

89 | 1962

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Eggers

**Über die Ermittlung des
Wellenwiderstandes eines
Schiffsmodells durch Analyse seines
Wellensystems**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Über die Ermittlung des Wellenwiderstandes eines Schiffmodells durch Analyse seines Wellensystems

K. Eggers

Eine klassische Aufgabe im Schiffbau-Versuchswesen ist die Ermittlung des Anteils an Fahrtwiderstand eines Modells, welcher durch die Erzeugung von Wellen bedingt ist. Bei jedem Schleppversuch wird die Abspaltung dieses Anteils erforderlich, da für ihn das Froudesche Modellgesetz gilt, für den Reibungswiderstand hingegen das Reynoldssche Gesetz anzuwenden ist. Um den Leistungsbedarf des großen Schiffes genau vorhersagen zu können bedarf es rigoroser Methoden bei der Aufspaltung des gemessenen Modellwiderstands.

Darüber hinaus ist es für Veränderungen der Schiffsförmigkeit — etwa durch Wülste oder Anhänge — wichtig zu wissen, wie weit eine gefundene Änderung des Gesamtwiderstandes sich auf die beiden Anteile verteilt. Schließlich erfordert eine kritische Überprüfung der Froudeschen Hypothese über das additive Zusammenwirken der Anteile, insbesondere die Erforschung des Einflusses der Viskosität auf die Ausbildung von Wellen und damit auf den Wellenwiderstand, eine direkte Methode zur Messung der Energie, welche in den Wellen abwandert.

Der Wellenwiderstand manifestiert sich in der fortlaufenden Erzeugung von Wellen und kommt damit durch die Geometrie der verformten Wasseroberfläche unmittelbar zum Ausdruck, während sich die Wirkung der Reibungserscheinungen an der Schiffsoberfläche im wesentlichen nur durch eine Analyse der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Flüssigkeit erfassen läßt. Schon deshalb liegt es näher, den Wellenwiderstandsanteil durch direkte Messungen zu erfassen.

Im folgenden wird ein Meßverfahren entwickelt aus einer begrifflichen Festlegung des Wellenwiderstands durch den Energiefluß in den Wellen. Wir werden zeigen, daß zu seiner Bestimmung i. a. das Wellenprofil zweier Schnitte die notwendige Information ergibt. Wesentlich für das hier gezeigte Verfahren ist die Annahme eines „freien Wellensystems“. Wir setzen voraus, daß das Wellenbild in einem mit dem Schiff stationär bewegten Bezugssystem nicht mehr zeitabhängig erscheint und sich aufbaut aus freien ebenen Wellen, das sind Wellen von Sinusprofil, welche schon für sich im bewegten System stationär erscheinen. Bei Berechtigung unserer Voraussetzung muß nicht nur der Energiefluß, sondern auch seine Verteilung auf die Komponenten des freien Wellensystems unabhängig sein von der Wahl der Schnitte, auf denen wir messen, — so können wir durch unabhängige Messungen überprüfen, wie weit das Gedankenbild des freien Wellensystems trotz der Störung durch den Reibungsnachlauf das Wellenfeld beschreibt und wie groß der Abstand vom Modell gewählt werden muß, damit das Nahfeld genügend abgeklungen ist.

Für das Nahfeld um das Schiff werden keinerlei einschränkende Voraussetzungen über die Kleinheit der auftretenden Wellenschrägen zu machen sein. Wir werden noch zeigen, daß relativ beliebig geartete stationäre

Wellenfelder in genügender Entfernung von den sie verursachenden Störungen durch freie Wellensysteme beschrieben werden können. — Bei Schiffen welche zu ihrem Hauptspant symmetrisch sind läßt sich der Anteil des Nahfelds übrigens im Prinzip stets aus einem Wellenprofil eliminieren, indem man das Profil des am Hauptspant gespiegelten Schnitts in Abzug bringt.

Wir werden im folgenden den Fall eines Schiffes betrachten, das sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem flachen Kanal von rechteckigem Querschnitt parallel zu den Wandungen bewegt. Der Sonderfall seitlich unbeschränktem Wasser läßt sich unmittelbar daraus herleiten, der Grenzfall großer Wassertiefen bringt Vereinfachung in den abgeleiteten Ausdrücken.

Über den Energiefluß kann der Wellenwiderstand bestimmt werden, wenn die Strömungsverteilung in einem Kanalquerschnitt vor und in einem zweiten hinter dem Schiff bekannt ist. Der vordere Querschnitt wird zweckmäßig so weit vorn gewählt, daß keine Wellen auftreten; — der zweite so weit hinten, daß das Nahfeld abgeklungen ist. Dann nämlich läßt sich die Strömungsverteilung im Schnitt direkt ausdrücken durch sein Wellenprofil und dessen Ableitung in Kanallängsrichtung, welche sich durch Heranziehung des Profils eines zweiten Schnitts finden läßt.

Der Zusammenhang zwischen Wellenwiderstand und Wellenenergetransport in seitlich unbeschränktem Wasser wurde von Havelock [1] aufgezeigt. Er drückte den Energietransport aus durch eine Spektralfunktion, welche das freie Wellensystem charakterisiert. Das Interesse anderer Schiffstheoretiker richtete sich vornehmlich auf die asymptotische Form des freien Wellensystems hinter einem Druckpunkt an der freien Oberfläche, welches qualitativ die Wellenkonfiguration hinter einem Schiff beschreibt [2], [3]. Ausgehend von diesen Entwicklungen ist in jüngster Zeit von japanischen Wissenschaftlern versucht worden, die Spektralfunktion punktweise zu bestimmen durch Aufmessung von Wellenprofilen in radialen Schnitten, welche von einem Punkt vor dem Bug ausgehen. Durch einen Schnitt kann die Spektralfunktion dabei nur für zwei Argumente bestimmt werden [4]. Das angegebene Verfahren enthält Unsicherheiten durch die Unbestimmtheit des Schnittzentrums und wegen der Heranziehung des asymptotischen Ausdrucks für die Wellenerhebung auch in unmittelbarer Nähe des Schiffes.

Die Widerstandserfassung durch Vermessung des Wellenprofils nur eines Schnittes wurde vor Jahresfrist vorgeschlagen von Korvin Kroukowsky, wobei allerdings unterstellt wurde, daß die potentielle Energie, welche in diesem Wellenprofil zum Ausdruck kommt, schon genügend Information zur Bestimmung des gesamten Energieflusses erbrächte. Wir werden zeigen, daß der somit definierte Meßwert stark von der Schnittlage ab-

hängt und sowohl größer wie auch kleiner ausfallen kann als der Wert nach dem im folgenden entwickelten Verfahren. Für Versuche im Kanal werden wir auch eine Möglichkeit aufzeigen, den Energiefluß aus dem Profil nur eines Schnitts zu finden, wenn der Schnitt parallel zur Kanalwand verläuft. Da so ein Profil durch eine im Kanal fest angebrachte Sonde aufgenommen werden kann, würde dieses Verfahren bei praktischer Bewährung einen geringeren meßtechnischen Aufwand erfordern als die Bestimmung von Profilen quer zur Fahrtrichtung, welche nur durch eine mit dem Modell bewegte Sonde oder durch stereographische Wellenvermessung möglich erscheint.

1. Energiebetrachtungen zur Ermittlung des Wellenwiderstands aus der Strömung auf Kontrollflächen

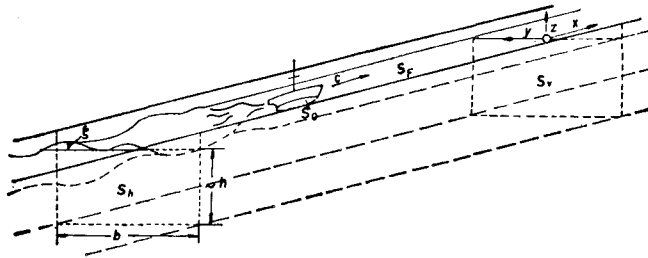
Ein Schiff fahre mit gleichförmiger Geschwindigkeit c durch einen Kanal konstanten Querschnitts. In einem schiffsfesten Bezugssystem erscheinen die Fahrtwellen nach einiger Zeit stationär. Betrachten wir die Flüssigkeitsmenge zwischen zwei Querschnittsflächen des Kanals in festem Abstand vor und hinter dem Schiff, so bleibt insbesondere das Volumenintegral irgendeiner Zustandsgröße des schiffsfesten Systems, etwa der Energiedichte

$$e = \rho (\vec{v} \vec{v})/2 + \rho g z \quad (1.01)$$

über dem Gebiet konstant. (ρ sei die Dichte der Flüssigkeit, \vec{v} der Strömungsvektor, g die Erdbeschleunigung und z die Koordinate der Höhe über dem ungestörten Wasserspiegel). Wir betrachten

$$E = \int e \, d\tau \quad (1.02)$$

wobei das Integrationsgebiet eingeschlossen sei von der vorderen Kontrollfläche S_v , der hinteren Kontrollfläche S_h , dem dazwischen liegenden Stück der freien Oberfläche S_f , welches die benetzte Oberfläche des Schiffes S_0 umrandet, und von den Kanalwänden zwischen S_v und S_h .



Die — verschwindenden — Ableitungen von E nach der Zeit ergibt sich als Summe von zwei Termen; der erste entspricht der partiellen Ableitung des Integranden, der zweite erfaßt die Änderung des Integrationsbereichs mit der Zeit und erscheint damit als Integral über die Berandungen.

Sei dS das Oberflächenelement der Randflächen, und \vec{n} der zugehörige Normalenvektor nach außen, so gilt:

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int (\vec{v} \vec{v}) \, d\tau + \int e (\vec{c} \vec{n}) \, dS. \quad (1.03)$$

$S_v + S_f + S_h + S_0$

Dabei sei \vec{v}_t die Zeitableitung von \vec{v} in einem ortsfesten Bezugssystem, es gilt

$$\vec{v}_t = -(\vec{c} \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (1.04)$$

Für wirbelfreie Strömung gilt weiter

$$(\vec{v}, (\vec{c} \vec{\nabla}) \vec{v}) = (\vec{v} \vec{\nabla}) (\vec{c} \vec{v}) \quad (1.05)$$

und für inkompressible Strömung liefert der Gaußsche Satz unter Benutzung von 1.04, 1.05

$$\frac{dE}{dt} = \int_{S_v + S_h + S_0 + S_f} \{ \rho (\vec{c} \vec{v}) (\vec{v} \vec{n}) + e (\vec{c} \vec{n}) \} \, dS. \quad (1.06)$$

Für den Beitrag der benetzten Oberfläche S_0 und des ausgeschnittenen Stückes S_f der freien Oberfläche empfiehlt sich eine Umformung des Integranden unter Benutzung der Bernoulligleichung im stationären mitgeführten System:

$$\rho g z + p + \rho (\vec{v} - \vec{c}, \vec{v} - \vec{c})/2 = \text{const} = \rho (\vec{c} \vec{c})/2, \quad (1.07)$$

welche die additive Konstante des Drucks so bestimmt, daß weit vor dem Schiff, wo \vec{v} abklingt, der Druck gegen null geht. Mit 1.01 finden wir dann $p = \rho (\vec{v} \vec{c}) - e$ und damit

$$\int \{ e (\vec{c} \vec{n}) - \rho (\vec{c} \vec{v}) (\vec{v} \vec{n}) \} \, dS = - \int e (\vec{v} - \vec{c}, \vec{n}) \, dS - \int p (\vec{v} \vec{n}) \, dS. \quad (1.08)$$

Die Änderung des Volumenintegrals über e kann somit erfaßt werden durch das Randflächenintegral über den substantiellen Transport von e durch S , welcher mit der relativen Normalgeschwindigkeit $(\vec{v} - \vec{c}, \vec{n})$ erfolgt, und durch die Arbeitsleistung der Absolutströmung normal zur Randfläche gegen den Druck p [5]. — Sowohl auf S_f wie auch auf S_0 gilt die kinematische Randbedingung

$$(\vec{v} - \vec{c}, \vec{n}) = 0, \quad (1.09)$$

d. h. die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit verschwindet. Weiter ist

$$\int_{S_0} p (\vec{v} \vec{n}) \, dS = (\vec{c} \int_{S_0} p \vec{n} \, dS) = (\vec{c} \vec{R}), \quad (1.10)$$

wenn \vec{R} der Kraftvektor zur Überwindung des Wellenwiderstands ist.

Somit wird das Verschwinden der linken Seite von 1.03 gleichbedeutend mit der Beziehung:

$$R = - \frac{1}{c} \int_{S_v + S_h} e (\vec{c} \vec{n}) \, dS + \frac{\rho}{c} \int_{S_v + S_h} (\vec{c} \vec{v}) (\vec{v} \vec{n}) \, dS \quad (1.11)$$

mit $c = |\vec{c}|$

welche den Betrag R des Wellenwiderstandes ausdrückt durch die Werte von e und \vec{v} auf den Kontrollflächen.

Wir haben bisher noch keine Annahmen über Form und Lage der Kontrollflächen gemacht. Nehmen wir die vordere genügend weit vorn an, so wird der Beitrag der Geschwindigkeitsquadrate und die potentielle Energie der Wellenerhebung beliebig klein, so daß wir setzen dürfen

$$\frac{1}{c} \int_{S_v} \{ e (\vec{c} \vec{n}) - \rho (\vec{c} \vec{v}) (\vec{v} \vec{n}) \} \, dS = \int_{S_v} \rho g z \, b \, dz = - \frac{1}{2} \rho g b h^2, \quad (1.12)$$

wenn h die ungestörte Wassertiefe, b die Kanalbreite ist; — da aber der Wert eines Integrals 1.12 unabhängig sein muß von Form und Lage der Fläche vor dem Schiff, so

gilt 1.12 exakt für beliebige Fläche, also gilt allgemein

$$R = \frac{1}{c} \int_{S_h} e(\vec{c} \vec{n}) dS + \frac{\rho}{c} \int_{S_h} (\vec{c} \vec{v})(\vec{v} \vec{n}) dS - \frac{1}{2} \rho g b h^2. \quad (1.13)$$

Diese Formel gilt ohne spezielle Annahmen über Form und Lage der hinteren Kontrollfläche und ohne Einschränkungen über die Größe von Wellenhöhen und Geschwindigkeitskomponenten. Wir haben bei ihrer Herleitung von keinen Linearisierungen Gebrauch gemacht, und haben ein rein formales Vorgehen physikalischen Suggestionen vorgezogen. Es besteht keine Berechtigung, 1.13 zu postulieren aus der Vorstellung eines substantiellen Energietransports mit der Geschwindigkeit c und einer Arbeitsleistung gegen einen „linearisierten Druck“ $\rho(\vec{c} \vec{v})$ auf der Kontrollfläche [1] [6], denn der zweite Summand von 1.13 unterscheidet sich von dem letzten Term von 1.08 um einen Ausdruck

$$I = \int e(\vec{v} \vec{n}) dS, \quad (1.14)$$

welcher auch im Rahmen einer linearisierten Theorie nicht als klein von höherer Ordnung angesehen werden kann, — der zweite Summand von 1.13 repräsentiert also lediglich die Arbeit gegen den instationären Druckanteil!

Wird die Kontrollfläche S_h als Ebene senkrecht zur Fahrtrichtung angenommen, so wird der zweite Summand von 1.13 stets negativ ausfallen, die Summe der ersten beiden Terme bleibt jedoch stets positiv. Nehmen wir an, daß S_h so weit hinten liegt, daß \vec{v} und die Wellenhöhe ζ klein und von gleicher Größenordnung angenommen werden können, so erhalten wir

$$R = -\frac{1}{c} \left\{ \int 1/2 \rho g \zeta^2 (\vec{c} \vec{n}) dL + \int \rho \{(\vec{c} \vec{v})(\vec{v} \vec{n}) - (\vec{v} \vec{v})(\vec{c} \vec{n})/2\} dS_h \right\} \quad (1.15)$$

wobei die Linie L den Schnitt von S_h mit der Ebene $z = 0$ darstellt und das zweite Integral auf den Bereich unter dieser Linie beschränkt werden kann. Korvin-Kroukovsky setzt für den Wellenwiderstand das zweifache des ersten Terms von 1.15 an — [7].

Wir haben in unserer Herleitung nicht explizit vom Begriff des Geschwindigkeitspotentials Gebrauch gemacht, mußten aber für die Umformung 1.5 Wirbelfreiheit der Strömung annehmen. Führen wir außer der z -Koordinate nach oben eine x -Koordinate in Fahrtrichtung und eine y -Achse in horizontaler Lage senkrecht dazu ein, sei $\varphi(x, y, z)$ ein Geschwindigkeitspotential der Strömung, so können wir 1.15 umformen zu

$$R = \frac{\rho g}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \zeta^2 dy + \int_{z=-h}^0 \int_{y=-b/2}^{b/2} \frac{\rho}{2} \{ \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - \varphi_x^2 \} dz dy \quad (1.16)$$

2. Darstellung des Wellenwiderstandes durch das Wellenprofil eines Schnittes quer zur Fahrtrichtung

Für das Geschwindigkeitspotential der Wellen hinter dem Schiff machen wir einen Ansatz

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -\frac{g}{c} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{w_v} \{ \alpha_v \cos w_v x - \beta_v \sin w_v x \} \cdot \frac{\text{Cof } \kappa_v(h+z)}{\text{Cof } \kappa_v h} \cos u_v(b/2-y) \\ & + \frac{g}{2w_0 c} \{ \alpha_0 \cos w_0 x + \beta_0 \sin w_0 x \} \frac{\text{Cof } w_0(h+z)}{\text{Cof } w_0 h} \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit

$$u_v = v \pi / b \quad (v = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

wobei x_v die positive Wurzel der Gleichung

$$\kappa_v^2 - u_v^2 - K_0 \kappa_v \mathfrak{L}g(\kappa_v, h) = 0 \quad (2.3)$$

ist mit $K_0 = g/c^2$; weiter sei

$$w_v = \sqrt{\kappa_v^2 - u_v^2} > 0 (v = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

Falls 2.3 keine positive Wurzel hat, — dies gilt für $K_0 h < 1$, — setzen wir $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ an.

