

241 | Mai 1969

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr.-Ing. Maria Kirsch

**Die Berechnung der
Bewegungsgrößen der gekoppelten
Tauch- und Stampfswingungen
nach der erweiterten Streifentheorie
von Grim und die Berechnung der
Wahrscheinlichkeit für das
Überschreiten bestimmter Schranken
durch diese Größen**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 241

Die Berechnung der Bewegungsgrößen der gekoppelten
Tauch- und Stampf-schwingungen nach der erweiterten
Streifentheorie von Grim und die Berechnung der
Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten bestimm-
ter Schranken durch diese Größen

von

Dr.-Ing. Maria Kirsch

Hamburg, Mai 1969

Die Aufzeichnungen sind entstanden an Hand einer von Prof. Grim gehaltenen Sondervorlesung über die Theorie, die dem von ihm aufgestellten Computer-Programm und den damit durchgeführten Rechnungen zugrundeliegt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
A) Die Bewegung eines zweidimensionalen Körpers.	1
1) Die Voraussetzungen und die durch die Lösung zu erfüllenden Bedingungen.	2
2) Die Lösungsmethode.	3
3) Lösungsansätze für die periodische Druckverteilung.	7
4) Die Einführung einer fiktiven Zähigkeitskraft.	11
5) Der Beweis, daß die Bedingung der Energieabstrahlung erfüllt ist.	14
6) Die Suche nach einem Potential, das auch die Bedingung an der Körperoberfläche erfüllt.	19
7) Die Erfüllung der Bedingung an der Körperkontur.	23
a) Die Einführung der Lewis-Formen.	24
b) Die Anwendung der Lewis-Formen bei den komplexen Potentialen $\Phi_n + i\Psi_n$.	27
c) Mathematische Zwischenbetrachtung: eine Reihenentwicklung.	28
d) Einführung der Reihenentwicklung in das komplexe Potential (36) für die Körperkontur.	28
8) Bestimmung der Stromfunktion auf der Kontur für verschwindende Frequenz.	30
9) Der hydrodynamische Druck und die hydrodynamische Kraft für verschwindende Frequenz.	37
10) Bestimmung der Stromfunktion auf der Kontur für nicht verschwindende Frequenz.	47
11) Der hydrodynamische Druck und die hydrodynamische Kraft bei nicht verschwindender Frequenz.	57
12) Die Berechnung der erregenden Kraft.	60

B) Die Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichungen.	55
1) Die Integration der Bewegungsgrößen.	56
2) Die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen.	57
3) Die Lösung der Bewegungsgleichungen.	60
4) Die Beschleunigung, die Relativbewegung und das Biegemoment.	62
C) Wahrscheinlichkeit.	63
1) Problemstellung.	63
2) Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten gewisser Schranken.	67
Literatur	69

Einleitung

=====

Für die Anwendbarkeit der Theorie und des darauf basierenden Programms sind zunächst drei Voraussetzungen gemacht worden:

- 1) Das Schiff läßt sich bisher nur durch Lewis-Spanten darstellen.
- 2) Das Schiff fährt in einer längslaufenden Welle, wobei die beiden Möglichkeiten den Seegang von vorn oder von hinten berücksichtigen, d.h. daß die Wellenrichtung mit der Fahrtrichtung des Schiffes entweder einen Winkel von 0° oder von 180° bilden kann. Für Schräganströmung ist das Programm bisher nicht eingerichtet.
- 3) Es werden nur die durch Stampfen und Tauchen erzeugten Bewegungsgrößen betrachtet.

Alle drei genannten Voraussetzungen sind nicht grundsätzlicher Art, also nicht in der allgemeinen Theorie begründet; sie könnten bei entsprechender Umarbeitung und Erweiterung des Programms ohne weiteres fallengelassen werden.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil wird die Bewegung eines zweidimensionalen Körpers betrachtet, der harmonische Schwingungen ausführt. Im zweiten Teil werden die für die einzelnen Spanten erhaltenen Größen, z.B. die hydrodynamischen Massen, nach der Streifenmethode über die Schiffslänge integriert und somit die Koeffizienten der beiden Bewegungsgleichungen für die gekoppelte Tauch- und Stampf-schwingung erhalten. Die Lösung dieser Gleichungen ergibt die Komponenten der Tauch- und Stampfamplitude, aus welchen die resultierenden Tauch- und Stampfamplituden berechnet werden und verschiedene daraus abgeleitete Bewegungsgrößen, z.B. die

Relativbewegung oder die Beschleunigung an verschiedenen Stellen der Schiffslänge und das Biegemoment im Hauptspant, wobei die Gewichtsverteilung proportional der Verdrängung angenommen wurde. - Eine Erweiterung zur Berechnung des Biegemoments über die ganze Schiffslänge unter Zugrundelegung der Gewichtsverteilung ist zur Zeit in Arbeit. - Im dritten Teil schließlich folgt die Berechnung der prozentualen Wahrscheinlichkeiten des Überschreitens gewisser Schranken durch die verschiedenen Bewegungsgrößen.

Teil A: Die Bewegung eines zweidimensionalen Körpers

=====

1) Die Voraussetzungen und die durch die Lösung zu erfüllenden Bedingungen

Der Querschnitt des zweidimensionalen Körpers wird symmetrisch zu einer vertikalen Linie angenommen. Wenn dieser Körper harmonische Schwingungen ausführt, so sind drei verschiedene Arten möglich: Quer-, Roll- und Tauchschwingungen. Hier soll nur die Vertikalbewegung (das Tauchen) betrachtet werden. Gefragt ist nach den hydrodynamischen Kräften, die bei dieser Schwingung auftreten.

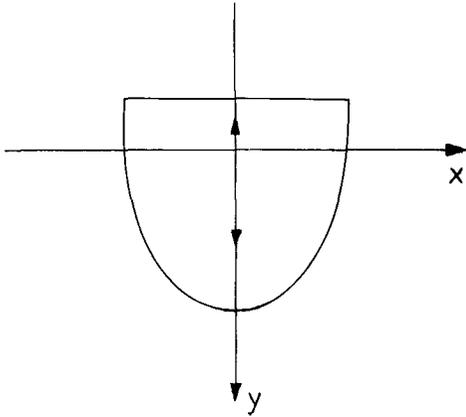
Für die Behandlung dieses Problems werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- 1) Die Flüssigkeit ist inkompressibel.
- 2) Die Flüssigkeitstiefe ist unendlich.
- 3) Die Flüssigkeit ist zähigkeitsfrei. (Für scharfe Krümmungen, - z.B. an Schlingerkielen - ist diese Voraussetzung auch nicht annähernd erfüllt; dort ist der Einfluß der Zähigkeit sehr bedeutend; jedoch dürfte dieser Einfluß auf die durch die Vertikalbewegung erzeugten Kräfte klein sein, so daß dafür die Flüssigkeit als durchweg zähigkeitsfrei angesehen werden kann).

- 4) Das Problem kann linearisiert werden. Die Linearisierung bedeutet das Fortlassen Glieder 2. Ordnung bei verschiedenen Bedingungen (z.B. im allgemeinen bei der Bedingung für die freie Oberfläche). Physikalisch bedeutet die Linearisierung, daß die Theorie und ihre Ergebnisse nur für Bewegungen kleiner Amplitude gelten. Jedoch haben Untersuchungen (z.B. von Dalzell beim Davidson Laboratory) ergeben, daß diese Einschränkung auch für schweren Seegang tragbar ist. Im vorliegenden Fall erstreckt sich die Linearisierung auf die folgenden beiden Bedingungen:
- a) Bei der Bedingung für die freie Oberfläche werden die Glieder in der Bernoulli-Gleichung, die v^2 enthalten, vernachlässigt.
 - b) Die Randbedingung am Körper wird exakt nur in der Mittellage erfüllt, - also nur beim Durchgang durch die Lage, die der Körper im Ruhezustand einnimmt, - nicht bei den verschiedenen Lagen darüber und darunter beim Aus- und Eintauchen.

Als ergänzende Literatur zu diesem Thema sind die Untersuchung von Ursell am Kreiszyylinder [1], die Arbeiten von Porter [2,3] und Tasai [4] zu nennen, die auch experimentelle Ergebnisse enthalten, und einige Arbeiten von Grim [5,6].

Doch zunächst soll das Koordinatensystem festgelegt werden: Da wir es mit einem zweidimensionalen Körper zu tun haben, genügt die Fixierung der xy-Ebene. Die x-Achse soll in Querrichtung des Körpers in der horizontalen Ebene, die im Ruhezustand in der Wasseroberfläche liegt, verlaufen, die y-Achse vertikal nach unten gerichtet sein. (Fig. 1). Die Schwingung erfolgt in Richtung der y-Achse.



Nach Aufstellung der für die Lösung notwendigen Voraussetzungen und der Wahl des Koordinatensystems sollen nun die Bedingungen genannt werden, die durch die Lösungsfunktion erfüllt sein müssen.

Fig.1 Festlegung der Koordinatenebene für den zweidimensionalen Körper

1) Die Kontinuitätsbedingung.

Die Voraussetzung 3), daß die Flüssigkeit zähigkeitsfrei ist, bedeutet allgemein, daß die Strömung ein Potential $\phi(x, y, z, t)$ hat. Für den ebenen Fall können wir das komplexe Potential als Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ und der Zeit t schreiben:

$$(1) \quad \phi + i\psi = F(x + iy, t).$$

Der Realteil dieser Funktion stellt das Strömungspotential dar, der Imaginärteil die Stromfunktion. Dieses Potential erfüllt die Laplace-Gleichung, was gleichbedeutend mit der Erfüllung der Kontinuitätsbedingung ist.

2) Die linearisierte Bedingung für die durch die Bewegung deformierte Oberfläche lautet in Worten: Der resultierende hydrodynamische Druck p an der momentanen Oberfläche ist gleich dem atmosphärischen Druck, d.h. er ist von der Zeit unabhängig, - die Ableitung p_t des Druckes nach der Zeit wird Null. - Der analytische Ausdruck der linearisierten Bedingung für die freie Oberfläche ist:

$$(2) \quad (\phi_{tt} - g\phi_y)_{y=0} = 0$$

ϕ_{tt} ist die zweite Ableitung des Potentials nach der Zeit,

ϕ_y die Ableitung des Potentials nach y
und g die Erdbeschleunigung.

$y = 0$ bedeutet die ungestörte freie Oberfläche
(s. Koordinatensystem).

Die Gleichung (2) sagt aus, daß der in der Klammer stehende Ausdruck für die ungestörte freie Oberfläche außerhalb der Körperkontur gilt.

3) Die Bedingung für die Körperkontur: Durch die Körperkontur kann keine Flüssigkeit fließen, d.h. die Komponente u_n der Körpergeschwindigkeit in Richtung der Normalen n auf die Kontur ist gleich der entsprechenden Komponente der Flüssigkeitgeschwindigkeit, d.h. der Normalableitung Φ_n des Potentials (- dies gilt für alle Konturpunkte -):

$$(3) \quad \Phi_n = u_n = u \cos \alpha$$

u ist die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung, (d.h. die Tauchgeschwindigkeit),

α ist der Winkel zwischen u und u_n (Fig.2).

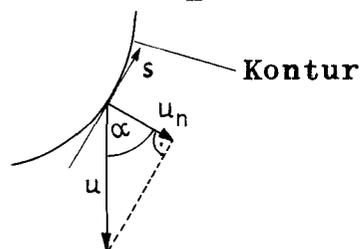


Fig. 2 Die Vertikalgeschwindigkeit des Körpers und die Komponente dieser Geschwindigkeit normal zur Kontur.

Aus den Cauchy-Riemannschen Bedingungen ergibt sich

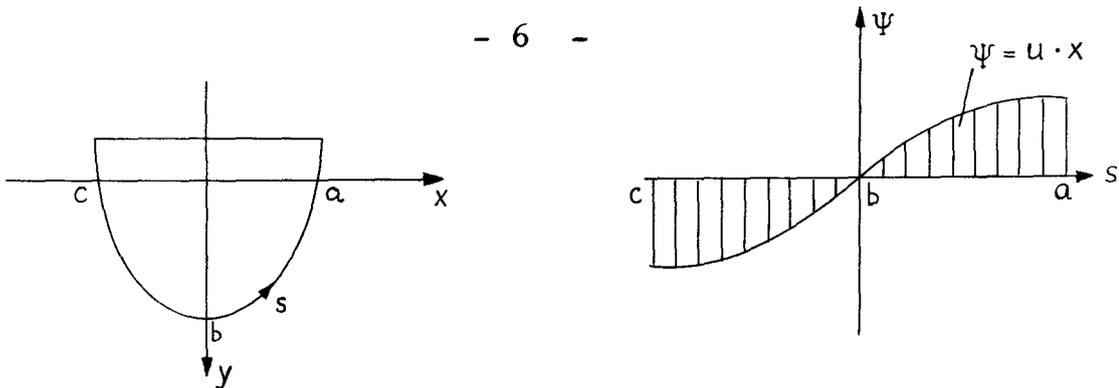
$$\Psi_s = \Phi_n = u \cos \alpha$$

Ψ_s ist die Ableitung der Stromfunktion nach dem Bogenelement ds der Körperkontur.

Da $dx = \cos \alpha ds$, erhalten wir nach Integration über die Körperkontur den Sollwert der Stromfunktion

$$(4) \quad \Psi = u \cdot x$$

Fig. 3 zeigt eine Skizze der Körperkontur und daneben die Abwicklung der Körperkontur über x . Über dieser Abwicklung ist der Wert der Stromfunktion Ψ aufgetragen.



a) Körperkontur

b) Sollwert der Stromfunktion über der Abwicklung der Körperkontur

Fig. 3 Die Körperkontur und der Sollwert der Stromfunktion

- 4) Die Bedingung im Unendlichen besagt, daß in unendlich großer Entfernung vom Körper (d.h. im ebenen Fall in unendlicher Wassertiefe) die Bewegung abklingt, bzw. zu Null wird.
(5) Bewegung $\rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$.
- 5) Die Strahlungsbedingung sagt aus, daß der Körper nur Energie in die Flüssigkeit ausstrahlen kann, daß ein Energietransport in umgekehrter Richtung - von der Flüssigkeit in den Körper - nicht stattfinden kann. (Auf diese Bedingung soll an späterer Stelle eingegangen werden.)

2) Die Lösungsmethode

Es gibt zwei übliche Wege, auf denen man zu einer Lösung gelangen kann. Der erste Weg besteht darin, daß man sich den Körper durch Singularitäten ersetzt denkt (z.B. durch periodische Quellen). Beim zweiten Weg untersucht man die Wirkung periodischer Drücke auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit innerhalb der Körperkontur. Dadurch entsteht außerhalb des Körpers die Strömung, welche die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn die Singularitäten oder Drücke entsprechend bestimmt werden können. Anders ausgedrückt: Anstelle der Störung der Flüssigkeit durch die Anwesenheit der Körperkontur wird die gleiche Wirkung durch periodische Drücke auf dasjenige Gebiet der freien Flüssigkeitsoberfläche erzielt, aus

dem eigentlich durch die Körperausdehnung die Flüssigkeit verdrängt ist. Hierzu Fig. 4. Die periodische Druckverteilung soll mit $p \cdot e^{i\omega t}$ bezeichnet werden (p ist die Druckamplitude, ω die Kreisfrequenz). Im Folgenden soll zur Lösung des Problems der zweite Weg besprochen werden.

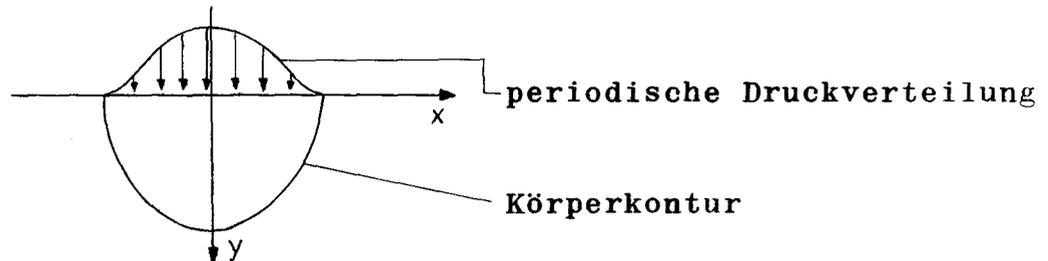


Fig. 4 Periodische Druckverteilung auf der freien Oberfläche innerhalb der Körperkontur.

3) Lösungsansätze für die periodische Druckverteilung

Zunächst soll nicht die gesamte Druckverteilung betrachtet werden, sondern nur ein schmaler Streifen derselben von der Intervallbreite Δ . Machen wir die Intervallbreite unendlich klein, so erhalten wir eine Einzelkraft. Mathematisch ausgedrückt besagt dies, daß das Produkt

$$p \cdot \Delta \text{ ein endlicher Wert für } \Delta \rightarrow 0 \text{ ist.}$$

Es kann also $p \cdot \Delta$ gleich einer Einzelkraft P gesetzt werden, die in der Mitte des Intervalls der Länge Δ wirkt. Daraus ergibt sich, - da wir hier den zweidimensionalen Fall betrachten, - für die Kraft P die Dimension $\frac{kp}{m}$, Kraft pro Längeneinheit.

