

492 | August 1989

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Heinrich Schimmöller

**Grundgleichungen und
Variationsproblem der Elastodynamik**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Grundgleichungen und Variationsproblem der Elastodynamik

Heinrich Schimmöller, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1989

ISBN: 3-89220-492-6

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 492

Grundgleichungen und Variationsproblem
der Elastodynamik

von

Heinrich Schimmöller

August 1989

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Zusammenfassung / Conclusion	1
Abkürzungen und Symbole	2
1. Einleitung	4
2. Die Grundgleichungen der Elastodynamik	4
3. Die Randbedingungen	5
4. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen	6
5. Die Wellengleichungen für Longitudinal- und Transversalwellen	6
6. Virtuelle Verschiebungen	11
7. Die Variation der Formänderungsenergie	11
8. Das HAMILTON'sche Prinzip als Variationsproblem der Elastodynamik	13
9. Anwendungen des HAMILTON'schen Prinzips	19
9.1 Ableitung der TIMOSHENKO-Gleichung für die Biegeschwingungen eines Balkens	19
9.2 Die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen	24
9.2.1 Generalisierte Koordinaten und generalisierte Geschwindigkeiten	24
9.2.2 Ableitung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen für holonome n-Massensysteme	26
10. Der Erhaltungssatz der Energie	31
11. Schlußbemerkung	33
Schrifttum	34

Zusammenfassung

Ausgangspunkt der Arbeit sind die Differentialgleichungen des linear-elastischen Kontinuums und die daraus folgenden allgemeinen Bewegungsgleichungen. Als Randbedingungen werden allgemeine gemischte Randbedingungen formuliert. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen führen auf die Differentialgleichungen für transversale und longitudinale Wellenausbreitung. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten wird dann das HAMILTON'sche Extremalprinzip der Elastodynamik entwickelt. Die Anwendung dieses Prinzips auf Biegeschwingungen von Balken führt auf die TIMOSHENKO-Bewegungsgleichung. Aus dem Variationsproblem der Elastodynamik (HAMILTON'sches Prinzip) werden ferner die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen für konservative und nicht-konservative holonome dynamische Systeme mit rheonomen und skleronomen Führungsbedingungen entwickelt.

Conclusion

This work is based upon the differential equations of the linear-elastic continuum and - as a result thereof - the general equations of motion. In this case, as boundary conditions mixed ones are formulated. The general equations of motion lead to the differential equations for transversal and longitudinal wave propagation. With the help of the principle of virtual works HAMILTON's extremal-principle of elastodynamic is developed. The application of this principle to bending vibration of beams leads to the TIMOSHENKO-equation. LAGRANGE's equation of motion for conservative and non-conservative holonome dynamic systems with rheonome and skleronome guidance conditions are developed from the variational problem of elastodynamics.

Abkürzungen und Symbole

σ_{ij}	Spannungstensor
ϵ_{ij}	Dehnungstensor
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
ϵ_{ijk}	3-stufiger ϵ -Tensor
a_{kl}	Koeffizientenmatrix
a_{12}, a_{23}, a_{31}	Abstände
x_i	Koordinaten
\dot{x}_i	Geschwindigkeiten
q_k	Generalisierte Koordinaten
\dot{q}_k, \ddot{q}_k	Generalisierte Geschwindigkeiten, Beschleunigungen
u_i	Verschiebungen
$\overset{\circ}{u}_i$	Verschiebungen auf O_g
n_i	Normaleneinsvektor
$\overset{\circ}{p}_i$	Oberflächenbelastung auf O_n
\mathfrak{X}_i	Spezifische Volumenkräfte
R_i	Rotation des Verschiebungsvektors
g_j	Funktionen der Systembindung
M_i	i-te Masse des n-Massensystems
Q_k	Generalisierte Kräfte
F_i	Äußere Kräfte
t, t_0, t_1	Zeit, Zeitpunkte
E, G, ν	E-Modul, Schubmodul, Querkontraktion
λ	LAMÉ'sche Konstante
ρ	Dichte
V	Volumen
Θ	Volumendilatation
O	Gesamtoberfläche
O_g	Oberfläche für geometrische Randbedingungen
O_n	Oberfläche für natürliche Randbedingungen

W, W_S	Formänderungsenergie, Verzerrungsenergiedichte
W_B, W_S	Formänderungsenergie durch Biegung, Schub
m	Masse, Masse je Längeneinheit
β, b	Querschnittsfaktoren
φ, γ	Verdrehwinkel, Neigungswinkel
$p(x,t)$	Streckenlast
n	Anzahl der Massen im n-Massensystem
f	Freiheitsgrad
r	Radius, Anzahl der Systembindungen
x	Balkenlängskoordinate
y	Balkendurchbiegung
l	Balkenlänge
v_L, v_T	Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten, longitudinal, transversal
K	Kinetische Energie
U	Potentielle Energie
L	LAGRANGE'sche Funktion
A	Querschnittsfläche
EI	Biegesteifigkeit
I_m	Massenträgheitsmoment
\int	Abkürzung für Integral
M, Q	Biegemoment, Querkraft
δ	Variationssymbol

1. Einleitung

Bei Bewegungsvorgängen in elastischen Körpern hängen die Verschiebungen u_i außer von den Ortskoordinaten x_i noch von der Zeit t ab. Dadurch ergeben sich für das einzelne Volumenelement Beschleunigungen und in den Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigende Massenkräfte.

Der Übergang von der Statik zur Dynamik wird durch das Prinzip von d'ALEMBERT vollzogen. Danach wird ein dynamisches Problem in ein Gleichgewichtsproblem der Statik übergeführt, indem man zu den einem Volumenelement eingeprägten Kräften die negativen, auf das Volumen bezogenen Trägheitskräfte, auch Massenkräfte genannt, hinzufügt. Die Kräftegleichgewichtsbedingungen lauten dann nach /1/:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

Man bezeichnet die drei Gleichungen (1) als die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Kontinuums¹⁾. Sie gelten für kleine Bewegungen $u_i(x_i, t)$, wie sie etwa bei Wellenausbreitung in elastischen Festkörpern oder bei Schwingungen derselben vorliegen.

Die Momentengleichgewichtsbedingungen der Statik werden durch die im Schwerpunkt des Volumenelementes angreifenden Trägheitskräfte nicht beeinflusst. Falls keine volumenhaft verteilten Momente vorliegen (BOLTZMANN'sches Axiom), gilt die Symmetrie des Spannungstensors $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

2. Die Grundgleichungen der Elastodynamik

Es werden kleine Verschiebungen $u_i(x_i, t)$ vorausgesetzt. Dann gelten für den Zusammenhang zwischen Dehnungstensor ϵ_{ij} und Verschiebungsvektor u_i die Gleichungen der linearen Kinematik. Die Gleichgewichtsbedingungen im Innern des Kontinuums werden durch

¹⁾ Die Bezeichnung "Bewegungsgleichungen" wird allgemein auch für die NAVIER'schen Gleichungen mit Trägheitsterm verwendet, man vergleiche die Gln. (6) im Abschn. 4.

die Bewegungsgleichungen (1) ausgedrückt. Es wird Homogenität, Isotropie und physikalische Linearität des elastischen Körpers angenommen. Dann gilt für die Koppelung zwischen Dehnungen ϵ_{ij} und Spannungen σ_{ij} das entsprechende Stoffgesetz nach HOOKE.

