

459 | September 1985

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

J.-S. Kouh

**Rechnergestützte Darstellung von
schiffsformen mit rationalen
kubischen Splines**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Rechnergestützte Darstellung von Schiffformen mit rationalen kubischen Splines

J.-S. Kouh, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1985

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

Rechnergestützte Darstellung von Schiffsformen
mit rationalen kubischen Splines

von

J.-S. Kouh

September 1985

Bericht Nr. 459

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Darstellung von Schiffslinien	3
2.1 Aufgabenstellung	3
2.2 Verschiedene Splinefunktionen	5
2.3 Rationale kubische Splines	10
2.4 Bedingungen für Kegelschnitte	15
2.5 Festlegen eines Kurvenstücks durch Endbedingungen und zusätzliche freie Parameter	16
2.6 Krümmungsvektor	20
2.7 Einfluß vorgegebener Krümmung auf den Kurvenverlauf	22
2.8 Grafische Transformation rationaler kubischer Splines	25
2.9 Eigenschaften der rationalen kubischen Splines	26
2.10 Darstellung einer Kurve durch eine Punktfolge	27
2.11 Interpolation von Kurven	34
2.12 Bogenlänge	35
2.13 Schnittpunkte einer Geraden mit einer ebenen Kurve sowie einer Ebene mit einer Raumkurve	36
2.14 Schnittpunkte zweier ebener Kurven	37
2.15 Segmentierung eines Kurvenstücks	40
3. Flächendarstellung	42
3.1 Voraussetzung und Einschränkungen	42
3.2 Eingabesprache zum Aufstellen eines Netzwerks	46
3.3 Darstellung von Raumkurven aus 2 Projektionen	54
3.4 Möglichkeiten zur Darstellung eines Flächenstücks	60
3.5 Definition eines Flächenstücks mit rationalen kubischen Splines	64
3.6 Verfahren zur Bestimmung der gemischten Ableitungen	77
3.7 Bestimmung der Ableitungen nach u der Tangenteinheitsvektoren in der v -Richtung	79
3.8 Schnittkurve einer Schiffsoberfläche mit einer Ebene	85

	Seite
3.9 Flächeninterpolation	87
3.10 Flächeninhalt	88
3.11 Beispiele	88
4. Zusammenfassung	97
5. Literatur	99
6. Anhang	105

1. Einleitung

Für Fertigungszwecke bietet die numerische Darstellung von Schiffsformen im Rechner gegenüber der zeichnerischen Methode den Vorteil, mit ausreichender Genauigkeit und geringem Aufwand Punkte und Linien auf einer Schiffsoberfläche bestimmen zu können. Voraussetzung dafür ist eine mathematische Definition der Schiffsform durch Kurven und Flächen, die durch Formeln beschrieben werden. Die Formeln sind so anzusetzen, daß sie die geometrischen Eigenschaften der Schiffsform genau darstellen können.

Kurven und Flächen können durch implizite und explizite Formeln sowie in Parameterform beschrieben werden. Die implizite Darstellung kann zwar viele analytische Kurven und Flächen wie Kreis, Ellipse, Kugel und Ellipsoid exakt darstellen, ist aber für frei entworfene Kurven und Flächen wegen schwieriger Handhabung weniger geeignet. Demgegenüber ist die explizite Darstellung bisher sowohl zur Approximation zeichnerisch vorliegender als auch zum Entwurf neuer Schiffslinien und Schiffsoberflächen vielfach verwendet worden. Dabei steht der Polynomansatz im Vordergrund, weil seine Koeffizienten aus gegebenen Bedingungen einfach zu bestimmen sind. Jedoch sind der Anwendbarkeit von Polynomen zur Darstellung der Schiffslinien in einem Zuge, d.h. ohne Segmentierung, enge Grenzen gesetzt. Der Grund dafür ist, daß der Grad des Polynoms mit der Anzahl der einzuhaltenden Bedingungen ansteigen muß; damit ergibt sich die Tendenz zu unerwünschten Wellen im Kurven- bzw. Flächenverlauf. Diese kann dadurch beseitigt werden, daß man die Kurve oder die Fläche in Stücke aufteilt und jedes Stück getrennt durch Polynome niedrigen Grades beschreibt. Schwierigkeiten ergeben sich bei dieser stückweisen expliziten Darstellung, wenn die Ordinate der Linie oder Fläche nicht eindeutig von der oder den Abszissen des benutzten Koordinatensystems abhängt. In diesem Zusammenhang hat Forrest [16] die speziellen mathematischen Eigenschaften der Formen, zu denen die Schiffsoberfläche zählt, analysiert und durch drei Merkmale gekennzeichnet:

1. Sie ist unabhängig vom Koordinatensystem.

2. Sie ist keine eindeutige Funktion von je 2 der 3 kartesischen Koordinaten.
3. Sie besitzt vertikale Tangentenrichtungen auf allen Koordinatenebenen.

Für Kurven und Flächen mit diesen Merkmalen benutzt man vorwiegend Parameterdarstellungen: Zur Beschreibung der Punkte auf einer Kurve verwendet man eine Vektorfunktion einer skalaren Variablen u :

$$\bar{Q}(u) = [x(u) \ y(u) \ z(u)]^T;$$

eine Fläche wird durch eine Vektorfunktion von zwei skalaren Variablen u und v dargestellt:

$$\bar{Q}(u,v) = [x(u,v) \ y(u,v) \ z(u,v)]^T.$$

Nach einer ausführlichen tabellarischen Gegenüberstellung der Vor- und Nachteile der expliziten Darstellung und der Parameterdarstellung von Creutz [11] läßt sich feststellen, daß die Parameterdarstellung für die Beschreibung von Schiffformen der expliziten Darstellung überlegen ist. Dabei ist ein Nachteil der Parameterdarstellung, daß kartesische Schnitte schwieriger zu berechnen sind; dieser Nachteil kann jedoch durch geeignete Algorithmen weitgehend aufgehoben werden.

Für diese Darstellungsart stehen zahlreiche Interpolationsfunktionen zur Auswahl. Sie haben für die verschiedenen in der Kurven- und Flächendarstellung auftretenden Aufgaben unterschiedliche Vor- und Nachteile. In der vorliegenden Arbeit werden Methoden in Parameterform aufgestellt, mit denen sich die heute verwendeten Schiffslinien und Schiffsoberflächen genau darstellen lassen.

2. Darstellung von Schiffslinien

2.1 Aufgabenstellung

Es soll ein Verfahren aufgestellt werden, das mit möglichst wenigen Daten wie Punkten und Tangenten gezeichnet vorliegende Kurven durch Formeln wiedergeben kann. Diese Kurven dienen später als Grundlage (Netzlinsen) für die Flächenbeschreibung. Es handelt sich also um die Darstellung vorhandener, nicht um den Entwurf neuer Kurven. Die Formeln sollen nicht nur die Koordinaten, sondern auch die Steigungen und die Krümmungen der gegebenen Kurven gut annähern. Eine Schiffslinie, z.B. eine Spantkurve oder Wasserlinie, kann aus Geraden, Kegelschnitten (Kreis, Ellipse, Parabel) und frei entworfenen Kurventeilen bestehen (Bild 1). Um die unterschiedlichen Eigenschaften dieser Kurventeile zu berücksichtigen, ist es zweckmäßig, die Kurven in Stücke aufzuteilen. Die Formeln, die ein Kurvenstück annähern sollen, sollen einerseits genau, andererseits möglichst für die ganze Kurve von einheitlichem Typ sein, damit man mit wenigen Algorithmen zur Durchführung der beabsichtigten Operationen auskommt.

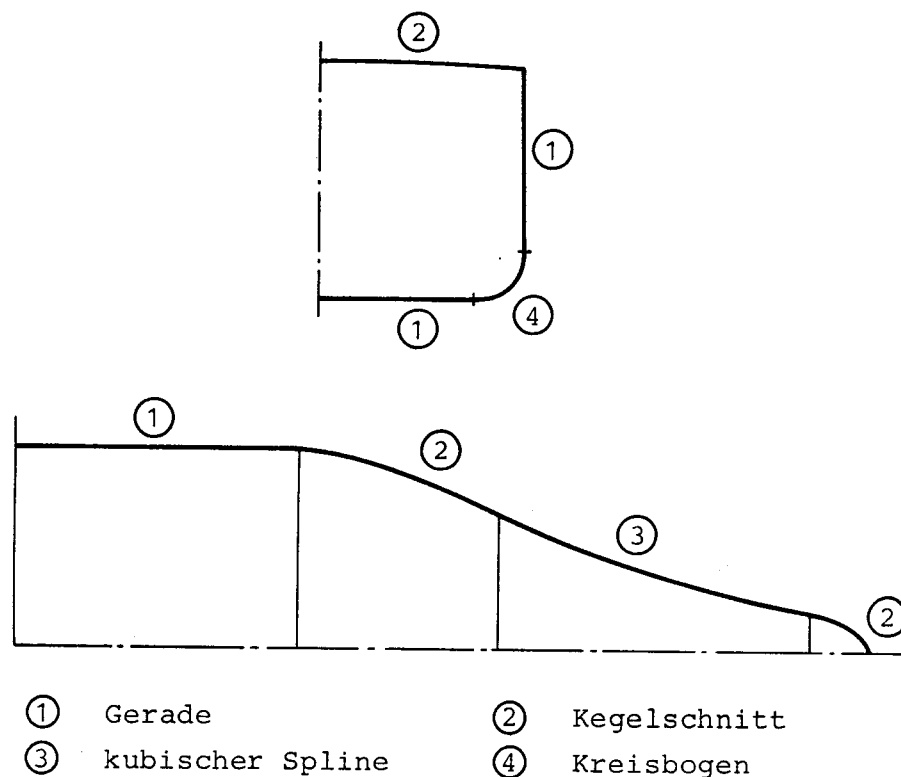


Bild 1 Verschiedene Kurventeile der Schiffslinien

Die Daten, die vom Anwender der Methode gegeben werden müssen, sind in jedem Falle Koordinaten von Stützpunkten auf der Kurve. In manchen Fällen müssen zusätzlich Tangentenrichtungen oder Krümmungen in einzelnen Stützpunkten vorgeschrieben und von den berechneten Kurven eingehalten werden.

Die Aufgabe läßt sich durch Splinefunktionen lösen. Dabei wird eine Kurve aus Stücken zusammengesetzt. Jedes Kurvenstück wird durch ein Polynom niedrigen Grades definiert. Polynome werden gewählt, weil sie einfach zu berechnen sind. Man spricht dann spezifisch von Polynom-Splines (z.B. [30]). Ein niedriger Polynomgrad vermeidet die Tendenz zur Welligkeit der Polynome höheren Grades. Meist werden Polynome 3. Grades bevorzugt, da sie die einfachsten Funktionen sind, die eine Stetigkeit bis zur 2. Ableitung ermöglichen.

2.2 Verschiedene Splinefunktionen

Auf den Gebieten des rechnerunterstützten Entwurfs (CAD) und der Computergrafik sind verschiedene Funktionstypen zur Darstellung und zum Entwurf von Kurven verbreitet, die auf Polynome als Basisfunktion beruhen. Forrest [16] sowie Rogers und Adams [47] haben einen Überblick über eine Reihe von Möglichkeiten gegeben. Hier werden die Eigenschaften einiger Polynomansätze, die für die Beschreibung der Schiffslinien von Bedeutung sind, knapp zusammengestellt und verglichen.

1) "Mischen" von Parabeln

Der Grundgedanke dieser Methode ist, zwei im Raum definierte Parabeln entsprechend Bild 2 zu mitteln.

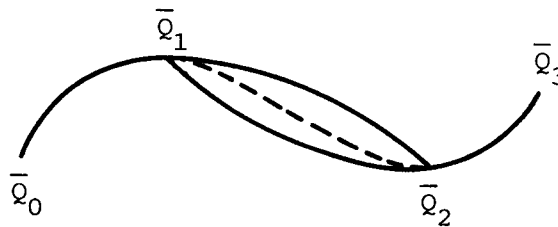


Bild 2 "Mischen" von Parabeln

Bezeichnet man die erste Parabel durch die drei Punkte \bar{Q}_0 , \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 mit $\bar{R}(r)$ und die zweite durch \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 und \bar{Q}_3 mit $\bar{S}(s)$, so wird das Kurvenstück zwischen \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 definiert durch "Mischen" der beiden Parabeln:

$$\bar{Q}(u) = (1-u)\bar{R}(r) + u\bar{S}(s) \quad (2.2-1)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\bar{Q}(u) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_0 & \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 1 & 0.0 & -2.5 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 2.0 & -1.5 \\ 0 & 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \quad (2.2-2)$$

Zur Darstellung von Schiffslinien lassen sich solche Kurvenstücke beliebig aneinanderfügen. Diese Methode ist zum interaktiven Entwurf von Kurven geeignet und kann auch für die Interpolation von Kurven durch gegebene Stützpunkte eingesetzt werden. Sie gewährleistet aber keinen glatten Verlauf der Kurvenkrümmung, und sie ist auch nicht geeignet für Kurven, bei denen als Nebenbedingung z.B. Tangentenrichtungen vorgeschrieben sind.

2) Kubische Splines

Ein Kurvenstück zwischen zwei Punkten ist hierbei definiert durch

$$\bar{Q}(u) = \sum_{j=0}^3 \bar{a}_j u^j \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.2-3)$$

mit $\bar{a}_j = [a_{xj} \ a_{yj} \ a_{zj}]^T$

Die \bar{a}_j sind Koeffizientenvektoren, die aus zwei Endpunkten \bar{Q}_0 und \bar{Q}_1 und zwei Tangentenvektoren an den Endpunkten $\dot{\bar{Q}}_0$ und $\dot{\bar{Q}}_1$ zu bestimmen sind (Bild 3).

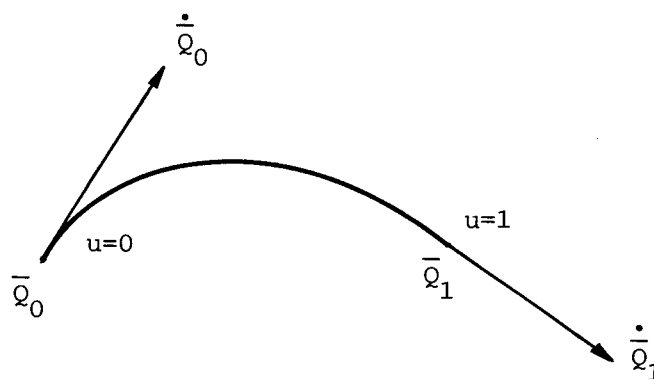


Bild 3 Ein kubisches Splinesegment

Mit Hilfe der Hermiteschen Polynome läßt sich die Formel (2.2-3) wie folgt schreiben:

$$\bar{Q}(u) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_0 & \bar{Q}_1 & \dot{\bar{Q}}_0 & \dot{\bar{Q}}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.2-4)$$

Darin sind $H_1(u)$, $H_2(u)$, $H_3(u)$ und $H_4(u)$ die Hermiteschen Polynome 3. Grades

$$\begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.2-5)$$

Um ein Kurvenstück durch kubische Splines darzustellen, sind also nicht nur die Koordinaten der Endpunkte, sondern auch die Tangentenvektoren festzulegen. Diese lassen sich bestimmen aus zusätzlich gegebenen Bedingungen an den Kurvenendpunkten und - wenn die Kurve mehr als einen Abschnitt hat - aus der Bedingung, daß die Krümmungen (bei ebenen Kurven) bzw. der Krümmungsvektor (bei Raumkurven) an den inneren Stützpunkten stetig sein müssen.

3) Bézier-Kurven

Über n Eckpunkte \bar{Q}_j , $j=0$ bis $n-1$, eines Polygonzuges wird eine Bézier-Kurve definiert durch

$$\bar{Q}(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{Q}_j B_{n,j}(u) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.2-6)$$

wobei

$$B_{n,j}(u) = \binom{n-1}{j} u^j (1-u)^{n-1-j}$$

die sogenannten Bernsteinpolynome sind. Die Kurve ist tangential zu der ersten und der letzten Seite des Polygonzuges und geht im allgemeinen nur durch den ersten und den letzten Eckpunkt, nicht durch die dazwischenliegenden Eckpunkte.

Durch Verschiebung der Eckpunkte läßt sich der Kurvenverlauf gezielt ändern. Die Polynome haben den Grad $n-1$. Ein den kubischen Splines entsprechender Fall ist $n=4$. Ein solches Kurvenstück ist durch die Angabe von 4 Eckpunkten festgelegt. Bild 4 zeigt zwei Kurvenstücke, die an einem Punkt \bar{Q}_3 anschließen.

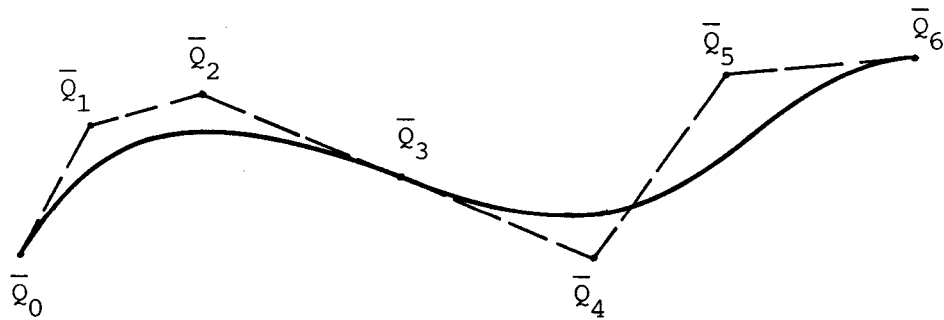


Bild 4 Bézier-Kurve aus zwei Kurvenstücken

Das Kurvenstück durch die vier Eckpunkte $\bar{Q}_0, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$, und \bar{Q}_3 ist definiert durch

$$\bar{Q}(u) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_0 & \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.2-7)$$

Um eine stetige Tangentenrichtung am Punkt \bar{Q}_3 für die beiden Kurvenstücke zu erhalten, sind \bar{Q}_2, \bar{Q}_3 und \bar{Q}_4 kollinear anzugeben.

4) B-Splines

B-Splines sind ebenfalls wie die Bézier-Kurven über Polygonzüge $\bar{Q}_j, j=0$ bis $n-1$, definiert durch

$$\bar{Q}(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{Q}_j N_{j,k}(u) \quad (2.2-8)$$

Der Unterschied zu den Bézier-Kurven ist, daß statt der Bernsteinpolynome die B-Spline-Basispolynome $N_{j,k}$ verwendet werden. Die Funktionen $N_{j,k}(u)$ lassen sich nach den folgenden Rekursionsformeln berechnen:

$$N_{j,1} = \begin{cases} 1 & \text{für } u_j \leq u \leq u_{j+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2-9)$$

und

$$N_{j,k}(u) = \frac{u - u_j}{u_{j+k-1} - u_j} N_{j,k-1}(u) + \frac{u_{j+k} - u}{u_{j+k} - u_{j+1}} N_{j+1,k-1}(u) \quad (2.2-10)$$

Ein spezieller Fall der B-Splines mit $n=4$ und $k=4$ ist eine Bézier-Kurve aus vier Eckpunkten. Die B-Spline-Basispolynome haben jedoch einen Grad $k-1$, der von der Anzahl der Polygonecken n unabhängig ist. Daher bieten B-Splines mehr Einsatzmöglichkeiten als die Bézier-Kurven und eignen sich auch für den Entwurf von Kurven.

2.3 Rationale kubische Splines

Kegelschnitte sind zur Darstellung mancher Kurven erwünscht, da sie keinen Wendepunkt haben können. Kubische Splines können Kegelschnitte nicht exakt darstellen. Dies ist aber durch gebrochene quadratische Polynome in Parameterform möglich:

$$\begin{aligned}
 x(u) &= \frac{\sum_{j=0}^2 a_{xj} u^j}{\sum_{j=0}^2 a_{hj} u^j} \\
 y(u) &= \frac{\sum_{j=0}^2 a_{yj} u^j}{\sum_{j=0}^2 a_{hj} u^j}
 \end{aligned} \tag{2.3-1}$$

Vergleicht man die Formeln (2.2-3) und (2.3-1), so liegt der Gedanke nahe, Kegelschnitte und kubische Splines durch einen Quotienten zweier Polynome 3. Grades in einer einzigen Formel zu vereinigen:

$$\bar{q}(u) = \frac{\sum_{j=0}^3 \bar{a}_j u^j}{\sum_{j=0}^3 a_{hj} u^j} \tag{2.3-2}$$

Die kubischen Splines nach (2.2-3) ergeben sich als ein Sonderfall der rationalen kubischen Splines nach (2.3-2) durch

$a_{h1} = a_{h2} = a_{h3} = 0$. Werden der Zähler mit dem Vektor $\bar{p}(u) = [x(u) \ y(u) \ z(u)]^T$ und der Nenner mit

dem Skalar $h(u)$ und beide zusammen mit dem Vektor $\bar{q}(u) = \begin{bmatrix} \bar{p}(u) \\ h(u) \end{bmatrix}$

bezeichnet, so läßt sich ein Punkt im Raum durch $\bar{q}(u)$ mit vier Koordinaten $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ und $h(u)$ statt durch drei Koordinaten darstellen. Diese vier Koordinaten werden homogene Koordinaten

genannt. Den allgemeinen Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten und den homogenen Koordinaten drückt die Beziehung

$$\bar{Q}(u) = \frac{\bar{p}(u)}{h(u)} \quad (2.3-3)$$

aus.

Analog zu (2.2-4) kann der homogene Koordinatenvektor eines Kurvenstücks mit Hilfe der Hermiteschen Polynome 3. Grades $H_1(u)$, $H_2(u)$, $H_3(u)$ und $H_4(u)$ aus (2.2-5) nach der Formel

$$\bar{q}(u) = \begin{bmatrix} \bar{q}(0) & \bar{q}(1) & \dot{\bar{q}}(0) & \dot{\bar{q}}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} \quad (2.3-4)$$

berechnet werden. Darin bezeichnen $\bar{q}(0)$ und $\bar{q}(1)$ die homogenen Koordinatenvektoren der Endpunkte des Kurvenstücks und $\dot{\bar{q}}(0)$ und $\dot{\bar{q}}(1)$ die homogenen Tangentenvektoren, d.h. die Ableitungen von \bar{q} nach u , jeweils an den Endpunkten eines Kurvenstücks:

$$\begin{aligned} \bar{q}(0) &= [x(0) \ y(0) \ z(0) \ h(0)]^T \\ \bar{q}(1) &= [x(1) \ y(1) \ z(1) \ h(1)]^T \\ \dot{\bar{q}}(0) &= [\dot{x}(0) \ \dot{y}(0) \ \dot{z}(0) \ \dot{h}(0)]^T \\ \dot{\bar{q}}(1) &= [\dot{x}(1) \ \dot{y}(1) \ \dot{z}(1) \ \dot{h}(1)]^T \end{aligned} \quad (2.3-5)$$

Sie sind aus geometrischen Parametern an den Enden des Kurvenstücks zu bestimmen. Der Einfachheit halber werden $h(0)$ und $h(1)$ in den Endpunkten mit dem Wert 1 festgesetzt. Dadurch wird die darstellbare Kurvenmenge zwar verkleinert, es bleiben jedoch noch genügend viele Parameter, um alle gewünschten Kurven auszudrücken. Damit gilt für die homogenen Koordinatenvektoren an den Abschnittsenden:

$$\bar{q}(0) = \begin{bmatrix} \bar{q}(0) \\ h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}(0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}(1) = \begin{bmatrix} \bar{q}(1) \\ h(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}(1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2.3-6)

Zur Bestimmung der homogenen Tangentenvektoren wird die Gleichung (2.3-3) nach u abgeleitet:

$$\dot{\bar{p}}(u) = \dot{\bar{Q}}(u) h(u) + \bar{Q}(u) \dot{h}(u) \quad (2.3-7)$$

An den Abschnittsenden mit $u=0$ und $u=1$ ergeben sich

$$\dot{\bar{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{p}}(0) \\ \dot{h}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{Q}}(0) h(0) + \bar{Q}(0) \dot{h}(0) \\ \dot{h}(0) \end{bmatrix}$$

und

$$\dot{\bar{q}}(1) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{p}}(1) \\ \dot{h}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{Q}}(1) h(1) + \bar{Q}(1) \dot{h}(1) \\ \dot{h}(1) \end{bmatrix}$$

(2.3-8)

Wird die Matrix in der Formel (2.3-4), die die homogenen Vektoren enthält, mit \underline{M} bezeichnet,

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \bar{q}(0) & \bar{q}(1) & \dot{\bar{q}}(0) & \dot{\bar{q}}(1) \end{bmatrix} , \quad (2.3-9)$$

so ergeben sich die zweiten Ableitungen der Kurve an den Endpunkten aus (2.3-4) und (2.2-5) zu

$$\ddot{\bar{q}}(0) = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{p}}(0) \\ \ddot{h}(0) \end{bmatrix} = \underline{M} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\bar{q}}(1) = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{p}}(1) \\ \ddot{h}(1) \end{bmatrix} = \underline{M} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2.3-10)

Diese Vektoren werden für die Berechnung von Krümmungsvektoren an den Enden gebraucht.

Die Formeln (2.3-4) lassen sich durch Einsetzen von (2.3-6) und (2.3-8) folgendermaßen zusammenfassen:

$$\bar{q}(u) = \begin{bmatrix} \bar{Q}(0) & \bar{Q}(1) & \dot{\bar{Q}}(0) + \bar{Q}(0) \dot{h}(0) & \dot{\bar{Q}}(1) + \bar{Q}(1) \dot{h}(1) \\ 1 & 1 & \dot{h}(0) & \dot{h}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} \quad (2.3-11)$$

Für die numerische Auswertung erscheint diese Formel zweckmäßig. Für die spätere Flächendarstellung ist es aber zweckmäßiger, die Kurven in kartesischen Koordinaten zu formulieren:

$$\bar{Q}(u) = \frac{1}{h(u)} \left[\bar{Q}(0) \bar{Q}(1) \dot{\bar{Q}}(0) + \bar{Q}(0) \dot{h}(0) \dot{\bar{Q}}(1) + \bar{Q}(1) \dot{h}(1) \right] \begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} \quad (2.3-12)$$

mit $h(u) = 1 + \dot{h}(0) H_3(u) + \dot{h}(1) H_4(u)$

Bei manchen Anwendungen z.B. zur Berechnung von Punkten auf einer Kurve zu einer gegebenen Koordinate muß der Parameter u bestimmt werden. Dafür ist die Definition der Kurve analog zu (2.2-3) besser geeignet:

$$\bar{q}(u) = \sum_{j=0}^3 \bar{a}_j u^j \quad (2.3-13)$$

mit

$$\bar{a}_j = [a_{xj} \ a_{yj} \ a_{zj} \ a_{hj}]^T$$

Wird die Koeffizientenmatrix der Hermiteschen Polynome in (2.2-5) mit \underline{K} bezeichnet:

$$\begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} = \underline{K} \underline{U} \quad (2.3-14)$$

mit

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3-15)$$

und

$$\underline{U} = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3]^T \quad (2.3-16)$$

ergeben sich alle Koeffizienten in (2.3-13) aus der Gleichung:

$$\begin{bmatrix} a_{x0} & a_{x1} & a_{x2} & a_{x3} \\ a_{y0} & a_{y1} & a_{y2} & a_{y3} \\ a_{z0} & a_{z1} & a_{z2} & a_{z3} \\ a_{h0} & a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} \end{bmatrix} = \underline{M} \underline{K} \quad (2.3-17)$$

2.4 Bedingungen für Kegelschnitte

$\bar{q}(u)$ stellt einen Kegelschnitt dar, wenn die Koeffizienten von u^3 in (2.3-11) verschwinden. Notwendige und hinreichende Bedingungen dazu sind:

$$\dot{h}(0) = -\dot{h}(1) \quad (2.4-1)$$

und

$$\dot{\bar{Q}}(0) + \dot{\bar{Q}}(1) = [2 + \dot{h}(0)] [\bar{Q}(1) - \bar{Q}(0)] \quad (2.4-2)$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung (2.4-2) läßt sich durch Bild 5 veranschaulichen:

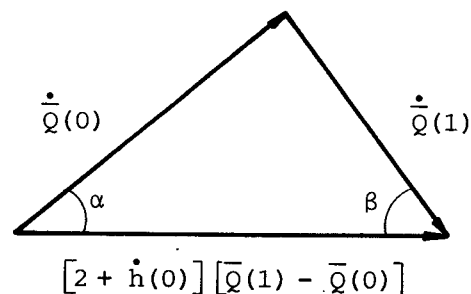


Bild 5 Geometrische Bedeutung der
Bedingung für Kegelschnitte

Damit läßt sich feststellen, daß die beiden Tangentenvektoren an den Endpunkten und der Sehnenvektor, der zwei Endpunkte verbindet, in einer Ebene liegen müssen und unter dem Verhältnis nach (2.4-2) ein geschlossenes Dreieck bilden. Die erste Folgerung entspricht der Aussage, daß ein Kegelschnitt eine ebene Kurve ist (die Windung der Kurve verschwindet). Nach (2.4-2) kann der Skalar $\dot{h}(0)$, somit auch $-\dot{h}(1)$, bestimmt werden:

$$\dot{h}(0) = -\dot{h}(1) = \frac{|\dot{\bar{Q}}(1) + \dot{\bar{Q}}(0)|}{|\bar{Q}(1) - \bar{Q}(0)|} - 2 \quad (2.4-3)$$

2.5 Festlegen eines Kurvenstücks durch Endbedingungen und zusätzliche freie Parameter

Werden die Tangentenvektoren $\dot{\bar{Q}}(0)$ und $\dot{\bar{Q}}(1)$ an den Endpunkten in ihre Beträge $|\dot{\bar{Q}}(0)|$ und $|\dot{\bar{Q}}(1)|$ und die Einheitsvektoren $\bar{t}(0)$ und $\bar{t}(1)$ zerlegt und das Verhältnis der Beträge zu der Sehnenlänge zwischen den Endpunkten mit $A(0)$ bzw. $A(1)$ ($A(0) > 0, A(1) > 0$) bezeichnet, folgen

$$\dot{\bar{Q}}(0) = |\dot{\bar{Q}}(0)| \bar{t}(0) = A(0) \cdot l \bar{t}(0)$$

und

$$\dot{\bar{Q}}(1) = |\dot{\bar{Q}}(1)| \bar{t}(1) = A(1) \cdot l \bar{t}(1) \quad (2.5-1)$$

Darin bedeutet $l = |\bar{Q}(1) - \bar{Q}(0)|$ die Sehnenlänge. Die Längen der Tangentenvektoren lassen sich also bei zwei festen Endpunkten durch Angabe der skalaren Faktoren $A(0)$ und $A(1)$ variieren. $\dot{h}(0)$ und $\dot{h}(1)$ in (2.4-3) sind dafür maßgebend, ob die Kurve eine kubische Splinekurve ($\dot{h}(0) = \dot{h}(1) = 0$) ist oder eine "echte" rationale Splinekurve. Um dies zu beeinflussen, werden zwei weitere freie Parameter $C(0)$ und $C(1)$ eingeführt. Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} \dot{h}(0) &= C(0) \left(\frac{|\dot{\bar{Q}}(0) + \dot{\bar{Q}}(1)|}{l} - 2 \right) = C(0) (|A(0) \bar{t}(0) + A(1) \bar{t}(1)| - 2) \\ \dot{h}(1) &= -C(1) \left(\frac{|\dot{\bar{Q}}(0) + \dot{\bar{Q}}(1)|}{l} - 2 \right) = -C(1) (|A(0) \bar{t}(0) + A(1) \bar{t}(1)| - 2) \end{aligned} \quad (2.5-2)$$

Damit wird ein Kurvenstück durch die Endpunkte, die Tangentendirectionen an den Endpunkten sowie vier zusätzliche freie Parameter $A(0), A(1), C(0)$ und $C(1)$ festgelegt (Bild 6).

