

309 | Oktober 1974

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

W. Bauschke, L. Lederer

Zur numerischen Berechnung der
Druckverteilung und der Kräfte an
Propellern im Schiffsnachstrom

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Zur numerischen Berechnung der Druckverteilung und der Kräfte an Propellern im Schiffsnachstrom

W. Bauschke, L. Lederer, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1974

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg
<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 309

Zur numerischen Berechnung der Druckverteilung
und der Kräfte an Propellern im Schiffsnachstrom

W.Bauschke

L.Lederer

Hamburg, Oktober 1974

I n h a l t

Übersicht

Kap.1	Potentialtheoretische Grundlagen	1
1a.	Einleitung	1
1b.	Überblick über die Tragflächentheorie	1
1c.	Die Quell-Senken Verteilung	4
Kap.2	Das Lösungsverfahren zur Berechnung der Wirbeldichte	5
Kap.3	Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten und die Berechnung des Druckfeldes am Propellerblatt	7
Kap.4	Übersicht über das Programmsystem und numerische Einzelheiten	11
4a.	Das Programmsystem	11
4b.	Die Behandlung der Singularitäten der Integrale	15
4c.	Lösungskontrolle	17
Kap.5	Durchgeführte Rechnungen und Ergebnisse	20
5a.	Der Göttinger Propeller	20
5b.	Der ITTC-Propeller	22
5c.	Zirkulationsdichte, Schub und Drehmoment der beiden Propeller im ITTC-Nachstrom	23
5d.	Druckbeiwerte und Kavitationsverhalten des Göttinger Propellers im ITTC-Nachstrom	24
	Literatur	26
	Anhang	27

Übersicht

In diesem Institutsbericht wird ein numerisches Verfahren zur Berechnung der instationären Kräfte und Drücke an Schiffspropellern vorgestellt. Es wird ein kurzer Überblick über die benutzten potentialtheoretischen Grundlagen (instationäre Tragflächentheorie bei Berücksichtigung der Dicke) gegeben. Das bereits vorliegende Programmsystem (Klingsporn 1971, (2)) zur Berechnung der instationären Wirbeldichte wurde weiter ausgebaut, es sind jetzt eine Kontrolle der Rechnungen auf ihre innere Konsistenz, die Berechnung der instationären Kräfte am Propeller und die Berechnung der instationären Drücke auf dem Blatt über die Bernoulli-gleichung möglich. Der Bericht gibt eine Darstellung der angewandten numerischen Techniken und des gesamten Programmsystems.

Nach dem geschilderten Verfahren wurden die instationären Wirbelbelegungen und Kräfte für zwei Propeller für einen vorgegebenen Nachstrom ermittelt. In Hinblick auf eine geplante Messung an der AVA in Göttingen wurden dann für einen dieser Propeller die instationären Druckbeiwerte ausgerechnet. Das sich nach den Rechnungen ergebende Kavitationsverhalten dieses Propellers für die ursprünglichen Entwurfsdaten wird dann kurz diskutiert. Ein umfangreicher Anhang dokumentiert die Ergebnisse.

Abstract

In this paper a numerical method of calculating unsteady forces and pressure on screw propellers is introduced. A short review of the used ideas and formulas of potential theory (unsteady lifting surface theory with taking the effect of thickness into consideration) is given. The existing program system (Klingsporn, (2)) for the calculation of the vortex distribution was completed, it is now possible to control the calculations on their interior consistency and to calculate the unsteady forces on the propeller as well as the unsteady pressure on the blade by help of the Bernoulli equation. The paper presents the employed numerical techniques and the complete program system.

Using the described methods, for two propellers and a given wake the unsteady vortex distributions and the unsteady forces were calculated. With regard to a projected measurement at the AVA in Göttingen the unsteady pressure of one propeller was computed. Following the calculations, the predicted cavitation of the original marine screw is discussed. The results are documented in an extensive appendix.

Kap.1 : Potentialtheoretische Grundlagen

=====

1a) Einleitung

Bei instationär angeströmten Propellern, wie sie zum Beispiel im Nachstrom eines Schiffes vorhanden sind, sind zwei Probleme bis heute aus theoretischer Sicht noch nicht zufriedenstellend gelöst. So war es bislang nicht möglich, verlässliche Prognosen über die instationär auftretenden Belastungen zu treffen, und es war ebenfalls nicht möglich, die zur Beurteilung von Kavitationseigenschaften nötigen Druckbeiwerte zu berechnen. Im Rahmen einer potentialtheoretischen Näherung lassen sich mit der instationären Tragflächentheorie (siehe Kap.1b) und bei Berücksichtigung der endlichen Dicke des Propellers (siehe 1c) diese Vorhersagen treffen, wenn auch der Rechenaufwand dazu recht beträchtlich ist. Eine geschlossene und sehr allgemeine Darstellung der Tragflächentheorie findet sich bei Isay (1), der unseren Rechnungen zugrundeliegende Sonderfall dieser Theorie soll im folgenden kurz dargestellt werden.

1b) Überblick über die Tragflächentheorie

Nach (1) belegen wir die Fläche des Propellers mit radial gerichteten Wirbeln, die mit den dazugehörigen Quer- und Längswirbeln eine Lösung der Laplaceschen Potentialgleichung sind. Die zur Beschreibung der Vorgänge am Propellerblatt nötigen Koordinaten werden dabei in folgender Weise gewählt:

s, r : Radius

R_0 : Außenradius

R_i : Innenradius

Geometrie des Blattes: reguläre Schraubenfläche mit $r \tan \beta =$

$k_1 = \text{const.}$, $\beta =$ Steigungswinkel der Sehne

x : Axialkomponente

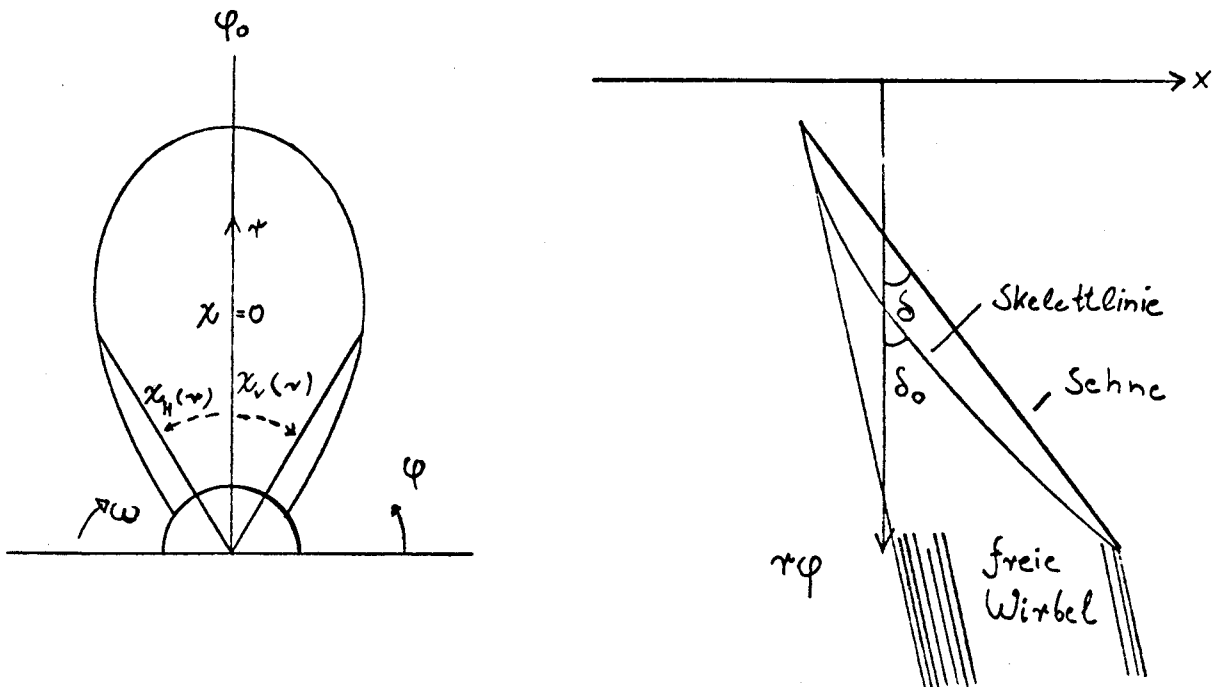
χ : Winkelkoordinate bei Projektion des Punktes

in die Ebene $x=0$, in Bezug auf die Mittellinie des Blattes

$\chi_v(\tau)$: Winkelkoordinate der Vorderkante

$\chi_H(\tau)$: Winkelkoordinate der Hinterkante

- φ_0 : Winkelkoordinate der Mittellinie des Aufpunktflügels
 φ_n : Winkelkoordinaten der Nebenflügel
 (r, χ^*, φ_0) : Aufpunktkoordinaten
 ω : Winkelgeschwindigkeit des Propellers
 M_x, M_y, M_r : Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten
 u, v, w : Geschwindigkeiten in Zylinderkoordinaten
 M_x, M_y, M_z : Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten
 Geometrie der freien Wirbelflächen : reguläre Schraubenfläche
 mit k_0 als Steigungsparameter , $M_f = M_x \cdot (k_0 \psi + k_1 \chi) + M_y \cdot s \cos(\varphi_n + \chi + \psi) + M_z \cdot s \cdot \sin(\varphi_n + \chi + \psi)$
 $0 \leq \psi < \infty$: Winkelparameter der freien Wirbelflächen
 $\gamma^*(s, \chi, \varphi_n)$: Wirbeldichte auf dem Propellerblatt
 $\gamma^*(s, \chi, \varphi_n) = \gamma(s, \chi, \varphi_n) \cdot \sqrt{s^2 + k_1^2}$



Für die von den gebundenen Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten ergibt sich dann nach dem Biot-Savartschen Gesetz für Aufpunkte auf dem Blatt :

$$\eta_{\chi_m}(\tau, \chi^*, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\chi_n(s)}^{\chi_n(s_0)} \gamma^*(s, \chi, \varphi_n) [k_0^2 (\chi^* - \chi)^2 + \tau^2 s^2 - 2\tau s \cos \theta]^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

mit $\theta = \chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N}$

$$\cdot \{u_x \tau \sin \theta - u_y k_0 (\chi^* - \chi) \cos \theta - u_r k_0 (\chi^* - \chi) \sin \theta\} d\chi ds$$

Dieser Ausdruck berücksichtigt nicht die Diskontinuität der Tangentialgeschwindigkeit am Blatt, die sich aus der Belegung mit einer Wirbelschicht ergibt.

Die freien Querwirbel setzen sich zusammen aus einer kontinuierlichen Wirbelverteilung (resultierend aus der veränderlichen Wirbelstärke über r) und einem diskreten Anteil, ausgehend von der Vorderkante, da wir im Ansatz für die Wirbelbelegung (siehe Gl.8) an der Vorderkante eine endliche Wirbeldichte zulassen werden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_a(\tau, \chi^*, \varphi_0) &= \mathcal{M}_{\text{KONT.}} + \mathcal{M}_{\text{DISKRET}} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_o} \int_{\chi_n(s)}^{\chi_{n+1}(s)} \int_{\psi=0}^{\infty} \frac{\partial \gamma^*}{\partial s}(s, \chi, \varphi_n + \psi) [(k_1 \chi^* - k_1 \chi - k_0 \psi)^2 + \tau^2 + s^2 - 2\tau s \cos \theta]^{-\frac{3}{2}} \\
 &\quad \cdot \left\{ \mathcal{M}_x [\tau s \cos \theta - s^2] + \mathcal{M}_\varphi [(k_1 \chi^* - k_1 \chi - k_0 \psi) s \sin \theta - k_0 (\tau - s \cos \theta)] + \mathcal{M}_\tau [-(k_1 \chi^* - k_1 \chi - k_0 \psi) s \cos \psi \right. \\
 &\quad \left. + k_0 s \sin \theta] \right\} d\psi d\chi ds - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_o} \int_{\psi=0}^{\infty} \gamma^*(s, \chi_n(s), \varphi_n + \psi) [(k_1 \chi^* - k_1 \chi_n(s) - k_0 \psi)^2 + \tau^2 + s^2 - 2\tau s \cos \theta_n]^{-\frac{3}{2}} \\
 &\quad \left\{ \mathcal{M}_x [\tau s \cos \theta_n - s^2] + \mathcal{M}_\varphi [(k_1 \chi^* - k_1 \chi_n(s) - k_0 \psi) s \sin \theta_n - k_0 (\tau - s \cos \theta_n)] + \mathcal{M}_\tau [-(k_1 \chi^* - k_1 \chi_n(s) - k_0 \psi) s \cos \psi \right. \\
 &\quad \left. + k_0 s \sin \theta_n] \right\} \chi'_n(s) d\psi ds \quad \text{mit } \theta = \chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N} - \psi, \quad \theta_n = \chi^* - \chi_n(s) - \frac{2\pi n}{N} - \psi
 \end{aligned} \tag{2}$$

Zu berücksichtigen ist weiter noch der von den freien Längswirbeln induzierte Geschwindigkeitsanteil. Nach (1) ergibt sich der folgende Ausdruck für Punkte auf dem Flügel :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_L(\tau, \chi^*, \varphi_0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_o} \int_{\chi_n(s)}^{\chi_{n+1}(s)} \int_{\psi=0}^{\infty} \frac{\partial \gamma^*}{\partial \psi}(s, \chi, \varphi_n + \psi) [(k_1 \chi^* - k_1 \chi - k_0 \psi)^2 + \tau^2 + s^2 - 2\tau s \cos \theta]^{-\frac{3}{2}} \\
 &\quad \cdot \left\{ \mathcal{M}_x [\tau \sin \theta] + \mathcal{M}_\varphi [-(k_1 \chi^* - k_1 \chi - k_0 \psi) \cos \theta] + \mathcal{M}_\tau [-(k_1 \chi^* - k_1 \chi - k_0 \psi) \sin \theta] \right\} d\psi d\chi ds
 \end{aligned} \tag{3}$$

1c) Die Quell-Senken-Verteilung

Die im Kapitel 1b) verwendete Wirbelbelegung bildet das mathematische Modell für den Auftrieb eines "unendlich" dünnen Propellerflügels. In Wirklichkeit treten aber durch die endliche Dicke Verdrängungseffekte auf. Diese werden durch eine zusätzliche Quell-Senken-Verteilung $q(s, \chi)$ erfaßt, die mit der Profildicke $D(s, \chi)$ nach der Theorie dünner Tragflügel in folgender Weise zusammenhängt:

$$q(s, \chi) = \sqrt{\frac{U_0^2 + \omega^2 s^2}{s^2 + k_i^2}} \frac{\partial D(s, \chi)}{\partial \chi} \quad (4)$$

Zu beachten ist, daß die Schließungsbedingung erfüllt ist.

$$\int_{\chi_v(s)}^{\chi_H(s)} q(s, \chi) d\chi = 0 \quad (4.1)$$

Das von der Quell-Senken-Verteilung induzierte Geschwindigkeitsfeld auf den Propellerflügeln lautet dann:

$$v)_a = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\chi_v(s)}^{\chi_H(s)} \int_{R_i}^{R_o} q(s, \chi) \cdot \sqrt{s^2 + k_i^2} \cdot [k_i^2 (\chi^2 - \chi_i^2) + \tau^2 s^2 - 2\tau s \cos \theta]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \mu_r [k_i (\chi^2 - \chi_i^2)] + \mu_\theta s \cdot \sin \theta + \mu_\tau [\tau - s \cos \theta] \right\} d\chi ds \quad (4.2)$$

Dieses wird dem aus der Zirkulationsverteilung berechnetem Geschwindigkeitsfeld überlagert. Der Integrand in (4.2) wird ist zwar für Aufpunkte auf dem Propellerblatt singulär, das Integral existiert aber für nicht auf dem Rande liegende Aufpunkte. (6)

**Kap.2 : Das Lösungsverfahren zur Berechnung der
 =====
 Wirbeldichte
 =====**

Während bei der von uns verwandten Näherung die Stärke der Quell-Senkenbelegung sich unmittelbar aus der Beziehung (4) ergibt, ist zur Bestimmung der Wirbeldichte $\gamma^*(s, x, \varphi_n)$ ein kompliziertes numerisches Verfahren nötig. Das Nachstromfeld des Schiffes, in dem der zu berechnende Propeller arbeitet, sei bekannt :

$$w(x, r, \varphi) = u_0 [w_x(1 + \Lambda_x(x, r, \varphi)) + w_\varphi \Lambda_\varphi(x, r, \varphi) + w_r \Lambda_r(x, r, \varphi)] \quad (5)$$

Es sei weiter $\delta_0(r, x^*)$ im Zylinderschnitt $r = \text{const.}$ der Winkel zwischen Flügelskelettlinie und der $r\varphi$ -Achse. Die Wirbeldichte wird dann durch die Randbedingung bestimmt :

$$\text{tg } \delta_0(r, x^*) = \frac{u_0 + u_0 \Lambda_x(k, x^*, r, \varphi_0 + x^*) + \sum u_{\text{ind}}(r, \varphi_0, x^*)}{\omega r + u_0 \Lambda_\varphi(k, x^*, r, \varphi_0 + x^*) + \sum v_{\text{ind}}(r, \varphi_0, x^*)} \quad (6)$$

Diese Bedingung muß für alle Punkte des Flügels (r, x^*) und für alle Flügelstellungen erfüllt sein. Durch Umformung ergibt sich :

$$\begin{aligned} \text{tg } \delta_0(r, x^*) \cdot [\omega r + u_0 \Lambda_\varphi(k, x^*, r, \varphi_0 + x^*) + v_q(r, \varphi_0, x^*)] - u_0 (1 + \Lambda_x(k, x^*, r, \varphi_0 + x^*)) \\ - u_q(r, \varphi_0, x^*) = \sum^\gamma u_{\text{ind}}(r, \varphi_0, x^*) - \text{tg } \delta_0(r, x^*) \sum^\gamma v_{\text{ind}}(r, \varphi_0, x^*) \end{aligned} \quad (7)$$

(\sum^γ : Summation nur über die von der Wirbelbelegung induzierten Geschwindigkeiten)

Nach Klingsporn^{*} (2) setzen wir die Wirbelbelegung in Form einer komplexen Fourierreihe an (in den ausgeführten Rechnungen wurden die ersten sechs Glieder berücksichtigt)

$$\begin{aligned} \gamma^*(s, x, \varphi_0) = \sum_{\mu=-M}^M \gamma_\mu^*(s, x) e^{i\mu\varphi_0} \quad \text{daraus ergibt sich: } \gamma^*(s, x, \varphi_n) = \sum_{\mu=-M}^M e^{i\mu\varphi_0} e^{i\mu \frac{2\pi n}{N}} \gamma_\mu^*(s, x) \\ \frac{\partial \gamma^*}{\partial s}(s, x, \varphi_n + \varphi) = \sum_{\mu=-M}^M e^{i\mu\varphi_0} e^{i\mu(\frac{2\pi n}{N} + \varphi)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \gamma_\mu^*(s, x) \\ \frac{\partial \gamma^*}{\partial \varphi}(s, x, \varphi_n + \varphi) = \sum_{\mu=-M}^M i\mu e^{i\mu\varphi_0} e^{i\mu(\frac{2\pi n}{N} + \varphi)} \cdot \gamma_\mu^*(s, x) \end{aligned} \quad (8)$$

* Es wird ein zeitlich konstanter Nachstrom vorausgesetzt.

Für die komplexen Größen $y_{\mu}^*(s, x)$ wählt er den Ansatz :

$$y_{\mu}^*(s, x) = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\lambda=1}^L A_{\alpha\lambda}^{\mu} \left[\frac{\chi_{H}(s) - x}{\chi_{H}(s) - \chi_{V}(s)} \right]^{\lambda} \sin(\alpha t) \quad (9)$$

mit

$$s = \frac{R_0 + R_i}{2} - \frac{R_0 - R_i}{2} \cos t \quad b_2 \cos t = \omega r \cos \left(\frac{R_0 + R_i}{R_0 - R_i} - \frac{2}{R_0 - R_i} s \right)$$

Nach den Testrechnungen von Klingsporn für verschiedene Werte von K und L wurde bei den ausgeführten Rechnungen K=9 und L=4 gewählt. Der Nachstrom liege jetzt ebenfalls in Form einer Fourierzerlegung vor :

$$\eta(x, r, \varphi) = u_0 \left[M_x \left(1 + \sum_{-M}^{+M} \Lambda_x^{\mu}(x, r) e^{i\mu\varphi} \right) + M_y \sum_{-M}^{+M} \Lambda_y^{\mu}(x, r) e^{i\mu\varphi} + M_z \sum_{-M}^{+M} \Lambda_z^{\mu}(x, r) e^{i\mu\varphi} \right] \quad (10)$$

Die in Gleichung (7) benötigten Größen sind dann

$$\Lambda_x(k, x, r, \varphi_0 + x) = \sum_{\mu} e^{i\mu\varphi_0} e^{i\mu x} \Lambda_x^{\mu}(k, x, r); \quad \Lambda_y(k, x, r, \varphi_0 + x) = \sum_{\mu} e^{i\mu\varphi_0} e^{i\mu x} \Lambda_y^{\mu}(k, x, r, \varphi_0 + x) \quad (11)$$

Bei der Berechnung der Quell-Senkenverteilung ist es ausreichend, nur den stationären Anteil der Anströmung zu berücksichtigen, da der instationäre Anteil klein gegen ωr in Gleichung (4) ist. Die Randbedingung (7) läßt sich dann in der Form $\sum_{\mu} A^{\mu} e^{i\mu\varphi_0} = \sum_{\mu} B^{\mu} e^{i\mu\varphi_0}$ schreiben und ist für alle Flügelstellungen erfüllt, wenn gilt: $A^{\mu} = B^{\mu}$ für alle μ . Es ergeben sich dann in unserem Fall aus Gleichung (7) eine reelle und sechs komplexe Beziehungen. Unter Berücksichtigung des Ansatzes (9) erhält man nach Multiplikation mit $2\pi r / \omega R_0^2$

$$\mu=0 \quad 2\pi \frac{r}{R_0} \left[\text{tg} \delta_0(r, x) \left(\frac{r}{R_0} + \frac{u_0}{\omega R_0} \Lambda_y^0(k, x, r) + \frac{v_0}{\omega R_0} (r, x) \right) - \frac{u_0}{\omega R_0} \left(1 + \Lambda_x^0(k, x, r) \right) - \frac{v_0}{\omega R_0} (r, x) \right] = \sum_{\alpha} \sum_{\lambda} \frac{A_{\alpha\lambda}^{\mu}}{2\omega R_0^2} B_{\alpha\lambda}^{\mu} \quad (12)$$

$$\mu \neq 0 \quad 2\pi \frac{u_0}{\omega R_0} \left[\frac{r}{R_0} \text{tg} \delta_0(r, x) \Lambda_y^{\mu}(k, x, r) - \frac{r}{R_0} \Lambda_x^{\mu}(k, x, r) \right] e^{i\mu x} = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\lambda=1}^L \frac{A_{\alpha\lambda}^{\mu}}{2\omega R_0^2} B_{\alpha\lambda}^{\mu}$$

Die Koeffizienten setzen sich dann nach den Gleichungen (1), (2), (3) gemäß (7) additiv aus den von der Wirbelverteilung induzierten Größen zusammen.

Die Gleichungen (12) müßten für alle Aufpunkte auf dem Flügel erfüllt sein, die Koeffizienten $A_{\alpha\lambda}^{\mu} / 2\omega r_0^2$ sind aber schon eindeutig bestimmt bei Berücksichtigung von K·L Aufpunkten. Im vorliegenden Fall wurden die Lösungskoeffizienten nach der üblichen Fehlerquadratmethode bestimmt, berücksichtigt wurden dabei 90 Aufpunkte (siehe auch Kap.4). Die numerische Berechnung der $B_{\alpha\lambda}^{\mu}$ erfordert ausgesprochen zeitaufwendige Integrationen. Wenn wir in Gleichung (7) $\operatorname{tg}\delta_0$ auf der rechten Seite durch die Steigung der Sehne ersetzen, und es zeigte sich, daß diese Näherung zulässig ist (siehe Kap.4c), dann können auf der Grundlage eines Produktionslaufes die γ^* -Verteilungen für mehrere Wölbungen und natürlich für mehrere Nachströme berechnet werden.

Kap.3 :Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten
 =====
 und die Berechnung des Druckfeldes am Propellerblatt
 =====
 Bei bekannter Wirbelverteilung können über die Formeln (1), (2), (3), (4) alle induzierten Geschwindigkeiten berechnet werden. Sind alle induzierten Geschwindigkeiten bekannt, kann damit über die Beziehung (6) die numerische Güte des Verfahrens überprüft werden. Eine Erfüllung der Randbedingung läßt aber noch keinen endgültigen Schluß darüber zu, ob wir tatsächlich eine gute potentialtheoretische Näherung gefunden haben, da in den Rechnungen die Steigung k_0 als konstant über φ und ψ angenommen wird. Es erscheint den Verfassern aber als aussichtslos, eine Veränderung von k_0 über φ und ψ zu berücksichtigen, da in diesem Fall die Auflösung der Randbedingung in die einzelnen Fourierkomponenten nur in sehr komplizierter Weise möglich wäre. Darüberhinaus ist es durchaus zweifelhaft, ob die freien Wirbelflächen überhaupt potentialtheoretisch berechenbar sind. Selbst bei einer guten Erfüllung der Randbedingung können damit erst die geplanten Göttinger Druckmessungen Aufschluß darüber geben, ob die durchgeführten Rechnungen unter der Annahme $k_0 = \text{const.}$ eine zulässige Näherung sind.

Eine Berechnung des Druckfeldes erfolgt üblicherweise über die Bernoullische Gleichung. Die Anwendung dieser Gleichung ist aber nur unter der Annahme $\text{rot } \eta = 0$ zulässig, wir müssen also voraussetzen, daß sich der Nachstrom zumindest näherungsweise durch ein Potential erzeugen läßt. Im vorliegenden schiffsfesten Bezugssystem lautet sie dann :

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \phi_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi_g}{\partial t} + \frac{1}{2} [u_0 + u_0 \Lambda_x + \sum u_{ind}]^2 + \frac{1}{2} [u_0 \Lambda_y + \sum V_{ind}]^2 + \frac{1}{2} [u_0 \Lambda_z + \sum W_{ind}]^2 \quad (13)$$

mit p_0 : Druck in der Tiefe des Aufpunktes weit vor dem Schiff, u_0 : Schiffsgeschwindigkeit, ρ : Dichte
 Die Benutzung der Bernoullischen Gleichung mit einem Bezugspunkt weit vor dem Schiff ergibt aber (ohne Berücksichtigung des Propellers) auf Grund der geringeren Geschwindigkeiten gegenüber der Anströmung einen Anstieg des Druckes in der Propellerebene. Der Propeller arbeitet u.U. jedoch im Totwasser des Schiffes, und nach Wieghardt (3) tritt dann der von der Bernoulligleichung vorhergesagte Druckanstieg nicht auf, möglicherweise nimmt der Druck sogar geringere Werte als p_0 an. Es wäre hier vielleicht sinnvoller, einen Bezugspunkt in der Nähe des Propellers zu wählen und nur $\text{rot } \eta = 0$ für den eigentlichen Nachstrombereich zu fordern. Dies würde aber voraussetzen, daß bei den Nachstrommessungen nicht nur η Nachstrom, sondern auch $\frac{p}{\rho} + \frac{\eta^2}{2}$ ermittelt wird. Die Frage der Übertragbarkeit von Modell auf Großausführung und der Einfluß des arbeitenden Propellers auf die gemessenen Größen dürften aber so schwierig zu beantworten sein, daß im Rahmen dieser Arbeit doch Gleichung (17) zur Druckberechnung herangezogen werden soll.

