,K)+ERG
      IF(I.NE.IA)GOTO 207
220 CONTINUE
210 CONTINUE
C RANDWERTE ERGAENZEN ENTSPR. RANDBEDINGUNGEN
      I=IR
      DO 710 I1=2,IR1
      I=I-1
      K=KR
      DO 700 K1=2,KR1
      K=K-1
      FI(I,JR,K)=FI(I,JR1,K)*JR1/(JR+1)
      JA=JAF(I,K)
      XO=HULL(I,JA,K,VN,IGR)
      L=IWENN(VN(1).LT.0.,-1,1)
      IF(XO.LT.0)GOTO 701
      FI(I,1,K)=FI(I,2,K)
      GOTO 700
701 IF(IAF(JA,K,(3-L)/2).EQ.1)GOTO 700
      AVN1=ABS(VN(1))
      IF(IGR.NE.1)GOTO 702
      FI(I,JA,K)=-UX*L+((AVN1-VN(2))*(AVN1-VN(3))*FI(I+L,JA,K)+VN(2)*
      & (AVN1-VN(3))*FI(I+L,JA+1,K)+(AVN1-VN(2))*VN(3)*FI(I+L,JA,K+1)
      & +VN(2)*VN(3)*FI(I+L,JA+1,K+1))/VN(1)**2
      GOTO 700
702 IF(IGR.NE.2)GOTO 703
      FI(I,JA,K)=-VN(1)/VN(2)*UX+((VN(2)-AVN1)*(VN(2)-VN(3))*FI(I,JA+1,
      & K)+AVN1*(VN(2)-VN(3))*FI(I+L,JA+1,K)+(VN(2)-AVN1)*VN(3)
      & *FI(I,JA+1,K+1)+AVN1*VN(3)*FI(I+L,JA+1,K+1))/VN(2)**2
      GOTO 700
703 FI(I,JA,K)=-VN(1)/VN(3)*UX+((VN(3)-AVN1)*(VN(3)-VN(2))*FI(I,JA,
      & K+1)+AVN1*(VN(3)-VN(2))*FI(I+L,JA,K+1)+(VN(3)-AVN1)*VN(2)
      & *FI(I,JA+1,K+1)+AVN1*VN(2)*FI(I+L,JA+1,K+1))/VN(3)**2
700 CONTINUE
      J=JR
      DO 710 J1=2,JR1

```

```

J=J-1
FI(I,J,KR)=FI(I,J,KR1)*KR1/(KR+1)
KA=KAF(I,J)
XO=HULL(I,J,KA,VN,IGR)
L=IWENN(VN(1).LT.0.,-1,1)
IF(XO.LT.0)GOTO 711
FI(I,J,1)=FI(I,J,2)
GOTO 710
711 IF(IAF(J,KA,(3-L)/2).EQ.I.OR.JAF(I,KA).EQ.J)GOTO 710
AVN1=ABS(VN(1))
IF(IGR.NE.1)GOTO 712
FI(I,J,KA)=-UX*L+((AVN1-VN(2))*(AVN1-VN(3))*FI(I+L,J,KA)+VN(2)*
& (AVN1-VN(3))*FI(I+L,J+1,KA)+(AVN1-VN(2))*VN(3)*FI(I+L,J,KA+1)
& +VN(2)*VN(3)*FI(I+L,J+1,KA+1))/VN(1)**2
GOTO 710
712 IF(IGR.NE.2)GOTO 713
FI(I,J,KA)=-VN(1)/VN(2)*UX+((VN(2)-AVN1)*(VN(2)-VN(3))*FI(I,J+1,
& KA)+AVN1*(VN(2)-VN(3))*FI(I+L,J+1,KA)+(VN(2)-AVN1)*VN(3)*FI(I,
& J+1,KA+1)+AVN1*VN(3)*FI(I+L,J+1,KA+1))/VN(2)**2
GOTO 710
713 FI(I,J,KA)=-VN(1)/VN(3)*UX+((VN(3)-AVN1)*(VN(3)-VN(2))*FI(I,J,
& KA+1)+AVN1*(VN(3)-VN(2))*FI(I+L,J,KA+1)+(VN(3)-AVN1)*VN(2)*
& FI(I,J+1,KA+1)+AVN1*VN(2)*FI(I+L,J+1,KA+1))/VN(3)**2
710 CONTINUE
WRITE(6,500)F2,DT
FVH=F2/F2VDR
F2VDR=F2
IF(IH.EQ.3)FVHBES=FVH
IF(IH.GT.3)FVHBES=AMIN1(FVHBES,FVH)
IF(FVHBES.EQ.FVH)IBES=IH
IF(IDZ.LT.IDR.AND.F2.GT.F2MIN)GOTO 403
IDZ=0
DO 410 I=ID1,ID2,ID3
DO 410 J=JD1,JD2,JD3
410 WRITE(6,415)(FI(I,J,K),K=KD1,KD2,KD3)
415 FORMAT(5X,15F8.3)
403 IF(F2.LT.F2MIN)GOTO 450
IF(FVH.GT.0.33+0.67*FVHBES.AND.IH.GT.3)GOTO 401
400 CONTINUE
401 IF(ICY.GT.2)DT1=DT1*1.3** (IBES-4)
405 CONTINUE
450 GOTO 440
END

```