Wir können dafür auch schreiben:

$\int_{-\infty}^{\infty} p dx = p \Delta = P$ mit $p=0$ für $x \neq 0$, d.h. es wird das Intervall $(-\Delta/2, + \Delta/2)$ auf der x-Achse für die Druckverteilung ausgewählt.

Der Faktor $e^{i\omega t}$ braucht bei dieser Betrachtung im Moment nicht berücksichtigt zu werden.

Die Lösung des Problems zeigt Lamb ausführlich in seinem Lehrbuch [7] durch ein komplexes Potential $\phi + i\psi$.

Hier soll in einem kurzen Abriß die Entwicklung angedeutet werden.

Es wird ein erster Lösungsansatz gemacht und geprüft, ob dieses Potential die im 1. Abschnitt aufgestellten Bedingungen erfüllt.

Als erster Lösungsansatz wird der folgende Ausdruck gewählt:

$$(A) \quad \Phi + i\Psi = A e^{ik(x+iy)} \cos(\omega t).$$

Es ist zu prüfen, welche der geforderten Bedingungen durch (A) erfüllt werden.

1) Die Kontinuitätsbedingung ist erfüllt.

2) Die Bedingung an der freien Oberfläche:

Aus dem komplexen Ausdruck (A) ergibt sich für den Realteil $\hat{\Phi}$:

$$\hat{\Phi} = A e^{-ky} \cos(kx) \cos(\omega t).$$

Die Bedingung für die freie Oberfläche lautet:

$$p_t = \rho (\hat{\Phi}_{tt} - g \hat{\Phi}_y)_{y=0} = 0 \quad \rho = \text{Dichte der Flüssigkeit} \\ \left[\frac{\text{Kraft} \cdot \text{Zeit}^2}{\text{Länge}^3} \right]$$

(Normalerweise steht bei der Dimension von ρ im Nenner Länge⁴; aber da wir hier den zweidimensionalen Fall betrachten, verringert sich die Längeneinheit um eine Potenz).

Setzen wir die entsprechenden Ableitungen von $\hat{\Phi}$ ein, so erhalten wir

$$(6) \quad p_t = \rho (-\omega^2 + gk) \cos(\omega t) \cdot A \cdot \cos(kx)$$

Der Faktor e^{-ky} wird gleich Eins für $y = 0$.

Es besteht nun die Forderung, daß der Ausdruck (6) für p_t gleich Null werden soll. Dies ist einmal möglich dadurch, daß der Faktor $(-\omega^2 + gk) = 0$ wird. Das wäre die Lösung für eine freie Welle, die aber für unser Problem nicht ausreichend ist und die allein nicht die Erfüllung der Randbedingung der Körperkontur ermöglichen würde.

Wir müssen also einen weiteren Lösungsansatz suchen.

Zu diesem Zweck stellen wir folgende Hilfsbetrachtung an:

Aus Gl. (6) für p_t erhalten wir durch Integration

$$p = \rho(-\omega^2 + gk) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} A \cos(kx),$$

wobei die Integrationskonstante gleich Null gesetzt ist.

Dieser Druckverlauf gilt für das Potential (A) für die ganze freie Oberfläche von $-\infty < x < +\infty$. Tatsächlich darf ein Druck auf die Oberfläche nur in einem unendlich kleinen Intervall der Breite Δ existieren. Um das zu erreichen, haben wir nur die Möglichkeit - wenn die triviale Lösung der freien Welle nicht hinreichend ist - eine unendliche Folge dieser Druckverläufe in Abhängigkeit von der Wellenzahl k so zu bestimmen, daß das Ziel erreicht wird, d.h. es ist eine weitere Integration über k erforderlich.

Um nun zu einem 2., besseren Ansatz für das Potential zu gelangen, benutzen wir das Fouriersche Theorem.

Dieses besagt folgendes:

Es sei eine Funktion $f(x)$ in einem beliebigen endlichen Intervall definiert. Es existiert eine Fourierentwicklung dieser Funktion $f(x)$, wenn das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ konvergent ist, nämlich

$$(7) f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos [k(x-u)] du .$$

Gleichung (7) ist unter dem Namen Fourier-Theorem bekannt.

Da die genannten Bedingungen für den Druckverlauf $p(x)$ erfüllt sind, können wir das Fourier-Theorem auf diesen anwenden und erhalten, - mit Abänderung des Integrationsintervalles von $(-\infty, +\infty)$ auf $(-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2})$, wobei, - wegen der Kleinheit des Intervalles und damit des zu durchlaufenden Wertes u - der Faktor $\cos [k(x-u)]$ durch $\cos(kx)$ angenähert werden kann, -:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos(kx) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} p(u) du .$$

Das Integral über $p(u)$ ist aber, - wie bereits vorher erwähnt - gleich der resultierenden Einzelkraft P :

$$\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} p(u) du = P.$$

Folglich ergibt sich:

$$p(x) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) dk .$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß wir für unsere Theorie periodische Drücke auf die Oberfläche vorausgesetzt hatten, so führen wir die Periodizität durch den Faktor $\sin(\omega t)$ in die Gleichung der Druckverteilung ein und erhalten schließlich den - nun auch zeitabhängigen - Druckverlauf:

$$(8) \quad p(x,t) = \frac{P}{\pi} \sin(\omega t) \int_0^{\infty} \cos(kx) dk .$$

Für diesen Druckverlauf $p(x,t)$ führen wir die partielle Differentiation nach der Zeit aus und erhalten:

$$(9) \quad p_t(x,t) = \frac{\omega P}{\pi} \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \cos(kx) dk .$$

Diesen Ausdruck kann man deuten als Summe über unendlich viele, unendlich kleine, harmonische Druckwellen. Jede dieser Elementardruckwellen wird eine harmonische Elementaroberflächenwelle des Potentials (A) erzeugen. Zur Abänderung des ersten Ansatzes (A) wird nun durch Vergleich der Koeffizienten von (6) und (9) die Größe A neu definiert:

$$\rho (-\omega^2 + gk)A = \frac{\omega P}{\pi} dk$$

Daraus folgt:

$$A = \frac{\omega P}{\rho \pi} \frac{dk}{(-\omega^2 + gk)} .$$

So erhalten wir einen zweiten Lösungsansatz, der jetzt durch die Integration über k für die gesamte Druckverteilung gilt:

$$\Phi + i\Psi = \frac{P}{\pi} \cos(\omega t) \frac{\omega}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{-\omega + gk} dk .$$

Endgültig mit $\frac{\omega^2}{g} = \nu [m^{-1}]$ und $P^* = \frac{P}{\pi} \frac{\omega}{\rho g} [m^2/s]$ wird

$$(B) \quad \Phi + i\Psi = P^* \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - \nu} dk .$$

Im Ansatz (B) ist die Dimension $[m^2/s]$ in dem Faktor P^* enthalten, während das Integral nun dimensionslos ist. Hieraus bilden wir die Bedingung auf der freien Oberfläche:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} - g\Phi_y &= \\ &= -\omega^2 \cdot P^* \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - \nu} dk + P^* \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{gk e^{-ky} \cos(kx)}{k - \nu} dk = \\ &= P^* \cos(\omega t) \cdot g \int_0^{\infty} \left(k - \frac{\omega^2}{g}\right) \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - \nu} dk \left[\frac{m^2}{s^3}\right] . \end{aligned}$$

Es ist aber $k - \nu = k - \frac{\omega^2}{g}$, deshalb kürzen sich diese beiden Faktoren fort.

Wenn also der vorstehende Ausdruck für die freie Oberfläche gleich Null werden soll, so muß, - da $P^* \cos(\omega t) g \neq 0$ ist, gelten:

$$(10) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) dk = 0 \quad \text{für } x \neq 0 .$$

$$\text{Das ist auch der Fall, denn } \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) dk = \frac{y}{x^2 + y^2} .$$

Für $y \rightarrow 0$ und $x \neq 0$ wird der letztgenannte Ausdruck gleich Null. Nun ist zu untersuchen, welche der zu Beginn geforderten Bedingungen durch den Lösungsansatz (B) erfüllt werden.

- 1) Die Kontinuitätsbedingung ist erfüllt: $\ddot{\Phi}_{xx} + \ddot{\Phi}_{yy} = 0$.
- 2) Die Bedingung für den Profilrand $\Psi = ux$ ist durch den Ansatz (B) noch nicht erfüllt.
- 3) Die Bedingung auf der freien Oberfläche ($\ddot{\Phi}_{tt} - g\ddot{\Phi}_y$)_{y=0} = 0 ist erfüllt.
- 4) Die Bedingung in unendlicher Wassertiefe: Bewegung $\rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$ ist erfüllt.
- 5) Die Bedingung der Energieabstrahlung vom Körper nach beiden Seiten muß noch näher untersucht werden. Das soll im folgenden Abschnitt geschehen.

4) Die Einführung einer fiktiven Zähigkeitskraft

Zunächst sollen noch einmal der Real- und der Imaginärteil des Lösungsansatzes (B) hingeschrieben werden. Hierbei können wir im Moment den Faktor mit ωt , der die Abhängigkeit von der Zeit ausdrückt und auch den Faktor P^* außerachtlassen. Somit haben wir nun die dimensionslosen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - \nu} dk \\ \Psi &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k - \nu} dk \end{aligned} .$$

Wir machen nun folgende Substitutionen:

$$K = \frac{k}{\nu} , \quad X = \nu \cdot x , \quad Y = \nu y \quad .$$

Damit erhalten wir:

$$(11) \quad \Phi = \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K - 1} dK, \quad \Psi = \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \sin(KX)}{K - 1} dK \quad .$$

Diese Integranden haben Pole bei $K = 1$. Die Integration über den Pol gibt zunächst unbestimmte Werte. Wenn man einen un-

endlich schmalen Integrationsbereich über dem Pol herausnimmt, so ergibt die Integration über diesen Bereich eine der Größe nach beliebige freie Welle mit der Wellenzahl $K = 1$.

Diese - zunächst beliebig große Welle - erfüllt jedoch die zusätzliche Bedingung 5) der Energieabstrahlung nicht. Um diese Bedingung zu erfüllen und eine beliebige freie Welle auszuschalten, wird der Kunstgriff von Raleigh angewandt (Lamb, 6. Aufl., 1952, S. 399 [7]): Es wird eine auf die Flächeneinheit bezogene Zähigkeitskraft $\rho \mu^* \cdot w$ [kg/m^2] eingeführt (mit w ist hierbei die Relationsgeschwindigkeit bezeichnet). Vom physikalischen Standpunkt aus ist dieses Vorgehen nicht exakt, da die obige Bedingung für die Zähigkeit für die reale Flüssigkeit nicht stimmt. Sie ist aber theoretisch gerechtfertigt, da später der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ in der idealen Flüssigkeit gemacht wird.

Für das Potential (11) bedeutet die Einführung dieser Zähigkeitskraft, daß im Nenner des Integranden der Term $i\mu^*$ ergänzt wird. Auch die Bedingung 3) auf der freien Oberfläche erfährt dadurch eine Abwandlung:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (\Phi_{tt} - g \Phi_Y + \mu^* \Phi_t)_{Y=0} = 0$$

In dieser Bedingung hat μ^* die Dimension Zeiteinheit hoch Minus Eins $\left[\frac{1}{s}\right]$. Das so abgeänderte Potential (11), zu dem wir nun auch wieder den Faktor der Zeitabhängigkeit in der allgemeinen Form $e^{i\omega t}$ hinzufügen wollen, wird also:

$$(11^*) \quad \Phi = \lim_{\mu \rightarrow 0} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1 + i\mu} dK .$$

In Gl. (11*) ist die Größe μ dimensionslos, denn sie ist aus μ^* durch Division durch ω entstanden: $\mu = \frac{\mu^*}{\omega}$.

Dieses Potential erfüllt, mit Ausnahme der Bedingung 2) für den Profilrand, alle anderen geforderten Bedingungen, auch die Bedingung 5) der Energieabstrahlung. Letzteres ist vorerst eine noch nicht bewiesene Behauptung, die im nächsten Abschnitt bewiesen werden soll.

5) Der Beweis, daß die Bedingung der Energieabstrahlung erfüllt ist.

Um diesen Beweis anzutreten, betrachten wir den Gl.(11*) analogen Ausdruck des normierten komplexen Potentials und versuchen den Wert dieses allgemeinen Integrals

$$(12) \quad \Phi + i\Psi = \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK$$

zu bestimmen. Das ist in der so vorhandenen Form (12) nicht ohne weiteres möglich. Zu diesem Zweck müssen wir von der K-Achse zur komplexen KM-Ebene übergehen, d.h. wir ersetzen die reelle Größe K durch die komplexe Größe ξ . Hierfür gilt $\xi = K + iM$; d.h. auf der K-Achse ist $\xi = K$, also reell.

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß das Integral einer komplexen Funktion über einen geschlossenen Kurvenzug gleich Null ist, wenn innerhalb der geschlossenen Kurve kein Pol liegt, d.h.

$$(13) \quad \oint \frac{e^{i\xi(X+iY)}}{\xi-1 + i\mu} d\xi = 0,$$

wenn der geschlossene Kurvenzug so gewählt ist, daß der Pol $\xi = 1-i\mu$ außerhalb des Kurvenzuges bleibt (Fig. 5). Wir wollen nun so einen geschlossenen Kurvenzug wählen, d.h. wir wollen das Integral (13) aus einer Reihe von Teilintegralen zusammensetzen, deren Integrationswege so verlaufen, daß der Pol außerhalb des Kurvenzuges bleibt. Wir ersetzen also das Integral in (13) durch die Summe einiger Integrale, deren

jedes einem bestimmten Integrationsweg entspricht. Die Summe dieser Integrale muß gleich Null sein. Als ersten Integrationsweg wählen wir den Weg auf der reellen Achse, also das Intervall von $K = 0$ bis $K = \infty$.

Damit ist das Integral J_1 gleich dem Integral (12), dessen Wert wir suchen. Wir erhalten ihn als negative Summe der verschiedenen anderen Wegen entsprechenden Integrale. Für die Wahl des Kurvenzuges ist folgende Überlegung notwendig:

Wenn der positive Wert von $\sqrt{X^2+Y^2}$ klein ist - im Programm wurde als Schranke der Wert 6 gewählt - verläuft der Kurvenzug aus Gründen der Konvergenz und der Rechentechnik anders als wenn der Betrag von $\sqrt{X^2+Y^2}$ groß ist.

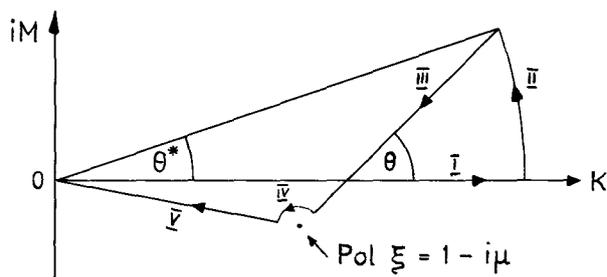


Fig. 5 Die Teilwege I bis V des geschlossenen Kurvenzuges für $\sqrt{X^2+Y^2} \leq 6$.
Fall a) $|\sqrt{X^2+Y^2}| \leq 6$. Der gewählte Kurvenzug setzt sich aus 5 Teilkurvenzügen zusammen:

Weg I auf der K-Achse von 0 bis ∞ ,

Weg II Kreisbogen bei $|\xi| = \infty$ von $\theta = 0$ bis zu dem Schnittpunkt mit der Geraden III.

Weg III Gerade von dem Pol $\xi = 1 - i\mu$ (bzw. einem kleinen Kreis um den Pol) mit der Steigung $\tan \theta = X/Y$.

Weg IV Kreisbogen um den Pol von dem Winkel θ der Geraden des Weges III bis $\theta = \pi$.

Weg V ist der Teil einer Geraden in dem Viertel der KM-Ebene, in welchem $K > 0$ und $M < 0$; sie weicht aber so geringfügig von der K-Achse ab, daß später gezeigt werden wird, daß sie im Grenzübergang als Teil der K-Achse in dem Intervall von $K = (1-\varepsilon)$ bis $K = 0$ betrachtet werden kann.

Für das Integral (13) können wir also schreiben:

$$\oint \frac{e^{i\xi} (X+iY)}{\xi - 1 + i\mu} d\xi = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 = 0$$

oder, da wir den Wert des Integrals J_1 suchen:

$$(14) \quad J_1 = -(J_2 + J_3 + J_4 + J_5) .$$

Wir stellen nun die einzelnen Integrale J_1 bis J_5 auf und versuchen, ihre Werte zu bestimmen, wobei es uns klar ist, daß wir den Wert für J_1 erst als negative Summe der übrigen Integrale erhalten können.