Für die partiellen Ableitungen nach der Zeit lassen sich mit $\omega dt = -d\varphi_0$ die folgenden Ausdrücke angeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial \phi_g}{\partial \varphi_0} = \omega r V_g \\ \frac{\partial \phi_f}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial \phi_f}{\partial \varphi_0} = \omega r (\sum^{\delta} V_{ind}) - \omega \phi_f \left[\frac{\partial \chi^*}{\partial \varphi_0} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Nach (1) gilt für Aufpunkte auf dem Flügel :

$$\phi_f \left[\frac{\partial \chi^*}{\partial \varphi_0} \right] = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_0}^{R_0 \chi_n^*} \int_{\psi=0}^{\infty} \frac{\partial \chi^*}{\partial \varphi_0} (s, \chi, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi) [(k_1 \chi^* - k_0 \chi - k_0 \psi)^2 + \tau^2 + s^2 - 2\tau s \cos \theta]^{-\frac{3}{2}} [(k_1 \chi^* - k_0 \chi - k_0 \psi) \cdot s - \tau \sin \theta \cdot k_0] dy dx ds$$

$$\theta = \chi^* \chi - \frac{2\pi n}{N} - \psi \quad (15)$$

Unter Benutzung der Beziehung

$$(\mu_0 + \mu_0 \Lambda_x + \sum \mu_{ind}) \cos \delta_0 - (\omega r + \mu_0 \Lambda_y + \sum V_{ind}) \sin \delta_0 = 0 \quad (16)$$

(Normalgeschwindigkeit zum Blatt $v_n = 0$)

erhält man dann die Gleichung in der Form

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{1}{\rho} p_0 + \frac{1}{2} (\omega^2 r^2 + \mu_0^2) + \omega r \mu_0 \Lambda_y + \omega \Phi_y \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \right] - \left[(\mu_0 + \mu_0 \Lambda_x + \sum \mu_{ind}) \sin \delta_0 + (\omega r + \mu_0 \Lambda_y + \sum V_{ind}) \cos \delta_0 \right]^2 - \frac{1}{2} [\mu_0 \Lambda_r + \sum W_{ind}]^2 \quad (17)$$

Der vorletzte Ausdruck der rechten Seite stellt die Geschwindigkeit tangential zum Blatt dar, Saug- und Druckseite des Propellers unterscheiden sich dann durch einen Sprung in der Tangentialgeschwindigkeit von $\pm \frac{V}{2}$, d.h. wir nehmen jetzt die Wirbelverteilung als auf der Skelettlinie verteilt an. Der Einfluß der endlichen Dicke des Profils an der Vorderkante läßt sich nach (1) näherungsweise durch Einführung eines Riegelfaktors berücksichtigen, während die Anwendung eines solchen Korrekturfaktors an der Hinterkante nicht als sinnvoll erscheint. Als endgültige Gleichung zur Berechnung des Druckfeldes ergibt sich damit :

$$\frac{p_{\pm} - p_0}{\rho} = \frac{1}{2} (\omega^2 r^2 + \mu_0^2) + \omega r \mu_0 \Lambda_y + \omega \Phi_y \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi_0} \right] - \frac{1}{2} [(\mu_0 + \mu_0 \Lambda_x + \mu_{g/m} + \mu_q + \mu_L + \mu_y) \sin \delta_0 + (\omega r + \mu_0 \Lambda_y + V_{g/m} + V_q + V_L + V_y) \cos \delta_0 \pm \frac{1}{2} V]^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial D}{\partial l} \right)^2} - \frac{1}{2} [\mu_0 \Lambda_r + W_f + W_q + W_L + W_y]^2 \quad (18)$$

Der Drucksprung wird angegeben durch:

$$\Delta p = p - p_0 = \rho [V_{t_{g/m}}] \cdot \gamma \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial D}{\partial l} \right)^2} \quad (19)$$

$\left(\frac{\partial D}{\partial l} \right)$: Änderung der Dicke entlang der Flügelsehne)

Tatsächlich wäre es jetzt sehr mühsam, wenn Druck- und Drucksprung nur über die Gleichungen (18), (19) berechnet werden könnten, da die Integrationen zum Erhalt der induzierten Größen sehr zeitraubend sind. Testrechnungen für ausgewählte Aufpunkte ergaben aber, daß der Drucksprung durchaus unter Vernachlässigung der induzierten Größen berechnet werden kann, der Fehler liegt dabei in der Größenordnung von 2-6%. Diese Aussage gilt für

alle Punkte auf dem Flügel. Bei differenzierterer Betrachtung zeigte es sich dann, daß bei der Berechnung von $V_{tg/m}$ der Anteil der von der Quell-Senken Verteilung induzierten Geschwindigkeiten im wesentlichen vom Radius, im Verhältnis dazu aber nur wenig von χ^* abhängig ist. Wenn der genaue Einfluß der Dicke auf Schub und Drehmoment untersucht wird, dann sollten die zusätzlich induzierten u_q und v_q in den Gleichungen (12) und (19) berücksichtigt werden.

Bei den von der Wirbelverteilung induzierten Geschwindigkeiten waren die Fehler bei der Berechnung von $V_{tg/m}$ bei hohen Werten von χ immer klein, nach unserer Schätzung liegt der Gesamtfehler bei entsprechender Integration zur Bestimmung von Schub und Drehmoment bei etwa 1-2 %. Wir können aber nicht annehmen, daß unsere Wirbelverteilung wesentlich genauer ist, eine Berücksichtigung der induzierten Größen brächte also keinen nennenswerten Zuwachs in der Zuverlässigkeit des Ergebnisses. Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß der Anteil der höheren Fourierkomponenten der induzierten Geschwindigkeiten an $V_{tg/m}$ sehr klein ist. Bei der Berechnung von Schub und Drehmoment unter Vernachlässigung der induzierten Geschwindigkeiten und anschließender Fourieranalyse betrug die besonders interessierende 4. Komponente in der Amplitude etwa 1 % des stationären Wertes. Eine Abschätzung ergab dann, daß eine Berücksichtigung der induzierten Geschwindigkeiten diesen Wert um maximal $\pm 0.1\%$ geändert hätte, eine Berücksichtigung der induzierten Anteile erscheint also auch unter diesem Gesichtspunkt als nicht sinnvoll.

Die Berechnung der Druckbeiwerte ist besonders in Hinblick auf Kavitationserscheinungen von großem Interesse. Nach unseren Ergebnissen sollten die von der Wirbelverteilung induzierten Größen für $r > 0.95$ (Randwirbel) und die von der Quell-Senken Verteilung induzierten Geschwindigkeiten auf jeden Fall berücksichtigt werden. Dies stimmt mit den Erfahrungen von Armonat (4) für Propeller bei homogener Anströmung überein. Im übrigen Gebiet ist die Berechnung

der von der Wirbelverteilung induzierten Größen wohl nur dann sinnvoll, wenn gleichzeitig die erwähnten Unsicherheiten bei der Benutzung der Bernoullischen Gleichung ausgeräumt werden (siehe dazu Anhang Abb.68-163 und Kap. 5d).

Kap.4 : Übersicht über das Programmsystem und
=====

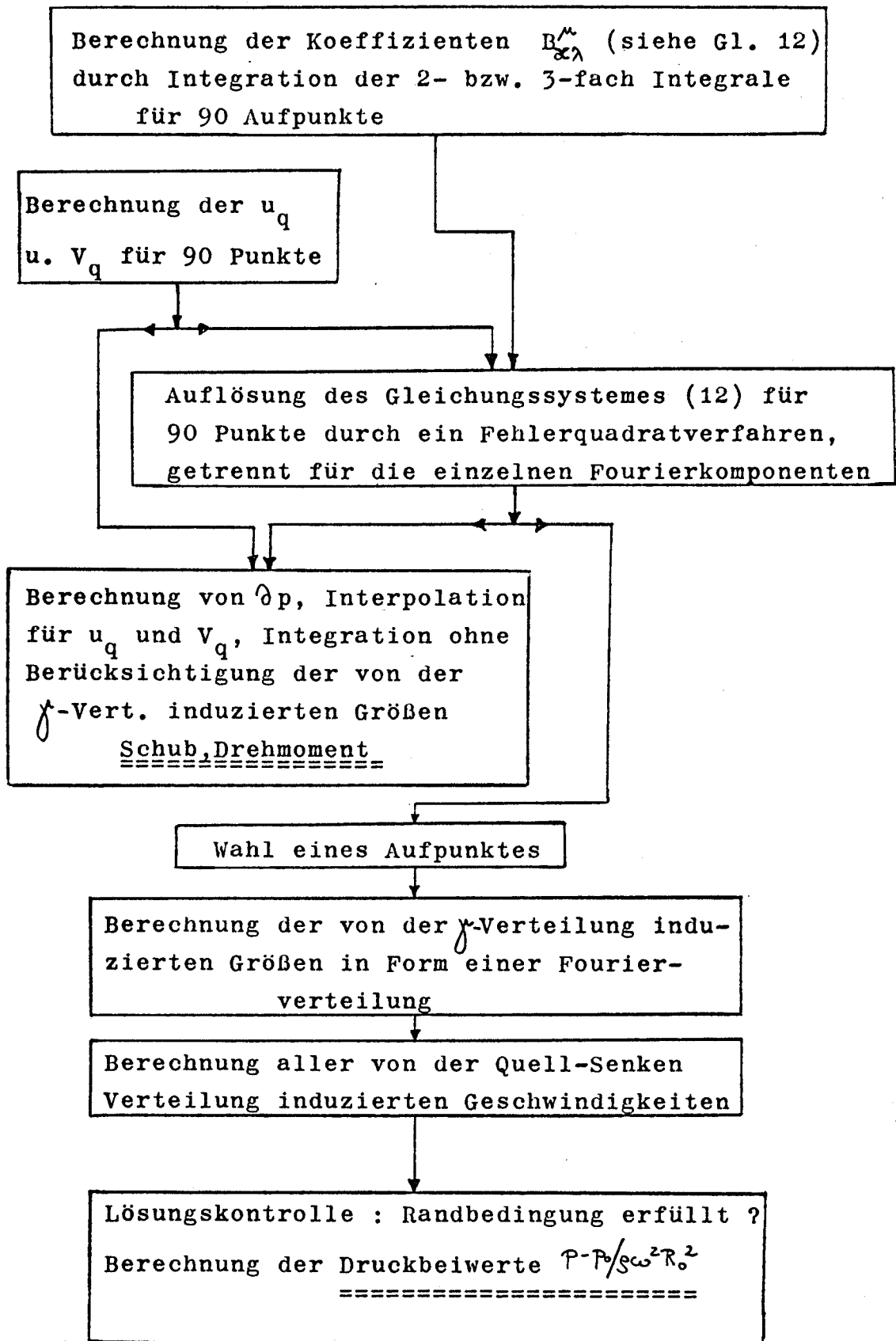
numerische Einzelheiten
=====

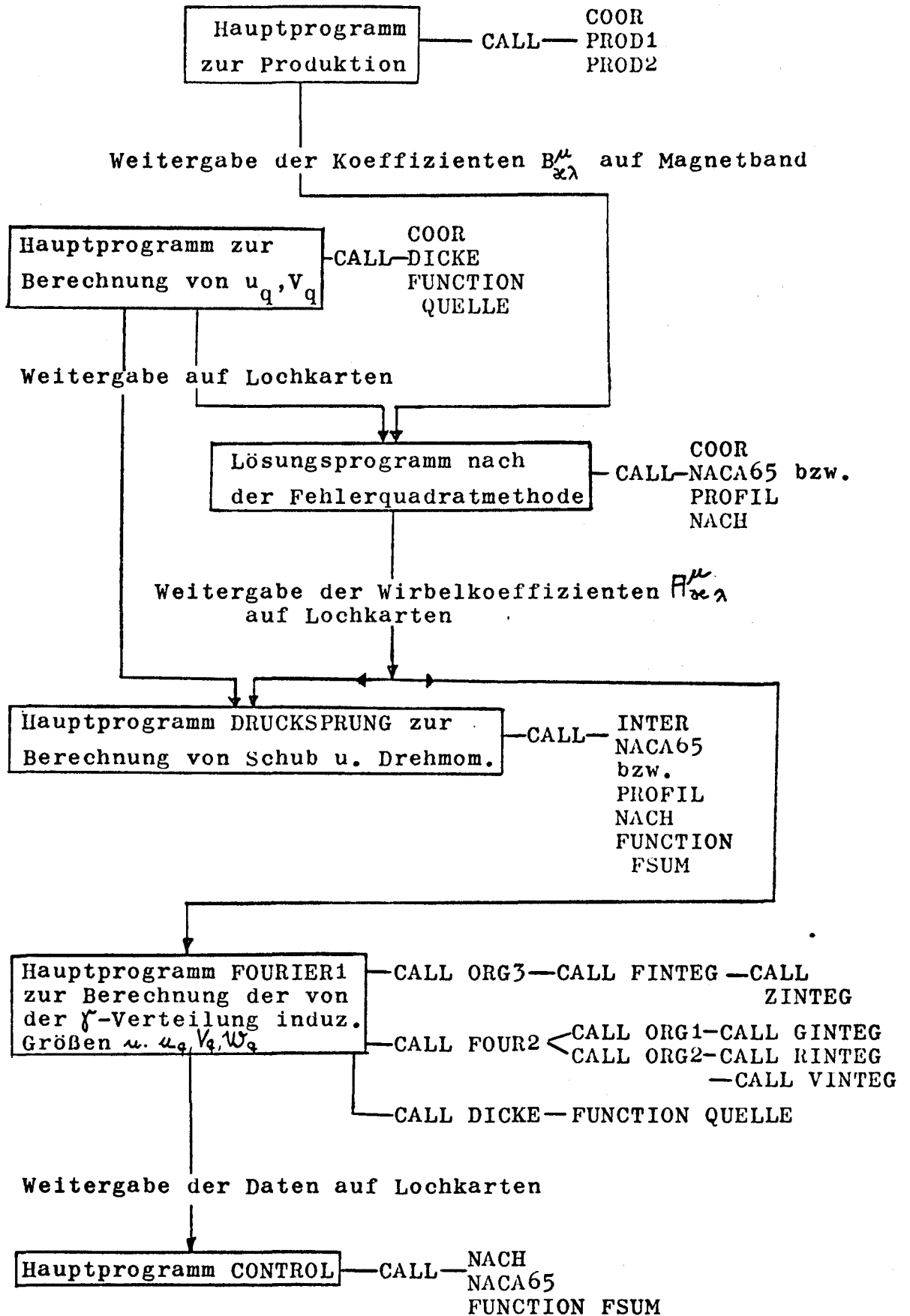
4a) Das Programmsystem

Bei Beginn unserer Arbeit waren die Programme zur Berechnung der Wirbeldichte (nach Klingsporn, siehe(2)) bereits vorhanden, mußten aber noch für die neuen Werte der Steigung der freien Wirbelflächen (k_0) gegenüber der Blattfläche (k_1) ausgetestet werden. Im Anschluß an die Ermittlung der Wirbelstärke sollte die Lösung auf ihre Konsistenz mit den Randbedingungen überprüft werden , danach war die Berechnung der am Propeller auftretenden Kräfte und der Druckbeiwerte geplant. Auf der nächsten Seite ist diese Aufgabenstellung in Form eine Diagrammes dargestellt.

Die Rechnungen wurden auf der IBM-Anlage 370/168 am Deutschen Elektronen Synchrotron ausgeführt * (Fortran). Aus technischen Gründen mußte der Programmaufbau so gestaltet werden, daß die längeren und rechenzeitintensiven Abschnitte in Form von Subroutinen auf die Bibliothek gespielt wurden, während die eigentlichen Hauptprogramme so kurz wie möglich gehalten wurden. Das sich aus diesem Konzept ergebende System von Hauptprogrammen, Subroutinen und Functions ist analog dem Arbeitsdiagramm auf der folgenden Seite dargestellt.

* Für die Benutzungsmöglichkeit und den guten Service des Rechenzentrums sei hier ausdrücklich gedankt.





Die IBM-Routinen aus der SCIENTIFIC SUBROUTINE PACKAGE sind nicht besonders aufgeführt, ebenso die fast immer benötigten FUNCTION-Unterprogramme CHIV, CHIH, CHIV1 und CHI1.

Verzeichnis der Subroutinen und ihrer Aufgaben:

- COOR : Berechnung der Aufpunktkoordinaten aus der Nummer des Aufpunktes
- DICKE : Berechnung von u_q, V_q, W_q
- FOUR2 : ruft die zur Berechnung der 2-fach - Integrale nötigen Subroutinen auf
- GINTEG: χ - und s bzw. t-Integration der 2-fach-Integrale der gebundenen Wirbel
- INTER : interpoliert aus den vorhandenen Werten von u_q, V_q die Werte für beliebige Aufpunkte
- NACA65: berechnet die Steigung der Sehne und die Ableitung der Dickenlinie des Göttinger Propellers
- NACH : liefert die Fourieranalyse der Nachstromdaten
- ORG1 : organisiert die Berechnung der 2-fach-Integrale der gebundenen Wirbel
- ORG2 : organisiert die Berechnung der 2-fach-Integrale der Randwirbel
- ORG3 : organisiert die Berechnung der 3-fach-Integrale der freien Quer- und Längswirbel und von $\Phi_\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right]$
- PROFIL: berechnet die Steigung der Sehne des von der ITTC vorgeschlagenen Propellers
- PROD1 : berechnet den Anteil der Quer- und Längswirbel an den Koeffizienten $B_{\alpha\lambda}^\mu$
- PROD2 : berechnet den Anteil der gebundenen und der Randwirbel an den Koeffizienten $B_{\alpha\lambda}^\mu$
- RINTEG: s- bzw. t-Integration der Randwirbelterme
- VINTEG: ψ - Integration der Randwirbelterme
- ZINTEG: ψ - Integration der 3-fach-Integrale
- FINTEG: χ - und s- bzw. t-Integration der 3-fach-Integrale

Verzeichnis der Functions und ihrer Aufgaben :

- CHIV, CHIH : $\chi_v(s), \chi_H(s)$
- CHIV1, CHIH1: $\partial\chi_v/\partial s, \partial\chi_H/\partial s$
- FSUM : Fouriersumme bei komplexer Darstellung der Koeffizienten
- QUELLE: $\partial D/\partial \chi \cdot \sin(\tau(\chi))$ (siehe Seite 4)

Leider zeigte es sich, daß sowohl die Produktionsläufe zur Ermittlung der $B_{x\lambda}^{\mu}$ als auch die Integrationen bei der Berechnung der von der Wirbelverteilung induzierten Geschwindigkeiten ausgesprochen zeitaufwendig sind. So benötigten die Programme PROD1 und PROD2 etwa 4 min pro Aufpunkt (je nach Lage des Punktes, OPT=2), von der gleichen Größenordnung ist die von ORG1,ORG2 und ORG3 benötigte Rechenzeit.

Bei den numerischen Integrationen wird durchgehend die Simpsonsche Regel angewendet, denn die Anwendung komplizierterer Verfahren- möglicherweise in Abhängigkeit von der Lage des Integrationsgebietes - hätte nach unserer Meinung die Programme zu unübersichtlich gemacht, ohne eine echte Ersparnis an Rechenzeit zu garantieren. Die verwendeten Schrittweiten wurden durch Vergleichsrechnungen zwischen PROD1, PROD2 und FOURIER1 ausgetestet, die rechten Seiten der Gleichungen (12) wurden dabei bei vorgegebener Wirbelverteilung mit beiden Hauptprogrammen ausgerechnet. Auf diese Weise konnte mit Sicherheit vermieden werden, daß die Produktionsläufe durch numerische Ungenauigkeiten verfälscht würden. Daneben bietet diese gegenseitige Kontrolle die Möglichkeit, die beiden sehr langen Programme auf Fehler zu untersuchen, ohne gleich den ganzen Produktionslauf durchzuführen.

4b) Die Behandlung der Singularitäten der Integrale

Bei der Integration der Ausdrücke (1),(2), (3), (4) und (15) gibt der jeweilige Nenner des Integranden die dritte Potenz des Abstandes zwischen Aufpunkt und Integrationsgebiet an, bei Ausführung der Integration tritt damit eine singuläre Stelle am Aufpunkt ein. Grundsätzlich sind neben dieser Singularität auch noch weitere möglich, wenn die freien Wirbelflächen der vorhergehenden Blätter durch das Propellerblatt mit dem Aufpunkt hindurchgehen. Bei den gerechneten beiden Propellern waren die Parameter

k_1 , k_0 und χ_H , χ_V so gewählt, daß dieser Fall nicht auftreten konnte. Nach Klingsporn (5) sind die bei der Aufstellung der Tragflächentheorie auftretenden Integrale existent und können damit numerisch berechnet werden. In Anlehnung an Klingsporn (2) wurden die Integrale unter Aussparung eines kleinen Gebietes ΔO bzw. ΔV ausgerechnet, es wurde weiter das Verhalten der Werte bei Verkleinerung dieser Gebiete überprüft. Wir erhielten in allen Fällen eine befriedigende Konvergenz der Werte, nach unserer Erfahrung empfiehlt es sich aber, die Grenzen in r-Richtung symmetrisch in der Variablen t und nicht in s zu wählen (siehe Gl. 9). Nach unserer Meinung wäre bei der Vielzahl der auftretenden Integrale eine analytische Entwicklung der einzelnen Funktionen um die singuläre Stelle mit einem sehr hohen Aufwand an Rechen- und Programmierarbeit verbunden, ohne einen echten Vorteil gegenüber dem genannten Verfahren zu bieten.

Bei den durchgeführten Rechnungen zum Göttinger Propeller wurden als Grenzen des ausgesparten Gebietes benutzt :

Produktionsläufe : geb. Wirbel : $\Delta t=0.01$ $\Delta x=0.002$

3-fach Integr.: $\Delta t=0.01$ $\Delta x=0.06$ $\Delta \psi=0.04$

Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten :

geb. Wirbel : $\Delta t=0.004$ $\Delta x=0.002$

3-fach Integr.: $\Delta t=0.004$ $\Delta x=0.002$ $\Delta \psi=0.001$

u_q , V_q , W_q : $\Delta \sigma=0.04$ $\Delta \tau=0.02$

Um die Rechenzeit in vernünftigen Grenzen zu halten, mußte außerhalb der singulären Stellen eine ziemlich aufwendige Unterteilung des Integrationsgebietes durchgeführt werden, die sich im wesentlichen an die von Klingsporn eingeführte Unterteilung anlehnt (s.(2)) .

Besondere Schwierigkeiten neben den Singularitäten verursachten bei der Ausführung der 3-fach Integrale und der Randwirbelintegrale die über den Aufpunkt hinwegstreichenden freien Wirbelflächen, es war hier eine entsprechende Erweiterung der Unterteilung nötig.

Die Integration über ψ konnte für die vorliegenden Werte von k_0 schon bei 3-4 Windungen abgebrochen werden.

4c) Lösungskontrolle

Nach Ausführung der Produktionsläufe konnte die Wirbelstärke für den im vorgegebenen Nachstrom (siehe Abb.2,3) arbeitenden Propeller ermittelt werden. Für den Göttinger Propeller wurden dann für verschiedene Punkte die induzierten Geschwindigkeiten ausgerechnet, der Vergleich mit der Randbedingung erlaubt dann eine Aussage über die Qualität der Lösung. Wir können dabei für verschiedene Flügelstellungen die Erfüllung der Gleichung (6) überprüfen, sinnvoll wäre auch eine Überprüfung der Randbedingungen für die einzelnen Fourierkomponenten nach Gleichung (12) .

Wir können nicht erwarten, daß unsere Zirkulationsdichte tatsächlich eine echte Lösung von (6) darstellt, da wir nur einen endlichen Ansatz für die Wirbeldichte gemacht haben. Daneben war es zunächst nicht sicher, ob in Gl. (7) auf der rechten Seite die Steigung der Skelettlinie durch die Steigung der Sehne ersetzt werden darf. Ein gewisses Problem in Zusammenhang mit der endlichen Zahl der Ansatzglieder stellt die Anzahl und die Auswahl der Aufpunkte bei der Anwendung des Fehlerquadratverfahrens dar.

Die Anzahl der Aufpunkte sollte aus Gründen der Rechenzeit auf etwa 90 beschränkt bleiben, es war weiter klar, daß diese Punkte einigermaßen gleichmäßig auf dem Propellerblatt verteilt sein müßten. Wir wissen aber nicht, welchen Einfluß eine Verletzung der Randbedingung in einem bestimmten Gebiet auf die Zirkulationsdichte des gesamten Propellers hat. In der Vermutung, daß der Verlauf der Mittellinie in der Nähe der Vorder-und Hinterkante des Blattes einen besonders starken Einfluß hat, wurden dann als Aufpunkte ausgewählt :

$$r/ R_0 = 0.2536, 0.3172, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.8828, \\ 0.9464$$

$$\frac{\chi^* - \chi_v}{\chi_H - \chi_v} = \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{8}{16}, \frac{10}{16}, \frac{12}{16}, \frac{13}{16}, \\ \frac{14}{16}, \frac{15}{16}$$

Die Wahl des 2/16-Punktes als vordersten Aufpunkt für $r=\text{const.}$ ergab sich zunächst aus technischen Gründen: Mit den Programmen PROD1 und PROD2, die mit der Genauigkeit REAL*4 arbeiten, konnten die Integrale weiter vorne liegender Aufpunkte nicht ausgeführt werden. Die später geschriebenen Programme zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten (FOURIER1) rechnen mit REAL*8 und können auch weiter vorne liegende Aufpunkte bearbeiten, die höhere Rechengenauigkeit erlaubt natürlich auch eine wesentlich bessere Untersuchung der Konvergenzeigenschaften der Integralwerte bei Annäherung an die Singularität.