Der Ansatz 2.1 entspricht dem allgemeinsten Fall eines freien Wellensystems im Kanal.

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$A_v(x) = A_{-v}(x) = \alpha_v \cos w_v x + \beta_v \sin w_v x \quad 2.5$$

$$B_v(x) = B_{-v}(x) = \beta_v \cos w_v x - \alpha_v \sin w_v x \quad 2.6$$

so können wir die Geschwindigkeitskomponenten darstellen:

$$\varphi_x = \frac{g}{c} \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_v(x) \frac{\text{Cof } \kappa_v(z+h)}{\text{Cof } \kappa_v h} \cos u_v(b/2-y) \quad (2.7)$$

$$\varphi_y = \frac{g}{c} \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v(x) \frac{u_v}{w_v} \frac{\text{Cof } \kappa_v(z+h)}{\text{Cof } \kappa_v h} \sin u_v(b/2-y) \quad (2.8)$$

$$\varphi_z = \frac{g}{c} \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v(x) \frac{\kappa_v}{w_v} \frac{\text{Sin } \kappa_v(z+h)}{\text{Cof } \kappa_v h} \cos u_v(b/2-y) \quad (2.9)$$

und mit dem linearisierten Ansatz für die Wellenhöhe

$$\zeta = \frac{c}{g} \varphi_x \Big|_{z=0} \quad (2.10)$$

wird

$$\zeta = \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_v(x) \cos u_v(b/2-y) \quad (2.11)$$

und

$$\zeta_x = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v(x) w_v \sin u_v(b/2-y) \quad (2.12)$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in 1.16 ergibt unter Ausnutzung der Orthogonalität der Funktionen $\cos u_v(b/2-y)$ über dem Intervall $[-b/2, b/2]$:

$$\begin{aligned} R = & \frac{\rho g}{2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_v^2 + \frac{\rho}{8} \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v^2 \left[\int_{-h}^0 \frac{\text{Cof}^2 \kappa_v(h+z) dz}{\text{Cof}^2 \kappa_v h} \frac{u_v^2}{w_v^2} \right. \\ & \left. + \int_{-h}^0 \frac{\text{Sin}^2 \kappa_v(h+z) dz}{\text{Cof}^2 \kappa_v h} \frac{\kappa_v^2}{w_v^2} \right] \\ & - \frac{\rho}{8} \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_v^2 \int_{-h}^0 \frac{\text{Cof}^2 \kappa_v(h+z) dz}{\text{Cof}^2 \kappa_v h} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nun ist aber

$$\int_{-h}^0 \text{Cof}^2 \kappa_v(h+z) dz = \frac{\text{Sin } 2 \kappa_v h + 2 \kappa_v h}{4 \kappa_v} \quad (2.14)$$

$$\int_{-h}^0 \text{Sin}^2 \kappa_v(z+h) dz = \frac{\text{Sin } 2 \kappa_v h - 2 \kappa_v h}{4 \kappa_v} \quad (2.15)$$

und da außerdem aus 2.3 und 2.4 folgt

$$\mathfrak{L}g(\kappa, h) = \frac{w_v^2 c^2}{g \kappa_v} \quad (2.16)$$

und damit

$$\text{Cof}^2(\kappa, h) = \text{Sin}(2\kappa, h) \frac{g\kappa}{2w^2 c^2} \quad (2.17)$$

ergibt 2.13

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho g b}{4} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} B_{\nu}^2 \left(2 - \frac{\text{Sin}(2\kappa, h) + 2\kappa, h}{\text{Sin}(2\kappa, h)} \frac{w_{\nu}^2}{\kappa_{\nu}^2} \right) \right. \\ &+ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}^2 \left(\frac{(\text{Sin}(2\kappa, h) + 2\kappa, h) u_{\nu}^2}{\text{Sin}(2\kappa, h) \kappa_{\nu}^2} + \frac{\text{Sin}(2\kappa, h) - 2\kappa, h}{\text{Sin}(2\kappa, h)} \right) \\ &= \frac{\rho g b}{4} \left\{ A_{\nu}^2 + B_{\nu}^2 \right\} \left[2 - \frac{\text{Sin}(2\kappa, h) + 2\kappa, h}{\text{Sin}(2\kappa, h)} \frac{w_{\nu}^2}{\kappa_{\nu}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

oder, wegen 2.12, 2.13,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho g}{4b} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \zeta \cos u_{\nu} (b/2 - y) dy \right\}^2 \right. \\ &+ \frac{1}{w_{\nu}^2} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} \zeta_x \cos u_{\nu} (b/2 - y) dy \right\}^2 \left. \right] \left[2 - \frac{(\text{Sin}(2\kappa, h) + 2\kappa, h) w_{\nu}^2}{\text{Sin}(2\kappa, h) \kappa_{\nu}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Definieren wir die Größen A_{ν}^* und ε_{ν}^* durch die Beziehungen

$$A_{\nu}(x) = A_{\nu}^* \sin(w_{\nu} x + \varepsilon_{\nu}^*) \quad (2.20)$$

$$B_{\nu}(x) = A_{\nu}^* \cos(w_{\nu} x + \varepsilon_{\nu}^*), \quad (2.21)$$

so erlaubt 2.11 die Darstellung

$$\zeta = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}^* \cos(w_{\nu} x + \varepsilon_{\nu}^* + u_{\nu} b/2 - u_{\nu} y) \quad (2.22)$$

Dies ist eine Zerlegung nach Wellen der Länge $2\pi/\kappa_{\nu}$ mit Winkel Θ_{ν} ihrer Fortschrittsrichtung gegen die x -Achse, welcher über die Relationen

$$u_{\nu} = \kappa_{\nu} \sin \Theta_{\nu} \quad w_{\nu} = \kappa_{\nu} \cos \Theta_{\nu} \quad (2.23)$$

mit u_{ν} und w_{ν} verknüpft ist.

Es ist $A_{\nu}^* = A_{-\nu}^*$.

Die Gruppengeschwindigkeit einer Flachwasserwelle der Länge $2\pi/\kappa_{\nu}$ ist

$$v_{gr}^{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\text{Sin}(2\kappa, h) + 2\kappa, h}{\text{Sin}(2\kappa, h)} v_{ph}^{\nu} \quad (2.24)$$

wenn

$$v_{ph}^{\nu} = \sqrt{\frac{g}{\kappa_{\nu}} \mathfrak{Lg}(\kappa, h)} \quad (2.25)$$

die Phasengeschwindigkeit derselben Welle ist.

Gehört die Welle nun einem stationären System an, das sich mit der Geschwindigkeit c in x -Richtung fortbewegt, so muß

$$v_{ph}^{\nu} = c \cos \Theta_{\nu} \quad (2.26)$$

sein, wenn Θ_{ν} der Fortschrittswinkel der Welle gegen die x -Achse ist. — Die Gruppengeschwindigkeit darf nun interpretiert werden als mittlere Geschwindigkeit des Energietransports normal zur Wellenfront; damit ergibt

sich aus 2.24 und 2.26 die Komponente der Energietransportgeschwindigkeit in x -Richtung zu

$$c_E^{\nu} = c \cos^2 \Theta_{\nu} \frac{\text{Sin}(2\kappa, h) + 2\kappa, h}{\text{Sin}(2\kappa, h)} \quad (2.27)$$

und wegen 2.23 können wir also den Widerstandsdruck schreiben:

$$R = \frac{\rho g b}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}^{*2} (1 - c_E^{\nu}/c). \quad (2.28)$$

Es ist

$$A_{\nu}^{*2} = \frac{1}{4} (\alpha_{\nu}^2 + \beta_{\nu}^2) = A_{-\nu}^{*2}. \quad (2.29)$$

d. h. die Verteilung der Beiträge der einzelnen ν zu R unabhängig von der gewählten Schnittlage.

Die Formel 2.19 läßt erkennen, daß bei gleicher Gestalt der freien Oberfläche, d. h. bei gleichen Werten α_{ν} , β_{ν} , sich für kleine Wassertiefen i. a. ein kleinerer Energiefluß ergibt als bei großen Tiefen.

Zur Betrachtung des Grenzfalltes seitlich unbeschränkten Wassers spalten wir 2.19 auf in den Beitrag der geraden und den der ungeraden ν . Wegen 2.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho g}{4\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\left[\int_{-b/2}^{b/2} \zeta \cos(u_{\nu} y) dy \right]^2 \right. \\ &+ \left[\frac{1}{w_{\nu}} \int_{-b/2}^{b/2} \zeta_x \cos(u_{\nu} y) dy \right]^2 \left. \right] \left[1 - c_E^{\nu}/c \right] \Delta u_{\nu} \\ &+ \frac{\rho g}{4\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\left[\int_{-b/2}^{b/2} \zeta \sin(u_{\nu} y) dy \right]^2 \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1}{w_{\nu}} \int_{-b/2}^{b/2} \zeta_x \sin(u_{\nu} y) dy \right]^2 \right] \left[1 - c_E^{\nu}/c \right] \Delta u_{\nu} \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit

$$\Delta u_{\nu} = 2\pi/b \quad (2.31)$$

wobei die erste Summe nur über gerade, die zweite nur über ungerade ν zu erstrecken ist.

Dem Grenzwert für $b \rightarrow \infty$ entspricht der Übergang von der Summe zum Integral bezüglich u , wobei wir Δu durch du zu ersetzen haben:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} R &= \frac{\rho g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\text{Sin}(2\kappa h) + 2\kappa h}{2 \text{Sin}(2\kappa h)} \frac{w^2}{\kappa^2} \right] \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \zeta \cos u y dy \right]^2 \right. \\ &+ \left[\frac{1}{w} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_x \cos u y dy \right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \zeta \sin u y dy \right]^2 \\ &+ \left. \left[\frac{1}{w} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_x \sin u y dy \right]^2 \right\} du, \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei κ die größte reelle Wurzel von

$$\kappa^2 - u^2 - \kappa K_0 \mathfrak{Lg}(\kappa h) = 0 \quad (2.33)$$

ist und w^2 durch

$$w^2 = \kappa^2 - u^2 \quad (2.34)$$

mit κ und u verknüpft ist.

Für seitlich und der Tiefe nach unbegrenztes Wasser ist

$$\frac{\text{Sin}(2\kappa h) + 2\kappa h}{2\text{Sin}(2\kappa h)} = \frac{1}{2} \quad (2.35)$$

und

$$\text{Sg}(\kappa h) = 1 \quad (2.36)$$

zu setzen; — damit läßt sich dann 2.33 und 2.34 auflösen, es gilt

$$\left(\frac{w}{\kappa}\right)^2 = \frac{K_0^2}{2u^2} (\sqrt{1 + 4(u/K_0)^2} - 1) \quad (2.37)$$

und damit

$$R = \frac{\rho g}{2\pi} \int_0^\infty \left[1 - \frac{K_0^2}{4u^2} (\sqrt{1 + 4(u/K_0)^2} - 1) \right] \left[\left(\int_{-\infty}^\infty \zeta \cos uy \, dy \right)^2 + \left(\frac{1}{w} \int_{-\infty}^\infty \zeta_x \cos uy \, dy \right) + \left(\int_{-\infty}^\infty \zeta \sin uy \, dy \right)^2 + \left(\frac{1}{w} \int_{-\infty}^\infty \zeta_x \sin uy \, dy \right)^2 \right] du, \quad (2.38)$$

wobei die Größe w durch

$$w = \frac{K_0}{w/\kappa} \quad (2.39)$$

unter Heranziehung von 2.37 als Funktion von u ausgedrückt werden kann.

3. Ermittlung des Wellenwiderstands aus gemessenen Wellenprofilen

1. Schnittpaar quer zur Fahrtrichtung

Aus 2.1 und 2.11 ergibt sich eine Darstellung für die Wellenerhebung:

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{ \alpha_\nu \cos w_\nu x - \beta_\nu \sin w_\nu x \} \{ \cos u_\nu (b/2 - y) \} \quad (3.01)$$

wobei $\alpha_\nu = \alpha_{-\nu}$, $\beta_\nu = \beta_{-\nu}$ anzusetzen ist.

Betrachten wir nun ein Paar paralleler Schnitte in den Ebenen $x = x_s + \Delta$ bzw. $x = x_s - \Delta$, also in einem Abstand 2Δ , und bezeichnen wir die zugehörigen Wellenprofile mit $\zeta^+(y)$ bzw. $\zeta^-(y)$, so gilt

$$\zeta^+(y) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{ \alpha_\nu \cos w_\nu (x_s + \Delta) - \beta_\nu \sin w_\nu (x_s + \Delta) \} \cdot \cos u_\nu (b/2 - y) \quad (3.02)$$

$$\zeta^-(y) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{ \alpha_\nu \cos w_\nu (x_s - \Delta) - \beta_\nu \sin w_\nu (x_s - \Delta) \} \cdot \cos u_\nu (b/2 - y) \quad (3.03)$$

damit

$$\begin{aligned} & \zeta^+(y) + \zeta^-(y) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{ \alpha_\nu \cos w_\nu x_s \cdot \cos w_\nu \Delta - \beta_\nu \sin(w_\nu x_s) \cdot \cos w_\nu \Delta \} \cdot \cos u_\nu (b/2 - y) \end{aligned} \quad (3.04)$$

$$\begin{aligned} & \zeta^+(y) - \zeta^-(y) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{ -\alpha_\nu \sin w_\nu x_s \sin w_\nu \Delta - \beta_\nu \cos(w_\nu x_s) \sin w_\nu \Delta \} \cdot \cos u_\nu (b/2 - y). \end{aligned} \quad (3.05)$$

Daraus finden wir, falls $\sin w_\nu \Delta \cdot \cos w_\nu \Delta \neq 0$,

$$\begin{aligned} 4A_\nu^2 &= \beta_\nu^2 + \alpha_\nu^2 \\ &= \frac{1}{b^2 \cos^2 w_\nu \Delta} \left(\int_{-b/2}^{b/2} (\zeta^+ + \zeta^-) \cos u_\nu (b/2 - y) \, dy \right)^2 \\ &+ \frac{1}{b^2 \sin^2 w_\nu \Delta} \left(\int_{-b/2}^{b/2} (\zeta^+ - \zeta^-) \cos u_\nu (b/2 - y) \, dy \right)^2. \end{aligned} \quad (3.06)$$

Damit ergibt 2.28

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho g}{16b} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\cos^2 w_\nu \Delta} \{ \tau_\nu I_{c+}^{\nu^2} + (1 - \tau_\nu) I_{s+}^{\nu^2} \} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sin^2 w_\nu \Delta} \{ \tau_\nu I_{c-}^{\nu^2} + (1 - \tau_\nu) I_{s-}^{\nu^2} \} \right] \\ &\cdot \left[2 - \frac{\text{Sin} 2\kappa_\nu h + 2\kappa_\nu h}{\text{Sin} 2\kappa_\nu h} \frac{w_\nu^2}{\kappa_\nu^2} \right] \end{aligned} \quad (3.07)$$

mit

$$I_{c\pm}^{\nu^2} = \int_{-b/2}^{b/2} (\zeta^+ \pm \zeta^-) \cos u_\nu y \, dy \quad (3.08)$$

$$I_{s\pm}^{\nu^2} = \int_{-b/2}^{b/2} (\zeta^+ \pm \zeta^-) \sin u_\nu y \, dy \quad (3.09)$$

$$\tau_\nu = 1 \text{ für gerade } \nu \quad (3.10)$$

$$\tau_\nu = 0 \text{ für ungerade } \nu \quad (3.11)$$

Die Formel für unbegrenzte Wassertiefe ergibt sich daraus analog zu 2.38. Wegen 2.2 sehen wir, daß die Integrale 3.08, 3.09 sich zurückführen lassen auf die Fourierkoeffizienten der Wellenprofile in einem Intervall $-b \leq y \leq b$ von doppelter Kanalbreite, in welchen der Definitionsbereich von ζ durch Spiegelung an den Kanalwänden erweitert ist. Die Integrale 3.08, welche den cosinus-Koeffizienten entsprechen, lassen sich auch direkt aus der Fourierentwicklung von ζ^+ und ζ^- im Intervall $-b/2 \leq y \leq b/2$ bestimmen.