Integrationsweg I: $\xi = K$ mit $0 \leq K \leq \infty$

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK .$$

J_1 ist identisch mit dem Integral (12), dessen Wert bestimmt werden soll.

Integrationsweg II: $\xi = R \cdot e^{i\theta}$. Hierbei ist der Radius R unendlich groß; die Integrationsvariable θ läuft von $\theta = 0$ bis zu einem Wert $\theta^* < \frac{\pi}{2}$, der aufgrund der anschließenden Integrationswege III und IV näher bestimmt wird.

$$J_2 = \int_0^{\theta^*} \frac{e^{iR e^{i\theta} (X+iY)}}{R \cdot e^{i\theta} - 1 + i\mu} d\theta .$$

Wir untersuchen den Exponenten der e-Funktion im Zähler des Integranden von J_2 .

$$i\operatorname{Re}^{i\theta}(X+iY)=R\left\{-X\sin\theta-Y\cos\theta+i(X\cos\theta-Y\sin\theta)\right\}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß für positive Werte von X und Y der reelle Teil des Exponenten eine sehr große negative Zahl ist, daher geht der Zähler gegen Null; so wird der Integrand insgesamt gleich Null und damit $J_2 = 0$, d.h. das Integral J_2 liefert keinen Anteil zu dem Wert des Integrals J_1 .

Integrationsweg III: $\xi = (1-i\mu) + v(Y+iX)$.

Die Integrationsvariable v läuft von ∞ bis $\epsilon/\sqrt{X^2+Y^2}$, wobei ϵ der Radius des Kreises um den Pol $\xi = 1 - i\mu$ ist. Der Koeffizient von v in dem Ausdruck für ξ ist natürlich von der Wahl des Endwinkels θ^* abhängig beim Integrationsweg II, denn die Gerade, die den Integrationsweg III darstellt, schneidet die K -Achse unter einem Winkel θ , der sich nur wenig von dem Winkel θ^* unterscheidet. (Fig.5 zeigt den Sachverhalt stark vergrößert; hier unterscheiden sich der Winkel θ^* und der Winkel θ , unter dem die Integrationsgerade III die K -Achse schneidet, erheblich voneinander; verschiebt man den Kreisbogen II ins Unendliche, so verringern sich die Unterschiede, was aber auch nicht wesentlich ist, denn für unsere Betrachtung ist nur der Winkel θ interessant, nicht der Winkel θ^* , da $J_2 = 0$ ist).

Über die Größe dieses Winkels wurde bisher lediglich die Aussage gemacht, daß er größer als Null und kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein sollte. Das ist die einzige Bedingung, die bei der Wahl des komplexen Koeffizienten von v zu beachten ist. Deshalb wird dieser Koeffizient so gewählt, daß sich für das Integral J_3 ein möglichst einfacher Ausdruck ergibt;

und das geschieht durch $(Y+iX)$ als Koeffizienten von v . Da der Wert ε beliebig klein ist, ist der Endwert des Integrationsweges als $\varepsilon/\sqrt{X^2+Y^2}$ festgelegt, um für den Winkel θ , dessen Anfangswert beim Integrationsweg IV gleich dem Schnittwinkel θ der Geraden des Integrationsweges III mit der K-Achse sein muß, einen möglichst einfachen Ausdruck zu erhalten.

$$J_3 = \int_{\infty}^{\varepsilon/\sqrt{X^2+Y^2}} \frac{e^{i(1-i\mu)(X+iY)} e^{-v(X^2+Y^2)}}{v(Y+iX)} (Y+iX) dv .$$

Der Integrand von J_3 hat keinen Pol, deshalb kann im Exponenten der e-Funktion der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ gemacht werden, und wir erhalten für J_3 den Ausdruck:

$$J_3 = e^{i(X+iY)} \int_{\infty}^{\varepsilon/\sqrt{X^2+Y^2}} \frac{e^{-v(X^2+Y^2)}}{v} dv .$$

Nun entspricht aber der Integralausdruck der sogenannten Ei-Funktion, für die nach Definition [8] gilt:

$$Ei(-X) = \int_{\infty}^X \frac{e^{-t}}{t} dt .$$

Machen wir ⁱⁿ dem Integral von J_3 die Substitution

$$t = v(X^2+Y^2), \quad dt = (X^2+Y^2)dv \quad (\text{für } v \rightarrow \infty \text{ folgt } t \rightarrow \infty \text{ und}$$

$$\text{für } v = \frac{\varepsilon}{\sqrt{X^2+Y^2}} \text{ ist } t = \varepsilon \sqrt{X^2+Y^2}) ,$$

so erhalten wir

$$Ei(-\varepsilon \sqrt{X^2+Y^2}) = \int_{\infty}^{\varepsilon \sqrt{X^2+Y^2}} \frac{e^{-t}}{t} dt .$$

Da der Betrag von $\varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2}$ ein sehr kleiner Wert ist, gilt die Näherung:

$$\text{Ei}(-\varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2}) \approx \ln(\gamma \varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2}) .$$

Hierin ist $\gamma = 1.781$ die Eulersche Konstante. Damit erhalten wir für J_3 den endgültigen Ausdruck:

$$J_3 = e^{i(X+iY)} \ln(\gamma \varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2}) .$$

Integrationsweg IV:

Der Integrationsweg IV umgeht den Pol auf einem Kreis mit dem Radius ε , beginnend bei dem Wert θ , durch welchen der Anstieg der Geraden des Integrationsweges III charakterisiert war und verläuft bis zu dem Wert π . Für ξ gilt also der Ausdruck:

$$\xi = 1 - i\mu + \varepsilon e^{i\theta} .$$

Aus diesem Ausdruck und dem für ξ für den Integrationsweg III können wir jetzt die Größe des Winkels θ bestimmen, da - wie bereits gesagt - beim Übergang vom Integrationsweg III zum Integrationsweg IV der Winkel θ der gleiche sein muß. Es muß also gelten:

$$v(Y+iX) = \varepsilon e^{i\theta} .$$

An der oberen Integrationsgrenze von J_3 war aber $v = \varepsilon / \sqrt{X^2 + Y^2}$, folglich

$$\varepsilon / \sqrt{X^2 + Y^2} (Y+iX) = \varepsilon e^{i\theta}$$

$\frac{Y+iX}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \cos \theta + i \sin \theta$, daraus durch Trennung von Real- und Imaginärteil und anschließende Division

$$\theta = \arctan \frac{X}{Y} .$$

Wir erhalten damit das Integral - wie bei J_3 kann, da der Integrand keinen Pol enthält, auch hier der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ gemacht werden:

$$J_4 = \int_{\arctg \frac{X}{Y}}^{\pi} \frac{e^{i(X+iY)}}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \quad \text{oder}$$

$$J_4 = i e^{i(X+iY)} \left(\pi - \arctan \frac{X}{Y} \right) .$$

Integrationsweg V:

Hier können wir wieder setzen:

$$\xi = K \quad (- \text{ eigentlich } \xi = K - iM - \varepsilon, M \leq \mu -$$

aber wir können bereits vor Aufstellung des Integrals den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ vollziehen). Somit wird das Integral über diesen Weg:

$$J_5 = \int_{1-\varepsilon}^0 \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1} dK .$$

Mit den Substitutionen $v = 1-K$ $dv = -dK$ wird

$$\begin{aligned} J_5 &= e^{i(X+iY)} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-iv(X+iY)}}{v} dv = \\ &= e^{i(X+iY)} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [iv(X+iY)]^n}{n!}}{v} dv . \end{aligned}$$

Die gliedweise Integration liefert:

$$J_5 = e^{i(X+iY)} \left\{ -\ln \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [i(X+iY)]^n}{n \cdot n!} \right\} .$$

Für große Werte X, Y konvergiert die Reihe in J_5 sehr langsam, deshalb wurde zu Beginn dieses durch J_1 bis J_5 geschlossenen Integrationsweges vorausgesetzt, daß die Werte $\sqrt{X^2+Y^2}$ unterhalb einer bestimmten Schranke - nämlich ≤ 6 - bleiben.

Setzen wir nun die Ausdrücke für die Integrale J_2 bis J_5 in die Gl. (14) für J_1 ein, so erhalten wir, - da die Größe $(-\ln \varepsilon)$ in J_5 sich gegen die Größe $\ln \varepsilon$ in J_3 weghebt, - den Ausdruck

$$(15) \quad J_1 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1+i\mu} dK =$$

$$= e^{i(X+iY)} \left\{ -\ln[\gamma \sqrt{X^2+Y^2}] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [i(X+iY)]^n}{n \cdot n!} - i(\pi - \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}) \right\}$$

für $\sqrt{X^2+Y^2} \leq 6$.

Zwecks Trennung der Real- und Imaginärteile setzen wir:

$$i(X+iY) = i \sqrt{X^2+Y^2} e^{i \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}} = \sqrt{X^2+Y^2} e^{i(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{Y}{X})} =$$

$$= -\sqrt{X^2+Y^2} e^{-i \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}} .$$

Damit erhalten wir für das Potential in (11*) aus

$$(11^{**}) \quad \Phi = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)} + e^{iK(-X+iY)}}{K-1+i\mu} dK$$

- wobei nun der Faktor $e^{i\omega t}$ fortgelassen ist - :

$$(16) \quad \Phi_0 = e^{-Y} \cos X \left\{ -\ln(\gamma \sqrt{X^2+Y^2}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{X^2+Y^2})^n}{n \cdot n!} \cos(n \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}) - i\pi \right\}$$

$$- e^{-Y} \sin X \left\{ \operatorname{arctg} \frac{X}{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{X^2+Y^2})^n}{n \cdot n!} \sin(n \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}) \right\}$$

und für die Stromfunktion

$$(17) \Psi_0 = e^{-Y} \sin X \left\{ -\ln(\sqrt{X^2+Y^2}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{X^2+Y^2})^n}{n \cdot n!} \cos(n \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}) - i\pi \right\} \\ + e^{-Y} \cos X \left\{ \operatorname{arctg} \frac{X}{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{X^2+Y^2})^n}{n \cdot n!} \sin(n \operatorname{arctg} \frac{X}{Y}) \right\} .$$

Damit haben wir die Ausdrücke für Φ und Ψ für den Fall, daß $\sqrt{X^2+Y^2} \leq 6$ bleibt.

Für $\sqrt{X^2+Y^2} > 6$ müssen wir, um hierfür zu einem anderen Ausdruck zu gelangen, - dessen Berechnung für diesen Fall günstiger ist, - den geschlossenen Kurvenzug in der komplexen ξ -Ebene anders wählen. Dabei haben wir zwei Fälle gesondert zu betrachten:

a) $X > 0$.

Zu betrachten ist wieder das komplexe Integral

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \oint \frac{e^{i\xi(X+iY)}}{\xi - 1 + i\mu} d\xi$$

mit $\xi = K + iM$, nun aber über einen anderen geschlossenen Kurvenzug, der wiederum den Pol außerhalb läßt. Der Weg, der diesmal aus 3 Teilen besteht, ist in Fig. 6 skizziert. Der erste Weg ist gleich dem ersten Weg im Falle $\sqrt{X^2+Y^2} \leq 6$.

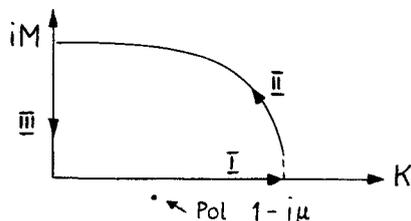


Fig. 6. Der Kurvenzug für den Fall $\sqrt{X^2+Y^2} > 6$ und $X > 0$.

Wir haben also wieder

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K - 1 + i\mu} dK,$$

d.h. das Integral, dessen Wert bestimmt werden soll.

Für das Integral über den 2. Weg, - den Kreisbogen im Unendlichen, - diesmal von $\theta = 0$ bis $\theta = \frac{\pi}{2}$, - gilt ebenfalls, wie bei $\sqrt{X^2+Y^2} \leq 6$,

$$J_2 = 0 .$$

Auf dem Weg III ist $\xi = iM$; das Integrationsintervall verläuft von ∞ bis 0.

Der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ kann wieder gemacht werden, da die Singularität sich nicht auf diesem Wege befindet. Es ergibt sich

$$J_3 = \int_{\infty}^0 \frac{e^{-M(X+iY)}}{iM - 1} i \, dM = \int_{\infty}^0 \frac{e^{-M(X+iY)}}{M + i} dM .$$

Um dieses Integral zu lösen, betrachten wir zunächst ein ähnliches - komplizierter erscheinendes - Integral, für das wir eine partielle Integration ausführen:

$$J_3^* = \int_{\infty}^0 \frac{e^{-M(X+iY)}}{(M+i)^r} dM .$$

In J_3^* setzen wir für die partielle Integration:

$$u = \frac{1}{(M+i)^r} , \quad dv = e^{-M(X+iY)} dM$$

$$du = \frac{-rdM}{(M+i)^{r+1}} , \quad v = \frac{e^{-M(X+iY)}}{-(X+iY)} .$$

Damit erhalten wir:

$$J_3^* = \int_{\infty}^0 \frac{e^{-M(X+iY)}}{(M+i)^r} dM = \left[\frac{e^{-M(X+iY)}}{-(M+i)^r(X+iY)} \right]_{\infty}^0 - \frac{r}{X+iY} \int_{\infty}^0 \frac{e^{-M(X+iY)}}{(M+i)^{r+1}} dM .$$

Für das letzte Integral in diesem Ausdruck für J_3^* wird die partielle Integration wiederholt, wodurch sich wieder ein Ausdruck ergibt, der praktisch das gleiche Integral enthält, nur hat sich die Potenz von $(M+i)$ im Nenner des Integranden wiederum um 1 erhöht.

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration erhält man die folgende Entwicklung:

$$J_3^* = \frac{1}{-i^r(X+iY)} - \frac{r}{(X+iY)} \left\{ \frac{1}{-i^{r+1}(X+iY)} - \frac{r+1}{(X+iY)} * \right.$$

$$* \left. \left[\frac{1}{-i^{r+2}(X+iY)} - \frac{r+2}{(X+iY)} \left(\frac{1}{-i^{r+3}(X+iY)} \dots \right) \right] \right\} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n (r+n-2)!}{i^{r+n} (X+iY)^n (r-1)!} .$$

Dies ist eine semikonvergente Reihe; ihre Summierung darf nur bis zu dem Wert N erfolgen, für den der kleinste Wert der Summenglieder erreicht wird; an dieser Stelle muß die Reihe abgebrochen werden, da die Terme dann wieder größer werden.

Aus J_3^* erhält man leicht den Ausdruck für J_3 , indem man $r = 1$ setzt:

$$J_3 = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n (n-1)!}{[i(X+iY)]^n}$$

und damit

$$(18) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK = - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n (n-1)!}{[i(X+iY)]^n}$$

für $\sqrt{X^2 + Y^2} > 6$ und $X > 0$.

Für die Berechnung - zur Trennung von Real- und Imaginärteil - wird wieder gesetzt:

$$i(X+iY) = \sqrt{X^2+Y^2} e^{i \arctg \frac{X}{Y}} = \sqrt{X^2+Y^2} (\cos(\arctg \frac{X}{Y}) + i \sin(\arctg \frac{X}{Y}))$$

und der Ausdruck (18) dementsprechend umgeformt.

b) $X < 0$

In diesem Fall verläuft der geschlossene Kurvenzug spiegelbildlich zu dem Kurvenzug im Fall a) (Fig.7); gespiegelt ist der Kurvenzug an der K-Achse.

Da sich diesmal der Pol innerhalb des geschlossenen Kurvenzuges befindet, hat dieser nicht den Wert Null, sondern den Wert des Residuums, d.h. es gilt:

$$\oint \frac{e^{i \xi (X + iY)}}{\xi - 1 + i\mu} d\xi = J_1 + J_2 + J_3 = 2\pi i e^{i(X+iY)} .$$

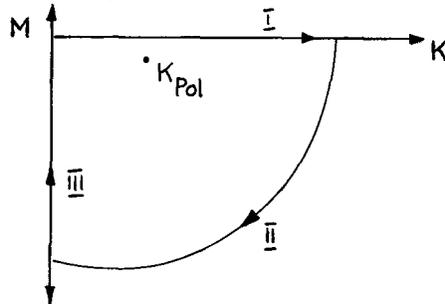


Fig. 7 Der geschlossene Kurvenzug für den Fall $\sqrt{X^2+Y^2} > 6$ und $X < 0$.

J_1 ist, - wie in den vorhergehenden Fällen, - das gesuchte Integral.

Der Weg II liefert wieder keinen Beitrag, d.h. es gilt $J_2 = 0$.