Bei der Kontrolle der Lösung wurden beide oben genannten Verfahren angewendet, die aber im Prinzip ähnliche Ergebnisse brachten. Der besseren Darstellbarkeit wegen wählten wir dann aber eine Überprüfung der Randbedingung für verschiedene Flügelstellungen als Standardverfahren.

Als typische Ergebnisse sei^{en} hier die Abweichungen von der Randbedingung in Grad für $r/R_0 = 0.8$ und verschiedene Flügelstellungen gegeben :

	1/24	1/12	2/12	4/12	6/12	17/24	11/12
0	-4.87	-1.71	0.10	-0.08	-0.37	0.07	0.03
30	-4.20	-1.53	0.06	-0.03	-0.29	0.02	0.05
60	-1.21	-0.50	-0.03	-0.02	-0.12	-0.01	0.09
90	-0.17	-0.13	-0.05	0.00	-0.06	-0.01	0.12
120	-0.10	-0.02	-0.05	0.00	-0.04	-0.01	0.11
150	-0.05	-0.07	-0.03	0.01	-0.04	0.00	0.12
180	-0.01	-0.05	-0.03	0.01	-0.04	0.00	0.11

Flügel- Winkel zwischen der errechneten Strömung und der Skelettlinie
 stellung

Besonders auffallend an den Werten ist die starke Abweichung von der Strömungsrandbedingung an der Vorder-

kante in der Stellung $\varphi_0=0$. Aus der Darstellung des Nachstroms (siehe Abb. 2) folgt, daß für $\varphi_0=0$ ein besonders hoher Anströmwinkel des Blattes vorliegt, unsere Lösung entspricht dann einer zeitweise etwas in Strömungsrichtung verformten Mittellinie an der Vorderkante des Blattes. Die errechnete Wirbeldichte an der Vorderkante ist damit zu gering im Vergleich zu einer exakten Lösung.

Für $r/R_0=0.8$ und $\varphi_0=0$ haben wir Anströmwinkel an der Vorderkante von ungefähr 10° . Bei der potentialtheoretischen Rechnung können wir natürlich ein mögliches Abreißen (und Wiederanlegen) der Strömung an der Vorderkante nicht berücksichtigen, daneben müßten wir an der endlich dicken Vorderkante nicht mehr die Strömungsrandbedingung für die Mittellinie, sondern getrennt für Ober- und Unterseite erfüllen. Aus physikalischer Sicht können wir also über die Erfüllung der Randbedingung an der Vorderkante keine strengen Aussagen machen, es sollten hier in Anbetracht der übrigen Unsicherheiten die Göttinger Versuchsergebnisse abgewartet werden.

Aus mathematischer Sicht ist diese Abweichung an der Vorderkante nicht ganz befriedigend. Eine Einbeziehung der 1/16-Linie und noch weiter vorne liegender Aufpunkte brächte vermutlich bessere Ergebnisse in der Nähe der Vorderkante, bei dem endlichen Lösungsansatz müßte diese Verbesserung aber zu Lasten der Genauigkeit in den übrigen Flügelbereichen gehen. Möglicherweise würde hier ein anderer Ansatz als der Polynomansatz in χ -Richtung oder die Berücksichtigung zusätzlicher Glieder bessere Ergebnisse bringen.

Die Lösungskontrolle für andere Radien brachte mit Ausnahme der Radien $r/R_0=0.975$ und $r/R_0=0.3$ die gleichen charakteristischen Ergebnisse. Die für $r/R_0=0.975$ berechneten Abweichungen zeigten an der Vorderkante ein ähnliches Verhalten wie an den übrigen Radien, in der Mitte des Blattes und auf der hinteren Hälfte dagegen traten noch Fehler bis zu 4° auf. Diese Abweichungen erklären sich aus dem endlichen Ansatz in r -Richtung, außerdem liegt dieser Radius außerhalb des Aufpunkt-

gebietes. Das Gebiet mit $r/R_0 > 0.975$ ist aber zu klein, um einen wesentlichen Einfluß auf die Wirbelverteilung auszuüben.

Für $r/R_0 = 0.3$ wich die Abhängigkeit der Fehler von dem bisherigen Bild stark ab. In Abhängigkeit von der Anströmung erreichten die Abweichungen dort Werte bis zu maximal 7° an der Hinterkante (11/12- Punkt), obwohl bei $r/R_0 = 0.2536$ und $r/R_0 = 0.3172$ Aufpunktradien liegen. Eine Überprüfung des Fehlerquadratverfahrens zeigte aber keine entsprechend großen Unterschiede zwischen den linken und rechten Seiten des zu lösenden Gleichungssystems (12) für die unteren Radien, die Abweichungen können auch nicht damit erklärt werden, daß bei der Lösung des Gleichungssystems die Steigung der Skelettlinie durch die Steigung der Sehne ersetzt worden ist. Mit dem Fehlerquadratverfahren können wir zwar an diskreten Aufpunkten die Randbedingung erfüllen, unser Lösungsansatz ergibt aber schlechte Werte für Punkte zwischen den Aufpunktradien im untersten Teil des Propellerblattes (für $r/R_0 = 0.9$ war die Randbedingung gut erfüllt !). Wir vermuten daher, daß diese Abweichung ihre Ursache in der schon vom Ansatz her- Vernachlässigung des Nabenwirbels besitzt.

Kap.5 : Durchgeführte Rechnungen und Ergebnisse

=====

5a) Der Göttinger Propeller

Bei den geplanten Versuchen in der AVA in Göttingen sollen die instationären Druckverteilungen eines Schiffschraubenmodells im 3m- Windkanal gemessen werden. Als Modell wurde die Variante B des HSVA-ITTC-Propellers 1077 gewählt, der Durchmesser des Modells betraegt 1400 mm. Der Propeller besitzt keine Neigung gegenüber der x-Achse, die Fläche der Profilsehnen stellt streng eine reguläre Schraubenfläche mit $k_1 = 0.267 R_0$ dar. Das Propellerblatt

selbst ist streng symmetrisch, die Daten der (gerechneten) Vorderkante sind weiter unten angegeben.

Als Skelettlinie wurde ein Kreisbogen angenommen, der *maximale* Abstand zwischen Sehne und Skelettlinie (a) ist ebenfalls unten aufgeführt.

Bei der Berechnung der Dickenlinie wurde die Form einer Halbellipse gewählt :

$$D(r, x) = D_0(r) \cdot \sqrt{1 - (2x/L(r))^2} \quad (20)$$

L(r) : Sehnenlänge

x : Abstand auf der Sehne von $\varphi = 0$

Die tatsächliche Geometrie des Modellpropellers ist hinten etwas dünner als eine Halbellipse, die Wahl der Dickenlinie wurde in der Annahme getroffen, daß die tatsächliche Pofildicke zusammen mit der Grenzschicht das der Rechnung zugrundeliegende Profil ergibt. Diese Annahme ist etwas willkürlich und wird zu überprüfen sein, aus diesem Grunde ist bei den Druckbeiwerten der Anteil der von der Dicke induzierten Geschwindigkeiten eingezeichnet. Der Modellpropeller ist an der Spitze aus versuchstechnischen Gründen etwas dicker als die üblichen Schiffspropeller, der Einfluß der Dicke bei den Druckbeiwerten darf also für höhere Radien nicht als repräsentativ angesehen werden.

r/R ₀ =0.3	φ_V (Bogengrad)=-0.499	a(mm)=8.58	D ₀ (mm)=50.74
0.4	-0.518	9.20	42.77
0.5	-0.512	8.67	35.21
0.6	-0.490	8.07	28.27
0.7	-0.454	7.61	21.78
0.8	-0.400	7.21	15.53
0.9	-0.312	6.88	15.53
0.925	-0.280	6.81	15.53
0.95	-0.238	6.72	15.53
0.975	-0.178	6.64	15.53

Die angegebenen Größen in mm beziehen sich auf den Modellpropeller.

Für den Göttinger Propeller wurde ein Fortschrittsgrad von $\frac{u_0}{\omega R_0} = 0.22$ und eine hydrodynamische Steigung von $k_0 = 0.24R_0$ gewählt.

5b) Der ITTC- Propeller

Für den in der ITTC- Ausschreibung vom Oktober 1973 vorgeschlagenen Propeller (Wageningen B/4/0.475) wurden die auftretenden Kräfte ohne Berücksichtigung der Dicke berechnet. Es handelt sich dabei um eine Vergleichsrechnung der zur Zeit existierenden Propellertheorien. Die Fläche der Profilsehnen wurde bei der Berechnung der Integrale als reguläre Schraubenfläche angesetzt mit $k_1 = 0.325 R_0$ in Abweichung vom ITTC-Propeller, bei dem für kleinere Radien k_1 linear abnimmt. (Abb. 4) Erst im Lösungsprogramm zur Bestimmung der Wirbeldichte wurde der von r abhängige Wert für $k_1(r)$ bzw. $\text{tg } \delta_0(r, \chi)$ auf der linken Seite des Gleichungssystems (12) benutzt. Die genaue Form der Skelettlinie entnehme man der ITTC - Ausschreibung. Die Propellerumrandung ist in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt. Die hydrodynamische Steigung wurde zu $k_0 = 0.29 R_0$ und der Fortschrittsgrad zu $\frac{u_0}{\omega R_0} = 0.28 R_0$ angesetzt. Außerdem wurde bei beiden Propellern der von der ITTC vorgeschlagene Nachstrom verwendet.

r/R_0	χ_V	χ_H (Bogengrad)
0.2	-0.705	0.332
0.3	-0.695	0.315
0.4	-0.648	0.294
0.5	-0.581	0.271
0.6	-0.514	0.247
0.7	-0.436	0.220
0.8	-0.348	0.194
0.9	-0.231	0.160
0.95	-0.157	0.118

5c) Zirkulationsdichte, Schub und Drehmoment
der beiden Propeller im ITTC-Nachstrom

Im Anhang (Abb.14-53) sind die instationären Wirbeldichten $\gamma/\omega R_0$ für die beiden Propeller dargestellt, wie sie ohne Berücksichtigung der Dicke errechnet wurden. Der Göttinger Propeller weist dabei für höhere Radien deutlich geringere Werte von γ auf als der ITTC-Propeller; bei der Berechnung von $T/\omega R_0^2$ (Abb.54-57) wurde dieser starke Unterschied durch die geringere Flügeltiefe des ITTC-Propellers etwas abgeschwächt.

Der Einfluß der zurückgenommenen Steigung des ITTC-Propellers für $r \leq 0.475 R_0$ ist in diesem Bereich deutlich zu erkennen. Für $r=0.6R_0$ bis $r=0.8R_0$ treten für $\varphi \cong \pi$ negative γ -Werte an der eintretenden Kante dieses Propellers auf, wie sie für den Übergang zur Druckseitenkavitation charakteristisch sind. In diesem Zusammenhang wurde für den Göttinger Propeller untersucht, bei welchen Anströmwinkeln mit negativen γ -Werten an der eintretenden Kante gerechnet werden müßte. Wir konnten aber keine einheitlichen Abweichungen von den Ergebnissen der zweidimensionalen Profiltheorie feststellen. So erhielten wir für $r=0.7 R_0$, $\varphi_0=150^\circ$ für die Wirbeldichte $\gamma \approx 0$ bei einem Anströmwinkel von 1.45° an der Vorderkante, für $r=0.9 R_0$ dagegen war $\gamma > 0$ für $\varphi_0 = 150^\circ$, obwohl der Anströmwinkel sehr klein war.

In den Abbildungen 4-13 ist der Einfluß der Dicke des Göttinger Propellers auf die Wirbeldichte dargestellt. Die Abbildungen 58-67 zeigen dann die lokal auftretenden Kräfte und Drehmomente für die beiden Propeller.

In Abbildung 66 ist noch der Einfluß des tangentialen Nachstroms auf den Schub für den Göttinger Propeller dargestellt. Die instationären Kräfte und Drehmomente wurden durch numerische Integration aus dem unter Vernachlässigung der induzierten Größen berechneten Drucksprung gewonnen (siehe Kap.3) .

5d) Druckbeiwerte und Kavitationsverhalten des Göttinger Propellers im ITTC-Nachstrom

Im Anhang (Abb. 68 bis 163) sind die dimensionslosen Druckbeiwerte $\frac{P-P_0}{\rho \omega^2 R_0^2}$ über α für verschiedene Radien und Flügelstellungen berechnet (nach Gl. 18). In die gleichen Zeichnungen sind jeweils die Druckbeiwerte ohne Berücksichtigung der von der Wirbelverteilung induzierten Größen (Rechenzeit!) und die Druckbeiwerte ohne Berücksichtigung aller induzierten Größen eingetragen.

Die Anwendung der Bernoulligleichung mit einem Bezugspunkt weit vor dem Schiff ergibt im vorliegenden Nachstrom für $\varphi_0=0$ (ohne Propeller) einen Druckanstieg, der experimentell nicht bzw. nicht in dieser Höhe (Reibungsverluste) beobachtet wird. Einen entsprechenden Fehler begehen wir natürlich bei der Anwendung von Gleichung (18). Der Anteil des Nachstromes an den Druckbeiwerten beträgt dabei für die Flügelstellung $\varphi_0=0$ etwa 0.021, für $\varphi_0=\pi$ schwankt dieser Wert zwischen 0.014 und 0.004. Eine quantitative Abschätzung des erwähnten Fehlers erschien den Verfassern im Rahmen dieser Arbeit als nicht möglich, bei Fragen nach dem genauen zeitlichen und örtlichen Verlauf der Kavitationszonen im Großversuch sollte aber dieser Gesichtspunkt näher geprüft werden.

Die bei einem Schiff auftretenden Kavitationsgebiete sind abhängig von den Betriebsgrößen des Propellers, von der vorliegenden Rechnung sind nur der Fortschrittsgrad $\frac{u_0}{\omega R_0} = 0.22$ und die Form des Nachstroms vorgegeben. Im allgemeinen wird angenommen, daß Kavitation bei einem Abfall des Druckes unter den Dampfdruck auftritt. Mit $p_D \approx 0.03 \text{ kp/cm}^2$ lassen sich die Grenzwerte für den Druckbeiwert angeben; bei niedrigeren Druckbeiwerten wird dann Kavitation eintreten:

$$C_{P \text{ GRENZ}}(h) = \frac{P_D - P_0(h)}{\rho \omega^2 R_0^2} = \frac{0.03 - (1 + \frac{h}{10})}{(\omega R_0)^2} \cdot 98.1 \quad (21)$$

h : Wassertiefe des Aufpunktes in m, $h = y_0 + \omega(x^2)$

y_0 : Wellentiefe in m, ωR_0 in m/sec

Druck an der Wasseroberfläche: 1 kp/cm^2 , $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$

Der Göttinger Propeller wurde ursprünglich für $n=100$ UpM mit einem Durchmesser von 7670 mm konstruiert. Die Welle des Propellers befindet sich in einer Wassertiefe von $R_0 + 2m$. Als Grenzwerte $c_p(h)$ erhalten wir dann für die angenommenen Betriebsgrößen :

$h=$	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m	9m	10m
$c_p =$	0.071	0.077	0.083	0.089	0.095	0.101	0.108	0.113	0.119

Vergleicht man diese Werte mit den Druckbeiwerten in den Abbildungen 68 bis 163, so können wir danach mit Kavitation auf der Saugseite des Propellers etwa im Winkelbereich zwischen 30° und 330° an der eintretenden Kante rechnen. Die Ausdehnung des kavitationsgefährdeten Gebietes in diesen Flügelstellungen über die Blatttiefe nimmt in Richtung der äußeren Radien zu, bleibt dabei aber immer verhältnismäßig schmal (5 bis 20 % der Flügellänge). In den gleichen Flügelstellungen wird ein vom Randwirbel hervorgerufenen Kavitationsgebiet für $r \geq 0.975 R_0$ etwa in der Mitte des Blattes auftreten. Dieses Gebiet sollte nach den Rechnungen bei 330° stärker ausgeprägt sein als bei 30° , während das Auftreten der Kavitation an der Vorderkante einigermaßen symmetrisch in φ_0 verlaufen sollte.

Berücksichtigt man den durch die Benutzung der Bernoulligleichung (s.o.) entstandenen Fehler, so kann nicht mit einer wesentlich stärker ausgeprägten Kavitationszone an der Vorderkante gerechnet werden, da der Druckbeiwert dort in einem kleinen Gebiet sehr stark abfällt. Die flächenmäßige und zeitliche Ausdehnung des vom Randwirbel verursachten Kavitationsgebietes dagegen läßt sich nur sehr unsicher angeben, weil die Druckbeiwerte dort nur einen geringen Gradienten in φ_0 - und χ -Richtung aufweisen.

Literatur

- (1) W.-H. Isay 1970 , Moderne Probleme der Propellertheorie, Springer-Verlag , Berlin-Heidelberg-New York
- (2) H. Klingsporn 1971 , Numerische Untersuchung der Integralgleichung der Propellertragflächentheorie, IfS-Bericht Nr.279
- (3) K.Wieghardt 1969, Theoretische Strömungslehre, B.G. Teubner-Stuttgart
- (4) R. Armonat 1969, Untersuchung der Druckverteilung eines Propellers unter Berücksichtigung grenzschichtbedingter Maßstabeffekte, Schiffstechnik, Hamburg, 16.Band, 81. Heft
- (5) H. Klingsporn 1969, Integralgleichungen der Propellertragflächentheorie, IfS- Bericht Nr.248
- (6) R. Hille 1971 , Auslegung und Dickenberechnung von Schraubenpropellern bei Vorgabe der Druckverteilung am Propellerflügel , IfS- Bericht Nr.280

A n h a n g

- Abb.1 : Propellergeometrie
Abb.2 : Axialer Nachstrom
Abb.3 : Tangentialer Nachstrom
Abb.4-13 : Stationärer Anteil der Zirkulationsdichte $\delta/\omega R_0$ für den Göttinger Propeller

Die Berechnungen zu den Abbildungen 14 bis 67 wurden ohne Berücksichtigung des Dickeneinflusses durchgeführt.

- Abb.14-33: Instationäre Zirkulationsdichte $\delta/\omega R_0$ für den Göttinger Propeller

- Abb.34-53: Instationäre Zirkulationsdichte $\delta/\omega R_0$ für den ITTC-Propeller

- Abb.54-57: Instationäre Zirkulation $T/\omega R_0^2$ für den Göttinger und ITTC- Propeller

- Abb.58-65: Lokaler Schub und lokales Drehmoment $(\frac{dK_x/dr}{\rho\omega^2 R_0^3}$ u. $\frac{dM/dr}{\rho\omega^2 R_0^4})$ für beide Propeller

- Abb.66 : Schub der Propeller im Nachstrom $(\frac{K_x}{\rho\omega^2 R_0^4})$

- Abb.67 : Drehmoment im Nachstrom $(\frac{M}{\rho\omega^2 R_0^5})$

- Abb.68-163 : Druckbeiwerte $\frac{P-P_0}{\rho\omega^2 R_0^2}$ für den Göttinger Propeller im ITTC-Nachstrom

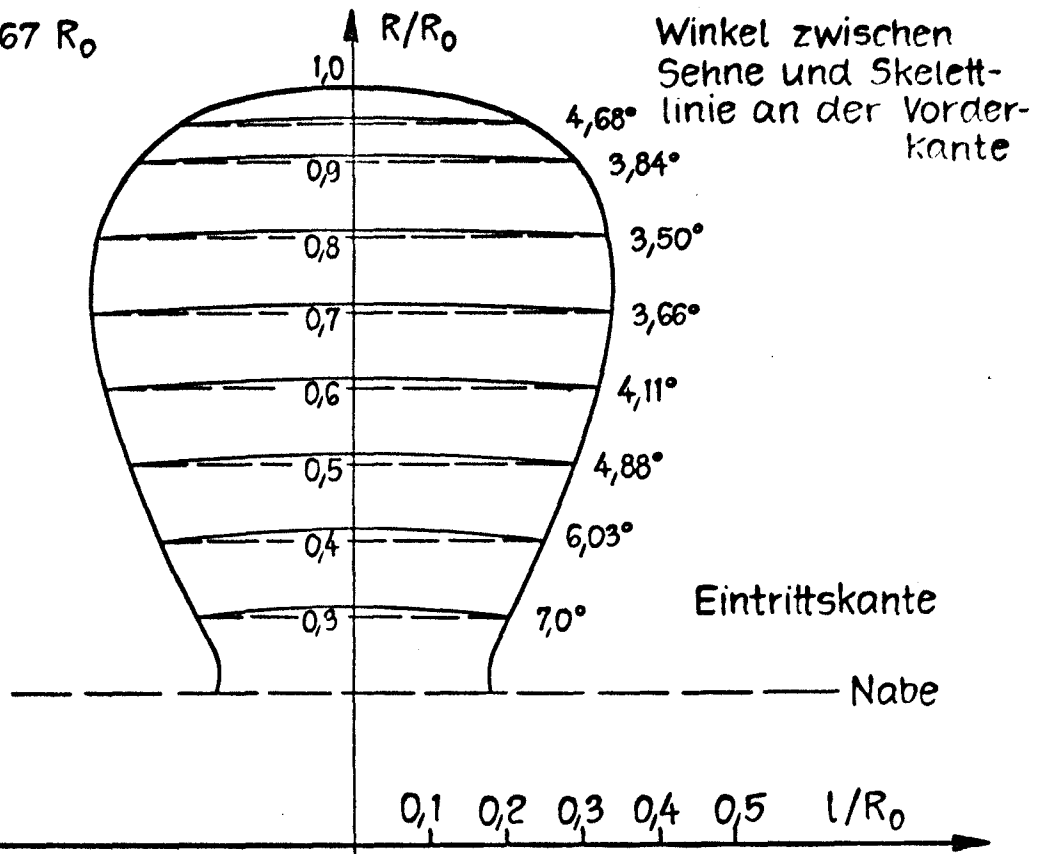
- : Unter Berücksichtigung aller induzierten Größen
- △ : Unter Berücksichtigung der von der Quellen-Senken- Verteilung induzierten Größen
- ◇ : Ohne Berücksichtigung der induzierten Größen

In den Abbildungen 68 bis 163 ist der Druckanstieg des Staupunktes an der Vorderkante nicht wiedergegeben.