Damit lauten die Grundgleichungen der linearen Elastodynamik :

$$\text{Kinematik :} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.a)$$

$$\text{Bewegungsgleichung :} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.b)$$

$$\text{Stoffgesetz :} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad (2.c)$$

bzw.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right).$$

Aus Gl. (2.a) folgt die Symmetrie des Dehnungstensors $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Auf die Symmetrie des Spannungstensors wurde im Abschnitt 1 hingewiesen. Für $u_i = u_i(x_i)$ gehen die Gleichungen (2) in die Grundgleichungen der Elastostatik über, man vergl. /2/.

3. Die Randbedingungen

Auf der Körperoberfläche O werden gemischte Randbedingungen angenommen. Zur genauen Beschreibung teilen wir die gesamte Oberfläche O in die Teilbereiche O_g und O_n auf. Es gilt

$$O = O_g \cup O_n : \quad (3)$$

Auf dem Oberflächenbereich O_g sind die Verschiebungen \dot{u}_i vorgegeben. Es gelten hier die sogenannten geometrischen Randbedingungen

$$\dot{u}_i(x_i, t) \text{ für alle } x_i \in O_g. \quad (4)$$

Auf den Oberflächenbereich O_n wirken die äußeren Belastungen $\overset{\circ}{p}_i$ ein. Hier gelten die sogenannten natürlichen Randbedingungen

$$\overset{\circ}{p}_i(x_i, t) = n_j(x_i) \sigma_{ij}(x_i, t) \quad \text{für alle } x_i \in O_n, \quad (5)$$

man vergl. z.B. /1/. Dabei ist n_j der aus dem Volumengebiet herauszeigende Normaleneinsvektor des betrachteten Oberflächenelementes.

Die geometrischen Randbedingungen (4) heißen auch wesentliche Randbedingungen oder Verschiebungsrandsbedingungen. Die natürlichen Randbedingungen (5) heißen auch Kraftrandbedingungen.

4. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen

Eliminiert man aus den Grundgleichungen (2) die Dehnungen ε_{ij} und die Spannungen σ_{ij} , erhält man drei partielle Differentialgleichungen in den Verschiebungen $u_i(x_i, t)$, nämlich

$$\sigma \left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} \right) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als allgemeine Bewegungsgleichungen der Elastodynamik. Bis auf den Trägheitsterm auf der rechten Seite handelt es sich bei den Gln. (6) um die NAVIER'schen Gleichungen der Elastostatik /2/.

Die Gln. (6) beschreiben das allgemeine Integrationsproblem der Elastodynamik. Bei gegebenen spezifischen Volumenkräften $X_i(x_i, t)$ sind die Lösungen $u_i(x_i, t)$ zu suchen, die die geometrischen Randbedingungen (4) erfüllen. Die Lösung dieser Aufgabe ist schwierig. Deshalb sind analytische Lösungen für den Einzelfall in der Regel nicht bekannt.

Eine der wichtigsten Folgerungen, die sich aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen der Elastodynamik (6) ergeben, sind die Wellengleichungen für Longitudinal- und Transversalwellen.

5. Die Wellengleichungen für Longitudinal- und Transversalwellen

Wir betrachten ein unendlich ausgedehntes elastisches Kontinuum und fragen, wie sich eine Störung, verursacht z.B. durch Volumenkräfte X_i im Zeitpunkt t_0 , auswirkt und fortpflanzt. In diesem Falle kann von den Randbedingungen (4) abgesehen werden und für

$t > t_0$ gilt $\dot{x}_i(x_i, t) = 0$. Aus Gl. (6) folgt damit:

$$G \left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} . \quad (7)$$

Gleichung (7) beschreibt demnach die freien Schwingungen. Das sind diejenigen Bewegungen $u_i(x_i, t)$, die ohne Volumenkräfte möglich sind.

Führt man in Gl. (7) die LAMÉ'sche Konstante

$$\lambda = \frac{2 \nu G}{1-2\nu} \quad (8)$$

ein, ergibt sich für Gl. (7) die Form:

$$G u_{i,jj} + (G+\lambda) u_{j,ji} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} . \quad (9)$$

Die Gleichungen (7) bzw. (9) sind die allgemeinen Wellengleichungen. Im folgenden wird mit Hilfe von Gl. (9) nachgewiesen, daß sich im elastischen Festkörper Störungen durch zwei Wellensysteme ausbreiten, nämlich in Form von Longitudinal- und in Form von Transversalwellen²⁾.

Aus Gl. (9) lassen sich zwei Arten von Schwingungen ableiten. Die erste Art ergibt sich, wenn man von Gl. (9) die Divergenz bildet:

$$G u_{i,ijj} + (G+\lambda) u_{j,jii} = \rho \frac{\partial^2 u_{i,i}}{\partial t^2}$$

bzw. $(2G + \lambda) u_{i,ijj} = \rho \frac{\partial^2 u_{i,i}}{\partial t^2} . \quad (10)$

Wir betrachten den Ausdruck $u_{i,i}$. Durch Verschiebungen u_i und Dehnungen ε_{ij} entstehen Volumenänderungen. Für ein Element beträgt die bezogene Volumenänderung nach Aufbringen des Verschie-

²⁾ Für die nachfolgenden Ableitungen wird die Divergenz und die Rotation benötigt. Entsprechend der hier gewählten Indexschreibweise wird die Divergenz- und Rotorbildung konsequent in Indexschreibweise durchgeführt, man vergl. /3/. Der für die Rotorbildung benötigte ε -Tensor 3. Stufe ε_{ijk} ist in allen drei Indexpaaren alternierend /3/. Eine Verwechslung mit dem Dehnungstensor 2. Stufe ε_{ij} ist nicht zu befürchten.

bungszustandes im Rahmen der linearen Kinematik nach Gl. (2.a):

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = u_{i,i} . \quad (11)$$

Man nennt $u_{i,i}$ deshalb auch Volumendilatation oder kubische Dilatation. Mit (11) ergibt sich aus (10):

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{2G + \lambda}{\rho} \Theta_{,jj} . \quad (12)$$

Gl. (12) beschreibt die wellenhafte Ausbreitung der Volumendilatation Θ in einem elastischen Medium. Es handelt sich um Dilatations- oder Kompressionswellen. Bildet man die Rotation von Θ , erhält man :

$$\varepsilon_{ijk} \Theta_{,ijk} = \varepsilon_{ijk} u_{\ell, \ell jk} = 0 . \quad (13)$$

Gl. (13) sagt aus, daß das Wellenfeld der Volumendilatation wirbelfrei ist. Demnach handelt es sich um Longitudinalwellen. Gl. (13) heißt auch Longitudinalitätsbedingung /4/, und Gl. (12) ist die Wellengleichung für das longitudinale Wellenfeld der Volumendilatation. Auf die Integration der Wellengleichung (12) wird hier nicht eingegangen. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (12) findet man z.B. in /5/, /6/. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen, auch Phasengeschwindigkeit oder Schallgeschwindigkeit genannt, berechnet sich aus der allgemeinen Lösung bzw. nach Gl. (12) zu :

$$v_L = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}} . \quad (14)$$

Das zweite in der allgemeinen Wellengleichung (9) enthaltene Wellensystem ergibt sich, wenn man von Gl. (9) die Rotation bildet :

$$G \varepsilon_{ijk} u_{k,j\ell\ell} + (G + \lambda) \varepsilon_{ijk} u_{\ell, \ell jk} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} . \quad (15)$$

Nach Gl. (13) ist der zweite Term in Gl. (15) Null, und es folgt :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} = \frac{G}{\rho} \varepsilon_{ijk} u_{k,j\ell\ell} . \quad (16)$$

Für die Rotation des Verschiebungsvektors u_i , nämlich für

$$R_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} , \quad (17)$$

gilt demnach die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} R_{i, \ell \ell} . \quad (18)$$

Bildet man die Divergenz von R_i , erhält man

$$R_{i,i} = \varepsilon_{ijk} u_{k,ji} = 0 . \quad (19)$$

Gl. (19) sagt aus, daß das Wellenfeld von R_i divergenzfrei ist. Demnach handelt es sich um Transversalwellen, die auch Torsions- oder Scherwellen genannt werden. Gl. (19) ist die Transversalitätsbedingung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Transversalwellen ergibt sich aus der zugehörigen Wellengleichung (18):

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} . \quad (20)$$

Aus (8), (14) und (20) ergibt sich :

$$\frac{v_L}{v_T} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} . \quad (21)$$

Aus (21) folgt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen stets größer als die der Transversalwellen ist.