2. Schnitte parallel zur Kanalwand

In einer Ebene $y = y_s$ mit $-b/2 \leq y_s \leq b/2$ folgt aus 3.01 die Darstellung

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_s(x) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_\nu \cos w_\nu x - \frac{1}{2} \beta_\nu \sin w_\nu x \right\} \cos u_\nu (b/2 - y_s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für jedes ν , für welches $\cos u_\nu (b/2 - y_s) \neq 0$ ist, lassen sich daraus die α_ν , β_ν gewinnen durch die Beziehungen

$$\alpha_\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_s(x) \cos w_\nu x \, dx \frac{1}{\cos u_\nu (b/2 - y_s)} \quad (3.13)$$

$$\beta_\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_s(x) \sin w_\nu x \, dx \frac{1}{\cos u_\nu (b/2 - y_s)} \quad (3.14)$$

Die Grenzwerte auf den rechten Seiten von 3.13, 3.14 sind unabhängig von x_0 , dem Anfangspunkt der Integration, falls die Entwicklung 3.12 für $\zeta(x)$ für $x > x_0$

gilt oder auch wenn ζ sich von der Darstellung 3.12 durch „freie Wellen“ um eine Funktion unterscheidet, welche für genügend große x monoton gegen null geht. — Mit 2.23 erhalten wir

$$R = \frac{\rho g b}{4} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(2 - \frac{\text{Sin}(2 \kappa_{\nu} h) + 2 \kappa_{\nu} h}{\text{Sin}(2 \kappa_{\nu} h)} \cdot \frac{w_{\nu}^2}{\kappa_{\nu}^2} \right) \frac{1}{\cos^2 u_{\nu}(b/2 - y_s)} \left(\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta(x) \cos w_{\nu} x dx \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta(x) \sin w_{\nu} x dx \right)^2 \right) \quad (3.15)$$

Unterscheiden wir wieder nach den Beiträgen gerader und ungerader ν , so kommen wir zu der Darstellung:

$$R = \frac{\rho g b}{4} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(2 - \frac{(\text{Sin} 2 \kappa_{\nu} h + 2 \kappa_{\nu} h) w_{\nu}^2}{\text{Sin} 2 \kappa_{\nu} h \cdot \kappa_{\nu}^2} \right) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\zeta \cos w_{\nu} x dz}{\cos u_{\nu} y_s} \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\zeta \sin w_{\nu} x dz}{\cos u_{\nu} y_s} \right)^2 \right] \tau_{\nu} + (1 - \tau_{\nu}) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\zeta \cos w_{\nu} x dz}{\sin u_{\nu} y_s} \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\zeta \sin w_{\nu} x dz}{\sin u_{\nu} y_s} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

Sei speziell ζ_1 das Profil im Schnitt $y = 0$, ζ_2 das Profil für $y = b/2$, so finden wir

$$R = \frac{\rho g b}{4} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(2 - \frac{(\text{Sin} 2 \kappa_{\nu} h + 2 \kappa_{\nu} h) w_{\nu}^2}{\text{Sin} 2 \kappa_{\nu} h \cdot \kappa_{\nu}^2} \right) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_1 \cos w_{\nu} x dx \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_1 \sin w_{\nu} x dx \right)^2 + (1 - \tau_y) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_2 \cos w_{\nu} x dx \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_2 \sin w_{\nu} x dx \right)^2 \right] \right] \quad (3.17)$$

Da das Wellenprofil in Kanalmitte im allgemeinen durch das Nachstromfeld beeinflusst wird und außerdem die Aufstellung einer Sonde im Fahrbereich eines Modells

Schwierigkeiten machen dürfte, sei noch die Formel gegeben für einen Schnitt $y = b/6$, d. h. bei Teilung des Kanals im Verhältnis 1 : 2. Jetzt reicht ein Schnitt aus zur Bestimmung des Wellenspektrums, ohne daß die Nenner in 3.16 klein werden können:

$$R = \rho g b \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(2 - \frac{(\text{Sin} 2 \kappa_{\nu} h + 2 \kappa_{\nu} h) w_{\nu}^2}{\text{Sin} 2 \kappa_{\nu} h \cdot \kappa_{\nu}^2} \right) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta(x) \cos w_{\nu} x dx \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta(x) \sin w_{\nu} x dx \right)^2 \right] \sigma_{\nu} + \frac{1}{4} (1 - \sigma_{\nu}) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta(x) \cos w_{\nu} x dx \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta(x) \sin w_{\nu} x dx \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

mit $\sigma_{\nu} = 1$ für $\nu = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$; $\sigma_{\nu} = 0$, falls ν nicht durch 3 teilbar ist.

Die Ausdrücke 3.15 bis 3.18 enthalten als Faktor die Kanalbreite b ; sie gestatten nicht den Grenzübergang $b \rightarrow \infty$. Man darf annehmen, daß die Grenzwerte bezüglich T nur dann ausreichend genau angenähert werden, wenn T ein mehrfaches von b ist, so daß die Reflexion der Wellen am Kanalrand ausreichend berücksichtigt ist.

Durch experimentelle Untersuchungen muß geklärt werden, welche Komponenten A_{ν}^* des freien Wellensystems in einem geeigneten Geschwindigkeitsbereich nach den hier abgeleiteten Formeln sich invariant aus Messungen gewinnen lassen.

Schrifttum

- [1] Havelock: Calculation of Wave Resistance. Proc. Roy. Soc. A 144 Jan 34 S. 514—521.
- [2] Hogner: Contribution to the Theory of Ship Waves. Ark. Math. Astr. og Fysik 17 No 12, 1923.
- [3] Ursell: On Kelvin's Ship-Wave Pattern, Journ Fluid Mech. 8, 1960, S. 418—431.
- [4] Inui: Asympt. Expansions applied to Problems of Ship-Waves and Wavewaking Resistance Proc. 9th Jap. Nat. Congr. for Appl. Mech. 1955.
- [5] Eggers: Über die Ermittlung hydrodynamischer Kräfte aus Impuls- und Energieansätzen, Schiffstechnik, Heft 21, 1957.
- [6] Lamb: Hydrodynamics, 6th edition 1952, S. 383, Cambridge University Press.
- [7] Korvin-Kroukovsky: Beitrag zur Tagung des H-5-Ausschusses der Society of Naval Architects and Marine Engineers. New York 28.—29. Juli 1960.
- [8] Wehausen: Water Waves. Handbuch d. Physik, S. 484—486, Bd. IX, 1960, Springer, Berlin.

Bezeichnungen

\vec{v} Strömungsvektor	$I, I_c - \nu, I_c + \nu$	} Integralausdrücke gem. (1.14), (3.08), (3.09)	p Druck
\vec{n} Normalenvektor	$I_s - \nu, I_s + \nu$		g Erdbeschleunigung
\vec{c} Vektor der Schiffsgeschwindigkeit	E Energieintegral		Θ Wellenausbreitungswinkel
∇ Nabla, Vektoroperator	x, y, z Koordinaten		β, α_{ν} Entwicklungskoeffizienten
$A_{\nu}, B_{\nu}, A_{\nu}^*$ Entwicklungskoeffizienten	b, h Kanalbreite und mittlere Wassertiefe		x Wellenzahl
$K_0 = g/c^2$ Wellenzahl	u, w Wellenzahl quer bzw. längs zum Kanal,		Φ Geschwindigkeitspotential
S_{ν}, S_h, S_f Kontrollflächen	Integrationsvariable		ζ Wellenhöhe
S_0 benetzte Schiffsoberfläche	v_{gr}, v_{ph} Gruppen- bzw. Phasengeschwindigkeit einer Wellenkomponente		ν Index
R Wellenwiderstand	c Schiffsgeschwindigkeit		d Volumenelement
T Intervalllänge	e Energiedichte		σ_{ν}, τ_{ν} Zahlenfaktoren
			gem. (3.10), (3.11), (3.18)
			ϵ_{ν}^* Phasenwinkel
			ρ Dichte

N. Hogben:

Dr. Eggers' paper is of particular interest to me because, in collaboration with my colleague in Ship Division, N.P.L., Dr. G. E. Gadd, I am engaged in an investigation of the same problem.

Our work is still in a preliminary stage and it would be premature to make any detailed statement on our theoretical approach; it will suffice to say that we are studying both longitudinal and transverse methods of analysing measured surface profiles to determine wave resistance.

It may be of interest to mention however that our method of measuring wave patterns has been the placing of a comb of wave probes in a fixed position (i. e. not moving with the model) spanning half the tank width. In this way it is possible in a single run to get a set of longitudinal traverses through the wave systems suitable for the application of either a transverse, a longitudinal or even a diagonal analysis method.

Dr. Eggers has hinted at the possibility of using such a technique in the paragraph preceding Section 1 of his paper and we confirm from our experience so far that this is a simple and effective method of measuring wave patterns.

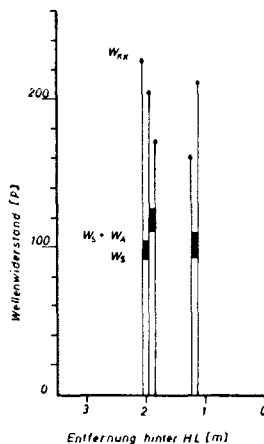
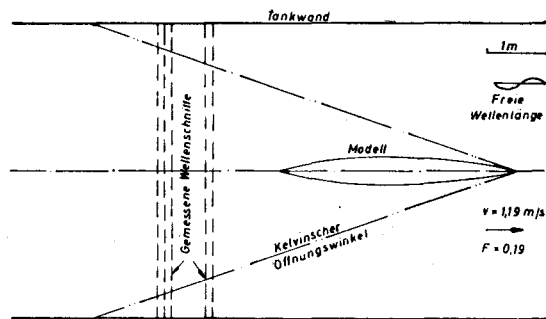
We will be reporting more fully on our work in due course.

S. D. Sharma:

Das Problem der empirischen Ermittlung des wellenbedingten Widerstandes von Schiffmodellen wird z. Z. im Institut für Schiffbau im Rahmen eines durch die DFG unterstützten Forschungsvorhabens untersucht. Es ist bekannt, daß der nach der Michellschen Theorie unter idealen Voraussetzungen (insbesondere über die Schiffsförmigkeit und Flüssigkeit) errechnete Wellenwiderstand mit dem nach der Froudeschen Hypothese experimentell ermittelten i. a. nicht übereinstimmt. Unsere Untersuchung zielt nunmehr darauf ab, ein theoretisch-empirisches Verfahren für die Ermittlung des Wellenwiderstandes (in realen Flüssigkeiten und ohne Annahmen über die Schiffsförmigkeit) zu entwickeln. Das Arbeitsprogramm gliedert sich in drei Teile: a) Entwicklung eines Prinzips, das es gestattet, den wirklichen Wellenwiderstand auf meßbare Größen zurückzuführen. Als praktisch meßbare Größe in Zusammenhang mit dem Wellenwiderstand kommt nur das Wellenbild in Frage. b) Entwicklung einer Versuchsanlage für die Wellenbildmessung. c) Anwendung des Prinzips auf die Messungen und Schlußfolgerungen für die Praxis.

Der Bericht von Herrn Dr. Eggers befaßt sich mit Punkt a). Er zeigt, daß man unter der einzigen Voraussetzung eines freien Wellensystems den Wellenwiderstand aus dem gemessenen Wellenbild ableiten kann. Für die Berechnung des Wellenwiderstandes eines Schiffmodells in einem Schlepptank erfordert seine Formelwahlweise eine der folgenden Mindestinformationen aus Messungen: i) Zwei Wellenschnitte (nur Höhe) oder ii) ein „Wellenstreifen“ (Höhe und Gradient in Fahrtrichtung) über die ganze Tankbreite quer zur Fahrtrichtung in beliebiger Entfernung hinter dem Modell. iii) Ein genügend langes Wellenprofil parallel zur Fahrtrichtung auf ein Sechstel der Tankbreite aus Modellmitte.

Zur Veranschaulichung der theoretischen Ausführungen von Herrn Dr. Eggers möchte ich ganz kurz auch die Richtung unserer Arbeiten bezüglich der Punkte b) und c) andeuten. Für die Wellenbildmessung wurden drei Verfahren erwogen: a) Photogrammetrie, b) Ultraschall-Luftschotlot und c) elektrische Kontaktsonden. Wegen der Nichtverfügbarkeit von b) wurden bisher nur a) und c) ausprobiert. Es ergab sich, daß man am besten die Information i) nach a) und iii) nach c) gewinnen kann. Die Information ii) ist meßtechnisch sehr schwer zu erhalten. Besondere Auf-



W_{kk} = Wellenwiderstand nach Korvin-Kroukovsky
 = $2 \times$ potentielle Energie
 $W_{3/2}$ = Wellenwiderstand nach Formel (3.07)
 (Aus dem symmetrischen Anteil des gemessenen Wellenbilds).
 W_A = „ (Aus dem antimetrischen Anteil des gemessenen Wellenbilds).
 $W_{Michell} = 420$ p
 (Modellannäherung nach Inui)
 $W_{Froude} = 205$ p
 (Reibungswiderstand nach Hughes mit Formfaktor nach Inui)

merksamkeit wurde der stereophotographischen Messung gewidmet. Unter günstigsten Bedingungen kann man in diesem Verfahren eine durch Wellenbildung verformte Wasseroberfläche von 5×5 m² auf einem Bildpaar aufnehmen und mit einer Genauigkeit von 0,5 mm in der Wellenhöhe auswerten.

Auf einige so gewonnene Wellenschnitte wurde die Formel (3.07) im Bericht von Herrn Dr. Eggers bereits angewandt. Das nebenstehende Bild zeigt das Endergebnis. Die Anordnung der gemessenen Schnitte ist relativ zum Modell maßstäblich skizziert. Darunter sind die aus verschiedenen Schnittpaaren abgeleiteten Wellenwiderstandswerte den nach anderen bekannten Verfahren ermittelten Werten gegenübergestellt. Ich möchte das Ergebnis kommentarlos vorlegen, weil es angesichts der Unsicherheit der ersten Messungen und der unvermeidlichen Verletzung der Voraussetzungen der Theorie geradezu wimmelt von möglichen Erklärungen für die offensichtliche Diskrepanz zwischen den vielen Vergleichswerten. Wir sind froh, daß wir überhaupt beim ersten Versuch wenigstens eine innere Konsequenz des neuen Verfahrens feststellen konnten, d. h. daß die nach der neuen Formel aus verschiedenen Schnittpaaren abgeleiteten Wellenwiderstandswerte einigermaßen übereinstimmen.

Dr. Eggers (Schlußwort):

Ich bin Dr. Hogben dankbar dafür, daß er uns schon jetzt über seine parallel laufenden Untersuchungen unterrichtet. — Solange wir noch zu prüfen haben, ob die Wellenbildung hinreichend genau durch unser mathematisches Modell beschrieben wird bzw. wie dieses Modell zu verbessern wäre, können wir m. E. auf die fotogrammetrische Wellenaufnahme nicht verzichten; — wir haben jedoch schon Messungen mit zwei Sonden zur Kontrolle durchgeführt.

Für die Auswertung schräger Schnitte wird nach unseren Ansätzen ein größerer Rechenaufwand notwendig, — es ist aber denkbar, daß Näherungsverfahren, welche auf dem Anteil der potentiellen Energie aufbauen, hier zu besseren Resultaten führen.

Über die Ermittlung des Wellenwiderstandes eines Schiffmodells durch Analyse seines Wellensystems

— Teil 2 —

K. Eggers, Institut für Schiffbau, Hamburg

In einer vorhergehenden Arbeit*) wurde gezeigt, daß der Energietransport im Wellensystem eines Schiffes und damit der Wellenwiderstand bestimmt werden kann aus der Strömungsverteilung in einer Kontrollebene senkrecht zur Fahrtrichtung. Wird in einem Bereich die Gültigkeit einer linearisierten Theorie vorausgesetzt und gefordert, daß sich die Strömung aus „freien Wellen“ aufbaut, — d. h. aus Einzelwellen, welche vom Modell aus gesehen stationär erscheinen und für sich alle Randbedingungen der Strömung erfüllen, — so kann der Widerstand schon aus der Messung des Wellenprofils in der Kontrollfläche und seiner dortigen Ableitung in Fahrtrichtung bestimmt werden. Alle erforderliche Information liefert nämlich das Spektrum der Amplitudenverteilung des Systems freier Wellen. Es wurde gezeigt, daß sich diese Amplituden formal aus der Messung zweier Wellenprofile quer zur Fahrtrichtung oder auch aus Profilen in Längsrichtung gewinnen lassen.

Im folgenden wird die Berechtigung dieses Ansatzes geprüft. Es ergibt sich, daß zur Beschreibung des Wellenfeldes in einem Bereich i. a. die Strömungsverteilung in zwei begrenzenden Querschnitten (vorn und hinten) bekannt sein muß, daß aber in einem inneren Gebiet, welches genügend weit von diesen begrenzenden Querschnitten entfernt ist, im wesentlichen nur freie Wellen vorkommen, welche schon durch die Strömung in einer Querschnittsfläche in diesem Gebiet — bzw. durch das Wellenprofil und seine Längsableitung — determiniert sind.

Daß der Anteil der freien Wellen schon in einem Bereich von kaum einer viertel Modelllänge hinter dem Heck weitgehend überwiegt, wurde inzwischen von Sharma durch die Auswertung einer Reihe stereographischer Wellenaufnahmen herausgestellt. Insbesondere zeigte sich, daß auch in einem Bereich vor der Reflektion des Bugwellensystems an den Kanalwänden das Wellenbild hinreichend genau durch das ermittelte System freier Kanalwellen dargestellt wird. Dies steht in einem gewissen Widerspruch zu der Auffassung, daß der Einfluß der Tankbegrenzung auf das Wellenbild, d. h. die Umwandlung des kontinuierlichen Spektrums in ein diskretes, erst durch die Reflektion ausgelöst und deshalb nur weiter hinten wirksam werden könnte. Es zeigt sich aber, daß insbesondere vor der Reflektion die Verteilung der Amplituden nicht wesentlich durch die der Auswertung der Wellenprofile zugrunde gelegte Tankbreite beeinflusst wird, wenn diese nur in einem gewissen Sinne genügend groß ist. — Im Bereich der reflektierten Wellen hingegen kann die Existenz eines freien Wellensystems nicht konsistent gezeigt werden, wenn von einer größeren Tankbreite ausgegangen wird.

Die Anwendung der früher hergeleiteten Formeln für Längsschnittverfahren zur Ermittlung der Amplitudenkompo-

nenten setzt zunächst die gleichmäßige Konvergenz einer Entwicklung nach freien Wellen in einem Bereich unbegrenzter Ausdehnung voraus. Wir zeigen, daß für jede endliche Schnittlänge eine zu starke Häufung der zugelassenen Wellenzahlen bewirkt, daß eine gleichmäßig genaue Approximation jedes gegebenen stetigen Profils auch dann noch möglich ist, wenn für eine endliche Anzahl von Amplituden die Werte beliebig vorgegeben werden, d. h. aber, daß das Schnittprofil keine ausreichende Information auch nur zur Größenabschätzung der Amplituden liefert. Es spiegelt sich darin die Tatsache, daß die Vorgabe der Strömung auf einer Längsebene im Tank keine sachgemäße Information für die Behandlung des hier vorliegenden elliptischen Randwertproblems liefert.

Wird von der Vorstellung ausgegangen, daß schon endlich viele Komponenten das freie Wellensystem hinreichend beschreiben, so könnten deren Amplituden aus den Fourierkoeffizienten gemessener Profile beschränkter Länge in Längs- oder Schrägrichtung bestimmt werden, es wird dazu jedoch die Auflösung eines umfangreichen linearen Gleichungssystems erforderlich, da nur bei Schnitten quer zur Fahrtrichtung die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen — bzw. die Umkehrformel der Fourier-Integraltransformation bei seitlich unbeschränktem Wasser — ausgenutzt werden kann.