$$K_1 = r \tan \beta = 0,267 R_0$$

$$K_0 = 0,25 R_0$$

$$\frac{u_0}{\omega R_0} = 0,22$$



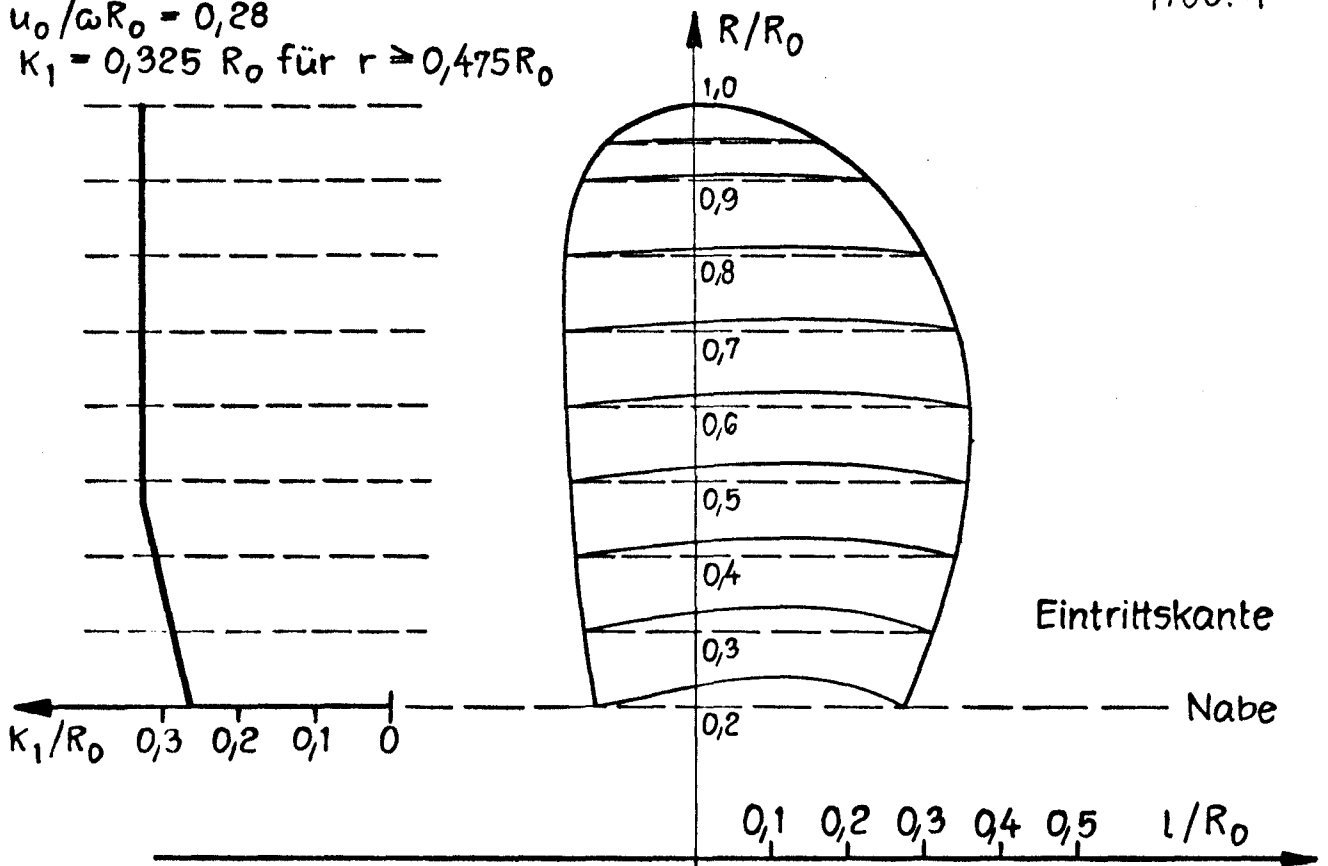
Zylinderschnitte für den AVA-Propeller

$$K_0 = 0,29 R_0$$

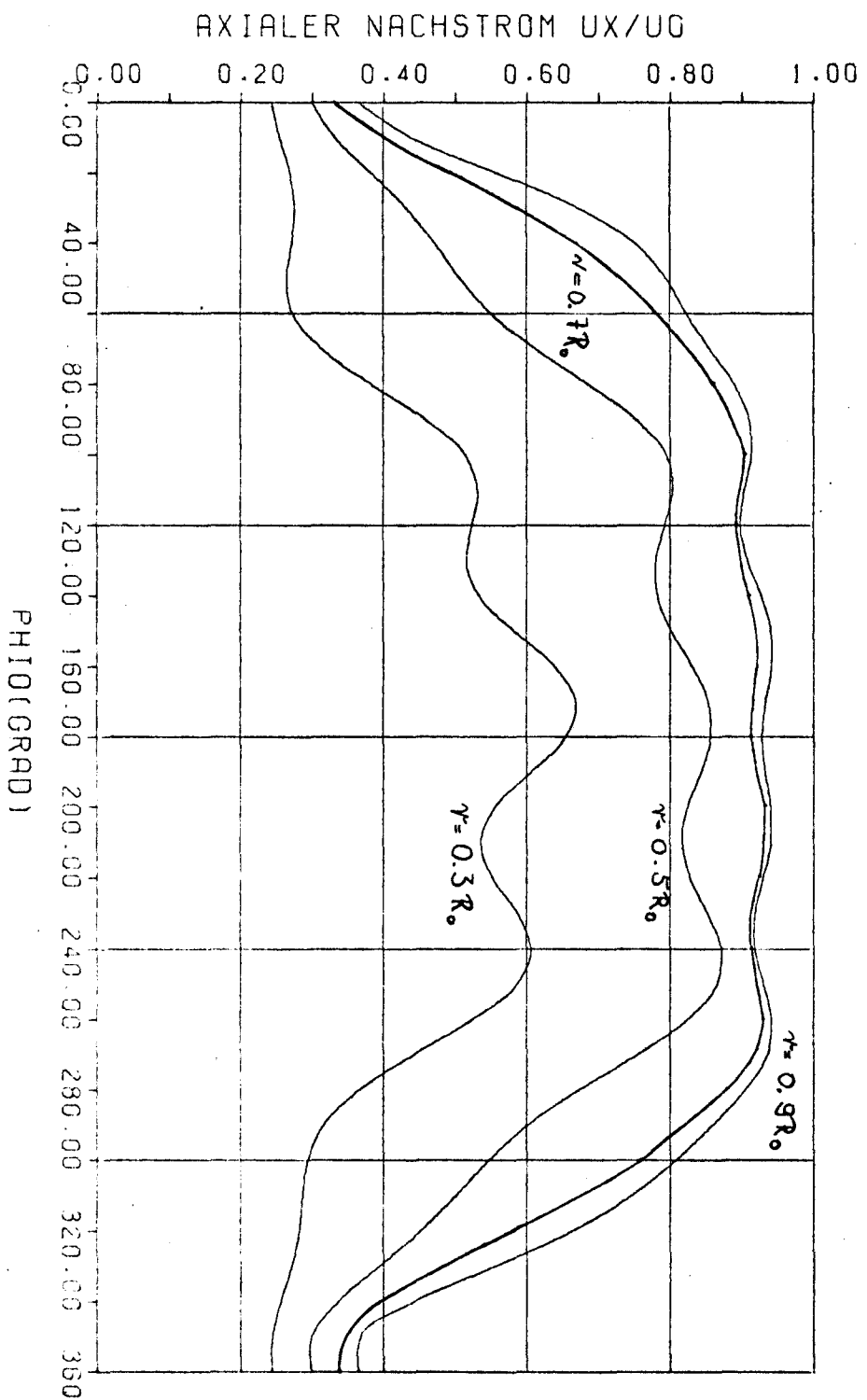
$$u_0 / \omega R_0 = 0,28$$

$$K_1 = 0,325 R_0 \text{ für } r \geq 0,475 R_0$$

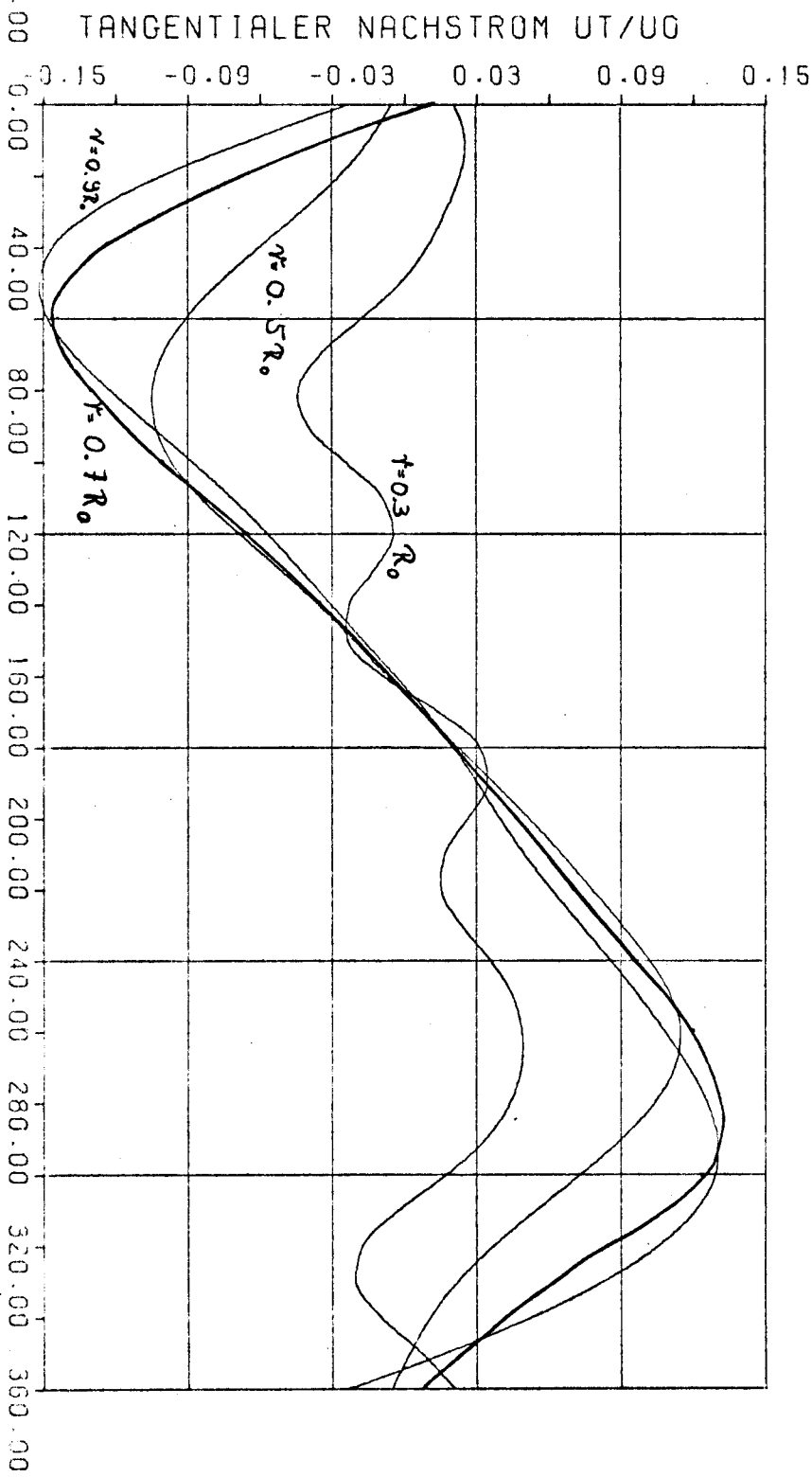
Abb. 1



Zylinderschnitte für den JTTC-Propeller



R66.2



H66.3

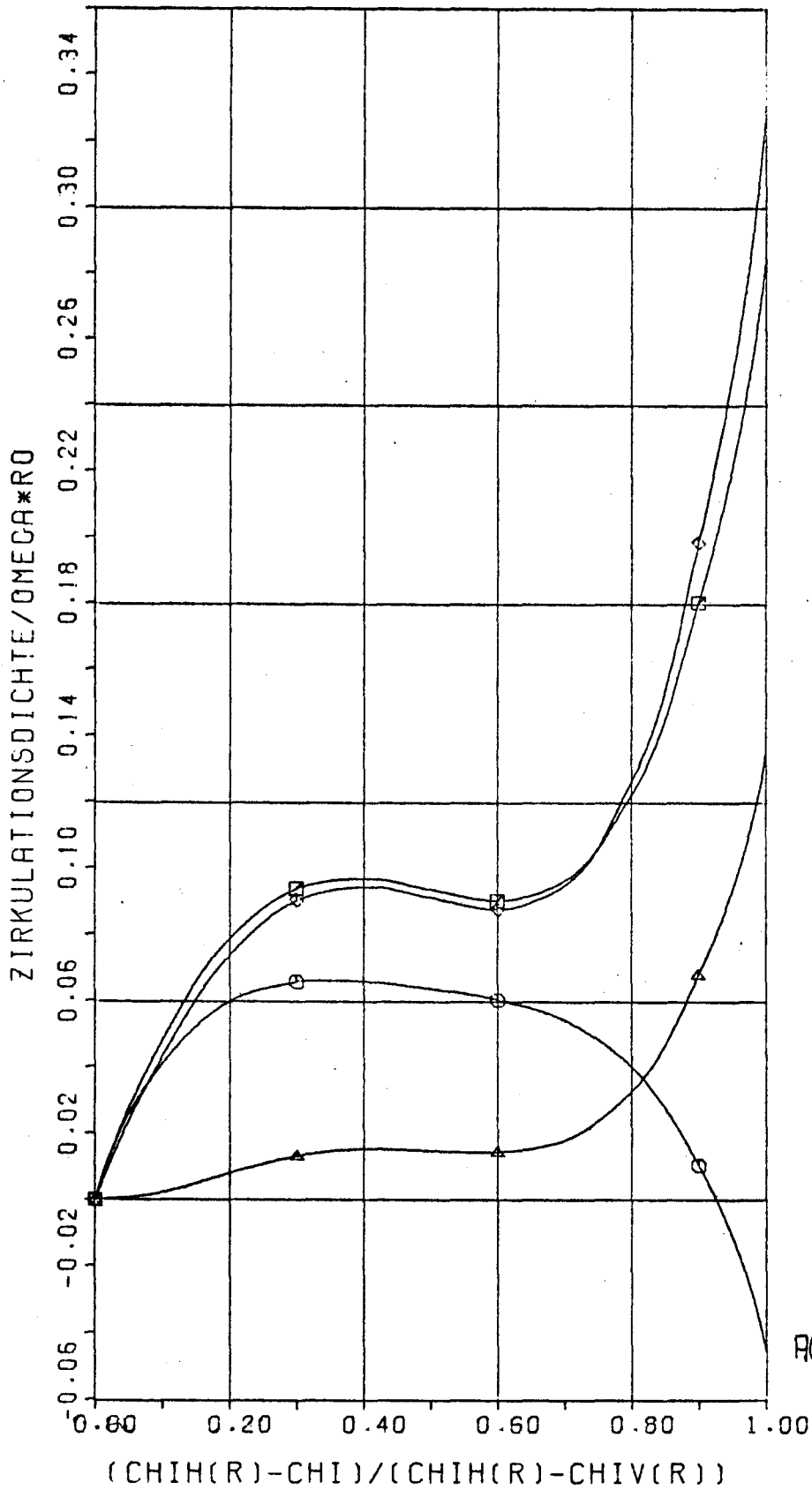


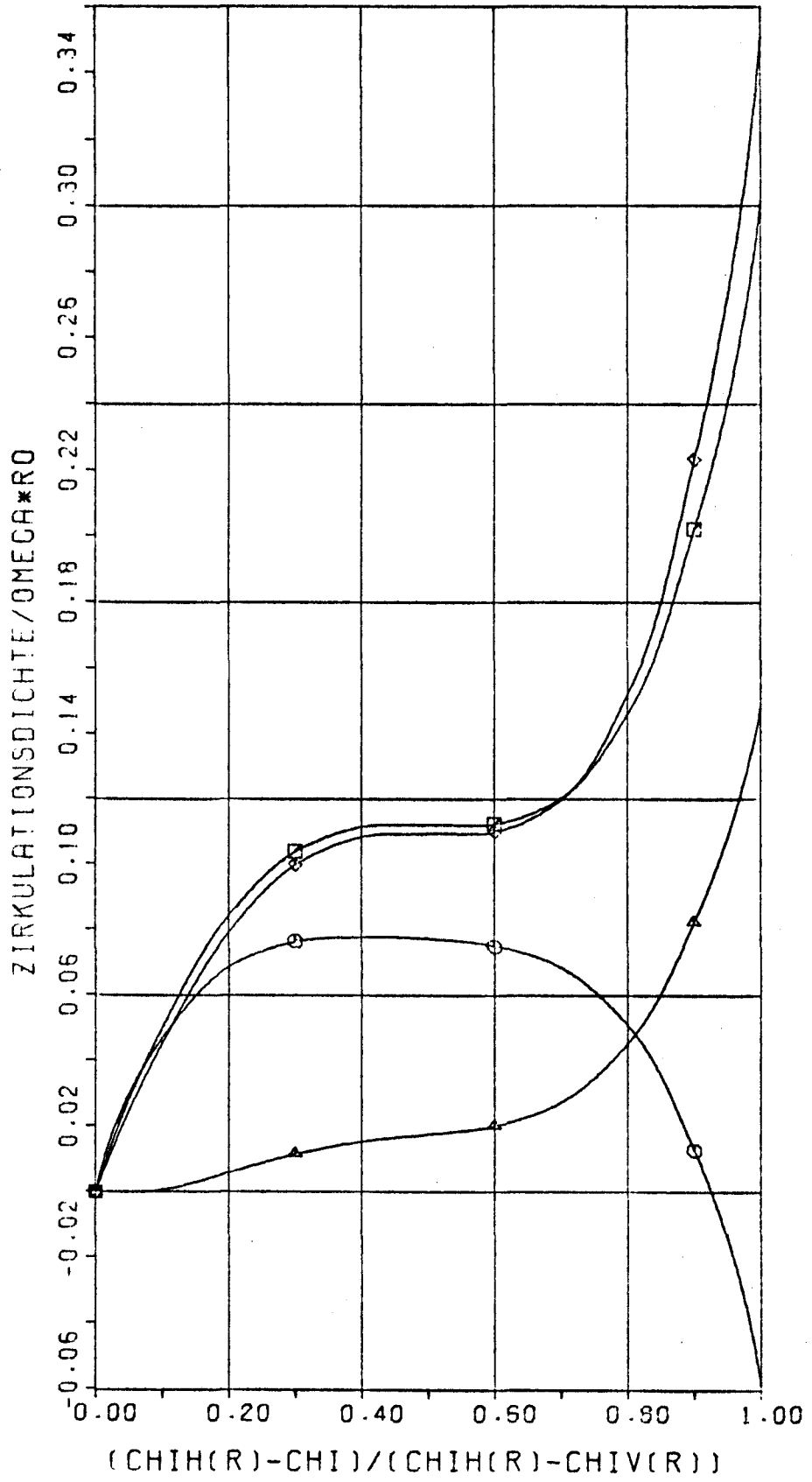
Abb. 4

Göttinger Propeller
stationärer Anteil der Zirkulationsdichte

$$r/R_0 = 0.25$$

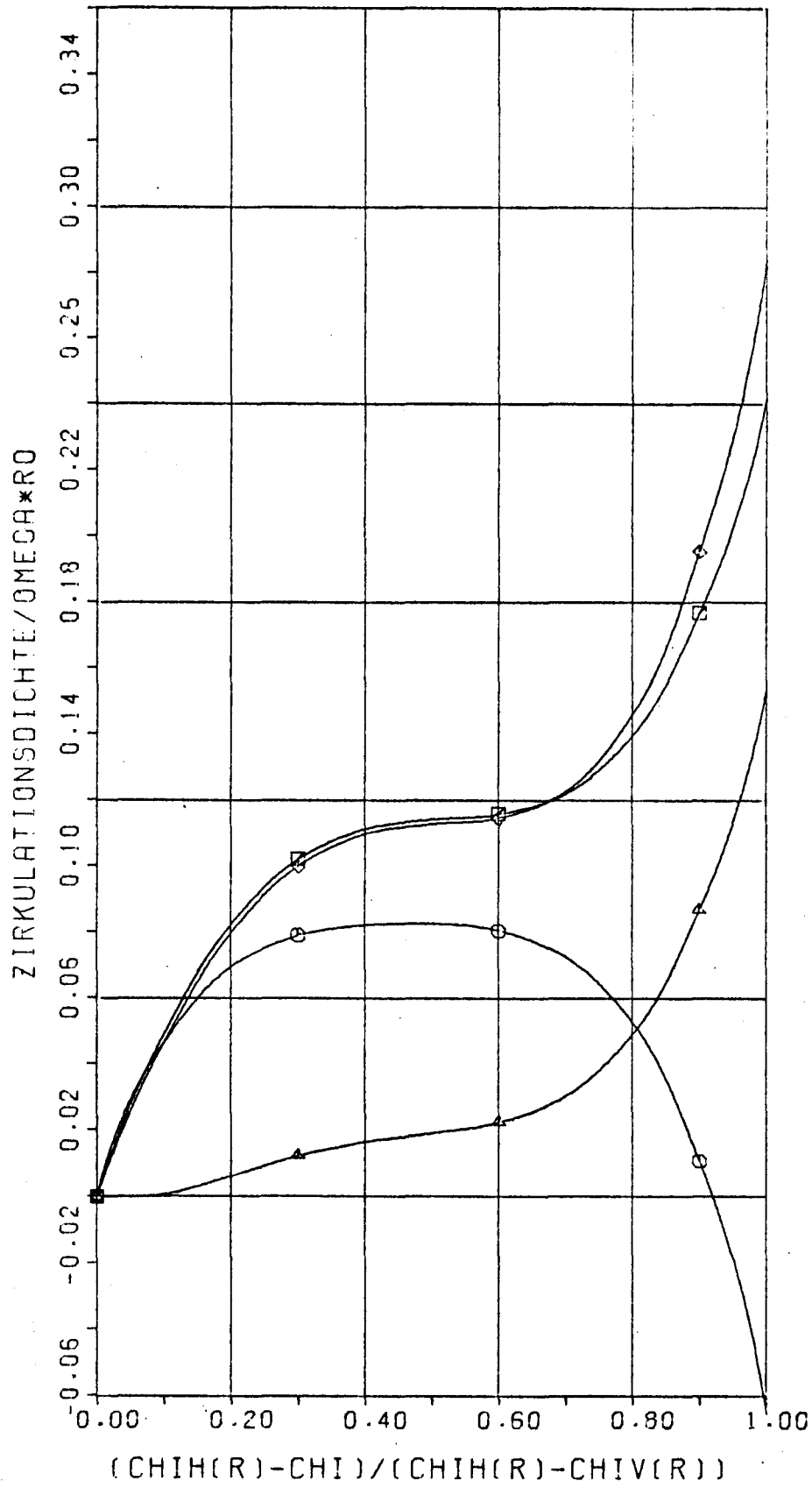
\diamond : ohne Dicke , \square : mit Dicke , \circ : homogene Anströmung

mit $\frac{u_0}{\omega R_0} = 0.22$, \triangle : schräge Platte mit $\frac{u_0}{\omega R_0} = 0.22$