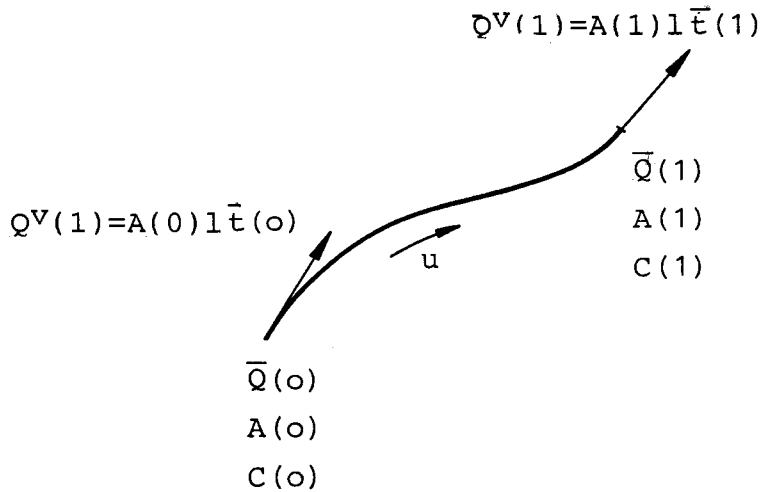


Bild 6 Daten für ein rationales kubisches Kurvenstück

Bei unveränderten Tangentenrichtungen an den Endpunkten kann der Verlauf des Kurvenstücks durch Angabe der freien Parameter beeinflusst werden. Diese Parameter haben 1 als Standardwert.

Zur Berechnung von $\bar{q}(u)$ ist die Matrix \underline{M} in (2.3-9) aus (2.3-8), (2.5-1) und (2.5-2) zu berechnen.

Aus dem Vergleich von (2.4-3) und (2.5-2) ergibt sich als eine notwendige Bedingung für Kegelschnitte:

$$C(0) = C(1) = 1 \quad (2.5-3)$$

Werden (2.5-1), (2.5-2) und (2.5-3) in (2.4-2) eingesetzt, folgt eine weitere notwendige Bedingung für Kegelschnitte:

$$A(0) \bar{t}(0) + A(1) \bar{t}(1) = |A(0) \bar{t}(0) + A(1) z(1)| \bar{s} \quad (2.5-4)$$

mit

$$\bar{s} = \frac{\bar{Q}(1) - \bar{Q}(0)}{1} \quad (2.5.-5)$$

Sind der Winkel α zwischen $\bar{t}(0)$ und \bar{s} und der Winkel β zwischen $\bar{t}(1)$ und \bar{s} nach Bild 5 gegeben, folgt das Verhältnis von $A(0)$ zu $A(1)$ für Kegelschnitte aus (2.5-4):

$$\frac{A(0)}{A(1)} = \frac{|\sin \alpha|}{|\sin \beta|} = \frac{|\bar{s} \times \bar{t}(1)|}{|\bar{s} \times \bar{t}(0)|} \quad (2.5-6)$$

x bedeutet Vektorprodukt. Die Wirkung der freien Parameter $A(0)$, $A(1)$, $C(0)$ und $C(1)$ zeigen Bild 7a, 7b und 7c.

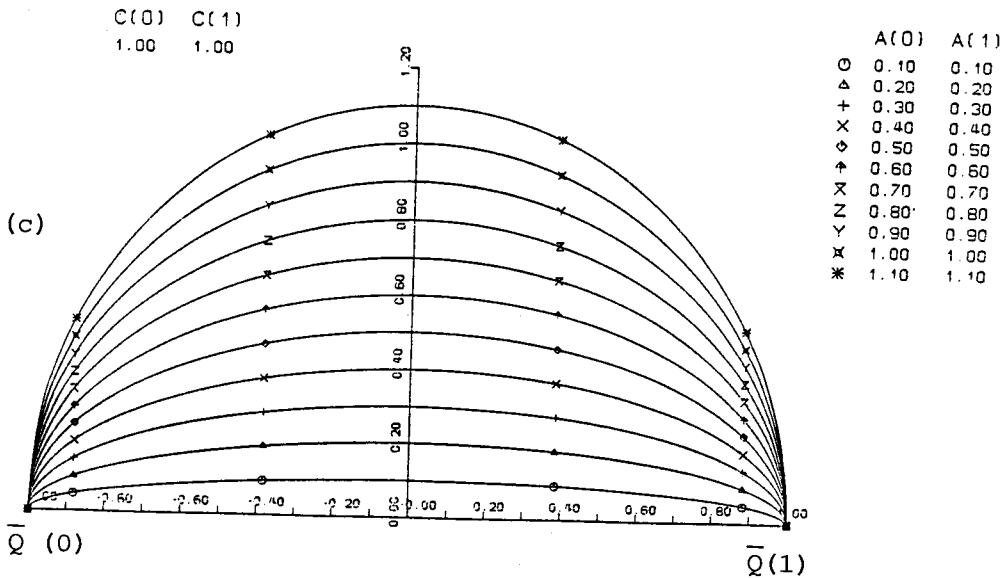
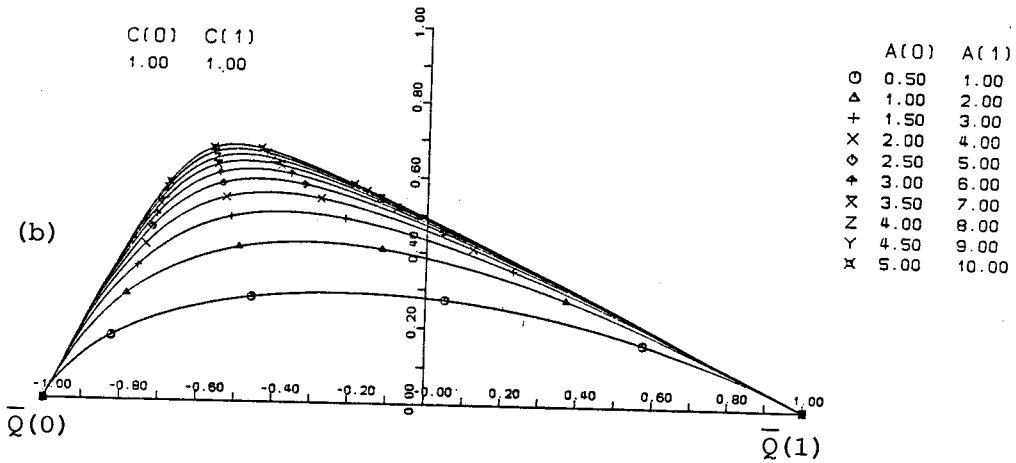
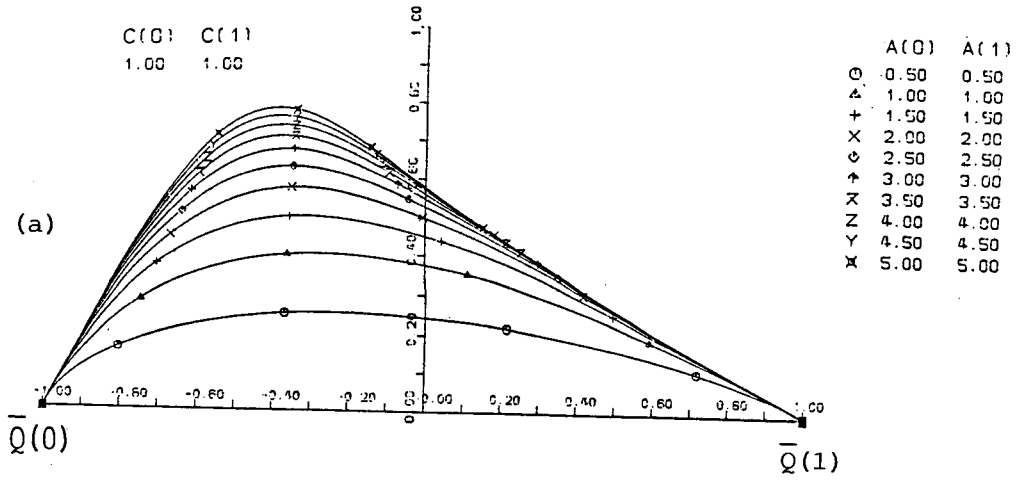


Bild 7 Wirkung der freien Parameter A(0) und A(1) bei C(0)=c(1)=1 auf den Kurvenverlauf

- (a) $A(0)/A(1) = \left| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right| = 0.5$
 (b) $A(0)/A(1) = \left| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right| = 0.5$
 (c) $A(0)/A(1) = \left| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right| = 1.0, |\alpha| = |\beta| = 90^\circ$

2.6 Krümmungsvektor

Der Krümmungsvektor $\bar{k}(u)$ einer in Parameterform beschriebenen Kurve ist definiert (z.B. nach [56]) durch

$$\bar{k}(u) = k(u) \bar{n}(u) = \frac{1}{(\dot{\bar{Q}}(u) \cdot \dot{\bar{Q}}(u))^2} \left[(\dot{\bar{Q}}(u) \cdot \dot{\bar{Q}}(u)) \ddot{\bar{Q}}(u) - (\ddot{\bar{Q}}(u) \cdot \dot{\bar{Q}}(u)) \dot{\bar{Q}}(u) \right] \quad (2.6-1)$$

Der Punkt zwischen zwei Vektoren bedeutet Skalarprodukt. In (2.6-1) bedeuten k die Krümmung und \bar{n} der Hauptnormalenvektor der Kurve. Die Krümmung ergibt sich daraus als Betrag von \bar{k} .

Die Ableitungen von $\bar{Q}(u)$ nach u lassen sich durch die Differentiation der Gleichung (2.3-3) berechnen:

1) die erste Ableitung (Tangentenvektor)

$$\dot{\bar{Q}}(u) = \frac{d\bar{Q}(u)}{du} = \frac{1}{h(u)} \left[\bar{p}(u) - \dot{\bar{Q}}(u) \dot{h}(u) \right] \quad (2.6-2)$$

2) die zweite Ableitung

$$\ddot{\bar{Q}}(u) = \frac{d^2\bar{Q}(u)}{du^2} = \frac{1}{h(u)} \left[\ddot{\bar{p}}(u) - 2\dot{h}(u) \dot{\bar{Q}}(u) - \ddot{h}(u) \bar{Q}(u) \right] \quad (2.6-3)$$

An den Endpunkten mit $u=0$ und $u=1$ erhält man für die Ableitungen:

$$\dot{\bar{Q}}(0) = \dot{\bar{p}}(0) - \dot{h}(0) \bar{Q}(0) = A(0) \mathbf{1} \bar{t}(0) \quad (2.6-4)$$

$$\dot{\bar{Q}}(1) = \dot{\bar{p}}(1) - \dot{h}(1) \bar{Q}(1) = A(1) \mathbf{1} \bar{t}(1) \quad (2.6-5)$$

$$\ddot{\bar{Q}}(0) = 2 \left[(3 - \dot{h}(1)) (\bar{Q}(1) - \bar{Q}(0)) - (2 + \dot{h}(0)) \dot{\bar{Q}}(0) - \dot{\bar{Q}}(1) \right] \quad (2.6-6)$$

$$\ddot{\bar{Q}}(1) = 2 \left[-(3 + \dot{h}(0)) (\bar{Q}(1) - \bar{Q}(0)) + (2 - \dot{h}(1)) \dot{\bar{Q}}(1) + \dot{\bar{Q}}(0) \right] \quad (2.6-7)$$

Durch Einsetzen von (2.6-4) bis (2.6-7) in (2.6-1) folgen die Krümmungsvektoren an den Endpunkten.

$$\bar{K}(0) = \frac{2}{A(0)^2} \{ (3 - \dot{h}(1)) [\bar{s} - (\bar{s} \cdot \bar{t}(0)) \bar{t}(0)] + A(1) [(\bar{t}(0) \cdot \bar{t}(1)) \bar{t}(0) - \bar{t}(1)] \}$$

(2.6-8)

$$\bar{K}(1) = \frac{2}{A(1)^2} \{ (3 + \dot{h}(0)) [-\bar{s} + (\bar{s} \cdot \bar{t}(1)) \bar{t}(1)] + A(0) [-(\bar{t}(0) \cdot \bar{t}(1)) \bar{t}(1) + \bar{t}(0)] \}$$

(2.6-9)

Dabei sind $\dot{h}(0)$ und $\dot{h}(1)$ nach (2.5-2) und \bar{s} nach (2.5-5) zu berechnen.

2.7 Einfluß vorgegebener Krümmung auf den Kurvenverlauf

Nach (2.6-8) bzw. (2.6-9) besteht ein linearer Zusammenhang zwischen $\bar{\kappa}(0)$ und $\dot{h}(1)$ und damit auch $c(1)$, und ein entsprechender Zusammenhang zwischen $\bar{\kappa}(1)$, $\dot{h}(0)$ und $c(0)$. Schreibt man bei gegebenen Tangentenrichtungen $\bar{t}(0)$ und $\bar{t}(1)$ auch die Krümmung $k(0)$ bzw. $k(1)$ an einem oder an beiden Enden vor, ist es daher einfach, $c(1)$ bzw. $c(0)$ entsprechend zu bestimmen. Fallen $\bar{t}(0)$ und \bar{s} zusammen (d.h. $\bar{s} = t(0)$), so ergibt sich

$$\bar{s} - (\bar{s} \cdot \bar{t}(0)) \bar{t}(0) = 0 \quad (2.7-1)$$

Damit hat $\dot{h}(1)$ dann keinen Einfluß auf $\bar{\kappa}(0)$. Aus diesem Grund kann $\bar{\kappa}(0)$ nur für den Fall vorgeschrieben werden, daß $\bar{t}(0) \neq \bar{s}$ gilt. Eine analoge Einschränkung gilt für $\bar{\kappa}(1)$, nämlich $\bar{t}(1) \neq \bar{s}$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so lassen sich auch die Hauptnormalenvektoren an den Enden $\bar{n}(0)$ und $\bar{n}(1)$ mit der Annahme, daß $\bar{n}(0)$, $\bar{t}(0)$ und \bar{s} bzw. $\bar{n}(1)$, $\bar{t}(1)$ und \bar{s} auf einer Ebene liegen, bestimmen (Bild 8):

$$\bar{n}(0) = \frac{\bar{t}(0) \times (\bar{s} \times \bar{t}(0))}{|\bar{t}(0) \times (\bar{s} \times \bar{t}(0))|} \quad (2.7-2)$$

$$\bar{n}(1) = \frac{\bar{t}(1) \times (\bar{t}(1) \times \bar{s})}{|\bar{t}(1) \times (\bar{t}(1) \times \bar{s})|} \quad (2.7-3)$$

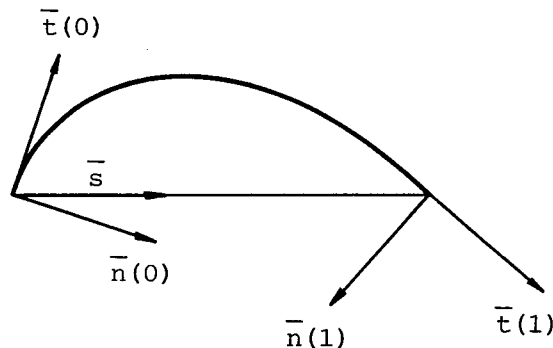


Bild 8 Die Hauptnormalenvektoren an den Enden eines Kurvenstücks

Die Richtung von $\bar{n}(0)$ bzw. $\bar{n}(1)$ wird also so festgelegt, daß $\bar{t}(0)$, $\bar{s} \times \bar{t}(0)$ und $\bar{n}(0)$ bzw. $\bar{t}(1)$, $\bar{t}(1) \times \bar{s}$ und $\bar{n}(1)$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Damit sind die Krümmungsvektoren $\bar{K}(0)$ und $\bar{K}(1)$ durch die Angaben ihrer Beträge (Krümmungen) festgelegt:

$$\bar{K}(0) = k(0) \bar{n}(0) \quad (2.7-4)$$

$$\bar{K}(1) = k(1) \bar{n}(1) \quad (2.7-5)$$

Die Bilder 9a, 9b und 9c zeigen die Kurven mit gegebenen Tangentenrichtungen an den beiden Endpunkten, die sich bei verschiedenen vorgegebenen Parametern $A(0)$, $A(1)$ bei verschiedenen Krümmungen ergeben.

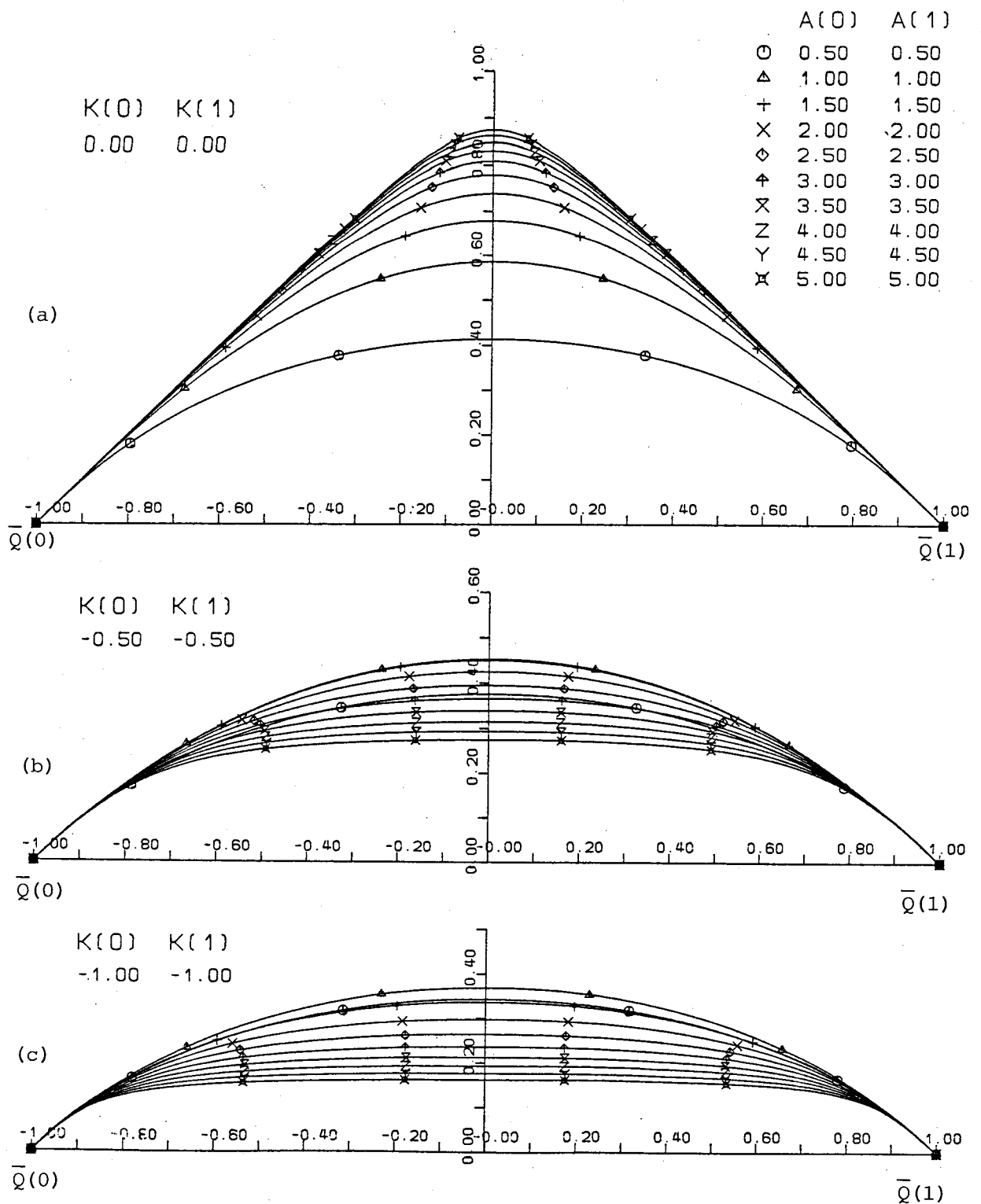


Bild 9 Kurven mit vorgegebenen Krümmungen an den Endpunkten

2.8 Grafische Transformation rationaler kubischer Splines

Um geometrische Objekte (Punkte, Kurven und Flächen) bildlich darzustellen, werden Operationen wie Translation, Rotation, Skalierung, Scherung, Parallelprojektion und Zentralprojektion des Objektes benötigt. Sie werden hier als grafische Transformationen bezeichnet. Ist eine Kurve nach (2.3-11) in homogenen Koordinaten definiert, so lassen sich die grafische Transformationen durch Linksmultiplikation der Kurve mit einer Matrix \underline{T} vornehmen:

$$\bar{q}'(u) = \underline{T} \bar{q}(u) \quad (2.8-1)$$

Hierin stellt $\bar{q}'(u) = [x'(u) \ y'(u) \ z'(u) \ h'(u)]$ die transformierte Kurve dar. Die 4×4 -Matrix \underline{T} definiert die Art der grafischen Transformation (siehe z.B. [34], [47]). Aus (2.3-11) und (2.8-1) ist ersichtlich, daß $\bar{q}'(u)$ ebenso wie $\bar{q}(u)$ ein Vektor-Polynom 3. Grades von u ist.

2.9 Eigenschaften der rationalen kubischen Splines

Im Vergleich zu (normalen) kubischen Splines haben rationale kubische Splines folgende Eigenschaften:

- Kubische Splines sind ein Sonderfall der rationalen kubischen Splines.
- Kegelschnitte können exakt dargestellt werden.
- Durch die Bedingungen für Kegelschnitte aus dem Abschnitt 2.4 kann die Kurvenkrümmung auch bei starken Winkeländerungen zwischen zwei Stützpunkten gleichmäßig verlaufen.
- Auch bei gegebenen Tangentenrichtungen in den Stützpunkten kann die Kurvenkrümmung dort stetig gemacht werden.
- Es stehen außer Stützpunkten und gegebenenfalls Kurventangenten weitere freie Parameter zur Beeinflussung des Kurvenverlaufs zur Verfügung.
- Projektive Transformationen der Kurven (perspektivische Darstellungen) ergeben Splines desselben Typs, so daß die Projektionen exakt beschrieben und mit denselben Methoden wie die ursprünglichen Kurven bearbeitet werden können.

2.10 Darstellung einer Kurve durch eine Punktfolge

Wird eine Kurve durch n ($n \geq 2$) Stützpunkte \bar{Q}_i , $i=1$ bis n dargestellt, sind somit $n-1$ Kurvenstücke festzulegen, die jeweils durch zwei Stützpunkte \bar{Q}_i und \bar{Q}_{i+1} begrenzt sind. Die Formel für das i -te Kurvenstück ist dann

$$\bar{q}_i(u) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_i & \bar{Q}_{i+1} & \dot{\bar{Q}}_{i,0} + h_{i,0} \bar{Q}_i & \dot{\bar{Q}}_{i,1} + h_{i,1} \bar{Q}_{i+1} \\ 1 & 1 & \dot{h}_{i,0} & \dot{h}_{i,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} \quad i=1 \text{ bis } n-1 \quad (2.10-1)$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Q}}_{i,0} &= A_{i,0} l_i \bar{t}_{i,0} \\ \dot{\bar{Q}}_{i,1} &= A_{i,1} l_i \bar{t}_{i,1} \\ \dot{h}_{i,0} &= C_{i,0} (|A_{i,0} \bar{t}_{i,0} + A_{i,1} \bar{t}_{i,1}|^{-2}) \\ \dot{h}_{i,1} &= -C_{i,1} (|A_{i,0} \bar{t}_{i,0} + A_{i,1} \bar{t}_{i,1}|^{-2}) \\ l_i &= \bar{Q}_{i+1} - \bar{Q}_i \end{aligned}$$

Es wird hier vorausgesetzt, daß die freien Parameter $A_{i,0}$, $A_{i,1}$, $C_{i,0}$ und $C_{i,1}$ für alle Kurvenstücke, also $i=1$ bis $n-1$, vorgegeben sind. In der Regel wird den freien Parametern der Standardwert 1 zugewiesen. Für einen glatten Verlauf der Kurve ist zu fordern, daß zwei benachbarte Kurvenstücke an der Verbindungsstelle mit stetigen Koordinaten, stetigem Tangentenvektor und stetigem Krümmungsvektor aneinander anschließen. Gleichung (2.10-1) liefert offensichtlich stetige Koordinaten. Um stetige Tangenten- und Krümmungsvektoren in einem Punkt \bar{Q}_i zu erreichen, verwendet Adams [1] folgende zwei Bedingungen:

$$\dot{\bar{Q}}_{i-1,1} = \dot{\bar{Q}}_{i,0} \quad i=2 \text{ bis } n-1 \quad (2.10-2)$$

und

$$\ddot{\bar{Q}}_{i-1,1} = \ddot{\bar{Q}}_{i,0} \quad i=2 \text{ bis } n-1 \quad (2.10-3)$$

Diese Bedingungen ergeben nicht immer einen gleichmäßig gekrümmten Kurvenverlauf im Sinne der minimalen Krümmung über die ganze Bogenlänge. Die Tendenz wird besonders ausgeprägt, wenn die Stützpunkte sehr ungleichmäßig über die Kurvenlänge verteilt sind. Das läßt sich so erklären: Ersetzt man die Gleichung (2.10-2) durch

$$A_{i-1,1} l_{i-1,1} \bar{t}_{i-1,1} = A_{i,0} l_i \bar{t}_{i,0} \quad , \quad (2.10-4)$$

so stellt man fest, daß $A_{i-1,1}$ und $A_{i,0}$ bei sehr verschiedenen Sehnenlängen l_{i-1} und l_i auch sehr verschieden voneinander und damit sehr verschieden von 1 sein müssen. Wie z.B. Bild 8 zeigt, führt dies entweder beim kürzeren Kurvenstück im Mittelbereich zu einem stark gekrümmten Verlauf, oder beim längeren Kurvenstück im Mittelbereich zu einem zu flachen Verlauf. Deswegen fordert Bär [2] statt (2.10-2) nur

$$\bar{t}_{i-1,1} = \bar{t}_{i,0} = \bar{t}_i \quad i=2 \text{ bis } n-1 \quad (2.10-5)$$

und statt (2.10-3):

$$\bar{K}_{i-1,1} = \bar{K}_{i,0} \quad i=2 \text{ bis } n-1 \quad (2.10-6)$$

Diese Bedingungen werden auch hier angewendet, wenn der Benutzer nichts Abweichendes vorschreibt. Setzt man (2.6-8) und (2.6-9) für das i -te Kurvenstück in (2.10-6) ein, erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \{A_{i-1,0} A_{i,0} l_i\} \bar{t}_{i-1} + \{A_{i,0} l_i [(3 + \dot{h}_{i-1,0}) (\bar{t}_i \cdot \bar{s}_{i-1}) - A_{i-1,0} (\bar{t}_{i-1} \cdot \bar{t}_i)] + \\ & A_{i-1,1} l_{i-1} [(3 - \dot{h}_{i,1}) (\bar{t}_i \cdot \bar{s}_i) - A_{i,1} (\bar{t}_i \cdot \bar{t}_{i+1})]\} \bar{t}_i + \{A_{i-1,1} A_{i,1} l_{i-1}\} \bar{t}_{i+1} \\ & = \{A_{i,0} l_i (3 + \dot{h}_{i-1,0}) \bar{s}_{i-1} + A_{i-1,1} l_{i-1} (3 - \dot{h}_{i,1}) \bar{s}_i\} \quad i=2 \text{ bis } n-1 \end{aligned} \quad (2.10-7)$$

Die Beziehungen (2.10-7) bilden ein Gleichungssystem von $n-2$ Gleichungen. Wenn die Tangentenvektoren nicht gegeben sind, kann das

System zur Bestimmung von $n-2$ Tangenteneinheitsvektoren \bar{t}_i benutzt werden. Um alle \bar{t}_i , $i=1$ bis n , zu bestimmen, sind noch zwei Bedingungen an den Enden der Kurve heranzuziehen. Für jedes Ende werden folgende drei Möglichkeiten zur Auswahl gestellt:

1. Am ersten ($i=1$) bzw. letzten ($i=n$) Stützpunkt der Kurve ist die Tangentenrichtung gegeben:

$$\bar{t}_1 = \bar{t}_a / |\bar{t}_a| \quad \text{bzw.} \quad \bar{t}_n = \bar{t}_e / |\bar{t}_e| \quad (2.10-8)$$

2. Am ersten ($i=1$) bzw. letzten ($i=n$) Stützpunkt der Kurve verschwindet der Krümmungsvektor, d.h. die Kurve verhält sich dort wie eine Gerade:

$$\bar{K}_{i,0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{K}_{n-1,1} = 0 \quad (2.10-9)$$

Daraus ergibt sich

$$\{(3 - \dot{h}_{1,1}) (\bar{s}_1 \cdot \bar{t}_1) - A_{1,1} (\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2)\} \bar{t}_1 + \{A_{1,1}\} \bar{t}_2 = \{(3 - \dot{h}_{1,1}) \bar{s}_1\}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \{A_{n-1,0}\} \bar{t}_{n-1} + \{(3 + \dot{h}_{n-1,0}) (\bar{s}_{n-1} \cdot \bar{t}_n) - A_{n-1,0} (\bar{t}_{n-1} \cdot \bar{t}_n)\} \bar{t}_n \\ = \{(3 + \dot{h}_{n-1,0}) \bar{s}_{n-1}\} \end{aligned} \quad (2.10-10)$$

3. Das erste bzw. letzte Kurvenstück soll die Kegelschnittbedingung (2.4-2) erfüllen, also insbesondere keinen Wendpunkt haben und für $A_{1,0} = A_{1,1} = C_{1,0} = C_{1,1} = 1$ bzw. $A_{n-1,0} = A_{n-1,1} = C_{n-1,0} = C_{n-1,1} = 1$ ein Kreisbogen sein:

$$\{A_{1,0}\} \bar{t}_1 + \{A_{1,1}\} \bar{t}_2 = \{(2 - \dot{h}_{1,1}) \bar{s}_1\}$$

bzw.