```

FUNCTION IWENN(L,I,J)
LOGICAL L
IWENN=J
IF(L)IWENN=I
RETURN
END

```

Anhang 2: Beschreibung des Programms NOBLE

Das Fortran-IV-Programm NOBLE berechnet die 3-dimensionale Strömung um starre, translatierende Körper in idealer Flüssigkeit nach Noblesse und Triantafyllou. Es behandelt nur Körper, die bezüglich der Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind und sich in Richtung der x-Achse bewegen. Berechnet werden nur die Werte φ^1 und φ an gegebenen Punkten auf oder außerhalb der Körperoberfläche, aber keine Geschwindigkeiten.

Folgende Daten werden mit der Funktion GELESN (siehe besondere Beschreibung) eingelesen (Längen in beliebigen aber stets gleichen Maßeinheiten):

Für den Körper:

NS = Anzahl Spanten

NT = Anzahl Punkte pro Spant

Maximale halbe Breite in y-Richtung

Maximale halbe Tiefe in z-Richtung

x-Koordinate eines Aufmaßspants

y-Koordinate eines Aufmaßpunkts

z-Koordinate desselben Aufmaßpunkts

z_1 = Maximale halbe Tiefe - z
d. h. von Kiel nach oben

Eingaben

NT mal wiederholt

für alle Punkte des Spants

} NS mal
wieder-
holt

Die Spanten sollten in gleichen oder besser gleichmäßig variierenden Abständen über der Körperlänge angeordnet werden, so daß die Spanten enger stehen, wo dies wegen der komplizierteren Form der Körpers für ausreichende Genauigkeit der Interpolation nötig ist. Meist müssen die Spanten an der Körperenden relativ dicht stehen. Dann ist oft eine Anordnung entsprechend einem kubischen Polynom zweckmäßig:

$x(n) - x_{.5} = a(n - N/2) + b(n - N/2)^3$, wobei die Symbole bedeuten:

$x(n)$ x-Koordinate des Spants Nr. n mit $n = 0$ bis $N = NS - 1$

$x_{.5}$ = x-Koordinate der Mitte zwischen den beiden Körperenden

$a = -3bN^2/(4(1-\beta))$

$b = -4L(1-\beta)/(N^3(2+\beta))$

L = Körperlänge

β = Verhältnis der Spantabstände an beiden Körperenden zu den Spantabständen in Körpermitte (z. B. 0.25, wenn an Enden Spanten 4 mal enger stehen sollen als in Körpermitte)

Die Anordnung der Punkte auf jedem Spant sollte gleichmäßig und auf allen Spanten in ähnlicher Art sein. Meist wird eine etwa konstante Bogenlänge zwischen allen Aufmaßpunkten eines Spants empfehlenswert sein.

Der Sinn der Spant- und Punktanordnung besteht darin, daß die Schiffsoberfläche mit Hilfe der Routine DI23I möglichst gut interpoliert werden kann; die unter Theorie genannten Parameter s und t sind dabei lineare Funktionen der Spant- bzw. Punktnummer.

Für die Punkte, an denen Potentiale zu berechnen sind:

GEN1 = Genauigkeit der φ^1 -Berechnung

GEN2 = Genauigkeit der φ -Berechnung

NP = Anzahl von Punkten

K = 0, falls Punkt auf Körperoberfläche liegt, sonst 1

s und t (siehe Abschnitt Theorie) bei K = 0 bzw. x, y, z
bei K = 1

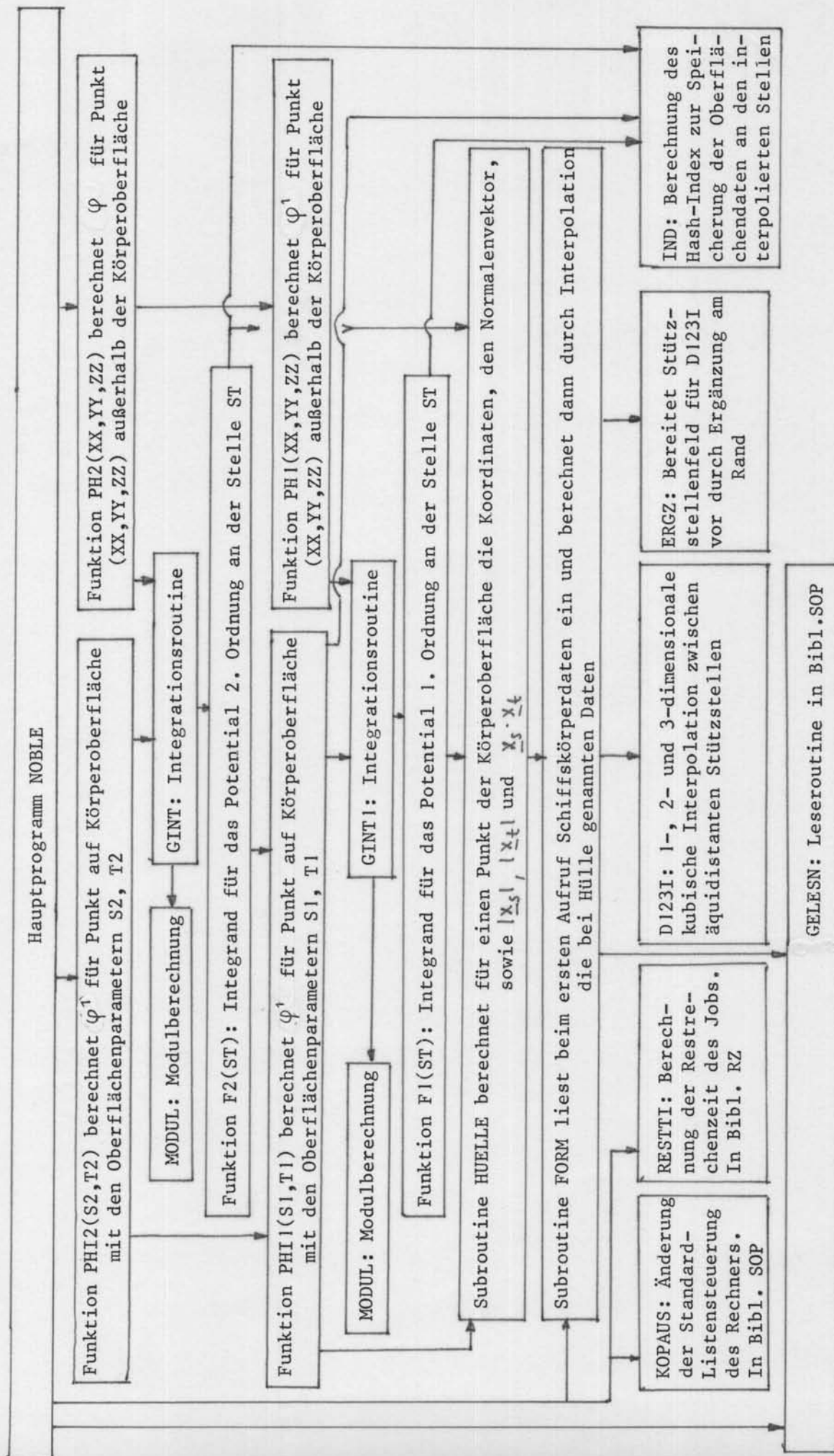
-1 als Schlußkennzeichen

} NP mal
wiederholt

} Beliebig
oft
wieder-
holt

Eingaben

Punkte mit K = 1 sollten tatsächlich außerhalb der Körperoberfläche in mehr als 0.01 Abstand von dieser liegen. GEN1 und GEN2 sind die in den Integrationsroutinen GINT und GINT1 benutzten Genauigkeitswerte. Es hat sich bewährt, beide Werte gleichgroß zu wählen.