Der Weg III auf der M-Achse von $-\infty$ bis 0 ergibt, - analog wie im Fall a) behandelt, - den Wert

$$J_3 = + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n (n-1)!}{[i(X+iY)]^n} .$$

Damit erhalten wir den Ausdruck für das gesuchte Integral

$$(19) \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1+i\mu} dK = - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n (n-1)!}{[i(X+iY)]^n} - 2\pi i e^{i(X+iY)}$$

$$\text{für } \sqrt{X^2+Y^2} > 6 \text{ und } X < 0 .$$

Mit Hilfe von (18) und (19) erhalten wir - bei Verwendung des Ausdrucks für $i(X+iY)$ von S.21 - aus (11**) für Φ , wenn $\sqrt{X^2+Y^2} > 6$

$$(16*) \Phi = - \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)! \cos(n \operatorname{arctg} \frac{X}{Y})}{(\sqrt{X^2+Y^2})^n} - \pi e^{-Y} \sin X - i \pi e^{-Y} \cos X$$

und für die Stromfunktion

$$(17*) \Psi = - \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)! \sin(n \operatorname{arctg} \frac{X}{Y})}{(\sqrt{X^2+Y^2})^n} - \pi e^{-Y} \cos X - i \pi e^{-Y} \sin X .$$

Nachdem wir die Lösungen des Integrals

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1+i\mu} dK$$

für verschiedene Werte X, Y gefunden haben, wollen wir nun das vollständige, aber normierte Potential in möglichst allgemeiner Form hinschreiben durch Hinzufügen des Faktors der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ und eines konstanten Faktors A_0 . Wir erhalten somit das Potential, das wir nun Φ_0 nennen wollen:

$$(20) \Phi_0 = A_0 e^{i\omega t} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1+i\mu} dK$$

und analog die Stromfunktion

$$(21) \Psi_0 = A_0 e^{i\omega t} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \sin(KX)}{K-1 + i\mu} dK .$$

Nun führen wir den Beweis, daß das Potential (20) die Bedingung 5) der Energieabstrahlung nach allen Seiten erfüllt, d.h. daß dieses Potential tatsächlich eine Strömung darstellt, bei der Wellen vom Körper fortlaufen.

Zu diesem Zweck nehmen wir eine Umformung des Integrals vor:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1 + i\mu} dK = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)} + e^{iK(-X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK . \end{aligned}$$

Wir untersuchen an der freien Oberfläche, d.h. für $Y \rightarrow 0$, welche Werte dieses Integral in großer Entfernung vom Körper, d.h. für $X \rightarrow +\infty$ und für $X \rightarrow -\infty$ annimmt.

1) $X \rightarrow +\infty$ Es war:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK = \\ & = - \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(n-1)!}{[i(X+iY)]^n} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(-X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK = \\ & = - \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(n-1)!}{[i(X+iY)]^n} - 2 \pi i e^{i(-X+iY)} . \end{aligned}$$

Die Summe über n verschwindet für $X \rightarrow +\infty$ folglich gilt:

$$(22) \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow 0 \\ X \rightarrow +\infty}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1 + i\mu} dK = - i \pi e^{-iX-Y} .$$

2) $X \rightarrow -\infty$

Die Entwicklung verläuft analog wie im Fall $X \rightarrow +\infty$; das Ergebnis unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen von X :

$$(23) \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0 \\ X \rightarrow -\infty}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1+i\mu} dK = -i\pi e^{iX-Y} .$$

Damit gelten für das Potential folgende Ausdrücke:

$$(24) \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \Phi_0 = -A_0 i\pi e^{-Y} e^{i(\omega t - X)}$$

$$(25) \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} \Phi_0 = -A_0 i\pi e^{-Y} e^{i(\omega t + X)} .$$

Somit ist bewiesen, daß das Potential Φ_0 auch die Bedingung 5) der Energieabstrahlung erfüllt, da (24) und (25) Oberflächenwellen beschreiben, die von dem Körper weglaufen. Wir haben mit Φ_0 also ein Potential gefunden, das alle Bedingungen - mit Ausnahme der Randbedingung für die Körperkontur, - erfüllt. Es bleibt also die Aufgabe, ein noch allgemeineres Potential zu finden, das alle Bedingungen, auch die an der Körperkontur, erfüllt.

6) Die Suche nach einem Potential, das auch die Bedingung an der Körperkontur erfüllt.

Gegenüber dem vorhergehenden Abschnitt wird zunächst die Definition des Potentials etwas geändert. Wir schreiben:

$$c) \quad \Phi + i\Psi = A_0 (\Phi_0 + i\Psi_0),$$

d.h. in Abänderung der Gleichungen (20) bis (25) ist jetzt der konstante Faktor A_0 nicht in dem Potential Φ_0 enthalten;

aber $\bar{\Phi}_0$ ist das Potential, das alle geforderten Bedingungen - mit Ausnahme der Bedingung an der Körperkontur - erfüllt. Im Lösungsansatz (C) ist also noch die Wahl von A_0 frei. Dies allein genügt jedoch nicht, um die Bedingung an der Körperkontur zu erfüllen. Deshalb wird ein neuer Lösungsansatz gemacht, bei dem zu dem komplexen Potential $A_0(\bar{\Phi}_0 + i\Psi_0)$ weitere Teilpotentiale $A_n(\bar{\Phi}_n + i\Psi_n)$ hinzugefügt werden:

$$(D) \quad \bar{\Phi} + i\Psi = A_0(\bar{\Phi}_0 + i\Psi_0) + A_1(\bar{\Phi}_1 + i\Psi_1) + A_2(\bar{\Phi}_2 + i\Psi_2) + \dots$$

Wieviele solcher Teilpotentiale der Lösungsansatz D) enthalten muß, um die Bedingung auf der Körperkontur zu erfüllen, diese Frage soll zunächst offenbleiben. Ihre Beantwortung wird von der gewünschten Genauigkeit der Ergebnisse abhängen, - wobei natürlich durch die Methode, ihre Voraussetzungen und Einschränkungen und die Genauigkeit der vorgegebenen Größen ohnehin eine Genauigkeitsschranke gegeben ist, die - einmal erreicht - auch durch das Hinzufügen noch so vieler Teilpotentiale nicht überschritten werden kann.

Die erste Aufgabe zur Erfüllung des Lösungsansatzes D) besteht nun zunächst darin, geeignete Teilpotentiale zu finden, durch deren Hinzunahme zu dem Potential $A_0(\bar{\Phi}_0 + i\Psi_0)$ die Bedingung auf der Körperkontur erfüllt wird, ohne daß dabei die anderen - durch $\bar{\Phi}_0 + i\Psi_0$ bereits erfüllten - Bedingungen verletzt werden. Zu diesem Zweck wird eine periodische Strömung, symmetrisch zu $X = 0$ angenommen (Fig.8), die durch zwei periodische Kräfte bei $X = \pm \Delta$ erzeugt wird

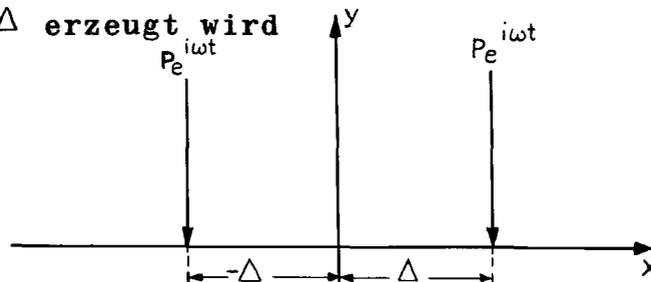


Fig. 8. Periodische Strömung, symmetrisch zur Y-Achse.

Das bedeutet, daß wir den Ausdruck

$$(26) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} dK}{K-1 + i\mu} \left\{ e^{iK(X+\Delta)} + e^{iK(X-\Delta)} \right\} =$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{+iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK \left\{ e^{iK\Delta} + e^{-iK\Delta} \right\}$$

bestimmen müssen. (In der geschweiften Klammer könnten wir $X = 0$ setzen, da Symmetrie zu $X = 0$ vorausgesetzt war.) Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, wird bei $X = 0$ ein periodischer Druck doppelter Stärke, dessen Phase um 180° verschoben ist, hinzugefügt, d.h. in der geschweiften Klammer kommt noch das Glied $-2e^{iKX} = -2$ (wegen $X = 0$) hinzu:

$$(26^*) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{+iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} \left\{ e^{iK\Delta} + e^{-iK\Delta} - 2 \right\} .$$

Für die e-Funktionen in der geschweiften Klammer schreiben wir die Reihenansätze und erhalten:

$$e^{iK\Delta} + e^{-iK\Delta} - 2 = 1 + \frac{iK\Delta}{1!} + \frac{i^2 K^2 \Delta^2}{2!} + \frac{i^3 K^3 \Delta^3}{3!} + \dots$$

$$+ 1 - \frac{iK\Delta}{1!} + \frac{i^2 K^2 \Delta^2}{2!} - \frac{i^3 K^3 \Delta^3}{3!} + \dots$$

$$= 2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K^{2N}}{(2N)!} (-1)^N \Delta^{2N} .$$

Wenn wir die von K unabhängigen Faktoren $(2(-1)^N) \Delta^{2N} / (2N)!$ aus dem Integralausdruck (26*) heraus- und in die Koeffizienten A_n miteinbeziehen, so erhalten wir den Integralausdruck

$$(27) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{K^{2N} e^{iK(X+iY)}}{K-1 + i\mu} dK .$$

Anstelle von (27) bilden wir noch einen einfacheren Integralausdruck, indem wir von dem Integral (27) ein Integral abziehen, welches sich von (27) nur dadurch unterscheidet, daß die Potenz von K um zwei geringer ist, - also K^{2N-2} beträgt:

$$(28) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{(K^{2N} - K^{2N-2}) e^{iK(X+iY)}}{K - 1 + i\mu} dK = \\ = \int_0^{\infty} K^{2N-2} (K+1) e^{iK(X+iY)} dK .$$

Der Integralausdruck (28) erfüllt alle geforderten Bedingungen, mit Ausnahme der Bedingung an der Körperkontur. Durch Addition einer Reihe solcher Integrale wird auch letztgenannte Bedingung erfüllt werden. Doch zunächst soll aus (28) das komplexe Potential $\Phi_n + i\Psi_n$ gebildet werden. Das Integral auf der rechten Seite von (28) kann geschlossen integriert werden; dabei setzen wir $2N-2 = 2n$ und erhalten:

$$(29) \quad \int_0^{\infty} K^{2n} (K+1) e^{iK(X+iY)} dK = \int_0^{\infty} K^{2n+1} e^{iK(X+iY)} dK + \int_0^{\infty} K^{2n} e^{iK(X+iY)} dK .$$

Die Werte der beiden Integrale auf der rechten Seite von (29) entnehmen wir einer Integraltafel und erhalten, - da n ganzzahlig -

$$(29^*) \quad \int_0^{\infty} K^{2n} (K+1) e^{iK(X+iY)} dK = (-1)^n \left\{ \frac{(2n+1)!}{(X+iY)^{2n+2}} - i \frac{(2n!)}{(X+iY)^{2n+1}} \right\}$$

Die konstanten Faktoren $(-1)^n (2n+1)!$ nehmen wir wieder in die Koeffizienten A_n der komplexen Potentiale hinein und erhalten:

$$(30) \quad \Phi_n + i\Psi_n = \frac{1}{(X+iY)^{2n+2}} - \frac{i}{(2n+1)(X+iY)^{2n+1}} .$$

Die Ausdrücke (30) sind in den Lösungsansatz D) einzuführen, der noch durch den Faktor $e^{i\omega t}$, durch den die Abhängigkeit von der Zeit ausgedrückt wird, vervollständigt wird, so daß der endgültige vollständige Lösungsansatz nun wird:

$$D^*) \quad \Phi + i\Psi = \left\{ A_0(\Phi_0 + i\Psi_0) + \sum A_n(\Phi_n + i\Psi_n) \right\} e^{i\omega t} .$$

Doch zunächst wollen wir prüfen, ob die Bedingung an der freien Oberfläche durch (30) erfüllt ist. Dafür ist es notwendig, auch bei der Gleichung (30) bereits den Faktor $e^{i\omega t}$ zu berücksichtigen.

Die Bedingung an der freien Oberfläche lautete:

$$(\Phi_{tt} - g\Phi_Y)_{Y=0} = 0 \quad \text{Aus (30) ergibt sich:}$$

$$\Phi_{ntt} = -\omega^2 \Phi_n e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{X^{2n+2}} \right\}_{Y=0}$$

$$\Phi_Y + i\Psi_Y = \left\{ \frac{-i(2n+2)}{(X+iY)^{2n+3}} + \frac{i^2(2n+1)}{(2n+1)(X+iY)^{2n+2}} \right\} e^{i\omega t} ,$$

folglich

$$(\Phi_Y)_{Y=0} = -\frac{1}{X^{2n+1}} e^{i\omega t} .$$

Dies ist aber noch nicht die gesuchte Ableitung, da diese nach der dimensionslosen Koordinate $Y = (\omega^2/g) \cdot Y$ erfolgt ist und Φ_n selbst auch nicht die Dimension eines Potentials hat, sondern eine dimensionslose Größe ist. Folglich muß der Ausdruck für $(\Phi_Y)_{Y=0}$ noch mit ω^2/g multipliziert werden, damit die Dimensionen von Φ_{tt} und $g\Phi_Y$ übereinstimmen. Somit gilt:

$$(\Phi_{tt} - g\Phi_Y)_{Y=0} = \frac{e^{i\omega t}}{X^{2n+2}} \left(-\omega^2 + g \frac{\omega^2}{g} \right) = 0 ,$$

d.h. die Bedingung an der freien Oberfläche wird durch die Potentiale Φ_n des Ausdrucks (30) für beliebiges n erfüllt.

7) Die Erfüllung der Bedingung an der Körperkontur

Die Bedingung für die Körperkontur besagt, daß durch die Kontur keine Strömung hindurchgehen darf. Daraus ergab sich, daß für die Stromfunktion an der Körperkontur gelten muß:

$$\Psi_K = u \cdot x$$

Der Index K soll anzeigen, daß es sich um die Werte der Stromfunktion an der Körperkontur handelt.

Ergänzen wir nun noch die Stromfunktion durch Hinzufügen des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$ und normieren wir sie durch Multiplikation mit ω^2/g , so erhalten wir die Forderung, daß die nunmehr dimensionslose Stromfunktion am Körper sein muß:

$$(31) \quad \Psi_{\text{soll}, K} = e^{i\omega t} uX \quad \text{mit } X = \frac{\omega^2}{g} x .$$

Der Lösungsansatz D*) lautet aber:

$$\Phi + i\Psi = e^{i\omega t} \left\{ A_0 (\Phi_0 + i\Psi_0) + \sum_n A_n (\Phi_n + i\Psi_n) \right\} .$$

Unsere Aufgabe besteht deshalb darin, eine genügende Anzahl komplexer Potentiale $\Phi_n + i\Psi_n$ zu wählen und die Koeffizienten A_n für $n = 0, 1, 2, \dots$ so zu bestimmen, daß mit genügender Genauigkeit gilt:

$$\Psi_{\text{soll}, K} = \Psi_{\text{ist}, K} ,$$

d.h. der Ist-Wert der Stromfunktion an der Körperkontur muß mit hinreichender Genauigkeit mit dem Soll-Wert der Stromfunktion übereinstimmen.

Um dies zu erreichen, benutzt man folgendes Verfahren:

Man wählt N Punkte auf der Körperkontur (d.h. je Spant, da

wir es vorerst mit dem ebenen Fall zu tun haben). Die Summierung geht damit in dem Lösungsansatz D von $n=1$ bis $n = N-1$. Wir erhalten somit N lineare Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{N-1}$.

Diese Methode gilt für beliebige Profilformen. Zur Vereinfachung der Rechnung wird sie durch die Einführung von Lewis-Spanten spezialisiert, d.h. die tatsächlichen Spantformen werden durch Lewisformen angenähert. - Ursprünglich wurden diese Formen von Lewis zwecks konformer Abbildung eingeführt. - Von dieser Möglichkeit wird hier nicht Gebrauch gemacht; es geht bei unserer Aufgabe lediglich um die analytische Darstellung der Profilkontur.

a) Die Einführung der Lewis-Formen

Für die Lewis-Formen gilt:

$$(32) \quad (x + iy)_K = C \cdot (e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta}) \quad .$$

Der Index K in (32) zeigt an, daß es sich um die Werte x, y für die Profilkontur handelt; C ist eine später zu bestimmende Konstante.

Wichtig für uns ist, daß jeder Punkt der Profilkontur nur durch einen Parameter, nämlich den Parameter θ , definiert ist.

Die Profileigenschaften sind gegeben durch die Lewisparameter a, b , oder - in unserem Programm - durch folgende beiden Größen:

- a) Das Verhältnis der halben Spantbreite zum Spanttiefgang $H = B_{\text{Spt}} / (2T_{\text{Spt}})$,
- b) die Spantvölligkeit $\beta_{\text{Spt}} = F_{\text{Spt}} / (B_{\text{Spt}} T_{\text{Spt}}) \quad .$

Diese beiden Größen stehen mit den Lewis-Parametern a, b in folgendem Zusammenhang:

$$(33) \quad H = \frac{1+a+b}{1-a+b}$$

$$(34) \quad \beta_{\text{Spt}} = \frac{\pi}{4} \frac{(1-a^2-3b^2)}{(1-a^2+2b+b^2)} .$$

Fig. 9 zeigt die Skizze eines Lewis-Profiles mit Angabe der Werte $\theta = 0, \pi/2$ und π im xy -Koordinatensystem.