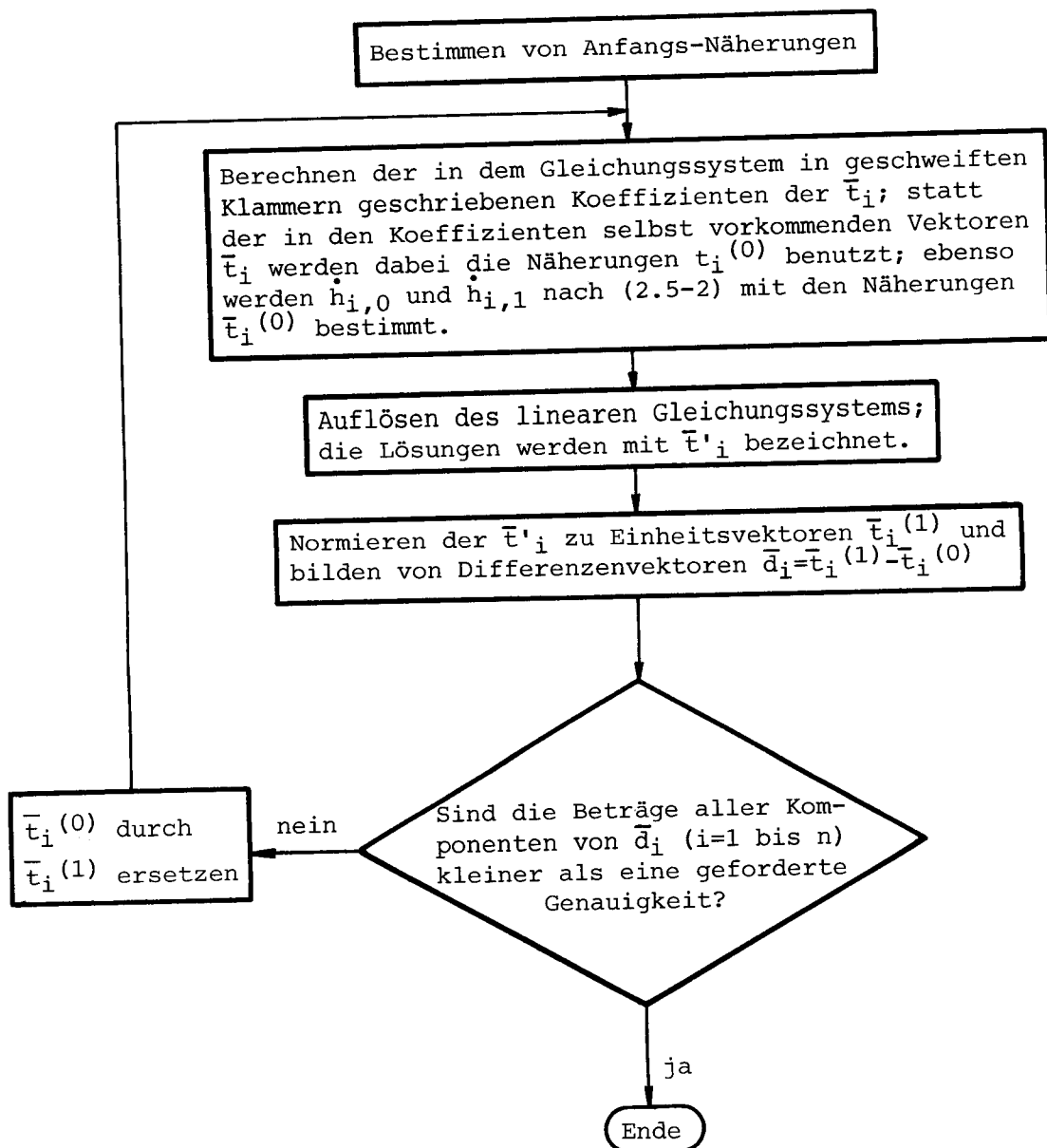
$$\{A_{n-1,0}\} \bar{t}_{n-1} + \{A_{n-1,1}\} \bar{t}_2 = \{(2 + \dot{h}_{n-1,0}) \bar{s}_{n-1}\} \quad (2.10-11)$$

Aus den Gleichungen (2.10-7) und (2.10-8) bzw. (2.10-10) bzw. (2.10-11) können die Tangenteneinheitsvektoren \bar{t}_i an allen Stützpunkten bestimmt werden. Das Gleichungssystem ist nichtlinear. Dabei sind die zusätzlichen Bedingungen

$$|\bar{t}_i| = 1 \quad i=1 \text{ bis } n \quad (2.10-12)$$

zu berücksichtigen.

Die Auflösung des Gleichungssystems nach den Unbekannten \bar{t}_i mit $i=1$ bis n wird iterativ auf folgende Weise durchgeführt:



Die Anfangswerte von \bar{t}_i lassen sich gewinnen, indem zunächst angenommen wird, daß ein Kurvenstück zwischen zwei benachbarten Stützpunkten nur "schwach" von der Geraden, die die beiden Stützpunkte verbindet, abweicht. Dementsprechend können

$$\begin{aligned} \bar{t}_i \cdot \bar{s}_i &= 1 \\ \bar{t}_i \cdot \bar{s}_{i-1} &= 1 \\ \bar{t}_{i-1} \cdot \bar{t}_i &= 1 \\ \bar{t}_{i+1} \cdot \bar{t}_i &= 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \\ i=2 \text{ bis } n-1 \\ \\ \end{array} \quad (2.10-13)$$

angesetzt werden. Beschränkt man weiter die freien Parameter $A_{i,0}$, $A_{i,1}$, $C_{i,0}$ und $C_{i,1}$, $i=1$ bis $n-1$, auf den Standardwert 1, können $\dot{h}_{i,0}$ und $\dot{h}_{i,1}$ in (2.10-1) näherungsweise wie folgt angenommen werden:

$$\dot{h}_{i,0} = \dot{h}_{i,1} \approx 0 \quad i=0 \text{ bis } n-1 \quad (2.10-14)$$

Damit lauten die linearisierten Bedingungen für die Bestimmung einer Anfangslösung von (2.10-7):

$$l_i \bar{t}_{i-1}^{(0)} + 2(l_i + l_{i-1}) \bar{t}_i^{(0)} + l_{i-1} \bar{t}_{i+1}^{(0)} = 3(l_i \bar{s}_{i-1} + l_{i-1} \bar{s}_i) \quad (2.10-15)$$

Zusätzlich sind gegebenenfalls die linearisierten Endbedingungen entsprechend (2.10-10):

$$2\bar{t}_1^{(0)} + \bar{t}_2^{(0)} = 3\bar{s}_1 \quad \text{bzw.} \quad \bar{t}_{n-1}^{(0)} + 2\bar{t}_n^{(0)} = 3\bar{s}_{n-1} \quad (2.10-16)$$

oder (2.10-11):

$$\bar{t}_1^{(0)} + \bar{t}_2^{(0)} = 2\bar{s}_1 \quad \text{bzw.} \quad \bar{t}_{n-1}^{(0)} + \bar{t}_n^{(0)} = 2\bar{s}_{n-1} \quad (2.10-17)$$

zu berücksichtigen.

Bei Schiffslinien kommen auch Punkte mit unstetiger Krümmung vor, z.B. am Übergang vom Flachboden oder von der Außenhaut in die

Kimmlung oder an den Abrundungen der Wasserlinien am Vor- bzw. Hintersteven. Söding [49] hat diese Eigenschaften der Kurven durch eine elastische Latte simuliert, deren Trägheitsmoment in dem Punkt mit unstetiger Krümmung gleich 0 ist und von dort linear zum Nachbarpunkt im weniger gekrümmten Kurventeil ansteigt. Dabei verläuft die Krümmung zwischen den beiden Punkten etwa konstant. Analog dazu ist die Kegelschnittbedingung für Endpunkte nach (2.10-11), somit die linearisierte Bedingung (2.10-17), für Zwischenpunkte geeignet. Dabei ist noch anzugeben, ob das vorhergehende oder das nachfolgende Kurvenstück im Bezug auf den Stützpunkt \bar{Q}_i die zur Kegelschnittbedingung (2.10-11) analoge Bedingung erfüllen soll. Im ersten Fall kann (2.10-7) ersetzt werden durch

$$A_{i-1,0} \bar{t}_{i-1} + A_{i-1,1} \bar{t}_i = (2 + \dot{h}_{i-1,0}) \bar{s}_{i-1} \quad (2.10-18)$$

bzw. (2.10-15) durch

$$\bar{t}_{i-1}^{(0)} + \bar{t}_i^{(0)} = 2\bar{s}_{i-1} \quad (2.10-19)$$

Im zweiten Fall kann (2.10-7) ersetzt werden durch

$$A_{i,0} \bar{t}_i + A_{i,1} \bar{t}_{i+1} = (2 + \dot{h}_{i,1}) \bar{s}_i \quad (2.10-20)$$

bzw. (2.10-15) durch

$$\bar{t}_i^{(0)} + \bar{t}_{i+1}^{(0)} = 2\bar{s}_i \quad (2.10-21)$$

Sind bestimmte Tangentenrichtungen \bar{e}_i in den Zwischenpunkten vorgeschrieben, ersetzt man (2.10-7) durch

$$\bar{t}_i = \bar{e}_i / |\bar{e}_i| \quad (2.10-22)$$

Damit lassen sich die Tangenteneinheitsvektoren \bar{t}_i in allen Stützpunkten bestimmen, wobei die freien Parameter alle mit dem Standardwert 1 vorgegeben sind.

An einem Stützpunkt, an dem eine Tangentenrichtung vorgeschrieben ist, kann das Kurvenstück vor oder nach dem Punkt wie im Abschnitt 2.4 beschrieben zu einem Kegelschnitt gemacht werden. Das bedeutet, daß die vorgegebenen Standardparameter A in den beiden Enden des Kurvenstücks anhand der Formel (2.5-6) mit den bereits bestimmten Winkeln nachträglich geändert werden. Dies kann man dort anwenden, wo ein Kurvenstück eine bestimmte Endtangente und keinen Wendpunkt haben soll. Beispiele hierfür sind in den Schiffslinien Kurvenstücke der Spanten unter dem Seiteneinlauf.

Verlangt man dagegen, daß die Krümmung in einem Zwischenpunkt mit einer vorgegebenen Tangentenrichtung auch stetig sein soll, so ist ein C-Parameter eines der zwei an den Punkt anschließenden Kurvenstücke entsprechend der im Abschnitt 2.7 aufgestellten Regel aus der dortigen Krümmung des anderen Kurvenstücks zu bestimmen. Ist eine Krümmung in einem Stützpunkt vorgegeben, muß je ein C-Parameter der beiden Kurvenstücke bzw. einer des ersten bzw. letzten Kurvenstücks neu berechnet werden. Diese Alternative wird bei der Aufbereitung von Netzlinien für die Schiffsoberfläche nicht eingesetzt, da die dadurch vom Standardwert abweichenden C-Parameter zusätzliche Interpolationen erfordern und die eventuell sehr unregelmäßigen Veränderungen des Parameters bei der Flächeninterpolation Schwierigkeiten ergeben können.

Bilder 22a, 23a und 24a zeigen mit diesem Verfahren berechnete, als Netzlinien für die Flächendarstellung dienende Kurven.

2.11 Interpolation von Kurven

Sind die Stützpunkte einer Kurve und die freien Parameter $A_{i,0}$, $A_{i,1}$, $C_{i,0}$ und $C_{i,1}$ gegeben und die Tangentenvektoren \bar{t}_i berechnet, soweit sie nicht ebenfalls gegeben waren, kann die Kurve interpoliert werden. Das soll heißen, zu einer gegebenen Koordinate können die zwei anderen (bei Raumkurven; eine andere bei ebenen Kurven) berechnet werden. Wird z.B. die Koordinate x_i zur Interpolation einer nach (2.3-13) definierten Kurve gegeben, so ist der zugehörige Parameter u aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$x_i = \frac{\sum_{j=0}^3 a_{xj} u^j}{\sum_{j=0}^3 a_{hj} u^j} \quad (2.11-1)$$

Schreibt man dies um in

$$\sum_{j=0}^3 (a_{xj} - x_i a_{hj}) u^j = 0 \quad , \quad (2.11-2)$$

so hat man eine kubische Gleichung für u , deren interessierende Lösung(en) im Intervall $0 \leq u \leq 1$ liegen. Es sind drei reelle Lösungen möglich. Mit Hilfe der Cardanischen Formel lassen sich die Wurzeln berechnen und diejenige(n) auswählen, die in dem genannten Intervall liegen. Mit dem so ermittelten Parameter u können die anderen Koordinaten nach (2.3-12) berechnet werden.

2.12 Bogenlänge

Die Bogenlänge wird später bei der Flächenbeschreibung gebraucht, um z.B. die Flächennormale über der Bogenlänge zu interpolieren. Dafür soll eine Formel für die Bogenlänge L einer Kurve $\bar{Q}(u)$ zwischen u_1 und $(u_2 > u_1)$ aufgestellt werden:

$$L = \int_{u=u_1}^{u=u_2} |\dot{\bar{Q}}(u)| du \quad (2.12-1)$$

$|\dot{\bar{Q}}(u)|$ ist der Betrag des Tangentenvektors, der nach (2.6-2) zu berechnen ist.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Q}}(u) &= \sqrt{\dot{X}(u)^2 + \dot{Y}(u)^2 + \dot{Z}(u)^2} \\ &= \frac{1}{|h(u)|} \sqrt{|\dot{p}(u)|^2 + |\bar{Q}(u) \dot{h}(u)|^2 - 2\dot{h}(u) (\dot{p}(u) \cdot \bar{Q}(u))} \end{aligned} \quad (2.12-2)$$

Die Formel zeigt, daß $|\dot{\bar{Q}}(u)|$ eine gebrochene Funktion von u ist. Eine geschlossene Formel für das Integral läßt sich daher schwer herleiten. Deshalb wird das Integral (2.12-1) numerisch nach der Simpsonregel berechnet. Dazu wird ein Unterprogramm aus [55] benutzt, bei dem sich die Stützstellenanzahl und -anordnung aus dem Verlauf von $|\dot{\bar{Q}}(u)|$ und der geforderten Genauigkeit ergeben.

2.13 Schnittpunkte einer Geraden mit einer ebenen Kurve
sowie einer Ebene mit einer Raumkurve

Die allgemeine Gleichung einer Geraden in der XY-Ebene in homogenen Koordinaten lautet

$$[A \ B \ C] \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} = 0 \quad (2.13-1)$$

Die Schnittpunkte der Geraden mit einer ebenen Kurve nach (2.3-13) erfüllen die Gleichung

$$\sum_{j=0}^3 (A a_{xj} + B a_{yj} + C a_{hj}) u^j = 0 \quad (2.13-2)$$

Analog zu (2.13-1) lautet die Gleichung einer Ebene:

$$[A \ B \ C \ D] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{bmatrix} = 0 \quad (2.13-3)$$

Die Schnittpunkte der Ebene mit einer Raumkurve nach (2.3-11) erfüllen die Gleichung

$$\sum_{j=0}^3 (A a_{xj} + B a_{yj} + C a_{zj} + D a_{hj}) u^j = 0 \quad (2.13-4)$$

Die Gleichungen (2.13-2) und (2.13-4) werden wie vorher mit der Cardani-Methode nach u aufgelöst.

2.14 Schnittpunkte zweier ebener Kurven

Sind zwei ebene Kurven in homogenen Koordinaten nach (2.3-3) durch $\bar{q}_1(u_1)$ und $\bar{q}_2(u_2)$ definiert, lassen sich die Schnittpunkte in kartesischen Koordinaten der beiden Kurven aus der Gleichung

$$\frac{\bar{p}_1(u_1)}{h_1(u_1)} = \frac{\bar{p}_2(u_2)}{h_2(u_2)} \quad (2.14-1)$$

bestimmen. Darin sind $\bar{p}_1(u_1)$ und $\bar{p}_2(u_2)$ Zwei-Komponent-Vektoren mit $\bar{p}_1(u_1) = [x_1(u_1) \ y_1(u_1)]^T$ und $\bar{p}_2(u_2) = [x_2(u_2) \ y_2(u_2)]^T$. Schreibt man (2.14-1) um und zerlegt sie in skalare Gleichungen, ergeben sich:

$$\begin{aligned} x_1(u_1) h_2(u_2) &= x_2(u_2) h_1(u_1) \\ y_1(u_1) h_2(u_2) &= y_2(u_2) h_1(u_1) \end{aligned} \quad (2.14-2)$$

Werden die Funktionen von u_1 und u_2 durch kubische Polynome nach (2.3-13) ersetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^3 a_{xj1} u_1^j \right) \left(\sum_{j=0}^3 a_{hj2} u_2^j \right) &= \left(\sum_{j=0}^3 a_{xj2} u_2^j \right) \left(\sum_{j=0}^3 a_{hj1} u_1^j \right) \\ \left(\sum_{j=0}^3 a_{yj1} u_1^j \right) \left(\sum_{j=0}^3 a_{hj2} u_2^j \right) &= \left(\sum_{j=0}^3 a_{yj2} u_2^j \right) \left(\sum_{j=0}^3 a_{hj1} u_1^j \right) \end{aligned} \quad (2.14-3)$$

Dies ist ein kubisches Gleichungssystem für u_1 und u_2 . Um das System nach u_1 und u_2 aufzulösen, wird nach folgenden Schritten vorgegangen:

1. Annähern der Kurve $\bar{q}_1(u_1)$ durch einen Polygonzug mit n Eckpunkten (x_i, y_i) , $i=1$ bis n . Die Anzahl der Eckpunkte n wird so bestimmt, daß die Abweichung des Polygonzuges zu der Kurve kleiner als eine vorgegebene Genauigkeit f ist (z.B. $f < 0.01 \cdot 1$) (Bild 10).

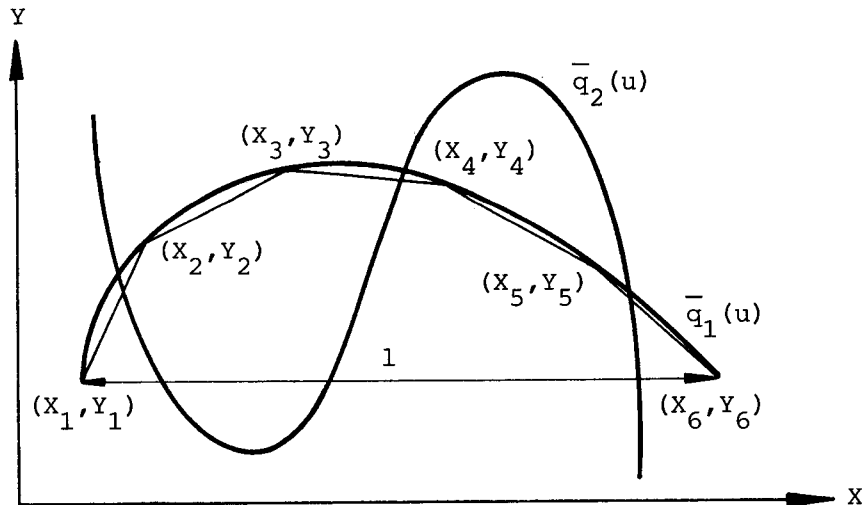


Bild 10 Schnittpunkte zweier Kurvenstücke

Die den Eckpunkten entsprechenden Parameter u_{1i} ergeben sich aus der Formel

$$u_{1i} = (i-1) du_1 \quad i=1 \text{ bis } n$$

mit

$$du_1 = 1/(n-1)$$

2. Bestimmen von Schnittpunkten der Kurve $\bar{q}_2(u_2)$ mit allen Seiten des Polygonzuges nach dem im letzten Abschnitt beschriebenen Verfahren. Ergeben sich dabei $m \geq 1$ Schnittpunkte mit der Seite zwischen den zwei Punkten (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) , werden die Näherungslösungen u_{2N} für u_2 aus (2.13-2) und anschließend die zugehörigen Koordinaten (x_N, y_N) für alle m Punkte berechnet. Die entsprechenden Näherungslösungen u_{1N} für u_1 berechnen sich nach folgender Formel:

$$u_{1N} = u_{1i} + \frac{\sqrt{(x_N - x_i)^2 + (y_N - y_i)^2}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

3. Auflösen des nichtlinearen Gleichungssystems (2.14-3) nach u_1 und u_2 mit allen im 2. Schritt bestimmten, als Anfangswerte dienenden Parametern u_{1N} und u_{2N} . Die Lösungen werden mit der Methode nach Brown berechnet.

Mit den im 3. Schritt ermittelten genauen Lösungen der Parameter u_1 bzw. u_2 können die Koordinaten aller Schnittpunkte aus $\bar{q}_1(u_1)$ bzw. $\bar{q}_2(u_2)$ nach (2.3-12) berechnet werden.

2.15 Segmentierung eines Kurvenstücks

Es kann zweckmäßig sein, ein Kurvenstück in mehrere Kurvenstücke aufzuteilen. Beispielsweise sei das Kurvenstück zwischen u_1 und u_2 aus einem ursprünglichen Kurvenstück $\bar{q}(u)$ in homogenen Koordinaten nach (2.3-11) ($\bar{Q}(u)$ in kartesischen Koordinaten nach (2.3-12)) "auszuschneiden" (Bild 11).

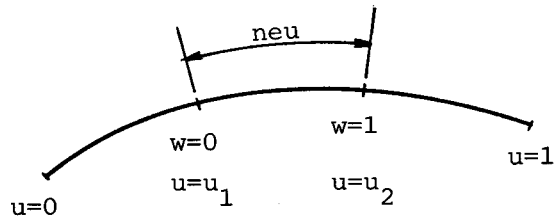


Bild 11 Segmentierung eines Kurvenstücks

Zwischen den Parametern u des ursprünglichen und w des neuen Kurvenstücks wird ein linearer Zusammenhang angesetzt:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) w = u_1 + (du) w \quad (2.15-1)$$

Wird dieser Ausdruck für u in (2.3-11) eingesetzt, so erhält man das exakte neue Kurvenstück $\bar{r}(w)$ mit dem Parameter w :

$$\bar{r}(w) = \underline{M} \underline{K} \underline{U}_d \underline{W} \quad (2.15-2)$$

mit

$$\underline{U}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & du & 0 & 0 \\ u_1^2 & 2(du) u_1 & (du)^2 & 0 \\ u_1^3 & 3(du) u_1^2 & 3(du)^2 u_1 & (du)^3 \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{W} = [1 \quad w \quad w^2 \quad w^3]^T$$

Im allgemeinen sind dann $h(w=0) \neq 1$ und $h(w=1) \neq 1$. Da $h=1$ an den Endpunkten eines Kurvenstücks vorausgesetzt worden ist, wird das neue Kurvenstück nur näherungsweise so dargestellt, daß es Koordinaten und die Tangentenrichtungen an den Stellen $u=u_1$ und $u=u_2$ des ursprünglichen Kurvenstücks einhält. Wird dieses neue Kurvenstück mit $\bar{r}'(w)$ bezeichnet, kann es durch folgende Daten an den Stellen $w=0$ und $w=1$ nach (2.3-11) definiert werden:

1. die homogenen Koordinaten der Endpunkte $\bar{r}'(w=0)$ und $\bar{r}'(w=1)$

$$\bar{r}'(w=0) = \begin{bmatrix} \bar{Q}(u=u_1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r}'(w=1) = \begin{bmatrix} \bar{Q}(u=u_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. die Tangentenrichtungen an den Endpunkten

$$\bar{t}(w=0) = \frac{\dot{\bar{Q}}(u=u_1)}{|\dot{\bar{Q}}(u=u_1)|}$$

$$\bar{t}(w=1) = \frac{\dot{\bar{Q}}(u=u_2)}{|\dot{\bar{Q}}(u=u_2)|}$$

3. die zusätzlichen Parameter an den Endpunkten

$$A(w=0) = A(u=u_1) = A(u=0) + u_1 [A(u=1) - A(u=0)]$$

$$A(w=1) = A(u=u_2) = A(u=0) + u_2 [A(u=1) - A(u=0)]$$

$$C(w=0) = 1$$

$$C(w=1) = 1$$

3. Flächendarstellung

3.1 Voraussetzungen und Einschränkungen

Es wird vorausgesetzt, daß ein Liniendriß vorliegt, dem Aufmaße und weitere geometrische Parameter (z.B. Tangenten) entnommen werden können. Mit Hilfe dieser Daten soll sich der Schiffskörper so erfassen lassen, wie es für die numerisch gesteuerte Fertigung des Schiffskörpers notwendig ist. Dabei kommen vor allem Verfahren in Frage, die zunächst einzelne Linien auf der Schiffsoberfläche darstellen und daraus die gesamte Fläche bilden.

Schiffsoberflächen setzen sich aus unterschiedlichen geformten Bereichen wie Ebenen, Zylinderflächen und 3-dimensional gekrümmten Teilen zusammen. Daher empfiehlt es sich, sie für die numerische Darstellung entsprechend aufzuteilen, z.B. in Flachboden, ebene Seitenfläche, Kimm, paralleles Mittschiff, Bugwulstbereich usw. [19]. Hier soll die Schiffsoberfläche - ähnlich wie vorher für Kurven beschrieben - noch feiner in einzelne Flächenstücke aufgeteilt werden, die durch ein Netzwerk von in Längsrichtung (von hinten nach vorn, z.B. Wasserlinien) und in Querrichtung (von unten nach oben, z.B. Spanten) verlaufenden Linien begrenzt werden (Bild 12). Diese zur Definition der Schiffsoberfläche benutzten Linien werden als Längs- bzw. Querlinien und gemeinsam als Netzlinien bezeichnet.

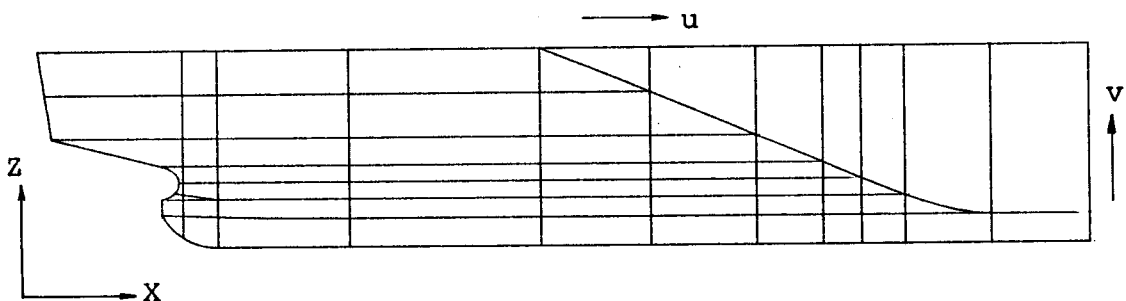


Bild 12 Anordnung der Netzlinien für Schiffsoberflächen

Für die Verläufe der Längs- und Querlinien hat Söding in [49] Einschränkungen gemacht, damit die spätere Flächeninterpolation einfacher und mit geringerem Rechenaufwand möglich wird. Danach müssen die Querlinien in den, zu der x-Achse, senkrechten Ebenen verlaufen. Die Längslinien dürfen zwar räumliche Kurven sein, müssen aber über der Koordinate x eindeutig sein und dürfen sich zwar treffen oder zusammenfallen, jedoch nicht überkreuzen. Die Einschränkungen für Längslinien ohne das Zusammenfallen werden hier übernommen. Wenn nur in Ebenen $x = \text{konstant}$ verlaufende Querlinien zugelassen werden, sind an den Schiffsenden viele Querlinien anzuordnen, um die Oberfläche genau genug beschreiben zu können. Bei manchen Schiffskörperformen, die in der Seitenansicht sehr steil verlaufende Längslinien haben, führt die Beschränkung auf ebene Querlinien zu Schwierigkeiten, weil die sich unter spitzen Winkeln kreuzenden Kurven zur Darstellung der Fläche schlecht geeignet sind [51]. Um dies zu verbessern, wird hier zugelassen, daß beide Scharen von Netzlinien beliebig im Raum verlaufen. Da noch weitere Kenngrößen mit Hilfe von Ableitungen nach den Bogenlängen der Längslinien zu ermitteln sind, dürfen sich die Querlinien allerdings nicht treffen, da sonst die Bogenlänge der Längslinien zwischen zwei sich treffenden Querlinien verschwindet.