Das in der allgemeinen Wellengleichung (9) enthaltene longitudinale und transversale Wellensystem kann man auch anschaulich nachweisen. Dazu betrachten wir die eindimensionale Wellenausbreitung in x_1 -Richtung in zwei Fällen.

Im ersten Fall legen wir die Longitudinaleigenschaft des Wellenfeldes, also Teilchenbewegung in Ausbreitungsrichtung x_1 , durch das Verschiebungsfeld

$$u_i = \{ u_1(x_1, t), \sigma, \sigma \} \quad (22)$$

fest. Einsetzen von (22) in die allgemeine Wellengleichung (9) liefert

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{2G + \lambda}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad (23)$$

Gl. (23) entspricht Gl. (12). Damit wird (12) als Wellengleichung für longitudinale Ausbreitung erkannt. Da Bewegungen quer zur x_1 -Richtung nach (22) nicht auftreten, ist die Querkontraktionszahl $\nu = 0$, und der Faktor $(2G + \lambda)/\rho$ in Gl. (23) muß entsprechend korrigiert werden. Für $\nu = 0$ erhält man aus Gl. (8) $\lambda = 0$ und für $2G = E/(1 + \nu) = E$. Einsetzen in (23) liefert :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad (24)$$

Dies ist die Wellengleichung für elementare Längsschwingungen eines zylindrischen Stabes.

Im zweiten Fall legen wir die Transversaleigenschaft des Wellenfeldes, also Teilchenbewegung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung x_1 , durch das Verschiebungsfeld

$$u_i = \{ \sigma, u_2(x_1, t), \sigma \} \quad (25)$$

fest. Mit (25) folgt aus (11) für die Volumendilatation $\theta = u_{j,j} = 0$, und aus der allgemeinen Wellengleichung (9) ergibt sich :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad (26)$$

Gl. (26) entspricht Gl. (18). Damit wird (18) als Wellengleichung für transversale Ausbreitung erkannt. Setzt man in (26) für $u_2 = r\varphi$, mit $\varphi(x_1, t)$ als Torsionswinkel, ergibt sich :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad (27)$$

Dies ist die Differentialgleichung für elementare Torsionsschwingungen eines kreiszylindrischen Stabes. In der Regel werden die Gln. (24) und (27) direkt am Stabelement abgeleitet, man vergl. z.B. /7/, /8/.

6. Virtuelle Verschiebungen

Virtuelle Verschiebungen $\delta u_i(x_i, t)$ sind gedachte, stetige, hinreichend kleine und mit den geometrischen Randbedingungen (4) verträgliche Variationen des realen Verschiebungszustandes $u_i(x_i, t)$, man vergl. /2/, /8/, /9/. Sie werden am System zu einem festen Zeitpunkt ausgeführt. Dabei ändern sich die dem System eingepprägten Kräfte nicht.

Hinreichend klein bedeutet in diesem Zusammenhang auch klein gegenüber den realen Verschiebungen $u_i(x_i, t)$.

Die geometrische Verträglichkeit verlangt, daß die durch die geometrischen Randbedingungen (4) auf O_g vorgeschriebenen Verschiebungen $\dot{u}_i(x_i, t)$ nicht mitvariiert werden. Daraus folgt :

$$\delta \dot{u}_i(x_i, t) = 0 \quad \text{für alle } x_i \in O_g . \quad (28)$$

7. Die Variation der Formänderungsenergie

Die Formänderungsarbeit W berechnet sich aus

$$W = \iiint_V W_s(\epsilon_{ij}) dV , \quad (29)$$

mit $W_s(\epsilon_{ij})$ als spezifische Formänderungsenergie oder Verzerrungsenergiedichte, man vergl. /2/. Für linear- und nichtlinear-elastisches Materialverhalten kann die Verzerrungsenergiedichte $W_s(\epsilon_{ij})$ als elastisches Potential gedeutet werden, denn es gilt

$$\frac{\partial W_s(\epsilon_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} , \quad (30)$$

man vergl. /2/, /10/, /11/ .

Das Verhalten der elastischen Formänderungsenergie W wird nunmehr durch Aufbringen virtueller Verschiebungen δu_i bei festgehaltener Zeit untersucht, wobei die δu_i gemäß Gl. (2.a) virtuelle Dehnungen

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ (\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i} \right\} \quad (31)$$

zur Folge haben. Die Ausführung der virtuellen Verschiebungen δu_i führt auf die Variation der Formänderungsenergie W . Unter Beachtung von (29), (30) und (31) ergibt sich :

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint_V \delta W_S(\varepsilon_{ij}) dV = \iiint_V \frac{\partial W_S(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV \\ &= \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \left\{ (\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i} \right\} dV. \end{aligned} \quad (32)$$

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors läßt sich der letzte Term der Gl. (32) vereinfachen, und es folgt für die Variation von W :

$$\delta W = \iiint_V \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV. \quad (33)$$

Wir benötigen jetzt den Integralsatz von GAUSS, den wir in Indexschreibweise aus der Arbeit /2/ übernehmen :

$$\iiint_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \iint_O \sigma_{ij} u_i n_j dO - \iiint_V \sigma_{ij,j} u_i dV. \quad (34)$$

Die Anwendung des GAUSS'schen Satzes (34) auf (33) liefert bei Berücksichtigung des Variationssymbols δ :

$$\delta W = \iint_O \sigma_{ij} \delta u_i n_j dO - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV. \quad (35)$$

Das Oberflächenintegral in (35) geht über $O = O_g \cup O_n$, man vergl. (3). Demnach folgt aus (35) :

$$\delta W = \iint_{O_g} \tilde{\epsilon}_{ij} \delta \dot{u}_i n_j dO + \iint_{O_n} \tilde{\epsilon}_{ij} \delta u_i n_j dO - \iiint_V \tilde{\epsilon}_{ij,j} \delta u_i dV. \quad (36)$$

Wegen der geforderten geometrischen Verträglichkeit der virtuellen Verschiebungen wird \dot{u}_i auf O_g nicht mitvariiert, und es gilt nach Gl. (28) $\delta \dot{u}_i = 0$. Dagegen gelten auf O_n die natürlichen Randbedingungen (5). Damit erhält man aus (36):

$$\delta W = \iint_{O_n} \dot{p}_i \delta u_i dO - \iiint_V \tilde{\epsilon}_{ij,j} \delta u_i dV. \quad (37)$$

8. Das HAMILTON'sche Prinzip als Variationsproblem der Elastodynamik

Bei Ausführung virtueller Verschiebungen ändern sich die dem System eingepprägten Kräfte nicht. Es gelten die Gleichgewichtsbedingungen. In der Elastodynamik sind das die Bewegungsgleichungen (1) bzw. (2.b). Einsetzen in (37) liefert :

$$\delta W = \iint_{O_n} \dot{p}_i \delta u_i dO + \iiint_V \left(X_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV. \quad (38)$$

Man beachte, daß für die Herleitung der Gl. (38) die Kinematik und die Bewegungsgleichungen benötigt wurden, man vergl. die Gln. (2.a), (31) und (2.b). Dagegen brauchten wir auf das linear-elastische Stoffgesetz (2.c) nicht zurückzugreifen.