```

SUBROUTINE HUELLE(IND,KEY,S,T,HULL)
C S, T BEZEICHNEN EINEN PUNKT DER SCHIFFSOBERFLAECHE.
C IND,KEY SIND INDEX BZW. SCHLUESSEL ZUR ABSPEICHERUNG DER DATEN IN
C DER TABELLE TAB. SIE WERDEN ERHALTEN DURCH AUFRUF DER ROUTINE IND. HUELLE BE-
C STIMMT DURCH AUFRUF VON FORM DEN VEKTOR HULL, DER FOLGENDE ERGEBNISSE
C AUFNIMMT: X, Y, Z (ORTSKOORDINATEN), NX,NY,NZ (KOORDINATEN DES NORMALVEKTORS,
C DESSEN LAENGE GLEICH DER FLAECHE FUER DS = DT = 1 IST), (VEKTORDX/DS)-BETRAG,
C (VEKTOR DX/DT)-BETRAG, (VEKTOR DX/DS)*(VEKTOR DX/DT),S UND T.

```

```

    DIMENSION HULL(11)
    COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
    IF(IABS(ITAB(IND)).EQ.KEY)GOTO 10
5 CALL FORM(S,T,TAB(1,IND))
    I1=S*16.+17.5
    I2=33.5-32.*T
    IBILD(I1,I2)=IBILD(I1,I2)+1
    ITAB(IND)=-KEY
10 DO 20 I=1,9
20 HULL(I)=TAB(I,IND)
    HULL(10)=S
    HULL(11)=T
    RETURN
END

```

```

FUNCTION PHI1(S3,T3)
C POTENTIAL 1. ORDNUNG NACH NOBLESSE BEI OBERFLAECHEPUNKT S3,T3
COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
EXTERNAL F1
FABCD(A,B,D)=A*ALOG((A+B+SQRT(A**2+B**2))/(A-B+SQRT(A**2+B**2)))
& *(A+D+SQRT(A**2+D**2))/(A-D+SQRT(A**2+D**2))
IND3=IND(S3,T3,KEY3)
1 IF(ITAB(IND3).NE.KEY3)GOTO 5
6 PHI1=TAB(10,IND3)
RETURN
5 IF(ITAB(IND3).LE.0)GOTO 10
IND3=IND3+1
IF(ITAB(IND3).EQ.KEY3)GOTO 6
10 CALL HUELLE(IND3,KEY3,S3,T3,HULL3)
A=(S3+1.)*HULL3(7)+2.34E-5
C=(1.-S3)*HULL3(7)+2.34E-5
B=(T3+2.)*HULL3(8)+2.34E-5
D=(2.-T3)*HULL3(8)+2.34E-5
PHI1=-(GINT1(F1,XG(1),XG(3),2,GEN1,3,NQ1)
& -(FABCD(A,B,D)+FABCD(B,C,A)+FABCD(C,D,B)+FABCD(D,A,C))
& *HULL3(4)/(HULL3(7)*HULL3(8)))/(4.*3.14159)
TAB(10,IND3)=PHI1
ITAB(IND3)=KEY3
RETURN
END

```

```

FUNCTION PH1(XX,YY,ZZ)
C BERECHNUNG DES POTENTIALS ERSTER ORDNUNG NACH NOBLESSE AUSSERHALB OBERFL.
COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
EXTERNAL F1
HULL3(1)=XX
HULL3(2)=YY
HULL3(3)=ZZ
HULL3(10)=1.E-48
PH1=-GINT1(F1,XG(1),XG(3),2,GEN1,3,NQ1)/4./3.14159
RETURN
END

```