Die Netzlinien stellen also ein Skelett der Fläche dar. Sie werden zunächst aus Aufmaßpunkten mit dem beschriebenen Verfahren für die Kurvendarstellung festgelegt. Um daraus eine vollständige Beschreibung der Schiffsförm zu gewinnen, soll eine Interpolation zwischen den Netzlinien so definiert werden, daß die zu konstruierende Fläche die Netzlinien enthält. Die Glätte der Netzlinien ist daher Bedingung für einen glatten Verlauf der Fläche. Um ein der Schiffsförm entsprechendes, glattes Netz aufzustellen, hat Söding [49] vor ihm veröffentlichte Arbeiten [6], [21], [40], [46] und [58], in denen ausschließlich Glättungen für Kurven und Flächen mit dem Verfahren der kleinsten Fehlerquadratsumme durchgeführt sind, analysiert und eine Alternative dazu gefunden, die den manuellen Entwurf der Schiffslinien simuliert. Das Grundkonzept dabei ist, daß die Längslinien und Spanten (ebene Kurven) abwechselnd in einer sinnvollen Reihenfolge vervollständigt werden.

Dabei wird zunächst ein weitmaschiges Netzwerk aus Kiellinie, Steven, Deckslinie, Boden- und Seiteneinlauf und wenigen Längslinien und Spanten aufgestellt. Für jede dieser Linien sind nur so viele Stützpunkte vorzugeben, daß sich die gewünschte Form etwa mit der Genauigkeit ergibt, mit der sich die Stützpunkte aus dem Linienriß ablesen lassen. Erst wenn man mehr Stützpunkte angibt, können sich durch deren Ungenauigkeiten wellige Netzlinien ergeben. Das Netzwerk wird durch neue Linien nach und nach verfeinert. Schneidet eine der neuen Linien eine bereits vorher definierte Linie, so ist der Schnittpunkt aus dem Verlauf dieser bereits festgelegten Linie zu interpolieren, nicht aus einer Zeichnung abzulesen. Raumkurven werden durch zwei Projektionen dargestellt. Dabei können die Stützpunkte in beiden Projektionen verschieden angeordnet werden, damit sich die unterschiedlich gekrümmten Projektionen der Raumkurve glatt und genau erfassen lassen. Der vorliegenden Arbeit liegt dieses Konzept zugrunde. Auch hier werden die Raumkurven aus zwei Projektionen vereinigt: Längslinien aus den Projektionen auf die XY- und die XZ-Ebenen, Querlinien aus den XZ- und YZ-Projektionen.

Jedes Flächenstück wird analog zu der verwendeten Kurvendarstellung durch eine Vektorfunktion $\bar{Q}(u,v)$ abhängig von zwei Parametern u und v beschrieben. Man bezeichnet dann Linien $\bar{Q}(u,v)$ mit variablem u und konstantem v als u -Linien; analog lassen sich v -Linien durch feste Parameter u beschreiben. Der Parameter u bzw. v läuft hier auch von 0 bis 1, so daß $\bar{Q}(u,v)$ mit $0 \leq u, v \leq 1$ das Innere eines Flächenstücks darstellt. Ränder des Flächenstücks sind die u -Linie unten $\bar{Q}(u,0)$ und oben $\bar{Q}(u,1)$ sowie die v -Linie links $\bar{Q}(0,v)$ und rechts $\bar{Q}(1,v)$ entsprechend Bild 13. Für die folgenden Anwendungen werden der Parameter u den Längslinien und der Parameter v den Querlinien zugeordnet. Damit stellen der obere und untere Rand bzw. der linke und rechte Rand eines Flächenstücks Kurvenstücke der Längslinien bzw. Querlinien dar. Die Längs- bzw. Querlinien werden deshalb auch u - bzw. v -Netzlinien genannt.

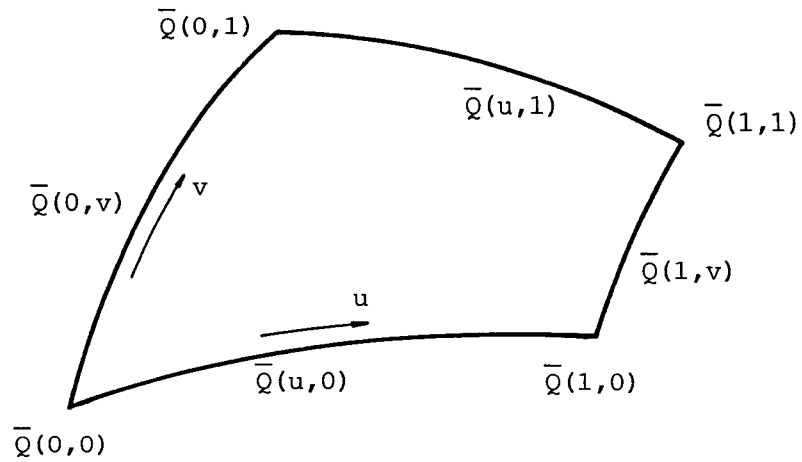


Bild 13 Ein Flächenstück und seine
Randkurven

Wo sich zwei Längslinien treffen, ergibt sich ein dreieckiges Flächenstück mit einer verschwindenden v -Linie. Es wird wie ein viereckiges Flächenstück behandelt. Wenn die Querlinie nur ein Kurvenstück hat und damit nur aus einem Punkt besteht, kann die Tangentenrichtung der v -Linie nicht berechnet werden, sondern muß angegeben werden, damit das Flächenstück interpoliert werden kann.

3.2 Eingabesprache zum Aufstellen eines Netzwerks

Zur numerischen Beschreibung der Netzlinien analog zu der Vorgehensweise beim zeichnerischen Linienentwurf wurde von Söding in [49] eine Eingabesprache entwickelt. Diese Sprache benutzt als Elemente Schlüsselwörter, Zahlen und Kommentare. Sie ist vielfach in der Schiffbauindustrie eingesetzt worden und hat sich gut bewährt. Für die hier gewählten Netzlinien sind die Struktur und die Elemente der Sprache weitgehend übertragbar, da die Definition eines Netzwerkes für die Schiffsoberfläche analog zu der o.g. Arbeit abläuft. Änderungen und Ergänzungen wurden allerdings notwendig, weil hier im Gegensatz zu [49] räumlich gekrümmte Querlinien zugelassen sind und weil zusätzliche Möglichkeiten zur Beeinflussung des Kurvenverlaufs bestehen. Die in der ergänzten Eingabesprache enthaltenen Schlüsselwörter und Sonderzeichen zeigt die folgende Tabelle:

SS	Anfang einer Flächenbeschreibung		
MA	Maßstab		
QL	Querlinie		
LL	Längslinie		
L	gerade XZ-Projektion einer Querlinie		
C	gekrümmte XZ-Projektion einer Querlinie		
Z	Z-Kurve; XZ-Projektion einer Längslinie		
W	Wasserlinie; XY-Projektion einer Längslinie		
S	Spant; YZ-Projektion einer Querlinie		
T-	Tangente parallel zur Abszisse		
TI	Tangente senkrecht zur Abszisse		
WI	ein vorgegebener Tangentenwinkel gegen die Abszisse		
WIKV	WI und Kegelschnitt im Kurvenstück vor einem Stützpunkt		
WIKN	WI und Kegelschnitt im Kurvenstück nach einem Stützpunkt		
GO	gleiche Ordinate		
GT	gleiche Tangente		
GE	gleiche Ebene		
WL	weiche Latte		
HL	harte Latte	=	(Erklärung im Text)
KA	krummer Auslauf	\$	(Erklärung im Text)
GA	gerader Auslauf	,	(Erklärung im Text)

In der folgenden Beschreibung sind variable Ausdrücke aus Worten und/oder Zahlen durch Kleinbuchstaben dargestellt. Kommentare sind beliebige, in runde Klammern eingeschlossene Zeichenfolgen. Sie dienen nur zur besseren Übersicht und werden vom Rechner beim Lesen übergangen.

Aus Zahlen und Schlüsselwörtern werden verschiedene Typen von Aussagen gebildet, zwischen die man beliebige Kommentare einschreiben darf. Jede Aussage enthält genau einmal das Sonderzeichen =. Am Ende jeder Aussage ist ein Dollarzeichen \$ unmittelbar nach der letzten Zahl bzw. dem letzten Schlüsselwort der Aussage anzusetzen. In einer Aussage werden Zahlen und Schlüsselwörter durch einen oder mehrere Leeranschlüge voneinander getrennt. Ein Komma, ist unmittelbar nach einer Zahl oder einem Schlüsselwort anzubringen, wenn die Zahl oder das Schlüsselwort das Ende einer Gruppe von zusammengehörigen Daten darstellt. Bild 14 zeigt als Beispiel die Beschreibung des Rumpfes einer Jacht.

```

SS 1= (SCHIFFSRUMPF EINER JACHT "CHANCE")$
MA 1=1000 1000 1000$
QL= 0, 5, 10, 30, 50, 70, 90, 95, 100$
LL= 110 0 100, 120 5 100, 130 0 100, 140 0 100, 150 0 100$
(XZ-PROJEKT. DER QUERL.)
L 0= -10596 0, -8363 4200$
L 5= -9471 0, -7855 4000$
L 10= -7200 0, -7200 3500$
L 30= -3600 0, -3600 3500$
L 50= 0 -500, 0 3600$
L 70= 3600 0, 3600 3700$
L 90= 7200 500, 7200 3900$
L 95= 7780 0, 9275 4200$
C 100= 110 9000 1165 WI 310, 120 9000 1165 WI 310,
      130 9894 2314 WIKV 546, 150 11128 4050 WI 546$
(XZ-PROJEKT. DER LAENGL.)
Z 110= 0 1685 WI -300, 5 1165 WI -250, 10 600, 30 80,
      50 -20 T-, 70 210, 95 875, 100 WIKV 310$
Z 120= 5 GO 110, 10 797, 30 293, 50 154, 70 361, 90 860, 100$
Z 130= 0 1971, 10 1621, 30 1174, 50 1012, 70 1242,
      90 1772, 100$
Z 140= 0 2858, 10 2758, 30 2586, 50 2510, 70 2613, 90 2850,
      100 3091$
Z 150= 0 3400, 30 3300, 50 3370, 70 3525, 90 3750,
      95 3894, 100$
(XY-PROJEKT. DER LAENGL. + YZ-PROJEKT. DER QUERL.)
W 110= 0 0, 100 0$
W 150= 0 1520, 10 2000, 50 3260, 70 2795, 90 1615,
      95 838, 100 75$

```

S 0= 110, 130 670, 140 1318, 150\$
 S 10= 110 T-, 120 536, 130 1350, 140 1866, 150\$
 S 50= 110 T-, 120 1471, 130 2464, 140 3211, 150\$
 S 100= 110 T-, 120 0 WI 892, 150 WI 881\$
 W 130= 0, 10, 50, 70 2033, 90 1044, 100 GA\$
 S 95= 110 T-, 120 225, 130, 140 713, 150 GA\$
 W 140= 0, 10, 50, 70 2656, 95, 100 GA\$
 S 70= 110 T-, 120 1170, 130, 140, 150\$
 S 90= 110 T-, 120 445, 130, 140, 150\$
 S 5= 110 WI 300, 130, 140, 150\$
 S 30= 110 T-, 120 1269, 130, 140, 150\$
 W 120= 5 GE 110, 10, 30, 50, 70, 90, 95, 100 GA\$

Bild 14 Eingabedaten zur Beschreibung der Schiffsform

Anhand des Beispiels werden das Vorgehen der numerischen Beschreibung eines Schiffskörpers erläutert. Man fängt dabei zunächst mit einer Aussage zur Festlegung einer Schiffsnummer an. Die Aussage ist gekennzeichnet durch das Schlüsselwort SS. Sie hat die Form:

SS n= (Kommentar)\$

n bedeutet also eine Schiffsnummer. Sie kann beliebig gewählt werden, da sie nur zur Unterscheidung verschiedener Schiffskörper dient. In dem Beispiel lautet die Aussage:

SS 1= (SCHIFFSRUMPF EINER JACHT "CHANCE")\$

Zur Angabe von Maßstäben für die drei kartesischen Koordinaten, mit denen die gemessenen Längen in die wahren Größen umgerechnet werden, hat die Maßstabaussage folgende Form:

MA a= mx my mz\$

a ist eine wahre Länge. mx ist die Maßzahl, die für X-Koordinaten angegeben wird, um diese Länge auszudrücken. Durch Multiplikation mit a/mx werden die Maßzahlen in die X-Koordinaten umgerechnet. Entsprechend sind my und mz die Maßzahlen der Y- und Z-Koordinaten, die die wahre Länge a ausdrücken. Die Aussage lautet in dem Beispiel:

MA 1= 1000 1000 1000\$

Danach ordnet man in einem vorliegenden Linienriß die Querlinien und die Längslinien an, die eine ausreichend genaue Flächenbeschreibung ergeben werden. Die Querlinienanordnungsaussage hat die Form:

$$QL = q_1, q_2, q_3, \text{ usw. bis } q_n$$

q_1 bis q_n sind die Querlinien-Nummern. Die Nummern müssen voneinander verschieden sein, sonst jedoch frei wählbar. Sie sind von hinten nach vorn aufzuführen. In dem Beispiel lauten sie:

$$QL = 0, 5, 10, 30, 50, 70, 90, 95, 100$$

Ähnlich wie bei den Querlinien sind die Reihenfolge und die Nummerierung der Längslinien durch eine sogenannte Längslinienanordnungsaussage festzulegen. Sie hat die Form:

$$LL = k_1 q_1 q_2, k_2 q_3 q_4, \text{ usw.}$$

In dem Beispiel lautet sie:

$$LL = 110 \ 0 \ 100, 120 \ 5 \ 100, 130 \ 0 \ 100, 140 \ 0 \ 100, 150 \ 0 \ 100$$

k_1, k_2 usw. sind die Längslinien-Nummern. Sie müssen für jede Längslinie und auch von den Querlinien-Nummern verschieden sein, sonst frei wählbar. Die Längslinien laufen nicht alle von der hintersten bis zu der vordersten Querlinie des Schiffes durch, sondern können sich an den Querlinien mit anderen Längslinien treffen und dort enden. Deshalb sind hinter jeder Längslinien-Nummer der hintersten (q_1 bzw. q_3) und der vordersten Querlinie (q_2 bzw. q_4) aufzuführen. Die Aufzählung der Längslinien beginnt mit der Kiellinie und erfolgt in der Reihenfolge, in der die Querlinien die Längslinien durchlaufen.

Beim manuellen Linienentwurf benutzt man ein im Seitenriß (in der Ebene $Y=0$) eingezeichnetes, rechteckiges Netz aus zwei Familien von sich kreuzenden Geraden mit $X=\text{Konstante}$ und $Z=\text{Konstante}$ als Ausgangsbasis. Analog dazu wird ein Netz aus den XZ-Projektionen der Querlinien und der Längslinien in der Ebene $Y=0$ zunächst aufgestellt. Man beginnt mit der Beschreibung für die Projektion der Querlinien. Dazu sind zwei Möglichkeiten vorgesehen: Ist die XZ-Projektion einer Querlinie eine Gerade, so kann sie durch eine L-Kurvenaussage definiert werden, die zwei beliebige Punkte der Geraden enthält. Die L-Kurvenaussage hat die Form:

$$L \ q_0 = x_1 \ z_1, x_2 \ z_2$$

q0 ist die Nummer der Querlinie. x1 und z1 sind Maßzahlen für die X-Koordinaten und Z-Koordinaten der 1. Punkte. x2 und z2 sind die entsprechenden Maßzahlen der 2. Punkte.

Beispiel einer L-Kurvenaussage:

L 5= -9471 0, -7855 4000\$

Ist die XZ-Projektion einer Querlinie dagegen eine gekrümmte Kurve, so ist sie durch eine C-Kurvenaussage zu beschreiben. Die C-Kurvenaussage hat die Form:

C q0= k1 x1 z1 {b1}, k2 x2 z2 {b2}, usw. bis kn xn zn {bn}\$
q0 ist die Nummer der Querlinie. k1 ist die Nummer der untersten, kn die der obersten Längsline, zwischen denen die Querlinie verläuft. k2, k3 usw. sind die Nummern der Längslinien, an denen die XZ-Projektion der Querlinie Stützstellen besitzt. Die Nummern der Längslinien, an denen die Projektion ohne Stützpunkt "durchgestrakt" wird, werden nicht aufgeführt. x1 und z1 usw. sind die Maßzahlen für die X- und Z-Koordinaten der Stützstellen. Die Ausdrücke b1, b2 usw. dienen zur Angabe von Rand- bzw. Nebenbedingungen. Sie können aus einem Wort oder einer Kombination von Worten mit einer Zahl bestehen. Die geschweiften Klammern haben die Bedeutung, daß die in ihnen eingeschlossenen Ausdrücke b1, b2 usw. fehlen können.

Am ersten Punkt der Querlinie gibt der Ausdruck b1 die Randbedingung dort an: GA bedeutet, daß die Krümmung der Kurve da verschwindet. Die Kurve verhält sich an der Stelle wie eine Gerade. KA besagt, daß die Krümmung in dem Kurvenstück zwischen den ersten zwei Stützpunkten konstant bleibt. Das erste Kurvenstück ist ein Kreisbogen, wenn die zugehörigen A- und C-Parameter gleich 1 sind. Fehlt der Ausdruck b1, so wird die Bedingung mit KA angenommen. Dementsprechend gibt der Ausdruck bn die Randbedingung am letzten Punkt an.

Außer am ersten und letzten Stützpunkt der Kurve sind folgende Worte zulässig: WL bedeutet, daß die Kurve an der Stützstelle ihren Krümmungsvektor unstetig so verändert, daß der weiter oben liegende Teil der Kurve den weiter unten liegenden nicht beeinflußt. HL bezeichnet einen Krümmungssprung, bei dem der weiter unten liegende Teil der Kurve das oben anschließende Kurvenstück

nicht beeinflußt. Fehlt der von geschweiften Klammern eingeschlossene Ausdruck, so bedeutet, daß der Krümmungsvektor der Kurve unmittelbar vor und hinter dem Stützpunkt gleich ist.

An allen Stützpunkten kann die Tangentenrichtung der Kurve vorgeschrieben werden: Der Ausdruck WI w bedeutet, daß die Tangente an die Kurve gegen die Abszisse einen Winkel von w/10 Winkelgrad bildet. Bei nach vorn steigender Kurve ist w positiv, bei nach vorn fallender Kurve ist w negativ. An Stelle der Angabe WI 0 kann die Abkürzung T-, statt WI 900 das Wort TI benutzt werden. Wird es zusätzlich gefordert, daß das Kurvenstück vor dem Stützpunkt ein Kegelschnitt sein soll, so ist statt des Wortes WI das Wort WIKV zu verwenden. Soll das Kurvenstück nach dem Stützpunkt dagegen ein Kegelschnitt sein, so muß das Wort WIKN benutzt werden.

Beispiel einer C-Kurvenaussage:

C 100= 110 9000 1165 WI 310, 120 9000 1165 WI 310,
130 9894 2314 WIKV 546, 150 11128 4050 WI 546\$

Anschließend werden die XZ-Projektionen der Längslinien beschrieben. Dies erfolgt für jede Längslinie durch eine Z-Kurvenaussage. Sie hat die Form:

Z k0= q1 {z1} {b1}, q2 {z2} {b2}, usw. bis qn {zn} {bn}\$

k0 ist die Nummer der Längslinie. q1 ist die Nummer der hintersten, qn die der vordersten Querlinie, zwischen denen die Längslinie verläuft. q2, q3 usw. sind die Nummern der Querlinien, an denen außerdem Stützpunkte für die ausreichend genaue Beschreibung der Projektion angeordnet sind. Ebenso wie bei der C-Kurvenaussage werden die Nummern der Querlinien nicht aufgeführt, an denen die Projektion ohne Stützpunkt "durchgestrakt" wird.

Die Ausdrücke z1, z2 usw. können Zahlen sein. Dann bedeuten sie die Maßzahlen für die Z-Koordinaten der Längslinie an der betreffenden Querlinie. Es sind aber auch zwei verschiedene Kombinationen aus Worten mit einer Zahl zulässig: GO k9 gibt an, daß die Längslinie an der betreffenden Querlinie die "gleiche Ordinate" Z wie die Längslinie mit der Nummer k9 besitzt. GT k9 bedeutet, daß die Längslinie die gleiche Ordinate und die "gleiche Tangentenrichtung" wie die Längslinie k9 hat. Diese beiden Angaben

werden dort verwendet, wo sich zwei Längslinien in einem Punkt treffen. Sie sind allerdings nur erlaubt, wenn die XZ-Projektion der Längslinie k_9 bereits vorher beschrieben, d.h. durch eine Z-Kurvenaussage definiert war. Da die XZ-Projektion der Längslinien in beliebiger Reihenfolge beschrieben werden können, bereitet diese Einschränkung keine Schwierigkeiten. An einer der aufgeführten Querlinien, deren XZ-Projektion bereits durch eine C-Kurvenaussage definiert wurde und an der Längslinie k_0 einen Stützpunkt besitzt, muß der Ausdruck für die Z-Koordinaten fehlen. Die Ausdrücke b_1, b_2 usw. haben dieselbe Bedeutung wie bei den C-Kurvenaussagen.

Beispiel einer Z-Kurvenaussage:

Z 120= 5 GO 110, 10 797, 30 293, 50 154, 70 361,
90 860, 100\$

Sind L- bzw. C- und Z-Kurvenaussagen für alle Querlinien und Längslinien gemacht, wird die Beschreibung des Schiffskörpers durch das Definieren von XY-Projektionen der Längslinien und YZ-Projektionen der Querlinien in einer abwechselnden Reihenfolge nach und nach vervollständigt. Dazu werden sogenannte Wasserlinienaussagen für die XY-Projektion der Längslinien und Spantaussage für die YZ-Projektion der Querlinien verwendet. Eine Wasserlinienaussage hat die Form:

W $k_0 = q_1 \{y_1\} \{b_1\}, q_2 \{y_2\} \{b_2\},$ usw. bis $q_n \{y_n\} \{b_n\}$ \$

Die Symbole q_1 bis q_n und b_1 bis b_n haben dieselbe Bedeutung wie bei den Z-Kurvenaussagen. An Querlinien, für deren XZ-Projektionen noch keine Spantaussage gemacht wurde, geben die Ausdrücke y_1 bis y_n die Y-Koordinaten der Längslinien durch die entsprechende Maßzahl oder durch die Angabe GO k_9 oder GT k_9 ebenso wie bei den Z-Kurven an. An den bereits festgelegten Querlinien, müssen die entsprechenden Querlinien-Nummern aufgeführt werden, ohne daß eine Y-Ordinate angegeben zu werden braucht. An solchen Querlinien kann auch die Angabe GE k_9 nur dann gemacht werden, wenn sowohl die Querlinie als auch die XZ-Projektion der Längslinie k_9 vorher beschrieben wurden. Sie bedeutet, daß die Längslinie k_0 an der betreffenden Querlinie dieselbe Y-Ordinate wie die Längslinie k_9 besitzt, und daß die Tangente an der Längslinie k_0 in der Ebene liegt, die durch die Tangente an der Querlinie und an der Längslinie k_9 aufgespannt wird. Nach der Wasser-

linienaussage werden die XY-Projektion und die bereits definierte XZ-Projektion der Längslinie k_0 zu einer Raumkurve vereinigt (siehe Abschnitt 3.3).

Beispiel einer W-Kurvenaussage:

W 120= 5 GE 110, 10, 30, 50, 70, 90, 95, 100 GA\$

Die YZ-Projektionen der Querlinien werden in ähnlicher Weise wie die XY-Projektionen der Längslinien durch die Spantaussagen beschrieben. Die Aussagen haben die Form:

S $q_0 = k_1 \{y_1\} \{b_1\}, k_2 \{y_2\} \{b_2\},$ usw. bis $k_n \{y_n\} \{b_n\}$ \$

q_0 ist die Nummer der Querlinie. k_1 bis k_n sind die Nummern der Längslinien, an denen die YZ-Projektion der Querlinie Stützstellen besitzt. Die Ausdrücke y_1 bis y_n und b_1 bis b_n haben im wesentlichen dieselbe Bedeutung wie bei den Wasserlinienaussagen. Unterschiede bestehen nur, wenn für die Ausdrücke die Symbole $GO \ q_9$ oder $GT \ q_9$ oder $GE \ k_9$ eingesetzt werden. $GO \ q_9$ bedeutet, daß die Y-Ordinate der Querlinie q_0 an der betreffenden Längslinie gleich der Ordinate der Querlinie q_9 an derselben Längslinie ist. Bei $GT \ q_9$ stimmen außerdem die Tangenten an den Querlinien q_0 und q_9 überein. $GE \ k_9$ bedeutet, daß die betreffende Längslinie und die Längslinie k_9 an der Querlinie q_0 gleiche Ordinaten besitzen, und daß die Tangente an der Querlinie q_0 in der Ebene liegt, die durch die Tangenten an die beiden Längslinien aufgespannt wird. Nach der Spantaussage werden die YZ-Projektion und die bereits definierte XZ-Projektion der Querlinie q_0 zu einer Raumkurve vereinigt (siehe Abschnitt 3.3).

Beispiel einer S-Kurvenaussage:

S 50= 110 T-, 120 1471, 130 2464, 140 3211, 150\$

Sind Wasserlinienaussagen und Spantaussagen für alle Längslinien und Querlinien gemacht, führt der Rechner dann eine vollständige Beschreibung der Schiffsoberfläche aus und speichert alle zugehörigen Daten ab.

3.3 Darstellung von Raumkurven aus 2 Projektionen

Die Vereinigung von zwei getrennt generierten ebenen Kurven, die als Projektionen einer Raumkurve aufgefaßt werden, zu einer Raumkurve ist im allgemeinen nur näherungsweise möglich (siehe hierzu den Anhang).

Zunächst werden dazu die beiden Projektionen unabhängig voneinander nach dem beschriebenen Verfahren zur Kurvendarstellung erzeugt. Dabei können die Stützpunkte der Projektionen bis auf den Anfangs- und Endpunkt bei verschiedenen Abszissenwerten liegen. Für die zu vereinigende Raumkurve werden jetzt überall da Stützpunkte angebracht, wo eine der beiden Projektionen einen Stützpunkt hat. Anhand eines kleinen Beispiels entsprechend Bild 15 soll dies erläutert werden: Die Projektion in der XY-Ebene besitzt die 5 Punkte $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_4, \bar{P}_5$ und \bar{P}_6 die in der XZ-Ebene die 3 Punkte \bar{Q}_1, \bar{Q}_3 und \bar{Q}_6 . Die zugehörige Raumkurve besitzt dann 6 Stützpunkte in jeder der beiden Ebenen, und zwar $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5$ und \bar{P}_6 in der XY-Ebene sowie $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{Q}_4, \bar{Q}_5$ und \bar{Q}_6 in der XZ-Ebene. Die zusätzlichen Punkte \bar{P}_3 und \bar{Q}_2, \bar{Q}_4 und \bar{Q}_5 werden aus der jeweiligen Projektion interpoliert.

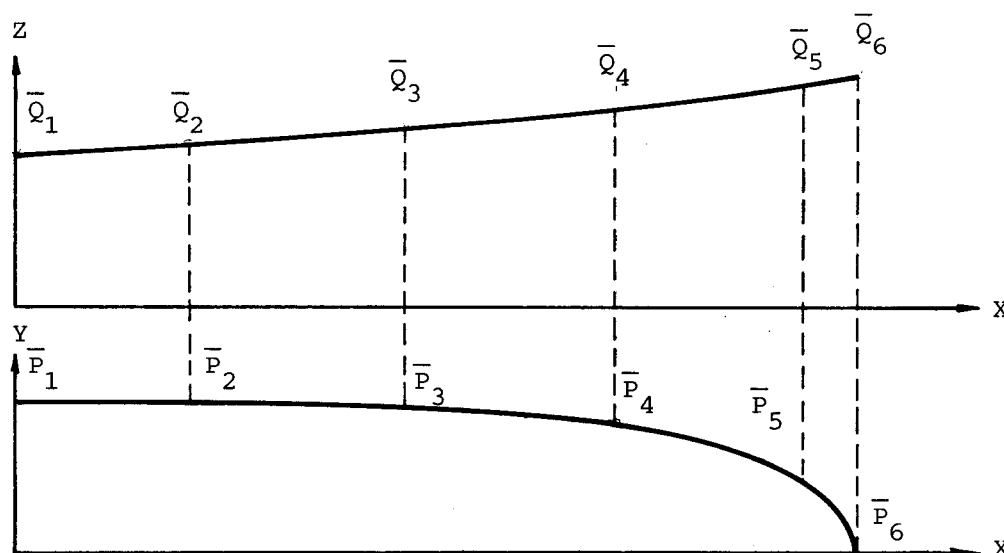


Bild 15 Raumkurve aus der Vereinigung zweier Projektionen

Außer den Stützpunkten sind noch die End- bzw. Nebenbedingungen zur Darstellung der Raumkurven aus den Projektionen zu ermitteln. Hierbei werden Nebenbedingungen, die nur in einer Projektion vorkommen, direkt von dieser für die Raumkurve übernommen (z.B. am 3. Punkt die Bedingung aus der XZ-Projektion). Haben Punkte in beiden Projektionen unterschiedliche Bedingungen, so wird für die Raumkurve eine Bedingung entsprechend den folgenden Tabellen angesetzt; darin bedeutet * eine selten oder garnicht sinnvoll anzuwendende Kombination.

An inneren Kurvenpunkten:

		1. P r o j e k t i o n					
2. P r o j e k t i o n		krs	WL	HL	WI	WIKV	WIKN
	krs	krs	WL	HL	WI	WIKV	WIKN
	WL	WL	WL	WI*	WIKV	WIKV	WIKN*
	HL	HL	WI*	HL	WIKN	WIKV*	WIKN
	WI	WI	WIKV	WIKN	WI	WIKV	WIKN
	WIKV	WIKV	WIKV	WIKV*	WIKV	WIKV	WIKN*
	WIKN	WIKN	WIKN	WIKN*	WIKN	WIKN*	WIKN

Am ersten Stützpunkt der Kurve:

		1. P r o j e k t i o n			
2. P r o j e k t .		KA	GA	WI	WIKN
	KA	KA	GA	WI	WIKN
	GA	GA	GA	WI	WIKN
	WI	WI	WI	WI	WIKN
	WIKN	WIKN	WIKN	WIKN	WIKN

Für den letzten Stützpunkt ist in der vorhergehenden Tabelle WIKV statt WIKN einzusetzen. In der ersten Tabelle steht das Symbol "krs" für stetige Krümmung. Die anderen groß geschriebenen Schlüsselwörter haben gleiche Bedeutung wie im letzten Abschnitt. Ebenso wie das Schlüsselwort WI werden auch T-, TI, GT und GE behandelt, da sie auch eine bestimmte Tangentenrichtung vorschreiben. Die so implizit vorgeschriebenen Tangentenrichtungen werden aus der jeweiligen Projektion ermittelt.

