

525 | September 1992

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Wolfgang-Hermann Isay

**Zum Einfluß des Sättigungsgrades der
im Wasser gelösten Luft sowie des
Keimgehaltes auf den Kavitations-
Einsatz**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Zum Einfluss des Sättigungsgrades der im Wasser gelösten Luft sowie des Keimgehaltes auf den Kavitations-Einsatz

Wolfgang Hermann Isay, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1992

ISBN: 3-89220-525-6

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 525

Zum Einfluß des Sättigungsgrades der im Wasser
gelösten Luft sowie des Keimgehaltes auf den
Kavitations-Einsatz

Wolfgang-Hermann Isay

September 1992

Zusammenfassung

Die klassische Annahme, daß Kavitation im Bereich eines Strömungskörpers einsetzt, wenn der örtliche Druck auf den Dampfdruck absinkt, also $p_{min} = p_v$, ist nur eine Näherung, von der Abweichungen nach beiden Seiten beobachtet werden, wenn man Gaskavitation in die Betrachtungen einbezieht.

Letztere tritt als Folge eines gestörten Sättigungsgleichgewichts (lokale Übersättigung des Wassers hinsichtlich der in ihm gelösten Luft) mit Diffusionsvorgängen auf. Und zwar ist $p_v < p_{min}$ und damit $\sigma_{vi} > C_{p_{min}}$, wenn gelöste Luft durch Diffusion in die Gashohlräume der im Wasser befindlichen Keime eindringt und so deren Aufweitung bewirkt. Hierfür ist die Turbulenz der Strömung entscheidend.

Andererseits ist $p_v > p_{min}$ und damit $\sigma_{vi} < C_{p_{min}}$, wenn der Kavitationseinsatz durch dynamisch instabile Blasen und Keime bedingt ist.

In der vorliegenden Arbeit wird am Beispiel eines als aufgerollt betrachteten Tragflügel-Spitzenwirbels mit einfachen Formeln eine theoretische Beschreibung beider Effekte gegeben.

Dabei zeigt es sich, daß durch turbulente Diffusion der Beiwert des Kavitationseinsatzes σ_{vi} mehr als doppelt so groß wie der Beiwert des Minimaldruckes $C_{p_{min}}$ werden kann. Dagegen sinkt bei einem auf der instabilen Aufweitung von Blasen beruhenden Kavitationseinsatz der σ_{vi} -Wert kaum tiefer als auf 80 % $C_{p_{min}}$.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der turbulente Diffusionsbeiwert D'	1
3	Aufweitung von Blasen im Kernbereich eines Spitzenwirbels durch turbulente Diffusion	7
4	Aufweitung von Blasen im Kernbereich eines Spitzenwirbels durch instabiles dynamisches Anwachsen	14
5	Anwendung der Theorie zur Berechnung des Kavitationseinsatzes im Spitzenwirbel	16
A	Bestimmung der zur instabilen Blasen aufweitung erforderlichen Mindestspannung	29

1 Einleitung

Die klassische Annahme der Kavitationstheorie besagt, daß der Kavitationseinsatz in einem Strömungsfeld durch das Absinken des örtlichen Minimaldruckes p_{min} auf den Gleichgewichtsdampfdruck p_v gegeben ist, also $p_{min} = p_v$.

Versuche mit bei technischen Anwendungen, insbesondere Propellern und Tragflügeln, auftretenden Strömungen zeigen, daß nach beiden Seiten erhebliche Abweichungen von der eben erwähnten Annahme auftreten. Die Beobachtungen ergeben sowohl Fälle mit

$$p_{min}^{(i)} > p_v, \quad \text{als Beiwert} \quad \sigma_{vi} > c_{p_{min}}, \quad (1)$$

als auch Fälle mit

$$p_{min}^{(i)} < p_v, \quad \text{als Beiwert} \quad \sigma_{vi} < c_{p_{min}}. \quad (2)$$

Aus der Kavitationsforschung ist bekannt, daß für den Effekt (1) vor allem die Turbulenz der Strömung und die damit verbundenen Diffusionsvorgänge der gelösten Luft verantwortlich sind, während der Effekt (2) auf dem dynamischen durch die Kapillarspannung geprägten Stabilitätsverhalten der Gasblasen und Porenkeime im Wasser beruht.

Das Ziel der hier vorgelegten Arbeit ist es, die genannten Effekte mit einer einfachen überschaubaren Theorie zu quantifizieren. In erster Linie ist dabei an den Kavitationseinsatz im Kern der Spitzenwirbel von Tragflügeln und Propellern gedacht; die abgeleiteten Formeln gelten aber mit geringen leicht zu übersehenden Modifikationen auch für Strömungsgrenzschichten an Flügelprofilen.

2 Der turbulente Diffusionsbeiwert D'

Diffusionsvorgänge als Folge eines gestörten Sättigungsgleichgewichts, bei denen nur der molekulare Diffusionsparameter D wirksam ist, (z. B. $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$ bei 293 K) haben wegen ihrer relativ langen Zeitdauer in der Größenordnung von Sekunden für viele technische Probleme keine Bedeutung, da hier Zeiträume in der Größenordnung von Millisekunden für die Vorgänge maßgebend sind [Isa89]. Jedoch wird durch Turbulenz in Strömungsgrenzschichten und sonstigen Scherschichten die Diffusion um Größenordnungen intensiviert. Man kann diesen Effekt erfassen, indem man an Stelle des molekularen Diffusionsparameters D einen entsprechenden turbulenten Beiwert D' in der Diffusionsgleichung verwendet. In zwei neueren Untersuchungen geben PARKIN und RAVINDRA [Par91], [Rav91] für diesen Beiwert die Beziehung

$$D' = 0,0063U_\infty \cdot \delta \quad (3)$$

mit U_∞ als der Zuströmgeschwindigkeit zum betrachteten Strömungskörper und δ als der Dicke der Scherschicht der turbulenten Strömung an. Eine Herleitung der Relation (3) fehlt jedoch. Daher soll diese hier gegeben werden, wobei wir die Größenordnung von (3) bestätigen werden. Als Beispiel legen wir eine zweidimensionale turbulente Grenzschicht in der x - y -Ebene (vgl. Abb. 1) zugrunde. In der Diffusionsgleichung (vgl. [Isa89]) einer solchen Strömung (im Rahmen der Grenzschichtnäherung werden vorrangig nur die Ableitungen normal zur Wand in y -Richtung behandelt) tritt bedingt durch Turbulenz der

Zusatzterm

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho_2'v'}) \quad (4)$$

auf. Die Diffusionsgleichung lautet also mit ρ_2 als der Partialdichte der gelösten Luft im Wasser und v als der Strömungsgeschwindigkeit in y -Richtung

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}_2 \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho_2'v'}) = D \frac{\partial^2 \bar{\rho}_2}{\partial y^2}. \quad (5)$$

In dieser Gleichung ist die für turbulente Strömungen übliche Zerlegung der Feldfunktionen in Mittelwerte und turbulente Schwankungsanteile, also

$$\rho_2 = \bar{\rho}_2 + \rho_2', \quad v = \bar{v} + v' \quad (6)$$

zugrunde gelegt. Wir setzen nun in Anlehnung an die Mischungswegkonzeption

$$-\overline{\rho_2'v'} = \nu_D' \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} \quad (7)$$

mit dem zur Theorie turbulenter Temperaturgrenzschichten analogen Ansatz

$$\nu_D' = \kappa \cdot \kappa_D y^2 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (8)$$

In Formel (8) bedeutet \bar{u} die mittlere Strömungsgeschwindigkeit parallel zur Wand in der turbulenten Scherschicht, δ die Grenzschichtdicke. $\kappa = 0,4$ ist die Prandtlsche Konstante und κ_D eine ähnliche Zahl, entsprechend dem bei Temperaturgrenzschichten verwendeten Ansatz. Nach dem Prandtlschen logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz ist

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{v_*}{\kappa y}, \quad v_* = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (9)$$

mit τ_0 als Wandschubspannung. Das bedeutet, aus (8) folgt

$$\nu_D' = \kappa_D y v_* \left(1 - \frac{y}{\delta}\right). \quad (10)$$

Damit erscheint der Zusatzterm (4) auf die rechte Seite der Diffusionsgleichung gebracht in der Form

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho_2'v'}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\kappa_D v_* y \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} \right]. \quad (11)$$

Wir wählen für die so ergänzte rechte Seite von Gl. (5) die Darstellung

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((D + D') \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} \right) = (D + D') \frac{\partial^2 \bar{\rho}_2}{\partial y^2}, \quad (12)$$

und bezeichnen D' als „turbulente Diffusionsbeiwert“. Dieses Vorgehen hat die angenehme Konsequenz, daß die klassischen Lösungen [Eps50], [Shi74] der Diffusionsgleichung

auch bei turbulenter Strömung verwendet werden können; man hat lediglich den molekularen Diffusionsparameter D durch den turbulenten Beiwert D' zu ersetzen. D selbst kann vernachlässigt werden, denn es ist $D' \gg D$, wie wir noch sehen werden.

Wir definieren dabei D' durch die Mittelungsbedingung über die turbulente Scherschicht

$$D' \int_0^\delta \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} dy = \int_0^\delta \kappa_D v_* y \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} dy. \quad (13)$$

Für die Auswertung von Formel (13) werden im folgenden zwei weitgehend zu äquivalenten Ergebnissen führende Ansätze besprochen. Zunächst wählen wir für $\bar{p}_2(y)$ einen aus der Theorie thermischer Kavitationsgrenzschichten [Tom79] bekannten Ansatz

$$\bar{p}_2(y) = \rho_{2s} + (\rho_{2\infty} - \rho_{2s}) \left[2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right] \quad (14)$$

mit ρ_{2s} als dem Sättigungswert von \bar{p}_2 . Der Ansatz (14) genügt den Randbedingungen

$$y = 0, \quad \bar{p}_2 = \rho_{2s}, \quad y = \delta, \quad \bar{p}_2 = \rho_{2\infty}, \quad \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

(vgl. hierzu Abbildung 1). Mit (14) ergibt sich aus (13)

$$D' = \frac{1}{6} \kappa_D v_* \delta. \quad (16)$$

Für die Auswertung von $v_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho}$ und δ müssen die integralen Kenngrößen der turbulenten Scherschicht herangezogen werden.

Wir werden uns hier mit den Zusammenhängen einer Plattengrenzschicht begnügen; es sei aber betont, daß man diese Betrachtung analog auch auf Scherschichten mit Druckgradienten ausdehnen kann, soweit man die speziellen Daten kennt. Es gilt für Plattengrenzschichten bekanntlich

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_\infty^2 \frac{d\vartheta}{dx}$$

mit

$$\vartheta = 0,037x \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-0,2}$$

als Impulsverlustdicke. Damit folgt aus (16) nach kurzer Zwischenrechnung das Ergebnis

$$D' = 0,0287 \kappa_D U_\infty \delta \left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{0,1}. \quad (17)$$

Setzt man hier konsequenterweise noch den entsprechenden Wert der Plattengrenzschicht

$$\delta = 0,37x \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-0,2}$$

ein, so folgt D' die gleichbedeutende Darstellung

$$D' = 0,0106 \kappa_D U_\infty x \left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{0,3}. \quad (17a)$$

Bevor wir Folgerungen aus den Ergebnissen (17) bzw. (17a) ziehen, soll zunächst noch die andere Möglichkeit der Auswertung von Formel (13) besprochen werden.

Und zwar wählen wir für $\bar{\rho}_2(y)$ die Lösung der einfachsten Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 \bar{\rho}_2}{\partial y^2}$$

nämlich

$$\bar{\rho}_2(y, t) = \rho_{2s} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\rho_{2\infty} - \rho_{2s}) \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{D't}}} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (18)$$

Formel (18) erfüllt die Randbedingungen

$$y = 0, \quad \bar{\rho}_2 = \rho_{2s}, \quad y \rightarrow \infty, \quad \bar{\rho}_2 = \rho_{2\infty}, \quad \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Bei einer Verwendung von Lösung (18) wird also von einer quasi bis ins Unendliche reichenden Scherschicht ausgegangen. Dann muß natürlich sinngemäß die Bedingung (13) ersetzt werden durch die Relation

$$D' \int_0^\infty \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} dy = \int_0^\infty \kappa_D v_* y \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} dy. \quad (20)$$

Nach (18) ist

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} = \frac{\rho_{2\infty} - \rho_{2s}}{\sqrt{\pi} \sqrt{D' \cdot t}} e^{-\frac{y^2}{4D't}}.$$

Die Auswertung von Formel (20) ergibt dann mit $t = \frac{x}{U_\infty}$

$$D' = \frac{4}{\pi} \kappa_D^2 v_*^2 \frac{x}{U_\infty}.$$

Bedenkt man, daß

$$v_*^2 = U_\infty^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0,0296 U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{+0,2}$$

ist, so folgt schließlich zum Vergleich mit dem Ergebnis (17a):

$$D' = 0,0377 \kappa_D^2 U_\infty x \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{0,2}. \quad (21)$$

Für κ_D erscheint es zunächst naheliegend, sich an dem Wert [Ceb74] aus der Theorie thermischer Strömungsgrenzschichten zu orientieren. Das bedeutet [Ceb74]:

$$\kappa_D = 0,44 + \frac{0,22}{1 + 0,42 \cdot 10^{-6} \left(\frac{U_\infty \vartheta}{\nu} \right)^2} \approx 0,50 \quad (22)$$

Bei Verwendung dieses Wertes würde sich aus den Formeln (17a) bzw. (21) ergeben

$$D' = 0,0053 U_\infty x \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{0,3} \quad (23a)$$