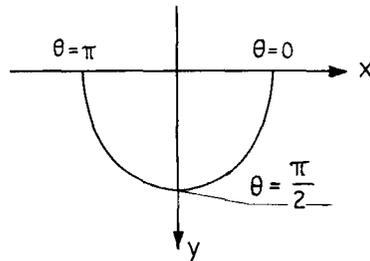


Fig. 9 Skizze eines Lewis-Profiles.

Zu beachten ist, daß die Größen H und β_{Spt} nicht völlig willkürlich miteinander gekoppelt sein dürfen, da dann evtl. "nicht reale" Lewis-Formen auftreten können, d.h. der analytische Ausdruck liefert dann eine Kontur, die eine Schleife bildet und damit die Spantfläche in einen positiven und einen - wenn auch kleinen - negativen Flächenanteil aufteilt, - und in der Praxis dürfen natürlich keine negativen Spantflächen auftreten (Fig. 10).

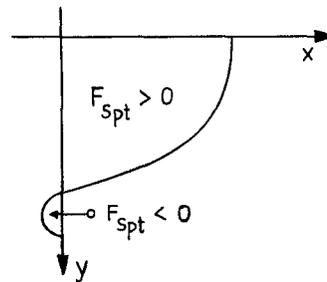


Fig. 10. Beispiel für ein nicht reales Lewis-Spant.

Die Grenze für reale Lewis-Spanten wird gegeben durch die Bedingungen:

$$(35) \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_{\theta=\pi/2} \leq 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_{\theta=0} \geq 0 .$$

Aufgrund dieser Bedingungen kann man eine Grenzkurve aufstellen für $\beta = f(H)$, die für reale Lewis-Formen von β nicht unterschritten werden darf (Fig. 11: Skizze).

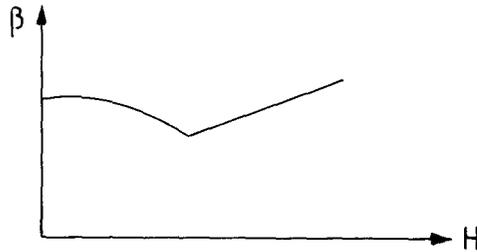


Fig. 11 Grenzkurve für β für reale Lewis-Formen.

Wenn aufgrund der vorgegebenen Größen β und H eines tatsächlichen Spants diese Kurve unterschritten wird, muß man gewissermaßen einen Kompromiß eingehen. Man wird die Werte β und H gerade so weit abändern, daß sie unmittelbar über oder direkt auf der Grenzkurve liegen. Praktisch bedeutet das eine Änderung der vorgegebenen Spantform durch Verringerung entweder der Breite oder des Tiefgangs unter Beibehaltung des Wertes der Spantfläche. - Um zusätzliche Vorarbeiten für die Benutzung des Rechenprogramms zu vermeiden, ist die Prüfung, ob durch die vorgegebenen Daten reale Lewis-Formen erzielt werden, in das Programm mit aufgenommen worden und ebenfalls die eventuell notwendige Umrechnung dieser Größen.

An dieser Stelle soll noch kurz erwähnt werden, daß es durchaus möglich ist, auch andere Profilmfamilien als die Lewis-Formen zu wählen, z.B. die Darstellung

$$(x+iy)_K = C (e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta} + ce^{-i5\theta}),$$

durch die eine noch bessere Anpassung an die tatsächlichen Spantformen erreicht werden könnte; allerdings erhöht sich hierbei die Zahl der notwendigen, vorgegebenen Parameter von zwei auf drei, was natürlich eine gewisse Erweiterung

des Programms und eine Verlängerung der Rechenzeit bedeuten würde. - Deshalb ist hier vorerst mit Lewis-Formen gerechnet worden, die ja auch recht gute Näherungen der Spantformen geben.

Es soll nun der Koeffizient C in Gleichung (32) bestimmt werden. Das ist denkbar einfach.

Für $\theta = 0$ ist $y = 0$ und $x = B_{\text{Spt}}/2$, folglich gilt:

$$C = \frac{B}{2(1+a+b)} \cdot$$

Da wir weiterhin - wie auch vorher - mit den dimensionslosen Größen X,Y rechnen wollen, müssen wir die Gleichung (32) noch mit ω^2/g multiplizieren und erhalten:

$$(32^*) \quad (X+iY)_K = \frac{B}{2(1+a+b)} \frac{\omega^2}{g} (e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta}) \cdot$$

Der Kürze halber schreiben wir für den Vorfaktor:

$$\nu^* = \frac{B}{2(1+a+b)} \frac{\omega^2}{g} \cdot$$

b) Die Anwendung der Lewis-Formen bei den komplexen Potentialen $\Phi_n + i\Psi_n$.

Wir wenden uns nun dem Ausdruck (30) für das komplexe Potential $\Phi_n + i\Psi_n$ zu, wobei wir die Zuordnung der Indizes n zu den Potenzen auf der rechten Seite nun so vornehmen - was uns ja freisteht, - daß wir die Potenzen um 2 verringern. Das gibt demnach:

$$(30^*) \quad \Phi_n + i\Psi_n = \frac{1}{(X+iY)^{2n}} - \frac{i}{(2n-1)(X+iY)^{2n-1}} \cdot$$

In (30*) setzen wir den Ausdruck (32*) ein und erhalten

$$(36) \quad (\Phi_n + i\Psi_n)_K = \frac{1}{\nu^{*2n}} \left\{ \frac{1}{(e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta})^{2n}} - \frac{i\nu^*}{(2n-1)(e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta})^{2n-1}} \right\}$$

Bei der weiteren Rechnung lassen wir wieder den konstanten Vorfaktor $1/(v^{*2n})$ fort, d.h. wir nehmen ihn als Faktor in den Koeffizienten A_n mit hinein, wie wir es bereits vorher verschiedentlich mit den konstanten Vorfaktoren taten.

Um nun den Ausdruck für Ψ_{nK} getrennt schreiben zu können, ist es notwendig, eine mathematische Zwischenbetrachtung einzuschalten.

c) Mathematische Zwischenbetrachtung: eine Reihenentwicklung.

Es gilt:

$$\frac{1}{(e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta})^p} = \frac{e^{-ip\theta}}{(1 + ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta})^p}$$

Hierbei ist:

$$(37) \quad ae^{-2i\theta} + be^{-4i\theta} < 1, \quad \text{wenn } |a| + |b| < 1.$$

Diese Bedingung ist für die Lewisformen erfüllt.

Folglich kann man den Ausdruck in eine binomische Reihe entwickeln:

$$(38) \quad \frac{e^{-ip\theta}}{(1 + ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta})^p} = e^{-ip\theta} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{p+m-1}{m} (ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta})^m$$

$$= e^{-ip\theta} \left\{ 1 - p(ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta}) + \frac{p(p+1)}{2}(ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta})^2 - \dots \right\}$$

d) Einführung der Reihenentwicklung in das komplexe Potential (36) für die Körperkontur.

Da die Bedingung (37) für Lewis-Spanten erfüllt ist, kann man die beiden Terme auf der rechten Seite von Gleichung (36) durch die Reihenentwicklung (38) ersetzen und dann Real- und Imaginär-

teil voneinander trennen. Für die Stromfunktion auf der Körperkontur erhält man dann - nach Fortlassen des Faktors $1/(\nu^* 2^n)$ - (wie bereits vorher erwähnt):

$$(39) \Psi_{n,K} = -\sin(2n\theta) + 2n \left[a \sin((2n+2)\theta) + b \sin((2n+4)\theta) \right] - \\ - \frac{2n(2n+1)}{2} \left[a^2 \sin((2n+4)\theta) + 2ab \sin((2n+6)\theta) + b^2 \sin((2n+8)\theta) \right] + \dots \\ - \frac{\nu^*}{2n-1} \left\{ \cos((2n-1)\theta) - (2n-1) \left[a \cos((2n+1)\theta) + b \cos((2n+3)\theta) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)2n}{2} \left[a^2 \cos((2n+3)\theta) + 2ab \cos((2n+5)\theta) + b^2 \cos((2n+7)\theta) \right] \dots \right\}.$$

Durch (39) ist die Stromfunktion Ψ_n auf der Kontur durch eine Sinusentwicklung für gerade Vielfache von θ und eine Cosinusentwicklung für ungerade Vielfache von θ gegeben. Im Folgenden sind die Vorfaktoren A_n so zu bestimmen, daß $\sum A_n \Psi_{nK} + A_0 \Psi_0$ den Sollwert der Stromfunktion auf der Kontur ergibt.

8) Bestimmung der Stromfunktion auf der Kontur für verschwindende Frequenz

Zuerst soll dieser Fall untersucht werden, weil er einfacher ist als der allgemeine Fall. Wir haben die Frequenz

$$\omega \rightarrow 0 \text{ und deshalb auch } \nu^* \rightarrow 0.$$

Wir erinnern uns an die Bedingung für die Körperkontur:

$$(31) \Psi_{\text{soll},K} = e^{i\omega t} uX.$$

Über der Abwicklung der Kontur aufgetragen, ergibt dies das in Fig. 3 aufgetragene Bild. In (39) bleibt - da für $\omega \rightarrow 0$ auch $\nu^* \rightarrow 0$ - nur die Entwicklung der Stromfunktion nach Sinusfunk-

tionen erhalten, was folgendes Bild ergibt: Fig. 12

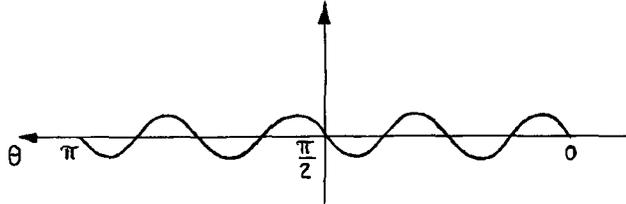


Fig. 12 $\Psi_{n,K}$ nach (39) für $\omega \rightarrow 0$

Der Vergleich von Fig. 12 mit Fig. 3 zeigt, daß wir keine Übereinstimmung erzielen können, wieviele n -Werte wir auch nehmen mögen.

Deshalb ist es unbedingt notwendig, auch das Glied $A_0(\Phi_0 + i\Psi_0)$ zu berücksichtigen.

Nach Gleichung (15) gilt für kleine Werte X, Y die Entwicklung:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X+iY)}}{K-1+i\mu} dK = e^{i(X+iY)} \left\{ -\ln \sqrt{X^2+Y^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[i(X+iY)]^n}{n \cdot n!} - i(\pi - \arctg \frac{X}{Y}) \right\}.$$

Für $\nu^* \rightarrow 0$ gilt auch $X_K \rightarrow 0$ und $Y_K \rightarrow 0$; der Index K soll anzeigen, daß es sich um die normierten Werte X, Y der Körperkontur handelt. In diesem Falle strebt der Wert von $\sum [i(X_K+iY_K)]^n / (n \cdot n!)$ ebenfalls gegen Null und $e^{i(X+iY)} \rightarrow 1$, und wir haben die Entwicklung:

$$(40) \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{iK(X_K+iY_K)}}{K-1+i\mu} dK = \left\{ -\ln \sqrt{X_K^2+Y_K^2} - i(\pi - \arctg \frac{X_K}{Y_K}) \right\}.$$

Wir hatten aber - Gleichung (20), (21) - jetzt unter Weglassung des Vorfaktors $A_0 e^{i\omega t}$ -

$$\Phi_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \cos(KX)}{K-1+i\mu} dK$$

$$\Psi_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-KY} \sin(KX)}{K-1+i\mu} dK .$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken

$$\cos(KX) = \frac{1}{2} (e^{iKX} + e^{-iKX})$$

und

$$\sin(KX) = \frac{1}{2i} (e^{iKX} - e^{-iKX}),$$

so erhalten wir bei Berücksichtigung von (40) auf der Körperkontur für $\omega \rightarrow 0$

$$(41) \quad \begin{aligned} \Phi_{oK} &= \left\{ -\ln \gamma \sqrt{X_K^2 + Y_K^2} - i\pi \right\} \\ \Psi_{oK} &= \operatorname{arctg} \frac{X_K}{Y_K} . \end{aligned}$$

Wir zeichnen Ψ_{oK} als Funktion von θ in dem Intervall $0 \leq \theta \leq \pi$ (Fig. 13).

Der Vergleich mit Fig. 3 zeigt, daß der Kurvenverlauf in beiden Fällen sehr ähnlich ist, d.h. wir haben mit dem Ausdruck (41) für Ψ_{oK} schon eine Funktion gefunden, die der Stromfunktion $\Psi_{soll,K}$ sehr ähnlich ist.

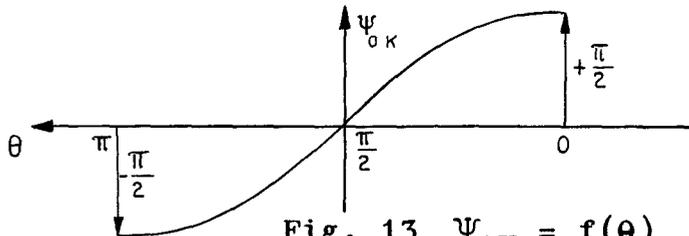


Fig. 13 $\Psi_{oK} = f(\theta)$.

Die Aufgabe besteht nunmehr darin, die Funktionen Ψ_{nK} - ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) - mit solchen Koeffizienten A_n zu multiplizieren, daß die Bedingung für die Körperkontur erfüllt ist, d.h. daß gilt:

$$(42) \quad \sum_{n=0}^{N-1} A_n \Psi_{nK} = \Psi_{soll,K} .$$

Zu diesem Zweck wird zunächst der Ausdruck Ψ_{OK} aus (41) umgeformt; - eigentlich sollte das durch Einsetzen der Lewis-Koordinaten geschehen. Da dies einen sehr umständlichen Ausdruck ergeben würde, schlägt Grim zunächst einen anderen Weg ein: Er geht aus von der bekannten Gleichung:

$$(43) \quad X + iY = \sqrt{X^2 + Y^2} e^{i \arctg \frac{Y}{X}} .$$

Andererseits gilt für die Lewis-Formen Gleichung (32). Das Gleichsetzen dieser Gleichung mit Gl.(43) ergibt für die Körperkontur:

$$v^* e^{i\theta} (1 + ae^{-2i\theta} + be^{-4i\theta}) = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2} e^{i(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X_K}{Y_K})} .$$

Von dem vorstehenden Ausdruck wird der Logarithmus gebildet:

$$\ln v^* + i\theta + \ln(1 + ae^{-2i\theta} + be^{-4i\theta}) = \ln \sqrt{X_K^2 + Y_K^2} + i(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{X_K}{Y_K}) .$$

Betrachten wir hiervon nur den Imaginärteil, so erhalten wir für den Arcustangens den folgenden Ausdruck:

$$(44) \quad \arctg \frac{X_K}{Y_K} = \frac{\pi}{2} - \theta - \text{Im} \left\{ \ln(1 + ae^{-2i\theta} + be^{-4i\theta}) \right\} .$$

Den Imaginärteil des Ausdrucks in der geschweiften Klammer erhalten wir, wenn wir diesen Ausdruck in eine Reihe entwickeln; das ist möglich, weil $|a| + |b| < 1$. Die Reihenentwicklung erfolgt nach der Formel:

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} \dots, \quad |X| < 1$$

mit $ae^{-2i\theta} + be^{-4i\theta}$ an Stelle von X.

Durch Verwendung der Eulerschen Formel $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ lassen sich in der Reihenentwicklung Real- und Imaginärteil

voneinander trennen, und wir erhalten

$$(45) \quad \Psi_{oK} = \arctan \frac{X_K}{Y_K} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + a \sin(2\theta) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right) \sin(4\theta) + \\ + \left(-\frac{a^3}{3} + ab\right) \sin(6\theta) + \left(\frac{a^4}{4} - a^2b + \frac{b^2}{2}\right) \sin(8\theta) + \dots$$

Nachdem Ψ_{oK} durch (45) bestimmt ist, wird der Soll-Wert der Stromfunktion - Gleichung (31) - nach Sinusfunktionen mit geraden Vielfachen von θ entwickelt, um eine Gegenüberstellung von Ist-Wert und Soll-Wert zu ermöglichen.