Damit sind alle Daten ermittelt, um nach dem Verfahren, das im Abschnitt 2.10 beschrieben ist, die Raumkurven zu berechnen. Die folgenden zwei Tabellen zeigen das Ergebnis dieser Berechnung für die in Bild 14 beschriebenen Kurvenprojektionen. Dabei bezeichnen die Spalten XT, YT, ZT die X-, Y- bzw. Z-Komponenten des Tangenteneinheitsvektors an den Quer- bzw. Längslinien.

KOORDINATEN UND TANGENTEN DER QUERL.

QUERL.	0						
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT	
110	-9.7001	0.0000	1.6850	0.0951	0.9793	0.1789	
130	-9.5481	0.6700	1.9710	0.3012	0.7671	0.5665	
140	-9.0765	1.3180	2.8580	0.4371	0.3647	0.8222	
150	-8.7883	1.5200	3.4000	0.4534	0.2596	0.8527	

QUERL.	5						
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT	
110	-9.0003	0.0000	1.1650	0.1980	0.8489	0.4901	
120	-9.0003	0.0000	1.1650	0.1980	0.8489	0.4901	
130	-8.7254	0.9181	1.8455	0.2802	0.6636	0.6936	
140	-8.3325	1.5349	2.8181	0.3485	0.3667	0.8626	
150	-8.1084	1.7293	3.3727	0.3627	0.2503	0.8977	

QUERL.	10						
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT	
110	-7.2000	0.0000	0.6000	0.0000	1.0000	0.0000	
120	-7.2000	0.5360	0.7970	0.0000	0.8359	0.5489	
130	-7.2000	1.3500	1.6210	0.0000	0.5557	0.8314	
140	-7.2000	1.8660	2.7580	0.0000	0.2799	0.9600	
150	-7.2000	2.0000	3.3430	0.0000	0.1659	0.9861	

QUERL.	30					
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
110	-3.6000	0.0000	0.0800	0.0000	1.0000	0.0000
120	-3.6000	1.2690	0.2930	0.0000	0.8944	0.4473
130	-3.6000	2.1700	1.1740	0.0000	0.5614	0.8276
140	-3.6000	2.8242	2.5860	0.0000	0.2251	0.9743
150	-3.6000	2.9046	3.3000	0.0000	-0.0028	1.0000

QUERL.	50					
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
110	0.0000	0.0000	-0.0200	0.0000	1.0000	0.0000
120	0.0000	1.4710	0.1540	0.0000	0.9185	0.3955
130	0.0000	2.4640	1.0120	0.0000	0.6087	0.7934
140	0.0000	3.2110	2.5100	0.0000	0.2113	0.9774
150	0.0000	3.2600	3.3700	0.0000	-0.0989	0.9951

QUERL.	70					
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
110	3.6000	0.0000	0.2100	0.0000	1.0000	0.0000
120	3.6000	1.1700	0.3610	0.0000	0.9079	0.4192
130	3.6000	2.0330	1.2420	0.0000	0.5284	0.8490
140	3.6000	2.6560	2.6130	0.0000	0.2636	0.9646
150	3.6000	2.7950	3.5250	0.0000	0.0358	0.9994

QUERL.	90					
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
110	7.2000	0.0000	0.7126	0.0000	1.0000	0.0000
120	7.2000	0.4450	0.8600	0.0000	0.8276	0.5613
130	7.2000	1.0440	1.7720	0.0000	0.3551	0.9348
140	7.2000	1.3932	2.8500	0.0000	0.2674	0.9636
150	7.2000	1.6150	3.7500	0.0000	0.2110	0.9775

QUERL.	95					
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
110	8.0915	0.0000	0.8750	0.0000	1.0000	0.0000
120	8.1419	0.2250	1.0166	0.2674	0.6036	0.7511
130	8.4986	0.5700	2.0187	0.3317	0.1468	0.9319
140	8.8375	0.7130	2.9708	0.3324	0.1323	0.9338
150	9.1661	0.8380	3.8940	0.3328	0.1236	0.9349

QUERL.	100					
LL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
110	9.0000	0.0000	1.1650	0.0000	1.0000	0.0000
120	9.0000	0.0000	1.1650	0.8571	0.0072	0.5150
130	9.8940	0.0229	2.3140	0.5792	0.0205	0.8150
140	10.4463	0.0444	3.0910	0.5792	0.0245	0.8148
150	11.1280	0.0750	4.0500	0.5791	0.0270	0.8148

KOORDINATEN UND TANGENTEN DER LAENGLSL.

LAENGLSL. 110

QL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
0	-9.7001	0.0000	1.6850	0.8660	0.0000	-0.5000
5	-9.0003	0.0000	1.1650	0.9063	0.0000	-0.4226
10	-7.2000	0.0000	0.6000	0.9764	0.0000	-0.2160
30	-3.6000	0.0000	0.0800	0.9973	0.0000	-0.0738
50	0.0000	0.0000	-0.0200	1.0000	0.0000	0.0000
70	3.6000	0.0000	0.2100	0.9941	0.0000	0.1088
90	7.2000	0.0000	0.7126	0.9854	0.0000	0.1704
95	8.0915	0.0000	0.8750	0.9821	0.0000	0.1882
100	9.0000	0.0000	1.1650	0.8572	0.0000	0.5150

LAENGLSL. 120

QL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
5	-9.0003	0.0000	1.1650	0.9227	0.3253	-0.2071
10	-7.2000	0.5360	0.7970	0.9526	0.2480	-0.1759
30	-3.6000	1.2690	0.2930	0.9873	0.1315	-0.0891
50	0.0000	1.4710	0.1540	0.9998	-0.0157	0.0108
70	3.6000	1.1700	0.3610	0.9834	-0.1503	0.1017
90	7.2000	0.4450	0.8600	0.9633	-0.2179	0.1567
95	8.1419	0.2250	1.0166	0.9575	-0.2379	0.1630
100	9.0000	0.0000	1.1650	0.9523	-0.2563	0.1659

LAENGLSL. 130

QL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
0	-9.5481	0.6700	1.9710	0.9454	0.2913	-0.1460
5	-8.7254	0.9181	1.8455	0.9493	0.2801	-0.1430
10	-7.2000	1.3500	1.6210	0.9559	0.2594	-0.1375
30	-3.6000	2.1700	1.1740	0.9819	0.1657	-0.0914
50	0.0000	2.4640	1.0120	0.9998	-0.0193	0.0096
70	3.6000	2.0330	1.2420	0.9739	-0.1997	0.1082
90	7.2000	1.0440	1.7720	0.9324	-0.3207	0.1669
95	8.4986	0.5700	2.0187	0.9178	-0.3510	0.1855
100	9.8940	0.0229	2.3140	0.9112	-0.3617	0.1972

LAENGLSL. 140

QL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
0	-9.0765	1.3180	2.8580	0.9588	0.2792	-0.0517
5	-8.3325	1.5349	2.8181	0.9587	0.2798	-0.0512
10	-7.2000	1.8660	2.7580	0.9584	0.2808	-0.0505
30	-3.6000	2.8242	2.5860	0.9776	0.2069	-0.0382
50	0.0000	3.2110	2.5100	0.9998	-0.0201	0.0025
70	3.6000	2.6560	2.6130	0.9639	-0.2615	0.0498
90	7.2000	1.3932	2.8500	0.9241	-0.3762	0.0678
95	8.8375	0.7130	2.9708	0.9205	-0.3846	0.0684
100	10.4463	0.0444	3.0910	0.9216	-0.3819	0.0690

LAENGL. 150

QL	X	Y	Z	XT	YT	ZT
0	-8.7883	1.5200	3.4000	0.9538	0.2977	-0.0413
5	-8.1084	1.7293	3.3727	0.9563	0.2903	-0.0353
10	-7.2000	2.0000	3.3430	0.9594	0.2806	-0.0274
30	-3.6000	2.9046	3.3000	0.9821	0.1882	0.0047
50	0.0000	3.2600	3.3700	0.9994	-0.0103	0.0323
70	3.6000	2.7950	3.5250	0.9705	-0.2354	0.0519
90	7.2000	1.6150	3.7500	0.9307	-0.3598	0.0652
95	9.1661	0.8380	3.8940	0.9274	-0.3672	0.0709
100	11.1280	0.0750	4.0500	0.9314	-0.3557	0.0769

3.4 Möglichkeiten zur Darstellung eines Flächenstücks

Zur Darstellung eines Flächenstücks werden die Flächenbeschreibungen nach Coons [10], [14] und Bézier [13], [47] sowie die B-Spline-Fläche vielfach benutzt, die im rechnerunterstützten Entwurf und in der Computergrafik weite Verbreitung gefunden haben. Da alle diese Flächen Verallgemeinerungen der entsprechenden Kurven sind, werden die zur Flächenbeschreibung benutzten Funktionen hier auf Polynome 3. Grades von zwei Parameter u und v beschränkt. Entsprechend dem kubischen Spline wird ein allgemeines bikubisches Flächenstück nach Coons, das durch vier Randkurven $\bar{Q}(u,0)$, $\bar{Q}(u,1)$, $\bar{Q}(0,v)$ und $\bar{Q}(1,v)$ verläuft, in kartesischen Koordinaten definiert durch

$$\begin{aligned} \bar{Q}(u,v) = & [\bar{Q}(u,0) \quad \bar{Q}(u,1) \quad \bar{Q}^v(u,0) \quad \bar{Q}^v(u,1)] \underline{K} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \\ & + [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \underline{K}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}(0,v) \\ \bar{Q}(1,v) \\ \bar{Q}^u(0,v) \\ \bar{Q}^u(1,v) \end{bmatrix} \\ & - [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \underline{K}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}(0,0) & \bar{Q}(0,1) & \bar{Q}^v(0,0) & \bar{Q}^v(0,1) \\ \bar{Q}(1,0) & \bar{Q}(1,1) & \bar{Q}^v(1,0) & \bar{Q}^v(1,1) \\ \bar{Q}^u(0,0) & \bar{Q}^u(0,1) & \bar{Q}^{uv}(0,0) & \bar{Q}^{uv}(0,1) \\ \bar{Q}^u(1,0) & \bar{Q}^u(1,1) & \bar{Q}^{uv}(1,0) & \bar{Q}^{uv}(1,1) \end{bmatrix} \underline{K} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4-1)$$

wobei \underline{K} die Koeffizientenmatrix der Hermiteschen Polynome 3. Grades von (2.1-15) ist und $\bar{Q}^u = d\bar{Q}/du$ die Ableitung nach u , $\bar{Q}^v = d\bar{Q}/dv$ die Ableitung nach v und $\bar{Q}^{uv} = d\bar{Q}/dudv$ die gemischten Ableitungen nach u und v bedeuten. Die vier Vektoren mit den gemischten Ableitungen werden auch als Verwindungsvektoren (englisch: twistvektor) bezeichnet.

In [16] bemerkt Forrest, daß ihm kein System zur Flächendarstellung bekannt ist, das auf Formel (3.4-1) beruht. Meist werden zwei Sonderformen der Formel verwendet: Das sogenannte kartesische Produkt definiert durch

$$\bar{Q}(u,v) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \underline{K}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}(0,0) & \bar{Q}(0,1) & \bar{Q}^v(0,0) & \bar{Q}^v(0,1) \\ \bar{Q}(1,0) & \bar{Q}(1,1) & \bar{Q}^v(1,0) & \bar{Q}^v(1,1) \\ \bar{Q}^u(0,0) & \bar{Q}^u(0,1) & \bar{Q}^{uv}(0,0) & \bar{Q}^{uv}(0,1) \\ \bar{Q}^u(1,0) & \bar{Q}^u(1,1) & \bar{Q}^{uv}(1,0) & \bar{Q}^{uv}(1,1) \end{bmatrix} \underline{K} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad (3.4-2)$$

und die sogenannte Lofting-Fläche:

$$\bar{Q}(u,v) = [\bar{Q}(u,0) \ \bar{Q}(u,1) \ \bar{Q}^v(u,0) \ \bar{Q}^v(u,1)] \underline{K} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad (3.4-3)$$

bzw.

$$Q(u,v) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \underline{K}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}(0,v) \\ \bar{Q}(1,v) \\ \bar{Q}^u(0,v) \\ \bar{Q}^u(1,v) \end{bmatrix} \quad (3.4-4)$$

Wird ein Flächenstück durch das kartesische Produkt dargestellt, so folgen die in der Matrix stehenden Vektoren bis auf die Verwindungsvektoren eindeutig aus den Randkurven des Flächenstücks. Die Verwindungsvektoren - bzw. entsprechenden Größen bei der Lofting-Fläche - können dagegen frei gewählt werden.

Demgegenüber sind Bézier-Flächen und B-Spline-Flächen allein durch die Koordinaten der Ecken von Stützpolyedern definiert. Beispielsweise zeigt Bild 16 den Stützpolyeder einer bikubischen Bézier-Fläche mit 16 Ecken.

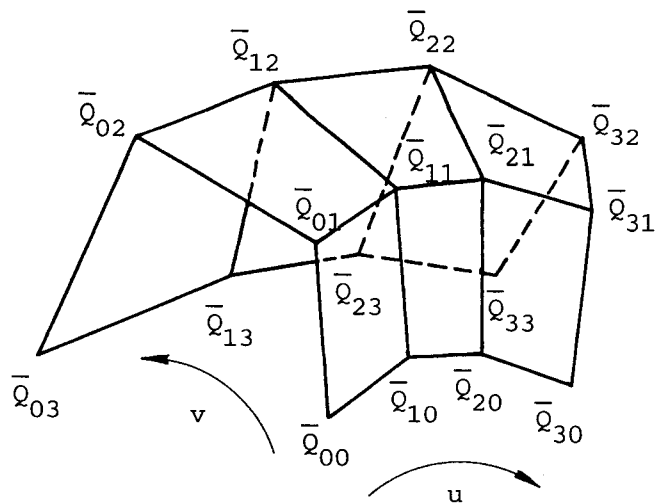


Bild 16 Bézier-Fläche mit Stützpolyedern

Die bikubische Bézier-Fläche wird mit Hilfe der Bernsteinpolynome wie folgt definiert:

$$\bar{Q}(u,v) = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \underline{B}^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_{00} & \bar{Q}_{01} & \bar{Q}_{02} & \bar{Q}_{03} \\ \bar{Q}_{10} & \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{20} & \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{30} & \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \underline{B} \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad (3.4-5)$$

\underline{B} ist die Koeffizientenmatrix der Bernsteinpolynome 3. Grades aus (2.2-7). Offensichtlich beschreiben (3.4-2) und (3.4-5) dieselben Flächen, allerdings mit verschiedenen Sätzen von je 48 Koeffizienten. Statt durch die Bernsteinpolynome bei den Bézier-Flächen werden die B-Spline-Flächen durch die B-Spline-Basispolynome dargestellt.

Bézier-Flächen und B-Spline-Flächen sind so konzipiert, daß die Koeffizientenmatrizen nur Koordinaten der Polyederecken, aber keine Ableitungen enthalten. Gedacht ist dabei an Anwendungen, bei denen der Benutzer - notfalls durch Probieren - ein Flächenstück interaktiv am Bildschirm erzeugt. Von einem Flächenstück ausgehend kann eine Fläche nach und nach durch Hinzufügen neuer Flächenstücke entwickelt werden. Dabei müssen die Polyeder nach

bestimmten Bedingungen (siehe [13]) eingegeben werden, um eine knickfreie Fläche zu entwerfen. Mit einem vorliegenden Netzwerk lassen sich dagegen die Verwindungsvektoren aller Flächenstücke nach Coons automatisch so bestimmen, daß die Flächenstücke mit stetigen Tangenten aneinanderstoßen.

Damit die Vorteile der für Kurven verwendeten rationalen kubischen Splines auch bei Flächen zum Tragen kommen, kann ein Flächenstück in homogenen Koordinaten durch Erweiterung der entsprechenden Kurvendarstellung nach (2.3-4) inkartesischer Produktform analog zu (3.4-2) definiert werden. Ein solches Flächenstück ist dann durch einen $4 \times 4 \times 4$ -Tensor festgelegt. Es hat sich aber als schwierig herausgestellt, die Verwindungsvektoren so zu bestimmen, daß die Tangentenvektoren an den Übergängen zwischen den Flächenstücken stetig sind. Deshalb wird im Folgenden eine zur Lofting-Fläche (3.4-4) analoge Flächendarstellung benutzt.

3.5 Definition eines Flächenstücks mit rationalen kubischen Splines

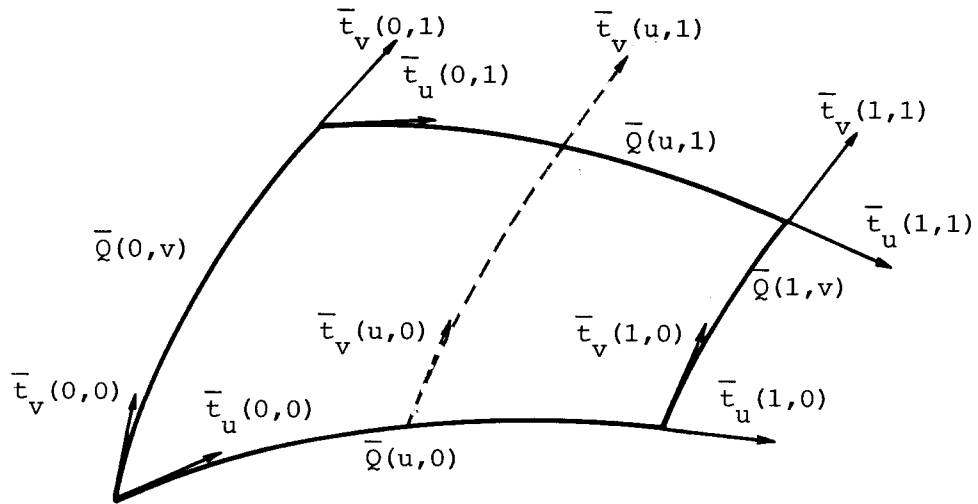


Bild 17 Lofting-Fläche aus rationalen kubischen Splines

Wird eine v -Linie eines Flächenstücks an der Stelle u (Bild 17) mit $\bar{Q}(u,v)$ bezeichnet, läßt sie sich analog zu der Formel (2.3-12) definieren durch:

$$\bar{Q}(u,v) = \frac{1}{h_v(u,v)} \times \left[\bar{Q}(u,v) \bar{Q}(u,1) \bar{Q}^v(u,0) + \bar{Q}(u,0) h_v^v(u,0) \bar{Q}^v(u,1) + \bar{Q}(u,1) h_v^v(u,1) \right] \begin{bmatrix} H_1(v) \\ H_2(v) \\ H_3(v) \\ H_4(v) \end{bmatrix} \quad (3.5-1)$$

Darin stellen $\bar{Q}(u,0)$ und $\bar{Q}(u,1)$ die u -Randkurven bei $v=0$ bis $v=1$ dar. Mit $c=0$ bzw. $c=1$ ist $\bar{Q}(u,0)$ bzw. $\bar{Q}(u,1)$ daher definiert durch:

$$\bar{Q}(u,c) = \frac{1}{h_u(u,c)} \times$$

$$\times [\bar{Q}(0,c) \bar{Q}(1,c) \bar{Q}^u(0,c) + \bar{Q}(0,c) h_u^u(0,c) \bar{Q}^u(1,c) + \bar{Q}(1,c) h_u^u(1,c)]$$

$$\begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix}$$

(3.5-2)

mit

$$\begin{aligned} \bar{Q}^u(0,c) &= A_u(0,c) l_u(c) \bar{t}_u(0,c) \\ \bar{Q}^u(1,c) &= A_u(1,c) l_u(c) \bar{t}_u(1,c) \\ h_u^u(0,c) &= C_u(0,c) (|A_u(0,c) \bar{t}_u(0,c) + A_u(1,c) \bar{t}_u(1,c)| - 2) \\ h_u^u(1,c) &= -C_u(1,c) (|A_u(0,c) \bar{t}_u(0,c) + A_u(1,c) \bar{t}_u(1,c)| - 2) \\ h_u(u,c) &= 1 + h_u^u(0,c) H_3(u) + h_u^u(1,c) H_4(u) \\ l_u(c) &= |\bar{Q}(1,c) - \bar{Q}(0,c)| \end{aligned}$$

Die anderen in (3.5-1) vorkommenden Funktionen von u sind nach folgenden Formeln zu berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{Q}^v(u,0) &= A_v(u,0) l_v(u) \bar{t}_v(u,0) \\ \bar{Q}^v(u,1) &= A_v(u,1) l_v(u) \bar{t}_v(u,1) \\ h_v^v(u,0) &= C_v(u,0) (|A_v(u,0) \bar{t}_v(u,0) + A_v(u,1) \bar{t}_v(u,1)| - 2) \\ h_v^v(u,1) &= -C_v(u,1) (|A_v(u,0) \bar{t}_v(u,0) + A_v(u,1) \bar{t}_v(u,1)| - 2) \\ h_v(u,v) &= 1 + h_v^v(u,0) H_3(v) + h_v^v(u,1) H_4(v) \\ l_v(u) &= |\bar{Q}(u,1) - \bar{Q}(u,0)| \end{aligned}$$

(3.5-3)

Der untere Index u bzw. v bezeichnet hier Größen, die sich auf die u- bzw. v-Richtung beziehen, während der obere Index u bzw. v eine partielle Ableitung nach u bzw. v bedeutet. Alle Funktionen von u in (3.5-1) und (3.5-3) müssen - von Sonderfällen abgesehen - so bestimmt werden, daß das Flächenstück knickfreie Übergänge zu

den benachbarten Flächenstücken hat. Hinreichende Bedingungen dafür werden anhand von zwei über- bzw. nebeneinanderliegenden Flächenstücken nach Bild 18 abgeleitet.

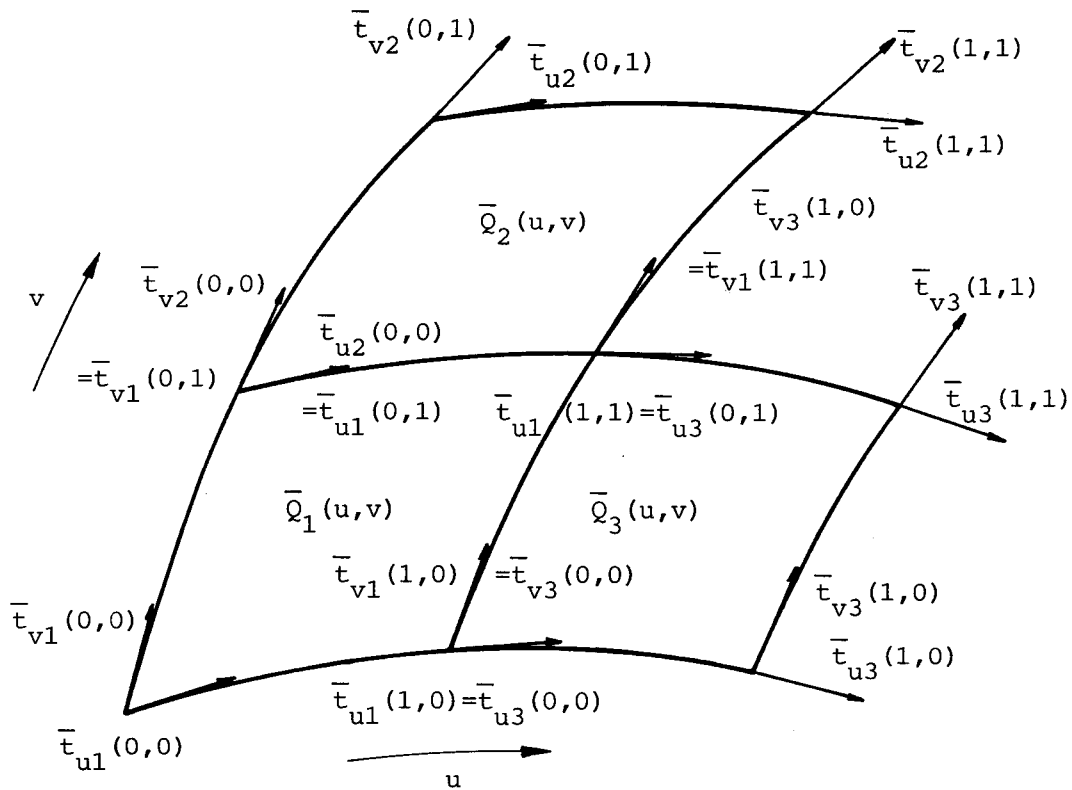


Bild 18 Übergänge benachbarter Flächenstücke

Die zwei im Bild 18 übereinanderliegenden Flächenstücke $\bar{Q}_1(u,v)$ und $\bar{Q}_2(u,v)$ haben die gemeinsame Randkurve $\bar{Q}_1(u,1)$ und $\bar{Q}_2(u,0)$. Sie haben einen knickfreien Übergang, wenn die Flächennormale in der gemeinsamen Randkurve gleich ist:

$$\bar{t}_{v1}(u,1) \times \bar{t}_{u1}(u,1) = \bar{t}_{v2}(u,0) \times \bar{t}_{u2}(u,0) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.5-4)$$

Wegen der gemeinsamen Randkurve ist offensichtlich:

$$\bar{t}_{u1}(u,1) = \bar{t}_{u2}(u,0) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.5-5)$$

Weiter ist für knickfreie v -Netzlinien

$$\bar{t}_{v1}(u,1) = \bar{t}_{v2}(u,0) \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3.5-6)$$

weil - wie später im Detail erläutert wird - $t_{v1}(u,1)$ und $t_{v2}(u,0)$ allein aus den Tangentenvektoren der v -Netzlinien in den jeweiligen u -Netzlinien interpoliert werden. Daten der darüber- oder darunterliegenden Flächenstücke gehen in diese Berechnungen nicht ein. Die Interpolationen werden bei knickfreien v -Netzlinien deshalb für die Flächenstücke 1 und 2 mit denselben Stützwerten, Abszissenwerten und Nebenbedingungen durchgeführt und liefern deshalb auch übereinstimmende Werte. Damit ist (3.5-4) bei knickfreien v -Netzlinien nachgewiesen.

Die mit $\bar{Q}_1(u,v)$ und $\bar{Q}_3(u,v)$ bezeichneten, im Bild 18 nebeneinanderliegenden Flächenstücke haben die gemeinsame Grenzkurve:

$$\bar{Q}_1(1,v) = \bar{Q}_3(0,v) \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (3.5-7)$$

Daraus folgt die Übereinstimmung der Tangentenvektoren in v -Richtung auf der Grenzkurve:

$$\bar{Q}_1^v(1,v) = \bar{Q}_3^v(0,v) \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (3.5-8)$$

Für einen knickfreien Übergang der Flächenstücke an der Grenzkurve ist zu fordern, daß die Tangentialebenen der Fläche dort gleich sein müssen. Dies bedeutet:

$$\bar{Q}_1^v(1,v) \times \bar{Q}_1^u(1,v) = \alpha(v) \bar{Q}_3^v(0,v) \times \bar{Q}_3^u(0,v) \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (3.5-9)$$

Darin ist $\alpha(v)$ eine beliebige positive skalare Funktion von v . Die einfachste Lösung hierfür ist wegen (3.5-8):

$$\bar{Q}_1^u(1,v) = \alpha(v) \bar{Q}_3^u(0,v) \quad (3.5-10)$$

Die Tangentenvektoren in der u-Richtung $\bar{Q}_1^u(1,v)$ und $\bar{Q}_3^u(1,v)$ lassen sich aus (3.5-1) ableiten. Beide sind gebrochene Vektorfunktionen. Da alle ihre Zähler und Nenner kubische Polynome von v sind, ergibt sich zwangsläufig, daß die Funktion $\alpha(v)$ gleich einer Konstante β sein muß ($\alpha(v) = \beta$). Die Bedingung (3.5-10) wird erfüllt, wenn die Ableitungen nach u aller Funktionen von u in (3.5-1) und (3.5-3) der beiden Flächenstücke an der Grenzkurve auch das Verhältnis β haben:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^u(1,0) &= \beta \bar{Q}_3^u(0,0) \\ \bar{Q}_1^u(1,1) &= \beta \bar{Q}_3^u(0,1) \end{aligned} \quad (3.5-11)$$

$$\begin{aligned} A_{v1}^u(1,0) &= \beta A_{v3}^u(0,0) \\ A_{v1}^u(1,1) &= \beta A_{v3}^u(0,1) \end{aligned} \quad (3.5-12)$$

$$\begin{aligned} C_{v1}^u(1,0) &= \beta C_{v3}^u(0,0) \\ C_{v1}^u(1,1) &= \beta C_{v3}^u(0,1) \end{aligned} \quad (3.5-13)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_{v1}(1,0) &= \beta \bar{t}_{v3}(0,0) \\ \bar{t}_{v1}(1,1) &= \beta \bar{t}_{v3}(0,1) \end{aligned} \quad (3.5-14)$$

Betragsmäßig entspricht die Bedingung (3.5-11) folgender Beziehung:

$$\frac{|\bar{Q}_1^u(0,1)|}{|\bar{Q}_3^u(0,0)|} = \frac{|\bar{Q}_1^u(1,1)|}{|\bar{Q}_3^u(0,1)|} = \beta \quad (3.5-15)$$

Schreibt man diese um,

$$\frac{|\bar{Q}_1^u(1,0)|}{|\bar{Q}_1^u(1,1)|} = \frac{|\bar{Q}_3^u(0,0)|}{|\bar{Q}_3^u(0,1)|} \quad (3.5-16)$$

so stellt man fest, daß das Verhältnis der Beträge der Tangentenvektoren in den rechten unteren und rechten oberen Ecken des Flächenstücks $\bar{Q}_1(u,v)$ gleich dem der Beträge der Tangentenvektoren in den linken unteren und linken oberen Ecken des Flächenstücks $\bar{Q}_3(u,v)$ sein muß. Mit den vorgegebenen Netzlinien ist dies meistens nicht der Fall. Die Bedingung (3.5-16) ist jedoch erfüllbar, wenn man zwei verschiedene von u abhängige Parameter $u_0(u)$ für die untere u -Randkurve ($v=0$) und $u_1(u)$ für die obere ($v=1$) in den Formeln (3.5-1) bis (3.5-3) zur Flächendefinition einführt: Einer dieser Parameter kann mit u übereinstimmen; für den anderen wird eine Abhängigkeit von u in Form eines Polynoms 5. Grades gewählt. Um Fälle, daß u_0 bzw. u_1 außerhalb des Bereiches zwischen 0 und 1 liegen, auszuschließen, wird nach folgenden Regeln verfahren: Ist die Sehnenlänge des Randes $v=0$ größer als die des Randes $v=1$, wird angesetzt:

$$u_1(u) = u \quad (3.5-17)$$

$$u_0(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 \quad (3.5-18)$$

Die Koeffizienten von u_0 werden so bestimmt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1) \quad u_0(0) = 0$$

$$2) \quad u_0(1) = 1$$

$$3) \quad \left. \frac{du_0}{du} \right|_{u=0} = \frac{|\bar{Q}^u(0,1)|}{|\bar{Q}^u(0,0)|}$$

$$4) \quad \left. \frac{du_0}{du} \right|_{u=1} = \frac{|\bar{Q}^u(1,1)|}{|\bar{Q}^u(1,0)|}$$

$$5) \quad \left. \frac{d^2u_0}{du^2} \right|_{u=0} = 0$$

$$6) \quad \left. \frac{d^2u_0}{du^2} \right|_{u=1} = 0 \quad (3.5-19)$$

Ist die Sehnenlänge des Randes $v=0$ kleiner als die des Randes $v=1$, so sind u_0 und u_1 in den Formeln (3.5-17) bis (3.5-19) auszutauschen.