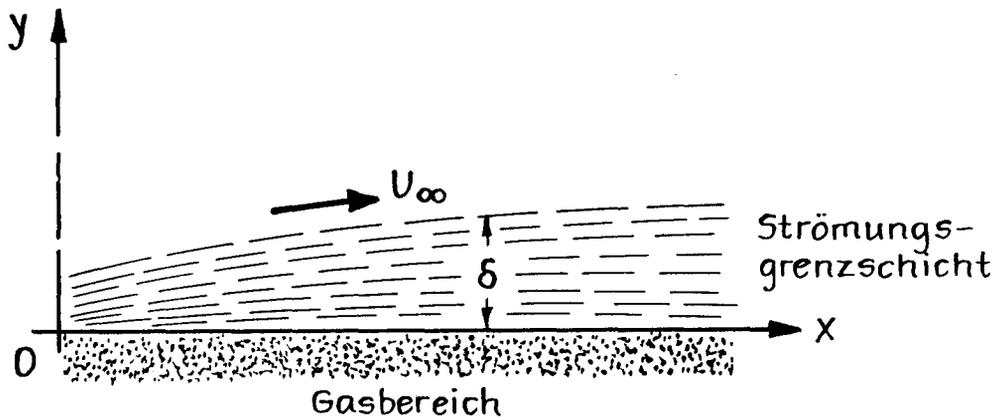


Abb.1 Koordinaten und Bezeichnungen in der Strömungsgrenzschicht

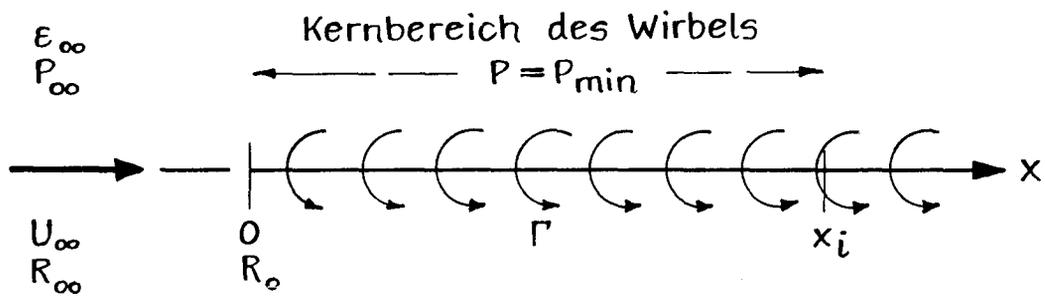


Abb.2a Koordinaten und Bezeichnungen zum Diffusionsproblem im Spitzenwirbel

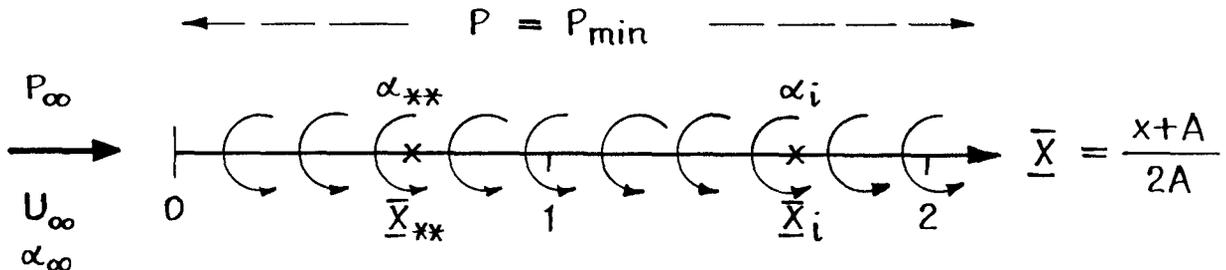


Abb.2b Koordinaten und Bezeichnungen zum instabilen Aufweitungsproblem im Spitzenwirbel

bzw.

$$D' = 0,0094U_\infty x \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{0,2}. \quad (23b)$$

Die Wahl von κ_D in Anlehnung an die Theorie thermischer Strömungsgrenzschichten stellt natürlich nur eine Möglichkeit für die Festlegung dieser unbekanntenen Größe dar. Immerhin ergeben (23a) und (23b) wenigstens die gleiche Größenordnung.

Wir erinnern uns nun an die Formel von PARKIN und RAVINDRA, also Gl. (3). Setzen wir hier sinnvollerweise den Wert $\delta = 0,37x \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{0,2}$ ein, so folgt aus (3)

$$D' = 0,00233U_\infty x \left(\frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{0,2}. \quad (24)$$

Dieser Wert (24) stimmt exakt mit dem Resultat (21) überein, wenn $\kappa_D = 0,249$ gewählt würde. Auch dieser Wert erscheint ohne weiteres möglich. Damit ist die Formel von PARKIN und RAVINDRA [Par91], [Rav91] zumindest der Größenordnung nach verifiziert.

Die Auswertung der abgeleiteten Formeln für den turbulenten Diffusionsbeiwert ist für Profilgrenzschichten unmittelbar ersichtlich. Betrachten wir das Problem des Kavitationseinsatzes in Flügelspitzenwirbeln, so liegt es nahe, von der Überlegung auszugehen, daß die Strömung im Kern des Spitzenwirbels aus der Grenzschicht am Flügel aufgebaut wird. Dann erscheint es plausibel, für x den Wert $2A$ der mittleren Flügeltiefe einzusetzen. Auf diese Weise erhalten wir aus (24):

$$D' = 2AU_\infty \cdot 0,00233(\Re_e)^{-0,2}. \quad (25)$$

Dabei ist \Re_e die Reynoldszahl des Flügels. Die sich aus (24) oder (25) ergebenden D' -Werte liegen um vier oder fünf Größenordnungen über dem Wert der molekularen Diffusionskonstante D .

3 Aufweitung von Blasen im Kernbereich eines Spitzenwirbels durch turbulente Diffusion

Wir gehen vereinfachend davon aus, daß im Kernbereich des hier betrachteten aufgerollten Spitzenwirbels über eine gewisse Strecke der konstante Druck $p_{min} \leq p_v$, also

$$C_{p_{min}} = \frac{p_{\infty} - p_{min}}{\frac{\rho}{2} \cdot U_{\infty}^2} \leq \sigma_v = \frac{p_{\infty} - p_v}{\frac{\rho}{2} \cdot U_{\infty}^2} \quad (26)$$

herrscht (vgl. Abb. 2). p_{∞} und U_{∞} sind die Zuströmwerte. Wir betrachten eine Blase mit dem Radius R_{∞} im Gleichgewicht in dieser Zuströmung. Bezüglich der Partialdichte $\rho_{2\infty}$ der gelösten Luft gilt dann die Relation

$$\rho_{2\infty} = \varepsilon_{\infty} \Theta \rho p_{L\infty} = \varepsilon_{\infty} \Theta \rho \left(p_{\infty} - p_v + \frac{2\sigma}{R_{\infty}} \right) \quad (27)$$

Dabei ist ε_{∞} der Sättigungsgrad. Für $\varepsilon_{\infty} > 1$, bzw. $\varepsilon_{\infty} < 1$ herrscht Übersättigung bzw. Untersättigung.

Wir nehmen an, daß im Übergangsbereich zum Spitzenwirbelkern die turbulente Diffusion noch nicht ausgeprägt ist. Dann wird die Blase einen neuen Gleichgewichtsradius R_0 annehmen, der nach der quasistationären Stabilitätstheorie bei isothermischer Zustandsänderung und konstanter Luftmasse im Blaseninneren aus der Relation

$$\left(\frac{R_0}{R_{\infty}} \right)^3 = \frac{p_{L\infty}}{p_{L0}} = \frac{p_{\infty} - p_v + \frac{2\sigma}{R_{\infty}}}{p_{min} - p_v + \frac{2\sigma}{R_0}} \quad (28)$$

erhalten wird. Wir bezeichnen die zu p_{L0} gehörende Sättigungskonzentration mit $\frac{\rho_{2s}}{\rho} = \Theta p_{L0}$.

Außerdem führen wir die Abkürzung

$$S = \frac{2\sigma}{\rho U_{\infty}^2 R_{\infty}} \quad (29)$$

ein. Dann folgt aus (28) und (29)

$$\frac{\sigma_v - C_{p_{min}} + 2S \frac{R_{\infty}}{R_0}}{\sigma_v + 2S} = \left(\frac{R_{\infty}}{R_0} \right)^3 = \varepsilon_{\infty} \frac{\rho_{2s}}{\rho_{2\infty}}. \quad (30)$$

Wenn der vorliegende Zuströmdruck p_{∞} im weiteren Verlauf durch turbulente Diffusion zum Kavitationseinsatz führt, so kann aus (30) der Beiwert σ_{vi} berechnet werden:

$$\sigma_{vi} = \frac{C_{p_{min}} + 2S \left(\frac{R_{\infty}}{R_0} \right)^3 - 2S \cdot \frac{R_{\infty}}{R_0}}{1 - \left(\frac{R_{\infty}}{R_0} \right)^3}. \quad (31)$$

Die Blase mit dem Radius R_0 befindet sich nun in einer übersättigten Umgebung im Kernbereich des Spitzenwirbels und wächst mit der Zeit t bzw. der Lauflänge $x = U_{\infty} \cdot t$ durch Diffusion an. Hierfür kann auf die Untersuchung von SHIMA und TSUJINO [Shi74]

zurückgegriffen werden. Die von diesen Autoren angegebene Lösung kann in geschlossener Form dargestellt werden, und zwar gilt in guter Näherung (vgl. Abb. 3).

$$\frac{R(t)}{R_0} = 1 + 2\rho\Theta\Re_L T \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(\frac{\rho_{2\infty}}{\rho_{2S}} - 1 \right) \cdot \frac{\sigma_{vi} - C_{pmin} + 2S \frac{R_\infty}{R_0}}{\sigma_{vi} - C_{pmin} + \frac{4}{3}S \frac{R_\infty}{R_0}} \left(\frac{\sqrt{D' \cdot t}}{R_0} + \frac{D' \cdot t}{R_0^2} \frac{1}{1 + \frac{R(t)}{R_0}} \right). \quad (32)$$

Zu Formel (32) noch einige Bemerkungen: Zunächst ist klar, daß D' an Stelle von D zu nehmen ist. Die Struktur von (32) zeigt ferner, daß der Wert $\frac{R(t)}{R_0}$ noch im Nenner der letzten Terms vorkommt. Die Berechnung erfolgt dann iterativ bei einer guten Konvergenz (vgl. auch [Isa89, Kapitel 6]).

Das Ziel der Untersuchung ist es, den Beiwert σ_{vi} des Kavitationseinsatzes im Spitzenwirbel bei einer auf turbulenter Diffusion beruhenden Blasen aufweitung zu bestimmen.

Wir bezeichnen mit $x = x_i$ (Abb. 2) die Stelle im Spitzenwirbelkern, an der optisch der Kavitationseinsatz durch sichtbar werdende Hohlräume erfolgt. Dort liegt dann ([Isa89, Kapitel 20]) ein Gasvolumenverhältnis α_i vor, etwa in dem Wertebereich $0,05 \lesssim \alpha_i \lesssim 0,10$. Ein solcher α_i -Wert muß für die weitere Untersuchung vorgegeben werden. Das gleiche gilt für die zugehörige Stelle x_i . Wir bezeichnen mit

$$R_i = R(x_i) = R(U_\infty t_i) \quad (33)$$

den zugehörigen aufgeweiteten Blasenradius gemäß Formel (32). Der Einfachheit halber soll von einer Radienklasse R_∞ in der Zuströmung ausgegangen werden. Wenn dort die Anzahl ζ_∞ an Keimen pro cm^3 vorliegt, so ist das Gasvolumenverhältnis der Zuströmung

$$\alpha_\infty = \frac{4\pi}{3} \zeta_\infty R_\infty^3, \quad (34)$$

und entsprechend bei x_i

$$\alpha_i = \frac{4\pi}{3} \zeta_\infty R_i^3, \quad (35)$$

also

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_\infty} = \frac{R_i^3}{R_\infty^3}. \quad (36)$$

Für die Bestimmung des Kavitationseinsatzes muß sinnvollerweise die Wasserqualität der Zuströmung, also ζ_∞ bzw. α_∞ bekannt sein. Somit können wir gemäß (36) die Größe $\frac{R_i}{R_\infty}$ als vorgegeben bei der Berechnung von σ_{vi} voraussetzen. Das gleiche gilt für den Beiwert C_{pmin} . Außerdem ist die Zuströmungsgeschwindigkeit U_∞ und der Sättigungsgrad ε_∞ für die Rechnung vorzugeben, damit ist auch S gemäß Formel (29) bekannt. Damit werden die Relationen (31) und (32) zu Gleichungen zur Ermittlung der gesuchten Größen: $\frac{R_0}{R_\infty}$ sowie insbesondere σ_{vi} .