Die virtuellen Verschiebungen δu_i wurden zu einem festen Zeitpunkt ausgeführt gedacht. Betrachtet man das elastodynamische System nicht nur bei festgehaltener Zeit, sondern über ein beliebiges Zeitintervall t_0 bis t_1 , hängen die δu_i außer von den Koordinaten x_i auch von der Zeit t ab. Die Integration der Gleichung (38) über ein solches Zeitintervall liefert :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{O_n} \overset{\circ}{p}_i \delta u_i dO + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V x_i \delta u_i dV - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V \varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV. \quad (39)$$

Wir behandeln zunächst den letzten Integralterm der Gl. (39), nämlich

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V \varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV \right\} dt. \quad (40)$$

Partielle Integration der Gl. (40) liefert :

$$I = \left| \iiint_V \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta u_i dV \right|_{t_0}^{t_1} - \iiint_V \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u_i}{\partial t} \left(\varrho \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \delta u_i \right) dt \right\} dV. \quad (41)$$

Man verifiziert (41) am einfachsten durch partielle Differentiation nach t . Als Ergebnis erhält man den Integranden unter dem Zeitintegral (40).

Es wird jetzt festgelegt, daß die virtuellen Verschiebungen δu_i für die willkürlich wählbaren Zeitpunkte t_0 und t_1 für alle Körperpunkte x_i verschwinden:

$$\delta u_i (x_i, t_0) = \delta u_i (x_i, t_1) = 0. \quad (42)$$

Diese Annahme zieht keine Einschränkung der Allgemeinheit nach sich. Leitet man das HAMILTON'sche Prinzip nicht wie hier ab, sondern geht den Weg über die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen, weist HAMEL /6/ auf Einschränkungen durch die Festlegung (42) hin.

Mit (42) folgt aus (41):

$$I = - \iiint_V \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u_i}{\partial t} \left(\varrho \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \delta u_i \right) dt \right\} dV. \quad (43)$$

Die Berechnung von $\partial \varrho / \partial t$ ergibt unter Beachtung der Massenerhaltung $\partial m / \partial t = 0$ und der Volumendilatation nach Gl. (11):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{1}{V} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{m}{V^2} \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{m}{V} \frac{\partial V / V}{\partial t} = - \varrho \frac{\partial u_{i,i}}{\partial t} = - \varrho \dot{u}_{i,i}, \quad (44)$$

mit $\dot{u}_{i,i}$ als Dilatationsgeschwindigkeit der Volumenelemente. Es handelt sich dabei um die Volumenänderungsgeschwindigkeit, nicht zu verwechseln mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Dilatationswellen nach Gl. (14).

Wie aus (44) ersichtlich, ist die zeitliche Dichteänderung $\partial g / \partial t$ endlich. Damit ist der Term $\delta u_i (\partial g / \partial t)$ im Integranden von (43) gegenüber dem zweiten Term von höherer Ordnung klein und kann deshalb vernachlässigt werden. Aus (43) folgt demnach :

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V g \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} dV dt \\
 &= - \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V g \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta \frac{\partial u_i}{\partial t} dV dt \\
 &= - \int_{t_0}^{t_1} \delta \iiint_V \frac{1}{2} g \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV dt \\
 &= - \int_{t_0}^{t_1} \delta K dt ,
 \end{aligned} \tag{45}$$

wobei

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V g \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV \tag{46}$$

die kinetische Energie des sich in Bewegung befindlichen Körpers darstellt. Setzt man (45) in (39) ein, erhält man :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta (W - K) dt = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{O_n} \dot{p}_i \delta u_i dO dt + \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \dot{x}_i \delta u_i dV dt . \tag{47}$$

Auf der rechten Seite von (47) erscheinen die dem System eingeprägten äußeren Kräfte \dot{p}_i und \dot{x}_i . Die gesamte potentielle Energie, die durch diese Belastungen umgesetzt wird, beträgt :

$$U = - \iint_{O_n} \overset{\circ}{p}_i u_i dO - \iiint_V \overset{\circ}{x}_i u_i dV, \quad (48)$$

man vergl. /2/. Man nennt U das Potential aller am System angreifenden Kräfte oder die potentielle Energie des Systems. Bei Variation des Potentials U werden die eingepprägten vorgegebenen Kräfte $\overset{\circ}{p}_i$ und $\overset{\circ}{x}_i$ nicht mitvariiert. Demnach folgt aus (48) für die erste Variation von U :

$$\delta U = - \iint_{O_n} \overset{\circ}{p}_i \delta u_i dO - \iiint_V \overset{\circ}{x}_i \delta u_i dV. \quad (49)$$

Wie ersichtlich, entspricht (49) den Integranden unter den Zeitintegralen auf der rechten Seite von Gl. (47). Führt man in (47) die Variation des Potentials U nach (49) ein, ergibt sich das Extremalprinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W - K + U) dt = 0, \quad (50)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} W &= \text{Formänderungsenergie,} \\ K &= \text{Kinetische Energie,} \\ U &= \text{Potentielle Energie} \end{aligned} \right\} \text{ des Systems.}$$

Gl. (50) ist das HAMILTON'sche Prinzip in seiner "schönen" und kompakten Form. Diese Form ergibt sich nur, wenn die rechte Seite von Gl. (47) gemäß Gl. (49) als Potentialvariation geschrieben werden kann. Oder allgemeiner ausgedrückt: Sind die eingepprägten Kräfte konservativ, sind sie also aus einem Potential ableitbar, ergibt sich das HAMILTON'sche Prinzip in der Form (50). Dies ist meistens der Fall. Auf Abweichungen davon wird noch hingewiesen.

Die Energiesumme unter dem Zeitintegral (50) wird als LAGRANGE'sche Funktion oder als kinetisches Potential bezeichnet :

$$L = W - K + U. \quad (51)$$

Damit lautet das HAMILTON'sche Extremalprinzip :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_{t_0}^{t_1} L dt = \text{Extremum.} \quad (52)$$

Das Produkt $Ldt = \text{Energie} \times \text{Zeit}$ bezeichnet man gelegentlich als "Wirkung" und das Zeitintegral (50) bzw. (52) als Wirkungsintegral /6//9//14/. Entsprechend heißt (52) auch das Prinzip der kleinsten Wirkung. SOMMERFELD /14/ gibt zu dieser Bezeichnung einen lesenswerten Kommentar.

Die sich wirklich einstellende Bewegung eines Systems $u_i(x_i, t)$ wollen wir als reale Bewegung des Körpers oder als reale Bahnkurve bezeichnen. Man findet für $u_i(x_i, t)$ auch den Ausdruck "dynamic path" /13/. Das HAMILTON'sche Extremalprinzip lautet dann :

Die Bewegung eines konservativen Systems zwischen t_0 und t_1 verläuft so, daß das Zeitintegral über die LAGRANGE-Funktion L für eine reale Bewegung eines Körpers (reale Bahnkurve) $u_i(x_i, t)$ einen stationären Wert annimmt im Vergleich zu allen Nachbarbewegungen (Vergleichsbahnkurven) $u_i(x_i, t) + \delta u_i(x_i, t)$, die man sich jeweils durch virtuelle Verschiebungen erzeugt denken kann.