Durch das Ersetzen von u in (3.5-2) durch u_0 bzw. u_1 verschieben sich die zu einem Parameter u gehörigen Punkte auf eine der beiden u -Randkurven, ohne daß die Form der Randkurven sich ändert. Der obere Index, der die Ableitung nach u bedeutet, bleibt unberührt, damit sich die Kurven mit allen ursprünglichen, auf dem Parameter u bezogenen Daten beschreiben lassen. Der neuen Definition eines Flächenstücks entsprechend (3.5-1) wird dann mit $\bar{Q}'(u,v)$ bezeichnet:

$$\bar{Q}'(u,v) = \frac{1}{h'_v(u,v)} \times$$

$$\times \left[\bar{Q}(u_0,0) \bar{Q}(u_1,1) \bar{Q}^v(u_0,0) + \bar{Q}(u_0,0) h'_v(u_0,0) \bar{Q}^v(u_1,1) + \bar{Q}(u_1,1) h'_v(u_1,1) \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} H_1(v) \\ H_2(v) \\ H_3(v) \\ H_4(v) \end{bmatrix} \quad (3.5-20)$$

Entsprechend (3.5-2) ist die untere u -Randkurve bei $v=0$ definiert durch

$$\bar{Q}(u_0,0) = \frac{1}{h_u(u_0,0)} \times$$

$$\times \left[\bar{Q}(0,0) \bar{Q}(1,0) \bar{Q}^u(0,0) + \bar{Q}(0,0) h_u^u(0,0) \bar{Q}^u(1,0) + \bar{Q}(1,0) h_u^u(1,0) \right] \begin{bmatrix} H_1(u_0) \\ H_2(u_0) \\ H_3(u_0) \\ H_4(u_0) \end{bmatrix} \quad (3.5-21)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{Q}^u(0,0) &= A_u(0,0) l_u(0) \bar{t}_u(0,0) \\ \bar{Q}^u(1,0) &= A_u(1,0) l_u(0) \bar{t}_u(1,0) \\ h_u^u(0,0) &= C_u(0,0) (|A_u(0,0) \bar{t}_u(0,0) + A_u(1,0) \bar{t}_u(1,0)| - 2) \\ h_u^u(1,0) &= -C_u(1,0) (|A_u(0,0) \bar{t}_u(0,0) + A_u(1,0) \bar{t}_u(1,0)| - 2) \\ h_u(u_0,0) &= 1 + h_u^u(0,0) H_3(u_0) + h_u^u(1,0) H_4(u_0)\end{aligned}$$

und die obere u-Randkurve bei $v=1$ durch

$$\bar{Q}(u_1,1) = \frac{1}{h_u(u_1,1)} \times \left[\bar{Q}(0,1) \bar{Q}(1,1) \bar{Q}^u(0,1) + \bar{Q}(0,1) h_u^u(0,1) \bar{Q}^u(1,1) + \bar{Q}(1,1) h_u^u(1,1) \right] \begin{bmatrix} H_1(u_1) \\ H_2(u_1) \\ H_3(u_1) \\ H_4(u_1) \end{bmatrix}$$

mit

(3.5-22)

$$\begin{aligned}\bar{Q}^u(0,1) &= A_u(0,1) l_u(1) \bar{t}_u(0,1) \\ \bar{Q}^u(1,1) &= A_u(1,1) l_u(1) \bar{t}_u(1,1) \\ h_u^u(0,1) &= C_u(0,1) (|A_u(0,1) \bar{t}_u(0,1) + A_u(1,1) \bar{t}_u(1,1)| - 2) \\ h_u^u(1,1) &= -C_u(1,1) (|A_u(0,1) \bar{t}_u(0,1) + A_u(1,1) \bar{t}_u(1,1)| - 2) \\ h_u(u_1,1) &= 1 + h_u^u(0,1) H_3(u_1) + h_u^u(1,1) H_4(u_1) \\ l_u(1) &= |\bar{Q}(1,1) - \bar{Q}(0,1)|\end{aligned}$$

Die anderen, (3.5-3) entsprechenden Funktionen von u bzw. v sind:

$$\begin{aligned}\bar{Q}^v(u_0,0) &= A_v(u_0,0) l'_v(u) \bar{t}_v(u_0,0) \\ \bar{Q}^v(u_1,1) &= A_v(u_1,1) l'_v(u) \bar{t}_v(u_1,1) \\ h_v^v(u_0,0) &= C_v(u_0,0) (|A_v(u_0,0) \bar{t}_v(u_0,0) + A_v(u_1,1) \bar{t}_v(u_1,1)| - 2) \\ h_v^v(u_1,1) &= -C_v(u_1,1) (|A_v(u_0,0) \bar{t}_v(u_0,0) + A_v(u_1,1) \bar{t}_v(u_1,1)| - 2) \\ h'_v(u,v) &= 1 + h_v^v(u_0,0) H_3(v) + h_v^v(u_1,1) H_4(v) \\ l'_v(u) &= |\bar{Q}(u_1,1) - \bar{Q}(u_0,0)|\end{aligned}$$

(3.5-23)

Für den Fall, daß die Sehnenlänge des unteren Randes $v=0$ größer als die des oberen Randes ist, ergeben sich die Ableitungen wie folgt:

$$\frac{d\bar{Q}(u_0,0)}{du} = \bar{Q}^{u_0}(u_0,0) \frac{du_0}{du} = \bar{Q}^u(u,0) \frac{du_0}{du} \quad (3.5-24)$$

$$\frac{d\bar{Q}(u_1,1)}{du} = \bar{Q}^{u_1}(u_1,1) \frac{du_1}{du} = \bar{Q}^u(u,1) \frac{du_1}{du} \quad (3.5-25)$$

Für $u_0=0$ und $u_0=1$ sowie $u_1=0$ und $u_1=1$ folgen:

$$\left. \frac{d\bar{Q}(u_0,0)}{du} \right|_{u_0=0} = \bar{Q}^u(0,0) \frac{|\bar{Q}^u(0,1)|}{|\bar{Q}^u(0,0)|} = |\bar{Q}^u(0,1)| \bar{t}_u(0,0) \quad (3.5-26)$$

$$\left. \frac{d\bar{Q}(u_0,0)}{du} \right|_{u_0=1} = \bar{Q}^u(1,0) \frac{|\bar{Q}^u(1,1)|}{|\bar{Q}^u(1,0)|} = |\bar{Q}^u(1,1)| \bar{t}_u(1,0) \quad (3.5-27)$$

$$\left. \frac{d\bar{Q}(u_1,1)}{du} \right|_{u_1=0} = \bar{Q}^u(0,1) = |\bar{Q}^u(0,1)| \bar{t}_u(0,1) \quad (3.5-28)$$

$$\left. \frac{d\bar{Q}(u_1,1)}{du} \right|_{u_1=1} = \bar{Q}^u(1,1) = |\bar{Q}^u(1,1)| \bar{t}_u(1,1) \quad (3.5-29)$$

Daraus ergeben sich

$$\left| \left(\frac{d\bar{Q}(u_0,0)}{du} \right)_{u_0=0} \right| = \left| \left(\frac{d\bar{Q}(u_1,1)}{du} \right)_{u_1=0} \right| \quad (3.5-30)$$

$$\left| \left(\frac{d\bar{Q}(u_0,0)}{du} \right)_{u_0=1} \right| = \left| \left(\frac{d\bar{Q}(u_1,1)}{du} \right)_{u_1=1} \right| \quad (3.5-31)$$

Verwendet man (3.5-30) und (3.5-31) für die Flächenstücke $\bar{Q}_1(u,v)$ und $\bar{Q}_3(u,v)$, läßt sich feststellen, daß die Bedingung (3.5-16), somit auch (3.5-15), durch die Einführung von $u_0(u)$ und $u_1(u)$ erreicht ist.

Setzt man die Konstante aus (3.5-15) in (3.5-12) ein und schreibt die Gleichungen um, so ergeben sich:

$$\frac{A_{v1}^u(1,0)}{|\bar{Q}_1^u(1,0)|} = \frac{A_{v3}^u(0,0)}{|\bar{Q}_3^u(0,0)|}$$

$$\frac{A_{v1}^u(1,1)}{|\bar{Q}_1^u(1,1)|} = \frac{A_{v3}^u(0,1)}{|\bar{Q}_3^u(0,1)|} \quad (3.5-32)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen der Bogenlänge $L(u)$ einer u -Linie bei $v=c$ ($c=0$ bzw. $c=1$) und dem Parameter u ,

$$\frac{dL}{du} = |\bar{Q}'^u(u,c)| \quad (3.5-33)$$

läßt sich (3.5-32) mit Hilfe der Kettenregel so umformulieren:

$$A_{v1}^L(1,0) = A_{v3}^L(0,0)$$

$$A_{v1}^L(1,1) = A_{v3}^L(0,1) \quad (3.5-34)$$

Der Index L bedeutet hier die Ableitung nach der Bogenlänge der u -Netzlinien. Die Gleichungen bedeuten, daß die Parameter A_v mit stetiger Ableitung nach der Bogenlänge der u -Netzlinien verlaufen müssen, damit die Flächenstücke \bar{Q}'_1 und \bar{Q}'_3 knickfrei ineinanderübergehen.

Analoge Bedingungen gelten für die Parameter c_v in (3.5-13) und die Tangenteneinheitsvektoren \bar{t}_v in (3.5-14):

$$c_{v1}^L(1,0) = c_{v3}^L(0,0)$$

$$c_{v1}^L(1,1) = c_{v3}^L(0,1) \quad (3.5-35)$$

$$\bar{t}_{v1}^L(1,0) = \bar{t}_{v3}^L(0,0)$$

$$\bar{t}_{v1}^L(1,1) = \bar{t}_{v3}^L(0,1) \quad (3.5-36)$$

Da die Parameter c_v der v -Linien aller Flächenstücke gleich dem Standardwert 1 bleiben, sind die Ableitungen c_v^L alle gleich 0, so daß (3.5-35) erfüllt ist.

Dagegen können die Parameter A_v der v -Linien vom Standardwert 1 abweichen, wenn die Bedingung für Kegelschnitte angegeben wird. Zur Bestimmung von $A_v(u,0)$ und $A_v(u,1)$ werden die Ableitungen dieser Funktionen nach u an den Knoten der u -Netzlinien einfach gleich 0 gesetzt. Damit sind die Gleichungen (3.5-34) erfüllt. Die A -Funktionen lassen sich dann nach folgender Formel berechnen:

$$A_v(u_0,0) = [A_v(0,0) \ A_v(1,0)] \begin{bmatrix} H_1(u_0) \\ H_2(u_0) \end{bmatrix}$$

$$A_v(u_1,1) = [A_v(0,1) \ A_v(1,1)] \begin{bmatrix} H_1(u_1) \\ H_2(u_1) \end{bmatrix} \quad (3.5-37)$$

Dabei sind die Größen $A_v(0,0)$, $A_v(0,1)$ und $A_v(1,0)$ und $A_v(1,1)$ in der rechten Seite der Gl. (3.5-37), die bei der Definition der v -Kurven benutzten Parameter A . Die Gründe dafür, daß die primitive Interpolationsformel (3.5-37) statt einer ausgefeilten, einen wellenfreien Verlauf liefernden Interpolationsmethode für ausreichend gehalten wird, sind:

1. Die Abweichungen der beiden Parameter A_v eines v -Kurvenstücks vom Standardwert 1, die sich bei einem Kegelschnitt ergeben, sind etwa zu dem Unterschied der Winkel zwischen beiden Endtangente und Sehne proportional (siehe hierzu den Abschnitt 2.4). Bei den v -Linien verwendet man die Bedingungen für Kegelschnitte an Boden- oder Seiteneinlauf. Dort sind die Unterschiede normalerweise nicht allzu groß, so daß die Parameter A_v zweier benachbarter v -Linien auch nicht allzu stark voneinander abweichen.
2. Sollte es notwendig werden, kann der Verlauf von $A_v(u,0)$ und $A_v(u,1)$ durch Definition zusätzlicher Netzlinien beeinflußt werden.

3. Die Formel (3.5-37) vermeidet eine Beeinflussung benachbarter Flächenstücke.

Der Tangenteneinheitsvektor $\bar{t}_v(u_0,0)$ in (3.5-23) wird analog zu dem Koordinatenvektor $\bar{Q}(u_0,0)$ berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{t}_v(u_0,0) &= \frac{1}{h_t(u_0,0)} \times \\ &\times \left[\bar{t}_v(0,0) \bar{t}_v(1,0) \bar{t}_v^u(0,0) + \bar{t}_v(0,0) h_t^u(0,0) \bar{t}_v^u(1,0) + \bar{t}_v(1,0) h_t^u(1,0) \right] \times \\ &\times \begin{bmatrix} H_1(u_0) \\ H_2(u_0) \\ H_3(u_0) \\ H_4(u_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5-38)$$

mit

$$h_t^u(0,0) = -h_t^u(1,0) = \frac{|\bar{t}_v^u(1,0) + \bar{t}_v^u(0,0)|}{|\bar{t}_v(1,0) - \bar{t}_v(0,0)|} - 2$$

$$h_t(u_0,0) = 1 + h_t^u(0,0) H_3(u_0) + h_t^u(1,0) H_4(u_0)$$

Die Parameter c für die Berechnung von $h_t^u(0,0)$ und $h_t^u(1,0)$ sind hier mit 1 eingesetzt. Analoge Formeln gelten für $\bar{t}_v(u_1,1)$:

$$\begin{aligned} \bar{t}_v(u_1,1) &= \frac{1}{h_t(u_1,1)} \times \\ &\times \left[\bar{t}_v(0,1) \bar{t}_v(1,1) \bar{t}_v^u(0,1) + \bar{t}_v(0,1) h_t^u(0,1) \bar{t}_v^u(1,1) + \bar{t}_v(1,1) h_t^u(1,1) \right] \times \\ &\times \begin{bmatrix} H_1(u_1) \\ H_2(u_1) \\ H_3(u_1) \\ H_4(u_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5-39)$$

mit

$$h_t^u(0,1) = -h_t^u(1,1) = \frac{|\bar{t}_v^u(1,1) + \bar{t}_v^u(0,1)|}{|\bar{t}_v^u(1,1) - \bar{t}_v^u(0,1)|} - 2$$

$$h_t(u_1,1) = 1 + h_t^u(0,1) H_3(u_1) + h_t^u(1,1) H_4(u_1)$$

Für eine vollständige Definition des Flächenstücks bleiben noch die Ableitungen nach u der Tangenteneinheitsvektoren in der v -Richtung an den vier Ecken $\bar{t}_v^u(0,0)$, $\bar{t}_v^u(1,0)$, $\bar{t}_v^u(0,1)$ und $\bar{t}_v^u(1,1)$ zu bestimmen. Berechnet man sie aus ihren Ableitungen nach L so, daß die Bedingungen (3.5-36) erfüllt sind, läßt sich der knickfreie Übergang zwischen den nebeneinanderliegenden Flächenstücken $\bar{Q}'_1(u,v)$ und $\bar{Q}'_3(u,v)$ erreichen. Das so dargestellte Flächenstück liefert auch einen knickfreien Übergang zwischen den im Bild 18 übereinanderliegenden Flächenstücken $\bar{Q}'_1(u,v)$ und $\bar{Q}'_2(u,v)$: Bezeichnet man den Parameter u_0 für die untere u -Randkurve des Flächenstücks $\bar{Q}'_2(u,v)$ mit u_{02} und den Parameter u_1 für die obere u -Randkurve des Flächenstücks $\bar{Q}'_1(u,v)$ mit u_{11} , ergibt sich aus (3.5-39) und (3.5-40) bei $u_{02} = u_{11}$

$$\bar{t}_{v1}(u_{11},1) = \bar{t}_{v2}(u_{02},0) \quad (3.5-40)$$

wenn die v -Netzlinsen knickfrei sind.

Für die Ermittlung der Ableitungen von \bar{t}_v nach u werden zunächst Verfahren zur Bestimmung der gemischten Ableitungen betrachtet, da die beiden analoge mathematische Eigenschaften haben.

3.6 Verfahren zur Bestimmung der gemischten Ableitungen

Die gemischten Ableitungen eines bikubischen Flächenstücks geben die Verwindung in den Eckpunkten an, beeinflussen aber nicht die Randkurven. Coons [10] gibt verschiedene Methoden an, mit denen die gemischten Ableitungen eines Flächenstücks bestimmt werden können. Beispielsweise besteht eine Methode darin, vom Benutzer zwei zusätzliche v -Linien im Inneren des Flächenstücks definieren zu lassen; aus diesen zusätzlichen Angaben folgen die gemischten Ableitungen eindeutig. Lee [29] hat die Methoden zur Darstellung der Flächen wie Kugel, Zylinder, Torus usw. mit birationalen kubischen Flächenstücken in Form des kartesischen Produkts angewendet. Bei einer Fläche, die sich aus mehreren Flächenstücken zusammensetzt, müssen die gemischten Ableitungen so bestimmt werden, daß die benachbarten Flächenstücke an den Grenzlinien dieselben Tangentenrichtungen besitzen. Diese Forderungen können nicht durch die von Coons in [10] angegebenen Methoden erreicht werden.

Eine sehr einfache Flächendarstellung zur Interpolation eines vorgegebenen Netzes erhält man nach Ferguson [13], indem man die Verwindung gleich 0 setzt. Durch diese Annahme läßt sich die innere Gestalt eines Flächenstücks schlecht erfassen, und es kann zu lokalen Beulen zwischen glatten Netzlinien kommen. Deswegen ist diese Methode nur für eine grobe Darstellung oder bei Benutzung eines sehr engen Netzwerks geeignet.

Walter [60] hat statt dessen die gemischten Ableitungen für bikubische Coonsche Flächen (in kartesischer Produktform) mit einem Variationsansatz nach dem Kriterium minimaler Formänderungsenergie einer elastischen viereckigen Platte bestimmt.

Ein noch aufwendigeres, allgemeiner formuliertes Flächenmodell hat Munchmeyer [32] vorgeschlagen: um auch einen stetigen Krümmungsverlauf an den Grenzlinien benachbarter Flächenstücke zu ermöglichen, wählte er Coons-Flächen 5. Grades. Da diese mehr Unbekannte haben, als sich aus den Übergangsbedingungen der Flächenstücke bestimmen lassen, werden die restlichen Unbekannten nach einem Minimierungskriterium ähnlich wie bei Walter [60] bestimmt.

Wenn die Tangentenvektoren in den Endpunkten aller Netzlinien und auch die vier Verwindungsvektoren in den Eckpunkten der gesamten Fläche gegeben sind, können die Verwindungsvektoren in allen Kreuzpunkten der Netzlinien durch Auflösung eines Gleichungssystems bestimmt werden ([13] S. 208-210). Da man normalerweise aber keine Vorstellung von den gemischten Ableitungen hat, ist die Angabe solcher Parameter durch den Benutzer des Verfahrens im allgemeinen schwierig.

Verlaufen die v -Netzlinien in parallelen Ebenen, so können die gemischten Ableitungen durch die Änderung der Tangentenrichtung über der Bogenlänge der u -Netzlinien ausgedrückt werden. In [49] werden diese Änderungen durch Spline-Interpolation der Spantsteigungswinkel (gemessen gegen die z -Achse) über den räumlichen Abständen der Stützpunkte der Längslinien (u -Netzlinien) gewonnen. Dafür kann die gleiche Methode wie zur Kurvendarstellung benutzt werden.

3.7 Bestimmung der Ableitungen nach u der Tangenteneinheitsvektoren in der v -Richtung

Um ein Flächenstück vollständig zu definieren, bleiben $\bar{t}_v^u(0,0)$, $\bar{t}_v^u(1,0)$, $\bar{t}_v^u(0,1)$ und $\bar{t}_v^u(1,1)$ noch zu bestimmen. Diese Größen stellen die Verwindungen in den vier Ecken des Flächenstücks dar. Für glatte Flächen muß die Verwindung entlang glatten u -Netzlinien auch glatt verlaufen. Oft kreuzen die v -Netzlinien dieselbe u -Netzlinie in sehr unterschiedlichen Abständen und Richtungen und bilden daher unregelmäßige Maschen. Deshalb stellt das Straken von \bar{t}_v nicht direkt die Glätte der Flächen dar. Die Glätte der Flächen ist jedoch erreichbar, wenn der Flächennormalenvektor glatt entlang glatten u -Netzlinien verläuft. Darum werden die Ableitungen \bar{t}_v^u in den Ecken der Flächenstücke mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektors der u -Netzlinien \bar{t}_u und des Flächennormalenvektors bestimmt.

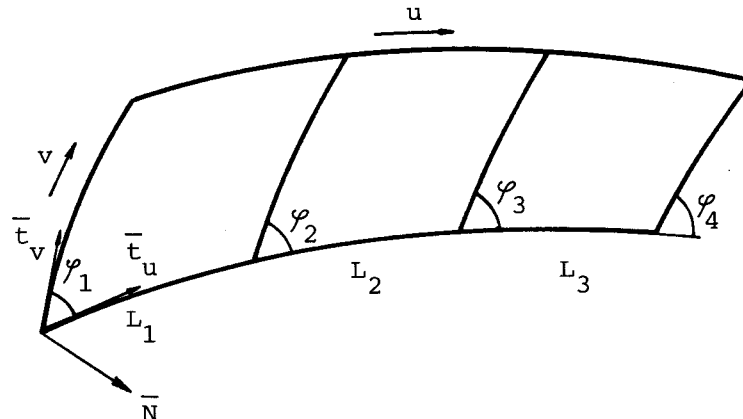


Bild 19 Beschreibung des Tangentenvektors in der v -Richtung \bar{t}_v entlang der u -Netzlinien

Wird der Winkel zwischen einem Tangenteneinheitsvektor in der v -Richtung \bar{t}_v und einem in der u -Richtung \bar{t}_u mit φ bezeichnet (Bild 19), gilt die Beziehung:

$$\bar{t}_v \cdot \bar{t}_u = \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (3.7-1)$$

An den Rändern $\bar{Q}(u_0, 0)$ und $\bar{Q}(u_1, 1)$ eines Flächenstücks kann \bar{t}_u überall berechnet werden. Durch φ allein ist \bar{t}_v allerdings noch nicht eindeutig festgelegt; man braucht dazu noch folgende Beziehung:

$$\bar{t}_v \times \bar{t}_u = \sin \varphi \bar{N} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (3.7-2)$$

\bar{N} ist der Flächennormalenvektor mit dem Betrag 1. Aus (3.7-1) und (3.7-2) kann \bar{t}_v eindeutig bestimmt werden, wenn φ , \bar{N} und \bar{t}_u bekannt sind:

$$\bar{t}_v = \cos \varphi \bar{t}_u + \sin \varphi (\bar{t}_u \times \bar{N}) \quad (3.7-3)$$

Daraus ergibt sich die Ableitung von \bar{t}_v nach u

$$\begin{aligned} \bar{t}_v^u = & -\sin \varphi \varphi^u \bar{t}_u + \cos \varphi \bar{t}_u^u + \cos \varphi \varphi^u (\bar{t}_u \times \bar{N}) + \\ & + \sin \varphi (\bar{t}_u^u \times \bar{N} + \bar{t}_u \times \bar{N}^u) \end{aligned} \quad (3.7-4)$$

Zur Bestimmung von \bar{t}_v^u in den Ecken der Flächenstücke sind dort φ^u und \bar{N}^u zu ermitteln, während sich die übrigen Größen in (3.7-4) aus den Randkurven berechnen lassen.

Die Bestimmung von φ^u erfolgt durch Straken des Winkels φ entlang jeder u -Netzlinie. Für $0 \leq \varphi \leq \pi$ läßt sich der Winkel φ in den Schnittpunkten der Netzlinien aus (3.7-1) berechnen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos (\bar{t}_v \cdot \bar{t}_u), & \text{wenn } |\bar{t}_v \cdot \bar{t}_u| &\leq 0.7071 \\ \varphi &= \arcsin (|\bar{t}_v \times \bar{t}_u|), & \text{wenn } 0.7071 < \bar{t}_v \cdot \bar{t}_u < 1 \\ \varphi &= \pi - \arcsin (|\bar{t}_v \times \bar{t}_u|), & \text{wenn } -1 < \bar{t}_v \cdot \bar{t}_u < -0.7071 \end{aligned} \quad (3.7-5)$$

Diese Winkel werden in allen Knoten jeder u -Netzlinie berechnet und mit dem beschriebenen Verfahren zur Darstellung von Kurven über der Bogenlänge L der u -Netzlinien interpoliert. Damit ist der Winkel nach L in den Knoten stetig differenzierbar, so daß seine Ableitungen nach L bestimmt werden können. Durch die

Kettenregel lassen sich diese Ableitungen in solche nach u umrechnen:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{d\varphi}{dL} \frac{dL}{du} = |\bar{Q}'^u(u,v)| \frac{d\varphi}{dL} \quad (v=0 \text{ oder } 1) \quad (3.7-6)$$

Demgegenüber ist die Bestimmung der Ableitung nach u der Flächennormale \bar{N}^u umfangreicher. Da \bar{N} senkrecht auf \bar{t}_u steht, liegt \bar{N} in der Normalebene (E) der u -Netzlinien (Bild 20)

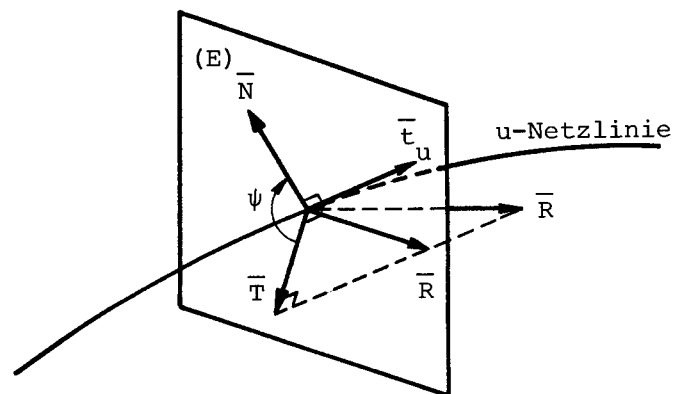


Bild 20 Beschreibung des Flächennormalenvektors \bar{N} in der Normalebene (E) einer u -Netzlinie

Um die Lage der Flächennormale \bar{N} auf der Normalebene der u -Netzlinie zu beschreiben, wird ein Bezugsvektor \bar{R} unabhängig von u so definiert, daß \bar{R} nirgendwo der u -Netzlinie parallel ist. \bar{R} wird dann auf die Normalebenen der u -Netzlinie in den Knoten projiziert. Die Projektion von \bar{R} auf (E) wird mit \bar{T} bezeichnet. Ist die u -Netzlinie eine ebene Kurve, erweist es sich als am zweckmäßigsten, \bar{R} parallel zu dem Normalenvektor der Ebene zu wählen, in der die u -Netzlinie liegt. In dem Fall sind \bar{T} und \bar{R} identisch, da \bar{R} senkrecht zu der Tangentenrichtung der u -Netzlinie \bar{t}_u , somit parallel zu der Normalebene der u -Netzlinie steht. Der Winkel zwischen \bar{T} und \bar{N} wird zur Definition der Flächennormale benutzt. Er wird als positiv definiert, wenn \bar{T} , \bar{N} und \bar{t}_u in dieser Reihenfolge ein

Rechtssystem bilden; d.h. $\psi \geq 0$, falls $(\bar{T} \times \bar{N}) \cdot \bar{t}_u \geq 0$ ist; sonst $\psi < 0$.
Aus \bar{t}_u und \bar{R} läßt sich \bar{T} bestimmen:

$$\bar{T} = -(\bar{t}_u \cdot \bar{R}) \bar{t}_u + \bar{R} \quad (3.7-7)$$

Daraus ergibt sich sein Einheitsvektor \bar{e}_t :

$$\bar{e}_t = \bar{T}/|\bar{T}| \quad (3.7-8)$$

und dessen Ableitung nach u :

$$\frac{d\bar{e}_t}{du} = \frac{1}{|\bar{T}|} \left[\frac{d\bar{T}}{du} - \bar{e}_t (\bar{e}_t \cdot \frac{d\bar{T}}{du}) \right] \quad (3.7-9)$$

mit

$$\frac{d\bar{T}}{du} = -(\bar{t}_u \cdot \bar{R}) \bar{t}_u^u - (\bar{t}_u^u \cdot \bar{R}) \bar{t}_u \quad (3.7-10)$$

Analog zu (3.7-1) und (3.7-2) bestehen folgende Beziehungen zwischen \bar{e}_t , \bar{N} , \bar{t}_u und ψ :

$$\bar{e}_t \cdot \bar{N} = \cos \psi \quad (3.7-11)$$

$$\bar{e}_t \times \bar{N} = \sin \psi \bar{t}_u \quad (3.7-12)$$

Aus (3.7-11) und (3.7-12) ergibt sich

$$\bar{N} = \cos \psi \bar{e}_t - \sin \psi (\bar{e}_t \times \bar{t}_u) \quad (3.7-13)$$

(Vorzeichen - statt + in (3.7-3) wegen der umgekehrten Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukt). Daraus ergibt sich die Ableitung der Flächennormale nach u :

$$\begin{aligned} \bar{N}^u = & -\sin \psi \psi^u \bar{e}_t + \cos \psi \frac{d\bar{e}_t}{du} - \cos \psi \psi^u (\bar{e}_t \times \bar{t}_u) - \\ & -\sin \psi \left(\frac{d\bar{e}_t}{du} \times \bar{t}_u + \bar{e}_t \times \bar{t}_u^u \right) \end{aligned} \quad (3.7-14)$$

Ebenso wie bei dem Winkel φ werden die Ableitungen des Winkels ψ nach u durch Straken von ψ über die Bogenlänge L der u -Netzlinie ermittelt. Am i -ten Knoten gelten aus (3.7-11) und (3.7-12):

$$\begin{aligned}\cos \psi_i &= (\bar{e}_t \cdot \bar{N})_i \\ \sin \psi_i &= (\bar{e}_t \times \bar{N} \cdot \bar{t}_u)_i\end{aligned}\quad (3.7-15)$$

Der erste Winkel wird daher nach folgenden Formeln berechnet:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \arccos(\bar{e}_t \cdot \bar{N})_1, & \text{wenn } |(\bar{e}_t \cdot \bar{N})_1| &\leq 0.7071 \\ \psi_1 &= \arcsin|(\bar{e}_t \times \bar{N})_1|, & \text{wenn } 0.7071 < (\bar{e}_t \cdot \bar{N})_1 &\leq 1 \\ \psi_1 &= \text{sign}(\bar{e}_t \times \bar{N} \cdot \bar{t}_u)_1 \left[\pi - \arcsin|(\bar{e}_t \times \bar{N})_1| \right], & \text{wenn } -1 &\leq (\bar{e}_t \cdot \bar{N})_1 < -0.7071\end{aligned}\quad (3.7-16)$$

Ausgehend von dem Anfangswinkel ψ_1 lassen sich die folgenden mit einer Rekursionsformel berechnen, um eine plötzliche Sprungstelle dieses Winkels von der Größe 2π auszuschließen. Dabei wird $|\psi_{i+1} - \psi_i| \leq 90^\circ$ vorausgesetzt:

$$\psi_i = \psi_{i-1} + \arcsin(\sin \psi_i \cos \psi_{i-1} - \cos \psi_i \sin \psi_{i-1}) \quad i=2 \text{ bis } n \quad (3.7-17)$$

Ebenso wie bei der Darstellung der Netzlinien sind auch bei der Interpolation der Winkel φ und ψ End- und Nebenbedingungen zu beachten, damit z.B. Bereiche der Fläche, die eben sein sollen, nicht durch anschließende gekrümmte Flächen uneben werden. Dafür ist der Verlauf des Winkels ψ verantwortlich, da er allein die Lage der Tangentialebene der Fläche beschreibt. ψ muß in ebenen Bereichen der Fläche, die durch ebene u -Netzlinien aufgespannt werden, konstant sein. Dies erreicht man, wenn man sowohl für die u -Netzlinien als auch für die Interpolation von ψ Nebenbedingungen so vorschreibt, daß die Kurven im ebenen Flächenbereich nicht von den anschließenden gekrümmten Bereichen beeinflußt werden. Dementsprechend wird der Winkel ψ mit denselben Nebenbedingungen interpoliert, die vom Benutzer für die u -Netzlinien ange-

geben wurden. Weiter hat es sich als ausreichend erwiesen, ψ an den Enden stets mit "krummem Auslauf" zu interpolieren und für den Winkel φ dieselben End- und Nebenbedingungen wie für ψ anzusetzen.