Wir lösen dafür Gl. (32) nach der Größe

$$\frac{\sqrt{D' \cdot t_i}}{R_0} = \left(\frac{R_\infty}{R_0} \right) \sqrt{\frac{D' \cdot x_i}{(U_\infty R_\infty^2)}}$$

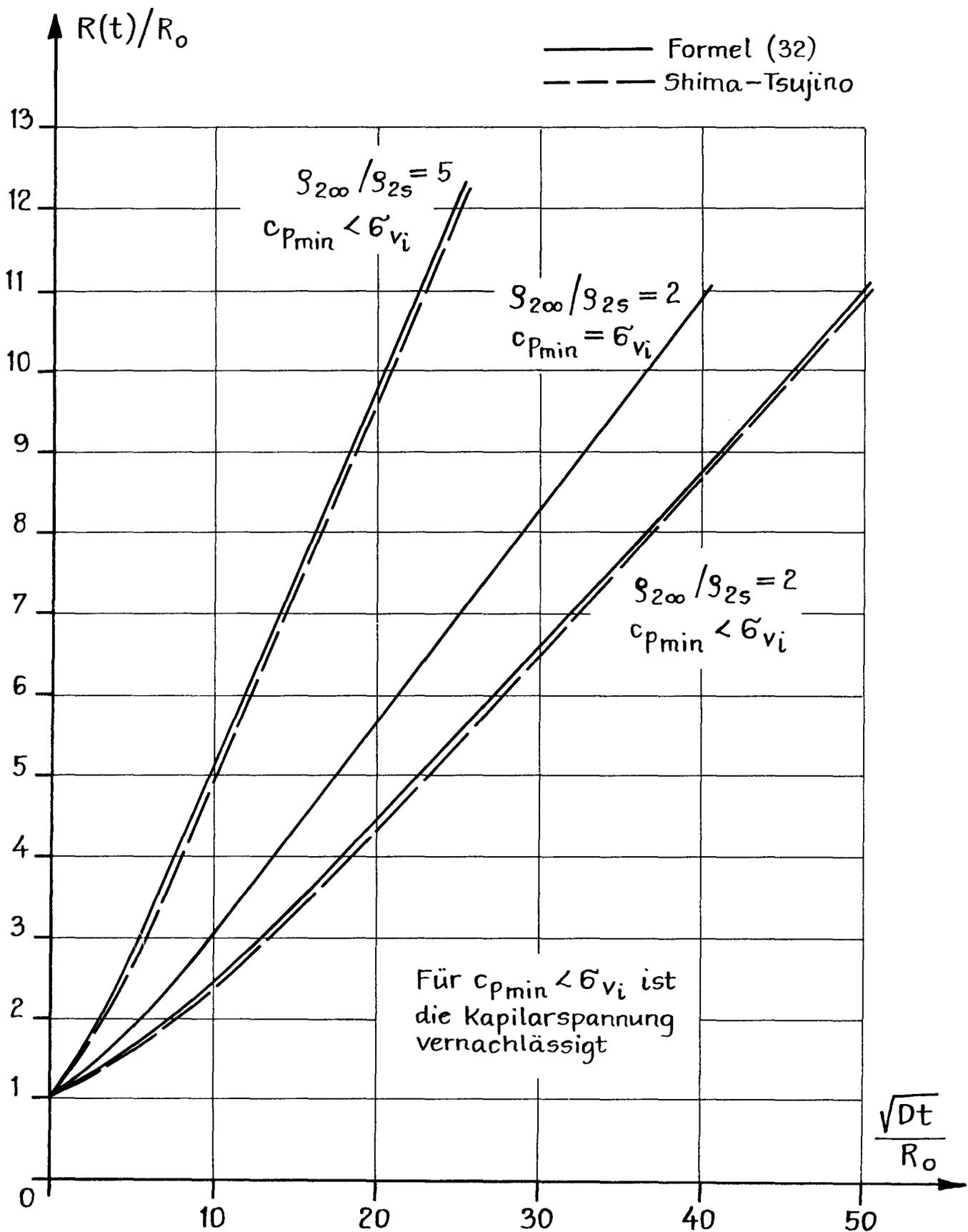


Abb. 3 Vergleich der Lösung von Shima und Tsujino /5/ mit der Näherungsformel (32)

auf und erhalten

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{D' \cdot x_i}{U_\infty R_\infty^2} \frac{R_\infty}{R_0}} = -\frac{1}{2} - \frac{R_i}{2R_\infty} \frac{R_\infty}{R_0} + \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{R_i}{R_\infty} \frac{R_\infty}{R_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{R_i}{R_\infty} \right)^2 \left(\frac{R_\infty}{R_0} \right)^2 - 1}{2\rho\Theta\mathcal{R}_L T \left[\varepsilon \left(\frac{R_0}{R_\infty} \right)^3 - 1 \right]} \frac{\sigma_{vi} - C_{pmin} + \frac{4}{3} S \frac{R_\infty}{R_0}}{\sigma_{vi} - C_{pmin} + 2S \frac{R_\infty}{R_0}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (37)$$

Bei der Bestimmung des Radienverhältnisses $\frac{R_0}{R_\infty}$ aus Gl. (37) wird der nur ganz schwach von $\frac{R_0}{R_\infty}$ abhängige Quotient

$$\frac{\left(\sigma_{vi} - C_{pmin} + \frac{4}{3} S \frac{R_\infty}{R_0} \right)}{\left(\sigma_{vi} - C_{pmin} + 2S \frac{R_\infty}{R_0} \right)} \quad (38)$$

zunächst durch 1 ersetzt und dann einer vorläufigen Ermittlung von σ_{vi} aus Gl. (31) iterativ berücksichtigt. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist gut.

Bei einer Temperatur von 293 K ist $\rho\Theta\mathcal{R}_L T = 0,02$. Für andere Temperaturen vgl. [Isa89, Kapitel 6].

Für große $\frac{R_i}{R_0}$ -Werte und $\sigma_{vi} > C_{pmin}$ überwiegt der zweite Summand in $[\dots]^{\frac{1}{2}}$ der Formel (37). Dann kann diese mit der weiteren Vereinfachung Gl. (38) = 1 durch den einfachen Näherungsausdruck ersetzt werden

$$\varepsilon_\infty \left(\frac{R_0}{R_\infty} \right)^3 = 1 + \frac{1}{2\rho\Theta\mathcal{R}_L T} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{D' x_i}{U_\infty}}}{R_i} \right)^{-2}, \quad (39)$$

der also die explizite Auflösung nach $\frac{R_0}{R_\infty}$ ermöglicht. Formel (39) ist insbesondere auch bei dem oben erwähnten Iterationsverfahren hilfreich.

Die hier vorgelegte einfache Theorie zur Erfassung der durch turbulente Diffusion bedingten Blasen aufweitung ist auf Minimaldrücke $p_{min} \geq p_v$ beschränkt.

Für $p_{min} < p_v$, also beim Auftreten von Zugspannungen in der Strömung, wird die durch dynamische Instabilität bedingte Blasen aufweitung den wesentlichen Anteil am Kavitationseinsatz haben. Mit diesem Problem werden wir uns anschließend in einem weiteren Abschnitt beschäftigen. Zur Abrundung der Theorie für den Bereich $p_{min} \geq p_v$ soll nun noch geprüft werden, wie groß im Grenzfall

$$p_{min} = p_v$$

der Einfluß der dynamischen Aufweitung der Blasen im Vergleich zu der durch Diffusion und Übersättigung bedingten Aufweitung ist. Als Ergebnis der nachfolgenden Untersuchung wird sich herausstellen, daß noch im Grenzfall $p_{min} = p_v$ die Diffusion durch Übersättigung den Hauptteil liefert.

Aus der Blasendynamik ist bekannt, daß noch im erwähnten Grenzfall die Blasen nur zu Schwingungen um einen vergrößerten Gleichgewichtsradius angeregt werden und nicht zur instabilen Aufweitung kommen. Ist wie vorher R_∞ der Ausgangsradius der Blasen,

so besteht zwischen dem Extremalradius R_E der erwähnten Schwingung und R_∞ die Beziehung (vgl. [Isa89, Kapitel 7]).

$$\frac{R_E^2}{R_\infty^2} = 1 + \frac{R_\infty p_{L\infty}}{\sigma} \ln \frac{R_E}{R_\infty}, \quad (40)$$

wenn $p_{min} = p_v$ der die Schwingung auslösende Unterdruck ist. In unserer Bezeichnungweise ist dabei

$$\frac{R_\infty p_{L\infty}}{\sigma} = \frac{\sigma_{vi}}{S} - 2. \quad (41)$$

Die Zeitdauer t_E der Aufweitung bis zum Erreichen des Extremalradius ist gegeben durch

$$t_E = \sqrt{\frac{\rho}{2p_{L\infty}}} R_\infty \int_1^{\frac{R_E}{R_\infty}} \sqrt{\frac{z^3}{\ln z - \frac{\sigma}{R_\infty p_{L\infty}}(z^2 - 1)}} dz. \quad (42)$$

Eine kurze Untersuchung zeigt, daß der Integrand unter der Wurzel in der Umgebung der Stelle $z \lesssim \frac{R_E}{R_\infty} = z_E$ in der Näherungsform

$$z_E^3 \left(1 - \frac{z}{z_E}\right)^{-1} \left(\frac{2\sigma z_E^2}{R_\infty p_{L\infty}} - 1\right)^{-1} \quad (43a)$$

und analog in der Umgebung der Stelle $z \gtrsim 1$ in der Näherungsform

$$(z - 1)^{-1} \left(1 - \frac{2\sigma}{R_\infty p_{L\infty}}\right)^{-1} \quad (43b)$$

dargestellt werden kann. Teilt man die Integration an einer Stelle \tilde{z} , bei der (43a) und (43b) übereinstimmen, so stellt sich heraus, daß $\tilde{z} \gtrsim 1$ ist. Dies bedeutet, die gesamte Integration kann mit der Näherung (43a) vollzogen werden, und man erhält:

$$t_E = \sqrt{\frac{\rho}{2p_{L\infty}}} R_\infty \cdot 2 \frac{R_E^2}{R_\infty^2} \sqrt{\frac{R_E}{R_\infty} - 1} \left(\frac{2\sigma}{R_\infty p_{L\infty}} \frac{R_E^2}{R_\infty^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (44)$$

Unter Verwendung der Relationen (41), (29) sowie Beachtung der Identität

$$\sqrt{\frac{\rho}{2p_{L\infty}}} = \frac{1}{U_\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{vi} - 2S}}$$

ergibt sich (44) in der umgerechneten Gestalt

$$\sqrt{\sigma_{vi}} \frac{t_E U_\infty}{R_\infty} = 2 \left(\frac{R_E}{R_\infty}\right)^2 \sqrt{\frac{\frac{R_E}{R_\infty} - 1}{\left[\frac{R_E^2}{R_\infty^2} + 1\right] \frac{2S}{\sigma_{vi}} - 1}} \quad (45)$$

Aus Formel (40), (41) kann $\frac{R_E}{R_\infty}$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\frac{2S}{\sigma_{vi}}$ bestimmt werden. Dann erhalten wir aus (45) den Zeitparameter in Abhängigkeit von $\frac{2S}{\sigma_{vi}}$, also

$$\sqrt{\sigma_{vi}} t_E \frac{U_\infty}{R_\infty} = F\left(\frac{2S}{\sigma_{vi}}\right). \quad (45a)$$

Für $p_{min} = p_v$ folgt aus (31)

$$\frac{R_0}{R_\infty} = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{vi}}{2S}}, \quad (46)$$

und damit nimmt Gl. (32) zur Zeit t_E die Gestalt an:

$$\frac{R(t_E)}{R_\infty} = 1 + 3\rho\Theta\Re_L T \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left[\varepsilon_\infty \left(1 + \frac{\sigma_{vi}}{2S} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{D' \cdot t_E}}{R_\infty} + \frac{D' \cdot t_E}{R_\infty^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_{vi}}{2S}}} \frac{1}{1 + \frac{R(t_E)}{R_\infty} \left(1 + \frac{\sigma_{vi}}{2S} \right)^{-\frac{1}{2}}} \right], \quad (47)$$

mit der Zusammensetzung

$$\frac{D' t_E}{R_\infty^2} = \sqrt{\sigma_{vi}} \frac{t_E U_\infty}{R_\infty} \frac{D'}{R_\infty U_\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{vi}}}.$$

Es ist zu beachten: $R(t_E)$ ist der in der Zeit t_E durch Diffusion erreichte Aufweitungsradius, während mit R_E der in der gleichen Zeit erreichte Extremalradius entsprechend der dynamischen Aufweitungstheorie bezeichnet wird.

Unter Verwendung des mit (45a) folgenden t_E -Wertes in Anhängigkeit von $\frac{2S}{\sigma_{vi}}$ kann nunmehr aus (47) $\frac{R(t_E)}{R_\infty}$ in der Form

$$\frac{R(t_E)}{R_\infty} = f\left(\frac{2S}{\sigma_{vi}}\right) \quad (47a)$$

bestimmt werden. Abb. 4 zeigt das Ergebnis einer solchen Berechnung des Verlaufs von $\frac{R_E}{R_\infty}$ sowie $\frac{R(t_E)}{R_\infty}$ für verschiedene Werte des Diffusionsparameters

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_{vi}}} \frac{D'}{U_\infty R_\infty}$$

und in der Zuströmung gerade gesättigtes Wasser, also $\varepsilon_\infty = 1$. Man erkennt, daß die Aufweitung durch turbulente Diffusion bei $p_{min} = p_v$ bedeutsamer ist als durch Blasendynamik. Für $\varepsilon_\infty > 1$ würde dieser Unterschied natürlich noch größer sein. In diesem Ergebnis sehen wir eine Rechtfertigung dafür, im Fall $p_{min} \geq p_v$ oder $\sigma_{vL} \geq C_{p_{min}}$ den Kavitationseinsatz ausschließlich mit Hilfe der Diffusionstheorie zu berechnen.