Oder kürzer : Die reale Bahnkurve macht das Zeitintegral über L stationär.

In der Dynamik starrer Körper verschwindet die Formänderungsenergie W und die spezifischen Volumenkräfte X_i leisten keine Arbeit. Das Potential U ergibt sich in diesem Falle nur aus den äußeren Belastungen. In diesem Falle lautet das HAMILTON'sche Prinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - U) dt = 0, \quad (53)$$

wobei der gegenüber (50) vorgenommene Vorzeichenwechsel der LAGRANGE'schen Funktion keine Bedeutung hat. (53) ist das HAMILTON'sche Prinzip in der klassischen einfachen Form, wie sie in der Dynamik auftritt /7//9//12//14/. Man bezeichnet $L = K - U$ auch als natürliche Form der LAGRANGE'schen Funktion.

In der Elastostatik verschwindet die erste Variation des Gesamtpotentials. Das Gesamtpotential ist stationär /2/. In der Elastodynamik ist das Zeitintegral über L stationär. Damit haben wir mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten ein Extremalprinzip für die Elastodynamik gewonnen.

Das HAMILTON'sche Prinzip ist von großer Bedeutung, da sich mit seiner Hilfe wichtige andere Beziehungen ableiten lassen. Wir werden es in dieser Arbeit zur Ableitung der TIMOSHENKO-Gleichung für Balkenbiegeschwingungen und zur Ableitung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen anwenden. WIEGHARDT /19/ hat das HAMILTON'sche Extremalprinzip auf die Wirbelbewegung angewandt.

Man kann also das HAMILTON'sche Prinzip als Axiom an den Anfang der Dynamik setzen /12/ oder man kann es als alternative Formulierung zum Grundgleichungssystem (2) der Elastodynamik ansehen. Man kann auch sagen: Das HAMILTON'sche Extremalprinzip ist das Variationsproblem der Elastodynamik.

Die Formulierungen (50), (52) und (53) des HAMILTON'schen Prinzips gelten für konservative Systeme, bei denen das Potential linear von den Verschiebungen u_i abhängt, man vergl. (48). Hängen die angreifenden Kräfte selbst noch von den Verschiebungen ab, existiert ein Potential nach Art der Gl. (48) nicht. Dieser Fall ist z.B. in der Aeroelastizität gegeben. Hier sind die an der Körperoberfläche wirkenden aerodynamischen Belastungen empfindlich von den Verschiebungen der Körperoberfläche abhängig. Ein anderer Fall ist das Auftreten von Reibungskräften. Diese hängen meist proportional von den auftretenden Reibgeschwindigkeiten ab und sind ebenfalls nicht aus einem Potential ableitbar.

Für diese und ähnliche Probleme kann man das HAMILTON'sche Prinzip in der Form (50), (52) und (53) nicht anwenden. In solchen Fällen geht man von der Variationsform (47) des HAMILTON'schen Prinzips aus. An dieser Stelle soll auf solche nichtkonservativen Kräfte nicht weiter eingegangen werden. Sie finden aber Berücksichtigung bei der Ableitung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen.

9. Anwendungen des HAMILTON'schen Prinzips

9.1 Ableitung der TIMOSHENKO-Gleichung für die Biegeschwingungen eines Balkens

Gegeben ist ein Balken nach Abb. 1, der durch die Belastungsfunktion $p(x,t)$ erregt wird. Gesucht wird die Bewegungsgleichung für die Biegeschwingungen unter Berücksichtigung der Rotationsträgheit und der Schubverformung der Querschnitte.

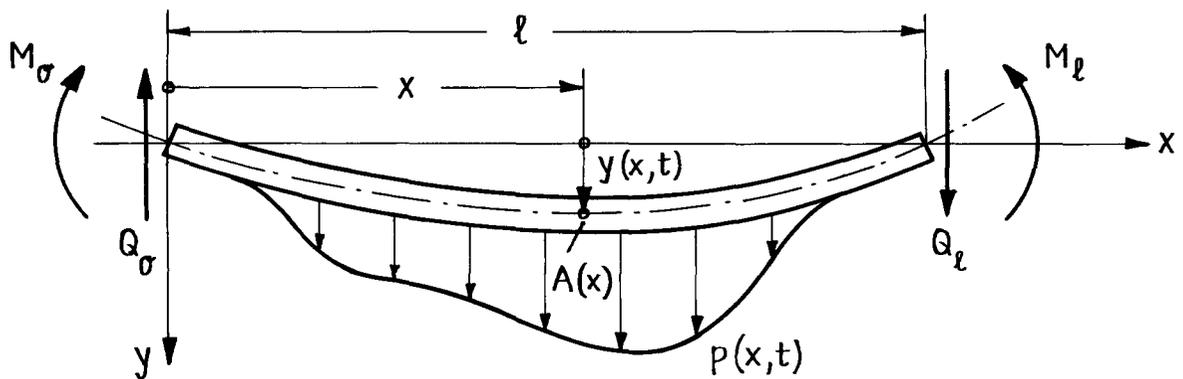


Abb. 1

Die Gesamtneigung der neutralen Faser NF der Biegelinie $\partial y / \partial x$ an der Stelle x setzt sich aus der Neigung der Biegelinie φ ohne Schubverformung und aus der Schubverformung γ zusammen. Dabei ist γ die Schubverformung des Volumenelementes in der NF, Abb. 2.

Demnach gilt :

$$\partial y / \partial x = \varphi + \gamma . \tag{54}$$

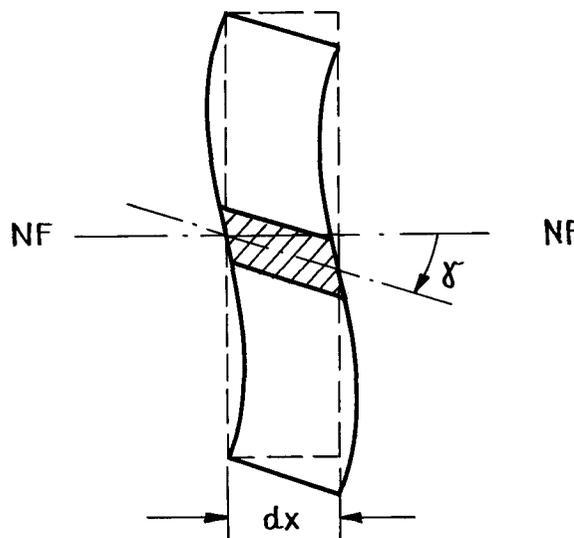


Abb. 2

Da die Belastung nicht von der Verschiebung abhängt und keine Reibungskräfte einwirken, liegt ein konservatives System vor. Demnach gilt das HAMILTON'sche Prinzip in der Form (50). Aus der Sicht der Variationsrechnung lautet die Aufgabe: Das Zeitintegral über die LAGRANGE'sche Funktion L , auch Funktional genannt, muß stationär gemacht werden. Wir gehen von Gl. (50) aus :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W - K + U) dt = 0. \quad (55)$$

Die Formänderungsenergie W setzt sich aus einem Biegeanteil W_B und einem Schubanteil W_S zusammen :

$$W_B = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (56)$$

$$W_S = \frac{1}{2} \int_0^l \beta AG \gamma^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l b \gamma^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l b \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right)^2 dx. \quad (57)$$

(56) folgt aus der elementaren Biegetheorie, mit EI als Biegesteifigkeit. Die durch die Schubspannungen gespeicherte Energie je Längeneinheit berechnet sich durch Integration der jeweils vorliegenden Schubspannungsverteilung über dem Querschnitt A . Das Ergebnis hängt von der Querschnittsform ab. Es kann in der Form $\beta AG \gamma^2$ auf den Scherwinkel γ für das Querschnittselement in der NF zurückgeführt werden, man vergl. Abb. 2 und Gl. (54). Dabei berücksichtigt der Faktor β die unterschiedlichen Querschnittsformen. Für Rechteckquerschnitte beträgt $\beta = 8/15$. Im folgenden rechnen wir mit der rechten Seite von Gl. (57) und der Abkürzung $b = b(x) = \beta A(x)G$.