Damit lassen sich \bar{N}^u aus (3.7-14) und \bar{t}_v^u in (3.7-4) mit Hilfe von Ableitungen der beiden Winkel nach u berechnen.

Die Wahl der Winkel φ und ψ hat den Vorteil, daß sie nicht auf ein festes Koordinatensystem, sondern auf die Netzlinien bezogen sind. Daher kann z.B. eine durch ein orthogonales Netz beschriebene Kugelfläche exakt interpoliert werden. Die mit dieser Wahl verbundenen Ableitungen \bar{t}_v^u aus (3.7-4) erfüllen aber nicht die Bedingungen (3.5-36), wenn die u -Netzlinien Stellen mit Krümmungsunstetigkeit haben. Dies läßt sich so erklären: Rechnet man \bar{t}_v^L aus \bar{t}_v^u durch

$$\bar{t}_v^L = \bar{t}_v^u \frac{du}{dL} \quad (3.7-18)$$

um und multipliziert dementsprechend die rechte Seite der Gl. (3.7-4) auch mit dem Faktor dL/du , läßt sich feststellen, daß \bar{t}_u^L unstetig an der Stelle ist, an der die Krümmung der u -Netzlinie unstetig ist, da \bar{t}_u^L dem Krümmungsvektor der u -Netzlinie gleicht. In den durchgeführten Beispielen hat es sich gezeigt, daß der Einfluß dieser Unstetigkeit jedoch ohne Bedeutung ist.

3.8 Schnittkurve einer Schiffsoberfläche mit einer Ebene

Ist eine Schiffsoberfläche nach der beschriebenen Methode definiert, lassen sich Schnittkurven mit beliebigen Ebenen berechnen. Solche Schnittkurven sind z.B. Spanten, Wasserlinien, Schnitte und Sente, die zur Darstellung und Kontrolle der Schiffsoberfläche benutzt werden. Sie werden getrennt aus allen Flächenstücken berechnet, aus denen die Schiffsoberfläche zusammengesetzt ist. Da eine allgemeine Lösung die Berechnung umständlich machen würde, werden nur Fälle betrachtet, in denen eine Ebene nur 2 Schnittpunkte mit allen Randkurven eines Flächenstücks haben darf. Die zwei Schnittpunkte mit zugehörigen krummlinigen Koordinaten werden mit $\bar{Q}'_a(u_a, v_a)$ und $\bar{Q}'_e(u_e, v_e)$ bezeichnet (Bild 21(a)). Ausnahme ist eine Ebene, die genau durch eine Ecke eines Flächenstücks geht oder in der eine der Randkurven liegt.

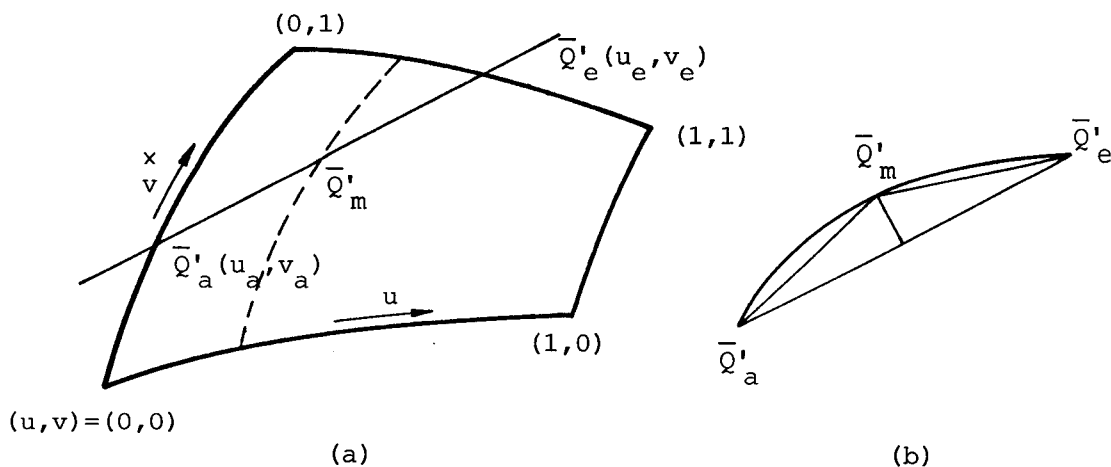


Bild 21 Schnittkurve eines Flächenstücks mit einer Ebene

Die Schnittkurve eines Flächenstücks mit einer Ebene ist im allgemeinen kein rationaler kubischer Spline. Sie wird deshalb punktweise bestimmt, indem noch weitere Schnittpunkte durch fortsetzende Unterteilungen der Schnittkurve bestimmt werden. Dabei wird die Schnittkurve zwischen \bar{Q}'_a und \bar{Q}'_e zunächst durch einen dritten Schnittpunkt \bar{Q}'_m unterteilt (Bild 22(b)). Falls

$|u_a - u_e| \geq |v_a - v_e|$ ist, ergibt sich der Punkt \bar{Q}'_m aus dem Schnitt der Ebene mit der v -Linie bei $u = (u_a + u_e)/2$ (Halbierung des u -Intervals zwischen u_a und u_e); sonst aus dem Schnitt der Ebene mit der u -Linie bei $v = (v_a + v_e)/2$. Ist die Abweichung des Punktes \bar{Q}'_m von der Geraden durch \bar{Q}'_a und \bar{Q}'_e größer als eine geforderte Genauigkeit, so sind weitere Unterteilungen für die Kurventeile zwischen \bar{Q}'_a und \bar{Q}'_m sowie \bar{Q}'_m und \bar{Q}'_e durchzuführen usw.; sonst werden die Unterteilungen beendet.

3.9 Flächeninterpolation

Bei einer im kartesischen Koordinatensystem definierten Schiffsoberfläche besteht die Aufgabe der Flächeninterpolation hauptsächlich darin, durch zwei gegebene Koordinaten die dritte zu bestimmen, wobei sich dies innerhalb der einzelnen Flächenstücke durchführen läßt. Zur Vereinfachung der Berechnung wird vorausgesetzt, daß das zu interpolierende Flächenstück über der von den zwei gegebenen Koordinaten aufgespannten Ebene eindeutig definiert ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die Oberfläche durch engere Unterteilung soweit zu verfeinern, bis entsprechend benötigte Flächenstücke zur Verfügung stehen.

Beispielsweise sind zwei Koordinaten x_i und z_i zu einem Flächenstück $\bar{Q}(u,v)$ zur Bestimmung von y_i gegeben. Dafür müssen die entsprechenden krummlinigen Koordinaten u und v zunächst aus x_i und z_i ermittelt werden:

$$\begin{aligned} X(u,v) &= X_i \\ Z(u,v) &= Z_i \end{aligned} \tag{3.9-1}$$

$X(u,v)$ und $Z(u,v)$ sind die x - und z -Komponenten von $\bar{Q}'(u,v)$ nach (3.5-20). Das nichtlineare Gleichungssystem (3.9-1) für die Unbekannten u und v kann z.B. mit der Methode nach Brown aufgelöst werden, wobei die Lösung des Systems im Intervall $0 < u,v < 1$ liegen muß.

3.10 Flächeninhalt

Für z.B. die Abschätzung des benötigten Materials für die Außenhaut eines Schiffes wird der Inhalt der Schiffsoberfläche gebraucht. Der Inhalt eines Flächenstücks ist definiert durch

$$F = \int_0^1 \int_0^1 | \bar{Q}'^u(u,v) \times \bar{Q}'^v(u,v) | \, du \, dv \quad (3.10-1)$$

$\bar{Q}'^u(u,v)$ und $\bar{Q}'^v(u,v)$ sind die Tangentenvektoren in der u - bzw. v -Richtung an der Stelle (u,v) . Sie lassen sich aus (3.5-20) berechnen. Die Integration kann z.B. nach der Methode von Gauß durchgeführt werden.

3.11 Beispiele

Bild 22(a) zeigt die Netzlinien für eine Segeljacht, Bild 23(a) für das Vorschiff eines ersten Mehrzweckfrachters und Bild 24(a) für das Hinterschiff eines zweiten Mehrzweckfrachters. Die Netzlinien sind mit der im Abschnitt 3.2 beschriebenen Eingabesprache aufgestellt und dienen als Grundlagen der darauf aufbauenden, noch zu vervollständigenden Flächenbeschreibungen. Die u -Netzlinien laufen dabei von hinten nach vorne und die v -Netzlinien von unten nach oben. Die Verwindungsvektoren in den Ecken aller durch die Netzlinien begrenzten Flächenstücke werden dann automatisch vom Rechner bestimmt, so daß die definierten Schiffsoberflächen für weitere Anwendungszwecke interpoliert werden können. Als grafische Ergebnisse zeigen die Bilder 22(b), 23(b) und 24(b) die jeweils aus den in den Bildern 22(a), 23(a) und 24(a) dargestellten Netzen interpolierten Kurven. Zwei größere Spantenrisse für das Vorschiff des ersten Mehrzweckfrachters und das Hinterschiff des zweiten Mehrzweckfrachters zeigen die Bilder 23(c) und 24(c). Daraus läßt sich feststellen, daß das entwickelte Verfahren eine für Fertigungszwecke ausreichend genaue und glatte Schiffsdarstellung erzeugen kann.

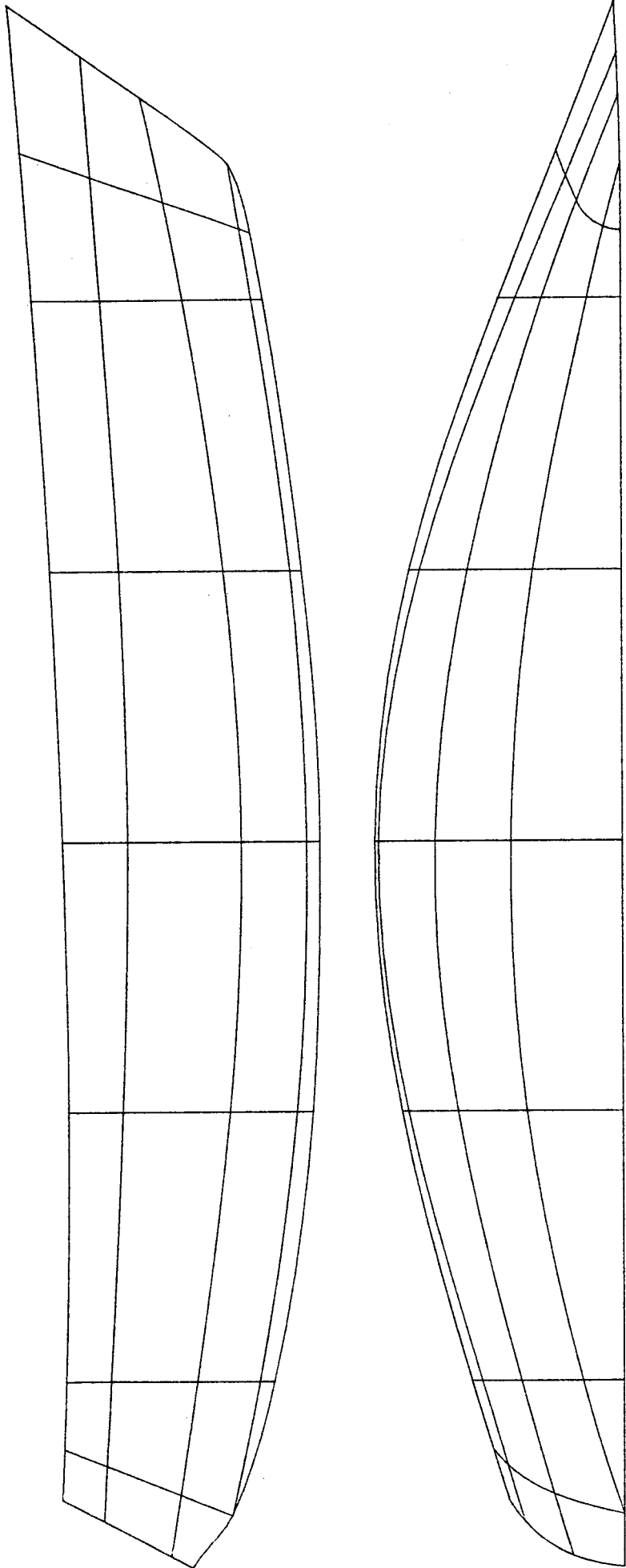
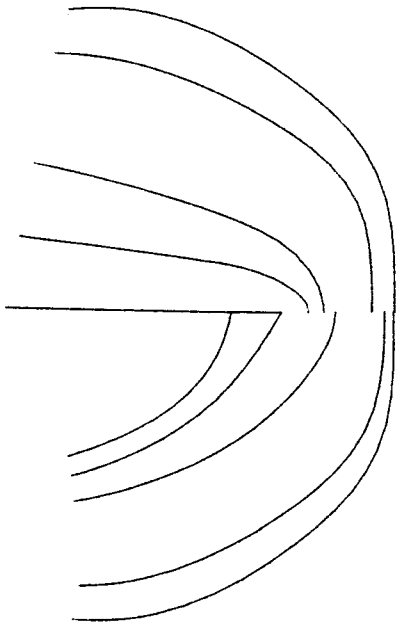


Bild 22(a) Netzlinien einer Segeljacht

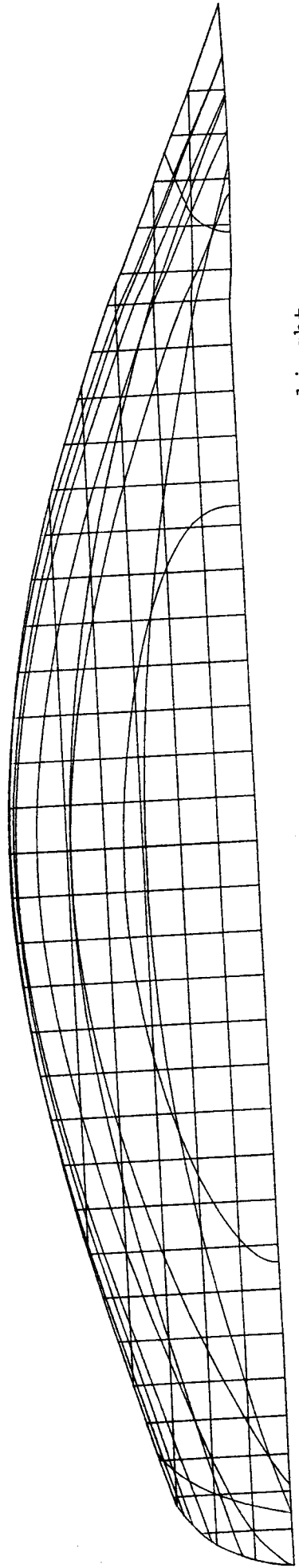
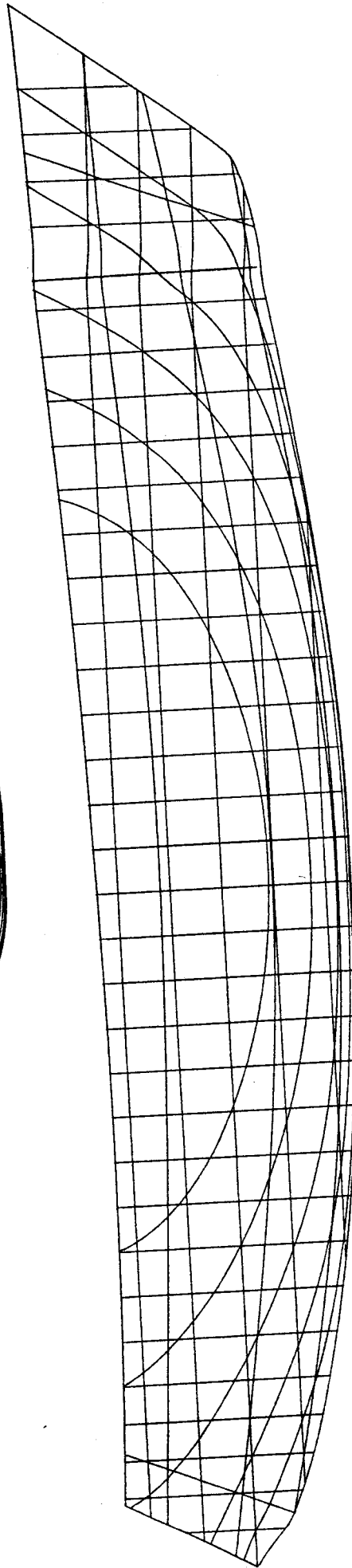
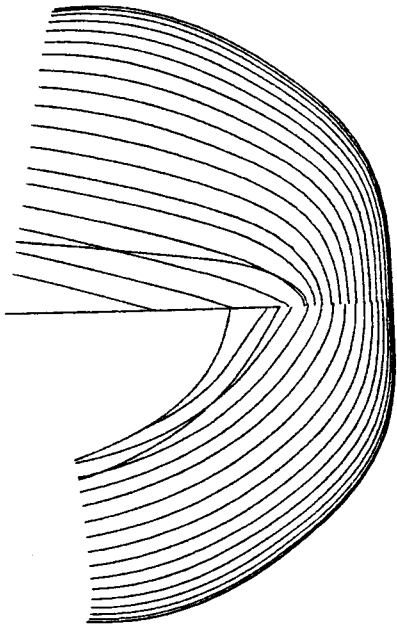


Bild 22 (b) Netzlinien und interpolierte Kurven einer Segeljacht

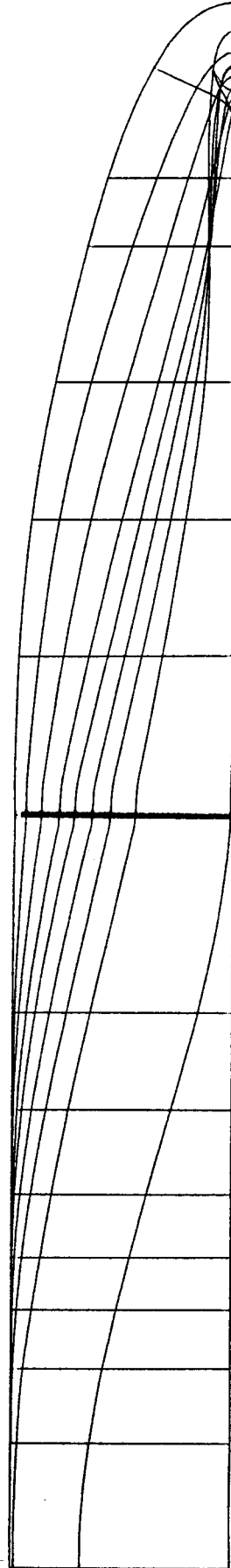
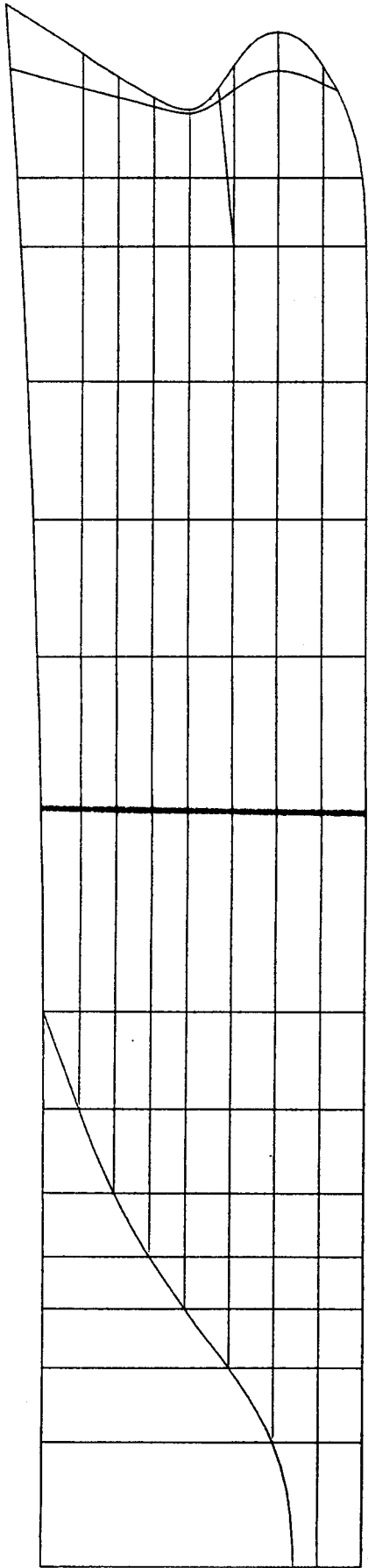
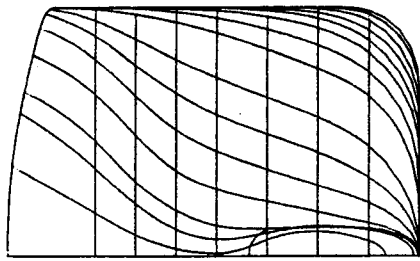


Bild 23(a) Netzlinien für das Vorschiff eines ersten Mehrzweckfrachters

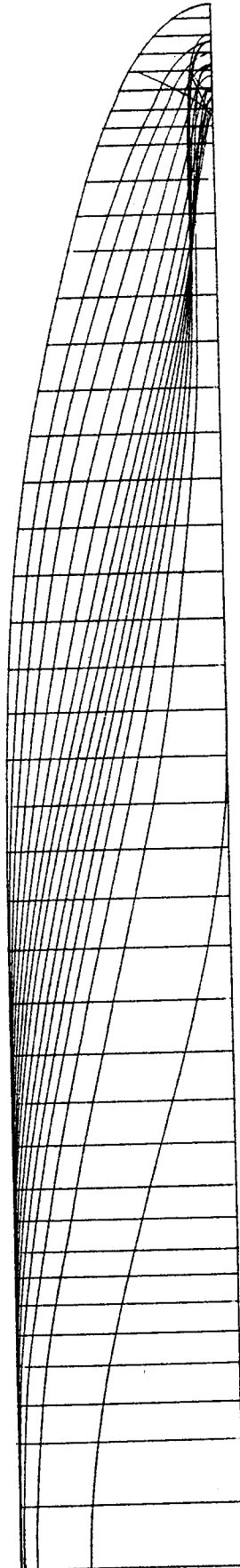
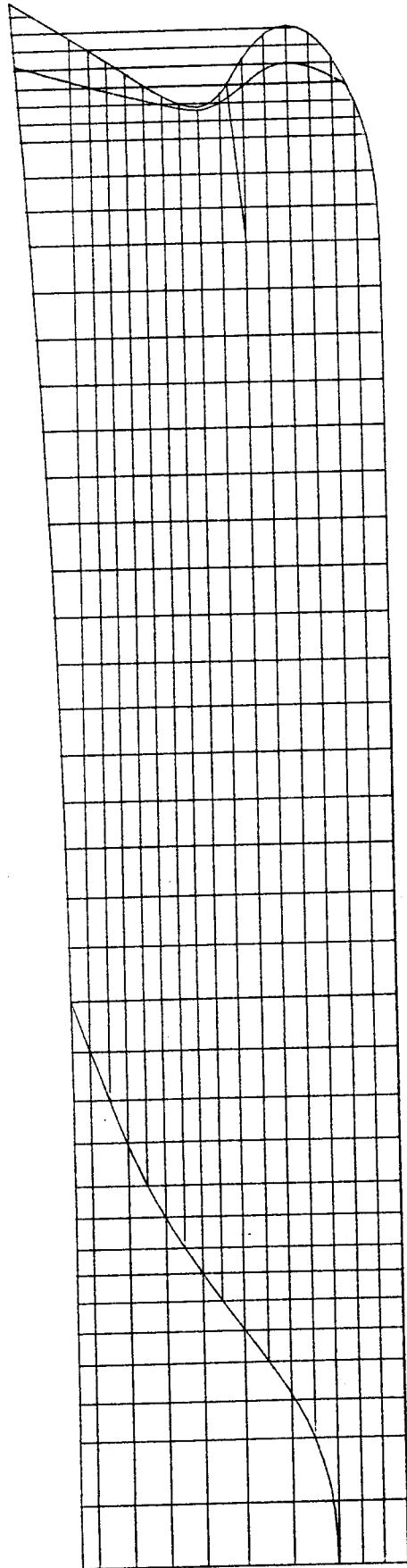
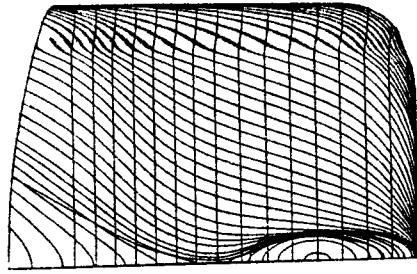


Bild 23(b) Netzlinien und interpolierte Kurven des Vorschiffs eines ersten Mehrzweckfrachters