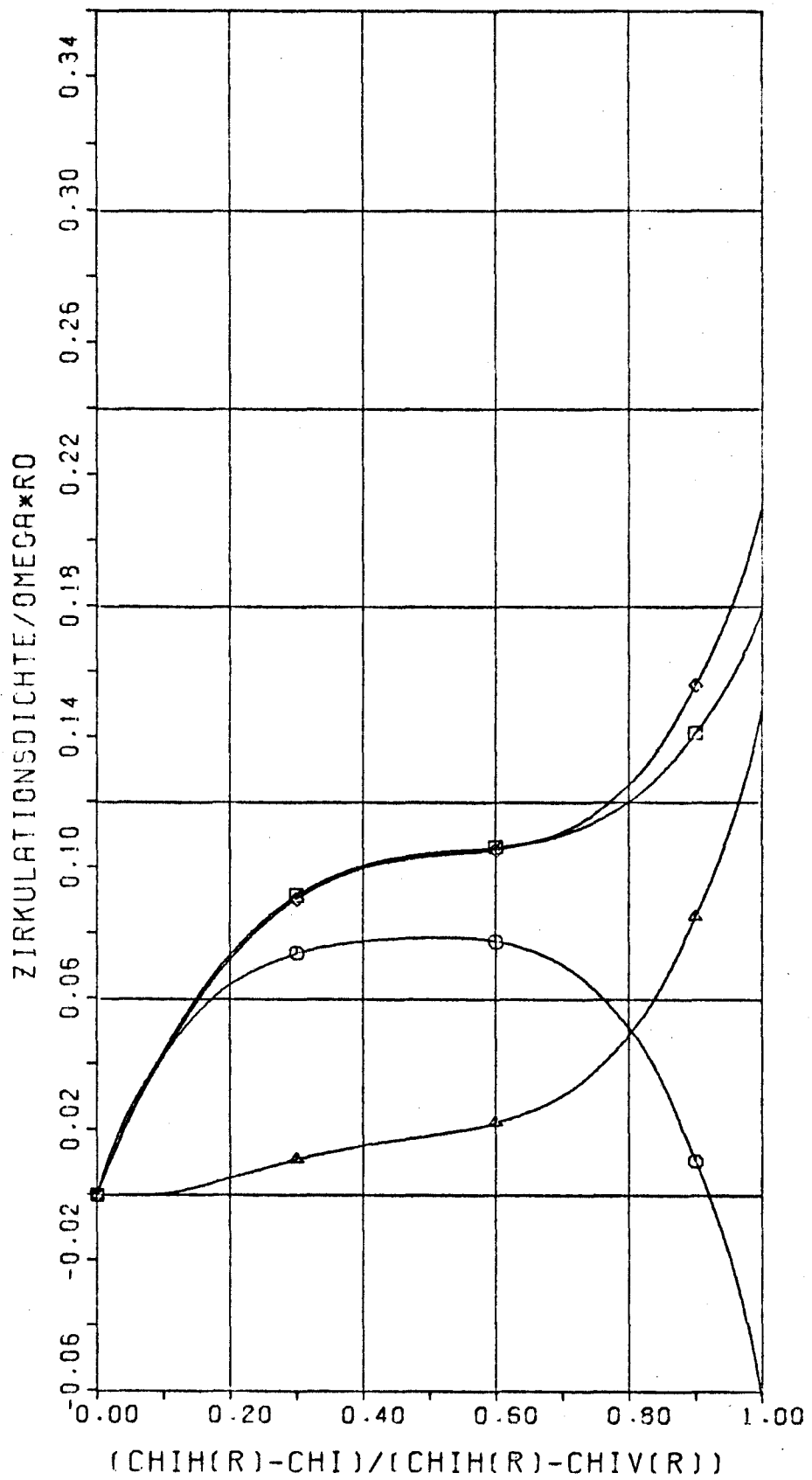
$$\nu/R_0 = 0.30$$

Abb. 5



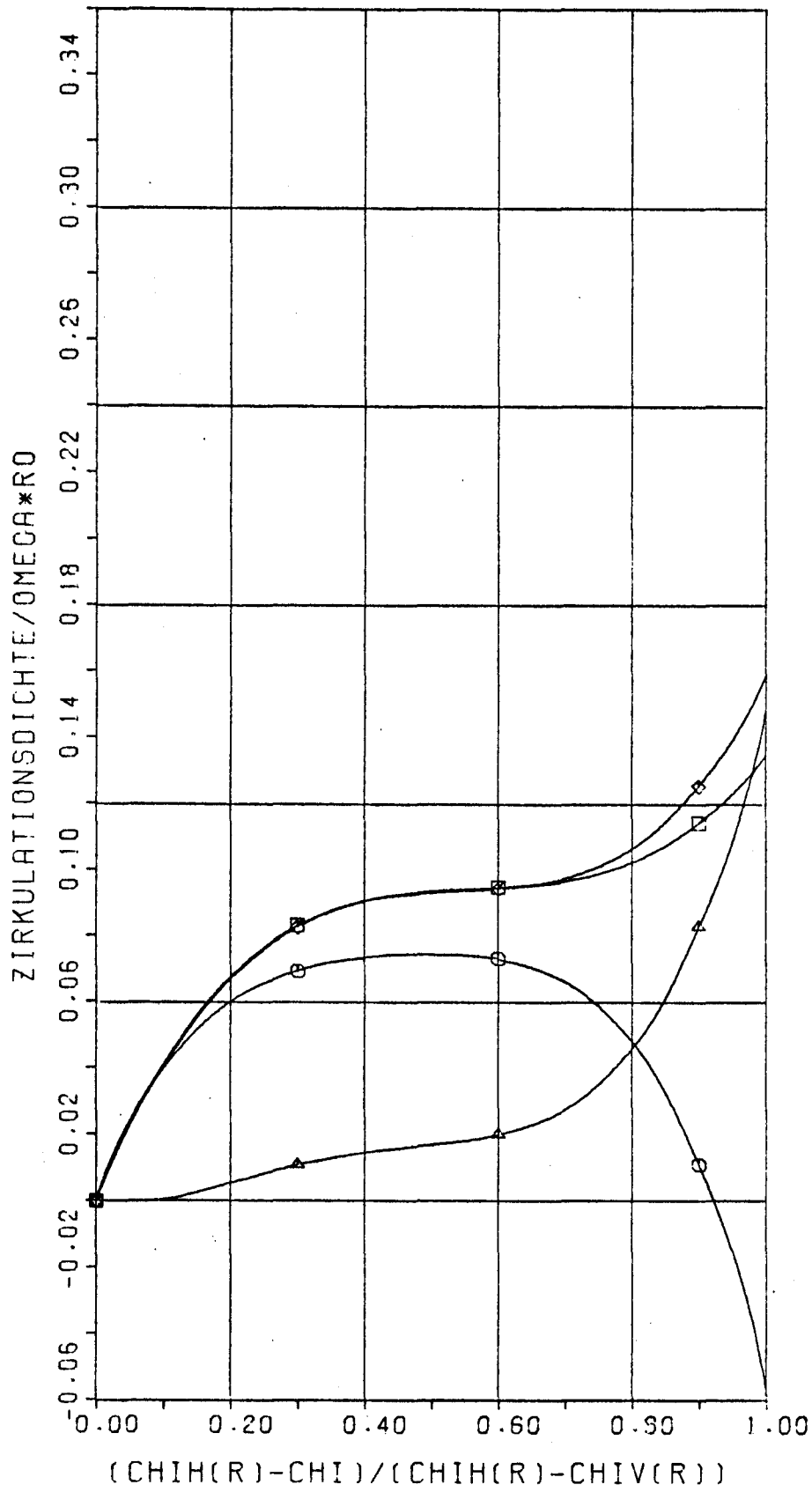
$$r/R_0 = 0.40$$

Abb. 6



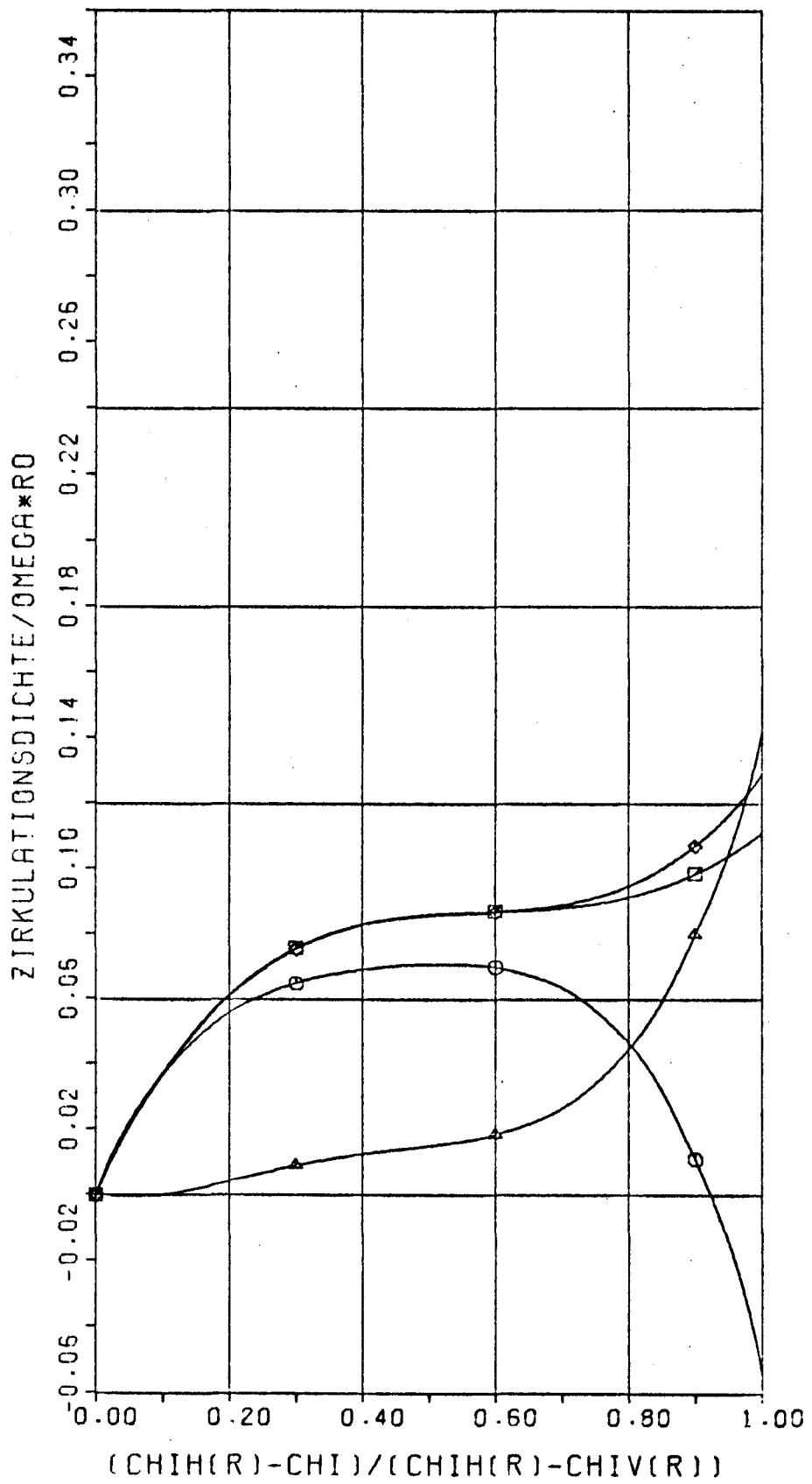
$$r/R_0 = 0.5$$

Fig. 7



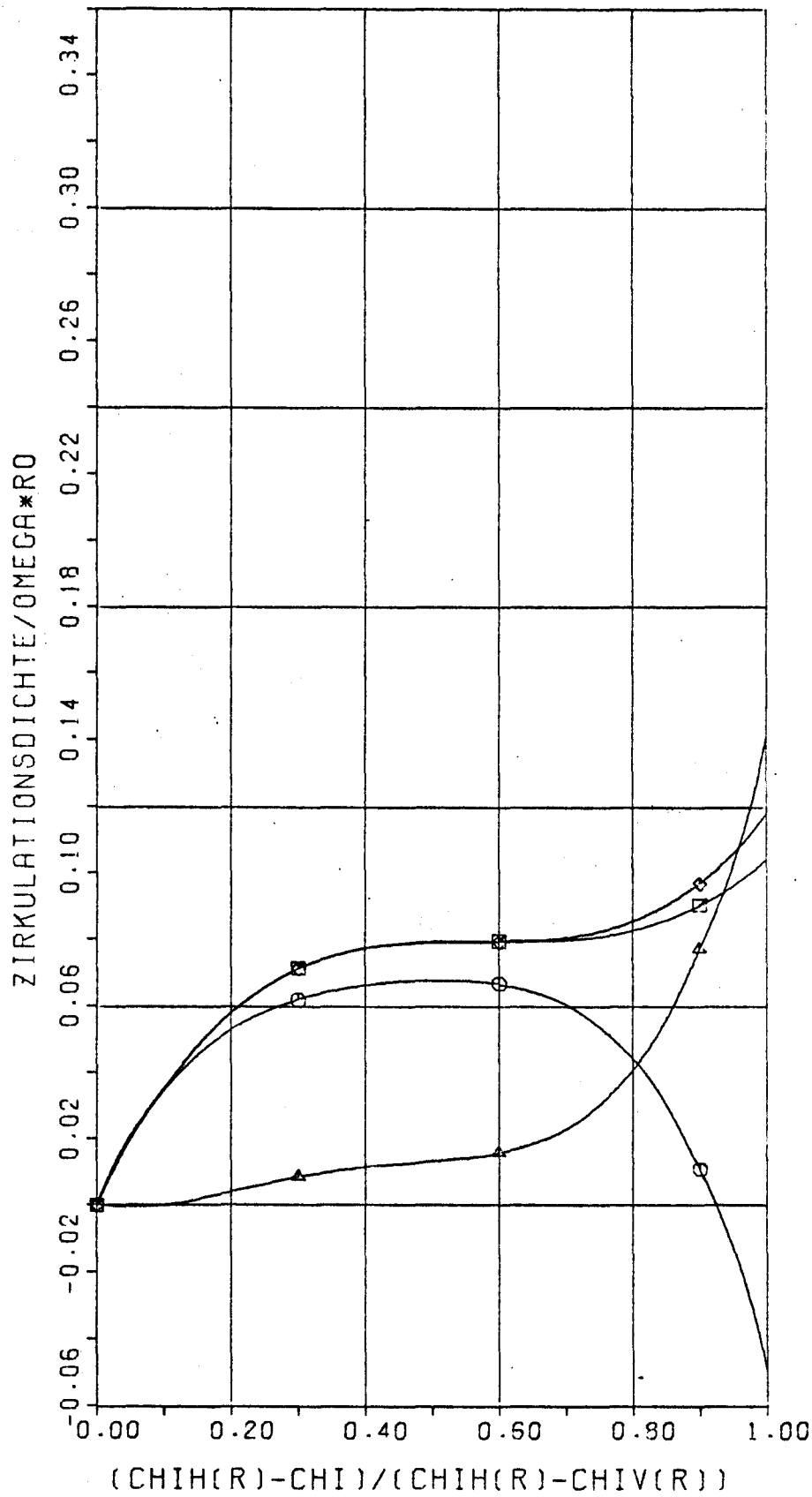
$$r/R_0 = 0.6$$

A66.8



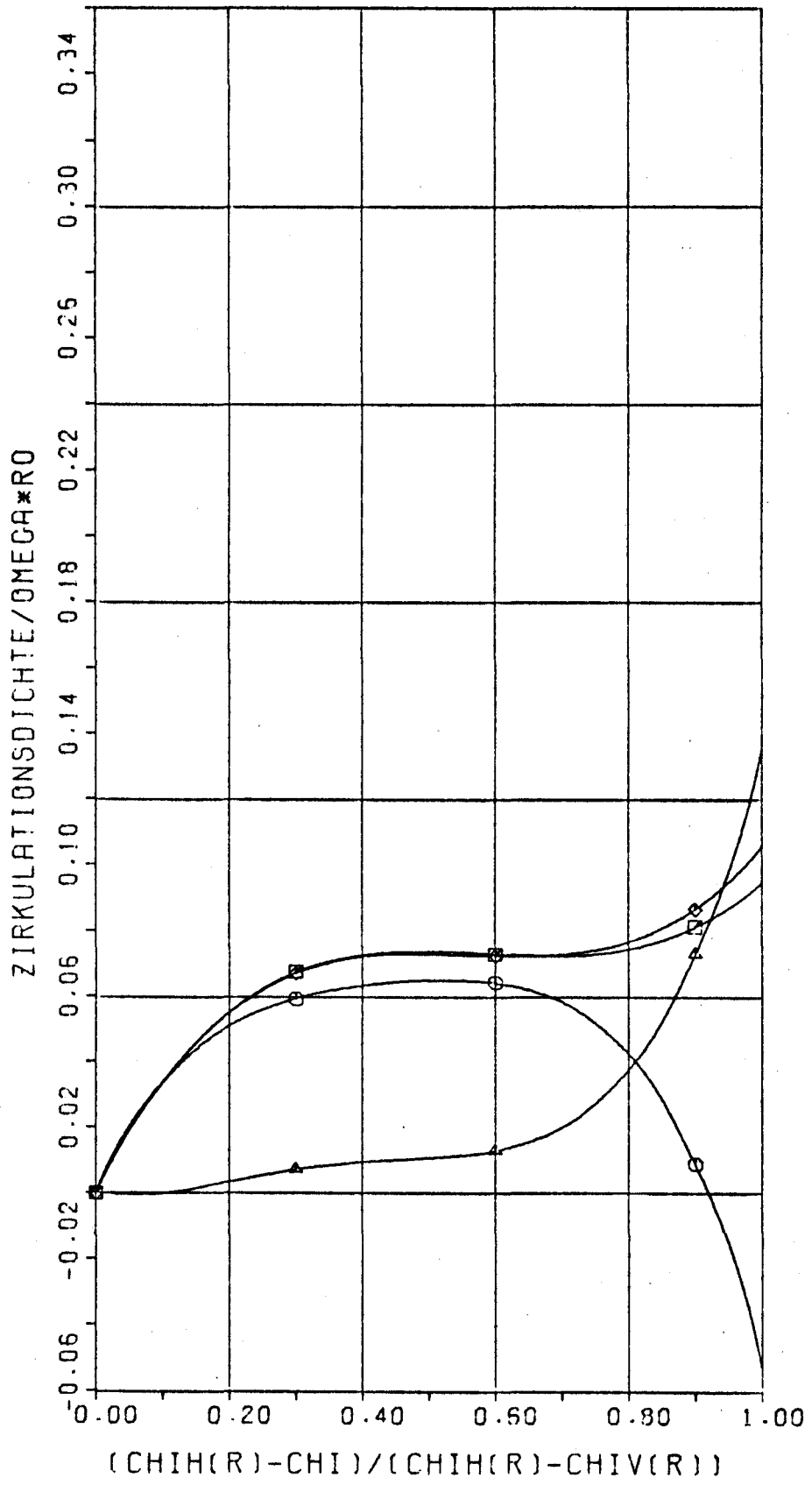
$r/R_0 = 0.7$

A66.9



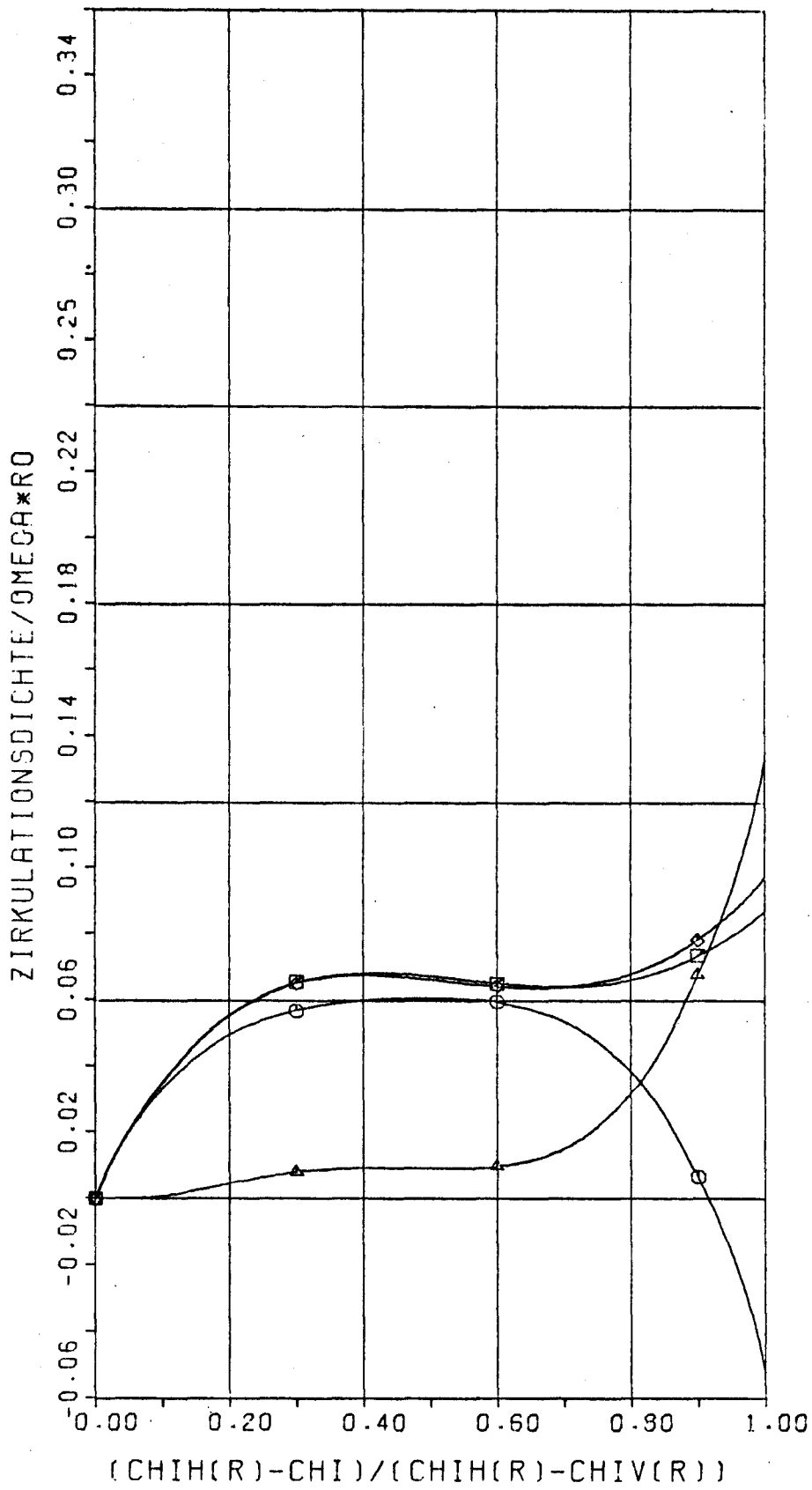
$$r/R_0 = 0.8$$

Abb. 10



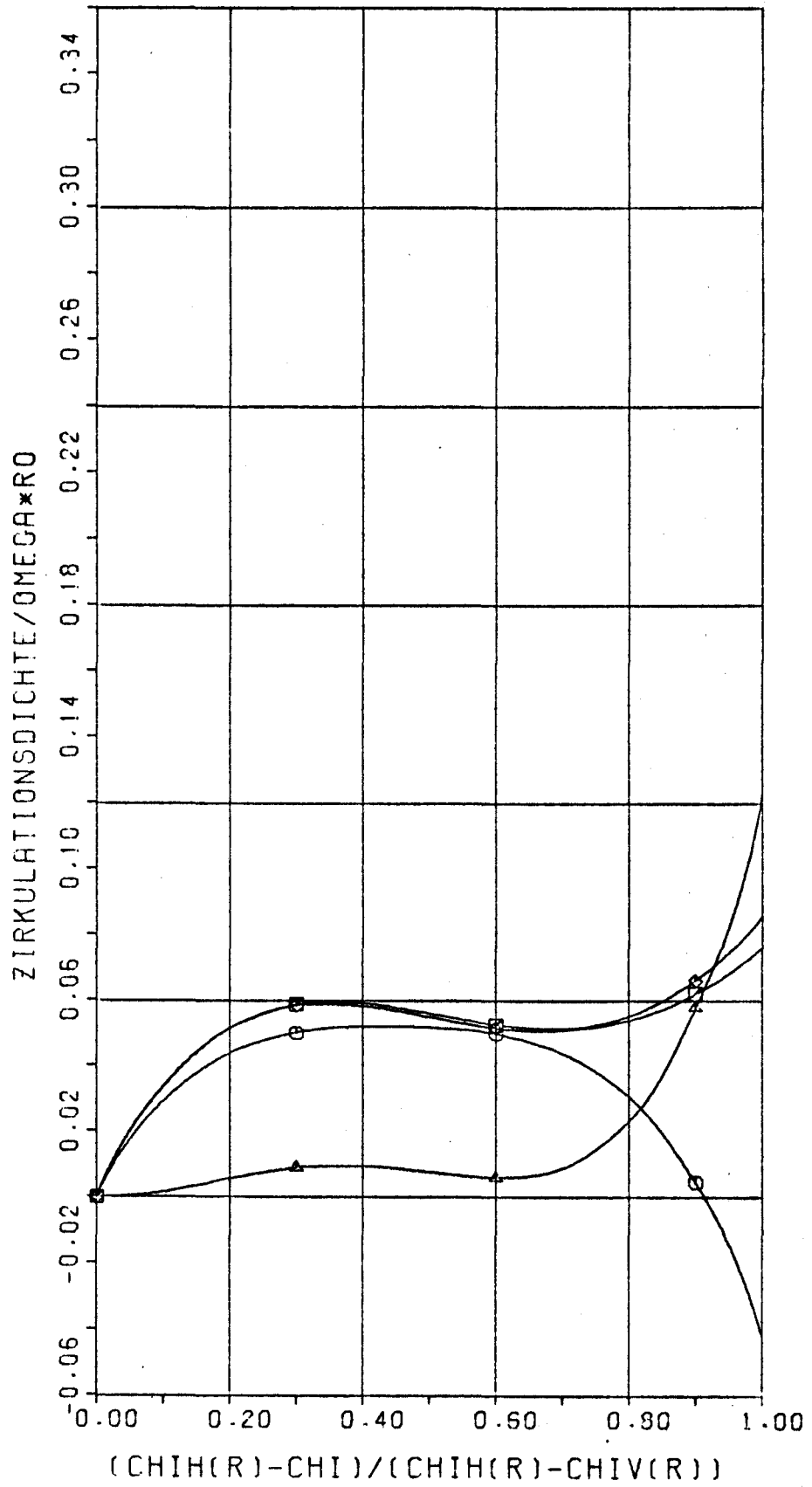
$$r/R_0 = 0.9$$

A66.11



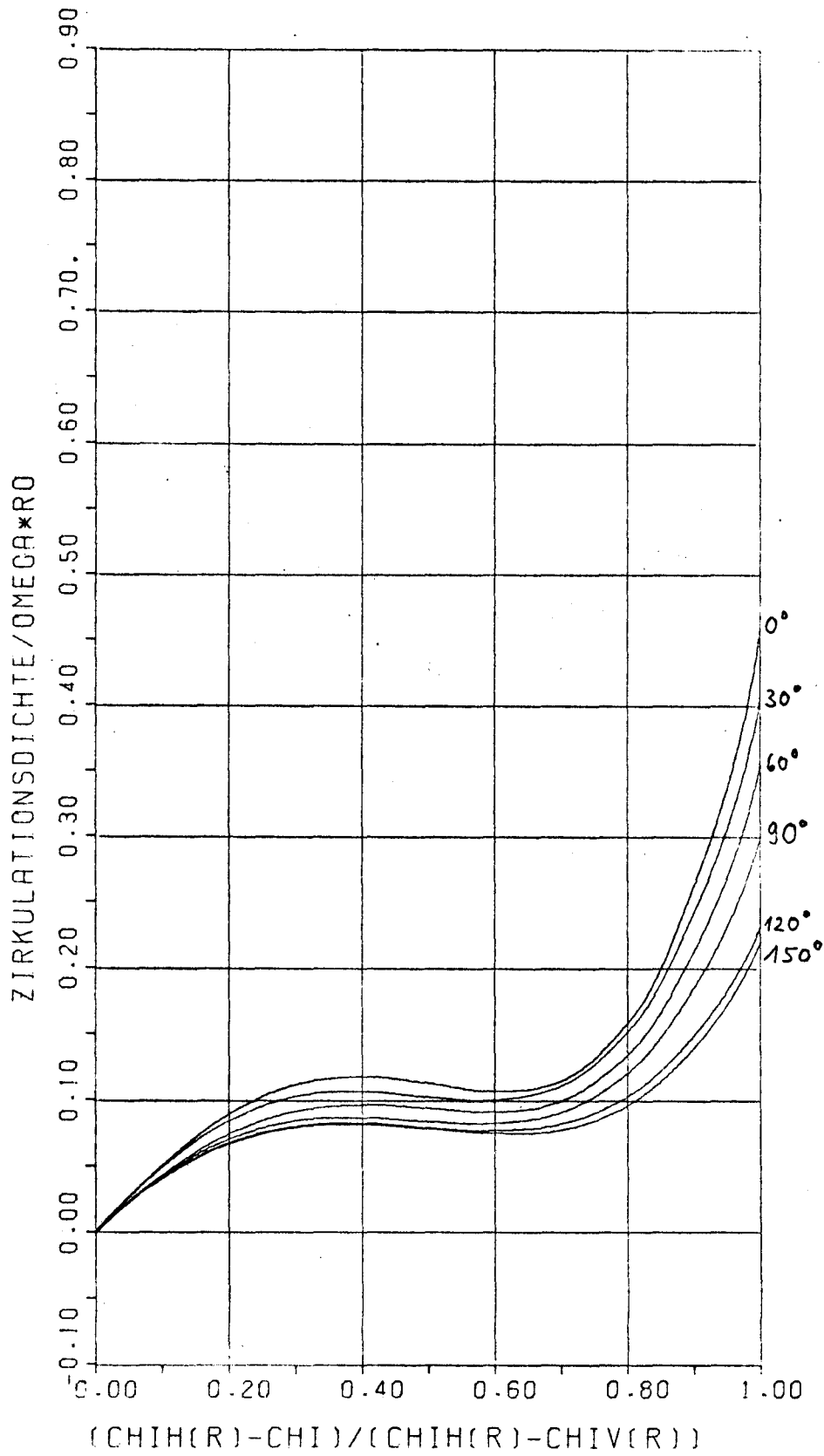
$$r/R_0 = 0.95$$