Die kinetische Energie K ergibt sich aus der Geschwindigkeit des Balkenlängenelements dx in y -Richtung $\partial y / \partial t$ und aus seiner Winkelgeschwindigkeit $\partial \varphi / \partial t$ um die neutrale Linie des Querschnitts senkrecht zur Lastebene $x-y$, Abb. 1. Es ergibt sich:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\ell} m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\ell} I_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (58)$$

mit $m = \rho A$ als Masse je Längeneinheit und $I_m = \rho I$ als axialem Massenträgheitsmoment je Längeneinheit, bezogen auf die neutrale Linie des Querschnitts.

Das Potential U , hervorgerufen durch die äußeren Belastungen, berechnet sich in Anlehnung an (48) und unter Beachtung der Querkräfte und Momente an den Balkenenden wie folgt :

$$U = - \int_{\sigma}^{\ell} p(x,t) y(x,t) dx + M_{\ell} \varphi_{\ell} - M_{\sigma} \varphi_{\sigma} + Q_{\ell} y_{\ell} - Q_{\sigma} y_{\sigma}. \quad (59)$$

Einsetzen von (56) bis (59) in (55) ergibt :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\sigma}^{\ell} \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right)^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} I_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - py \right] dx + M_{\ell} \varphi_{\ell} - M_{\sigma} \varphi_{\sigma} + Q_{\ell} y_{\ell} - Q_{\sigma} y_{\sigma} \right\} dt = \sigma. \quad (60)$$

Wie ersichtlich, hängt das Funktional von den Funktionen $\varphi(x,t)$ und $y(x,t)$ ab. Folglich muß der in Gl. (60) vorgeschriebene δ -Prozeß auf diese beiden Funktionen angewendet werden. Die Ausführung der Variation nach φ und y liefert :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\sigma}^{\ell} \left[EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + b \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \delta \varphi \right) - m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} - I_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} - p \delta y \right] dx + M_{\ell} \delta \varphi_{\ell} - M_{\sigma} \delta \varphi_{\sigma} + Q_{\ell} \delta y_{\ell} - Q_{\sigma} \delta y_{\sigma} \right\} dt = \sigma. \quad (61)$$

Die einzelnen Integranden werden jetzt partiell integriert. Dabei ist nach Gl. (42) zu beachten, daß die virtuellen Verschiebungen am

Die Gln. (64) und (65) sind die EULER'schen Differentialgleichungen des vorliegenden Variationsproblems. Es handelt sich um die problemorientierten Differentialgleichungen, also um die gesuchten Bewegungsgleichungen zur Bestimmung von $\varphi(x,t)$ und $y(x,t)$. Die Gln. (66) und (67) sind die an den Balkenenden zu erfüllenden Randbedingungen.

Die Gln. (64) und (65) heißen auch TIMOSHENKO-Bewegungsgleichungen. Sie beschreiben die Biegeschwingungen eines Balkens unter Berücksichtigung der Rotationsträgheit und der Schubverformung der Balkenquerschnitte.

Für einen Balken mit konstantem Querschnitt hängen EI , b , I_m und m nicht von x ab. In diesem Falle läßt sich $\varphi(x,t)$ aus (64) und (65) eliminieren, und man erhält die TIMOSHENKO-Gleichung für $y(x,t)$:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(I_m + \frac{EI m}{b} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + I_m \frac{m}{b} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \\ = p + \frac{I_m}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{EI}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} . \end{aligned} \quad (68)$$

Die Bewegungsgleichung für die freien Biegeschwingungen erhält man aus (68) mit $p(x,t) = 0$.

Für $b = \beta AG \rightarrow \infty$ unterbleibt die Schubverformung, und (68) geht in die Bewegungsgleichung

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - I_m \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = p(x,t) \quad (69)$$

über. (69) heißt auch RAYLEIGH'sche Gleichung. In ihr ist die Rotationsträgheit der Querschnitte noch berücksichtigt. Vernachlässigt man auch diese, so folgt mit $I_m = 0$ aus (69):

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x,t). \quad (70)$$

Dies ist die elementare Bewegungsgleichung für die Biegeschwingungen eines Balkens mit konstantem Querschnitt. Mit $p(x,t) = 0$ ergibt sich aus (70) die Bewegungsgleichung für Biege-Eigenschwingungen.

9.2 Die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen

9.2.1 Generalisierte Koordinaten und generalisierte Geschwindigkeiten ³⁾

Wir betrachten ein System von zwei Massenpunkten, die durch einen festen Abstand miteinander gekoppelt sind. Der erste Massenpunkt ist mit drei Freiheitsgraden frei beweglich, der zweite wird auf der durch den festen Abstand vorgegebenen Kugeloberfläche geführt und hat zwei Freiheitsgrade. Das System verfügt insgesamt über fünf (statt sechs) Freiheitsgrade. Demnach kann man seine Lage (Konfiguration) durch fünf voneinander unabhängige Koordinaten vollständig beschreiben.

Bei n Massenpunkten, die durch r Bindungen zwischen ihren Koordinaten gekoppelt sind, ist die Anzahl der Freiheitsgrade f :

$$f = 3n - r. \quad (71)$$

Demnach kann der Satz von $3n$ Ortskoordinaten x_i durch einen Satz von $(3n - r)$ unabhängigen Koordinaten q_i ersetzt werden :

$$\left\{ x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n \right\} \longrightarrow \left\{ q_1, q_2, \dots, q_f \right\}. \quad (72)$$

Man nennt q_i allgemeine oder generalisierte Koordinaten und ihre Ableitungen \dot{q}_i nach der Zeit t generalisierte Geschwindigkeiten. Bei den q_i kann es sich um Strecken, Winkel oder daraus abgeleitete Größen handeln.

Die Konfiguration eines Systems wird durch die f unabhängigen generalisierten Koordinaten q_i eindeutig beschrieben.

Jede Ortskoordinate x_i zu einem Systempunkt ist als Funktion der f unabhängigen generalisierten Koordinaten darstellbar :

³⁾ In der analytischen Mechanik verwendet man generalisierte Koordinaten. Dementsprechend werden auch die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen allgemein in diesen Koordinaten formuliert. Aus diesem Grunde wird der Ableitung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen hier eine kurze Einführung über generalisierte Koordinaten vorangestellt, in der die Begriffe rheonomes, skleronomes, holonomes und nichtholonomes System erläutert werden. Eine ausführliche Behandlung findet man in den Kapiteln über analytische Mechanik, z.B. /6/, /9/, /12/, /14/, /15/, /16/, /17/.

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \text{ rheonom.} \quad (73)$$

Das durch (73) beschriebene System heißt rheonom, da die x_i von der Zeit explizit abhängen. In solchen Fällen sind die Systemführungen zeitabhängig (nichtstationäre Bindungen). Für das oben genannte Beispiel wäre dann der Abstand zwischen den zwei Massenpunkten eine Funktion der Zeit.