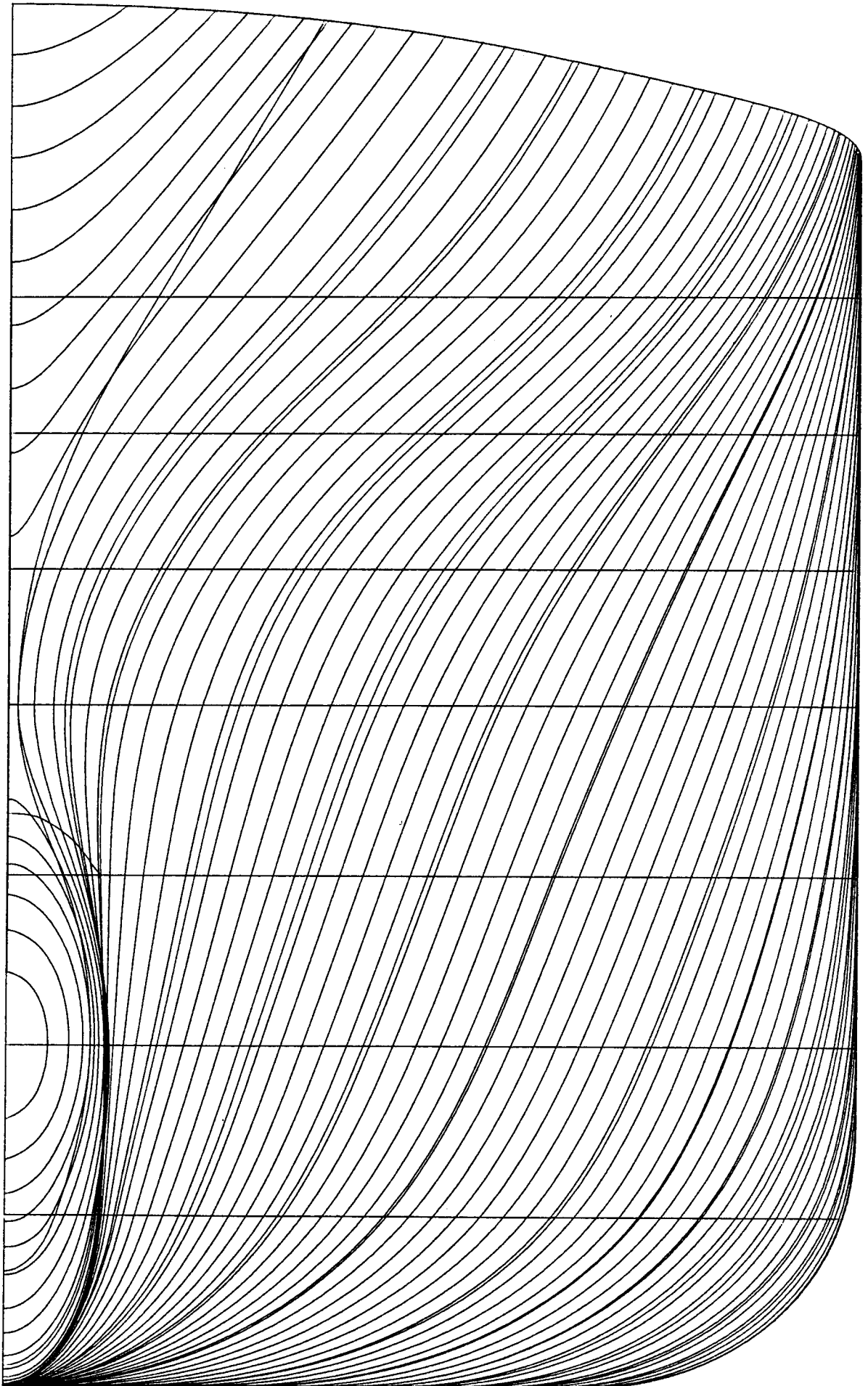


Bild 23(c) Spantrieb des Vorschiffs eines ersten Mehrzweckfrachters

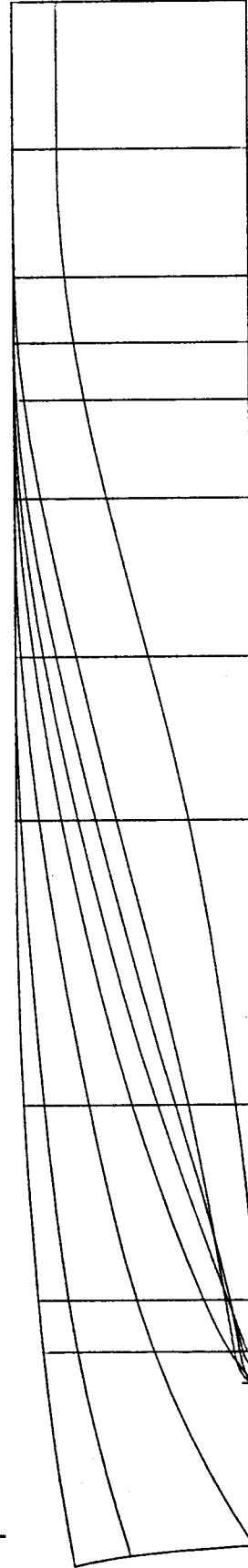
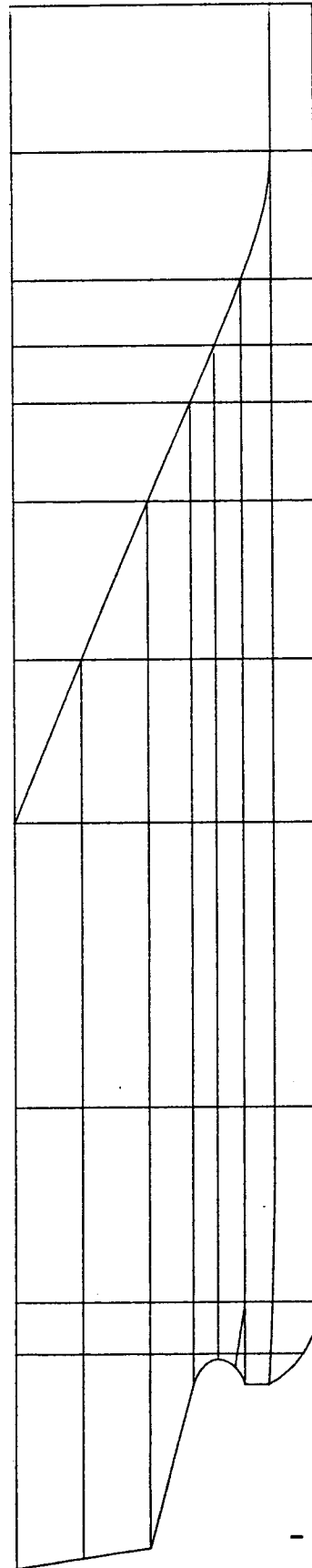
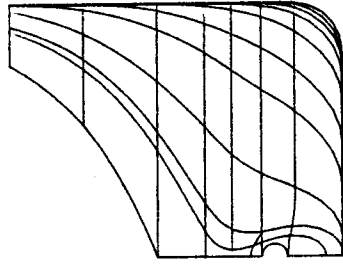


Bild 24(a) Netzlinien für das Hinterschiff eines zweiten Mehrzweckfrachters

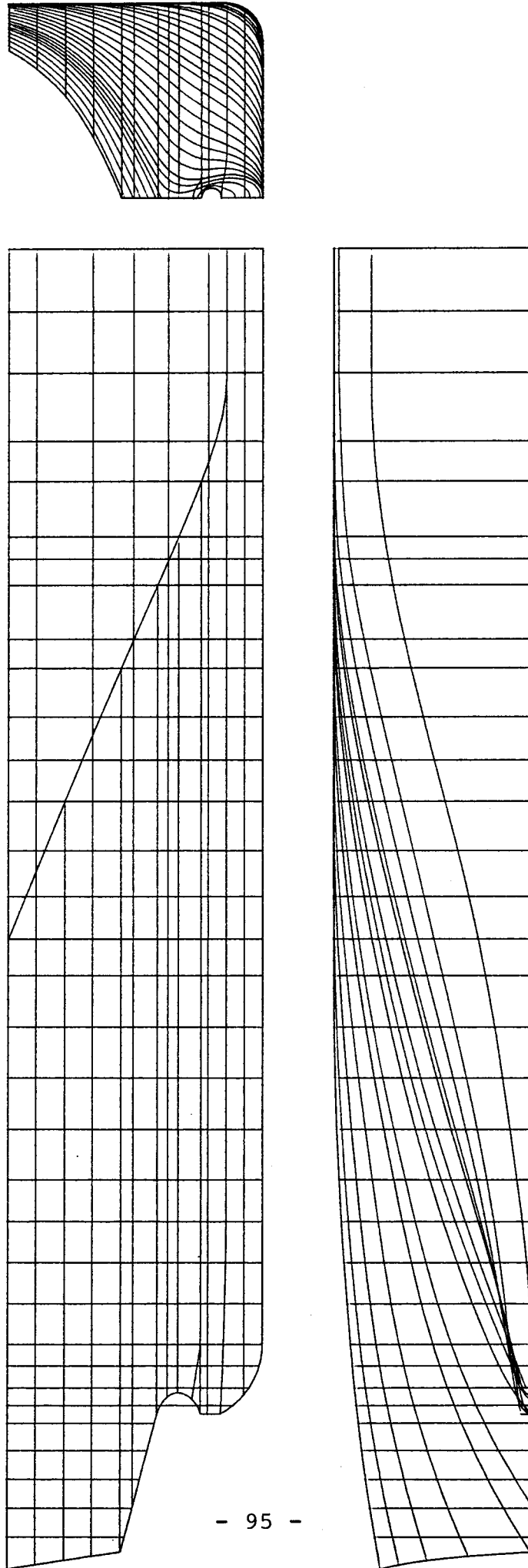


Bild 24 (b) Netzlinien und interpolierte Kurven des Hinterschiffs eines zweiten Mehrzweckfrachters

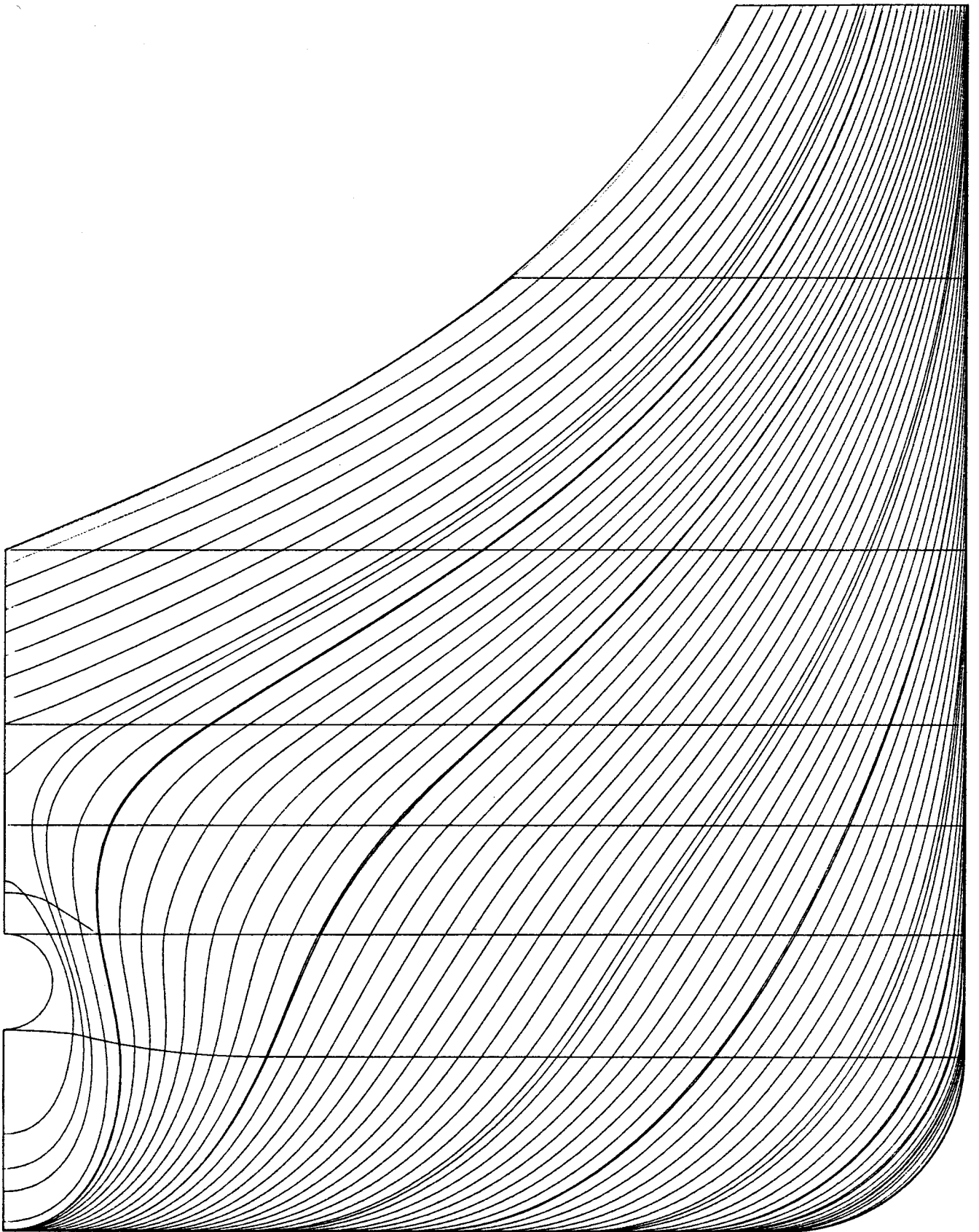


Bild 24(c) Spantriß des Hinterschiffs eines zweiten Mehrzweckfrachters

4. Zusammenfassung

Für die Erfassung von Schiffformen mit Computern wird eine Darstellung von Schiffsoberflächen durch Formeln gesucht. Dazu wird eine Methode entwickelt, die als Grundlage für die Flächenbeschreibung ein allgemeines Netz aus zwei Scharen von Raumkurven benutzt. Ausgangsbasis zur Erstellung des Netzes ist ein vorliegender Linienriß, aus dem man die benötigten Daten der Netzlinien (Koordinaten von Stützpunkten, gegebenenfalls auch Tangentenrichtungen und Krümmungskennwerte als End- bzw. Nebenbedingungen) ablesen kann. Die Daten der Netzlinien werden in einer von Söding [49] entwickelten, für die vorliegende Aufgabe erweiterten Eingabesprache dem Rechner übergeben. Dieser berechnet daraus die Koeffizienten von rationalen kubischen Splinekurven in Parameterform, durch die die Netzlinien dargestellt werden. Zwischen den Netzlinien wird die Fläche nach einer Methode interpoliert, die man als Erweiterung der rationalen kubischen Splines auf Flächen auffassen kann: Zwischen zwei benachbarten Netzlinien der einen Kurvenschar werden quer dazu, in Richtung der Netzlinien der 2. Kurvenschar Querkurven interpoliert, so daß sich eine Fläche ergibt, die die Netzlinien der 2. Kurvenschar enthält und die überall stetige Ordinaten und stetige Normalenvektoren der Fläche hat mit Ausnahme von Stellen, an denen Knicke der Oberfläche verlangt werden.

Von der Methode nach Söding unterscheidet sich das hier entwickelte Verfahren vor allem durch die Verwendung rationaler kubischer Splines (statt "gewöhnlicher" kubischer Splines) und durch die Wahl von zwei räumlich verlaufenden Netzlinienscharen (statt einer Schar ebener und einer Schar räumlicher Netzlinien in [49]). Diese Erweiterungen führen nicht nur zu ganz anderen Formeln und Algorithmen, sondern haben auch großen Einfluß auf die praktische Benutzung des Verfahrens, insbesondere auf den Arbeitsaufwand zur Beschreibung der Schiffform und den Rechenaufwand für die Verarbeitung im Computer. Die rationalen kubischen Splines kombinieren Eigenschaften der kubischen Splines und der Kegelschnitte und sind deshalb für die Darstellung von Schiffslinien, die sowohl frei entworfene Kurven als auch analytische Kurventeile wie

z.B. Kreisbögen enthalten, sehr gut geeignet. Sie haben zwar mehr Koeffizienten pro Kurvenstück als "gewöhnliche" kubische Splines, wodurch sich der Rechenaufwand erhöht, bieten dafür aber mehr Möglichkeiten zur Beeinflussung des Kurvenverlaufs, so daß man für die genaue Darstellung einer gegebenen Kurve mit weniger Kurvenstücken auskommt.

Die freiere Anordnung der Netzlinien bei dem hier entwickelten Verfahren hat ebenfalls den Vorteil, daß man die Netzlinien der zu beschreibenden Schiffsform besser anpassen kann und daher eine Schiffsoberfläche mit wenigeren Flächenstücken als nach [49] beschreiben kann. Vor allem an den Schiffsenden, für deren Beschreibung in den Spantebenen verlaufende Netzlinien wenig geeignet sind, benötigt das hier entwickelte Verfahren erheblich weniger Netzlinien und Flächenstücke. Damit wird auch der Arbeitsaufwand für die Erstellung der Eingabedaten geringer. Dies erleichtert auch die Übersicht und vermindert Fehler bei der Beschreibung des Netzes.

Der Hauptnachteil des Verfahrens gegenüber [49] ist der größere Rechenaufwand. Er folgt vor allem aus dem Zulassen von zwei räumlich gekrümmten Netzlinienscharen. Wenn man z.B. die Schnittkurve der Schiffsoberfläche mit Ebenen $x = \text{Konstant}$ (Spantebenen) berechnet, muß man nach dem neuen Verfahren alle Flächenstücke untersuchen, während bei [49] nur die Flächenstücke untersucht werden müssen, die zwischen zwei benachbarten Spant-Netzlinien rechts und links von der Schnittebene liegen. Während bei dem Verfahren [49] solche Schnittkurven ebenso wie die Netzlinien kubische Splines sind, sind die Schnittkurven hier im allgemeinen keine rationalen kubischen Splinekurven. Sie werden deshalb durch eine Folge von Schnittpunkten dargestellt. Dies führt auch zu einem höheren Speicherplatzbedarf, vor allem, wenn eine hohe Zeichengenauigkeit bei großem Zeichenmaßstab gefordert wird.

5. Literatur

- [1] Adams, J.A.:
Cubic Spline Curve Fitting with Controlled End
Conditions. Computer-aided Design, Vol. 6, No. 1, 1974,
S. 2-9.
- [2] Bär, G.:
Parametrische Interpolation empirischer Raumkurven.
ZAMM 57, 1977, S. 305-311.
- [3] Ball, A.A.:
CONSURF Part 1: Introduction of the Conic Lofting Tile.
Computer-aided Design, Vol. 6, No. 4, Okt. 1974.
- [4] Ball, A.A.:
CONSURF Part 2: Description of the Algorithms.
Computer-aided Design, Vol. 7, No. 4, Okt. 1975.
- [5] Ball, A.A.:
CONSURF Part 3: How the Program is Used.
Computer-aided Design, Vol. 9, No. 1, Jan. 1974.
- [6] Bakker, A.R.:
Application of a Computer to Some Shipbuilding Problems.
International Shipbuilding Progress 1965.
- [7] Barnhill, R.E.; Riesenfeld, R.F.:
Computer Aided Geometric Design.
Academic Press, New York/London, 1974.
- [8] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik.
Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/M., 1974.
- [9] Cline, A.K.:
Scalar and Planar Valued Curve Fitting Using Splines
under Tension. Commun. ACM, Vol. 17, No. 4, 1974,
S. 218-220.
- [10] Coons, S.A.:
Surface. Computer Graphics for Designers, Engineering
Summer Conference, University of Michigan, 1972.
- [11] Creutz, G.:
Kurven- und Flächenentwurf aus Formparametern mit
Hilfe von B-Splines. Dissertation, D 83, T.U. Berlin,
1977.
- [12] Encarnacao, J.L.:
Computer-Graphics. Programmierung und Anwendung von
graphischen Systemen. R. Oldenbourg-Verlag,
München - Wien, 1975.

- [13] Faux, I.D.; Pratt, M.J.:
Computational Geometry for Design and Manufacture.
Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1979.
- [14] Forrest, A.R.:
On Coons and Other Methods for the Representation
of Curved Surfaces. Computer Graphics and Image
Processing, New York, 1972.
- [15] Forrest, A.R.:
The Twisted Cubic Curve: a Computer-aided Geometric
Design Approach. Computer-aided Design, Vol. 2, No. 4,
July 1980.
- [16] Forrest, A.R.:
Mathematical Principles for Curve and Surface
Representation. Proc. of Conference on "Curved Surfaces
in Engineering", 1972, ICP Science and Technology Press
Ltd., S. 5-13.
- [17] Hattori, Y.; Matida, Y.:
Some Problems in Practical Improvement of Mathematical
Fairing. Proc. First International Symposium on Com-
puter-Aided Hull Surface Definition, SNAME, Annapolis,
1977, S. 61-70.
- [18] Izumida, K.; Matida, Y.:
Ship Hull Definition by Surface Techniques for Pro-
duction Use. Proc. ICCAS, Strathclyde, 1979, North
Holland Publ. Co., S. 95-104.
- [19] Kantorowitz, E.:
Mathematical Definition of Ship Surface.
Danish Ship Research Institute, Report No. DSF-14, 1967.
- [20] Kestner, W.; Saniter, J.; Strasser, W.; Trambacz, U.:
Einführung in Computer Graphics, Informationsforschungs-
gruppe Computer Graphics, Technische Universität Berlin,
Eigenverlag, Brennpunkt Kybernetik, Berlin, 1973, S. 6-1.
- [21] Kerwin, J.E.:
Polynomial Surface Representation of Arbitrary Ship Forms.
Journal of Ship Research.
- [22] Kjellander, J.A.P.:
Smoothing of Cubic Parametric Splines. Computer-aided
Design, Vol. 15, No.3, May 1983.
- [23] Kjellander, J.A.P.:
Smoothing of Bicubic Parametric Surfaces. Computer-aided
Design, Vol. 15, No. 5, Sept. 1983.
- [24] Kouh, J.-S.:
Routinen zur Kurvendarstellung mit kubischen Splines.
Bericht Nr. 437, Institut für Schiffbau der Universität
Hamburg, Okt. 1983.

- [25] Kouh, J.-S.:
Kurven- und Flächendarstellung in homogenen Koordinaten.
17. Kolloquium, SFB, Jan. 1983, Universität Hamburg.
- [26] Kuo, C.:
Computer Methods for Ship Surface Design.
Longman, London, 1971.
- [27] Kuo, C.:
Computer Applications in Ship Technology.
University of Strathclyde Glasgow, Scotland, Heyden 1977.
- [28] Kwik, K.:
Zur Mathematischen Darstellung von Schiffslinien.
Schiffstechnik, Heft 83, 1969.
- [29] Lee, T.M.P.:
Analysis of an Efficient Homogeneous Tensor Representation
of Surfaces for Computer Display. Advanced Computer
Graphics, Plenum Press, London, 1971.
- [30] Lewis, J.W.:
Interchanging Spline Curves Using IGES.
Computer-aided Design, Vol. 13, No. 6, Nov. 1981.
- [31] Lidbro, N.:
Analytische Formbestimmung von Schiffen. Schiffstechnik
Bd. 8, Heft 42, 1961.
- [32] Munchmeyer, F.C.:
Mathematical Ship Lines and Surfaces. Marine Technology,
Vol. 19, No. 3, July 1982.
- [33] Munchmeyer, F.C.; Schubert, C.; Nowacki, H.:
Interactive Design of Fair Hull Surfaces Using B-Splines.
Proc. ICCAS, Strathclyde, 1979, North Holland Publ. Co.,
S. 67-76.
- [34] Newman, M.M.; Sproull, R.F.:
Principles of Interactive Computer Graphics.
McGraw-Hill Book Co., New York, 1973.
- [35] Nielson, G.M.; Wixom, J.A.:
Approximation Theory Techniques for Curve and Surface
Description. Proc. First International Symposium on
Computer-aided Hull Surface Definition, SNAME, Annapolis,
1977, S. 107-130.
- [36] Nowacki, H.:
Methoden der grafischen Programmierung und des
grafisch-interaktiven Entwurfs. Rechnergestützter
Schiffsentwurf, 9. Fortbildungskurs, Institut für Schiff-
bau, Hamburg 1976.

- [37] Nowacki, H.; Creutz, G.; Munchmeyer, F.C.:
Ship Lines Creation by Computer - Objectives, Methods,
and Results. Proc. First International Symposium on
Computer-aided Hull Surface Definition, SNAME,
Annapolis, 1977, S. 1-18.
- [38] Nowacki, H.:
Entwicklung und Darstellung von Schiffssformen mit
Rechnerunterstützung. Zeitschrift für Binnenschifffahrt
und Wasserstraßen, Nr. 6, 1980.
- [39] Nowacki, H.; Reese, D.:
Design and Fairing of Ship Surfaces. Surface in Com-
puter-aided Geometric Design. Edited by R.E. Barnhill
and W. Böhm. North-Holland Publ. Co., 1982.
- [40] Pien, P.C.:
Mathematical Ship Surface. International Shipbuilding
Progress 1960, S. 161.
- [41] Rabien, U.:
Gebrauchsanleitung für das Programm Euklid 5 zur Be-
schreibung von Schiffskörperoberflächen. Institut für
Entwerfen von Schiffen und Schiffstheorie, Bericht Nr. 18,
Hannover 1976.
- [42] Rabien, U.:
Ship Surface Design by Transforming Given Mesh Re-
presentations. Proc. ICCAS, Strathclyde, 1979, North
Holland Publ. Co., S. 85-93.
- [43] Rabien, U.:
Rechnergestütztes Entwerfen von Schiffssformen durch
Transformation von Grundformdarstellungen. Schiffstechnik
Bd. 28, 1981, S. 25-58.
- [44] Schiffskörpermodelle. Beitrag in "Geometrisches
Modellieren". Informatik-Fachberichte, Bd. 65 Springer-
Verlag, 1983.
- [45] Reese, D.; Riedger, M.; Lang, R.:
Flächenhaftes Glätten und Verändern von Schiffsober-
flächen. Bericht 83/14, Institut für Schiffs- und
Meerestechnik, T.U. Berlin.
- [46] Roesing, W.; Berghuis, J.:
Mathematische Schiffssformen. Hansa 1961.
- [47] Rogers, D.F.; Adams, J.A.:
Mathematical Elements for Computer Graphics.
McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
- [48] Rogers, D.F.:
B-Spline Curves and Surfaces for Ship Hull Definition.
Proc. First International Symposium on Computer-aided
Hull Surface Definition, SNAME, Annapolis, 1977, s. 79-96.

- [49] Söding, H.:
Das Straken von Schiffslinien mit Digitalrechnern,
Hansa, S. 1386, 1967.
- [50] Söding, H.:
Ein Rechenprogramm zum Straken von Schiffslinien.
FDS-Bericht 9, 1969.
- [51] Söding, H.:
Beschreibung und Entwurf von Schiffformen mit Hilfe
von Rechnern, Rechnergestützter Schiffsentwurf, 9. Fort-
bildungskurs, Institut für Schiffbau, Hamburg 1976.
- [52] Söding, H.:
Rechnergestützter Schiffsentwurf. Vorlesungsskript,
Januar 1977.
- [53] Söding, H.; Rabien, U.:
Hull Surface Design by Modifying an Existing Hull. Proc.
First International Symposium on Computer-aided Hull
Surface Definition, SNAME, Annapolis, 1977, S. 19-29.
- [54] Söding, H.:
EDV-Programme für den Schiffsentwurf. Handbuch der
Werften, XIV. Band, 1978.
- [55] Söding, H.,:
Routinen zur Interpolation, Integration und Optimierung.
Institut für Entwerfen von Schiffen und Schiffstheorie,
Bericht Nr. 33, Hannover, März 1979.
- [56] Späth, H.:
Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und
Flächen. R. Oldenbourg Verlag, München-Wien, 1973.
- [57] Strubecker, K.:
Differentialgeometrie. Bd. 1, W.d. Gruyter Verlag,
Berlin, 1964.
- [58] Theilheimer, F.; Starkweather, W.:
The Fairing of Ship Lines on a High-Speed Computer.
DTMB Report 1474, Jan. 1961.
- [59] Theilheimer, F.; McKee, J.M.:
The Role of Splines in Computer-aided Ship Design.
Proc. First International Symposium on Computer-aided
Hull Surface Definition, SNAME, Annapolis, 1977, S. 71-77.
- [60] Walter, M.:
Numerische Darstellung von Oberflächen unter Verwendung
eines Optimalprinzips. Dissertation, T.U. München,
Juli 1971.
- [61] William, A.:
Mathematical Representation of Ordinary Ship Forms.
Schiff und Hafen, 1964.

- [62] Wu, S.-C.; Abel, J.F.; Greenberg, D.P.:
An Interactive Computer Graphics Approach to Surface
Representation. Commun. ACM, Vol. 20, No. 10, 1977.
- [63] Sonderforschungsbereich 98 "Schiffstechnik und Schiff-
bau", Hamburg - Hannover, Jahresbericht 1982, S. 108.

6. Anhang

Zwei ebene, in der xy -Ebene bzw. in der xz Ebene zwischen denselben x -Koordinaten verlaufende Kurvenstücke eines rationalen kubischen Splines werden als Projektionen einer Raumkurve auf die zwei Ebenen angesehen. Es wird untersucht, ob die so definierte Raumkurve ebenfalls ein rationales kubisches Spline-Kurvenstück ist.

Die zwei Projektionen seien

$$\bar{q}_1(u_1) = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) & \dot{x}_1(0) & \dot{x}_1(1) \\ y_1(0) & y_1(1) & \dot{y}_1(0) & \dot{y}_1(1) \\ h_1(0) & h_1(1) & \dot{h}_1(0) & \dot{h}_1(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u_1) \\ H_2(u_1) \\ H_3(u_1) \\ H_4(u_1) \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

und

$$\bar{q}_2(u_2) = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(1) & \dot{x}_2(0) & \dot{x}_2(1) \\ y_2(0) & y_2(1) & \dot{y}_2(0) & \dot{y}_2(1) \\ h_2(0) & h_2(1) & \dot{h}_2(0) & \dot{h}_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u_2) \\ H_2(u_2) \\ H_3(u_2) \\ H_4(u_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B})$$

Eine Raumkurve ist ein rationales kubisches Spline-Kurvenstück, wenn sie wie folgt dargestellt werden kann:

$$\bar{q}(u) = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dot{x}(0) & \dot{x}(1) \\ y(0) & y(1) & \dot{y}(0) & \dot{y}(1) \\ z(0) & z(1) & \dot{z}(0) & \dot{z}(1) \\ h(0) & h(1) & \dot{h}(0) & \dot{h}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \\ H_4(u) \end{bmatrix} \quad (\text{C})$$

Bezeichnet man als Singularität Stellen u , an denen wenigstens eine kartesische Koordinate $X(u) = x(u)/h(u)$, $Y(u) = y(u)/h(u)$ oder $Z(u) = z(u)/h(u)$ unendlich ist, so können (A) und (B) zusammen bis 4 verschiedene Singularitäten haben, denen auch in kartesischen Koordinaten 4 verschiedene Kurvenarten entsprechen. (C) kann jedoch maximal 2 Singularitäten haben. das zeigt, daß man zumindest nicht in allen Fällen (A) und (B) durch (C) ersetzen kann.