```

FUNCTION IND(S,T,KEY)
C BERECHNET INDEX DER SPEICHERUNG (HASH-ADRESSE) UND SCHLUESSEL KEY ZUR KONTROL-
C LE ZU GEGEBENEM S,T
COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
KEY=1000.*(IFIX(1000.*S)+T)+10000000
RIND=632.6833*S+788.8519*T+1689.365
IND=ABS(RIND-IFIX(RIND))*2498.9+1.
RETURN
END

```

```

FUNCTION F1(STO)
C INTEGRAND VON PHI1. X DURCH 0, XSI DURCH 3 GEKENNZEICHNET.
DIMENSION STO(2)
DIMENSION HULL0(11)
COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
C BESTIMMUNG VON HULL0 (DATEN DER SCHIFFSOBERFLAECHE BEI VEKTOR X)
SO=STO(1)
TO=STO(2)
INDO=IND(SO,TO,KEY0)
CALL HUELLE(INDO,KEY0,SO,TO,HULL0)
C BERECHNUNG DES INTEGRANDEN 1/R - 1/RSTERN
F1=0.
RNX=HULL0(4)
DX=HULL0(1)-HULL3(1)
DS=SO-HULL3(10)
IX=ISX
30 DY=HULL0(2)-HULL3(2)
TO=STO(2)
IY=ISY
20 DZ=HULL0(3)-HULL3(3)
IZ=ISZ
10 R2=DX**2+DY**2+DZ**2
IF(HULL3(10).EQ.1.E-48)GOTO 7
DT=TO-HULL3(11)
RS2=(DS*HULL3(7))**2+(DT*HULL3(8))**2+2.*DS*DT*HULL3(9)
IF(R2.GT.1.E-4)GOTO 5
R2=1.E50
RS2=1.E50
5 F1=F1+HULL3(4)/SQRT(RS2)
7 F1=F1-RNX/SQRT(R2)
IF(IZ.EQ.1)GOTO 1
C WIEDERHOLUNG FUER SPIEGELUNG AN (Z=0)-EBENE
DZ=-HULL0(3)-HULL3(3)
TO=SIGN(2.,TO+1.345E-9)-TO
IZ=1
GOTO 10
1 IF(IY.EQ.1)GOTO 2
C WIEDERHOLUNG FUER SPIEGELUNG AN (Y=0)-EBENE
DY=-HULL0(2)-HULL3(2)
TO=-STO(2)
IY=1
GOTO 20
2 IF(IX.EQ.1)RETURN
C WIEDERHOLUNG FUER SPIEGELUNG AN (X=0)-EBENE
DX=-HULL0(1)-HULL3(1)
DS=-SO-HULL3(10)
RNX=-RNX
IX=1
GOTO 30
END

```

```

SUBROUTINE FORM(S,T,ERG)
C FUER ALLGEMEINE KOERPER MIT Y- UND Z-SYMMETRIE, OHNE X-SYMMETRIE
C BERECHNET SCHIFFSFORMDATEN X,Y,Z,NX,NY,NZ,(VEKTORDX/DS)-BETRAG,(VEKTORDX/DT)-
C BETRAG,(VEKTOR DX/DS)*VEKTOR DX/DT) AN STELLE S,T
C X-KOORDINATE ZEIGT GEGEN ANSTROEMRICHTUNG
C SCHIFFSOBERFLAECHE MUSS DURCH S = -1 UND 1, T = -2 UND 2 BEGRENZT SEIN.
C BEI SYMMETRIE IN ALLEN 3 RICHTUNGEN IST NUR S = 0 BIS 1, T = 0 BIS 1 ZU
C BESCHREIBEN.
  DIMENSION ERG(9)
  DIMENSION X(32),Y(32,32),Z(32,32),ST(2),STU(2),DST(2),NST(2),
& AX(2),AY(2,2),AZ(2,2)
  COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
  DATA IO/0/
  IF(IO.NE.0)GOTO 20
  IO=1
C BEIM ERSTEN AUFRUF EINLESEN SCHIFFSFORM UND VORBEREITEN DER INTERPOLATION
  NS=GELESN(0)
  NT=GELESN(0)
  BREITE=GELESN(0)
  TIEFG=GELESN(0)
  IF(NS.LT.3.OR.NS.GT.30.OR.NT.LT.3.OR.NT.GT.30.OR.BREITE.LT.0.01
& .OR.TIEFG.LT.0.01)CALL MELDE(' (28H ERSTE 4 KOERPERDATEN FALSCH)',
& 999.99,10)
  DO 10 I=1,NS
  X(I)=GELESN(0)
  DO 5 J=1,NT
  Y(I,J)=GELESN(0)
  Z(I,J)=TIEFG-GELESN(0)
  N2=Y(I,J)*32./BREITE+1.5
  IF(I.GT.NS/2)N2=34-N2
  N2=MAX0(1,MIN0(33,N2))
  N3=Z(I,J)*32./TIEFG+1.5
  N3=MAX0(1,MIN0(33,N3))
  IBILD(N2,N3)=I
5 CONTINUE
  WRITE(6,6)X(I)
6 FORMAT(/3H X=,13F9.3)
  WRITE(6,7)(Y(I,J),J=1,NT)
7 FORMAT(3H Y=,13F9.3)
  WRITE(6,8)(Z(I,J),J=1,NT)
8 FORMAT(3H Z=,13F9.3)
10 CONTINUE
  WRITE(6,11)IBILD
11 FORMAT(// ' VERANSCHAULICHUNG DER SPANTAUFMASSE',/(33I3))
  CALL ERGZ(X,32,1,1,NS,1,1)
  CALL ERGZ(Y,32,32,1,NS,NT,1)
  CALL ERGZ(Z,32,32,1,NS,NT,1)
  STU(1)=-1.
  STU(2)=0.
  DST(1)=2./(NS-1)
  DST(2)=1./(NT-1)
  NST(1)=NS
  NST(2)=NT
  XG(1)=-1.
  XG(2)=0.
  XG(3)=1.
  XG(4)=1.
  ISX=1
  ISY=2
  ISZ=2

```

C INTERPOLATION