Hier soll noch einmal Gleichung (31) hingeschrieben werden (- der Faktor $e^{i\omega t}$ wird wieder vorläufig fortgelassen -):

$$(31^*) \quad \Psi_{sollK} = \frac{U\omega^2}{g} X_K = \frac{Ug}{\omega^2} v * \left\{ (1+a) \cos \theta + b \cos(3\theta) \right\} .$$

Zum Vergleich mit dem Ist-Wert der Stromfunktion an der Körperkontur soll Ψ_{sollK} in (31*) ebenfalls durch eine Entwicklung nach $\sin(2n\theta)$ dargestellt werden. Dies geschieht durch Fourier-Entwicklungen der Funktionen

$$f_1(\theta) = \cos\theta - 1 + \frac{2}{\pi}\theta \quad \text{und} \quad f_2(\theta) = \cos(3\theta) - 1 + \frac{2}{\pi}\theta ;$$

daraus erhalten wir:

$$\cos\theta = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\theta)}{n(4n^2-1)} \right) \quad \text{und} \\ \cos(3\theta) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\sin(2n\theta)}{n(4n^2-9)} \right) .$$

Diese Ausdrücke für $\cos\theta$ und $\cos(3\theta)$ werden in (31*) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$(31^{**}) \Psi_{\text{sol1K}} = \frac{2}{\pi} \frac{Ug}{\omega^2} \nu^* \left\{ (1+a+b) \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + (1+a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\theta)}{n(4n^2-1)} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \sin(2n\theta)}{n(4n^2-9)} \right\}.$$

Aus dem Lösungsansatz D*) erhalten wir für den Ist-Wert der Stromfunktion:

$$\Psi_{\text{istK}} = A_0 \Psi_{\text{oK}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Psi_{\text{nK}}.$$

Für $\omega \rightarrow 0$ erhielten wir:

$$(45) \quad \Psi_{\text{oK}} = \frac{\pi}{2} - \theta + a \sin(2\theta) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right) \sin(4\theta) + \dots$$

und für Ψ_{nK} gelangt für $\omega \rightarrow 0$ der Klammerausdruck mit den Cosinusfunktionen in Gleichung (39) in Fortfall, weil hierfür der Vorfaktor $\nu^*/(2n+1) \rightarrow 0$ geht.

Der Vergleich der Koeffizienten von $\pi/2 - \theta$, $\sin(2\theta)$, $\sin(4\theta)$, $\sin(6\theta)$, ergibt:

$$(46) \quad \begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi} \frac{Ug}{\omega^2} \nu^* (1+a+b) \\ a \cdot A_0 - A_1 &= \frac{2}{\pi} \frac{Ug}{\omega^2} \nu^* \left(\frac{1+a}{3} - \frac{9}{5}b \right) \\ -(a^2/2+b)A_0 + 2a A_1 - A_2 &= \frac{2}{\pi} \frac{Ug}{\omega^2} \nu^* \left(\frac{1+a}{30} + \frac{9}{14}b \right) \\ (a^3/3-ab)A_0 + (-3a^2+2b)A_1 + 4aA_2 - A_3 &= \frac{2}{\pi} \frac{Ug}{\omega^2} \nu^* \left(\frac{1+a}{105} + \frac{9}{81}b \right). \end{aligned}$$

Damit haben wir in (46) ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten A_n , das für den hier behandelten

Fall $\omega \rightarrow 0$ besonders einfach ist.

Durch Einsetzen von

$$\nu^* = \frac{B}{2} \frac{\omega^2}{g} \frac{1}{1+a+b}$$

- (Gleichung auf S.37) - erhalten wir für A_0 den einfachen Ausdruck:

$$A_0 = \frac{U \cdot B_{Spt}}{\pi} .$$

9) Der hydrodynamische Druck und die hydrodynamische Kraft für verschwindende Frequenz

Der resultierende Druck setzt sich aus dem hydrodynamischen Druck und dem hydrostatischen Druck zusammen:

$$(47) \quad p = -\rho \Phi_t + \rho g y \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}} \right] .$$

Hierbei sind nur lineare Glieder berücksichtigt.

Der erste Term in (47) entspricht dem hydrodynamischen, der zweite dem hydrostatischen Druck; ersterer soll für den Fall $\omega \rightarrow 0$ bestimmt werden. Aus dem Lösungsansatz D*) haben wir für das Potential

$$\Phi = e^{i\omega t} \left\{ A_0 \Phi_0 + \sum A_n \Phi_n \right\}$$

und

$$\Phi_t = i\omega e^{i\omega t} \left\{ A_0 \Phi_0 + \sum A_n \Phi_n \right\} .$$

Für das Potential Φ_0 auf der Körperkontur hatten wir für $\omega \rightarrow 0$ den folgenden Ausdruck (Gl.41) erhalten:

$$\Phi_{0K} = -\ln r \sqrt{X_K^2 + Y_K^2} - i\pi .$$

Damit wird der hydrodynamische Druck an der Kontur des Profils:

$$p_{hK} = -\rho i\omega e^{i\omega t} \left\{ A_0 (-\ln r \sqrt{X_K^2 + Y_K^2} + i\pi) + \sum A_n \Phi_{nK} \right\} .$$

Die hydrodynamische Kraft P_h pro Längeneinheit ergibt sich durch Integration des hydrodynamischen Druckes über die Körperkontur.

Für $\omega \rightarrow 0$ sind alle Koeffizienten A_n reell und ebenfalls alle Φ_{nK} mit Ausnahme von Φ_0 .

Da die dimensionslosen Ordinaten $X_K \rightarrow 0$ und $Y_K \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow 0$, gilt auch

$$\sqrt{X_K^2 + Y_K^2} \rightarrow 0 \quad \text{und folglich}$$

$$-\ln\left(\gamma \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}\right) \rightarrow \infty .$$

Im Verhältnis dazu sind die Terme $A_n \Phi_{nK}$ klein und werden deshalb vernachlässigt.

Damit erhalten wir für die hydrodynamische Kraft je Längeneinheit bei verschwindender Frequenz:

$$P_h = \frac{g}{\omega^2} \int_{\text{Kontur}} p_{hK} dx_K = i\rho\omega e^{i\omega t} \frac{g}{\omega^2} A_0 \left[-\ln\left(\gamma \frac{\omega^2}{g} \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}\right) \frac{\omega^2}{g} B - i\pi \frac{\omega^2}{g} B \right]$$

oder

$$(48) \quad P_h = -i\rho\omega e^{i\omega t} \frac{UB}{\pi} \left[-\ln\left(\gamma \frac{\omega^2}{g} \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}\right) B - i\pi B \right] .$$

Wir sehen, daß die hydrodynamische Kraft sich aus zwei Teilen zusammensetzt, der hydrodynamischen Trägheitskraft T_1 und der hydrodynamischen Dämpfungskraft T_2 :

$$(49) \quad T_1 = \rho\omega e^{i\omega t} \frac{UB^2}{\pi} \ln\left(\gamma \frac{\omega^2}{g} R\right)$$

mit $R = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}$ und

$$(50) \quad T_2 = -\rho\omega e^{i\omega t} UB^2 .$$

Die Ausdrücke (49) gelten für das Halbkreisprofil exakt; für andere Konturen stellen sie eine Näherung dar.

Die Schwingungsgeschwindigkeit ist

$$\dot{z}_0 = e^{i\omega t} U,$$

die Beschleunigung

$$\ddot{z}_0 = i\omega e^{i\omega t} U.$$

Daraus ergibt sich, daß die hydrodynamische Dämpfungskraft in Phase mit der Geschwindigkeit ist, die hydrodynamische Trägheitskraft in Phase mit der Beschleunigung.

Die linke Seite der Schwingungsgleichung lautet:

$$(m+m'')\ddot{z}_0 + N\dot{z}_0 + \rho g B z_0.$$

Darin sind $m\ddot{z}_0$ die Trägheitskraft, die aus der Beschleunigung der Schiffsmasse resultiert,

$m''\ddot{z}_0$ die hydrodynamische Trägheitskraft,

$N\dot{z}_0$ die hydrodynamische Dämpfungskraft,

d.h.

$$(51) \quad m'' = -\rho \frac{B^2}{\pi} \ln \left(\gamma \frac{\omega^2}{g} R \right)$$

$$N = \rho \omega B^2.$$

m'' bezeichnet die hydrodynamische Masse.

Der Dämpfungskoeffizient N kann aber auch aus dem Amplitudenverhältnis, d.h. dem Verhältnis der Amplitude der Oberflächenwellen, die sich vom Körper entfernen, zur Amplitude der Tauch-

bewegung errechnet werden. Es gilt

$$N = \bar{A}^2 \frac{\rho g^2}{\omega^3} .$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für N erhalten wir

$$\bar{A}^2 \frac{\rho g^2}{\omega^3} = \rho \omega B^2 \quad \text{oder}$$

$$(52) \quad \bar{A} = \frac{\omega^2}{g} B .$$

Die Ausdrücke (51) und (52) gelten exakt für das Halbkreisprofil. Tragen wir die Größen m'' und \bar{A} über dem dimensionslosen Frequenzparameter $\omega^2/g \cdot B/2$ auf, so hat die Kurve \bar{A} für $\omega = 0$ den Anstieg $\text{tg} \alpha = 2$, \bar{A} selbst wird gleich 0; die hydrodynamische Masse m'' wird für $\alpha = 0$ unendlich. $\bar{A} \rightarrow 0$ und $m'' \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow 0$ gilt für alle Profile, nicht nur für den Halbkreis (Fig. 14).

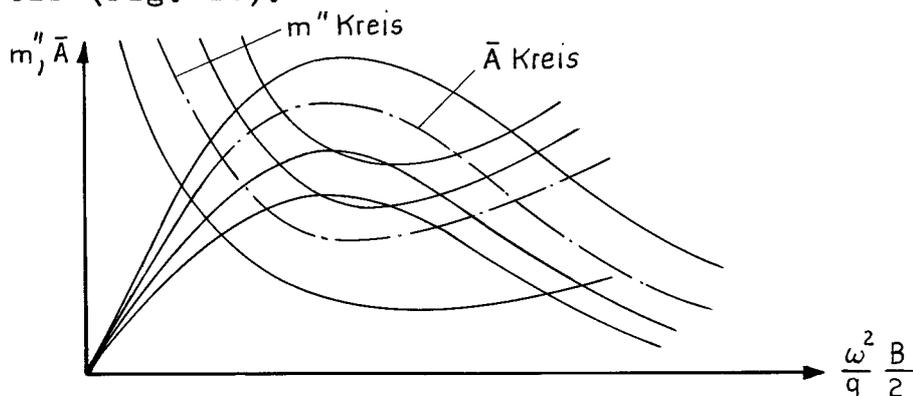


Fig. 14. Skizzierung des Kurvenverlaufs von m'' und \bar{A} für verschiedene Profile. - · - · - · Kreisprofil

Zur Bestimmung der Dämpfungskraft und der hydrodynamischen Trägheitskraft werden in der Prozedur ZPSIMO das Amplitudenverhältnis $SAR = \bar{A}$ und das Verhältnis der hydrodynamischen Massen des Profils und des Halbkreisprofils

$$SC = \frac{m''}{\rho \left(\frac{B}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2}} \quad \text{berechnet.}$$

10) Bestimmung der Stromfunktion auf der Kontur für nicht verschwindende Frequenz

Der geforderte Soll-Wert der Stromfunktion Ψ_{sollK} bleibt unverändert wie bei der verschwindenden Frequenz-Gl. (31**) -; somit bleibt auch die rechte Seite des Gleichungssystems (46) unverändert.

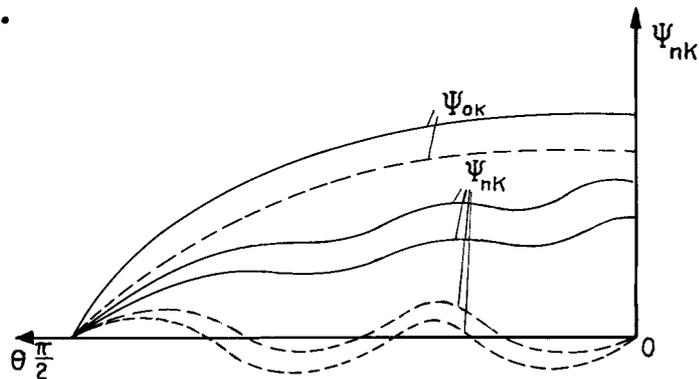


Fig. 15. Verlauf der Stromfunktionen Ψ_{nK} über θ .
-----Kurven für $\omega = 0$.

Es ändern sich aber die Stromfunktionen und damit auch die Koeffizienten von A_n auf der linken Seite des Gleichungssystems.

Für Ψ_{nK} hatten wir den Ausdruck (39) abgeleitet. Bei verschwindender Frequenz behielten wir davon nur den Term mit Sinusfunktionen übrig, da für $\omega \rightarrow 0$ ebenfalls $\nu^* \rightarrow 0$. Jetzt müssen wir auch den Term mit den Cosinusfunktionen berücksichtigen. Dies geschieht, indem wir durch Fourieranalyse die Funktionen

$$\cos \left\{ (2n-1)\theta \right\} - \left(1 - \frac{2}{\pi}\theta\right)$$

in Sinusfunktionen von geraden Vielfachen von θ umformen.

Es gilt allgemein:

$$\cos m\theta - \left(1 - \frac{2}{\pi}\theta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n\theta)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(m\theta) - 1 + \frac{2}{\pi}\theta) \sin(2n\theta) d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{m^2}{n(4n^2 - m^2)},$$

folglich

$$(52) \quad \cos(m\theta) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\theta\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 \sin(2n\theta)}{n(4n^2 - m^2)}.$$

Wir ersetzen also die Cosinusfunktionen in (39) durch den Ausdruck (52), wobei wir - entsprechend dem gewählten Genauigkeitsgrad $N = 4$ - nur die Funktionen $\cos(3\theta)$, $\cos(5\theta)$ und $\cos(7\theta)$ berücksichtigen und auch die Summenbildung nach dem 4. Term abbrechen. Jedoch ehe wir diese Entwicklung vornehmen, vereinfachen wir noch die Determinante des Gleichungssystems, dessen ursprüngliche Form lautet:

$$(53) \quad A_0 \Psi_{0K} + \sum_{n=1}^4 A_n \Psi_{nK} = \Psi_{\text{soll},K}.$$

(Diese Vereinfachung ist zwar in dem Rechenprogramm enthalten; sie wäre jedoch für das Rechnen mit der Maschine nicht notwendig. Sie war sehr notwendig, als noch von Hand gerechnet werden mußte).

Der Index K gibt an, daß es sich um die Werte der Stromfunktion auf der Körperkontur handelt. Auf der linken Seite des Gleichungssystems stehen die Ist-Werte, auf der rechten Seite die Soll-Werte. Werden für Ψ_{nK} die Reihen (39) für $n=1,2,3,4$ eingesetzt, so steht in der 5. Spalte der Koeffizientenmatrix für Ψ_{4K} ein Ausdruck, der sich aus Gliedern mit $\sin(8\theta)$ und $\cos(7\theta)$ zusammensetzt; die 4. Spalte für Ψ_{3K} enthält Terme mit $\sin(6\theta)$, $\sin(8\theta)$, $\cos(5\theta)$ und $\cos(7\theta)$, die 3. Spalte für Ψ_{2K}

Terme mit $\sin(4\theta)$, $\sin(6\theta)$, $\sin(8\theta)$, $\cos(3\theta)$, $\cos(5\theta)$ und $\cos(7\theta)$, die 2. Spalte für Ψ_{1K} Terme mit $\sin(2\theta)$, $\sin(4\theta)$, $\sin(6\theta)$, $\sin(8\theta)$, $\cos\theta$, $\cos(3\theta)$, $\cos(5\theta)$, $\cos(7\theta)$. Da der Wert einer Determinante sich nicht ändert, wenn man eine Zeile oder Spalte mit einem beliebigen Faktor multipliziert und zu einer anderen Zeile, bzw. Spalte addiert, wird dies zur Vereinfachung der Determinante hier getan; und zwar wird die 5. Spalte mit $7a$ multipliziert und zur 4. Spalte addiert. In der 4. Spalte steht nun also nicht mehr Ψ_{3K} sondern $\Psi_{3K} + 7a\Psi_{4K}$, ein Ausdruck, der keinen Term mehr mit $\cos(7\theta)$ enthält, von den Cosinusfunktionen also nur noch einen Term mit $\cos(5\theta)$.

Durch die Wahl geeigneter Faktoren werden so in gleicher Weise aus der 3. Spalte die Glieder mit $\cos(7\theta)$ und $\cos(5\theta)$ eliminiert, aus der 2. Spalte die Glieder mit $\cos(7\theta)$, $\cos(5\theta)$, $\cos(3\theta)$, so daß jetzt die Spalten 2 bis 5 außer den Sinusgliedern nur noch jeweils ein Cosinusglied enthalten und zwar nacheinander $\cos\theta$, $\cos(3\theta)$, $\cos(5\theta)$, $\cos(7\theta)$.