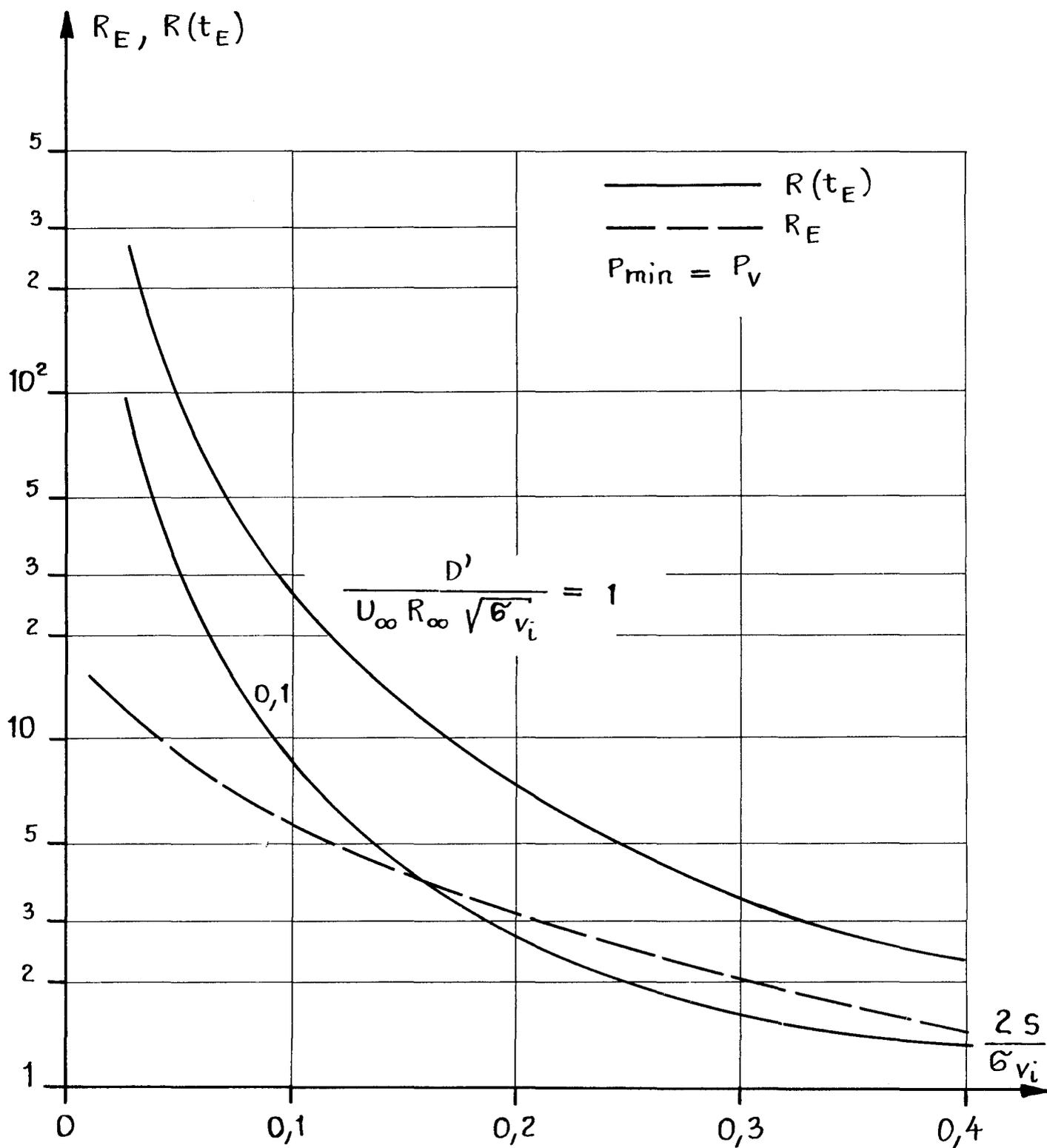


Abb. 4 Radius R_E der blasendynamischen Aufweitung im Vergleich zum Radius $R(t_E)$ der Aufweitung bei turbulenter Diffusion

4 Aufweitung von Blasen im Kernbereich eines Spitzenwirbels durch instabiles dynamisches Anwachsen

Wir haben nun den Fall zu betrachten, daß der Minimaldruck im Kernbereich deutlich unter den Dampfdruck, also auf Zugspannungen absinkt. Die Blasen reagieren bekanntlich mit instabilem Anwachsen; für die Aufweitungsberechnung muß der Effekt des Zugspannungsabbaues unbedingt berücksichtigt werden (vgl. [Isa89, Kapitel 20 und 28]).

Es wird wieder nur eine Radienklasse der Zuströmung behandelt und der $C_{p_{min}}$ -Wert als konstant in der betrachteten Strecke des Kernbereiches angenommen. Es sei $2A$ die mittlerer Flügeltiefe, und wir führen die Ankürzung

$$\Xi = 2A \left(4\pi \frac{\zeta_{\infty}}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (48)$$

ein. Die Lauflängenkoordiniate x wird in der Form (vgl. Abb. 2)

$$X = \frac{x + A}{2A} \quad (49)$$

normiert. Dann ist das Gasvolumenverhältnis gegeben durch

$$\alpha(X) = \frac{4\pi}{3} \zeta_{\infty} R^3(X). \quad (50)$$

Für $\alpha(X)$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Zugspannungsabbaues aus der Rayleigh-Plesset-Gleichung die folgende Differentialgleichung (vgl. [Isa89, Kapitel 28]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha^{\frac{1}{3}}} \left(\alpha \left(\frac{d\alpha^{\frac{1}{3}}}{dX} \right)^2 \right) &= \Xi^2 \alpha^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{\alpha}{\alpha_{**}}} (C_{p_{min}} - \sigma_{vi}) - \\ &- \Xi^2 \left[2S \left(\alpha_{\infty}^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} - \frac{\alpha_{\infty}}{\alpha^{\frac{1}{3}}} \right) - \sigma_{vi} \frac{\alpha_{\infty}}{\alpha^{\frac{1}{3}}} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

In Gl. (51) ist α_{**} der bekannte Parameter des Zugspannungsabbaues, für den wir wie üblich den Wert $\alpha_{**} = 0,01$ zugrunde legen wollen. Mit der Anfangsbedingung

$$\frac{d\alpha}{dX} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = \alpha_{\infty} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{\alpha_{\infty}}{\alpha_{**}}} \approx 1 \quad (52)$$

kann Gleichung (51) integriert werden. Man erhält unter Beachtung von

$$\frac{d\alpha^{\frac{1}{3}}}{dX} = \frac{\alpha^{-\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{d\alpha}{dX}$$

das Resultat

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Xi^2} \left(\frac{d\alpha}{dX} \right)^2 &= 3\alpha_{**}^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{1}{3}} \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{\alpha_{**}}} \right] [C_{p_{min}} - \sigma_{vi}] - \\ &- 9S\alpha_{\infty}^{\frac{1}{3}} \left(\alpha - \alpha^{\frac{1}{3}} \alpha_{\infty}^{\frac{2}{3}} \right) + 3(2S + \sigma_{vi}) \alpha^{\frac{1}{3}} \alpha_{\infty} \ln \frac{\alpha}{\alpha_{\infty}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Die Durchführung der weiteren Integration erfolgt nach bekannten Methoden ([Isa89, Kapitel 28]) in der Weise, daß entsprechend der Wirksamkeit des Zugspannungsabbaues zwei Bereiche $\alpha_\infty < \alpha < \alpha_{**}$ und $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_i$ unterschieden werden. Dabei ist $\alpha_i (0,05 < \alpha_i < 0,10)$ wie bereits erwähnt das dem Kavitationseinsatz entsprechende Volumenverhältnis.

Wir beginnen mit dem Bereich $\alpha < \alpha_{**}$. Eine kurze Abschätzung des durch den Einfluß des Luftdruckes in dem Gasraum bedingten ln-Termes in Formel (53) zeigt erwartungsgemäß, daß dieser gegenüber den anderen Termen vernachlässigbar ist. Ferner setzen wir näherungsweise

$$1 - e^{-\frac{\alpha}{\alpha_{**}}} \approx \frac{\alpha}{\alpha_{**}};$$

dann folgt aus (53) durch Trennung der Variablen

$$\Xi dX = \left[3(C_{p_{min}} - \sigma_v)\alpha^{\frac{4}{3}} - 9S\alpha\alpha_\infty^{\frac{1}{3}} \left(1 - \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot d\alpha. \quad (54)$$

In Formel (54) ersetzen wir den durch Kapillarspannung bedingten Term nach Abspaltung von $\alpha^{\frac{4}{3}}$ durch den integralen Mittelwert

$$\frac{1}{\alpha_{**}} \int_{\alpha_\infty}^{\alpha_{**}} \left(\left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\alpha_\infty}{\alpha} \right) d\alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \ln \frac{\alpha_{**}}{\alpha_\infty}, \quad (55)$$

und mit der Abkürzung

$$N_{**} = \frac{9}{2} \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{1}{3}} - 3 \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \ln \frac{\alpha_{**}}{\alpha_\infty}. \quad (56)$$

folgt dann aus (54) durch Integration von α_∞ bis α_{**} :

$$X_{**} = \frac{\alpha_{**}^{\frac{1}{3}}}{\Xi} \left(1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \sqrt{\frac{3}{C_{p_{min}} - \sigma_{vi} - N_{**}S}}. \quad (57)$$

Dabei entspricht die Koordinate X_{**} dem Wert α_{**} , und für $X = 0$ ist $\alpha = \alpha_\infty$.

Wir kommen nun zum Bereich $\alpha > \alpha_{**}$. Dort vernachlässigen wir (vgl. [Isa89, Kapitel 28]) in Formel (53) den Term $e^{-\frac{\alpha}{\alpha_{**}}}$ gegenüber 1. Außerdem entfällt auch hier der auf dem Luftdruck beruhende ln-Term. Damit folgt aus (53)

$$\Xi dX = \left[\alpha_{**}(C_{p_{min}} - \sigma_{vi}) - 3S \left(\alpha_\infty^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} - \alpha_\infty \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{3\alpha^{\frac{1}{3}}}}. \quad (58)$$

Für den Kapillarterm nehmen wir wieder den integralen Mittelwert

$$\frac{1}{\alpha_i - \alpha_{**}} \int_{\alpha_{**}}^{\alpha_i} \left[\frac{\alpha^{\frac{2}{3}} \alpha_\infty^{\frac{1}{3}}}{\alpha_{**}} - \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \right] d\alpha \approx \frac{3}{5} \frac{1}{\frac{\alpha_i}{\alpha_{**}} - 1} \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{5}{3}} - 1 \right]. \quad (59)$$

Bei der Integration in (59) sind Terme $\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \ll 1$ vernachlässigt.

Mit der Abkürzung

$$N_i = \frac{9}{5} \frac{\alpha_{**}}{\alpha_i - \alpha_{**}} \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{5}{3}} - 1 \right] \quad (60)$$

folgt dann aus (58) durch Integration von α_{**} bis α_i :

$$X_i = X_{**} + \frac{2\sqrt{3}\alpha_{**}^{\frac{1}{3}}}{5\Xi} \frac{\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{5}{6}} - 1}{\sqrt{C_{pmin} - \sigma_{vi} - N_i S}}. \quad (61)$$

Durch Elimination der Koordinate X_{**} aus Formel (61) und (57) ergibt sich die Endformel zur Bestimmung des Kavitations-Einsatz-Beiwertes σ_{vi} im Fall $\sigma_{vi} < C_{pmin}$ aufgrund der instabilen Aufweitung von Keimen

$$\begin{aligned} \sqrt{C_{pmin} - \sigma_{vi} - N_i S} &= \frac{\sqrt{3}\alpha_{**}^{\frac{1}{3}}}{X_i \Xi} \left\{ \frac{2}{5} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{5}{6}} - \frac{2}{5} + \right. \\ &\left. + \left(1 - \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{C_{pmin} - \sigma_{vi} - N_i S}{C_{pmin} - \sigma_{vi} - N_{**} S} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Der Quotient mit den Beiwerten α_{vi} und C_{pmin} auf der rechten Seite von (62) ist in der Regel nur unwesentlich von 1 verschieden, so daß Gl. (62) bequem durch Iteration nach $C_{pmin} - \sigma_{vi}$ aufgelöst werden kann. Zum Beispiel für $\alpha_\infty = 10^{-6}$ und $\alpha_i = 0,05$ ergibt sich $N_i = 0,285$ und $N_{**} = 0,206$. Für X_i erscheinen beim Spitzenwirbel Werte im Bereich von $X_i = 1,5$ bis $2,0$ realistisch (vgl. Abb. 2).

5 Anwendung der Theorie zur Berechnung des Kavitations-einsatzes im Spitzenwirbel

Wir beginnen die numerischen Beispiele mit dem Fall $\sigma_{vi} < C_{pmin}$, es gilt also Formel (62).

Zunächst gibt Abb. 5 einen Überblick über die für N_i und N_{**} zu erwartenden Werte. Eine kurze Überlegung zeigt ferner, daß die für den Parameter Ξ auftretenden Zahlen etwa im Bereich $10 < \Xi < 500$ unter Modellversuchsbedingungen liegen werden. Unter Originalbedingungen sind größere Werte von Ξ zu erwarten. Es ergibt sich, daß für Werte $\Xi > 50$ die Formel (62) in die einfache Relation

$$\sigma_{vi} = C_{pmin} - N_i S \quad (63)$$

übergeht, und auch für $10 < \Xi < 50$ sind nur unbedeutende Korrekturen an Gl. (63) zu erwarten. Abb. 6 zeigt die Abweichung des Wertes von $C_{pmin} - \sigma_{vi} - N_i S$ gemäß Formel (62) gegenüber der Vereinfachung aus Gl. (63) für einige Beispiele. Sie dokumentiert die oben gemachte Feststellung. Das gesuchte Verhältnis

$$\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}} = 1 - \frac{N_i S}{C_{pmin}}$$