Die früher hergeleiteten Formeln*) für die Auswertung von Längsprofilen großer Länge benutzen die Orthogonalitätsrelationen der Bausteine fastperiodischer Funktionen und ersparen damit ebenfalls eine Gleichungsauflösung. Einige gerechnete Beispiele mit theoretischen Amplitudenverteilungen zeigten jedoch inzwischen, daß auch unter Berücksichtigung von nur endlich vielen freien Wellen die Profillänge unrealistisch groß gewählt werden muß, damit die Ausdrücke für die Wellenamplituden ihren Grenzwert für unendliche Schnittlänge hinreichend genau annähern.

Die folgenden Herleitungen basieren auf der Ermittlung des Geschwindigkeitspotentials einer Quelle, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit längs einem Kanal der Breite b und Tiefe H unter der freien Oberfläche bewegt; dies Potential dient als Greensche Funktion des Randwertproblems. Für Drucksysteme auf der freien Oberfläche wurde die Herleitung eines entsprechenden Ausdrucks in seiner asymptotischen Form bereits von Keldish und Sedow skizziert, ohne das die notwendigen Rechnungen und Beweise explizit ausgeführt wurden [19]. Obwohl Gliederung und Bezeichnungsweise der folgenden Arbeit sich unmittelbar an den vor über einem Jahre veröffentlichten ersten Teil anschließen, ist der Aufbau doch so durchgeführt, daß sie weitgehend unabhängig vom ersten Teil gelesen werden kann; insbesondere sind alle verwandten Bezeichnungen im Text erklärt und am Schluß der Arbeit nochmals zusammengestellt.

*) Schiffstechnik Bd. 9, Heft 46, 1962.

4. Ansatz für das Wellenfeld einer stationär im Kanal bewegten Quelle

Das Geschwindigkeitspotential $G(x, y, z)$ einer Quelle der Ergiebigkeit -4π in einem Punkt $\{\xi, \eta, \zeta\}$ mit $-b/2 \leq \eta \leq b/2$, $-h \leq \zeta \leq 0$, welche sich stationär mit Geschwindigkeit c in x -Richtung bewegt, bestimmt sich aus den Forderungen:

$$\Delta(G - 1/r) = 0 \quad \text{im Bereich} \\ \{-b/2 \leq y \leq b/2, -h \leq z \leq 0\}. \quad (4.01)$$

$$\text{wobei } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geq 0 \text{ sei}$$

$$G_y = 0 \quad \text{für } y = b/2 \text{ (Kanalwand)} \quad (4.02)$$

$$G_y = 0 \quad \text{für } y = -b/2 \text{ (Kanalwand)} \quad (4.03)$$

$$G_z = 0 \quad \text{für } z = -h \text{ (Kanalboden)} \quad (4.04)$$

$$G_{xx} + K_0 G_z = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad (4.05)$$

(Linearisierte Randbedingung der freien Oberfläche)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_x = 0 \quad (4.06)$$

(Wellenabwanderung nur nach hinten).

Wir beschränken uns im folgenden zunächst auf die Bestimmung der Funktion G_x , welche die Strömungskomponente in x -Richtung darstellt und mit G den Randbedingungen (4.02) bis (4.05) genügen muß; damit sichern wir die Konvergenz einiger in Zwischenrechnungen auftretenden Reihen und die Legitimität einiger Grenzübergänge. Die Strömungskomponenten G_y und G_z sind durch G_x eindeutig bestimmt. Erfüllen nämlich zwei verschiedene Integralfunktionen zu G_x alle Randbedingungen (4.01) bis (4.05), so ist ihre Differenz als Potentialfunktionen von nur y und z eine Konstante, da ihre Normalableitungen auf dem Rand des Bereiches $\{-b/2 \leq y \leq b/2, -h \leq z \leq 0\}$ wegen (4.02) bis (4.05) identisch verschwinden.

Führen wir Polarkoordinaten ϱ, α ein durch die Relationen

$$x - \xi = \varrho \cos \alpha; \quad y - \eta = \varrho \sin \alpha \quad (4.07)$$

so gilt [10] für $z - \zeta \neq 0$, $\sigma = \frac{z - \zeta}{|z - \zeta|}$:

$$G_1 = (\varrho^2 + (z - \zeta)^2)^{-1/2} = \int_0^\infty J_0(k\varrho) e^{-\sigma k(z-\zeta)} dk \quad (4.08)$$

und da weiter gilt [9]

$$J_0(k\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\varrho \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\varrho \cos(\theta - \alpha)} d\theta \quad (4.09)$$

so ergibt sich

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{\sigma k(z-\zeta) + ik\varrho \cos(\theta - \alpha)} dk d\theta \quad (4.10a)$$

und für die Ableitung nach x :

$$G_{1x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} ik \cos \theta e^{\sigma k(z-\zeta) + ik\varrho \cos(\theta - \alpha)} dk d\theta. \quad (4.10b)$$

Die Variablensubstitution

$$u = k \sin \theta \quad w = k \cos \theta \quad (4.11)$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{\delta(u, w)}{\delta(k, \theta)} = k \geq 0 \quad (4.12)$$

ergibt die Fourier-Integraldarstellung

$$G_{1x} = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty iw/k^{-1} e^{-\sigma k(z-\zeta) + iu(y-\eta) + iw(x-\xi)} dudw, \quad (4.13)$$

wobei wir das Symbol k beibehalten haben in der Bedeutung

$$k = \sqrt{u^2 + w^2} \geq 0. \quad (4.14)$$

Wir konstruieren nun die Funktion $G_x(x, y, z)$, ausgehend von G_{1x} , durch Addition von Zusatztermen, welche rekursiv die Erfüllung der Bedingungen (4.02) bis (4.06) sicherstellen.

Eine Funktion G_{2x} , welche zusätzlich der Randbedingung (4.02) genügt, findet man durch Spiegelung an der Wand $y = b/2$ in der Form

$$G_{2x} = G_{1x}(x, y, z) + G_{1x}(x, b-y, z). \quad (4.15)$$

Die weitere Randbedingung (4.03) wird erfüllt durch den Ausdruck

$$G_{3x} = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} G_{2x}(x, y + 2\gamma b, z) \quad (4.16)$$

welcher durch fortgesetzte Spiegelung an den Ebenen $y = 2b\gamma$ ($\gamma = \pm 1, 2, \dots$) entsteht.

Im einzelnen ergibt sich aus (4.13), (4.15), (4.16) der konvergente Ausdruck

$$G_{3x} = \frac{1}{8\pi} \int_{-b}^b \int_{-b}^b iw/k^{-1} e^{-k(z-\zeta) + iw(x-\xi)} \cdot dw \cdot (e^{-iuy} + e^{iu(b-y)}) e^{iu\eta} \sum_{\substack{\gamma=-N \\ \lim N \rightarrow \infty}}^N e^{2b\gamma iu} du. \quad (4.17)$$

Unter Benutzung der Identitäten

$$\sum_{-N}^N e^{i2b\gamma u} = \frac{\sin(2N+1)bu}{\sin bu} \quad (4.18)$$

und [15]

$$F(u_\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{u_\nu - \frac{\pi}{2b}}^{u_\nu + \frac{\pi}{2b}} F(u) \frac{\sin Nbu}{\sin bu} b du \quad (4.19)$$

für stetige Funktionen $F(u)$ und

$$u_\nu = \frac{v\pi}{b} \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.20)$$

finden wir

$$G_{3x} = \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{2b} \int_{w=-\infty}^{\infty} e^{iw(x-\xi)} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\sigma k_\nu(z-\zeta)} \frac{iw}{k_\nu} dw (e^{iu_\nu(y-\eta)} + e^{iu_\nu(b-y-\eta)})$$

mit

$$k_\nu = \sqrt{w^2 + u_\nu^2} \geq 0 \quad (4.22)$$

d. h.

$$G_{3x} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \sin w(x-\xi) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\sigma k_\nu(z-\zeta)} \frac{w}{k_\nu} dw \cdot \cos u_\nu(b/2 - y) \cos u_\nu(b/2 - \eta). \quad (4.23)$$

Die Formel (4.23) zeigt, daß der Effekt des unendlichen Spiegelungsprozesses dargestellt werden kann durch Summation des Integrals in (4.13) bezüglich der Variablen u nach der Trapezregel mit Maschenweite $\Delta u = \pi/b$; der Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ führt (4.23) wieder zurück auf (4.13).

Der Term $\nu = 0$ von (4.23) entspricht übrigens der x -Komponente der Umströmung einer Quelle der Ergiebigkeit $\frac{-4\pi}{b}$

in ebener Strömung vom Potential

$$\varphi^{(0)} = \frac{-1}{b} \ln \{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2\} \quad (4.24)$$

denn es ist [11]

$$G_{3x}^{(4)} = -\frac{2(x-\xi)}{b((x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2)} \\ = -\frac{2}{b} \int_0^{\infty} e^{-\sigma v(z-\zeta)} w \sin w(x-\xi) dw \quad (4.25)$$

Zur Erfüllung der Randbedingung (4.04) am Kanalboden ergänzen wir G_{3x} durch eine Spiegelung am Boden, d. h. wir setzen

$$G_{4x}(x, y, z) = G_{3x}(x, y, z) + G_{3x}(x, y, -2h-z) \quad (4.26)$$

Für den interessierenden Bereich $z \geq -h$ ist im zweiten Term von (4.26) in dem (4.23) entsprechenden Anteil stets $\sigma = -1$ einzusetzen, damit erhalten wir im einzelnen

$$G_{4x} = -\frac{1}{b} \int_0^{\infty} w \sin w(x-\xi) \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_v} \{ (1+\sigma) e^{-k_v(\zeta+h)} \text{Cof } k_v(\zeta+h) \\ + (1-\sigma) e^{-k_v(z+h)} \text{Cof } k_v(z+h) \} dw \cos u_v \left(\frac{b}{2} - y \right) \cos u_v \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \quad (4.27)$$

Die Konvergenz und Integrierbarkeit der Reihe im Integranden für $z - \zeta \neq 0$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \left[\frac{w}{k_v} (1+\sigma) \text{Cof } k_v(\zeta+h) e^{-k_v(z+h)} \right. \\ \left. + \frac{w}{k_v} (1-\sigma) \text{Cof } k_v(z+h) e^{-k_v(\zeta+h)} \right] \\ \leq \sum_{v=-\infty}^{\infty} 2 \frac{w}{k_v} e^{\sigma k_v |z-\zeta|} \leq 2 \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{w}{v}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{w}{v}} \quad (4.28)$$

insbesondere folgt, da der Integrand von (4.27) auf der reellen w -Achse holomorph und damit differenzierbar ist, durch partielle Integration:

$$G_{4x} = 0 \{ (x-\xi)^{-1} \} \quad (4.29)$$

Bestimmen wir eine Integralfunktion G_4 zu G_{4x} , indem wir in den Summanden von (4.27) mit $v \neq 0$ den Faktor $\sin w(x-\xi)$ ersetzen durch $-1/w \cdot \cos w(x-\xi)$ und für den Term $v = 0$ die Beziehungen (4.24), (4.25) benutzen, so erhalten wir für diese Funktion

$$G_4 = -\frac{2}{b} \int_0^{\infty} \cos w(x-\xi) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{k_v} \left((1+\sigma) e^{-k_v(z+h)} \text{Cof } k_v(\zeta+h) + (1-\sigma) e^{-k_v(\zeta+h)} \text{Cof } k_v(z+h) \right) dw \cdot \\ \cdot \cos u_v(b/2-y) \cos u_v(b/2-\eta) - \frac{1}{b} \ln \{ (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2 \} \quad (4.30)$$

und durch eine (4.28) ähnliche Abschätzung

$$G_4 = -\frac{1}{b} \ln \{ (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2 \} + 0 \{ (x-\xi)^{-1} \} \quad (4.31)$$

Daß die Abschätzungen (4.29) und (4.31) — entsprechend der Entwicklung (4.08) nur für $z \neq \zeta$ erbracht werden können, ist für unsere folgenden Herleitungen nicht von Bedeutung, da wir nur Integrale bezüglich ζ über Produkte von G bzw. G_x mit beschränkten Funktionen abzuschätzen haben. Es ist nämlich

$$\left\{ (1+\sigma) e^{-k_v(z+h)} \text{Cof } k_v(\zeta+h) + (1-\sigma) e^{-k_v(\zeta+h)} \text{Cof } k_v(z+h) \right\} d\zeta \\ = 2 \int_{-h}^z e^{-k_v(z+h)} \text{Cof } k_v(\zeta+h) d\zeta + \\ + 2 \int_z^0 e^{-k_v(\zeta+h)} \text{Cof } k_v(z+h) d\zeta \\ = \frac{2}{k} e^{-k_v(z+h)} \{ \text{Cof } k_v(z+h) - \text{Cof } k_v(z+h) \} + \\ + e^{-k_v h} \text{Cof } k_v(z+h) = \\ = \frac{2}{k} \{ e^{-k_v h} \text{Cof } k_v(z+h) - e^{-2k_v(z+h)} \} \quad (4.32)$$

und klingt damit mit größer werdendem k_v exponentiell ab. Daraus ergibt sich, daß bei der Abschätzung der zu bildenden

Integrale ((6.13), (6.14) ff) die Formeln (4.29) und (4.31) auch für $z = \zeta$ angesetzt werden dürfen, solange $z < 0$ bleibt.

Um auch der Randbedingung der freien Oberfläche (4.05) zu genügen, ergänzen wir G_{4x} um einen Ausdruck, der in Ablehnung an den Ausdruck (4.27) im Fall $\sigma = -1$ dem Potential einer Quellverteilung oberhalb der freien Oberfläche in der Ebene $\zeta = h$ entspricht. Wir machen nämlich den Ansatz:

$$G_{5x}(x, y, z) = G_{4x}(x, y, z) + \\ + \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} L_v(w) \text{Cof } (k_v(z+h)) \sin(w(x-\xi)) dw \\ \cdot \cos u_v \left(\frac{b}{2} - y \right) \cos u_v \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \quad (4.33)$$

und bestimmen die Funktionen $L_v(w)$, indem wir unter Einsetzen der Fourierentwicklung (4.27) bezüglich y die (4.05) entsprechende Bedingung

$$G_{5xxx} + K_0 G_{5xz} = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad (4.34)$$

für die einzelnen Fourierterme fordern. Wir erhalten die Gleichungen

$$2(w^2 + k_v K_0) e^{-k_v h} \text{Cof } (k_v(\zeta+h)) \\ + (K_0 k_v \xi g(k_v h) - w^2) \text{Cof } (k_v h) \cdot L_v(w) = 0 \\ (v = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.35)$$

d. h.

$$G_{5x} = G_{4x} + \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{2}{b} \quad (4.36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_v(w)}{H_v(w)} \sin w(x-\xi) dw \cos u_v \left(\frac{b}{2} - y \right) \cos u_v \left(\frac{b}{2} - \eta \right)$$

mit

$$J_r(w) = \frac{w(w^2 + k_r K_0) \mathcal{Cof}(k_r(z+h)) \mathcal{Cof}(k_r(\zeta+h)) e^{-k_r h}}{k_r \mathcal{Cof} k_r h} \quad (4.37)$$

$$H_r(w) = K_0 k_r \mathfrak{I}g k_r h - w^2. \quad (4.38)$$

5. Die Erfüllung der asymptotischen Randbedingungen

Bestimmen wir die Nullstellen der Funktionen $H_r(w)$ in der komplexen w -Ebene, so könnten wir damit die Integrale über w in (4.33) entwickeln nach Reihen der entsprechenden Residuenanteile. Im Rahmen unserer Betrachtung interessiert jedoch nur das Verhalten von G_{5x} für große Werte von $|x - \xi|$. Wir werden sehen, daß dann nur noch der Beitrag der einzigen positiv reellen Nullstelle w_r der Funktionen $H_r(w)$, welche einfach ist, einen wesentlichen Beitrag leistet.

Es ist

$$H_r(0) = u_r K_0 \mathfrak{I}g u_r h \geq 0 \quad (5.01)$$

während für große w der Term $-w^2$ dominiert. Ferner gilt

$$\frac{dk_r}{dw} = \frac{w}{k_r} \quad (5.02)$$

und damit

$$\frac{dH_r}{dw} = \frac{K_0}{k_r} w \mathfrak{I}g k_r h + w K_0 h \mathcal{Cof}^2 k_r h - 2w \quad (5.03)$$

und an einer reellen Nullstelle w_r von H_r wird insbesondere

$$\frac{dH_r}{dw} = w_r \mathcal{Cof}^2 \kappa_r h \left\{ \mathcal{Cof}^2 \kappa_r h \left(1 + \frac{u_r^2}{\kappa_r^2} \right) - K_0 h \right\} \quad (5.04)$$

mit

$$\kappa_r = \sqrt{u_r^2 + w_r^2} > 0. \quad (5.05)$$

Der Wert (5.04) ist stets größer als Null, denn aus

$$\mathcal{Cof}^2 \kappa_r h \cdot (1 + u_r^2 / \kappa_r^2) \leq K_0 h \quad (5.06)$$

würde folgen

$$\mathcal{Cof}^2 \kappa_r h \left(1 + \frac{u_r^2}{w_r^2} \right) \leq \frac{w_r^2 h}{\kappa_r} \mathcal{Cof}^2 \kappa_r h \quad (5.07)$$

und damit

$$\mathcal{C} \sin 2 \kappa_r h \frac{1 + \frac{u_r^2}{w_r^2}}{1 - \frac{u_r^2}{w_r^2}} \leq 2 \kappa_r h \quad (5.08)$$

was nur für $u_r = w_r = 0$ möglich ist. Wenn aber die stetige, beschränkte Funktion $H_r(w)$ an allen Nullstellen eine positive Ableitung besitzt, dann kann sie höchstens eine Nullstelle haben.