```

20 ST(1)=S
   DS=SIGN(1.E-4,0.00001-S)
   DT=SIGN(1.E-4,0.49999-T)
   DO 30 I=1,2
   AX(I)=D123I(ST,STU,DST,NST,X,32,1,1,0.)
   ST(2)=T
   DO 25 J=1,2
   IF(I+J.EQ.4)GOTO 35
   AY(I,J)=D123I(ST,STU,DST,NST,Y,32,32,2,0.)
   AZ(I,J)=D123I(ST,STU,DST,NST,Z,32,32,-2,0.)
   ST(2)=ST(2)+DT
25 CONTINUE
   ST(1)=ST(1)+DS
30 CONTINUE
35 CONTINUE
   ERG(1)=AX(1)
   ERG(2)=AY(1,1)
   ERG(3)=AZ(1,1)
   XS=(AX(2)-AX(1))/DS
   YS=(AY(2,1)-AY(1,1))/DS
   ZS=(AZ(2,1)-AZ(1,1))/DS
   XT=0.
   YT=(AY(1,2)-AY(1,1))/DT
   ZT=(AZ(1,2)-AZ(1,1))/DT
   ERG(4)=-YS*ZT+ZS*YT
   ERG(5)=-ZS*XT+XS*ZT
   ERG(6)=-XS*YT+YS*XT
   ERG(7)=SQRT(XS**2+YS**2+ZS**2)+1.E-5
   ERG(8)=SQRT(XT**2+YT**2+ZT**2)+1.E-5
   ERG(9)=XS*XT+YS*YT+ZS*ZT
   RETURN
END

```

FUNCTION PHI2(S2,T2)

C POTENTIAL 2. ORDNUNG NACH NOBLESSE

```

C AN DER STELLE DER SCHIFFSOBERFLAECHE MIT DEN PARAMETERN S, T
COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
EXTERNAL F2
IND2=IND(S2,T2,KEY2)
CALL HUELLE(IND2,KEY2,S2,T2,HULL2)
P12=PHI1(S2,T2)
PHI2=P12**2/(P12-GINT(F2,XG(1),XG(3),2,GEN2,3,NQ2)/(4.*3.14159))
RETURN
END

```

FUNCTION PH2(XX,YY,ZZ)

```

COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
& ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
EXTERNAL F2
HULL2(1)=XX
HULL2(2)=YY
HULL2(3)=ZZ
P12=PH1(XX,YY,ZZ)
PH2=P12**2/(P12-GINT(F2,XG(1),XG(3),2,GEN2,3,NQ2)/(4.*3.14159))
RETURN
END

```

```

FUNCTION F2(ST1)
C INTEGRAND FUER POTENTIAL 2. ORDNUNG NACH NOBLESSE
  DIMENSION ST1(2)
  DIMENSION HULL1(11)
  COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
    & ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
C BERECHNUNG DER SCHIFFSKOERPERDATEN BEI S1,T1
  S1=ST1(1)
  T1=ST1(2)
  IND1=IND(S1,T1,KEY1)
  CALL HUELLE(IND1,KEY1,S1,T1,HULL1)
C BERECHNUNG DES POTENTIALS 1. ORDNUNG BEI S1, T1
  P11=PHI1(S1,T1)
C KENNWERT FUER VEKTOR X = VEKTOR XSI
  F2=0.13579E-20
C INTEGRAND BERECHNEN
  DX=HULL1(1)-HULL2(1)
  RNX=HULL1(4)
  IX=ISX
  30 DY=HULL1(2)-HULL2(2)
  RNY=HULL1(5)
  IY=ISY
  20 DZ=HULL1(3)-HULL2(3)
  RNZ=HULL1(6)
  IZ=ISZ
  10 R2=DX**2+DY**2+DZ**2
  IF(R2.LE.1.E-4)RETURN
  F2=F2+(P11-P12)/(R2*SQRT(R2))*(RNX*DX+RNY*DY+RNZ*DZ)
  IF(IZ.EQ.1)GOTO 1
C WIEDERHOLUNG FUER SPIEGELUNG AN Z = 0
  DZ=-HULL1(3)-HULL2(3)
  RNZ=-RNZ
  IZ=1
  GOTO 10
  1 IF(IY.EQ.1)GOTO 2
C WIEDERHOLUNG FUER SPIEGELUNG AN Y = 0
  DY=-HULL1(2)-HULL2(2)
  RNY=-RNY
  IY=1
  GOTO 20
  2 IF(IX.EQ.1)RETURN
C WIEDERHOLUNG FUER SPIEGELUNG AN X = 0
  DX=-HULL1(1)-HULL2(1)
  RNX=-RNX
  P11=-P11
  IX=1
  GOTO 30
END

```