Meistens hat man es mit skleronomen Systemen zu tun. Dann sind die vorgegebenen Führungsbedingungen fest, also unabhängig von t (stationäre Bindungen). Dann gilt für die Ortskoordinaten x_i zu einem Systempunkt :

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_f), \text{ skleronom.} \quad (74)$$

Die r Bindungen eines Systems führen zu r unabhängigen Bindungsgleichungen. Für ein rheonomes n -Teilchensystem kann man die Bindungsgleichungen in der Form

$$g_j(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n, t) = \sigma, \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (75)$$

und für ein skleronomes n -Teilchensystem in der Form

$$g_j(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n) = \sigma, \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (76)$$

darstellen.

Als Beispiel betrachten wir ein skleronomes System von drei Massenpunkten 1, 2 und 3 ($n = 3$), die durch stationäre Abstände a_{12} , a_{23} und a_{31} miteinander gekoppelt sind ($r = 3$, a_{12} = Abstand zwischen 1 und 2 usw.). Das System hat nach Gl. (71) sechs (statt neun) Freiheitsgrade, und es bestehen nach Gl. (76) $r = 3$ Bindungsgleichungen (Zwangsbedingungen). Diese lauten:

$$\begin{aligned} g_1(x_i^1, x_i^2) &= \left| \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + (x_3^1 - x_3^2)^2} \right| - a_{12} = \sigma, \\ g_2(x_i^2, x_i^3) &= \left| \sqrt{(x_1^2 - x_1^3)^2 + (x_2^2 - x_2^3)^2 + (x_3^2 - x_3^3)^2} \right| - a_{23} = \sigma, \\ g_3(x_i^3, x_i^1) &= \left| \sqrt{(x_1^3 - x_1^1)^2 + (x_2^3 - x_2^1)^2 + (x_3^3 - x_3^1)^2} \right| - a_{31} = \sigma. \end{aligned} \quad (77)$$

Ein System, dessen Führungsbedingungen sich in der Form (75) oder (76) darstellen läßt, wird holonom genannt. Entsprechend bezeichnet man die Gln. (75) und (76) auch als holonome Bindungsgleichungen. Das System nach Gl. (75) ist rheonom und holonom, das System nach Gl. (76) ist skleronom und holonom.

Treten in den Bindungsgleichungen Differentialbeziehungen auf, die sich auch durch Integration nicht auf die Formen (75) oder (76) zurückführen lassen, so heißt das System nichtholonom. Nichtholonome Systeme treten nur sehr selten auf. Das klassische Beispiel für ein nichtholonomes System ist die Bewegung einer Schneide auf einer Fläche /6/.

Im folgenden betrachten wir nur holonome Systeme.

9.2.2 Ableitung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen für holonome n-Massensysteme

Mit Hilfe der holonomen Bindungsgleichungen (75) bzw. (76) seien alle überzähligen Koordinaten eliminiert. Dann wird die Konfiguration eines Systems durch f unabhängige generalisierte Koordinaten q_k vollständig beschrieben, und es gelten für die Ortskoordinaten x_i zu einem Systempunkt die Gln. (73) bzw. (74). Wir betrachten zunächst das allgemeinere rheonome System und schreiben Gl. (73) in der Form:

$$x_i = x_i(q_k, t), \quad \begin{array}{l} (k = 1, 2, \dots, f), \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{array} \quad (78)$$

Daraus ergeben sich die realen Geschwindigkeiten $\dot{x}_i = dx_i/dt$ der Körperpunkte :

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} . \quad (79)$$

Wie ersichtlich, sind die Geschwindigkeiten \dot{x}_i Funktionen der generalisierten Koordinaten q_k , der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_k und der Zeit t :

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q_k, \dot{q}_k, t) . \quad (80)$$

Die kinetische Energie des Gesamtsystems berechnet sich demnach wie folgt:

$$\begin{aligned}
 K(q_k, \dot{q}_k, t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right]^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \\
 &\qquad\qquad\qquad (k, \ell = 1, 2, \dots, f).
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

rheonom

Für ein System mit skleronomen Bindungen gilt nach Gl. (74)

$x_i = x_i(q_k)$, und der Term $\partial x_i / \partial t$ verschwindet. Nach (81) ist die kinetische Energie dann eine homogene Form zweiten Grades in den generalisierten Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
 K(q_k, \dot{q}_k) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell \\
 &= a_{k\ell} \dot{q}_k \dot{q}_\ell, \\
 a_{k\ell} &= a_{\ell k} \quad \text{und} \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, f).
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

skleronom

In den Gln. (81) und (82) bedeutet M_i die i -te Masse des n -Teilchensystems.

Für konservative Systeme existiert stets ein Potential der Form ⁴⁾

$$U = U(q_k, t).
 \tag{83}$$

⁴⁾ Meist findet man $U = U(q_k)$. Eine Abhängigkeit von der Zeit ist aber allgemeiner. So ergibt sich z.B. durch die Einwirkung einer zeitabhängigen Erregerfunktion auch ein zeitabhängiges Potential U . Man vergl. dazu die Gl. (59) im Abschn. 9.1. Die potentielle Energie U hängt nicht von \dot{q}_k ab. Eine Ausnahme ergibt sich für die LORENTZ-Kraft in der Elektrodynamik /14//17//18/.

Dann ergeben sich die den generalisierten Koordinaten zugeordneten generalisierten Kräfte Q_k aus

$$Q_k = - \frac{\partial U(q_k, t)}{\partial q_k} . \quad (84)$$

Wir betrachten im folgenden ein konservatives System starrer Körper mit rheonomen oder skleronomen Bindungen. Dann ist $W = 0$ und die LAGRANGE'sche Funktion L lautet nach Abschnitt 8 und mit den Gln. (81) und (83):

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = K(q_k, \dot{q}_k, t) - U(q_k, t) . \quad (85)$$

Das HAMILTON'sche Extremalprinzip nach den Gln. (52) bzw. (53) lautet unter Beachtung von (85):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_k, \dot{q}_k) dt = \sigma . \quad (86)$$

Die Ausführung der Variation liefert:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] dt = \sigma . \quad (87)$$

Partielle Integration des zweiten Integranden ergibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt . \quad (88)$$

Es gilt die Bedingung (42), nämlich $\delta q_k(t_0) = \delta q_k(t_1) = 0$. Damit verschwindet der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (88). Einsetzen von (88) in (87) führt demnach auf:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt = \sigma . \quad (89)$$

Da die generalisierten Koordinaten q_k voneinander unabhängig sind, können sie auch unabhängig voneinander variiert werden. Ferner sind die virtuellen Änderungen δq_k (bis auf die Zeitpunkte t_0 und t_1) beliebig. Daher gilt die Extremalforderung (89) nur dann, wenn der Integrand verschwindet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sigma, \quad (k = 1, 2, \dots, f). \quad (90)$$

Die Gln. (90) sind die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen zweiter Art. Sie gelten für konservative holonome Systeme. Die Systembindungen können dabei vom rheonomen oder skleronomen Typ sein.

Treten z.B. Reibungskräfte auf, ist das System nicht mehr konservativ. In diesem Falle geht man vom HAMILTON'schen Prinzip in der Formulierung (47) aus. Am Ende von Abschnitt 8 wurde auf diese Möglichkeit bereits hingewiesen.