Es gilt weiter

$$w_{r+1} > w_r \quad (v = 1, 2, \dots) \quad (5.09)$$

und falls $u_r \geq K_0 \sqrt{2}$ ist, haben wir

$$u_r \geq w_r \quad (5.10)$$

denn die Ungleichung

$$u_r^2 < w_r^2 = K_0 \sqrt{u_r^2 + w_r^2} \mathfrak{I}g(\sqrt{u_r^2 + w_r^2} \cdot h) \leq K_0 \sqrt{2} u_r \quad (5.11)$$

führt auf einen Widerspruch zu (5.10)

Aus (4.37) finden wir

$$J_r(w) \leq (K_0 + w) w e^{k_r(z+\xi)} \quad (5.12)$$

weiter wird

$$\frac{dJ_r}{dw} = \frac{w J_r}{k_r} \left\{ \frac{2k_r + k_0}{w^2 + k_r K_0} - \frac{1}{k_r} + (z+h) \mathfrak{I}g k_r(z+h) + (\zeta+h) \mathfrak{I}g k_r(\zeta+h) - h \mathfrak{I}g k_r h \right\}. \quad (5.13)$$

Führen wir als Maß der Dichte der Werte w_r die Anzahl der Werte $\mu < \nu$ ein, für welche $|w_\mu| < |w_\nu|$ ist, bezogen auf den Betrag von w_r , so wird der Grenzwert dieses Quotienten, die asymptotische Dichte, unendlich. Es gilt nämlich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\nu}{w_r} = \frac{b}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{u_r}{\sqrt{K_0 \kappa_r} \mathfrak{I}g \kappa_r h} \geq \frac{b}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{u_r}{K_0}} = \infty!$$

Aus (5.03) und (5.13) folgt, daß es zu jedem Wert $K_0 h > 0$ und zu jedem Wert Δ mit $0 < \Delta < 2$ einen Wert v_0 gibt, so daß für alle $v \geq v_0$ gilt

$$-w\Delta \geq \frac{dH_r}{dw} \geq -2w \quad (5.15)$$

$$-\Delta \geq \frac{d^2 H_r}{dw^2} \geq -2 \quad (5.16)$$

$$0 < \frac{dJ_r}{dw} < J_r w \Delta \quad (5.17)$$

für alle $w \geq 0$

und außerdem

$$|u_r| \geq K_0 \sqrt{2} \quad (5.18)$$

zur Sicherstellung von (5.10).

Für $v = 0$ ist $k_r = w$; $H_0(w)$ hat eine zweifache Nullstelle bei $w = 0$, eine weitere, einfache, bei w_0 , der positiven Wurzel von

$$K_0 \mathfrak{I}g w h - w = 0 \quad (5.19)$$

welche nur für $K_0 h > 0$ existiert, weil nur dann (5.03) für $w = 0$ negativ ausfällt. Wir machen die Zerlegung

$$\frac{1}{H_0} = \delta_0 \frac{1}{H_0} + (1 - \delta_0) \frac{1}{H_0} \quad (5.20)$$

mit

$$\delta_0 = w/w_0 \quad \text{für } K_0 h > 1 \quad (5.21)$$

$$\delta_0 = 0 \quad \text{für } K_0 h > 1 \quad (5.22)$$

und erhalten damit aus (4.36)

$$G_{5x} = G_{4x} - \frac{4}{b} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \delta_v \frac{J_v(w)}{H_v(w)} \sin w_r(x - \xi) dw \cdot \cos u_r(b/2 - y) \cos u_r(b/2 - \eta) - \frac{4}{b} \int_0^{\infty} (1 - \delta_0) \frac{J_0(w)}{H_0(w)} \sin w(x - \xi) dw \quad (5.23)$$

$$\text{mit } \delta_v = 1 \quad \text{für } v \neq 0. \quad (5.24)$$

Die uneigentlichen Integrale der rechten Seite von (5.23) wollen wir vorerst festlegen im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes; wir erreichen dadurch, daß auch G_{5x} — wie schon G_{4x} — eine ungerade Funktion von $x - \xi$ wird. Zur Erfüllung der asymptotischen Randbedingung (4.06) benötigen wir dann einen geraden Ergänzungsterm, welcher G_{5x} für große positive x annulliert; — dieser Zusatzterm kann interpretiert werden als Modifikation des Integrationsweges in der komplexen w -Ebene in dem Sinne, daß die Pole w_r in der unteren Halb-

ebene umgangen werden. Zum asymptotischen Verhalten tragen nämlich nur die Werte der Integrandenfunktionen an diesen Polen, d. h. die Werte $J_\nu(w_\nu) / H_\nu(w_\nu)$, bei.

Mit Hilfe einer passend gewählten Größe ε mit $0 < \varepsilon < w_{\nu_0}$ führen wir deshalb die Zerlegung durch

$$\frac{J_\nu(w)}{H_\nu(w)} = F_\nu^{(1)}(w) + F_\nu^{(2)}(w) + F_\nu^{(3)}(w) + F_\nu^{(4)}(w) \quad (5.25)$$

$$F_\nu^{(1)} = 0 \text{ für } |w - w_\nu| \leq \varepsilon; \quad F_\nu^{(1)} = \frac{J_\nu(w)}{H_\nu(w)} \text{ für } |w - w_\nu| > \varepsilon \quad (5.26)$$

$$F_\nu^{(2)} = \frac{J_\nu(w) - J_\nu(w_\nu)}{H_\nu(w)} \text{ für } |w - w_\nu| \leq \varepsilon; \\ F_\nu^{(2)} = 0 \text{ für } |w - w_\nu| > \varepsilon \quad (5.27)$$

$$F_\nu^{(3)} = \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu(w_\nu)} - \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \cdot \frac{1}{w - w_\nu} \text{ für } |w - w_\nu| \leq \varepsilon; \\ F_\nu^{(3)} = 0 \text{ für } |w - w_\nu| > \varepsilon \quad (5.28)$$

$$F_\nu^{(4)} = \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \cdot \frac{1}{w - w_\nu} \text{ für } |w - w_\nu| \leq \varepsilon; \\ F_\nu^{(4)} = 0 \text{ für } |w - w_\nu| > \varepsilon \quad (5.29)$$

Von den so definierten Funktionen sind nur die Funktionen $F_\nu^{(4)}(w)$ an den Stellen $w = w_\nu$ nicht beschränkt, sie haben einfache Pole. Zur Gewinnung einiger Abschätzungen nehmen wir im folgenden stets an, es sei $z + \zeta < 0$; d. h. daß nicht Quellpunkt und Aufpunkt gleichzeitig in der freien Oberfläche liegen. Zunächst nehmen wir weiter an, es sei $\nu \geq \nu_0$. Dann ergibt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|H_\nu(w)| = |w - w_\nu| |H_\nu'(w_\nu)| \quad (5.30)$$

mit

$$w_\nu \leq \hat{w}_\nu \leq w \text{ für } w \geq w_\nu; \quad w \leq \hat{w}_\nu \leq w_\nu \text{ für } w \leq w_\nu \quad (5.31)$$

wegen (5.15) bedeutet das aber

$$|H_\nu(w)| \geq |w - w_\nu| \Delta \cdot w_\nu \quad \text{für } w \geq w_\nu \quad (5.32)$$

$$|H_\nu(w)| \geq |w - w_\nu| \Delta \cdot w \quad \text{für } \varepsilon \leq w \leq w_\nu \quad (5.33)$$

(d. h. für fast alle ν bei festem w)

$$|H_\nu(w)| \geq H_{\nu_0}(\varepsilon) \quad \text{für } 0 \leq w \leq \varepsilon \quad (5.34)$$

d. h. aber: Es gibt eine positive Schranke

$$S = \text{Min} \{ \varepsilon^2 \Delta, H_{\nu_0}(\varepsilon) \} \quad (5.35)$$

so daß, falls $|w - w_\nu| > \varepsilon$ ist, gleichmäßig in w und für alle $\nu \geq \nu_0$ gilt

$$|H_\nu(w)| \geq S. \quad (5.36)$$

Damit gilt dann auch wegen (5.12)

$$|F_\nu^{(1)}(w)| \leq \frac{(K_0 + w)}{S} w e^{k_\nu(z+\zeta)}. \quad (5.37)$$

Die Ableitungen der Funktionen $F_\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sind an den Stellen $|w - w_\nu| = \varepsilon$ nicht eindeutig definiert; setzen wir hier etwa den Wert Null fest, so gilt

$$\left| \frac{dF_\nu^{(1)}}{dw} \right| \leq \left| \frac{J_\nu'}{H_\nu} \right| + \left| \frac{J_\nu H_\nu'}{H_\nu^2} \right| \leq J_\nu \left\{ \frac{w\Delta}{S} + \frac{2w}{S^2} \right\} \\ \leq 2w^2(w + K_0) \left\{ \frac{w\Delta}{S} + \frac{2w}{S^2} \right\} e^{w(z+\zeta)} \quad (5.38)$$

wegen (5.12) und (5.22); d. h. $\frac{dF_\nu^{(1)}}{dw}$ ist integrierbar bezüglich

w. Wegen

$$\frac{u_\nu}{2} + \frac{w_\nu}{2} \leq \sqrt{u_\nu^2 + w_\nu^2} = k_\nu \quad (5.39)$$

folgt aus (5.12)

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} F_\nu^{(1)}(w) \leq \frac{w(w + K_0)}{S} e^{w(z+\zeta)/2} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} e^{\nu\pi(z+\zeta)/2b} \quad (5.40)$$

das heißt die Summe ist konvergent und integrierbar im Intervall $0 \leq w \leq \infty$. Da die Funktionen $F_\nu^{(1)}(w)$ mit $\nu < \nu_0$ ebenfalls integrierbar sind, folgt:

$$\text{Das Integral } \int_0^\infty \sum_{\nu=1}^\infty F_\nu^{(1)}(w) \sin w(x - \xi) dw \text{ existiert.}$$

Wir kommen jetzt zur Funktion

$$F_\nu^{(2)}(w) = \frac{J_\nu(w_\nu) - J_\nu(w)}{H_\nu(w)} \text{ für } |w - w_\nu| \leq \varepsilon. \quad (5.41)$$

Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Funktionen J_ν und H_ν ergibt

$$F_\nu^{(2)}(w) = - \frac{J_\nu'(\hat{w}_\nu)(w - w_\nu)}{H_\nu'(\hat{w}_\nu)(w - w_\nu)} \quad (5.42)$$

wobei die Ableitungen J_ν' und H_ν' an zwei i. a. verschiedenen Zwischenwerten \hat{w}_ν und \hat{w}_ν gebildet sind. Das ergibt mit (5.10), (5.12) und (5.15) die Abschätzung

$$|F_\nu^{(2)}(w)| \leq \frac{(w_\nu + \varepsilon) \Delta \cdot J_\nu(w)}{(w_\nu - \varepsilon) \Delta} \\ \leq \frac{(u_\nu + \varepsilon)(u_\nu + K_0 + \varepsilon)}{w_{\nu_0} - \varepsilon} e^{(u_\nu - \varepsilon)(z+\zeta)}. \quad (5.43)$$

Den Ausdruck (5.28) für $F_\nu^{(3)}(w)$ können wir wegen $H_\nu(w_\nu) = 0$ schreiben:

$$F_\nu^{(3)}(w) = J_\nu(w_\nu) \frac{H_\nu(w) - [H_\nu(w_\nu) + (w - w_\nu)H_\nu'(w_\nu)]}{H_\nu'(w_\nu)(w - w_\nu)H_\nu(w)}. \quad (5.44)$$

Der Mittelwertsatz, angewandt auf den Zähler und auf die Funktion $H_\nu(w)$ im Nenner, ergibt dann

$$F_\nu^{(3)}(w) = J_\nu(w_\nu) \frac{(w - w_\nu)^2 / 2! H_\nu''(\hat{w}_\nu)}{H_\nu'(\hat{w}_\nu)(w - w_\nu)^2 H_\nu'(w_\nu)} \quad (5.45)$$

wobei \hat{w}_ν und \hat{w}_ν i. a. verschiedene Punkte des Intervalls $[w_\nu - \varepsilon, w_\nu + \varepsilon]$ sind. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$|F_\nu^{(3)}(w)| \leq J_\nu(w_\nu) \frac{2}{2 \cdot \Delta^2 (w_\nu - \varepsilon)^2} \\ \leq \frac{(u_\nu + \varepsilon)(u_\nu + K_0 + \varepsilon)}{\Delta^2 (w_{\nu_0} - \varepsilon)^2} e^{(u_\nu - \varepsilon)(z+\zeta)} \quad (5.46)$$

so daß wir finden

$$\left| \int_0^\infty \{F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)}\} dw \right| \quad (5.47)$$

$$\leq 2\varepsilon \frac{u_\nu + \varepsilon}{w_{\nu_0} - \varepsilon} (u_\nu + K_0 + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\Delta^2 (w_{\nu_0} - \varepsilon)} \right) e^{(u_\nu - \varepsilon)(z+\zeta)}$$

Hieraus folgt, daß $\sum_{\nu=1}^\infty (F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)})$ konvergent und integrierbar ist; insbesondere folgt unter Berücksichtigung von (5.40):

Das Integral

$$\int_0^\infty \sum_{\nu=1}^\infty \{F_\nu^{(1)} + F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)}\} \sin w(x - \xi) dw$$

existiert.

Formale Integration ergibt nun

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \{F_\nu^{(1)} + F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)}\} \sin w(x-\xi) dw = \\ &= \frac{1}{x-\xi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dw \{F_\nu^{(1)} + F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)}\} \cos w_\nu(x-\xi) \\ &+ \frac{1}{x-\xi} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \left[\cos[(w_\nu + \varepsilon)(x-\xi)] + \right. \\ & \quad \left. + \cos[(w_\nu - \varepsilon)(x-\xi)] \right]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Es wurde mit (5.38) gezeigt, daß $\frac{dF_\nu^{(1)}}{dw}$ integabel ist. Die

Funktionen $\frac{dF_\nu^{(2)}}{dw}$ und $\frac{dF_\nu^{(3)}}{dw}$ sind beschränkt und nur in

einem endlichen Intervall $\neq 0$, also auch integabel, das heißt, daß alle in (5.48) auftretenden Integrale existieren. Die zweite Summe der rechten Seite ist absolut konvergent. Es ist nämlich für $\nu \geq \nu_0$:

$$\frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \leq \frac{(K_0 + u_\nu)}{w_{\nu_0} \cdot A} u_\nu e^{u_\nu^{2+\xi}} \quad (5.49)$$

und die Summanden mit $\nu < \nu_0$ sind beschränkt.

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \{F_\nu^{(1)} + F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)} + F_\nu^{(4)}\} \sin w(x-\xi) dw \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - y \right) \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_\nu(w)}{H_\nu'(w)} \sin w(x-\xi) dw \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - y \right) \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \pi \cos w_\nu(x-\xi) \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - y \right) \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \cdot \text{sign}(x-\xi) + 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Die Konvergenz der Reihe auf der linken Seite von (5.48) ist ebenfalls absolut. Als Differenz absolut konvergenter Reihen muß damit auch die erste Summe der rechten Seite konvergieren. Daraus folgt aber die asymptotische Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \{F_\nu^{(1)} + F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)}\} \sin w(x-\xi) dw = 0 \{(x-\xi)^{-1}\} \quad (5.50)$$

und damit

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \{F_\nu^{(1)} + F_\nu^{(2)} + F_\nu^{(3)}\} \sin w(x-\xi) dw \cdot \\ & \cdot \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - y \right) \cos u_\nu \left(\frac{b}{2} - \eta \right) = 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F_\nu^{(4)} \sin w(x-\xi) dw = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \int_{w_\nu-\varepsilon}^{w_\nu+\varepsilon} \frac{\sin w(x-\xi)}{w-w_\nu} dw \end{aligned} \quad (5.52)$$

Mit der Substitution

$$t = (w - w_\nu)(x - \xi) \quad (5.53)$$

finden wir

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F_\nu^{(4)} \sin w(x-\xi) dw = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \int_{t=-\varepsilon(x-\xi)}^{\varepsilon(x-\xi)} \frac{\sin(w(x-\xi) + t)}{t} dt = \\ &= \int_{-\varepsilon(x-\xi)}^{\varepsilon(x-\xi)} \frac{\sin t}{t} dt \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_\nu(w_\nu)}{H_\nu'(w_\nu)} \cos w_\nu(x-\xi). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Nun ist aber [14]

$$\int_{-\varepsilon(x-\xi)}^{\varepsilon(x-\xi)} \frac{\sin t}{t} dt = \pi \text{sign}(x-\xi) + 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \quad (5.55)$$

Die Summe in (5.54) ist absolut konvergent wegen (5.49); damit folgt wegen (5.51), (5.54) und (5.55)

Die Summe der Terme mit $\nu < 0$ in (5.23) ist gliedweise identisch mit der Summe der Terme mit $\nu > 0$; — wir haben demnach nur noch die Terme mit $\nu = 0$ in (5.23) abzuschätzen.

Für $K_0 h > 1$ finden wir in analoger Anwendung der Abschätzungen für die Terme mit $\nu > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \delta_0 \frac{J_0(w)}{H_0'(w)} \sin w(x-\xi) dw = \\ &= \frac{J_0(w_0)}{H_0'(w_0)} \pi \cos w_0(x-\xi) \text{sign}(x-\xi) + 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Für $K_0 h < 1$ tritt wegen $\delta_0 = 0$ kein entsprechender Beitrag auf.