A66.12

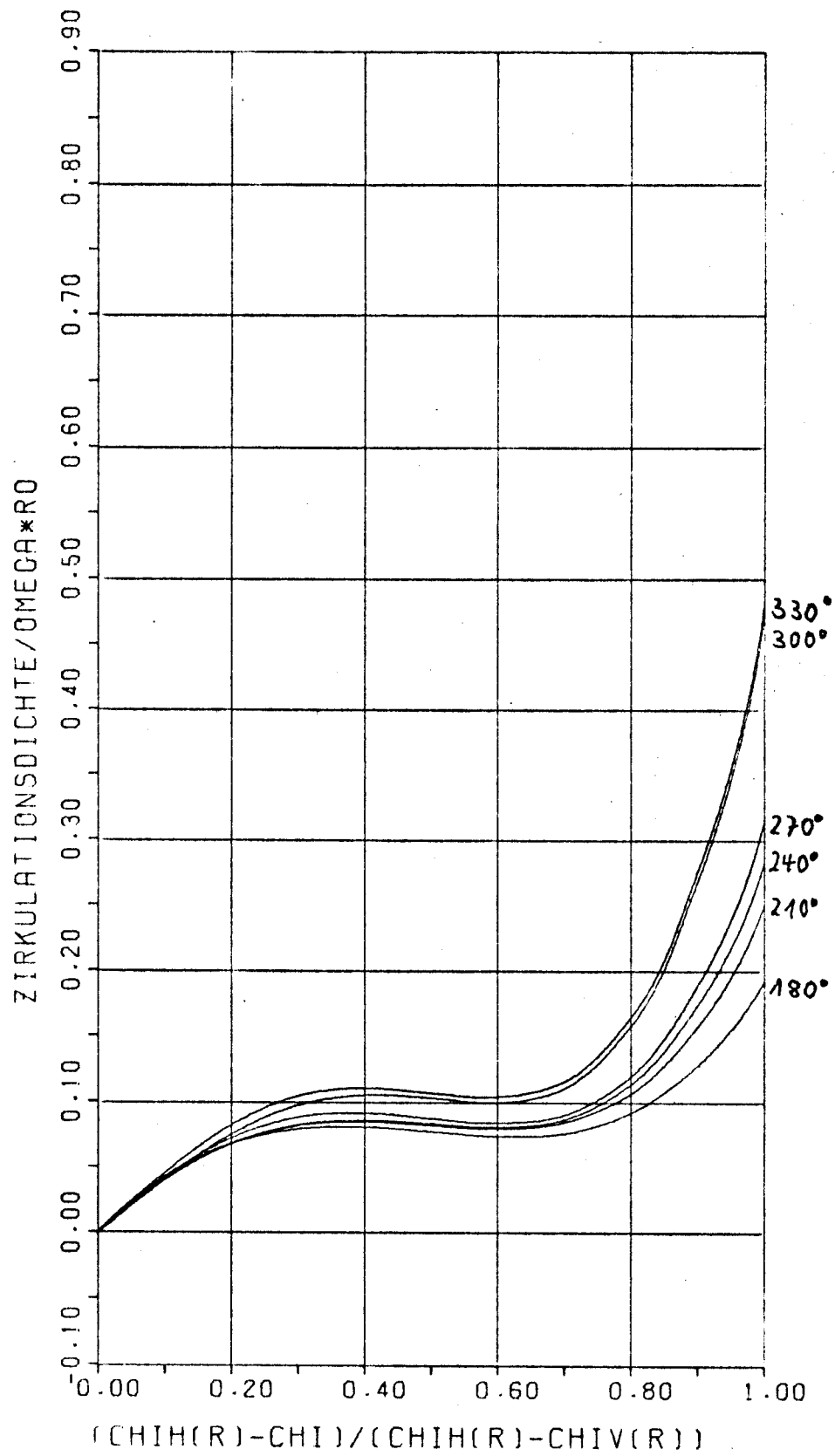


$$r/R_0 = 0.975$$

A66.13

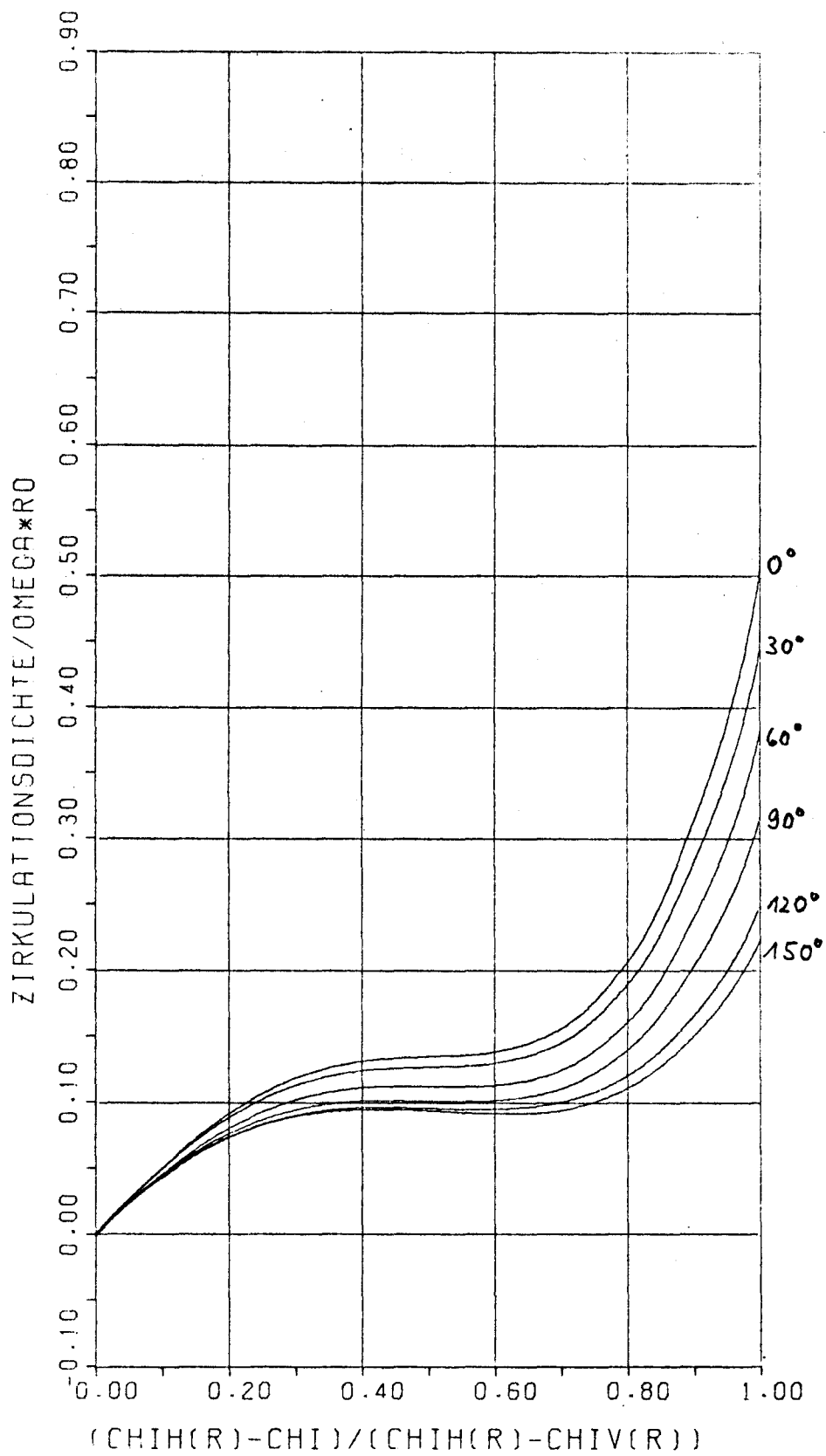


$r = 0.25 R_0$
 GÖTTINGER PROPELLER
 R66.14



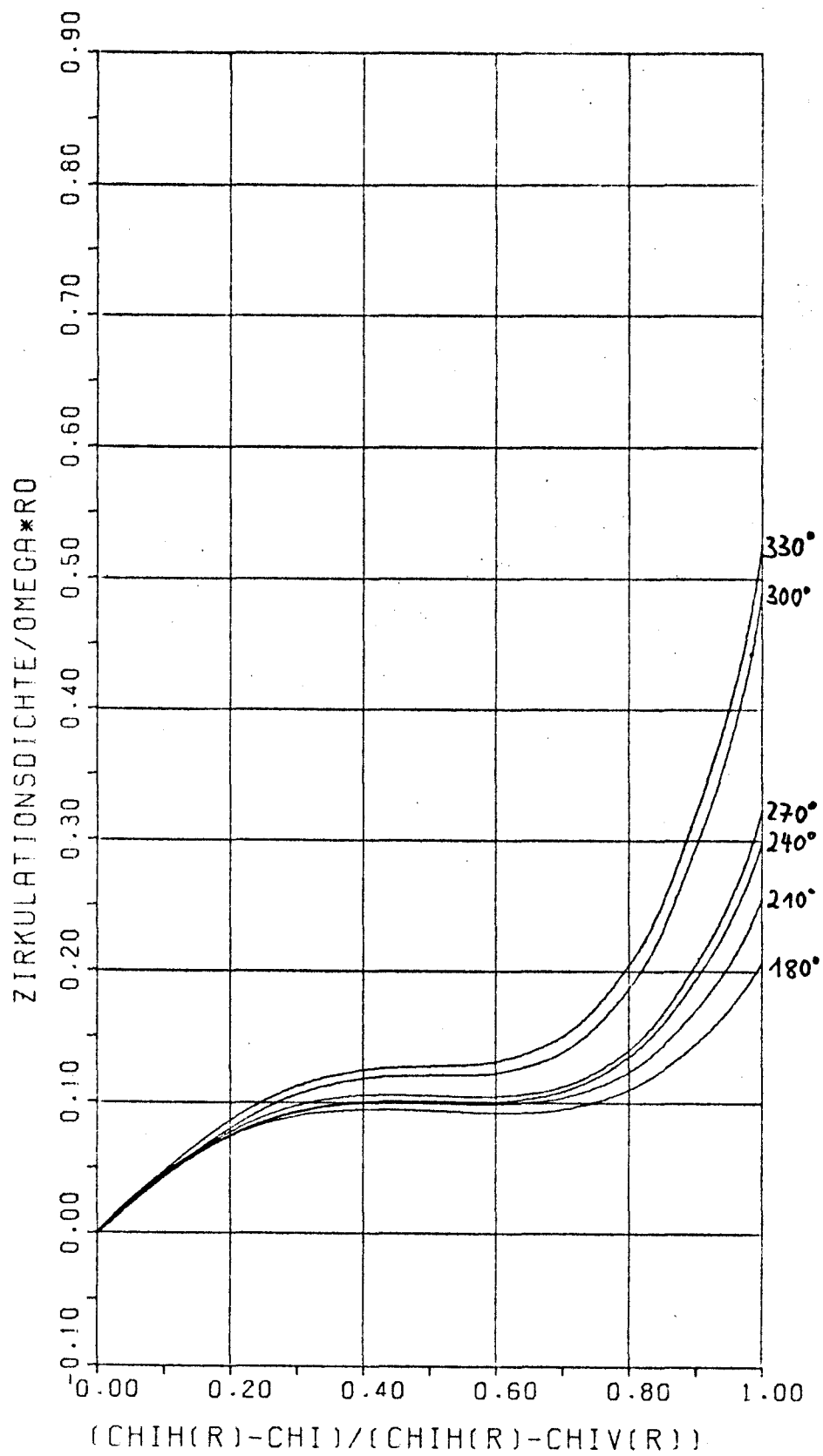
$$r = 0.25 R_0$$

Abb. 15



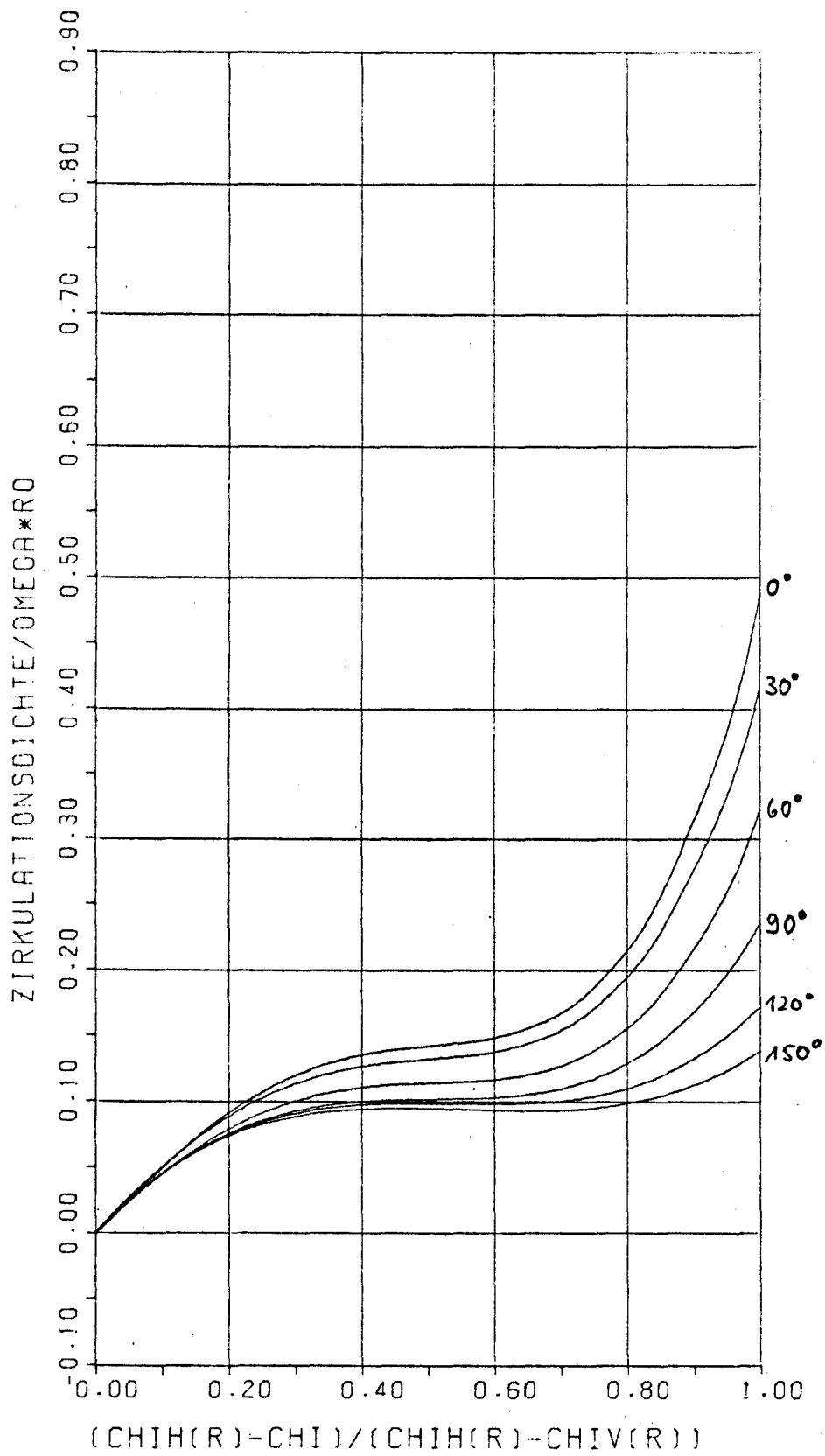
$$r = 0.3 R_0$$

A66.16



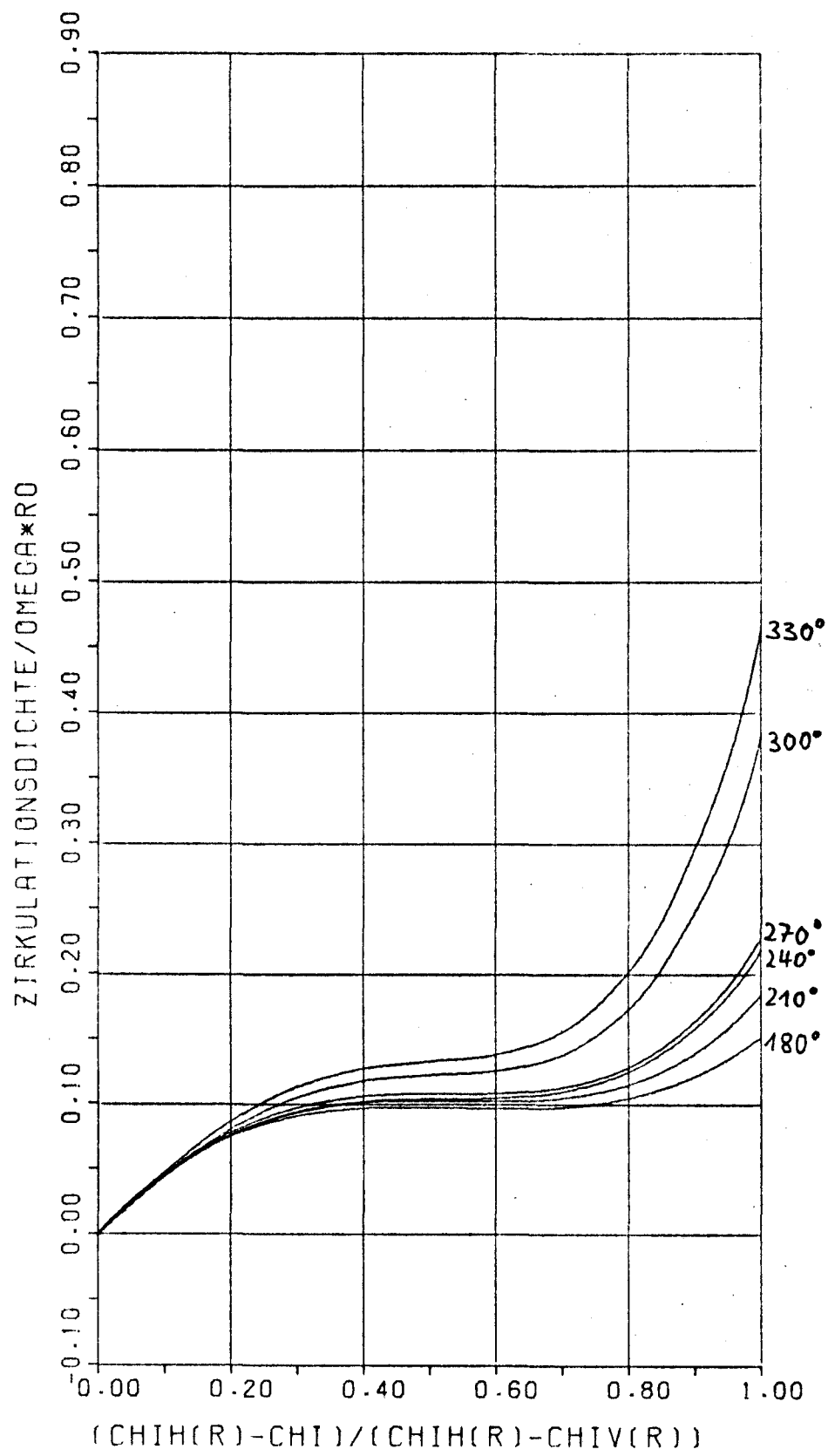
$$\tau = 0.3 R_0$$

A66.17

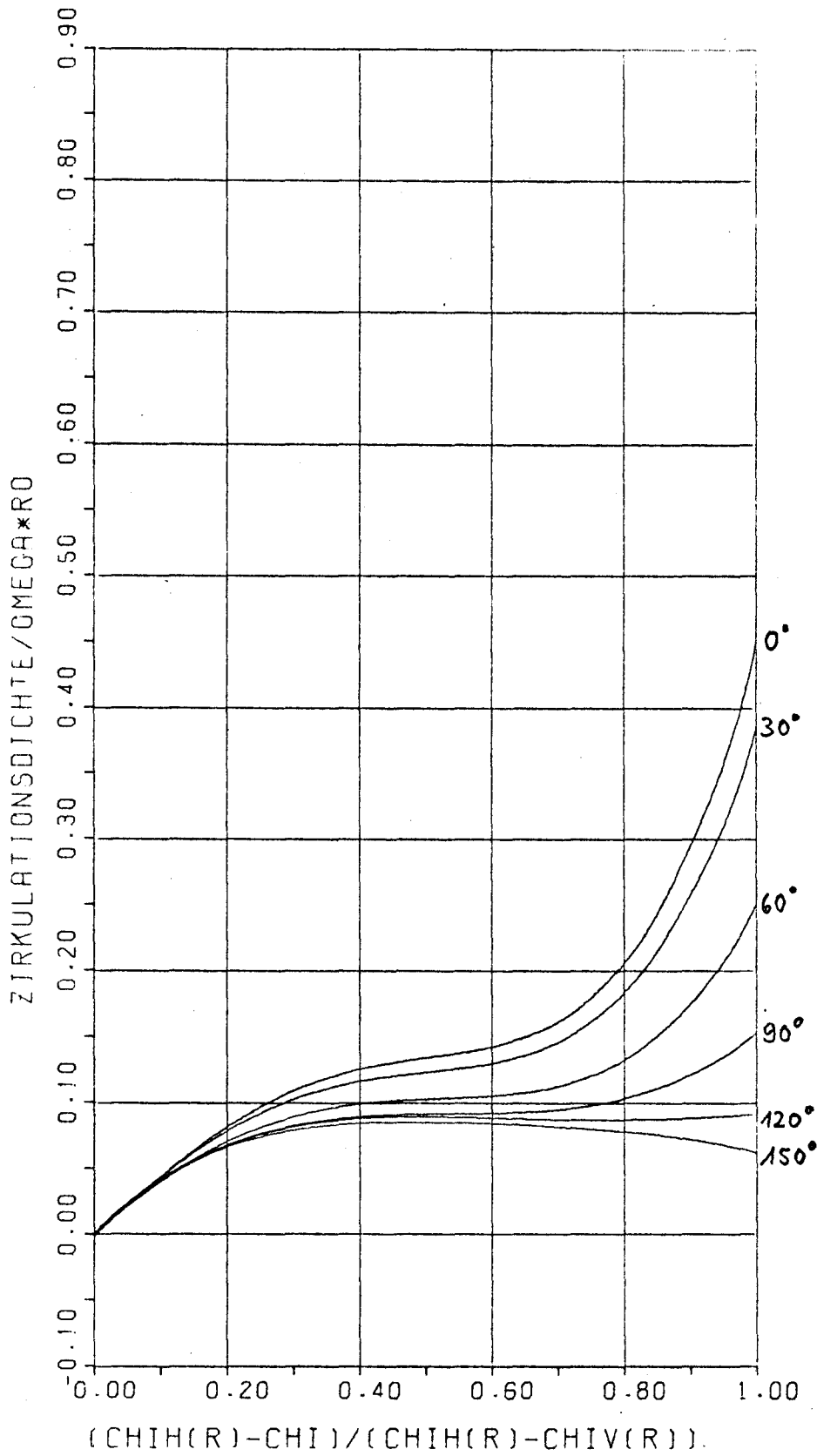


$$\tau = 0.4 R_0$$

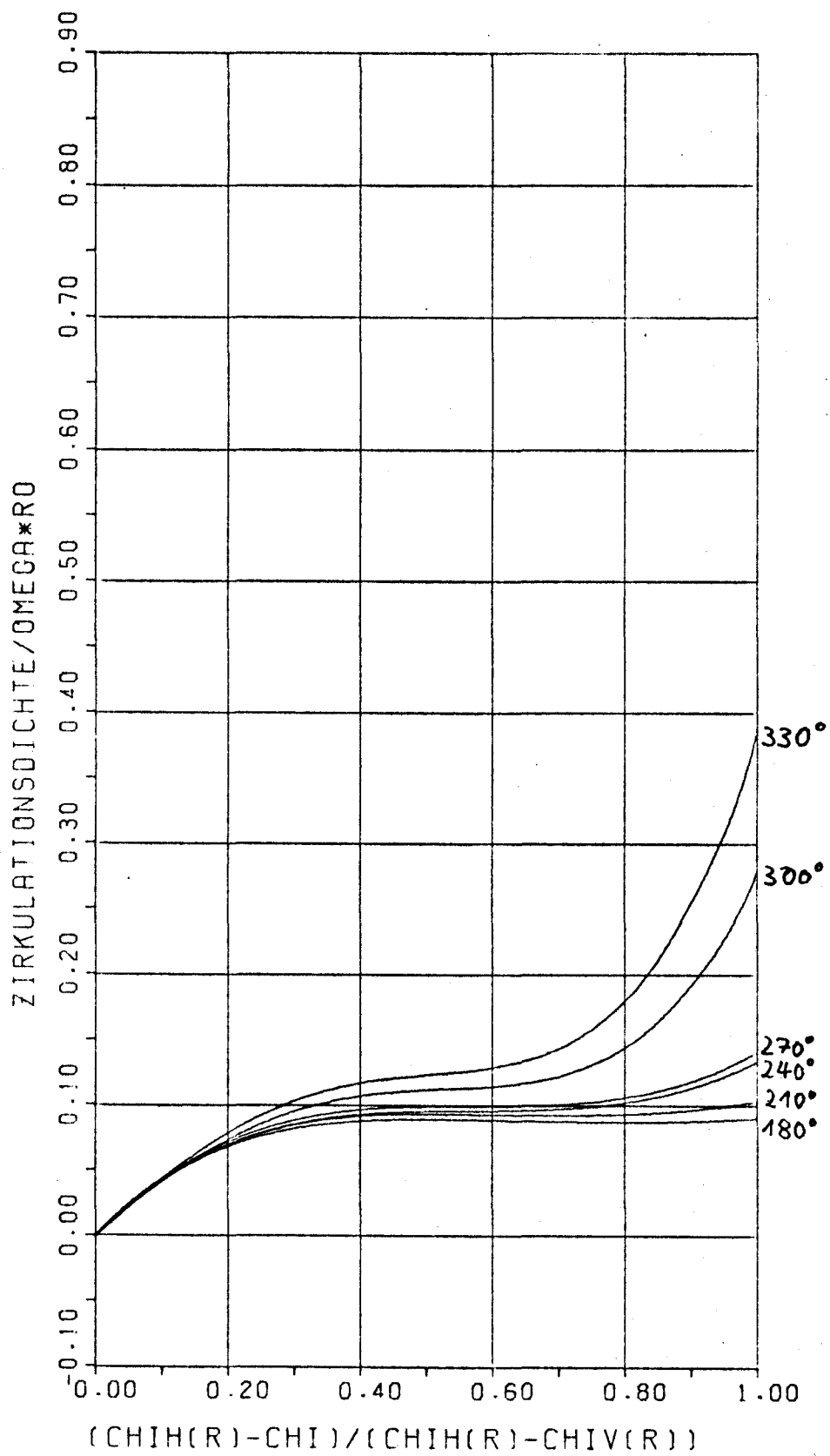
A66.18



$\tau = 0.4 R_0$
 A66.19