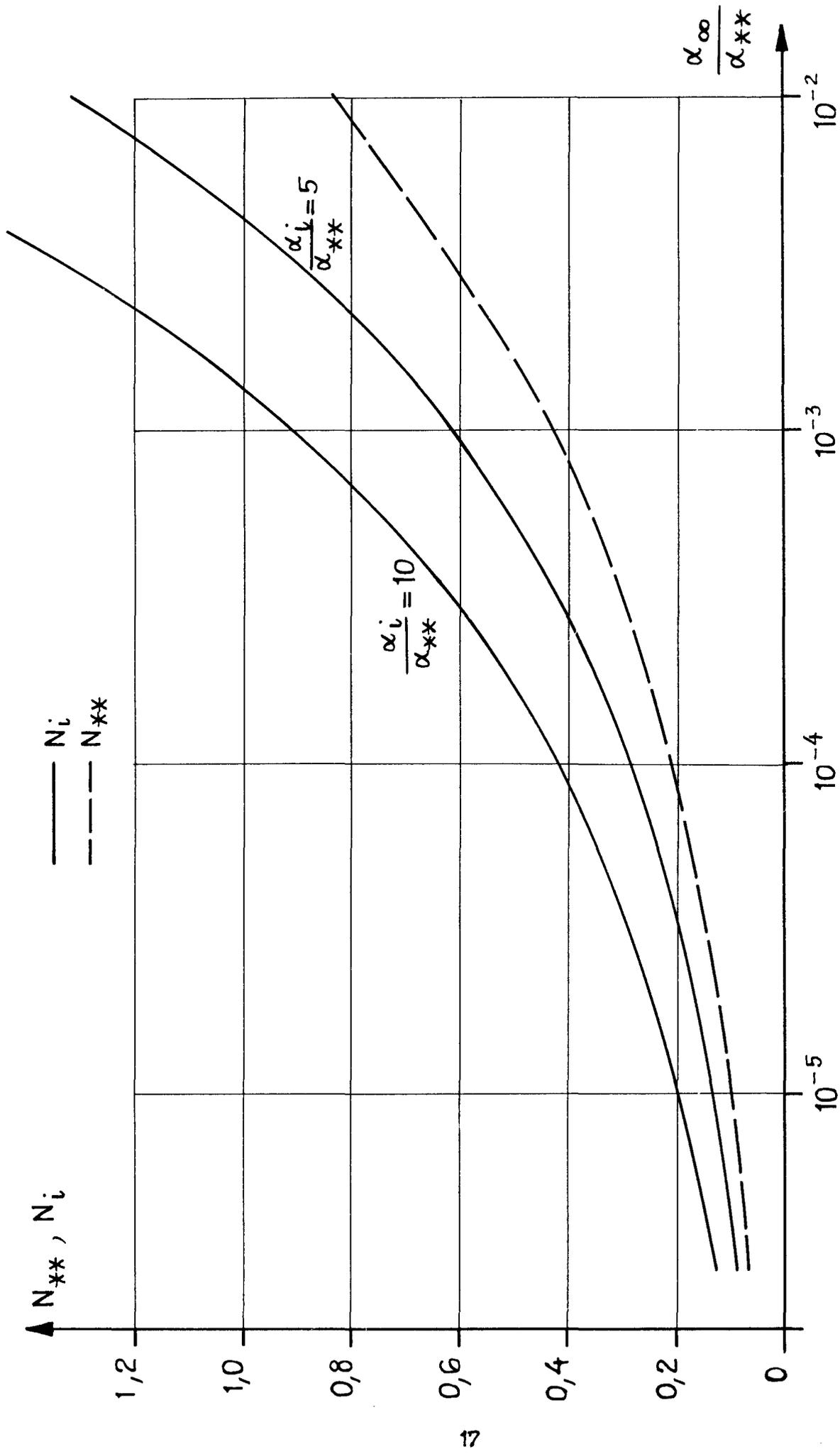


Abb.5 Einflussfaktoren der Kapillarspannung in Abhängigkeit vom Gasvolumenverhältnis

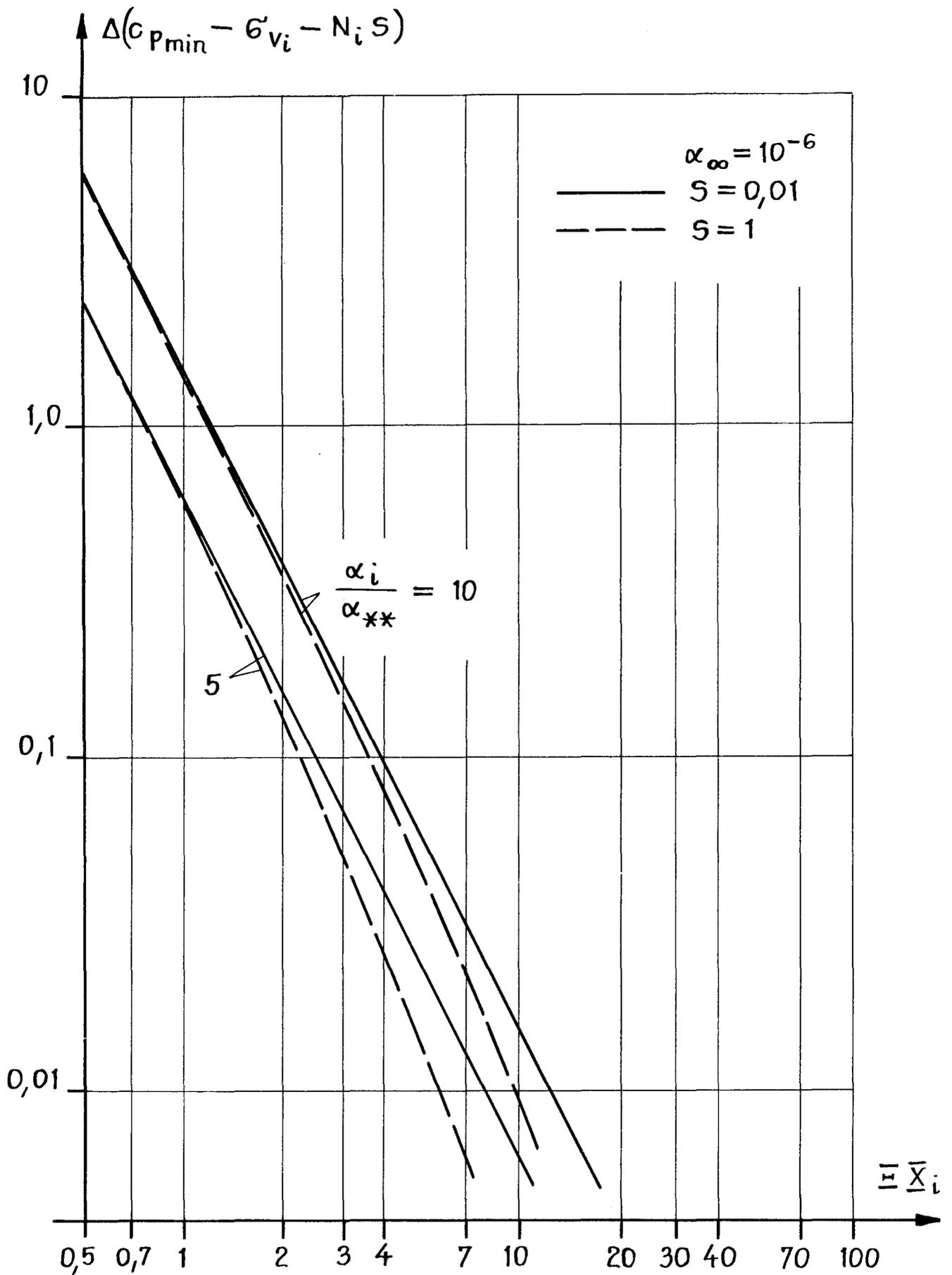


Abb.6 Abweichung des Wertes $c_{pmin} - \sigma_{vi} - N_i S$ von Null, also vom Ergebnis der Formel (63)

ist damit entscheidend durch den Parameter geprägt

$$\begin{aligned} \frac{N_i S}{C_{pmin}} &= \frac{9}{5C_{pmin}} \frac{\alpha_{**}^{\frac{2}{3}}}{\alpha_i - \alpha_{**}} \left[\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{**}} \right)^{\frac{5}{3}} - 1 \right] \left(\frac{4\pi}{3} \zeta_\infty \right)^{\frac{1}{3}} \frac{2\sigma}{\rho U_\infty^2} = \\ &= \begin{cases} 67,986 \frac{2\sigma(\zeta_\infty)^{\frac{1}{3}}}{C_{pmin} \cdot \rho U_\infty^2} & (\alpha_i = 0,10). \\ 45,854 \frac{2\sigma(\zeta_\infty)^{\frac{1}{3}}}{C_{pmin} \cdot \rho U_\infty^2} & (\alpha_i = 0,05). \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

Es ist bemerkenswert, daß der Parameter (64) nicht mehr von Keimradius R_∞ der Zuströmung sondern nur noch von der Anzahl ζ_∞ der Blasen pro cm^3 und außerdem von der Zuströmgeschwindigkeit U_∞ abhängt. Die erstere Feststellung ist eine Folge des Zugspannungsabbaues. Außerdem besteht eine schwache Abhängigkeit von dem α_i -Wert des Kavitationseinsatzes, wie sie in Formel (64) für zwei relevante Zahlenbeispiele zum Ausdruck kommt. Nimmt man die schon relativ an der oberen Grenze liegenden Werte für den Parameter (64) nämlich $U_\infty = 5\text{m/s}$ und $\zeta_\infty = \frac{300}{\text{cm}^3}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{N_i S}{C_{pmin}} &= \frac{0,264}{C_{pmin}} & (\alpha_i = 0,10) \\ \frac{N_i S}{C_{pmin}} &= \frac{0,178}{C_{pmin}} & (\alpha_i = 0,05) \end{aligned}$$

Die Grenze der Anwendbarkeit der vorliegenden Theorie ist durch die Bedingung

$$\frac{N_i S}{C_{pmin}} < 1 \quad (65)$$

gegeben. Aufgrund der oben mitgeteilten Zahlen ist leicht zu erkennen, daß (65) keine wesentliche Einschränkung bedeutet.

Dies zeigt auch Abb. 7, in der gemäß Formel (63), (64) das Verhältnis $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}}$ als Funktion von $\frac{(\zeta_\infty)^{\frac{1}{3}}}{C_{pmin}}$ für verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten dargestellt ist. Aufschlußreicher ist noch die Darstellung in Abb. 8. Sie zeigt deutlich, daß für übliche Kavitationsversuchsbedingungen der Wert von $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}}$ infolge von Zugspannungen im Wasser die Grenze 1 nur um weniger als 20% unterschreitet. Denn man muß bedenken, daß die meisten Versuche mit Tunneldrücken $(p_\infty - p_{min}) > 0,2\text{bar}$ gefahren werden. Natürlich wächst die Unterschreitung der Grenze 1 mit der Anzahl der Keime im Wasser. Dieser Effekt ist aber relativ schwach, wie der Unterschied zwischen Kurven mit $\zeta_\infty = \frac{512}{\text{cm}^3}$ und $\frac{64}{\text{cm}^3}$ zeigt. Letzteres liegt am Zugspannungsabbau, der um so intensiver erfolgt, je größer die Anzahl der Keime ist.

Es sein an dieser Stelle vermerkt, daß das eben erläuterte Ergebnis $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}} \gtrsim 0,8$ nur für Kavitationsvorgänge gelten dürfte, die in einem Bereich großer Lauflänge der Blasen bei einem annähernd konstanten Unterdruck auftreten, wie bei Spitzenwirbeln. Dagegen können zum Beispiel bei stumpfen Rotationskörpern ganz andere Verhältnisse auftreten. Der Übergang von dem hohen Staudruck an der Stirnseite zum Minimaldruck erfolgt

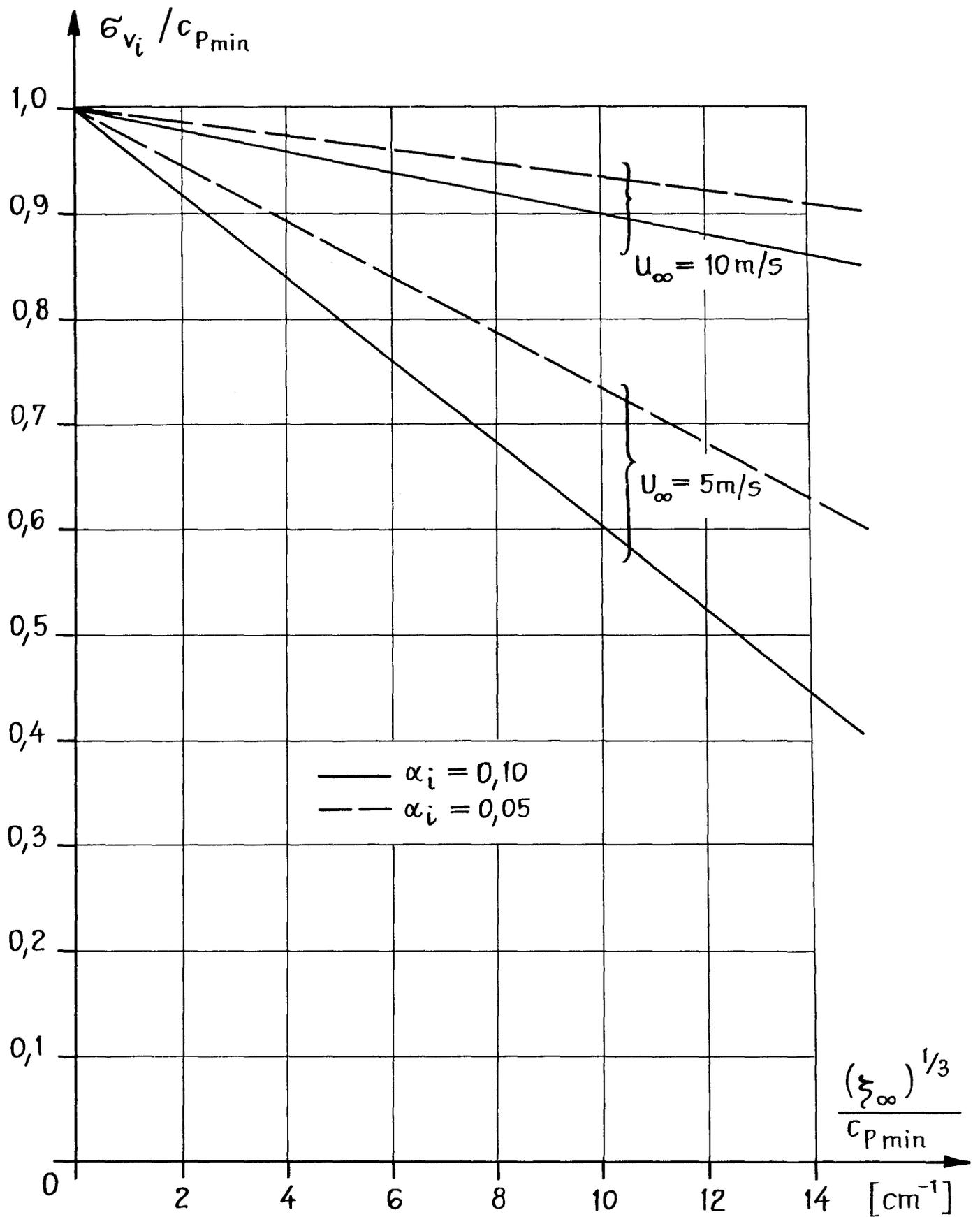


Abb.7 Verhältnis σ_{v_i} / c_{Pmin} in Abhängigkeit vom Keimgehalt ξ_∞ der Zuströmung