Auf der rechten Seite von Gl. (47) steht die virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte, die wir jetzt für das nichtkonservative System als δU bezeichnen wollen. Mit $W = 0$ ergibt sich dann aus (47):

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta K(q_k, \dot{q}_k) + \delta U \right] dt = \sigma. \quad (91)$$

Bezeichnet man mit F_i die eingepprägten Kräfte, kann die virtuelle Arbeit derselben allgemein durch

$$\delta U = F_i \delta x_i \quad (92)$$

gekennzeichnet werden, wobei die δx_i aus Gl. (78) wie folgt berechnet werden:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (93)$$

Da die virtuellen Verschiebungen bei festgehaltener Zeit ausgeführt werden (die Zeit t wird nicht variiert), tritt der Term $(\partial x_i / \partial t) \delta t = 0$ in (93) nicht auf. Aus (92) und (93) folgt:

$$\delta U = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = Q_k \delta q_k, \quad (94)$$

mit Q_k als die auf die generalisierten Koordinaten q_k bezogenen generalisierten Kräfte. Dabei gilt für die Q_k in nichtkonservativen Systemen allgemein $Q_k = Q_k(q_k, \dot{q}_k, t)$. Einsetzen von (94) in (91) führt auf

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta K(q_k, \dot{q}_k) + Q_k \delta q_k \right] dt = \sigma. \quad (95)$$

Die Ausführung der Variation liefert:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial K}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + Q_k \delta q_k \right] dt = \sigma. \quad (96)$$

Die partielle Integration des zweiten Integranden ergibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt. \quad (97)$$

(97) in (96) eingesetzt führt auf:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q_k \right] \delta q_k dt = \sigma. \quad (98)$$

Die δq_k sind beliebig, daher folgt aus (98):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, \dots, f). \quad (99)$$

Die Gln. (99) sind die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen zweiter Art für nichtkonservative holonome Systeme mit rheonomen oder skleonomen Führungsbedingungen.

Treten im System Kräfte auf, die zum Teil aus einem Potential

$U = U(q_k, t)$ ableitbar sind und zum Teil nicht (z.B. Reibungskräfte), kann man unter Beachtung von Gl. (84) die Gl. (99) in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) = Q_k \quad (100)$$

schreiben. Da U nicht von \dot{q}_k abhängt, folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k=1, 2, \dots, f), \quad (101)$$

mit der LAGRANGE'schen Funktion $L = K - U$, wobei für die Formulierung der generalisierten Kräfte Q_k nur die nichtkonservativen Kräfte nach Gl. (94) in Frage kommen. Die Gln. (101) werden auch allgemeine LAGRANGE'sche Bewegungsgleichungen genannt. Sie gelten für holonome Systeme mit rheonomen oder skleronomen Systembedingungen.

10. Der Erhaltungssatz der Energie

Wir betrachten ein skleronomes System für den Fall, daß das Potential U nicht explizit von t abhängt. Mit den Gln. (82) und (85) gilt dann für die LAGRANGE'sche Funktion $L = L(q_k, \dot{q}_k)$. Die Ableitung nach der Zeit liefert:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k. \quad (102)$$

Aus Gl. (90) folgt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (103)$$

Einsetzen in (102) ergibt:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right). \quad (104)$$

Gl. (104) kann in der Form

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - L \right] = \sigma \quad (105)$$

geschrieben werden. Aus (105) folgt das sogenannte Energieintegral:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{konst.} \quad (106)$$

Da U nicht explizit von \dot{q}_k abhängt, man vergl. (83) und die Fußnote ⁴), gilt :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k . \quad (107)$$

Für zeitunabhängige Systembindungen ist die kinetische Energie K nach Gl. (82) eine homogene Funktion zweiten Grades:

$$K = a_{ke} \dot{q}_k \dot{q}_e . \quad (108)$$

Daraus folgt durch Ableitung nach den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_k :

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = a_{ke} \left(\dot{q}_k \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_e \right) = a_{ke} \left(\dot{q}_k \delta_{ke} + \dot{q}_e \right) = 2 a_{ke} \dot{q}_e . \quad (109)$$

Einsetzen in (107) liefert:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2 a_{ke} \dot{q}_e \dot{q}_k = 2K . \quad (110)$$

Dieses Ergebnis findet man auch aus dem EULER'schen Satz über homogene Funktionen /12/. Einsetzen von Gl. (110) in Gl. (106) ergibt:

$$2K - L = 2K - (K - U) = K + U = \text{konst.} \quad (111)$$

Wie ersichtlich, ist die Gesamtenergie des Systems konstant.

11. Schlußbemerkung

Das HAMILTON'sche Extremalprinzip ist das Variationsproblem der Elastodynamik. Es vereinigt in sich die grundlegenden Differentialgleichungen. In dieser Eigenschaft kann es, ähnlich wie das Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials in der Elastostatik /2/, unter Umgehung der problemorientierten Differentialgleichungen als Basis für numerische Näherungsverfahren eingesetzt werden.

Außerdem lassen sich aus dem HAMILTON'schen Prinzip die Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems verhältnismäßig einfach ableiten. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit an zwei Beispielen aufgezeigt. Einmal wurde das HAMILTON'sche Extremalprinzip zur Ableitung der TIMOSHENKO-Bewegungsgleichung für Balkenbiegeschwingungen herangezogen. Zum anderen diente es als Ausgangspunkt für die Entwicklung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen für konservative und nicht-konservative holonome Systeme mit rheonomen und skleronomen Systembindungen.

Schrifttum

- /1/ Schimmöller, H.: Vorlesungen über Elastizitätstheorie. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Vorlesungsmanuskript 1989.
- /2/ Schimmöller, H.: Das Variationsproblem der Elastostatik. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 489, Mai 1989.
- /3/ Duschek, A. und A. Hochrainer: Tensorrechnung in analytischer Darstellung.
I. Teil : Tensoralgebra, 1960.
II. Teil : Tensoranalysis, 1961.
III. Teil : Anwendungen in Physik und Technik, 1965.
Springer-Verlag, Wien/New York.
- /4/ Päsler, M.: Mechanik deformierbarer Körper. Walter De Gruyter u. Co., Berlin, 1960.
- /5/ Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. Band II, Mechanik der deformierbaren Medien. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964.
- /6/ Hamel, G.: Theoretische Mechanik. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
- /7/ Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960.
- /8/ Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik IV: Schwingungen, Variationsprinzip. Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- /9/ Scheck, F.: Mechanik: Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/London/Paris/Tokyo, 1988.
- /10/ Saada, A.S.: Elasticity, Theory and Applications. Pergamon Press Inc., New York/Toronto/Oxford/Sydney/Braunschweig, 1974.
- /11/ Hahn, H.G.: Elastizitätstheorie. G.B. Teubner, Stuttgart, 1985.
- /12/ Duschek, A.: Vorlesungen über höhere Mathematik. 3. Band: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer-Verlag, Wien, 1953.
- /13/ Fung, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- /14/ Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. Band I, Mechanik. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964.

- /15/ Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik III: Kinetik.
Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1983.
- /16/ Pöschl, Th.: Einführung in die analytische Mechanik.
Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe, 1949.
- /17/ Pestel, E.: Technische Mechanik. 3. Band: Kinematik und
Kinetik, 2. Teil. Bibliographisches Institut, Mannheim/
Wien/Zürich, 1971.
- /18/ Ziegler, F.: Technische Mechanik der festen und flüssigen
Körper. Springer-Verlag, Wien/New York, 1985.
- /19/ Wieghardt, K.: Zur Theorie der Wirbelbewegungen.
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,
Bd. 22, Nr. 1, 1942, S. 59/60.