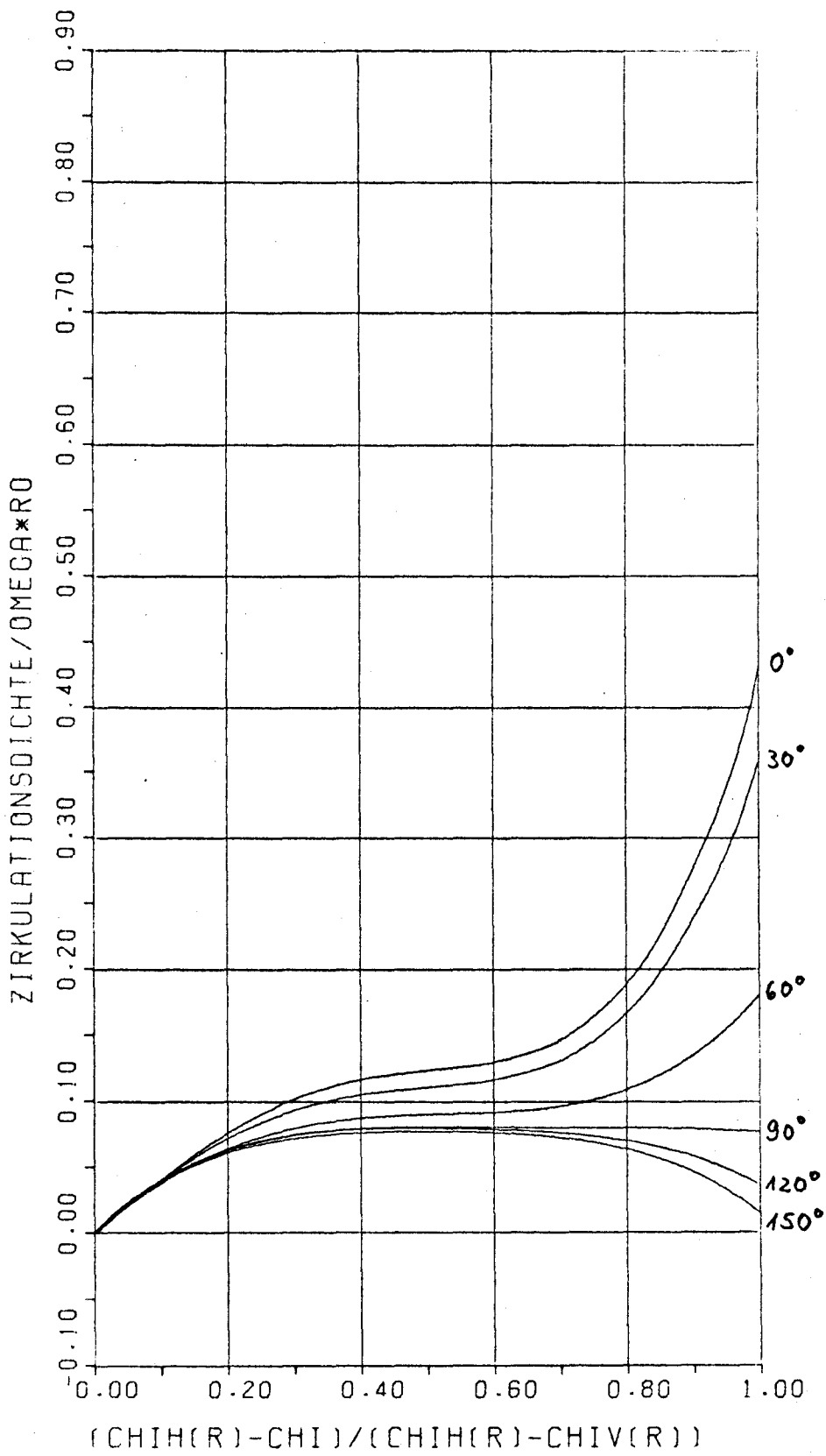


$\tau = 0.5 R_0$
A66.20



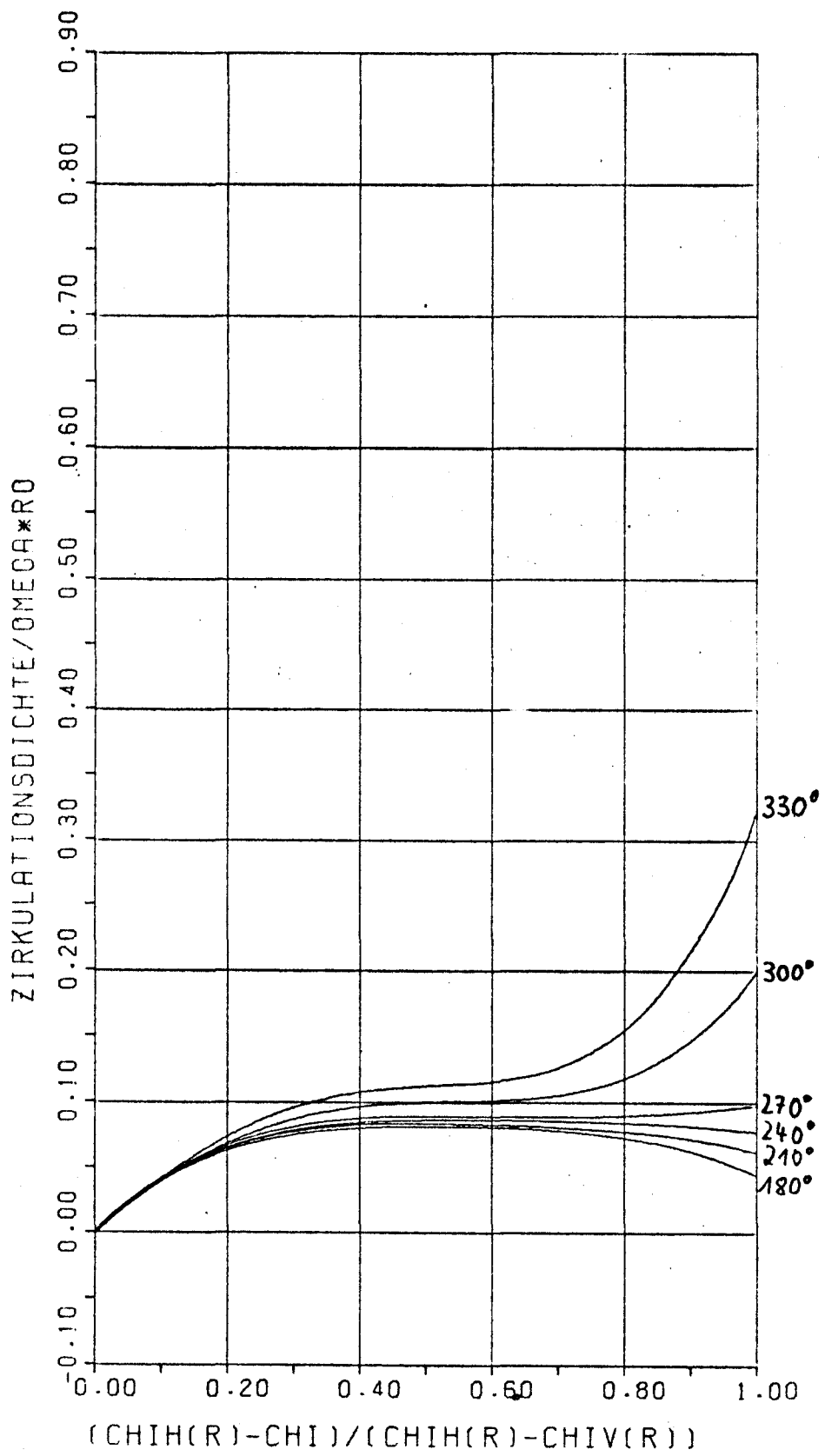
$\tau = 0.5 R_0$

A66.21



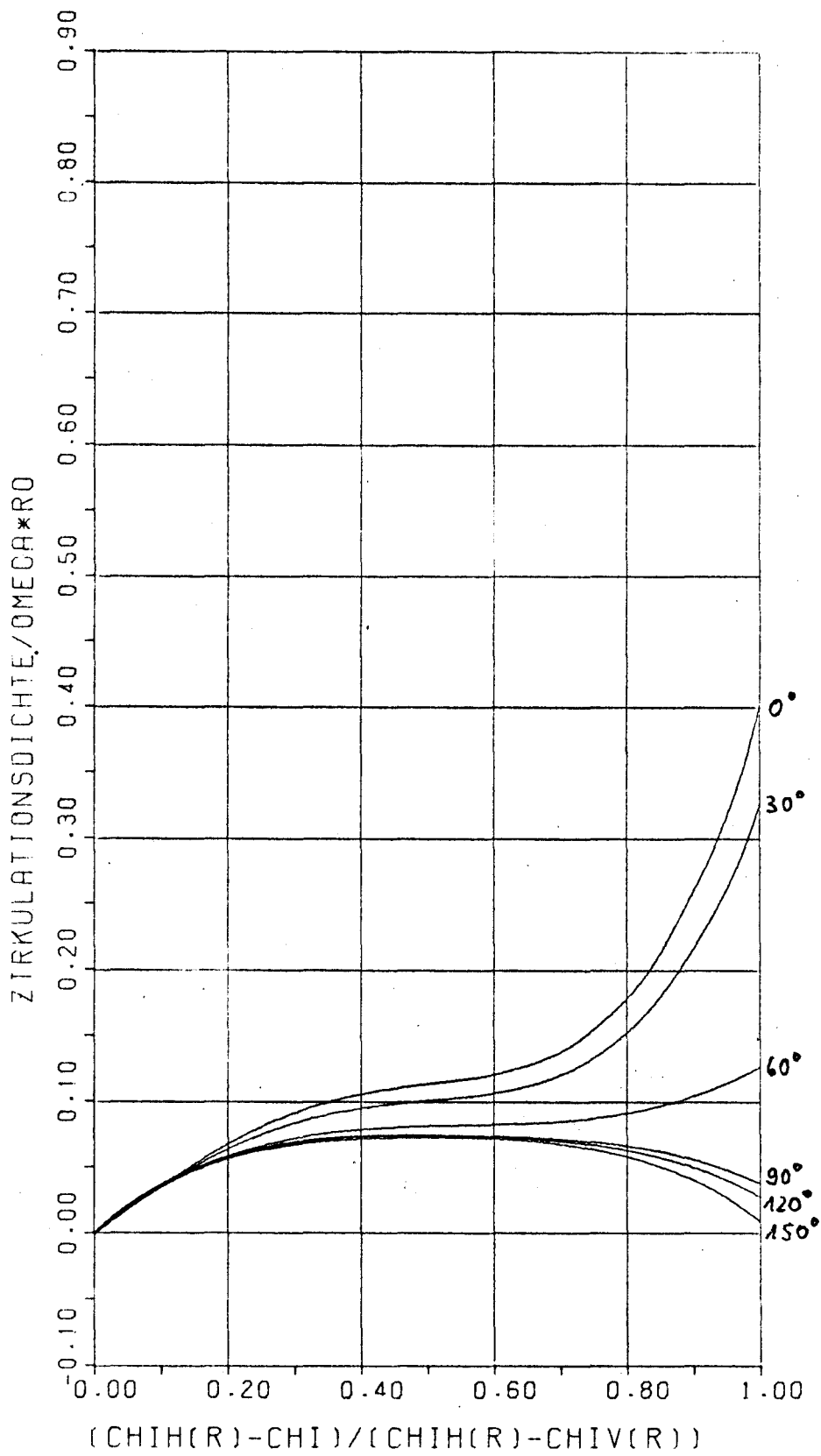
$$\tau = 0.6 R_0$$

A66.22



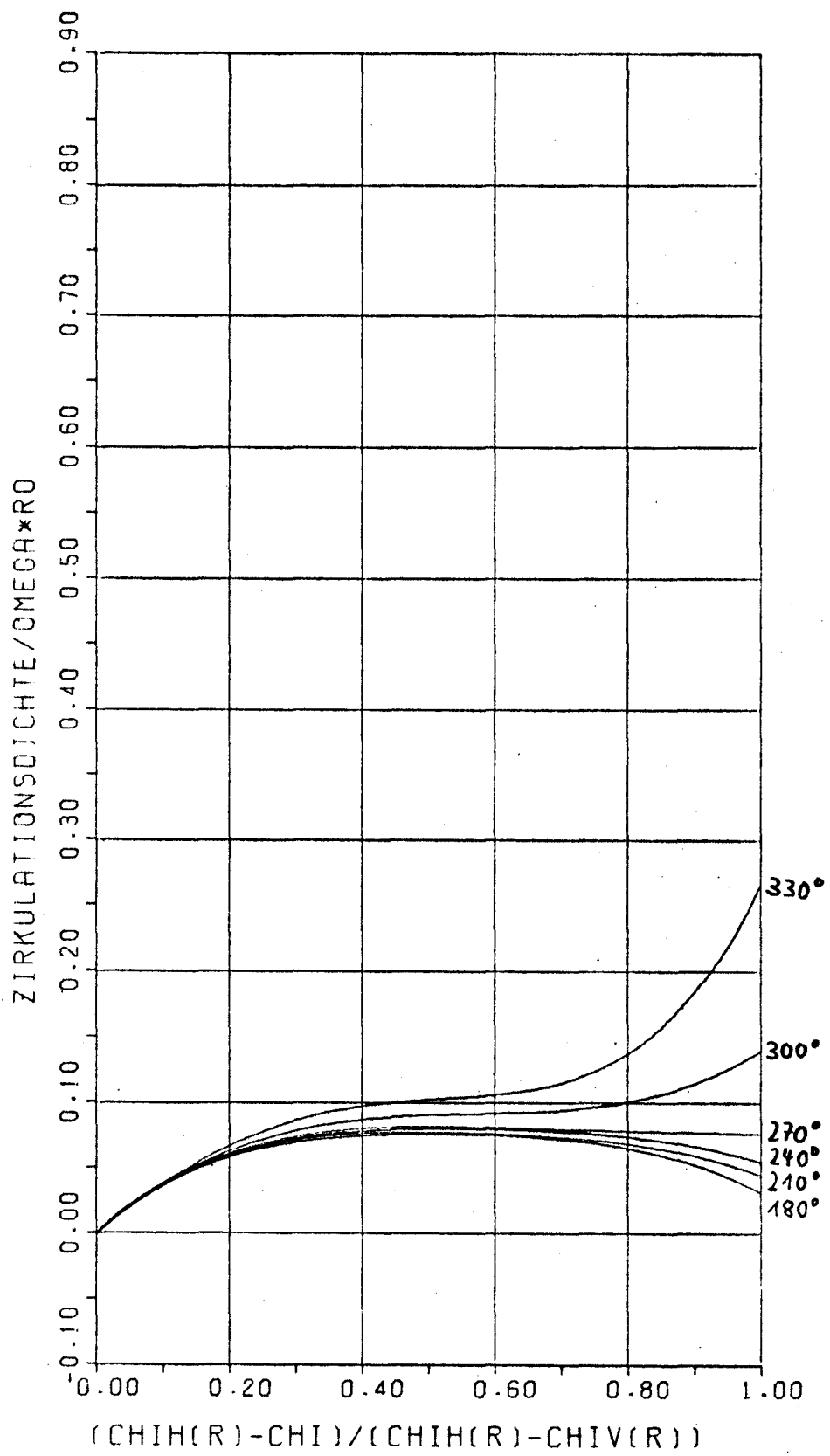
$$\gamma = 0.6 R_0$$

A66.23

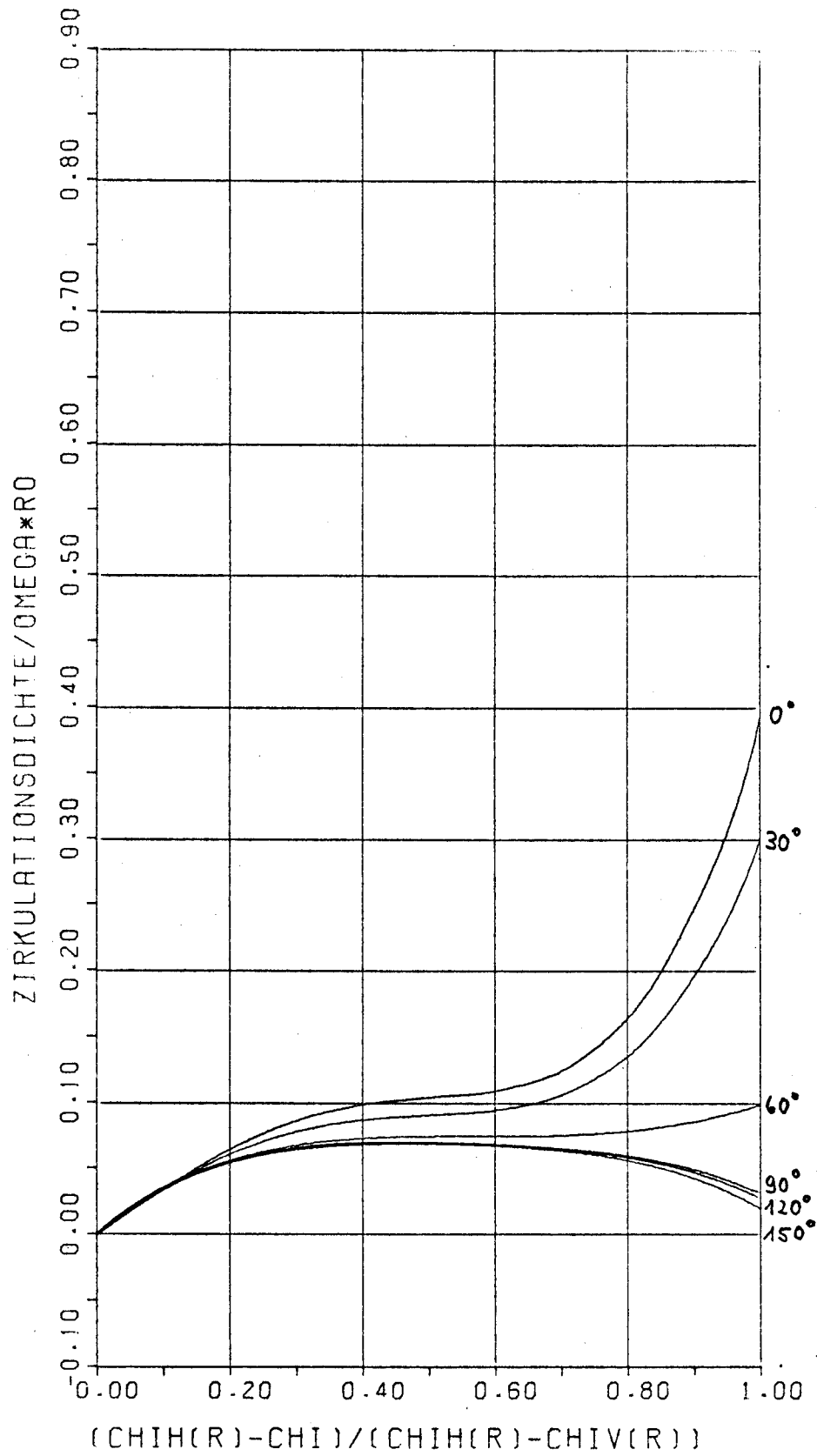


$r = 0.7 R_0$

A66.24

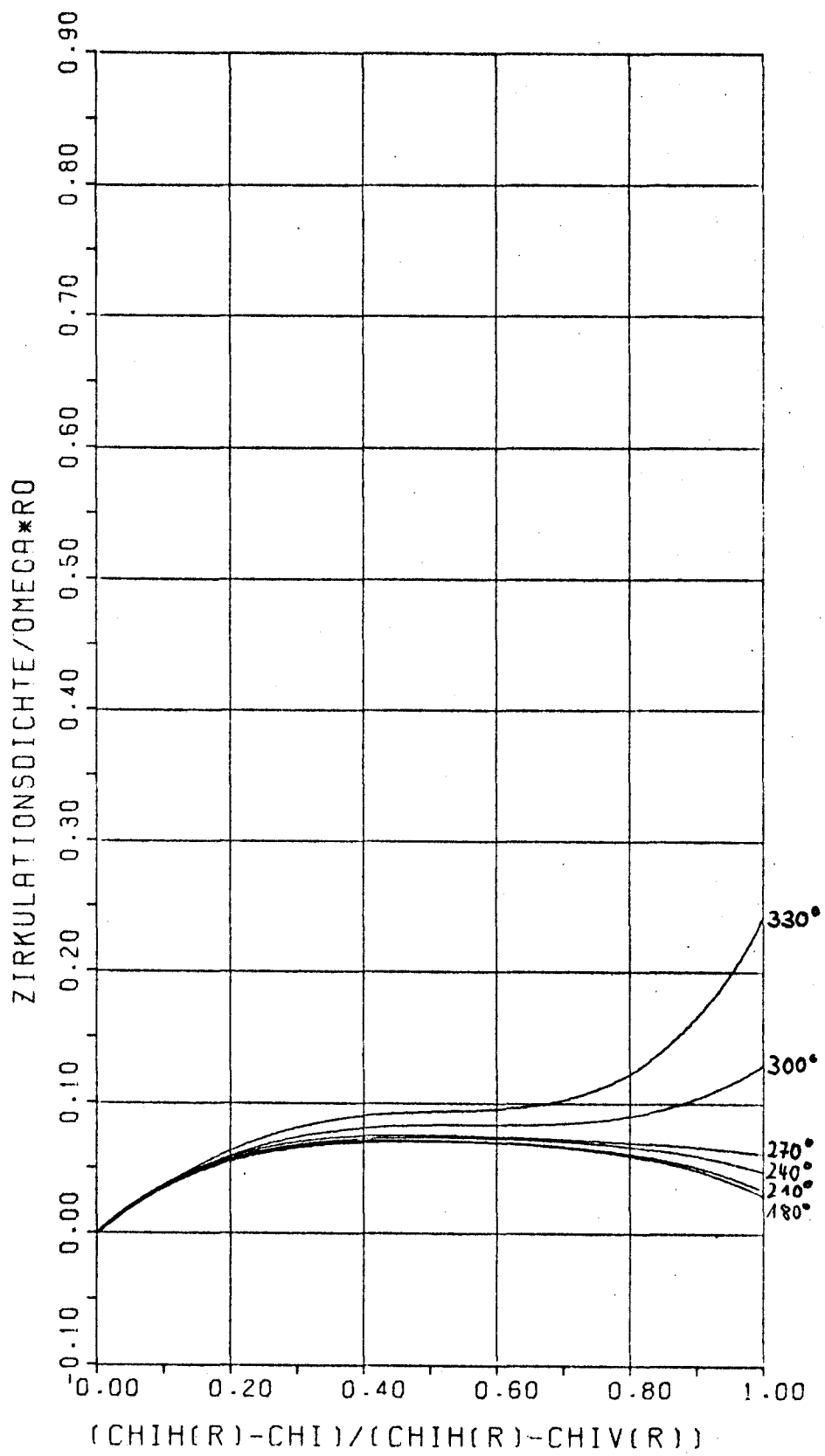


$\tau = 0.7 R_0$
 A66.25



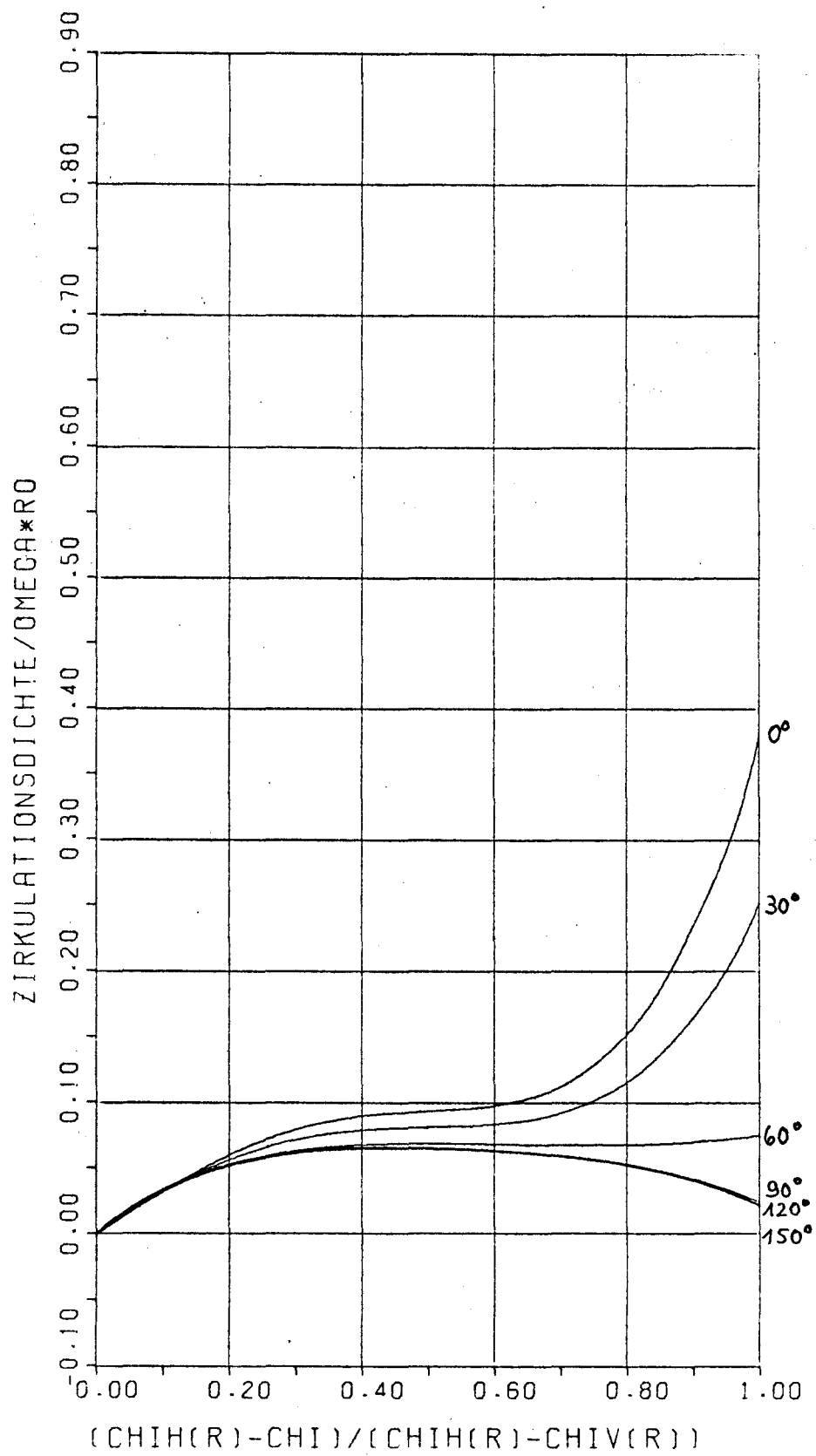
$$\tau = 0.8 R_0$$

A66.26



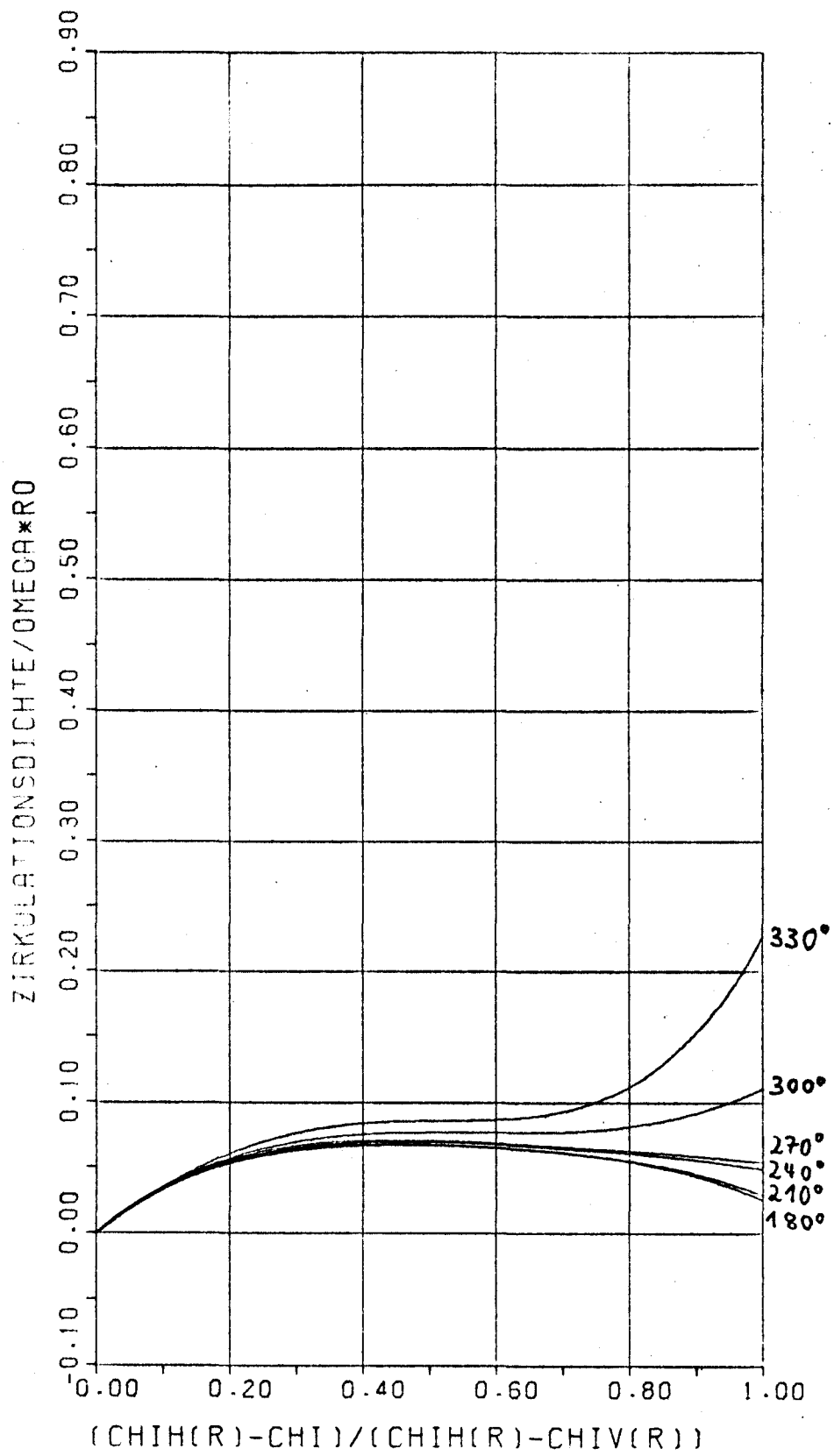