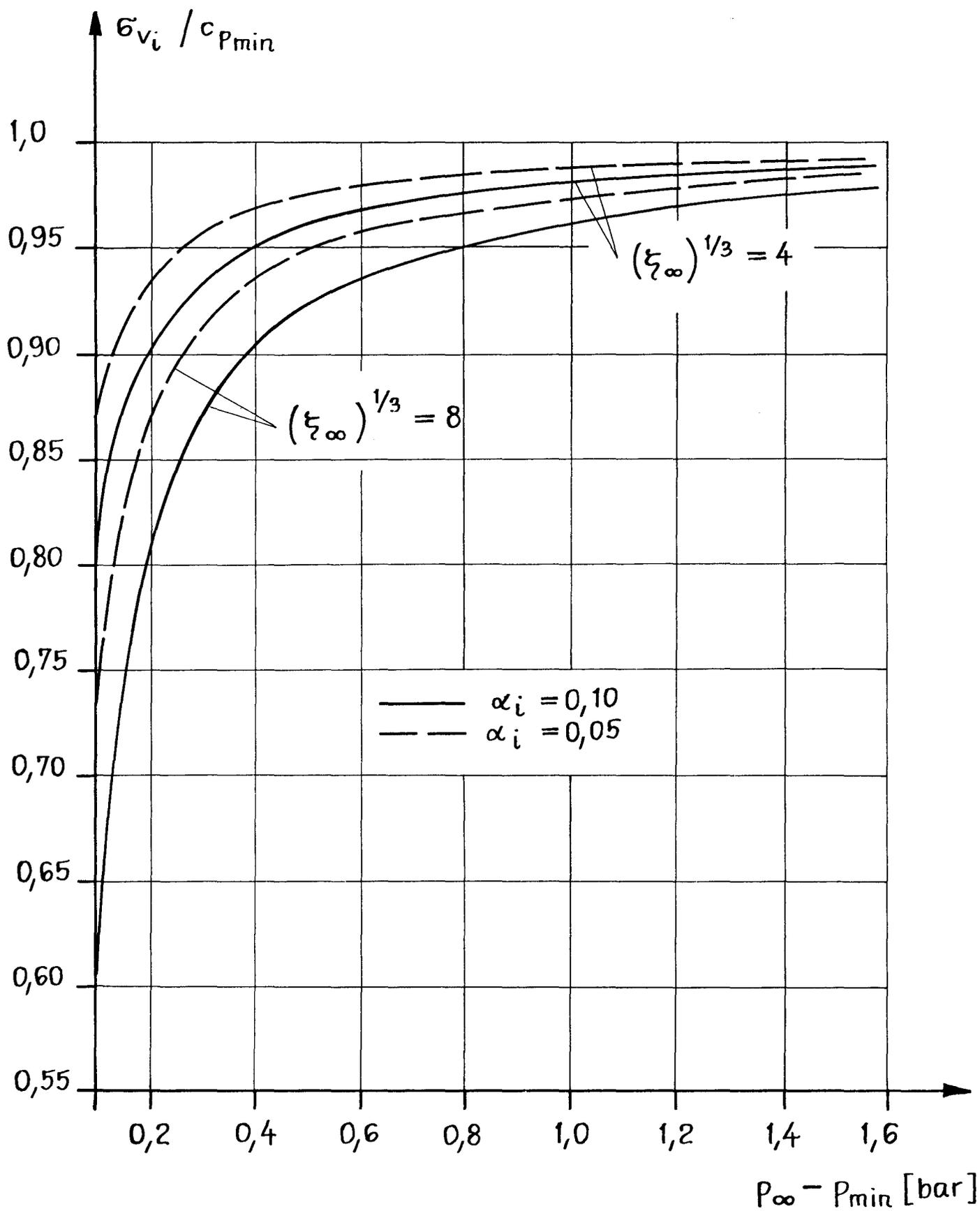


Abb. 8 Verhältnis σ_{vi} / c_{pmin} in Abhängigkeit von der Druckdifferenz $p_{\infty} - p_{min}$

dann auf einer sehr kurzen Lauflänge, so daß Werte $X_i \approx 0,1$ vorliegen können. Bei sehr keimfreien Wasser mit hoher Zugfestigkeit sind dann Werte $\Xi \cdot X_i \approx 1$ realistisch. Für derartige Fälle gilt aber (63) nicht mehr. Vielmehr ist zum Beispiel für $\alpha_i = 0,1$ dann nach Abb. 6 bzw. (62)

$$C_{p_{min}} - \sigma_{vi} - N_i S = 1,5. \quad (66)$$

Für einen Rotationskörper mit $U_\infty = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und gemessenem¹ $\sigma_{vi} = 0,45$ ergibt sich aus Gl. (66): $C_{p_{min}} = 1,97$, also $\frac{\sigma_{vi}}{C_{p_{min}}} = 0,23$; also ein wesentlich kleinerer Wert als er oben für Spitzenwirbel vorausgesagt wurde.

Schließlich sollte nicht unerwähnt bleiben, daß die Integration der Dgl. (51) in der angegebenen geschlossenen Form nur unter der Näherungsannahme eines konstanten C_p -Wertes im Integrationsbereich möglich ist. Sofern der Bereich des Druckabfalls vom Staudruck mit $C_p = -1$ auf den durch $C_{p_{min}}$ gegebenen Minimaldruck eine wesentliche Rolle für den Kavitationseinsatz spielt, könnte man die in Abschnitt 4 abgeleiteten Formeln dadurch anpassen, daß überall, also auch in (62) und (66) $C_{p_{min}}$ durch $\bar{C}_{p_{min}} = \frac{1}{2}(C_{p_{min}} - 1)$ ersetzt wird. Dies würde für den erwähnten Rotationskörper bedeuten, $C_{p_{min}} = 4,94$. Um genaue Werte zu erhalten, wird man aber in diesen Fällen um eine exakte numerische Integration der Dgl. (51) nicht herumkommen.

Sofern man den Radius R_∞ der in der Zuströmung vorhandenen Blasen kennt, kann man zur Kontrolle des $(C_{p_{min}} - \sigma_{vi})$ -Wertes noch die Relation (69) (vgl. Anhang A) heranziehen. Bei großer Lauflänge X_i im Unterdruckbereich wird der Quotient aus (69) gegen 1 gehen.

Wir untersuchen nunmehr den Fall $\sigma_{vi} > C_{p_{min}}$, für den wie bereits am Schluß von Abschnitt 3 erläutert der turbulente Diffusionsvorgang mit den Formeln (31) und (37) bzw. (39) für die Berechnung von $\frac{\sigma_{vi}}{C_{p_{min}}}$ maßgebend ist. Eine Betrachtung der Formeln zeigt, daß die Ergebnisse im wesentlichen von zwei Parametern abhängen, die die Einflüsse von Kapillarspannung und turbulenter Diffusion enthalten, nämlich

$$\frac{S}{C_{p_{min}}} = \frac{2\sigma}{R_\infty \rho U_\infty^2 C_{p_{min}}} \quad (67)$$

und

$$\Delta \equiv \frac{\sqrt{D' \frac{x_i}{U_\infty}}}{R_i} = 0,110 \sqrt{\frac{x_i}{A}} \left(\frac{\zeta_\infty}{\alpha_i} A^3 \right)^{\frac{1}{3}} (\Re_e)^{-0,1}. \quad (68)$$

In Formel (68) ist D' aus Formel (25) entnommen sowie die Relation (35) berücksichtigt. Wenn man realistische Werte in folgendem Bereich berücksichtigt ($0,05 < \alpha_i < 0,10$ wurde schon erwähnt): $3 < \frac{x_i}{A} < 4$; $\frac{10}{\text{cm}^3} < \zeta_\infty < \frac{500}{\text{cm}^3}$; $5\text{cm} < A < 15\text{cm}$; $\Re_e \approx 10^6$, so ergibt sich, daß für den Parameter Δ ein Wertebereich $1 < \Delta < 10$ in Frage kommt.

Denkt man ferner an die realistischen Daten: $0,5 < C_{p_{min}} < 2,0$ sowie $5 \frac{\text{m}}{\text{s}} < U_\infty < 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $3 \cdot 10^{-4}\text{cm} < R_\infty < 3 \cdot 10^{-3}\text{cm}$, so erhält man für den Parameter $\frac{S}{C_{p_{min}}}$ einen Wertebereich: $0,01 < \frac{S}{C_{p_{min}}} < 4$. Die Abb. 9 zeigt den sich aus Formel (31) ergebenden Zusammenhang zwischen $\frac{\sigma_{vi}}{C_{p_{min}}}$ und $\frac{R_\infty}{R_0}$ in Abhängigkeit vom Parameter $\frac{S}{C_{p_{min}}}$. In Abb. 10

¹Diese Daten und Hinweise verdanke ich einer persönlichen Mitteilung von DR. A. P. KELLER (vgl. auch [Kel92, S. 122]).

ist der Verlauf des Quotienten (38) unter Berücksichtigung der $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}}$ -Werte aus Gl. (31) in Abhängigkeit von $\frac{R_\infty}{R_0}$ dargestellt.

In Formel (37) tritt der Wert $\frac{R_\infty}{R_i} = \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{3}}$ auf. Der für dieses Verhältnis auftretende Wertebereich liegt praktisch zwischen 0,01 und 0,10. Testrechnungen haben gezeigt, daß der Wert $\frac{R_\infty}{R_i}$ nur geringen Einfluß in Formel (37) ausübt. Dies erkennt man auch daran, daß in der Näherungsformel (39) das Verhältnis $\frac{R_\infty}{R_i}$ ganz herausgefallen ist. Wir beschränken uns daher für die Auswertung von Formel (37) auf den mittleren Wert $\frac{R_\infty}{R_i} = 0,03$. Beispiele für die so mit Formel (37) ausgeführte Berechnung des Diffusionsparameters Δ in Abhängigkeit von $\frac{R_\infty}{R_0}$ findet man in Abb. 11. Die nachfolgende Abb. 12 zeigt das Ergebnis der Elimination von $\frac{R_\infty}{R_0}$ (dies ist ja nur eine physikalische Hilfsgröße) aus Gl. (31) und (37). Oder anders gesagt: Abb. 12 stellt eine Kombination der Abb. 9 und 11 dar. Sie zeigt die gesuchte Abhängigkeit des Wertes $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}}$ von dem durch Gl. (68) definierten Diffusionsparameter Δ .

Bei der Betrachtung von Abb. 9 gemäß Formel (31) fallen zunächst die für $\frac{R_\infty}{R_0} = 1 - 0,05$ unrealistisch hoch erscheinenden Werte $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}} \approx 6,5$ auf. Hierzu ist zu bemerken, daß ein Wert $\frac{R_\infty}{R_0} = 0,95$ nach Formel (28) ohne den Einfluß der Kapillarspannung bedeuten müßte, daß der Zuströmdruck p_∞ nur wenig über dem Minimaldruck im Spitzenwirbel p_{min} liegen würde. Letzteres ist nur bei einem unrealistisch großen Wirbelkernradius möglich. Mit anderen Worten: Werte $\frac{R_\infty}{R_0} = 1 - \beta$ mit $\beta^2 \ll 1$ haben allenfalls Bedeutung, wenn ein sehr großer Einfluß der Kapillarspannung besteht, nämlich für Werte $\frac{S}{4C_{pmin}}$ vergleichbar mit 1. Letzteres erkennt man, wenn ein Ansatz der Form $\frac{R_\infty}{R_0} = 1 - \beta$ mit $\beta^2 \ll 1$ in Formel (31) eingesetzt wird. Nach elementarer Umformung ergibt sich

$$\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}} \approx \frac{1}{3\beta} - \frac{4S}{3},$$

und daraus folgt die eben genannte Abschätzung. Weiter ist natürlich verständlich, daß hohe Werte $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}}$ nur bei entsprechend großen Diffusionsparametern Δ möglich sind, wie dies aus Abb. 12 hervorgeht.

Praktische Bedeutung hat vor allem der Wertebereich $\frac{R_\infty}{R_0} < 0,85$. Man erkennt, daß durch turbulente Diffusion der Beiwert σ_{vi} des Kavitationseinsatzes den C_{pmin} -Wert ganz wesentlich überschreiten kann. Aus Experimenten von ARNDT und Mitarbeitern [Arn92], [Arn91] sind Werte $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}} \approx 2$ für Wasser ohne Zugspannungen bekannt. Auch ältere Experimente zeigen meist Werte $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}} > 1$ [Bil79].

Der aus Abb. 12 hervorgehende Einfluß des Sättigungsgrades ε_∞ der Zuströmung entspricht in seiner Tendenz den Erwartungen. Man erkennt, daß selbst untersättigtes Wasser mit $\varepsilon_\infty < 1$ noch zu deutlich über 1 liegenden $\frac{\sigma_{vi}}{C_{pmin}}$ -Werten führen kann.

Es bedarf kaum eines Hinweises darauf, daß diese erheblichen Einflüsse des Sättigungsgrades nur durch Turbulenz und den dadurch bedingten turbulenten Diffusionsbeiwert D' möglich sind. Molekulare Diffusion mit dem um Größenordnungen kleineren Diffusionsparameter D ist für den Kavitationseinsatz vollkommen bedeutungslos.

Die vorgelegte Theorie basiert somit entscheidend auf zwei durch Experimente noch nicht genau genug erforschten Parametern, einmal dem turbulenten Diffusionsbeiwert D' und zum anderen dem C_{pmin} -Wert des Spitzenwirbels.