Der letzte Term von (5.23) lautet im einzelnen — vgl. (4.37) und (4.38) mit $k_\nu = w$ —

$$\frac{4}{b} \int_0^{\infty} (1 - \delta_0) \frac{w(w^2 + wK_0)}{K_0 w \mathfrak{L}g wh - w^2} \frac{\mathfrak{C}of w(z+h) \mathfrak{C}of w(\zeta+h) e^{-wh}}{w \mathfrak{C}of wh} \sin w(x-\xi) dw \quad (5.58)$$

$$\frac{4}{b} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{w_0 - w}{w_0} \right\} \frac{1}{K_0 \mathfrak{L}g wh - w} \frac{w(w + K_0) \mathfrak{C}of w(z+h) \mathfrak{C}of w(\zeta+h) e^{-wh}}{\mathfrak{C}of wh} \frac{\sin w(x-\xi) dw}{w} \quad \text{für } K_0 h \begin{cases} > 1 \\ < 1 \end{cases}$$

Der Integrand ist stetig und beschränkt bei $w = 0$. Insbesondere gilt

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{K_0 w}{K_0 \mathfrak{L}g wh - w} = K_0 \left[\frac{d}{dw} (K_0 \mathfrak{L}g wh - w) \right]^{-1} = \frac{K_0}{K_0 h - 1} \quad (5.59)$$

Deshalb liegt es nahe, den letzten Term von (5.23) wie folgt aufzuspalten:

$$\begin{aligned} & - \frac{4}{b} \int_0^{\infty} (1 - \delta_0) \frac{J_0(w)}{H_0(w)} \sin w(x-\xi) dw = \\ & = - \frac{4 K_0 h}{b(K_0 h - 1)} \int_0^{\infty} \frac{\sin w(x-\xi)}{w} dw + \\ & + \frac{4}{b} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{K_0}{w(K_0 h - 1)} - (1 - \delta_0) \frac{J_0(w)}{H_0(w)} \right\} \sin w(x-\xi) dw. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist auf allen Punkten der reellen w -Achse eine holomorphe Funktion von w und damit auch differenzierbar. Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{b} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{K_0}{w(K_0 h - 1)} - (1 - \delta_0) \frac{J_0(w)}{H_0(w)} \right\} \sin w(x-\xi) dw \\ & = \frac{4}{b} \int_0^{\infty} \left[\frac{-K_0}{w^2(K_0 h - 1)} - \right. \\ & \left. - \frac{d}{dw} \left\{ (1 - \delta_0) \frac{J_0(w)}{H_0(w)} \right\} \right] \cos w(x-\xi) dw \frac{1}{x-\xi} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Das Integral der rechten Seite existiert, da $J_0(w)$ exponentiell abklingt; das erste Integral der rechten Seite entspricht der Funktion Integralsinus für das Argument 0 und ist damit gleich $\pi/2 \cdot \text{sign}(x-\xi)$ [14]. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \frac{4}{b} \int_0^{\infty} (1 - \delta_0) \frac{J_0(w)}{H_0(w)} \sin w(x-\xi) dw = \\ & = \frac{-2\pi K_0}{b(K_0 h - 1)} \text{sign}(x-\xi) + 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Aus (4.29), (5.23), (5.55) und (5.60) folgt, daß

$$\begin{aligned} G_{5x} = & \frac{-4\pi}{b} \text{sign}(x-\xi) \left[\frac{K_0}{2(K_0 h - 1)} + \right. \\ & \left. \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{J_{\nu}(w_{\nu})}{H_{\nu}'(w_{\nu})} \cos w_{\nu}(x-\xi) \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - y \right) \right. \\ & \left. \cdot \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \right] + 0 \{(x-\xi)^{-1}\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

wobei der Strich an der Summe bedeuten soll, daß für $K_0 h < 1$ nur über Indizes $\nu \neq 0$ zu summieren ist. — Damit folgt weiter, daß die Funktion

$$\begin{aligned} G_x = & G_{5x} + \frac{4\pi}{b} \left[\frac{K_0}{2(K_0 h - 1)} \right. \\ & \left. + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{J_{\nu}(w_{\nu})}{H_{\nu}'(w_{\nu})} \cos w_{\nu}(x-\xi) \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - y \right) \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

allen Bedingungen genügt, welche aus (4.01) bis (4.06) folgen, daß also ihr unbestimmtes Integral bezüglich x die gesuchte Funktion $G(x, y, z)$ ist. Insbesondere gilt für $x \rightarrow +\infty$

$$G_x = 0 \{(0-\xi)^{-1}\} \quad (5.65)$$

und für $x \rightarrow -\infty$ unter Berücksichtigung von (4.33) und (5.04)

$$\begin{aligned} G_x = & \frac{4\pi K_0}{b(K_0 h - 1)} + \frac{8\pi}{b} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{w_{\nu}^2 + K_0 x_{\nu}}{x_{\nu}} \cdot \\ & \frac{\mathfrak{C}of x_{\nu}(z+h) \mathfrak{C}of x_{\nu}(\zeta+h) \mathfrak{C}of x_{\nu} h \cdot e^{-x_{\nu} h}}{\mathfrak{C}of^2 x_{\nu} h \cdot (1 + (u_{\nu}/x_{\nu})^2) - K_0 h} \cos w_{\nu}(x-\xi) \cdot \\ & \cdot \cos u_{\nu}(b/2 - y) \cos u_{\nu}(b/2 - \eta) + 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Wegen $H_{\nu}(w_{\nu}) = 0$ ist

$$w_{\nu}^2 = K_0 x_{\nu} \mathfrak{L}g x_{\nu} h. \quad (5.67)$$

Durch mehrfaches Einsetzen dieser Beziehung finden wir schließlich aus (5.66)

$$\begin{aligned} G_x = & 4\pi \left[\frac{K_0}{b(K_0 h - 1)} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} w_{\nu} \gamma_{\nu} \{ \varphi_{\nu}^c(x, y, z) \varphi_{\nu}^c(\xi, \eta, \zeta) \right. \\ & \left. + \varphi_{\nu}^s(x, y, z) \varphi_{\nu}^s(\xi, \eta, \zeta) \right] + 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu} = & \frac{4 w_{\nu} x_{\nu} \mathfrak{C}of^2 x_{\nu} h}{b [(x_{\nu}^2 + u_{\nu}^2) \mathfrak{C}in 2 x_{\nu} h - 2 w_{\nu}^2 x_{\nu} h]} \\ & (\nu = \pm 1, 2, \dots \text{ und } \nu = 0 \text{ für } K_0 h > 1) \\ \gamma_{\nu} = & 0 \quad \text{für } \nu = 0, K_0 h < 1 \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\varphi_{\nu}^c(x, y, z) + i \varphi_{\nu}^s(x, y, z) = \quad (5.70)$$

$$= \frac{\mathfrak{C}of x_{\nu}(z+h)}{\mathfrak{C}of x_{\nu} h} e^{i w_{\nu} x} \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - y \right) = \varphi_{\nu}^c + i \varphi_{\nu}^s.$$

Insbesondere gilt im Grenzfall $h \rightarrow \infty$

$$\gamma_{\nu} = \frac{2 w_{\nu} x_{\nu}}{b(x_{\nu}^2 + u_{\nu}^2)} \quad (5.71)$$

$$\varphi_{\nu}^c(x, y, z) + i \varphi_{\nu}^s(\xi, \eta, \zeta) = e^{x_{\nu} z + i w_{\nu} x} \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - y \right) \quad (5.72)$$

$$\text{mit } w_{\nu}^2 = K_0 x_{\nu} \quad (5.73)$$

wegen (5.67). Bestimmen wir nun eine Integralfunktion G zu G_x , indem wir, ausgehend von (4.30), auch in (4.32) im Term $G_{5x} - G_{4x}$ setzen $-\cos w_{\nu}(x-\xi)/w$ für $\sin w(x-\xi)$ und in (5.60) $\sin w_{\nu}(x-\xi)/w_{\nu}$ für $\cos w_{\nu}(x-\xi)$ und schließlich

$$\frac{4\pi K_0 (x - \xi)}{b (K_0 h - 1)} \text{ für } \frac{4\pi K_0}{b (K_0 h - 1)},$$

so zeigt sich, daß alle Abschätzungen, welche wir für die Reihenentwicklung von $G_x - G_{4x}$ hergeleitet haben, a fortiori für die Funktion $G - G_4$ gelten, da für genügend große w die Abschätzungen (5.12) und (5.17) für die Funktionen J_ν , $\frac{dJ_\nu}{dw}$

erst recht gelten, wenn statt J_ν die Funktion $J_\nu^* \equiv J_\nu/w$ eingesetzt wird. Lediglich für den letzten Summanden des Ausdrucks (5.23) erfordert dieser Übergang eine zusätzliche Untersuchung; denn in dem Beitrag

$$g_0^* = \int_0^\infty \frac{4}{b} (1 - \delta_0) \frac{J_0(w) \cos w(x - \xi)}{H_0(w) w} dw \quad (5.74)$$

erhalten wir ein divergentes Integral. Wir setzen stattdessen an:

$$g_0 = \int_{-\infty}^\infty f(w) \frac{\mathfrak{Cof} w(z+h) \mathfrak{Cof} w(\zeta+h) \cos w(x-\xi) - 1}{w^2} dw \quad (5.75)$$

mit

$$f(w) = \frac{2}{b} \left\{ \frac{1}{1 - |w|/w_0} \right\} \left\{ (|w| + K_0) \cdot \frac{w}{K_0 \mathfrak{L}g wh - w} \cdot \frac{e^{-|w|h}}{\mathfrak{Cof} wh} \right\} \left\{ \begin{array}{l} K_0 h < 1 \\ K_0 h > 1 \end{array} \right\}. \quad (5.76)$$

Der Ausdruck g_0 ist g_0^* gleichwertig bis auf den konvergenzerzeugenden Zusatz -1 im Zähler, welcher keinen Beitrag zu den Ableitungen nach den Koordinaten leistet. Nun gilt die Zerlegung

$$1 - \frac{\mathfrak{Cof} w(z+h) \mathfrak{Cof} w(\zeta+h) \cos w(x-\xi)}{w^2} = \frac{h(w) - s(w) \cos w(x-\xi)}{w^2} \quad (5.77)$$

$$\text{mit } h(w) = \frac{1 - \cos w(x-\xi)}{w^2} \quad (5.78)$$

$$s(w) = \frac{2 \mathfrak{Cin} \frac{w}{2} (z+h) + 2 \mathfrak{Cin} \frac{w}{2} (\zeta+h)}{w^2} + \frac{4 \mathfrak{Cin} \frac{w}{2} (z+h) \mathfrak{Cin} \frac{w}{2} (\zeta+h)}{w^2} \quad (5.79)$$

und damit

$$g_0 = \int_{-\infty}^\infty f(w) h(w) dw - \int_{-\infty}^\infty f(w) s(w) \cos w(x-\xi) dw. \quad (5.80)$$

Die Funktion $f(w)$ ist eine gerade Funktion von w und klingt monoton exponentiell für große w ab. Sie ist damit insbesondere quadratisch integabel. Für $w = 0$ nimmt sie stetig den Wert $f(0) = 2K_0/b(K_0 h - 1)$ an. Das Produkt $f(w) \cdot s(w)$ geht für große w exponentiell gegen Null, solange $z + \zeta < 0$ ist; damit gilt

$$\int_{-\infty}^\infty f(w) s(w) \cos w(x-\xi) dw = 0 \{(x-\xi)^{-1}\}. \quad (5.81)$$

Die Funktion $h(w)$ hat eine Fouriertransformierte [10]

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty h(w) e^{i u w} dw =$$

$$= \begin{cases} \pi \{ |x-\xi| - |u| \} & \text{für } |u| \leq |x-\xi| \\ 0 & \text{für } |u| \geq |x-\xi| \end{cases} \quad (5.82)$$

$$\text{Sei } F(u) = \int_{-\infty}^\infty f(w) e^{i u w} dw \quad (5.83)$$

die gerade Fouriertransformierte der Funktion $f(w)$.

Die Faltung der Funktionen $f(w)$ und $h(w)$

$$g(w) = \int_{-\infty}^\infty f(w') h(w+w') dw' \equiv \int_{-\infty}^\infty f(w-w') h(w') dw \quad (5.84)$$

ist ebenfalls stetig und quadratisch integabel und hat die Fouriertransformierte

$$G(u) = F(u) H(u). \quad (5.85)$$

Insbesondere gilt die Umkehrformel

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(u) H(u) e^{-i u w} du. \quad (5.86)$$

Damit wird aber

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{u=-|x-\xi|}^{|x-\xi|} \int_{w=-\infty}^\infty f(w) e^{i u w} dw \pi (|x-\xi| - |u|) du = \\ &= \pi |x-\xi| f(0) - \sqrt{2\pi} \int_0^\infty u F(u) du - \\ &\quad - \sqrt{2\pi} \int_{|x-\xi|}^\infty (|x-\xi| - u) F(u) du. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Die Funktion $f(w)$ ist auf der w -Achse bis auf den Punkt $w = 0$ holomorph und damit differenzierbar. Die Ableitungen verschwinden ebenfalls exponentiell für große w , damit verschwindet auch die Fouriertransformierte $F(u)$ genügend stark für große u , daß das erste Integral in (5.87) existiert und das letzte Integral wie $0 \{(x-\xi)^{-1}\}$ klein wird. Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned} g_0 &= g(0) - \int_{-\infty}^\infty f(w) s(w) \cos w(x-\xi) dw = \\ &= (x-\xi) \frac{2K_0}{b(K_0 h - 1)} + C + 0 \{(x-\xi)^{-1}\} \end{aligned} \quad (5.88)$$

wobei die Größe C , definiert durch

$$C = \int_0^\infty u \int_{-\infty}^\infty f(w) e^{i u w} dw du, \quad (5.89)$$

nur von $K_0 h$ und b abhängt. Durch Addition des Potentials einer Parallelströmung in Anlehnung an (5.60) erhalten wir damit unter Berücksichtigung von (4.31) für $x \rightarrow +\infty$

$$G = -\frac{1}{b} \ln \{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2\} + C + 0 \{(x-\xi)^{-1}\} \quad (5.90)$$

und für $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{b} \ln \{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2\} + C + 4\pi \frac{K_0 (x-\xi)}{b(K_0 h - 1)} \\ &\quad + \sum_{\nu=-\infty}^\infty \gamma_\nu \{ \varphi_\nu^s(x, y, z) \varphi_\nu^c(\xi, \eta, \zeta) - \\ &\quad - \varphi_\nu^c(x, y, z) \varphi_\nu^s(\xi, \eta, \zeta) \} + 0 \{(x-\xi)^{-1}\} \end{aligned} \quad (5.91)$$

6a. Betrachtungen über den Fluß durch Kontrollflächen und über die Determiniertheit freier Wellensysteme

Wir wollen jetzt die Größe

$$\Phi(a, \xi, \eta, \zeta) = \int_{-h}^0 \int_{-b/2}^{b/2} G_x dy dz \Big|_{x=-a; a>0} \quad (6.01)$$

betrachten, welche als Fluß der Strömung G_x durch eine Kontrollfläche $\{x = -a, -h \leq z \leq 0, -b/2 \leq y \leq b/2\}$ aufgefaßt werden kann. Zu diesem Ausdruck leisten im Mittel nur die Terme mit $v = 0$ von G_x einen nicht verschwindenden Beitrag. Nehmen wir a genügend groß an, so wird der örtliche Mittelwert $\bar{\Phi}$ von Φ bezüglich a nur bestimmt durch den ersten Summanden von (5.66); es wird

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} - 0 \{(a - \xi)^{-1}\} &= bh \frac{4\pi K_0}{b(K_0 h - 1)} \\ &= 4\pi \frac{K_0 h}{K_0 h - 1} \begin{cases} < 0 \text{ für } K_0 h < 1 \\ > 0 \text{ für } K_0 h > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.02)$$

Da G im Punkt $\{x = \xi, y = \eta, z = \zeta\}$ wie eine reziproke Distanz singularär ist, sollte man aber $\bar{\Phi} = 4\pi$ erwarten. Die durch (6.02) ausgedrückte scheinbare Verletzung der Kontinuitätsgleichung erklärt sich aus einer Diffusion der Strömung durch die ungestörte freie Oberfläche $z = 0$. Der vertikale Fluß zwischen den Schnitten $x = +a$ und $x = -a$ wird nämlich

$$\begin{aligned} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a}^a G_z dx dy &= -\frac{1}{K_0} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a}^a G_{xx} dx dy = \\ &= -\frac{1}{K_0} \int_{-b/2}^{b/2} \{G_x(a) - G_x(-a)\} dy = -\frac{4\pi K_0}{K_0 h - 1} \end{aligned} \quad (6.03)$$

Genau dieser Term entspricht aber der Abweichung von (6.02) gegen den Wert 4π . Beachten wir die linearisierte Beziehung für die Erhebung $\tilde{\zeta}$ der freien Oberfläche über die ungestörte Nullage

$$\tilde{\zeta} = \frac{c}{g} G_x \quad (6.04)$$

so sehen wir, daß sich hinter einer Quelle der Ergiebigkeit 4π , welche sich mit Geschwindigkeit c in x -Richtung bewegt, eine asymptotische Wellenerhebung

$$\tilde{\zeta} = \frac{4\pi c^{-1}}{b(K_0 h - 1)} \quad (6.05)$$

ausbildet; im überkritischen Fall $K_0 h < 1$ also eine Absenkung. Im Rahmen einer linearisierten Theorie, d. h. für $G_x \ll c$, kann der horizontale Fluß zwischen der freien Oberfläche und der Ebene $z = 0$ vernachlässigt werden. Dann entspricht der Fluß (6.03) durch die ungestörte Oberfläche dem lokalen Aufbau der konstanten asymptotischen Wellenerhebung.

Die Parallelströmung, welche durch den ersten Term von (5.66) dargestellt wird, wurde offensichtlich übersehen in einer Herleitung des asymptotischen Geschwindigkeitspotentials einer Quelle in zweidimensionaler Strömung von Haskind [18], dadurch wurde der Aufbau der stationären Wellenerhebung bisher nicht erwähnt.

Nach Aufstellung der asymptotischen Abschätzungen der Funktionen G und G_x wird es uns nun möglich zu zeigen, daß relativ willkürliche stationäre Wellenfelder asymptotisch eine

Darstellung durch die Funktionen $\varphi_r^c(x, y, z)$, $\varphi_r^s(x, y, z)$ und eine Parallelströmung c_0 gestatten. Wir brauchen dazu lediglich das Geschwindigkeitspotential φ eines Wellenfeldes über die Greensche Formel auszudrücken durch die Greensche Funktion G .