Wir haben somit das Gleichungssystem

$$(53^*) \quad A_0 \Psi_{0K} + A_1 \left[\Psi_{1K} + 3a\Psi_{2K} + 5(2a^2 + b)\Psi_{3K} + 7(5a^3 + 6ab)\Psi_{4K} \right] + \\ + A_2 \left[\Psi_{2K} + 5a\Psi_{3K} + 7(3a^2 + b)\Psi_{4K} \right] + A_3 (\Psi_{3K} + 7a\Psi_{4K}) + A_4 \Psi_{4K} = \Psi_{\text{sol1K}} .$$

Die Funktion Ψ_{0K} könnte auf gleiche Art wie die Ψ_{nK} unter Zugrundelegung des analytischen Ausdrucks - bzw. der analytischen Ausdrücke (17) und (17*), da wir die Fälle $\sqrt{X^2 + Y^2}$ kleiner und größer 6 untersuchten - berechnet werden. Jedoch wenn man diese Ausdrücke betrachtet, so erkennt man, daß abgesehen davon, daß zwei Fourierentwicklungen notwendig wären, diese Ausdrücke sehr umfangreich sind und die Fourierentwicklung sehr mühselig

wäre. Deshalb werden mit Hilfe dieser Formeln die Ψ_0 -Werte für je 11 Punkte der Körperkontur (des Spants) berechnet, und die Fourieranalyse erfolgt anschließend für die Differenz zwischen der numerisch vorgegebenen Ψ_0 -Funktion und ihrem Wert für $\theta = 0$ nach Sinusfunktionen von geraden Vielfachen des Parameters θ . In diesem Ausdruck treten also nur Sinus- und keine Cosinusfunktionen auf. Daher entfällt auch eine Umformung der ersten Spalte der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, und diese enthält also nur die Werte Ψ_{0K} , nicht aber eine Kombination mehrerer Ψ_{nK} -Funktionen. Da die Funktion Ψ_{0K} einen Real- und einen Imaginärteil besitzt, ergibt sich durch die Trennung von Real- und Imaginärteil ein lineares Gleichungssystem von 10 Gleichungen für die 10 Unbekannten AR_n, AI_n ($n=0,1,2,3,4$), wobei mit AR die Realteile und mit AI die Imaginärteile von A_n bezeichnet sind. Da die Funktion $\Psi_{soll,K}$ auf der rechten Seite des Gleichungssystems rein reell ist, ist die rechte Seite für die Imaginärteile stets gleich Null. Bezeichnen wir die Funktion auf der rechten Seite mit EPB_n ($n = 1,2,3,4,5$), die Realteile der Koeffizienten auf der linken Seite des Gleichungssystems mit EPA_n , die Imaginärteile - die nur für Ψ_{0K} auftreten - mit EQA_n und ordnen wir die Gleichungen so, daß wir zuerst die Terme mit AR_n ($n=0,1,2,3,4$) sammeln und anschließend die Terme mit AI_n und wählen wir die Reihenfolge der Gleichungen in der Art, daß wir stets abwechselnd eine Gleichung der Real- und eine der Imaginärteile haben, so hat das Gleichungssystem folgendes Aussehen:

$$(53^{**}) \quad \sum_{n=1}^5 EPA_{kn} AR_{n-1} - EQA_{k1} AI_0 = EPB_k$$

$$EQA_{k1} AR_0 + \sum_{n=1}^5 EPA_{kn} AI_{n-1} = 0$$

mit $k = 1,2,3,4,5$.

Durch die Bestimmung der Unbekannten AR_n und AI_n sind das Potential und die Stromfunktion bestimmt, die nun alle Bedingungen - auch die an der Körperkontur - erfüllen.

11) Der hydrodynamische Druck und die hydrodynamische Kraft bei nicht verschwindender Frequenz

Die Bestimmung des hydrodynamischen Druckes und der hydrodynamischen Kraft erfolgt völlig analog wie im Falle verschwindender Frequenz, nur daß jetzt an Stelle des verhältnismäßig einfachen Ausdrucks des Potentials für $\omega \rightarrow 0$ der umfangreiche Ausdruck Φ mit den in Abschnitt 10 ermittelten Größen A_n tritt, also:

$$(54) \quad \Phi = e^{i\omega t} \left\{ A_0 \Phi_0 + \sum A_n \Phi_n \right\}$$

mit Φ_0 aus Gleichung (16) oder (16*), je nachdem ob $\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}$ kleiner oder größer 6 ist und mit Φ_n aus Gleichung (36). Da die hydrodynamische Kraft aus der Integration des hydrodynamischen Drucks über den Profilrand resultiert, benötigen wir die Teilpotentiale Φ_n auf der Körperkontur. Wir erhalten sie - wie die Stromfunktionen Ψ_{nK} in (39) - aus der Entwicklung (38):

$$(55) \quad \Phi_{nK} = \cos(2n\theta) - 2n \left[a \cos((2n+2)\theta) + b \cos((2n+4)\theta) \right] + \dots \\ - \frac{\nu^*}{2n-1} \left\{ \sin((2n-1)\theta) - (2n-1) \left[a \sin((2n+1)\theta) - \dots \right] \right\}.$$

Der Ausdruck (55) unterscheidet sich von dem Ausdruck (39) für die Stromfunktion nur dadurch, daß an Stelle der Sinusfunktionen Cosinusfunktionen treten und umgekehrt, und daß sich die Vorzeichen im ersten, von ν^* freien Teil umkehren. Wir erhalten somit für die normierte hydrodynamische Kraft:

$$(56) \quad K_h = A_o \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \Phi_{oK} dx + \sum_{n=1}^4 A_n \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \Phi_{nK} dx \quad [m^2] .$$

Die Normierung ist erfolgt durch Division durch ρg .

Die Φ_{nK} in (55) nähern wir analog wie die Ψ_{nK} an, indem wir die Entwicklung nach $\cos(8\theta)$ und $\sin(7\theta)$ abbrechen. Für Φ_{oK} setzen wir 11 Werte der Körperkontur ein, die wir aus (16) oder (16*) ermitteln und integrieren numerisch. Die hydrodynamische Kraft setzt sich aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammen:

$$(57) \quad K_h = KR_h + iKI_h$$

$$(58) \quad \text{mit} \quad KR_h = AR_o \cdot \text{Re} \int_0^{\pi} \Phi_{oK} dx - AI_o \cdot \text{Im} \int_0^{\pi} \Phi_{oK} dx + \sum_{n=1}^4 AR_n \int_0^{\pi} \Phi_{nK} dx$$

und

$$(59) \quad KI_h = AI_o \cdot \text{Re} \int_0^{\pi} \Phi_{oK} dx + AR_o \cdot \text{Im} \int_0^{\pi} \Phi_{oK} dx + \sum_{n=1}^4 AI_n \int_0^{\pi} \Phi_{nK} dx .$$

Aus dem Realteil der hydrodynamischen Kraft erhält man den dimensionslosen Koeffizienten der hydrodynamischen Masse

$$(60) \quad SC = \frac{KR_h}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{B}{2}\right)^2}$$

und aus dem Imaginärteil die hydrodynamische Dämpfungskraft.

Diese kann aber auch aus dem Amplitudenverhältnis SAR bestimmt werden, für welches gilt:

$$(61) \quad \text{SAR} = \pi \nu^* |A_0| = \pi \nu^* \sqrt{AR_0^2 + AI_0^2},$$

damit wird die hydrodynamische Dämpfungskraft, dividiert durch die Dichte

$$(62) \quad KI_h = \text{SAR}^2 \frac{g^2}{\omega_e^3} \cdot \dot{z} \left[\text{Länge}^2 / \text{Zeit}^2 \right].$$

12) Die Berechnung der erregenden Kraft

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen der gekoppelten Stampf- und Tauchschwingungen ist es notwendig, die erregende Kraft zu ermitteln, die durch die längslaufende Oberflächenwelle erzeugt wird. Zunächst wird von der Annahme ausgegangen, daß die Welle und der Druck in ihr durch den Körper nicht verändert werden, d.h. es wird nach der Hypothese von Froude und Krylow die Kraft bei Berücksichtigung des Smith-Effektes berechnet. Sie wirkt in vertikaler Richtung und ergibt sich durch Integration über die Profilkontur K:

$$(63) \quad E1 = \rho g \cdot B \bar{h} \int_K e^{-Y \cdot \omega_0^2 / \omega_e^2} dx$$

mit B = Profilbreite, \bar{h} = Wellenhöhe.

Zu dieser Kraft hinzu kommt eine Kraft, die sich aus der Deformation der Welle durch den Körper ergibt. Die Lösungsmethode ist die gleiche wie bei der Bestimmung der hydrodynamischen Kraft. Der Ansatz für das komplexe Potential ändert sich nicht. Aber es ändert sich der Sollwert der Stromfunktion auf dem Profilrand. Um diesen zu ermitteln, betrachten wir einen Spantquerschnitt in einer längslaufenden Welle. Die Wasserteilchen der gleichen horizontalen Schicht haben

alle die gleiche Vertikalgeschwindigkeit. Zu tieferen Schichten hin nimmt die Geschwindigkeit exponentiell ab. Es gilt für sie folgender Ausdruck:

$$(64) \quad v_0 = \bar{h} e^{-KY} e^{i\omega t} .$$

Damit ergeben sich für den Sollwert der Stromfunktion in den Punkten X_n des Profils die Werte

$$(65) \quad \Psi_{\text{soll}} = \int_0^{X_n} e^{-Y \cdot \omega_0^2 / \omega_e^2} dX,$$

welche die neue zweite Seite des Gleichungssystems (53) bilden. Die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite hingegen bleibt unverändert. Die aus diesem Gleichungssystem zu ermittelnden Größen, die wir nun AE nennen wollen, haben wieder einen Real- und einen Imaginärteil:

$$(66) \quad AE = AER + iAEI .$$

Damit setzt sich auch die Kraft aus der Deformation aus einem Real- und einem Imaginärteil zusammen:

$$E_2 + iE_3 .$$

Die resultierende erregende Kraft der Oberflächenwelle ist dann:

$$(67) \quad E_r = E_1 + E_2 + iE_3 .$$

Teil B: Die Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichungen

1) Die Integration der Bewegungsgrößen

Die Integration der Bewegungsgrößen über die Schiffslänge erfolgt nach der Streifenmethode, deren Anwendung durch den

Vergleich mit Versuchsergebnissen gerechtfertigt erscheint. Hier soll auf die Methode selbst nicht näher eingegangen werden; dafür sei auf die Arbeiten von Korvin-Kroukovsky [9], Gerritsma [10] und Meckel [11] verwiesen. Im vorliegenden Bericht wird nur von den Ergebnissen der Methode Gebrauch gemacht. Wir gelangen damit zu dem dreidimensionalen Fall des Schiffes in einer längslaufenden Welle, welches drei miteinander gekoppelte Bewegungen ausführt: Tauch-, Stampf- und Längsbewegung. Letztere soll bei der folgenden Betrachtung vernachlässigt werden. Aufgrund der beiden Gleichgewichtsbedingungen - Summe aller Kräfte gleich Null und Summe aller Momente gleich Null - ergeben sich die beiden Bewegungsgleichungen der gekoppelten Tauch- und Stampf-schwingungen:

$$(68) \quad a\ddot{z} + b\dot{z} + cz + d\ddot{\Psi} + e\dot{\Psi} + g\Psi = \text{erregende Kraft}$$

$$A\ddot{\Psi} + B\dot{\Psi} + C\Psi + D\ddot{z} + E\dot{z} + Gz = \text{erregendes Moment}$$

zur Bestimmung der Tauchamplitude z und der Stampfamplitude Ψ . Für die Koeffizienten der beiden Gleichungen gelten folgende Definitionen:

$$(69) \quad \begin{aligned} a &= \int_L (m+m'') dx \\ b &= \int_L (N-v \frac{dm''}{dx}) dx \\ c &= 2 \rho g_e \int y dx \\ d &= \int_L (m+m'') x dx + \frac{v}{\omega_e^2} \int_L (N-v \frac{dm''}{dx}) dx \\ e &= \int_L (Nx - 2vm'' - v \frac{dm''}{dx} x) dx \\ g &= 2 \rho g_e \int y x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (69) \quad A &= \int_L (m+m'')x^2 dx + \frac{v}{\omega_e^2} \int_L (Nx - v \frac{dm''}{dx}) dx \\
 B &= \int_L \left[Nx^2 - 2vm''x - v \frac{dm''}{dx} x^2 \right] dx \\
 C &= 2\rho g_e \int_L yx^2 dx \\
 D &= \int_L (m+m'')x dx \\
 E &= \int_L \left[Nx - v \frac{dm''}{dx} x \right] dx \\
 G &= 2\rho g_e \int_L yx dx
 \end{aligned}$$

mit

m = Masse des Schiffes pro Längeneinheit
 m'' = hydrodynamische Masse pro Längeneinheit
 N = Dämpfungskoeffizient pro Längeneinheit
 g_e = Gravitationskonstante.

In den Ausdrücken (69) für die Koeffizienten der Bewegungsgleichungen ist von der Überlegung Gebrauch gemacht, daß die hydrodynamische Masse im sich bewegenden System nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit ist, d.h.

$$\frac{d(m''z)}{dt} = m''\ddot{z} + \dot{z} \frac{dm''}{dt} = m''\ddot{z} + \dot{z} \frac{dm''}{dx} \frac{dx}{dt} = m''\ddot{z} - v \dot{z} \frac{dm''}{dx} .$$

Für die Integration über die ganze Schiffslänge gelten folgende Beziehungen:

$$(70) \quad \int_L \frac{dm''}{dx} dx = 0$$

$$(71) \quad \int_L \frac{dm''}{dx} x dx = - \int_L m'' dx$$

$$(72) \quad \int_L \frac{dm''}{dx} x^2 dx = - 2 \int_L m'' x dx .$$

Damit lassen sich einige Koeffizienten einfacher als in (69) schreiben:

$$\begin{aligned}
 (69^*) \quad b &= \int_L N dx \\
 d &= \int_L (m+m'') x dx + \frac{v}{\omega_e^2} b \\
 e &= \int_L (Nx - vm'') dx \\
 A &= \int_L (m+m'') x^2 dx + \frac{v}{\omega_e^2} E \\
 B &= \int_L Nx^2 dx \\
 E &= \int_L (Nx + vm'') dx \quad .
 \end{aligned}$$

Diese Vereinfachung gilt nicht mehr, wenn die Kraft pro Streifen gebraucht wird.

2) Die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen

Auf der rechten Seite der beiden Bewegungsgleichungen (68) stehen die für das ganze Schiff resultierende ^{erregende} Kraft und das resultierende erregende Moment. Bei der Aufstellung dieser Größen ist Grim - abweichend von der Streifenmethode - einen eigenen Weg gegangen, um eine größere Genauigkeit der Ergebnisse zu erzielen.

Die erregende Kraft für eine Spantsektion war - komplex geschrieben -

$$(67) \quad E_1 + E_2 + iE_3 \quad .$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Ausdruck für die hydrodynamische Kraft bei Tauchschwingungen, so kann man sagen, daß E_2 bei der erregenden Kraft etwa die gleiche Rolle spielt wie die hydrodynamische Trägheitskraft bei der Tauchschwingung und E_3 die Rolle wie die hydrodynamische Dämpfungskraft; man spricht deshalb bei E_2 und E_3 auch von der Quasi-Trägheits- und Quasi-

Dämpfungskraft. Setzt man deshalb nun auch die Koeffizienten der Beschleunigung und Dämpfung parallel (Vergleich mit den Koeffizienten a und b in Gleichung (69), so stellt man fest, daß der Quasi-Dämpfungskoeffizient auch einen Anteil enthalten muß, der gleich dem Produkt der quasi-hydrodynamischen Masse mit der Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes ist, also einem Term, der von der Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes abhängig ist, während sämtliche anderen Terme davon unabhängig sind und also auch nur für $v = 0$ berechnet werden dürfen.

Bezeichnen wir die erregende Kraft aus der Welle für das ganze Schiff mit F_e , das erregende Moment mit M_e , dann gilt für eine von vorn ankommende Welle:

$$(73) \quad F_e = \operatorname{Re} \left((e^{i\omega_e t}) \int_L (E_1 + E_2 + iE_3^*) e^{i \frac{2\pi x}{\lambda}} dx \right)$$

$$(74) \quad M_e = \operatorname{Re} \left(e^{i\omega_e t} \int_L x(E_1 + E_2 + iE_3^*) e^{i \frac{2\pi x}{\lambda}} dx \right)$$

mit

$\lambda =$ Wellenlänge

$\omega_e =$ Begegnungsfrequenz,

$$(75) \quad E_3^* = E_3 + |v| \cdot \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dx} E_2$$

und der Näherung

$$(76) \quad \frac{dE_2}{dx} = \frac{E_{2m} - E_{2m-2}}{4} \frac{1}{L/20} \cdot$$

Für die Schiffsenden erfährt der Ausdruck (76) eine leichte Abwandlung. Der 2. Term in (75) erhält ein positives Vorzeichen, weil $E_2 < 0$. (Die Trägheitskraft hat in der Bewegungsgleichung das umgekehrte Vorzeichen wie die Rückstellkraft.) Die Integration $\int \frac{dE_2}{dx}$ über die ganze Schiffslänge würde

wieder Null ergeben - analog $\int_L \frac{dm''}{dx} dx = 0$; aber für die Aufstellung der rechten Seite des Gleichungssystems benötigen wir den Wert

$$\int_L \frac{dE_2}{dx} e^{i\frac{2\pi x}{\lambda}} dx ,$$

und dieser ist von Null verschieden.