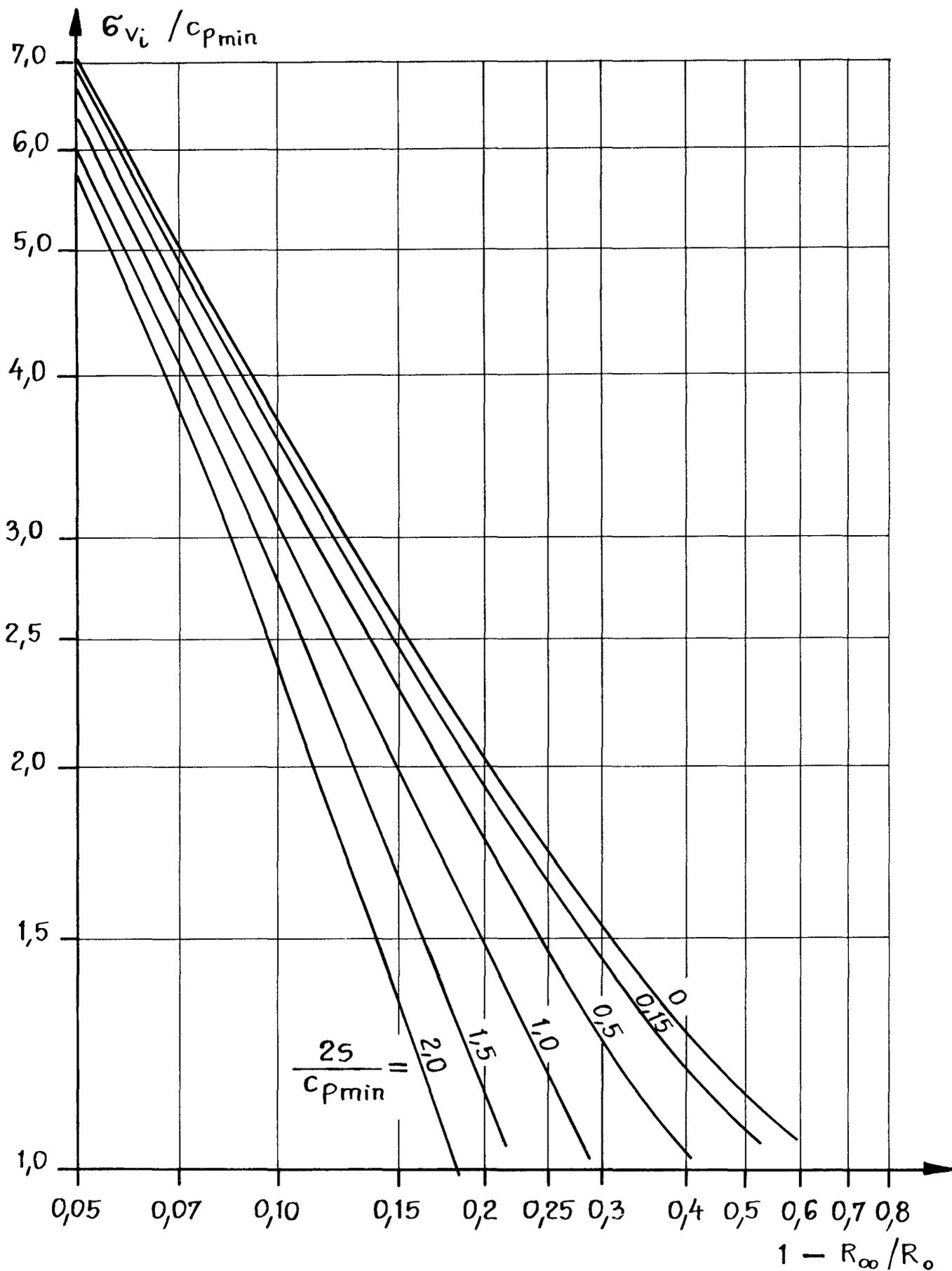


Abb. 9 Verhältnis $\tilde{\sigma}_{v_i} / c_{pmin}$ in Abhängigkeit von R_{∞} / R_0 für verschiedene Werte des Parameters $25 / c_{pmin}$ gemäß Gl. (31)

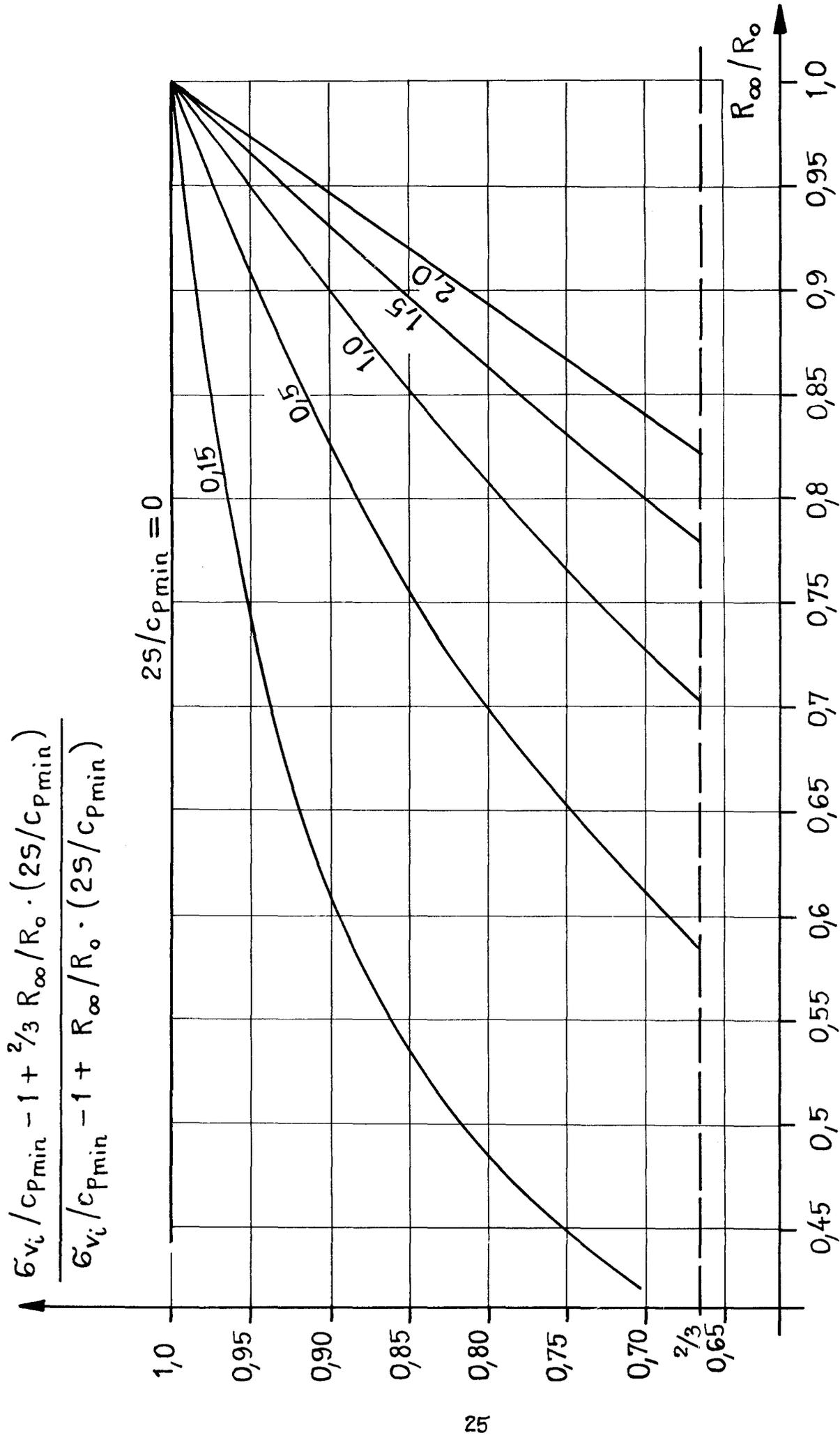


Abb. 10 Quotient Gl. (38) in Abhängigkeit von R_{∞} / R_0 für verschiedene Werte des Parameters $25 / c_{p_{\min}}$

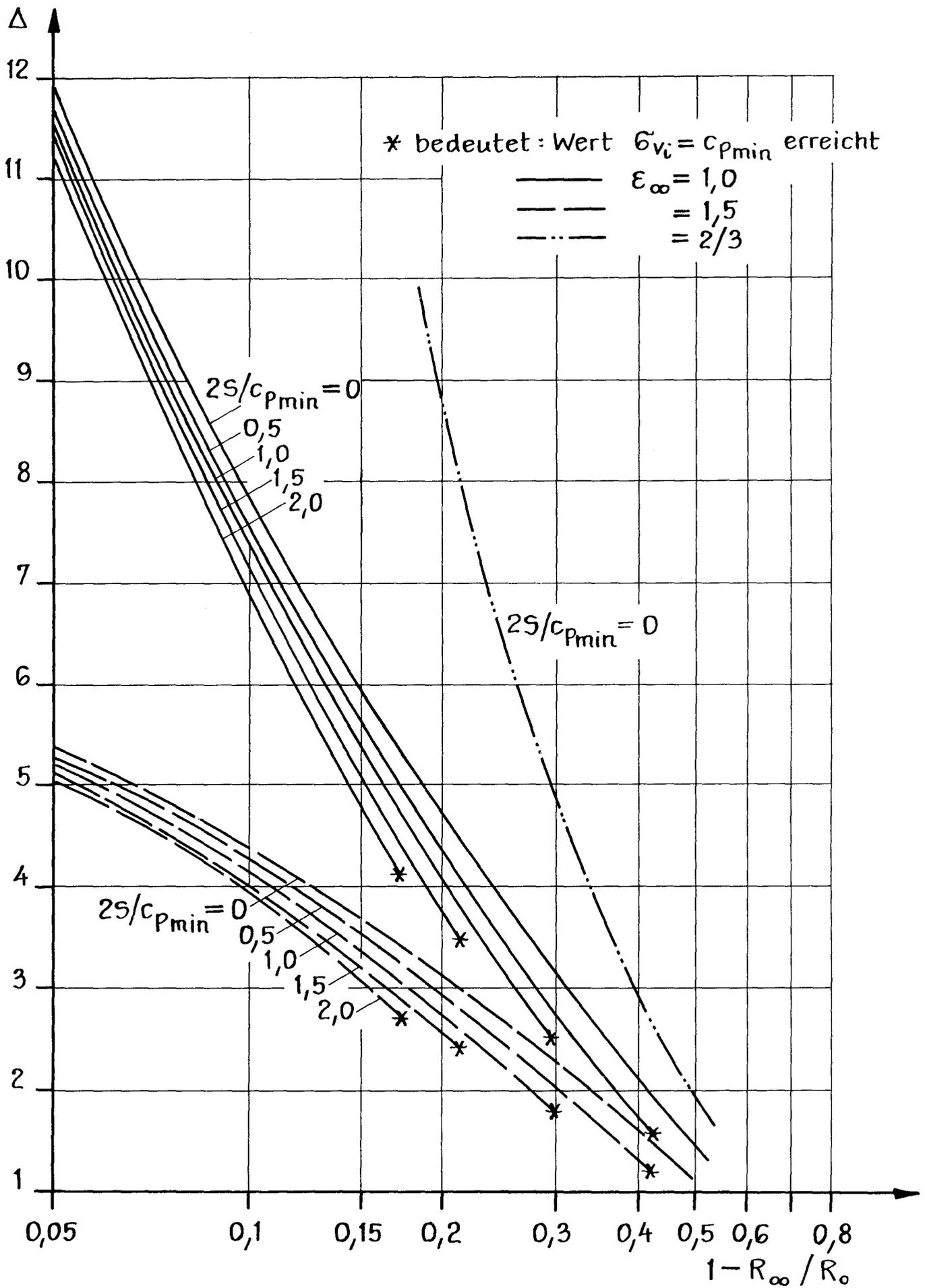


Abb.11 Parameter Δ in Abhängigkeit von R_∞/R_0 für verschiedene Werte von $2S/c_{pmin}$

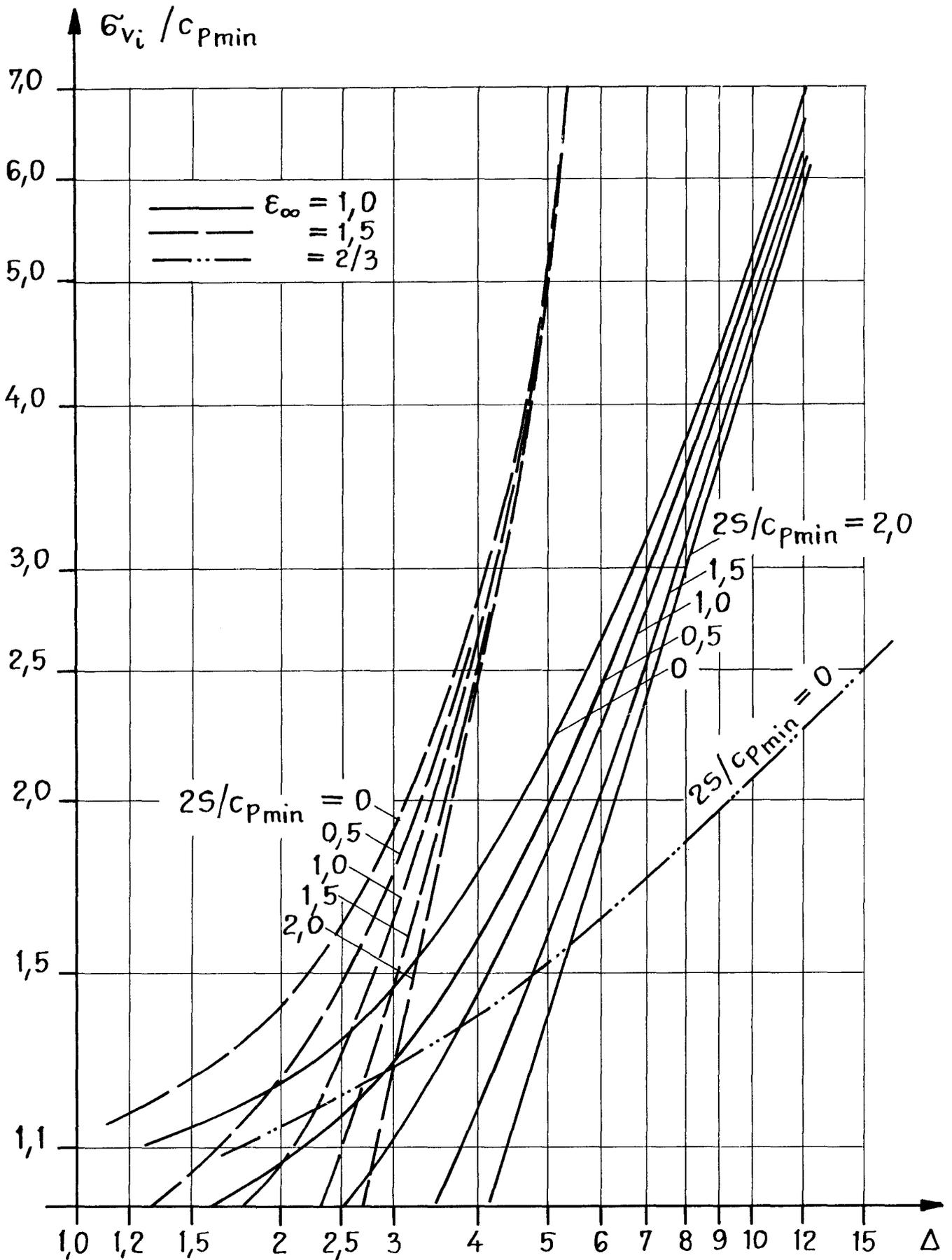


Abb. 12 Verhältnis σ_{vi} / c_{pmin} in Abhängigkeit vom Diffusionsparameter Δ für verschiedene Werte von $2S / c_{pmin}$