```

FUNCTION GINT1(F,XU,XD,N,GEN,MINHLB,NQ)
C INTEGRATIONSROUTINE AEHNLICH GINT IN ESS 33
  DIMENSION XU(N),XD(N),DELTX(10),XQUAD(10),LSTACK(20),X(10)
  DIMENSION IZWPOT(10),HASH(2,1000),HCONST(10),DX(10)
  DATA HCONST/13764.7638 ,3892.21761 ,4162.33699 ,
    & 10695.4669 ,9238.61130 ,6234.76981 ,
    & 4062.73819 ,3760.07030 ,2466.31889 ,
    & 6338.27194 /
C VORBEREITUNG
  VOL=1.
  GINT1=0.

```



```

DO 120 I=1,1000
120 HASH(1,I)=0.
NQ=0
ISTACK=1
LEV=1
NECK=2**N
AGEN=GEN*GEN*(NECK-1)*NECK
I1=1
DO 1 I=1,N
DELTX(I)=X0(I)-XU(I)
DX(I)=DELTX(I)/HCONST(I)
XQUAD(I)=XU(I)
IZWPOT(I)=2**(I-1)
1 VOL=VOL*DELTX(I)
C QUADERGENERIERUNG
102 SUM=0.
SUM2=0.
LSTACK(ISTACK)=LEV
DO 2 J=1,NECK
H=0.2357964
IBIT=J-1
DO 20 I=1,N
X(I)=XQUAD(I)
IKRIT=IBIT/IZWPOT(I)
IKRIT=IKRIT-(IKRIT/2)*2
IF(IKRIT.NE.0)X(I)=X(I)+DELTX(I)
20 H=H+(X(I)-XU(I))/DX(I)
IHASH=H
IHASH=(H-IHASH)*999.99+1.
IF(ABS(HASH(1,IHASH)-H).LE.1.E-3)GOTO 100
FWERT=F(X)
HASH(1,IHASH)=H
HASH(2,IHASH)=FWERT
GOTO 101
100 FWERT=HASH(2,IHASH)
101 SUM=SUM+FWERT
SUM2=SUM2+FWERT**2
2 CONTINUE
C GENAUIGKEITSPRUEFUNG
IF(MINHLB.GE.LEV)GOTO 30
IF(AGEN.GE.(SUM2-SUM*SUM/NECK)*VOL*VOL)GOTO 10
C HALBIERUNG
30 I1=MODUL(I1-1,N)
DELTX(I1)=DELTX(I1)/2.
VOL=VOL/2.
LEV=LEV+1
XQUAD(I1)=XQUAD(I1)+DELTX(I1)
LSTACK(ISTACK)=LEV
ISTACK=ISTACK+1
GOTO 102
C INTEGRATION EINES QUADERS UND RUECKVERFOLGUNG
10 GINT1=GINT1+SUM*VOL/NECK
NQ=NQ+1
ISTACK=ISTACK-1
IF(ISTACK.LE.0)RETURN
LEV1=LSTACK(ISTACK)
12 IF(LEV1.EQ.LEV)GOTO 16
VOL=VOL*2
DELTX(I1)=DELTX(I1)*2
I1=MODUL(I1+1,N)
LEV=LEV-1
GOTO 12
16 XQUAD(I1)=XQUAD(I1)-DELTX(I1)
GOTO 102
END

```



```

FUNCTION GINT (F,XU,XD,N,GEN,MINHLB,NQ)
C INTEGRATION AEHNLICH WIE IN ESS 33. GETRENNT VON GINT1, WEIL SONST REKURSIVE
C AUFRUFE ENTSTEHEN.
C F = .13579E-20 HEISST: MAN NEHME GRENZWERT VON F IN DER UMGEBUNG.
  DIMENSION XU(N),XD(N),DELTX(10),XQUAD(10),LSTACK(20),X(10)
  DIMENSION IZWPOT(10),HASH(2,1000),HCONST(10),DX(10)
  DATA HCONST/13764.7638 ,3892.21761 ,4162.33699 ,
& 10695.4669 ,9238.61130 ,6234.76981 ,
& 4062.73819 ,3760.07030 ,2466.31889 ,
& 6338.27194 /
C VORBEREITUNG
  VOL=1.
  GINT=0
  DO 120 I=1,1000
120 HASH(1,I)=0.
  NQ=0
  ISTACK=1
  LEV=1
  NECK=2**N
  AGEN=GEN*GEN*(NECK-1)*NECK
  I1=1
  DO 1 I=1,N
    DELTX(I)=XD(I)-XU(I)
    DX(I)=DELTX(I)/HCONST(I)
    XQUAD(I)=XU(I)
    IZWPOT(I)=2**(I-1)
  1 VOL=VOL*DELTX(I)
C QUADERGENERIERUNG
102 SUM=0.
  SUM2=0.
  NECK1=NECK

  LSTACK(ISTACK)=LEV
  DO 2 J=1,NECK
    H=0.2357964
    IBIT=J-1
    DO 20 I=1,N
      X(I)=XQUAD(I)
      IKRIT=IBIT/IZWPOT(I)
      IKRIT=IKRIT-(IKRIT/2)*2
      IF(IKRIT.NE.0)X(I)=X(I)+DELTX(I)
20 H=H+(X(I)-XU(I))/DX(I)
    IHASH=H
    IHASH=(H-IHASH)*999.99+1.
    IF(ABS(HASH(1,IHASH)-H).LE.1.E-3)GOTO 100
    FWERT=F(X)
    HASH(1,IHASH)=H
    HASH(2,IHASH)=FWERT
    GOTO 101
100 FWERT=HASH(2,IHASH)
101 SUM=SUM+FWERT
    SUM2=SUM2+FWERT**2
    IF(FWERT.EQ..13579E-20)NECK1=NECK-1
  2 CONTINUE
C GENAUIGKEITSPRUEFUNG
  IF(MINHLB.GE.LEV)GOTO 30
  IF(AGEN.GE.(SUM2-SUM**2/NECK1)*VOL**2)GOTO 10
C HALBIERUNG
30 I1=MODUL(I1-1,N)
  DELTX(I1)=DELTX(I1)/2.
  VOL=VOL/2.

```