Wir werden zeigen:

Die Funktion $\varphi_x(x, y, z)$ sei in einem Bereich \mathfrak{B} , welcher bestimmt ist durch die Relationen $x' - a \leq x \leq x' + a, |y| \leq b/2, -h \leq z \leq 0$, harmonisch und genüge dort den Randbedingungen

$$\varphi_{xy} = 0 \quad \text{für } y = \pm b/2 \quad (6.06)$$

$$\varphi_{xz} = 0 \quad \text{für } z = -h \quad (6.07)$$

$$\varphi_{xxx} + K_0 \varphi_{xz} = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad (6.08)$$

Dann gilt in der Umgebung der Ebene $x = x'$ für $z < 0$ eine absolut konvergente Darstellung

$$\varphi_x(x, y, z) = \frac{g}{c} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \{\beta_v \varphi_r^c(x, y, z) - \alpha_v \varphi_r^s(x, y, z)\} + c_0 + 0 \{a^{-1}\}. \quad (6.09)$$

Die hierin auftretende Reihe ist für festes $z < 0$ gleichmäßig konvergent in x und y über die volle x, y -Ebene. Das heißt insbesondere, daß sich der Ansatz (2.01), welchen wir der Widerstandsberechnung zugrunde legten, vom allgemeinsten Ausdruck für φ_x nur um eine eventuelle Parallelströmung und um einen mit a^{-1} verschwindenden Term unterscheidet.

Die Greensche Formel besagt nämlich:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \varphi_x(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} \varphi_x(\xi, \eta, \zeta) \right\} dS \end{aligned} \quad (6.10)$$

falls der Punkt $\{x, y, z\}$ im inneren von \mathfrak{B} liegt, wobei das Integral über die Randfläche S des Bereichs \mathfrak{B} zu erstrecken ist

und die Operation $\frac{\partial}{\partial n}$ eine Differentiation bezüglich ξ, η, ζ

in der Richtung der äußeren Normalen bedeuten soll. Dabei dürfen wegen (4.02), (4.03), (4.04), (6.06) und (6.07) die Beiträge der Randflächen $y = \pm b/2$ und $z = -h$ aus der Integration fortgelassen werden. Die Integration über die Fläche $z = 0$ läßt sich wie in (6.03) wegen (4.05) und (6.06) auf Integrale längs zweier Randlinien zurückführen, es wird näm-

$$\begin{aligned} &\int_{x'-a}^{x'+a} \int_{-b/2}^{b/2} \{\varphi_x G_{z\xi} - G \varphi_{x\xi}\} d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{K_0} \int_{x'-a}^{x'+a} \int_{-b/2}^{b/2} \{\varphi_x G_{z\xi} - G \varphi_{x\xi}\} d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{K_0} \int_{-b/2}^{b/2} \{\varphi_x G_{z\xi} - G \varphi_{x\xi}\} d\eta \Big|_{\xi=x'-a}^{\xi=x'+a} \end{aligned} \quad (6.11)$$

damit läßt sich (6.10) schreiben

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-h}^0 \{\varphi_x G_{z\xi} - G \varphi_{x\xi}\} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{K_0} \{\varphi_x G_{z\xi} - G \varphi_{x\xi}\} \Big|_{\xi=x'-a}^{\xi=x'+a} \right] d\eta \Big|_{\xi=x'-a}^{\xi=x'+a} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Für $x \approx x'$ und große Werte von a — insbesondere $a \gg b, a \gg h$ — gilt nun wegen (5.65) und (5.90)

$$G(x, y, z, x' - a, \eta, \zeta) = -\frac{1}{b} \ln a + C + 0 \{a^{-1}\} \quad (6.13)$$

$$G_x(x, y, z, x' - a, \eta, \zeta) = 0 \{a^{-1}\}. \quad (6.14)$$

Dagegen gilt für $\xi = x' + a$ wegen (5.91) und (5.66)

$$G(x, y, z, x' + a, \eta, \zeta) = \frac{-1}{b} \ln a + C + 4\pi \frac{K_0(x - x' - a)}{b(K_0 h - 1)} + 4\pi \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu} \{ \varphi_{\nu}^s(x, y, z) \varphi_{\nu}^c(x' + a, \eta, \zeta) - \varphi_{\nu}^c(x, y, z) \varphi_{\nu}^s(x' + a, \eta, \zeta) \} + 0 \{a^{-1}\} \quad (6.15)$$

$$G_x(x, y, z, x' + a, \eta, \zeta) = \frac{4\pi K_0}{b(K_0 h - 1)} + 4\pi \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} w_{\nu} \gamma_{\nu} \{ \varphi_{\nu}^c(x, y, z) \varphi_{\nu}^c(x' + a, \eta, \zeta) + \varphi_{\nu}^s(x, y, z) \varphi_{\nu}^s(x' + a, \eta, \zeta) \} + 0 \{a^{-1}\}. \quad (6.16)$$

Setzen wir in die linke Seite der Greenschen Formel (6.10) statt G eine Konstante ein, so verschwindet die rechte Seite, wir dürfen deshalb die Funktion G vermehren um den Term $1/b \ln a - C$. Damit ergibt sich, daß im wesentlichen nur die Werte von φ_x und φ_{xx} in der Ebene $x = x' + a$ den Wert von φ_x im Punkte $\{x, y, z\}$ bestimmen; wir erhalten durch Einsetzen von (6.13), (6.14), (6.15) und (6.16) in (6.10):

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y, z) &= \frac{K_0}{b(K_0 h - 1)} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^0 \varphi_x(x' + a, \eta, \zeta) d\zeta - \\ &\frac{1}{K_0} \varphi_x(x' + a, \eta, 0) \Bigg\} d\eta + \frac{K_0(x' + a - x)}{b(K_0 h - 1)} \\ &\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^0 \varphi_{x\xi}(x' + a, \eta, \zeta) d\zeta - \frac{1}{K_0} \varphi_{x\xi}(x' + a, \eta, 0) \Bigg\} d\eta \\ &+ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu} \varphi_{\nu}^c(x, y, z) \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^0 (w_{\nu} \varphi_{\nu}^c \varphi_x - \varphi_{\nu}^s \varphi_{x\xi}) d\zeta - \\ &\frac{1}{K_0} (w_{\nu} \varphi_{\nu}^c \varphi_x - \varphi_{\nu}^s \varphi_{x\xi}) \Bigg\} d\eta + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \gamma_{\nu} \varphi_{\nu}^s(x, y, z) \\ &\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^0 (w_{\nu} \varphi_{\nu}^s \varphi_x + \varphi_{\nu}^c \varphi_{x\xi}) d\zeta - \\ &\frac{1}{K_0} (w_{\nu} \varphi_{\nu}^s \varphi_x + \varphi_{\nu}^c \varphi_{x\xi}) \Bigg\} d\eta + 0 \{a^{-1}\}. \quad (6.17) \end{aligned}$$

In den Integralen der Formel (6.14) sind die Funktionen $\varphi_x(\xi, \eta, \zeta)$ und $\varphi_{x\xi} = \partial/\partial\xi \{ \varphi_x(\xi, \eta, \zeta) \}$ $\varphi_{\nu}^s(\xi, \eta, \zeta)$, $\varphi_{\nu}^c(\xi, \eta, \zeta)$, zu bilden für $\xi = x' + a$; außerdem ist in den Termen mit dem Faktor $1/K_0$ für ζ der Wert 0 einzusetzen.

Die Entwicklungen (5.66) und (5.75) sind für $z < 0$ gleichmäßig in x und y und absolut konvergent; ist φ_x und φ_{xx} beschränkt auf der Fläche $x = x' + a$, so stellt damit auch (6.14)

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y, z) &= \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \{ \varphi_x(x_s, \eta, 0) \cos w_{\nu}(x_s - x) - \varphi_{x\xi}(x_s, \eta, 0) \sin w_{\nu}(x_s - x) \} \frac{\mathcal{C}of \nu_{\nu}(z + h)}{\mathcal{C}of \nu_{\nu} h} \\ &\cdot \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - \eta \right) d\eta \cos u_{\nu} \left(\frac{b}{2} - y \right) + \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h}^0 \varphi_x(x_s, \eta, \zeta) d\zeta - \frac{1}{K_0} \varphi_x(x_s, \eta, 0) \Bigg\} d\eta \frac{K_0}{K_0 h - 1} + 0 \{a^{-1}\} \quad (6.24) \end{aligned}$$

für $z < 0$ eine absolut konvergente Entwicklung nach den Funktionen φ_{ν}^c und φ_{ν}^s und der asymptotischen Parallelströmung dar, — der zweite Summand von (6.14) verschwindet für divergenzfreie Strömung und soll hier nicht mehr betrachtet werden. Bilden wir die Greensche Formel (6.08) bezüglich φ_{xx} statt φ_x , so folgt, daß für eine harmonische Funktion φ_{xx} für $z < 0$ ebenfalls eine absolut konvergente Entwicklung nach diesen Komponenten vorliegt, in der Fourierzerlegung bezüglich y müssen sich die Beiträge in φ_x und φ_{xx} entsprechen, d. h. die Entwicklung (6.07) für φ_x darf gliedweise differenziert werden. Einsetzen von (6.07) in (6.14) und Koeffizientenvergleich führt dann auf die Relationen:

$$\begin{aligned} \gamma_{\nu} \int_{\zeta=-h}^0 \int_{\eta=-b/2}^{b/2} \left(\varphi_{\nu}^i \frac{\delta}{\delta\xi} \varphi_{\lambda}^j - \varphi_{\lambda}^j \frac{\delta}{\delta\xi} \varphi_{\nu}^i \right) d\zeta - \\ - \frac{1}{K_0} \left(\varphi_{\nu}^i \frac{\delta}{\delta\xi} \varphi_{\lambda}^j - \varphi_{\lambda}^j \frac{\delta}{\delta\xi} \varphi_{\nu}^i \right) d\eta = \delta_{\nu\lambda} (1 - \delta_{ij}) \sigma_j \quad (6.18) \\ (j, i = c, s; \nu, \lambda = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

dabei sollen $\delta_{\nu\lambda}$ und δ_{ij} Kroneckersche Symbole darstellen, insbesondere soll

$$\delta_{ss} = \delta_{cc} = 1, \quad \delta_{sc} = \delta_{cs} = 0 \quad (6.19)$$

sein. Weiter ist

$$\sigma_j = 1 \text{ für } j = s, \quad \sigma_j = -1 \text{ für } j = c \quad (6.20)$$

definiert.

Diese verallgemeinerten Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen φ_{ν}^c , φ_{ν}^s lassen sich im einzelnen durch Einsetzen der Ausdrücke aus (5.70) bestätigen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \left(\varphi_{\nu}^i \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^j - \varphi_{\nu}^j \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^i \right) d\zeta = \\ = \frac{\mathcal{C}in 2 \nu_{\nu} h + 2 \nu_{\nu} h}{4 \nu_{\nu} \mathcal{C}of^2 \nu_{\nu} h} \left(\varphi_{\nu}^i(\xi, \eta, 0) \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^j(\xi, \eta, 0) - \varphi_{\nu}^j(\xi, \eta, 0) \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^i(\xi, \eta, 0) \right) \quad (6.21) \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \left(\varphi_{\nu}^j \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^j - \varphi_{\nu}^j \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^i \right) d\xi = \\ = \frac{\mathcal{C}in 2 \nu_{\nu} h + 2 \nu_{\nu} h}{4 \nu_{\nu} \mathcal{C}of^2 \nu_{\nu} h} \left(\varphi_{\nu}^i(\xi, \eta, 0) \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^j(\xi, \eta, 0) - \varphi_{\nu}^j(\xi, \eta, 0) \frac{\partial}{\partial\xi} \varphi_{\nu}^i(\xi, \eta, 0) \right) \quad (6.22) \end{aligned}$$

d. h. die Integration über die Fläche $-h \leq \zeta \leq 0$, $-b/2 \leq \eta \leq b/2$ kann zurückgeführt werden auf eine einfache Integration über η . Weiter ergibt sich

$$\gamma_{\nu} \left\{ \frac{\mathcal{C}in 2 \nu_{\nu} h + 2 \nu_{\nu} h}{4 \nu_{\nu} \mathcal{C}of^2 \nu_{\nu} h} - \frac{1}{K_0} \right\} = \frac{1}{w_{\nu} b} \quad (6.23)$$

dadurch können wir (6.17) vereinfachen zu

Das heißt aber, daß bis auf Parallelströmung die asymptotische Strömung q_x für $z < 0$ hinter einer stationär bewegten Störung und damit insbesondere die Wellenerhebung

$$\tilde{\zeta} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{c}{g} q_x(x, y, z)$$

durch die Wellenerhebung in einem Schnitt $x = x_0$ und deren Ableitung in x -Richtung eindeutig bestimmt ist.

Wenn die Reihe (6.09) für $z = 0$ auch im allgemeinsten Fall nur eine formale Bedeutung hat und ein allgemeines Summierungsverfahren hier nicht angegeben werden kann, so ist doch ihre gleichmäßige Konvergenz und damit die Darstellung der

Wellenerhebung $\tilde{\zeta} = \frac{c}{g} q_x(x, z=0)$ als gleichmäßig konvergente

Reihe gewährleistet, wenn im Integrationsbereich $\{x = x' + a, z = 0\}$ die Funktionen q_x und q_{xx} zweimal stetig differenzierbar sind nach y . Das ergibt sich durch partielle Integration, wenn man $q_y = q_{yx} = q_{yxx} = 0$ für $y = \pm b/2$ berücksichtigt. (Kein Fluß durch Kanalwand.)

6b. Bestimmung von q aus Wellenprofilen

Wir haben für die Greensche Formel (6.10) in (6.17) eine Kontrollfläche durch die Flüssigkeit angenommen, die erstens senkrecht zur Bodenfläche, zweitens senkrecht zu den Kanalwänden verläuft. Dadurch war es einerseits möglich, die Integration über die Komponenten von G und G_x — bis auf die Parallelströmung — auf die Beiträge der Linie $z = 0$ zurückzuführen, andererseits durch die Orthogonalitätsrelationen der Funktionen q_r^c und q_r^s auf diesem Bereich die Entwicklungskoeffizienten α_r, β_r von (6.09) und damit die Strömung in den Punkten außerhalb der Kontrollfläche explizit zu bestimmen in der Form (6.23). Bei Wahl einer allgemeineren Kontrollfläche quer zum Kanal könnten wir zwar ebenfalls die Strömung durch Vorgabe der Werte auf der Fläche eindeutig darstellen, es wird sich jedoch i. a. kein direkter Zugang zu den Entwicklungskoeffizienten und dem darauf aufgebauten Wellenwiderstand (2.28) finden lassen.

Ein Wellenschnitt endlicher Länge in Kanallängsrichtung, etwa in einer Ebene $y = y_0$, liefert keine ausreichende Information zur Anwendung einer Greenschen Formel und damit zur Bestimmung des Wellenfeldes. Dies kommt zum Ausdruck durch Eigenschaften des Funktionssystems $\{\cos w_r x, \sin w_r x\}$. Wir haben in (5.14) gezeigt, daß der Quotient v/w_r mit wachsendem v unbeschränkt ansteigt, d. h. daß die w_r auf der reellen Achse asymptotisch keine endliche Dichte haben. Nach einem Satz von Müntz [16] ist dann aber das Funktionssystem $\{\cos w_r x, \sin w_r x\}$ über jedem endlichen x -Intervall vollständig, d. h. jede stetige Funktion kann in jedem Intervall durch eine Linearkombination dieser Funktionen so approximiert werden, daß die Abweichung beliebig klein wird. Es ergibt sich, daß die Koeffizienten einer solchen Approximation nicht eindeutig bestimmbar sein können, da die Menge der w_r zumindest nach Wegnahme von endlich vielen asymptotisch dicht

bleibt. Damit entfällt auch die Möglichkeit, aus dem Verlauf des Wellenprofils im Schnitt Schranken für die Koeffizienten der Wellenkomponenten zu gewinnen.*)

Nur im Grenzfall unendlicher Schnittlänge bestimmt das Schnittprofil eindeutig das Wellenfeld in seiner Umgebung: eine gleichmäßig konvergente Reihe (3.12)

$$\zeta_s(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \{\beta_r \cos w_r x - \alpha_r \sin w_r x\} \cos u_r \left(\frac{b}{2} - y \right) \quad (6.25)$$

$$\alpha_r = \alpha_{-r}, \quad \beta_r = \beta_{-r}$$

stellt nämlich eine fast-periodische Funktion dar, deren Entwicklungskoeffizienten sich [17] eindeutig bestimmen durch (3.13), (3.14)

$$\beta_r = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_s(x) \cos w_r x \, dx = \frac{1}{\cos u_r (b/2 - y_0)} \quad (6.26)$$

$$\alpha_r = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_s(x) \sin w_r x \, dx = \frac{1}{\cos u_r (b/2 - y_0)} \quad (6.27)$$

unabhängig von der Wahl von x_0 . Für solche Werte v , für die $\cos u_r (b/2 - y) = 0$ ist, lassen sich die α_r, β_r etwa durch die Funktion $d\zeta/dy$ auf demselben Schnitt entsprechend ausdrücken. Durch Reihenentwicklungen (6.25), welche auf der ganzen x -Achse konvergieren, lassen sich aber nicht mehr beliebige stetige Funktionen, sondern nur noch fast-periodische Funktionen einer speziellen Klasse darstellen.

Eine angenäherte Bestimmung des Wellenfeldes aus der Information eines Schnittes endlicher Länge erscheint nur aussichtsreich, solange a priori bekannt ist, mit wieviel Termen eine Reihenentwicklung (6.09) abgebrochen werden darf. Dazu soll die folgende Rechnung einen Anhalt geben.

6c. Wellenspektrum eines Parabelschiffes

In der Theorie des Wellenwiderstandes von Schiffen auf tiefem Wasser wird häufig das Wellenbild untersucht, welches hervorgerufen wird durch eine Quellverteilung der Ergiebigkeit q d ξ d ζ auf einer vertikalen Rechteckfläche

$$\{-L/2 \leq \xi \leq L/2, -D \leq \zeta \leq 0, \eta = 0\} \text{ mit}$$

$$q = \frac{-8Bc\xi}{L^2} \quad (6.28)$$

In der Michell-Havelockschen Theorie steht diese Verteilung stellvertretend für ein Schiff von Länge, Breite und Tiefgang L, B und D mit parabelförmigen Wasserlinien und rechteckigen Spanten. Nach Inui ist es sachgemäßer, diese Verteilung anzusehen als stellvertretend für den Umströmungskörper, welchen sie im Halbraum $z < 0$ bei Anströmung mit c in $-x$ -Richtung erzeugt.