Ältere Untersuchungen haben sich meist damit begnügt, den $C_{p_{min}}$ -Wert durch den beobachteten Kavitationseinsatz, also durch die Relation $\sigma_{vi} \approx C_{p_{min}}$ festzulegen [Isa92]. Dies reicht für künftige Arbeiten nicht aus, weil gerade der Unterschied zwischen beiden Beiwerten wesentlich ist. Notwendig erscheint eine Messung des Abstandes r_k (sog. Kernradius) vom Zentrum des Wirbelkerns, an dem die Umfangsgeschwindigkeit im Bereich des Spitzenwirbels ihren Maximalwert erreicht, sowie dieses Maximalwertes selbst. Damit würden zuverlässige Aussagen über den $C_{p_{min}}$ -Wert möglich [Isa92]. Einige Messungen dieser Art findet man bei ARNDT und Mitarbeitern [Arn92], [Arn91], jedoch reichen die veröffentlichten Daten noch nicht zu klaren Aussagen.

Literatur

- [Arn91] R. E. A. Arndt, H. H. Arakeri and H. Higuchi. Some observations of tip vortex cavitation. *Journal Fluid Mech.*, 229:269, 1991.
- [Arn92] R. E. A. Arndt and Ch. Dugue. Recent advances in tip vortex cavitation research. In *Proceedings Intern. Symposium on Propulsors and Cavitation*, Hamburg, June 1992.
- [Bil79] M. L. Billet and J. W. Holl. Scale effects on various types of limited cavitation. In *Proceedings ASME Intern. Symposium on Cavitation Inception*, New York, December 1979.
- [Ceb74] T. Cebeci. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. Academic Press, New York, 1974.
- [Eps50] P. S. Epstein and M. S. Plesset. On the stability of gas bubbles in liquid-gas solutions. *Journal Chem. Phys.*, 18:1505, 1950.
- [Isa89] W. H. Isay. *Kavitation*. Schiffahrtsverlag Hansa Hamburg, dritte Auflage, 1989.
- [Isa92] W. H. Isay. An approximate solution of the velocity and pressure field of a tip vortex in turbulent flow. *Schiffstechnik*, 39(2), 1992.
- [Kel92] A. P. Keller and G. Eickmann. Velocity, size and viscosity scaling laws for cavitation inception developed under consideration of the tensile strength of the test liquid. In *Symposium on Propulsors and Cavitation*, Hamburg, June 1992.
- [Par91] B. Parkin and K. Ravindra. Convective gaseous diffusion in steady axisymmetric cavity flows. *Journal Fluids Engineering*, 113:285, 1991.
- [Rav91] K. Ravindra and B. Parkin. Unsteady gaseous diffusion associated with a fully cavitating oscillating flat plate hydrofoil. *Journal Fluids Engineering*, 113:291, 1991.
- [Shi74] A. Shima and T. Tsujino. The dissolution and growth of a gas bubble in water. Report 30, Inst. High Speed Mech. Tohoku, University Sendai, 1974.

[Tom79] Y. Tomita and A. Shima. The effects of heat transfer on the behaviour of a bubble and the impuls pressure in a viscous compressible liquid. *Z. angew. Math. Mech.*, 59:297, 1979.

A Bestimmung der zur instabilen Blasenaufweitung erforderlichen Mindestspannung

Eine zusätzliche nützliche Information liefert die zur instabilen Aufweitung der Blasen erforderliche Mindestzugspannung

$$p_v - p_{min}^*$$

Dieser Wert kann nämlich zur Kontrolle der in Abschnitt 4 durchgeführten Aufweitungsberechnung verwendet werden; denn wie man leicht einsieht muß gelten

$$\frac{p_v - p_{min}^*}{p_v - p_{min}} \leq 1; \quad \frac{C_{p_{min}^*} - \sigma_{vi}}{C_{p_{min}} - \sigma_{vi}} \leq 1. \quad (69)$$

Wie aus den Grundlagen der Blasendynamik bekannt ist (vgl. [Isa89, Kapitel 7]), ist der Wert $p_{min} = p_{min}^*$ zunächst durch die Bedingung $\frac{d\alpha}{dX} = 0$ bestimmt. Das bedeutet nach Formel (53)

$$0 = \frac{\alpha_{**}}{\alpha_\infty} \left(e^{-\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}}} - e^{-\frac{\alpha_*}{\alpha_{**}}} \right) (C_{p_{min}^*} - \sigma_{vi}) - 3S \left[\left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] + (\sigma_{vi} + 2S) \ln \frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}. \quad (70)$$

In Formel (70) bedeutet α_* den zu $C_{p_{min}^*}$ gehörenden α -Wert. Für den gesuchten Grenzwert p_{min}^* muß zusätzlich auch die Ableitung von Gl. (70) nach α_* verschwinden. Dies ergibt die weitere Beziehung

$$\left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2S e^{+\frac{\alpha_*}{\alpha_{**}}} \left[1 - \left(1 + \frac{\sigma_{vi}}{2S} \right) \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} \right)^{\frac{2}{3}} \right]}{C_{p_{min}^*} - \sigma_{vi}}. \quad (71)$$

Da

$$\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} \ll 1, \quad \alpha_* < \alpha_{**} \quad (72)$$

angenommen werden kann, läßt sich Formel (71) iterativ auflösen. Mit der Abkürzung

$$\Omega \equiv \frac{C_{p_{min}^*} - \sigma_{vi}}{2S} = \frac{p_v - p_{min}^*}{\frac{2\sigma}{R_\infty}} \quad (73)$$

erhalten wir aus (71)

$$\left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\Omega} e^{\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \frac{1}{n^3}} \left[1 - \left(1 + \frac{\sigma_{vi}}{2S} \right) \Omega^2 \right]. \quad (74)$$

Unter Ausnutzung der Bedingung (72) kann auch Formel (70) noch vereinfacht werden; u. a. lassen sich die Exponentialfunktionen durch die ersten Glieder ihrer Reihen ersetzen.

Die so vereinfachte Relation (70) lautet:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_*}{\alpha_\infty} \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}}\right] (C_{p_{min}}^* - \sigma_{vi}) = \\ & = 3S \left[1 - \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*}\right)^{\frac{2}{3}}\right] + (\sigma_{vi} + 2S) \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*}\right)^{\frac{2}{3}} \ln \frac{\alpha_\infty}{\alpha_*}. \end{aligned} \quad (75)$$

Wir tragen nun den $\left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)$ -Wert aus Gl. (74) in Formel (75) ein; dabei wird in allen Termen von minderer Bedeutung lediglich

$$\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty} = \frac{1}{\Omega^3}$$

gesetzt. Mit der Abkürzung

$$\Omega_\alpha = \left(1 - \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}}\right) e^{\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}\Omega^3}} \quad (76)$$

ergibt sich so die gesuchte Endformel für $p_v - p_{min}^*$, nämlich

$$\Omega^2 = \frac{(3 - 2 \cdot \Omega_\alpha)S}{3(\sigma_{vi} + 2S) \ln \frac{1}{\Omega} + 3S - \Omega_\alpha(\sigma_{vi} + 2S)}, \quad (77)$$

die leicht iterativ aufgelöst werden kann. Aus Formel (77) kürzt sich im übrigen der Staudruck $\frac{\rho}{2}U_\infty^2$ heraus; man hat dann gleichbedeutend:

$$\Omega^2 = \frac{(3 - 2\Omega_\alpha) \cdot \frac{\sigma}{R_\infty}}{(3 \ln \frac{1}{\Omega} - \Omega_\alpha)(p_\infty - p_v + \frac{2\sigma}{R_\infty}) + \frac{3\sigma}{R_\infty}}. \quad (78)$$

Wie es auch sein muß, ist in Formel (77) im Grenzwert $\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}} \rightarrow 0$ der Fall der Einzelblase enthalten. Die entsprechende Formel läßt sich natürlich auch direkt aus der klassischen Blasendynamik gewinnen.

In Abb. 13 ist der Wert $(p_v - p_{min}^*)$ in Abhängigkeit vom Keimradius R_∞ der Zuströmung dargestellt. Man erkennt, daß der in $\frac{\alpha_\infty}{\alpha_{**}}$ enthaltene Einfluß der Umgebungsblasen nur gering ist.

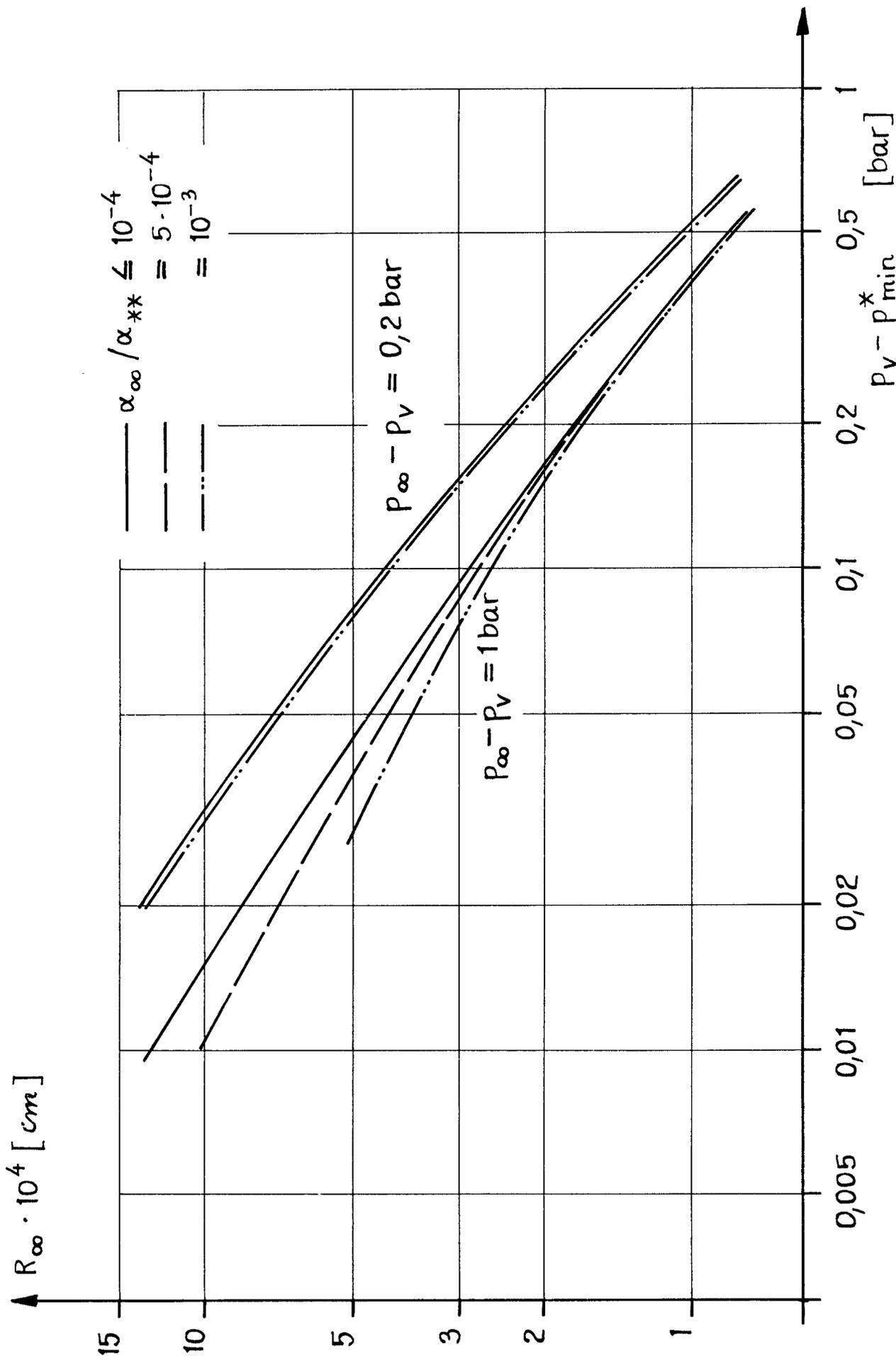


Abb. 13 Die für die instabile Blasenauflösung erforderliche Mindestzugspannung $p_v - p_{\min}^*$ in Abhängigkeit vom Keimradius R_{∞} in der Zuströmung