```

    LEV=LEV+1
    XQUAD(I1)=XQUAD(I1)+DELT(X(I1))
    LSTACK(ISTACK)=LEV
    ISTACK=ISTACK+1
    GOTO 102
C INTEGRATION EINES QUADERS UND RUECKVERFOLGUNG
10 GINT=GINT+SUM*VOL/NECK1
    NQ=NQ+1
    ISTACK=ISTACK-1
    IF(ISTACK.LE.0)RETURN
    LEV1=LSTACK(ISTACK)
12 IF(LEV1.EQ.LEV)GOTO 16
    VOL=VOL*2
    DELT(X(I1))=DELT(X(I1))*2
    I1=MODUL(I1+1,N)
    LEV=LEV-1
    GOTO 12
16 XQUAD(I1)=XQUAD(I1)-DELT(X(I1))
    GOTO 102
END

```

```

    FUNCTION MODUL(I,N)
C GEHÖRT ZU GINT UND GINT1
    MODUL=1
    2 IF(MODUL.GE.1)GOTO 1

```

```

    MODUL=MODUL+N
    GOTO 2
1 IF(MODUL.LE.N)RETURN
    MODUL=MODUL-N
    GOTO 1
END

```

```

C PROGRAMM NOBLE ZUR BERECHNUNG DES POTENTIALS BEI TRANSLATION VON KOERPERN
C IN UNBEGRENZTER IDEALER FLUESSIGKEIT
    COMMON /DOPP/ TAB(10,2500),ITAB(2500),HULL3(11),XG(4),GEN1,ISX,
    & ISY,ISZ,NQ1,GEN2,NQ2,HULL2(11),P12,IBILD(33,33)
    CALL KOPPAUS
C ZWECKS EINLESEN DER FORMDATEN UND WEITERER INITIALISIERUNGEN:
    CALL FORM(0.,0.,HULL2)
    5 GEN1=GELESN(0)
    IF(GEN1.LE.0.)STOP
    GEN2=GELESN(0)
    DO 10 I1=1,33
    DO 10 I2=1,33
10 IBILD(I1,I2)=0
    DO 1 I=1,2500
    1 ITAB(I)=0
    WRITE(6,8)
    8 FORMAT('/' NQ2 ZEIT S PH12 PH11 T GEN2 X GEN1')
    & Z PH12 PH11 GEN2 X GEN1')
    NP=GELESN(0)
    DO 15 IP=1,NP
    CALL RESTTI(IZEIT)
    ZEIT=IZEIT/1.E5
    K=GELESN(0)
    IF(K.NE.0)GOTO 30
    S=GELESN(0)
    T=GELESN(0)

```

```

P=PHI2(S,T)
9 WRITE(6,2)NQ2, ZEIT,S,T,(HULL2(I),I=1,3),P,P12,GEN2,GEN1
2 FORMAT(1I5,10G12.4)
GOTO 15
30 S = 0.
T = 0.
P=PH2(GELESN(0),GELESN(0),GELESN(0))
GOTO 9
15 CONTINUE
WRITE(6,11)IBILD
11 FORMAT(// ' ANZAHL VON BERECHNUNGEN DER SCHIFFSFORM IN DEN VERSCHIE
EDENEN S,T-BEREICHEN',/(33I3))
GOTO 5
END

```

```

SUBROUTINE ERGZ(FELD,M1,M2,M3,L1,L2,L3)
C ERGAENZT FELD VON AEQUIDISTANTEN STUETZWERTEN UM EINE SCHICHT WEITERER EX-
C TRAPOLIERTER STUETZWERTE
C FUER ANWENDUNG VON D1231, DAS NICHT IN AEUSSEREN INTERVALLEN INTERPOLIERT
C M SIND MAXIMALINDEXE IN VEREINBARUNG, L MAXIMAL BESETZTE INDEXPOSITIONEN
C L1,L2,L3 DUERFEN NICHT GLEICH 2 SEIN UND MUESSEN UM MINDESTENS 2 KLEINER
C ALS DIE ZUGEHÖRIGEN M-WERTE SEIN. FALLS WENIGER ALS 3 DIMENSIONEN, SIND
C M3 UND L3 UND GEGEBENENFALLS M2 UND L2 GLEICH 1 ZU SETZEN.
DIMENSION FELD(M1,M2,M3)
C INDEXGRENZEN NACH UMSPEICHERUNG VORHANDENER WERTE BERECHNEN
IU1=2
N1=L1+1
IU2=MINO(2,L2)
N2=L2
IF(N2.NE.1)N2=N2+1
IU3=MINO(2,L3)
N3=L3
IF(N3.NE.1)N3=N3+1
C UMSPEICHERN AUF HOEHERE INDEXE. J VON 1 AUFWAERTS, I NEUE, K ALTE INDEXE ABW.
DO 1 J3=IU3,N3
I3=N3+IU3-J3
K3=I3+1-IU3
DO 1 J2=IU2,N2
I2=N2+IU2-J2
K2=I2+1-IU2
DO 1 J1=IU1,N1
I1=N1+IU1-J1
K1=I1-1
1 FELD(I1,I2,I3)=FELD(K1,K2,K3)
C ERSTE INDEXE ERGAENZEN
DO 10 J2=IU2,N2
DO 10 J3=IU3,N3
FELD(1,J2,J3)=3.*(FELD(2,J2,J3)-FELD(3,J2,J3))+FELD(4,J2,J3)
10 FELD(N1+1,J2,J3)=3.*(FELD(N1,J2,J3)-FELD(N1-1,J2,J3))+FELD(N1-2,
* J2,J3)
IU1=1
N1=N1+1
IF(N2.EQ.1)RETURN
C ZWEITE INDEXE ERGAENZEN
DO 20 J1=IU1,N1
DO 20 J3=IU3,N3
FELD(J1,1,J3)=3.*(FELD(J1,2,J3)-FELD(J1,3,J3))+FELD(J1,4,J3)
20 FELD(J1,N2+1,J3)=3.*(FELD(J1,N2,J3)-FELD(J1,N2-1,J3))+FELD(J1,
* N2-2,J3)
IU2=1
N2=N2+1
IF(N3.EQ.1)RETURN

```

C DRITE INDEXE ERGAENZEN