Für See von hinten kehren sich die Vorzeichen von E_3^* in (73) und (74) um.

Setzen wir für F_e und M_e nun die Realteile ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (73^*) F_e &= \cos \omega_e t \left\{ \int_L (E_1 + E_2) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} dx + \int_L \left(E_3 + \frac{dE_2}{dx} \right) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx \right\} \\ &\quad - \sin \omega_e t \left\{ \int_L (E_1 + E_2) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx + \int_L \left(E_3 + \frac{dE_2}{dx} \right) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} dx \right\} \\ &= \cos \omega_e t \cdot KR - \sin \omega_e t \cdot KI ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (74^*) M_e &= \cos \omega_e t \left\{ \int_L x(E_1 + E_2) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} dx + \int_L x \left(E_3 + \frac{dE_2}{dx} \right) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx \right\} \\ &\quad - \sin \omega_e t \left\{ \int_L x(E_1 + E_2) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} dx + \int_L x \left(E_3 + \frac{dE_2}{dx} \right) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} dx \right\} \\ &= \cos \omega_e t \cdot MR - \sin \omega_e t \cdot MI . \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke bilden die rechten Seiten des Gleichungssystems (68).

3) Die Lösung der Bewegungsgleichungen

Wir führen die folgenden Lösungsansätze in das Gleichungssystem (68) ein:

$$(77) \quad z = z_1 \cos \omega_e t + z_2 \sin \omega_e t$$
$$\Psi = \Psi_1 \cos \omega_e t + \Psi_2 \sin \omega_e t \quad .$$

Durch Trennung der Gleichungen in Terme, die mit $\sin \omega_e t$ und Terme, die mit $\cos \omega_e t$ verbunden sind, erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem von vier Gleichungen zur Bestimmung der Komponenten z_1 , z_2 und Ψ_1 , Ψ_2 der Tauch- und der Stampfamplitude für ein konkretes Schiff in einer längslaufenden Welle bekannter Länge:

$$(78) \quad (c - \omega_e^2 a)z_1 + \omega_e b z_2 + (g - \omega_e^2 d) \Psi_1 + \omega_e e \Psi_2 = KR$$
$$-\omega_e b z_1 + (c - \omega_e^2 a)z_2 - \omega_e e \Psi_1 + (g - \omega_e^2 d) \Psi_2 = KI$$
$$(G - \omega_e^2 D)z_1 + \omega_e E z_2 + (C - \omega_e^2 A) \Psi_1 + \omega_e B \Psi_2 = MR$$
$$-\omega_e E z_1 + (G - \omega_e^2 D)z_2 - \omega_e B \Psi_1 + (C - \omega_e^2 A) \Psi_2 = MI \quad .$$

4) Die Beschleunigung, die Relativbewegung und das Biegemoment

Nachdem wir aus (78) die Unbekannten z_1 , z_2 , Ψ_1 , Ψ_2 ermittelt haben, können die verschiedenen Bewegungsgrößen, die

von Interesse sind, bestimmt werden, z.B. die Beschleunigungen, die Relativbewegungen oder die Biegemomente an bestimmten Stellen der Schiffslänge.

Für die Beschleunigung gilt:

$$(79) \quad b = \sqrt{\left(z_1 + \frac{\pi}{\lambda} \Psi_1 \cdot c \cdot L\right)^2 + \left(z_2 + \frac{\pi}{\lambda} \Psi_2 \cdot c \cdot L\right)^2} \cdot \omega_e^2 \quad .$$

L = Schiffslänge,

λ = Wellenlänge,

c = Koeffizient, der sich auf die Stelle der Schiffslänge bezieht, für welche die Beschleunigung zu ermitteln ist,

z.B. $c=0$ für $0.5L$, $c=-0.4$ für $0.3L$ und

$c=+0.4$ für $0.7L$, - die Länge L vom Heck an gerechnet - .

Die Relativbewegung ist gegeben durch:

$$(80) \quad z_{\text{rel.}} = \sqrt{\left(z_1 + \frac{\pi}{\lambda} \Psi_1 cL - \cos\left(c\frac{\pi L}{\lambda}\right)\right)^2 + \left(z_2 + \frac{\pi}{\lambda} \Psi_2 cL + \text{sign}(v) \sin\left(c\frac{\pi L}{\lambda}\right)\right)^2} .$$

Der Koeffizient c in (80) hat für die gleiche Stelle auf der Schiffslänge stets den gleichen Wert wie für (79).

Für die resultierende Querkraft Q bis zur Stelle Λ auf der Schiffslänge gilt der folgende Ausdruck:

$$(81) \quad Q = a^* \ddot{z} + b^* \dot{z} + c^* z + d^* \ddot{\Psi} + e^* \dot{\Psi} + g^* \Psi - \text{Re} \left[(KR + iKI) c^{i\omega_e t} \right]$$

Die Koeffizienten a^* , b^* , ... haben eine analoge Bedeutung wie die Koeffizienten a, b, \dots in Gleichung (69), nur daß die Integration jetzt nicht über die gesamte Schiffslänge erfolgt, sondern von $-L/2$ bis Λ oder von Λ bis $+L/2$. $\text{Re} \left[(KR + iKI) e^{i\omega_e t} \right]$ ist die resultierende erregende Kraft bis zur Stelle Λ , analog Gleichung (73*).

Das Biegemoment bezüglich Λ ergibt sich durch Multiplikation der einzelnen Querkräfte mit dem Hebelarm $(x-\Lambda)$ unter dem Integralzeichen.

Führt man in (81) die Lösungsansätze (77) für z und Ψ ein und die Integralausdrücke für die Koeffizienten und multipliziert mit dem Hebelarm $(x-\Lambda)$ und sammelt in je einer Gleichung die Koeffizienten von $\cos \omega_e t$ und $\sin \omega_e t$, so erhält man für das Biegemoment bezüglich der Stelle Λ die beiden Komponenten

$$\begin{aligned}
 (82) \quad M_1 = & z_1 \omega_e^2 \int_{-L/2}^{\Lambda} (m+m'') (x-\Lambda) dx \\
 & - z_2 \omega_e \int_{-L/2}^{\Lambda} N(x-\Lambda) dx - z_2 \omega_e v \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx \\
 & - 2g_e z_1 \int_{-L/2}^{\Lambda} y(x-\Lambda) dx \\
 & + \omega_e^2 \Psi_1 \int_{-L/2}^{\Lambda} (m+m'') (x-\Lambda) dx + \frac{v}{\omega_e^2} \omega_e^2 \Psi_1 \int_{-L/2}^{\Lambda} N(x-\Lambda) dx + v^2 \Psi_1 \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx \\
 & - \omega_e \Psi_2 \int_{-L/2}^{\Lambda} Nx(x-\Lambda) dx - v \omega_e \Psi_2 \Lambda \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx \\
 & - 2g_e \Psi_1 \int_{-L/2}^{\Lambda} y \cdot x(x-\Lambda) dx \\
 & + g_e \int_{-L/2}^{\Lambda} KR(x-\Lambda) dx \quad ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= z_2 \omega_e^2 \int_{-L/2}^{\Lambda} (m+m'')(x-\Lambda) dx \\
 &+ z_1 \omega_e \int_{-L/2}^{\Lambda} N(x-\Lambda) dx + z_1 \omega_e v \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx \\
 &- 2g_e z_2 \int_{-L/2}^{\Lambda} y(x-\Lambda) dx \\
 &+ \omega_e^2 \Psi_2 \int_{-L/2}^{\Lambda} (m+m'')(x-\Lambda) dx + v \Psi_2 \int_{-L/2}^{\Lambda} N(x-\Lambda) dx + v^2 \Psi_2 \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx \\
 &+ \omega_e \Psi_1 \int_{-L/2}^{\Lambda} Nx(x-\Lambda) dx + v \omega_e \Psi_1 \Lambda \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx \\
 &- 2g_e \Psi_2 \int_{-L/2}^{\Lambda} yx(x-\Lambda) dx \\
 &- g_e \int_{-L/2}^{\Lambda} KI(x-\Lambda) dx \quad ;
 \end{aligned}$$

mit

g_e = Gravitationskonstante

und

m = Masse des Schiffes pro Längeneinheit,

m'' = hydrodynamische Masse pro Längeneinheit,

N = Dämpfungskoeffizient pro Längeneinheit,

KR, KI Anteile der erregenden Kraft, gemäß (73*).

Die Terme, die die Integrale $\int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx$ enthalten, ergeben sich

durch partielle Integration von:

$$\int_{-L/2}^{\Lambda} \frac{dm''}{dx} (x - \Lambda) dx = - \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx$$

und

$$\int_{-L/2}^{\Lambda} \frac{dm''}{dx} x (x - \Lambda) dx = + \Lambda \int_{-L/2}^{\Lambda} m'' dx,$$

während

$$\int_{-L/2}^{\Lambda} m'' x dx = 0 .$$

Die Amplitude des Biegemoments M_0 ergibt sich aus den beiden Komponenten:

$$(83) \quad M_0 = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} .$$

Teil C) Wahrscheinlichkeitsrechnung

1) Problemstellung

In Teil A und B wurden die Beschleunigung, die Relativbewegung und das Biegemoment eines Schiffes für eine bestimmte Wellenlänge und eine bestimmte Froudesche Zahl berechnet. Das bedeutet, daß wir den Rechnungen einen regelmäßigen Seegang zugrundelegten. - Nun interessiert in der Praxis die Frage, - aus Gründen der Schiffssicherheit, - wie häufig etwa vorgegebene Grenzwerte der Beschleunigung, bzw. der Relativbewegung des Bugs oder des Biegemomentes, während der Fahrten eines Schiffes überschritten werden.

Es interessiert demnach die Wahrscheinlichkeit, mit der diese vorgegebenen Schranken in unregelmäßigem Seegang überschritten werden.

Derartige Feststellungen könnten aufgrund umfangreicher und kostspieliger Messungen durchgeführt werden. Aber man kann auch eine Reihe theoretisch ermittelter Werte zugrundlegen.

2) Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten gewisser Schranken.

Nach Festlegung einer kleinsten und einer größten Wellenlänge, - in Abhängigkeit von der Schiffslänge, - werden die zugehörigen Kreisfrequenzen ω_0 berechnet, durch welche ein geeigneter Frequenzbereich abgegrenzt ist, für welchen Rechnungen durchgeführt werden sollen. - Der kleinsten Wellenlänge entspricht der größte ω_0 -Wert und der größten Wellenlänge der kleinste ω_0 -Wert.

Der Bereich zwischen $\omega_{0 \min}$ und $\omega_{0 \max}$ wird in konstante Intervallbreiten $\Delta\omega_0$ geteilt. Für sämtliche auf diese Art erhaltenen ω_0 -Werte werden für konstante Geschwindigkeit die Tauch- und Stampfamplituden und daraus resultierend die interessierenden Bewegungsgrößen (z.B. die Beschleunigung) berechnet. Diese Bewegungsgröße heißt Übertragungsfunktion und soll mit WN bezeichnet werden.

Für die weitere statistische Berechnung werden noch geeignete Wellenhöhen und die bezeichnenden Perioden des Seegangs benötigt. In Abhängigkeit von diesen beiden Größen wird dann ein Seegangsspektrum gewählt, für welches die Verteilungsdichten p_1 der Wellen in einem bestimmten Seegebiet in Abhängigkeit von der Wellenhöhe, der Periode und der Wellenrichtung aufgrund zahlreicher Messungen zu wählen sind.

Hier wurden die Seegangsspektren von Moskowitz-Pierson benutzt [12]:

$$(84) \quad E(f) = 0.11 \cdot H_v^2 T_v (T_v \cdot f)^{-5} e^{-\frac{0.44}{(T_v f)^4}}$$

mit $f = \omega/2\pi$.

Daraus wird mit Hilfe der Übertragungsfunktion das Bewegungsspektrum des Schiffes gebildet:

$$(85) \quad s(\omega) = \frac{E(f)}{\pi} \text{WN}^2(\omega) \quad .$$

Die Fläche unter diesem Bewegungsspektrum ist:

$$(86) \quad m_{\text{WN}} = 2 \cdot 0.11 \cdot (2\pi)^4 \frac{H_v^2}{T_v^4} \int_0^{\infty} \frac{\text{WN}^2(\omega) e^{-\frac{0,44(2\pi)^4}{(T_v\omega)^4}}}{\omega^5} d\omega$$

In der numerischen Rechnung werden die Integrationsgrenzen 0 und ∞ durch ω_{\min} und ω_{\max} ersetzt. Die prozentuale Wahrscheinlichkeit, daß bestimmte Schranken SWN durch die Übertragungsfunktion WN überschritten werden, ist gegeben durch:

$$(87) \quad p \left[\text{WN} > \text{SWN} \right] = \sum_{T_v} \sum_{H_v} p_1(H_v, T_v) e^{-\text{SWN}^2 / m_{\text{WN}}} \cdot 0,25 \quad .$$

Das Produkt, das über alle vorgegebenen Perioden T_v und alle Wellenhöhen H_v summiert wird, setzt sich aus den folgenden drei Faktoren zusammen: der Wellenverteilung p_1 die für ein bestimmtes Seegebiet in Abhängigkeit von H_v und T_v vorgegeben ist, der Exponentialfunktion $e^{-\text{SWN}^2 / m_{\text{WN}}}$, bei der vorausgesetzt ist, daß für die Bewegungsgröße WN die Raleigh-Verteilung gilt und dem Faktor 0.25, der geschätzt ist und durch den berücksichtigt werden soll, daß von den von allen Seiten kommenden Wellen nur die Wellen direkt von vorn in die Rechnung eingehen. Daß das Schiff nicht nur in Seegang fährt, sondern auch in glattem Wasser, ist durch die vorgegebene Verteilungsdichte p_1 der Wellen berücksichtigt.

Praktisch von Interesse ist, wie häufig in einem bestimmten Zeitraum eine vorgegebene Schranke überschritten wird.

Dieser Wert kann aus der prozentualen Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden.

Angenommen, es sei die prozentuale Wahrscheinlichkeit $p=10^{-4}$. Es soll festgestellt werden, wie oft in einem Zeitraum von 10 Jahren die Schranke SWN durch WN überschritten wird. Nimmt man an, daß das Schiff im Jahr 6000 Stunden in See ist und wird die mittlere Periode mit 10 s geschätzt, dann ergeben sich in 10 Jahren $10 \cdot 6000 \cdot 3600 / 10 = 21\,600\,000$ Amplitudenwerte WN. Dieser Wert wird mit der Wahrscheinlichkeit 10^{-4} multipliziert. Wir erhalten demnach als Ergebnis, daß die Schranke SWN in 10 Jahren 21.60, - also rund 22 mal -, überschritten wird.

Literatur

- [1] Ursell, F.: On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid. (Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. II PT2, 1949.)
- [2] Porter, W.R.: Added mass, damping and wave-ratio coefficient for heaving shiplike cylinders. (Journal of Ship Research. 1966, Dec., S.223-241.)
- [3] Porter, W.R.: Pressure distributions, added mass, and damping coefficients for cylinders oscillating in a free surface. (Univ. of California, Inst. of Engineering Research. July 1960.)
- [4] Tasai, F.: On the damping force and added mass of ships' heaving and pitching. (Univ. of California, Inst. of Engineering Research. Rep. Res Inst. Appl. Mecn. 1959, Nr. 26, S. 131 ff, 1960, Nr. 41, S.39 ff.)

- [5] Grim, O.: Die Schwingungen von schwimmenden zwei-dimensionalen Körpern. Berechnung der hydrodynamischen Kräfte. (HSVA-Bericht 1171, Sept.1959.)
- [6] Grim, O.: A method for a more precise computation of heaving and pitching motions both in smooth water and in waves. (3rd Symp. of Naval Hydrodynamics, Scheveningen, Sept. 19th - 22nd 1960, S. 271-326.)
- [7] Lamb, H.: Hydrodynamics. 6. Auflage, Cambridge 1952.
- [8] Jahnke-Emde-Lösch: Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart: Teubner, 1960.
- [9] Korvin-Kroukovsky, B.V., and W.R. Jacobs: Pitching and heaving motions of a ship in regular waves. (Transactions SNAME, Vol.65, S.590-632, 1957.)
- [10] Gerritsma, J., and W. Beukelmann: The distributions of the hydrodynamic forces on a heaving and pitching shipmodel in still water. (Shipbuilding Laboratory, Delft, Publication no. 22, 1964.)
- [11] Meckel, H.: Zur Berechnung von Tauch- und Stampfbewegung eines Schiffes sowie des Biegemomentes in regelmäßigem und unregelmäßigem von vorne oder hinten kommendem Seegang. [Nicht veröffentlicht.]
- [12] 2nd International Ship Structures Congress 1964. Delft-Netherland, 20-24 July 1964, Vol.I, S.1.8-1.18.