Erinnern wir uns, daß (5.68) die asymptotische Strömung einer Quelle der Ergiebigkeit -4π im Punkte $\{\xi, \eta, \zeta\}$ darstellt, und setzen wir in diesen Ausdruck $-q \, d\xi \, d\zeta$ für den Faktor 4π ein und integrieren über die Rechteckfläche, so erhalten wir für die Strömung in x -Richtung

$$q_x = \frac{1}{b} \int_{-D}^0 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{8Bc}{L^2} \sum_{r=1}^{\infty} \xi e^{\alpha_r(z-\zeta)} \cos w_r(x-\xi) \cos u_r \left(\frac{b}{2} - y \right) d\xi d\zeta \frac{2w_r^2 z_r}{z_r^2 + u_r^2} \cos \left(u_r \frac{b}{2} \right)$$

$$= \frac{32Bc}{bL^2} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} \xi \sin w_r \xi d\xi \int_{-D}^0 e^{\alpha_r \zeta} d\zeta e^{\alpha_r z} \sin w_r x \cos u_r \left(\frac{b}{2} - y \right) \frac{w_r^2 z_r}{z_r^2 + u_r^2} \cos \left(u_r \frac{b}{2} \right) \quad (6.29)$$

*) Hierzu sei zur Veranschaulichung erwähnt, daß die Funktionsmenge $\{\sin vx, \cos vx\}$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) eine endliche Dichte analog zu (5.14), nämlich eins, besitzt. Dieses Funktionssystem ist nur vollständig für die gleichmäßige Approximation stetiger Funk-

tionen in einem Intervall, dessen Länge gleich 2π oder kleiner ist. Im letzteren Fall sind die zu wählenden Koeffizienten ebenfalls weder eindeutig, noch gibt es eine obere Schranke für mögliche Quadratsummen ihrer Beträge.

und damit wird die Wellenerhebung

$$\zeta = \frac{c}{g} \varphi_{x_2=0} = -\frac{16B}{bK_0L^2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(w_v \frac{L}{2}\right) - \left(w_v \frac{L}{2}\right) \cos\left(w_v \frac{L}{2}\right)}{\kappa_v^2 + u_v^2} (1 - e^{-\kappa_v D}) \sin w_v x \cos u_v \left(\frac{b}{2} - y\right) \cos\left(u_v \frac{b}{2}\right). \quad (6.30)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (6.09), so finden wir

$$\beta_v = 0, \quad \alpha_v = \frac{32B}{bK_0L^2} \frac{\sin\left(w_v \frac{L}{2}\right) - \left(w_v \frac{L}{2}\right) \cos\left(w_v \frac{L}{2}\right)}{\kappa_v^2 + u_v^2} (1 - e^{-\kappa_v D}) \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.31)$$

d. h.

$$\alpha_v = \{v^{-3/2}\} \quad (6.32)$$

(vgl. (6.39)); hieraus ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (6.30). Setzen wir nun (6.30) in den Ausdruck (2.39) für den Wellenwiderstand ein, so ergibt sich unabhängig von der Schnittlage x_8

$$R = \frac{32 \rho g B^2}{\pi \gamma_0^2 L^2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\kappa_v D})^2}{\kappa_v^2 (\kappa_v^2 + u_v^2)} \left[\sin\left(w_v \frac{L}{2}\right) - w_v \frac{L}{2} \cos\left(w_v \frac{L}{2}\right) \right]^2 \frac{2\pi}{b} \quad (6.33)$$

$$\text{mit} \quad \gamma_0 = K_0 \frac{L}{2} \quad (6.34)$$

und damit im Grenzfall $b \rightarrow \infty$

$$R = \frac{32 \rho g B^2}{\pi \gamma_0^2 L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\kappa D})^2}{\kappa^2 (\kappa^2 + u^2)} \left\{ \sin\left(w \frac{L}{2}\right) - w \frac{L}{2} \cos\left(w \frac{L}{2}\right) \right\}^2 du \quad (6.35)$$

wobei κ , w und u durch (2.34) und (2.37) miteinander verknüpft sind.

Approximieren wir den Widerstand nach dem Ansatz Korvin-Kroukovskys aus dem Wellenprofil eines Schnitts $x = x_8$, so haben wir zu bilden

$$R_{kk}(x_8) = \rho g \int_{-b/2}^{b/2} \zeta^2 dy = \frac{32 \rho g B^2}{\pi \gamma_0^2 L^2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\kappa_v D})^2 \left\{ \sin\left(w_v \frac{L}{2}\right) - \left(w_v \frac{L}{2}\right) \cos\left(w_v \frac{L}{2}\right) \right\}^2}{\kappa_v^2 (u_v^2 + \kappa_v^2)} \frac{4 \kappa_v^2 \sin^2(w_v x_8)}{u_v^2 + \kappa_v^2} \quad (6.36)$$

Die Summanden von (6.36) unterscheiden sich von denen in (6.33) um Faktoren

$$\frac{4 \kappa_v^2 \sin^2 w_v x_8}{\kappa_v^2 + u_v^2} = \frac{4 u_v^2 + 4 w_v^2}{2 u_v^2 + w_v^2} \sin^2 w_v x_8. \quad (6.37)$$

Mitteln wird die Ausdrücke (6.37) über einen großen x -Bereich, indem wir etwa $\sin^2 w_v x$ ersetzen durch $1/2$, so werden die Werte i. a. größer als eins ausfallen. Für $v = 0$ ergibt sich

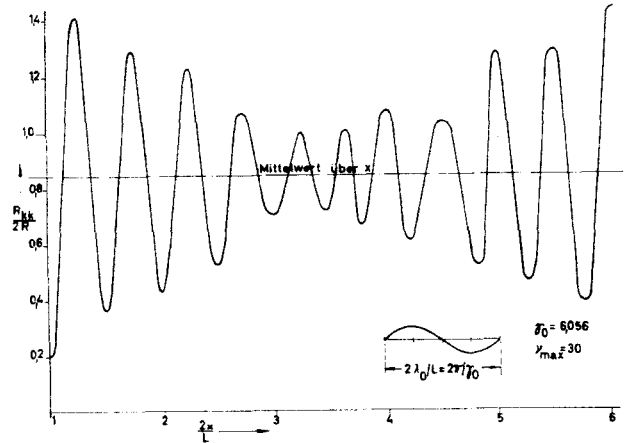
$$\frac{2 \kappa_0^2}{\kappa_0^2 + u_0^2} = 2, \quad (6.38)$$

für $u_v/K_0 \rightarrow \infty$ geht $w_v/u_v \rightarrow 0$, da aus (2.38), (2.40) folgt

$$w_v = \frac{\sqrt{2} u_v}{\sqrt{1 + 4(u_v/K_0)^2 - 1}} = \sqrt{K_0} u_v \left\{ 1 + 0 \left(\frac{u_v}{K_0} \right)^{-1} \right\} \quad (6.39)$$

Damit gilt

$$\frac{2 \kappa_v^2}{\kappa_v^2 + u_v^2} \rightarrow 1 \quad \text{für } u_v/K_0 = \frac{2\pi v}{K_0 b} \rightarrow \infty. \quad (6.40)$$

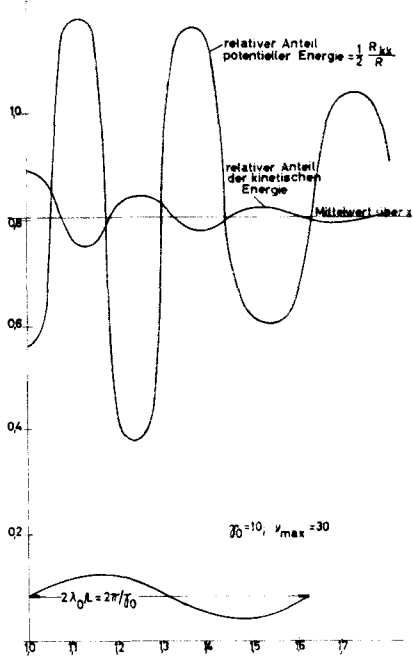


Errechneter Anteil des ersten Summanden von (1.15) (= Anteil potentieller Energie = $1/2 R_{kk}$) zum Gesamtwiderstand in Abhängigkeit vom Abstand x der Kontrollfläche von der Schiffsmittle

Daraus darf geschlossen werden, daß ein mittlerer Wert des nach (6.36) ermittelten Widerstands desto weniger über dem Wert (6.33) liegt, je kleiner $K_0 b$, d. h. je größer die Geschwindigkeit c des stationären Wellensystems ist. Dies gilt insbesondere auch deshalb, weil der relative Beitrag der Terme mit höherem v , d. h. der schräger abwandernden Wellen, zum Ausdruck (6.33) mit abnehmendem $K_0 b$ zunimmt, da der Faktor $(1 - e^{-\kappa_v D}) / \kappa_v^2 (\kappa_v^2 + u_v^2)$ langsamer abnimmt mit v .

Im Bereich großer Geschwindigkeiten, in dem die harmonische Analyse eines Wellenfeldprofils quer zur Fahrtrichtung zunehmend erschwert wird durch den divergierenden Nachlaufstreifen hinter dem Schiffsmodell, könnte deshalb das Verfahren Korvin-Kroukovskys nach Entwicklung eines geeigneten Mittelungsverfahrens Anwendungsmöglichkeiten finden.

Für das von uns hier entwickelte Verfahren der Bestimmung des Wellenwiderstands durch harmonische Analyse eines Wellenprofils quer zur Fahrtrichtung ist es hingegen günstig, daß für kleinere Geschwindigkeiten, bei denen niedrigere Wellen-



Errechnetes Verhältnis des ersten und dritten Summanden von (1.15) (Anteil von potentieller und Anteil der kinetischen Energie im Schnitt) zum Gesamtwiderstand (6.35) in Abhängigkeit vom Abstand x der Kontrollfläche von der Schiffsmitte

höhen auftreten und dadurch die Messung erschwert wird, nur noch die Anfangsterme der Entwicklung (6.33) wesentlich zum Widerstand beitragen.

(Eingegangen am 1. Februar 1963)

Bezeichnungen

- \equiv Definierendes Gleichheitszeichen
- A_p, A_p^*, B_p Entwicklungskoeffizienten gem. (2.05), (2.06), (2.20)
- B, D, L Breite, Tiefgang und Länge eines Schiffes gem. (6.28)
- C Konstante gem. (5.89)
- G Geschwindigkeitspotential einer Quelle der Ergiebigkeit -4π
- G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 Schrittweise Annäherungen zu G
- $F_p^{(i)}, J_p, H_p, L_p$ Zwischenfunktionen gem. (5.25), (4.37), (4.38), (4.33)
- $I, I_{c+}^v, I_{c-}^v, I_{s+}^v, I_{s-}^v$ Integralausdrücke gem. (1.14), (3.08), (3.09)
- $K_0 = g/c^2$ Charakteristische Wellenzahl
- T Intervalllänge
- $F(u), G(u), H(u)$ Fouriertransformierte gem. (5.83), (5.85), (5.82)
 - a Abstand einer Kontrollfläche vom Aufpunkt
 - b Kanalbreite
 - c Schiffsgeschwindigkeit
 - c_0 konstante Strömungsgeschwindigkeit
 - c_E^v Energietransportgeschwindigkeit in Kanallängsrichtung
 - e Energiedichte gem. (1.01)
 - g Erdbeschleunigung
 - h Höhe des ungestörten Wasserspiegels über dem Kanalboden
- k, u, w Integrationsvariable in der Bedeutung von Wellenzahlen, u und w in Richtung quer bzw. längs zum Kanal
 - k_p spezielle Wellenzahl gem. (4.22)
 - u_p spezielle Wellenzahl gem. (4.20)

- w_p spezielle Wellenzahl gem. (2.04)
- p Druck
- q Quellverteilungsdichte gem. (6.28)
- x, y, z Koordinaten, ausgehend vom Punkt auf der ungestörten freien Oberfläche, x in Fahrtrichtung, z aufwärts
- $h(w), f(w), g(w), s(w)$ Hilfsfunktionen gem. (5.76), (5.84), (5.78), (5.79)
- α_p, β_p Entwicklungskoeffizienten gem. (6.09)
- γ_p Koeffizienten gem. (5.69) bzw. (5.71)
- γ_0 Geschwindigkeitsparameter gem. (6.34)
- δ_p Koeffizienten gem. (5.21), (5.22), (5.24)
- Δ Laplace Operator (4.01); Abschätzkonstante (5.15) — (5.17); halber Schnittabstand (3.02), (3.03)
- ε Hilfsgröße gem. (5.25) — (5.29)
- e^* Phasenwinkel
- ζ Wellenhöhe
- ξ, η, ζ Quellpunktkoordinaten analog zu x, y, z
- Θ Wellenausbreitungswinkel
- \times Wellenzahl gem. (2.33)
- \times_p spezielle Wellenzahl gem. (2.03)
- ν, γ Summationsindizes
- ρ Dichte
- σ Signum von $z - \zeta$ gem. (4.08)
- $\sigma_p, \tau_p, \sigma_j$ Zahlenfaktoren gem. (3.10), (3.11), (3.18), (6.20)
- $d\tau$ Volumenelement
- φ Geschwindigkeitspotential des Wellenfeldes
- φ_p^s, φ_p^c Entwicklungsfunktionen gem. (5.70), (5.72)
- Φ Flußintegral gem. (6.01)

Schrifttum

- [1] Havelock: Calculation of wave resistance. Proc. Roy. Soc. A 144, Jan. 34, S. 514—521.
- [2] Hogner: Contribution to the Theory of Ship Waves. Ark. Math. Astr. og Fysik 17, No. 12, 1923.
- [3] Ursell: On Kelvin's Ship-Wave Pattern. Journ. Fluid Mech. 6, 1960, S. 418—431.
- [4] Inui: Asympt. Expansions applied to Problems of Ship-Waves and Wavemaking Resistance. Proc. 5th Jap. Nat. Congr. for Appl. Mech. 1955.
- [5] Eggers: Über die Ermittlung hydrodynamischer Kräfte aus Impuls- und Energieansätzen. Schiffstechnik Heft 21, 1957.
- [6] Lamb: Hydrodynamics. 6th edition 1952, S. 383. Cambridge University Press.
- [7] Korvin-Kroukovsky: Beitrag zur Tagung des H5-Ausschusses der Society of Naval Architects and Marine Engineers. New York 28.—29. Juli 1960.
- [8] Wehausen: Surface Waves. Handbuch d. Physik, S. 484—486, Bd. IX 1960, Springer, Berlin.
- [9] Erdélyi: Higher Transcendental Functions. Bd. 2, S. 81, McGraw Hill 1953.
- [10] Erdélyi: Tables of Integral Transforms. Bd. 1, S. 182, S. 20, McGraw Hill 1953.
- [11] Ryshik-Gradstein: Summen, Produkte, Integrale. S. 234, S. 180, Berlin 1957.
- [12] Erdélyi: Asymptotic Expansions. Dover Publ. 1956.
- [13] Bochner: Vorlesungen über Fourier'sche Integrale. Chelsea Publ. New York 1948.
- [14] Jahnke-Emde-Lösch: Tafeln höherer Funktionen. S. 18, Teubner, Stuttgart 1960.
- [15] Mangold-Knopp: Einf. Höhere Mathematik. Bd. 3, S. 513.
- [16] Schwartz: Théorie générale des fonctions moyennepériodiques, Annals of Mathematics, Bd. 48, S. 880, 881.

[17] M a a k : Fastperiodische Funktionen. S. 28 und 113 ff. Springer 1951.

[18] H a s k i n d : Über die fortschreitende Bewegung eines Körpers nahe der freien Oberfläche einer schweren Flüssigkeit endlicher Tiefe (russisch) Formel (2.13). Prikladnaja matematika i mehanika IX 1945, S. 67—78.

[19] K e l d i s h , M. W., und S e d o w , L. I.: Theorie des Wellenwiderstandes in einem Kanal endlicher Tiefe. Abhandlungen der Konferenz über Oberflächenwellen, Moskau 1936, S. 143—152.

Berichtigung

Die folgenden Formeln aus dem ersten Teil der Arbeit (Schiffstechnik Bd. 9—1962—Heft 46) sind nachstehend in berichtigter Form wiederholt:

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{S_0+S_1+S_h+S_v} (\vec{v}, \vec{v}) d\tau + \int e (\vec{c}, \vec{n}) dS. \quad (1.03)$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_{S_0+S_1+S_h+S_v} \{ -\rho (\vec{c}, \vec{v}) (\vec{v}, \vec{n}) + e (\vec{c}, \vec{n}) \} dS. \quad (1.06)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{g}{c} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{w_v} \{ a_v \cos w_v x + \beta_v \sin w_v x \} \cdot \frac{\text{Cof} z_r (h+z)}{\text{Cof} z_r h} \\ &\cos u_v (h/2 - y) + \frac{g}{2 w_v c} \{ a_v \cos w_v x + \beta_v \sin w_v x \} \\ &\frac{\text{Cof} w_v (h+z)}{\text{Cof} w_v h} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho g b}{2} \left\{ \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_v^2 + K_0 \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v^2 \right\} \left[\int_{-h}^0 \frac{\text{Cof}^2 z_r (h+z) dz}{\text{Cof}^2 z_r h} \frac{u_v^2}{w_v^2} \right. \\ &+ \left. \int_{-h}^0 \frac{\text{Cof}^2 z_r (h+z) dz}{\text{Cof}^2 z_r h} \frac{z_r^2}{w_v^2} \right] \\ &- K_0 \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_v^2 \int_{-h}^0 \frac{\text{Cof}^2 z_r (h+z) dz}{\text{Cof}^2 z_r h} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$c_E^v = c \cos^2 \Theta_r \frac{\text{Cof} \sin 2 z_r h + 2 z_r h}{2 \text{Cof} \sin 2 z_r h} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho g b}{4} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(2 - \frac{(\text{Cof} \sin 2 z_r h + 2 z_r h) w_v^2}{\text{Cof} \sin 2 z_r h \cdot z_r^2} \right) \\ &\left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_1 \cos w_v x dx \right)^2 + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_1 \sin w_v x dx \right)^2 \right] \tau_v \\ &+ (1 - \tau_v) \left[\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_2 \cos w_v x dx \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \zeta_2 \sin w_v x dx \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$