```

DO 30 J1=IU1,N1
DO 30 J2=IU2,N2
FELD(J1,J2,1)=3.*(FELD(J1,J2,2)-FELD(J1,J2,3))+FELD(J1,J2,4)
30 FELD(J1,J2,N3+1)=3.*(FELD(J1,J2,N3)-FELD(J1,J2,N3-1))+FELD(J1,J2,
* N3-2)
RETURN
END

```

FUNCTION D123I(X,XU,DX,NX,STW,L1,L2,NDIM,EXTR)

C 1-,2- ODER 3-DIMENSIONALE INTERPOLATION ZWISCHEN STUETZPUNKTEN
C IN EINEM AEQUIDISTANTEN QUADERGITTER.
C METHODE: POLYNOM 3.GRADES DURCH ZWEI NACHBARPUNKTE N. STEIGUNG
C IN JEDEM N GLEICH DEM DIFFERENZENQUOTIENTEN DER NACHBARPUNKTE VON N.
C 1. ABLEITUNG DAHER STETIG, 2. NICHT.
C X = VEKTOR (1 BIS 3 KOMPONENTEN) , DER INTERPOLATIONSSTELLE ANGIBT
C XU = KLEINSTWERTE DER STUETZPUNKT-KOORDINATEN
C DX = SCHRITTWEITEN DER STUETZPUNKT-KOORDINATEN
C NX = ANZAHL VON STUETZPUNKTEN IN DEN EINZELNEN KOORD.-RICHTUNGEN
C STW = 1- BIS 3-FACH INDIZIERTES FELD DER STUETZWERTE
C L1,L2 = GROSSTWERTE DES 1. BZW. 2. INDEX IN DER VEREINBARUNG DES
C STW ENTSPRECHENDEN AKTUALPARAMETERS (.GE.NX(1),NX(2))
C L2 IST BELIEBIG BEI 1. DIMENSIONALER INTERPOLATION
C NDIM = ZAHL DER DIMENSIONEN (1,2 ODER 3)
C BEI MEHRFACHEM AUFRUF MIT GLEICHEN X,XU,DX,NX UND NDIM HINTEREINANDER
C SOLLTE ZUR RECHENZEITVERKUEZUNG BEIM 2. UND FOLGENDEN AUFRUFEN NDIM
C MIT NEGATIVEM VORZEICHEN GEGEBEN WERDEN.
C EXTR = FAKTOR EINER QUADRATISCHEN STRAFFUNKTION BEI EXTRAPOLATION
C D123I = INTERPOLATIONSWERT
C FUER 1-DIMENSIONALE INTERPOLATION WAERE SPEZIAL-ROUTINE SCHNELLER

```

C
DIMENSION X(3),XU(3),DX(3),NX(3),STW(1000)
DIMENSION IND(3),A(3,4)
NDI=IABS(NDIM)
IF (NDIM.LT.0) GOTO 12
UEX=0.
IND(3)=1
A(3,1)=1.
IND(2)=1
A(2,1)=1.
DO 10 I=1,NDI
U=(X(I)-XU(I))/DX(I)+1.
IND(I)=U
IND(I)=MAXO(1,MINO(NX(I)-1,IND(I)))
U=U-IND(I)
V=1.-U
UEX=AMIN1(AMIN1(0.,U),V)+UEX
UV=U*V
A(I,1)=-UV*V/2.
A(I,2)=(-U*U/2.+UV+1.)*V
A(I,3)=(-V*V/2.+UV+1.)*U
A(I,4)=-UV*U/2.
10 CONTINUE
12 D123I=UEX**2*EXTR
INDS=IND(1)+L1*(IND(2)-1+L2*(IND(3)-1))
DO 20 I3=1,4
F1=0.
DO 18 I2=1,4
F2=0.
DO 16 I1=1,4
F2=F2+STW(INDS)*A(1,I1)

```

```
      INDS=INDS+1
16  CONTINUE
      F1=F1+F2*A(2,12)
      IF (NDI.LT.2) GOTO 19
      INDS=INDS+L1-4
18  CONTINUE

19  D123I=D123I+F1*A(3,13)
      IF (NDI.LT.3) RETURN
      INDS=INDS+L1*(L2-4)
20  CONTINUE
      RETURN
      END
```