$$\tau = 0.8R_0$$

A66.27



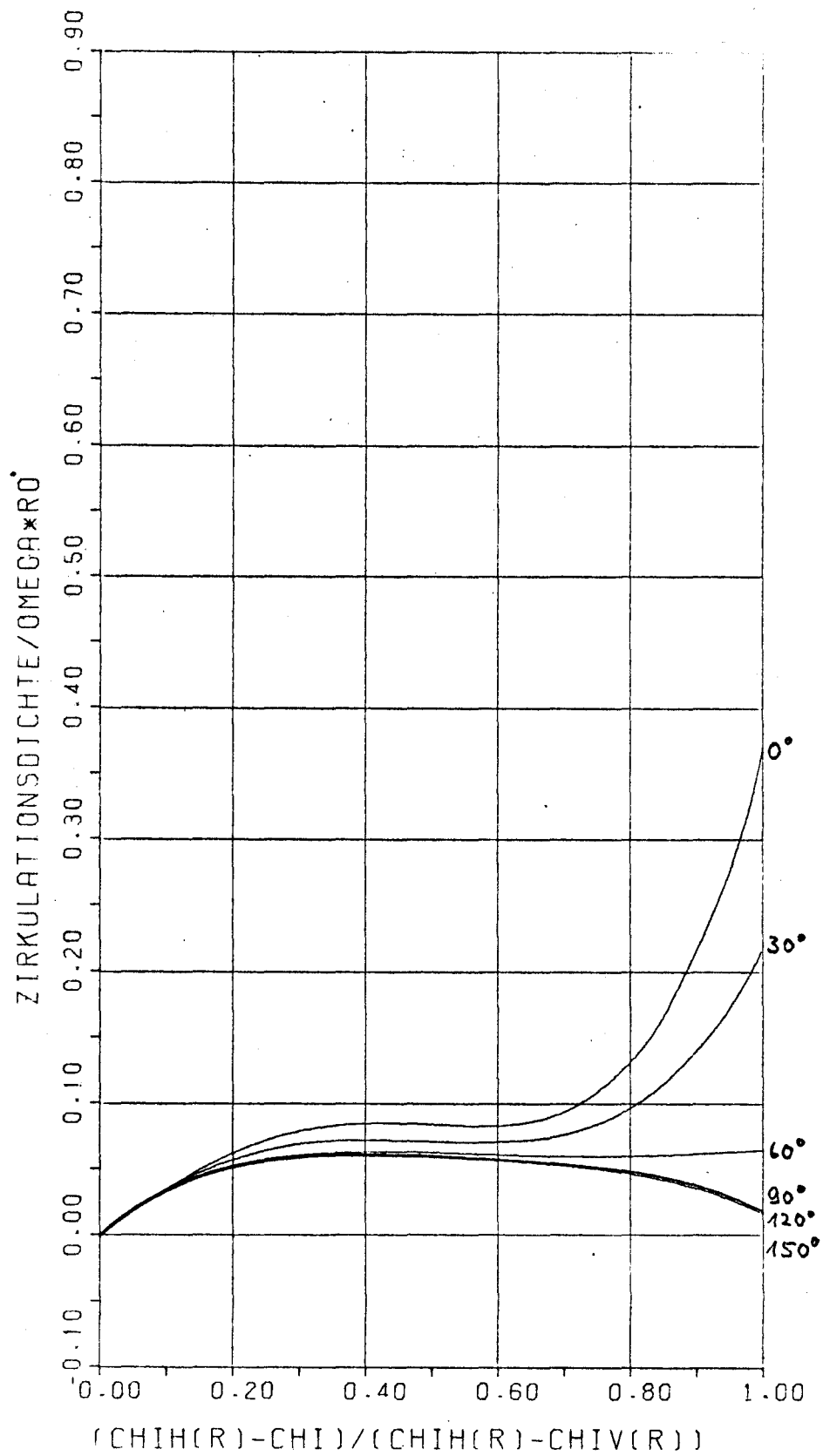
$$\tau = 0.9 R_0$$

A66.28

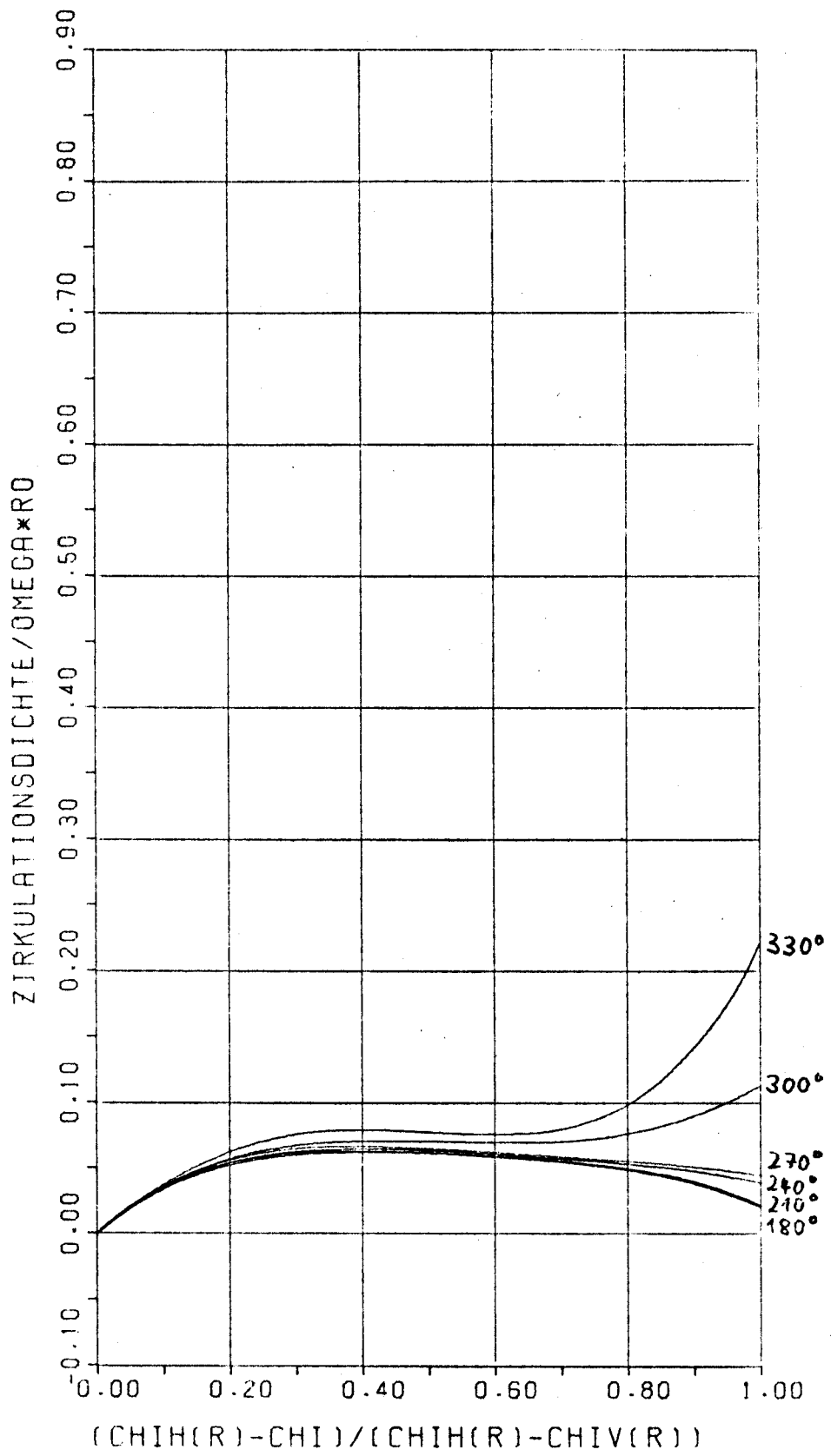


$\tau = 0.9 R_0$

A6.29

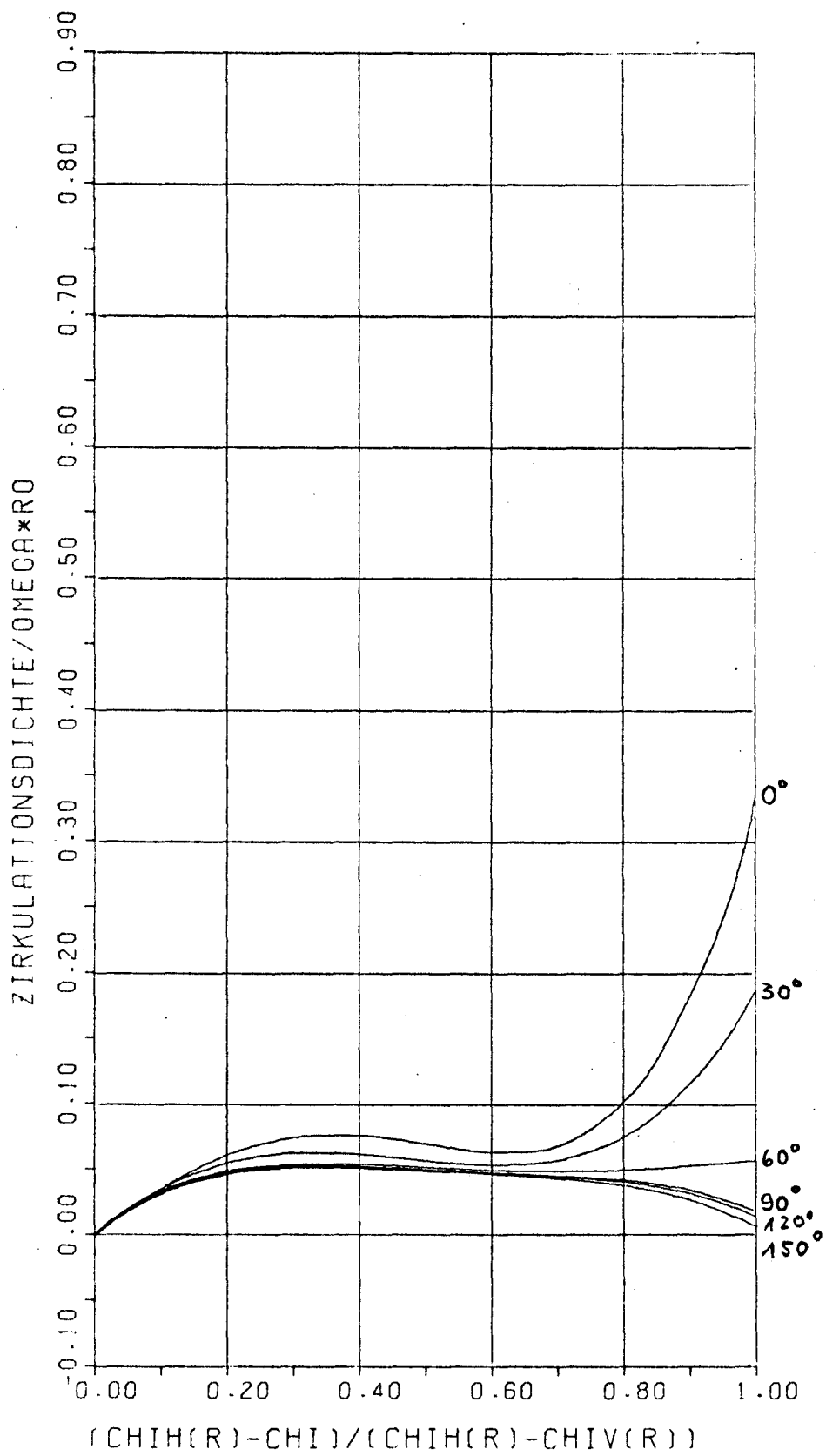


$T = 0.95 R_0$
 A66.30



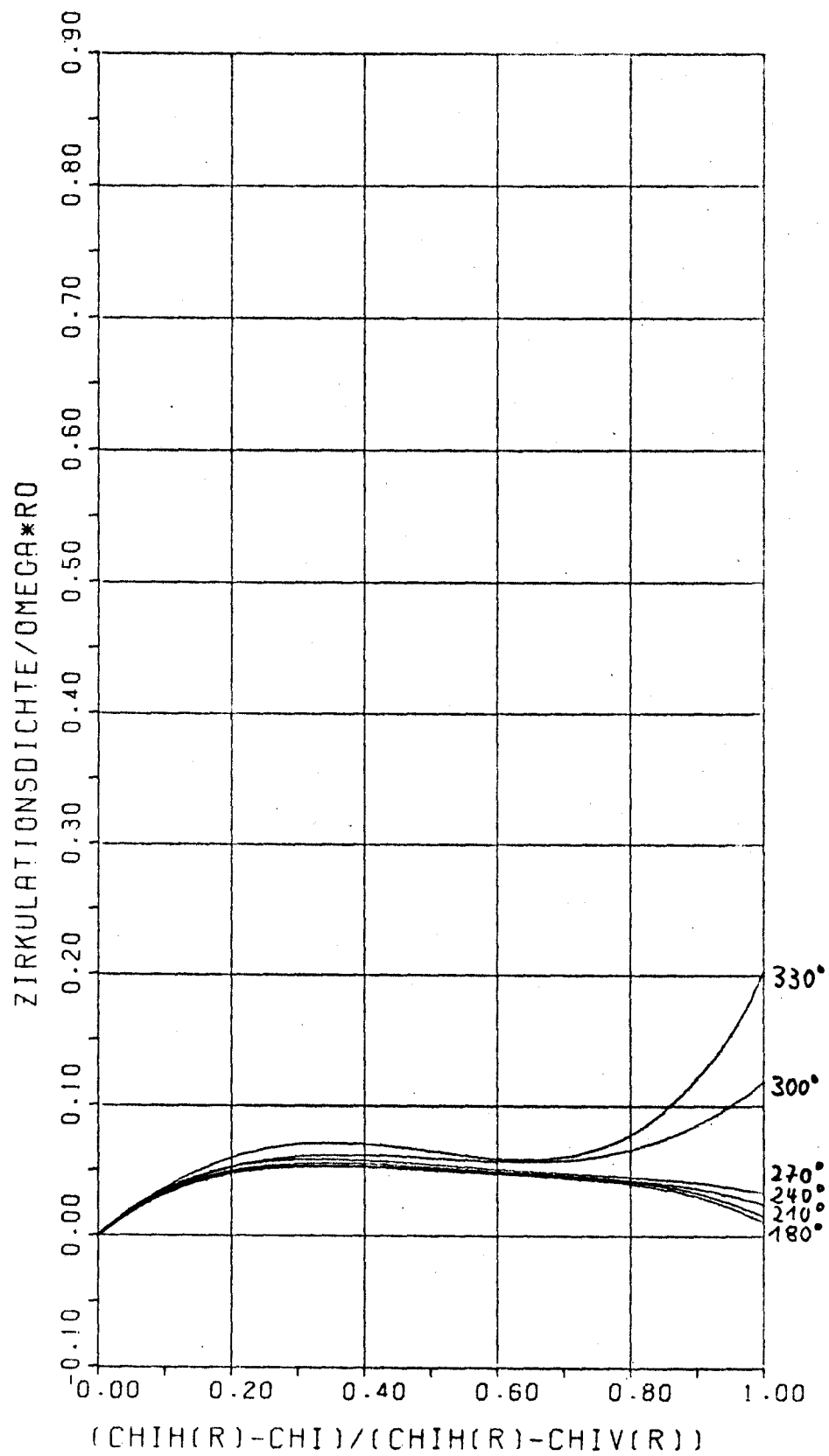
$r = 0.95 R_0$

A66.31



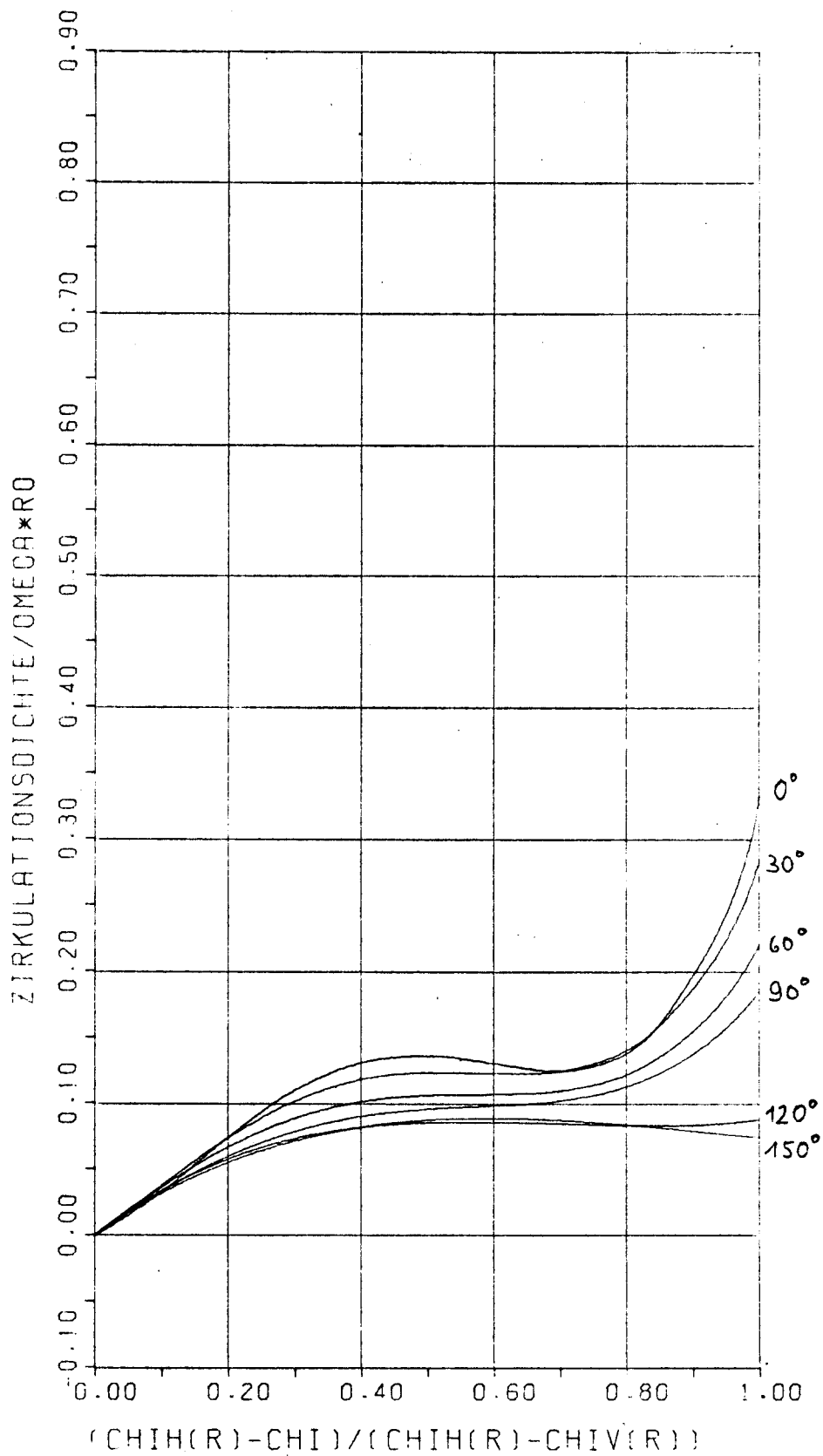
$\tau = 0.975 R_0$

H66.32



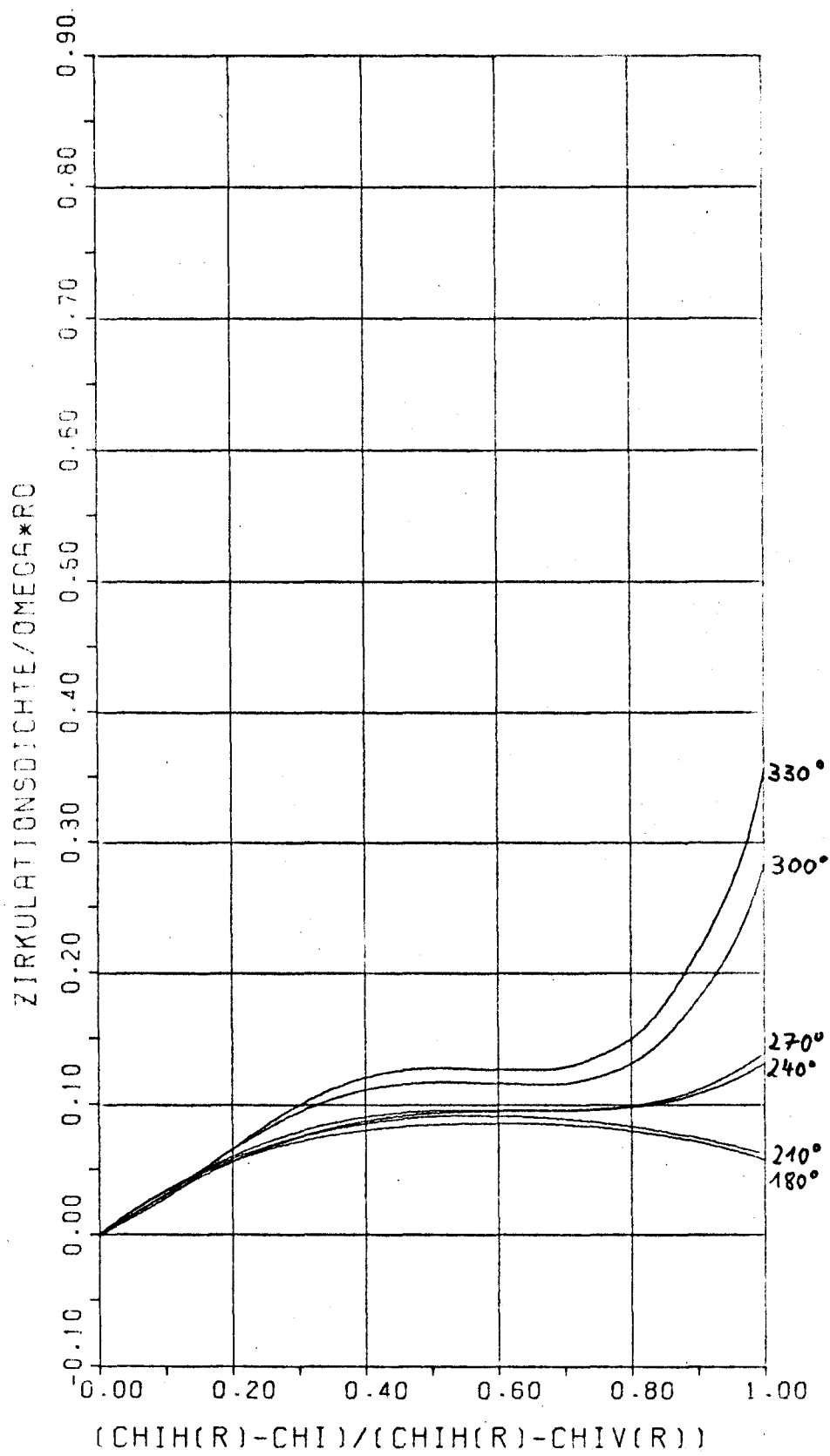
$\tau = 0.975 R_0$

A66.33



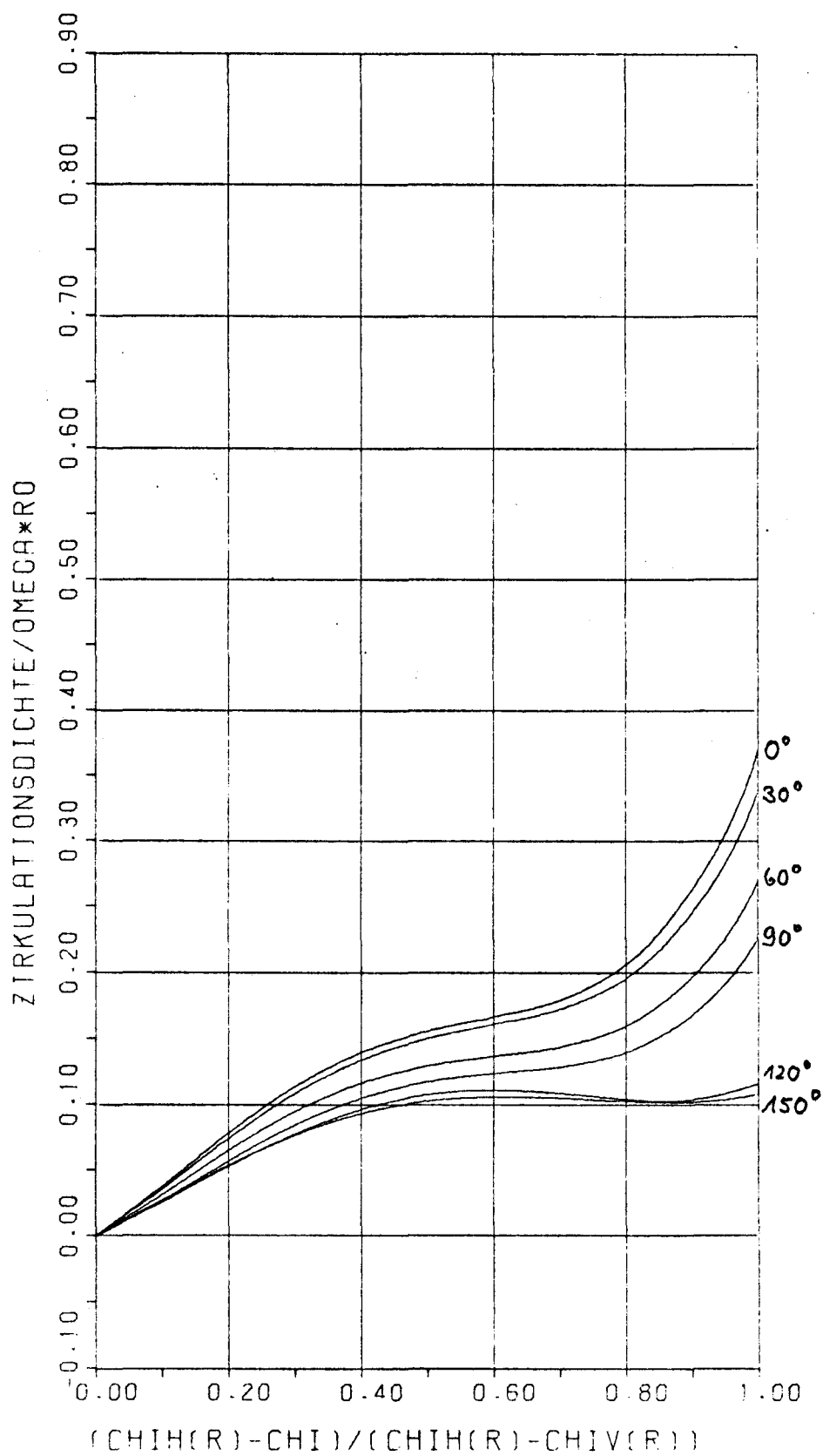
$$\tau = 0.25 R_0$$

ITTC-PROPELLER
A66.34



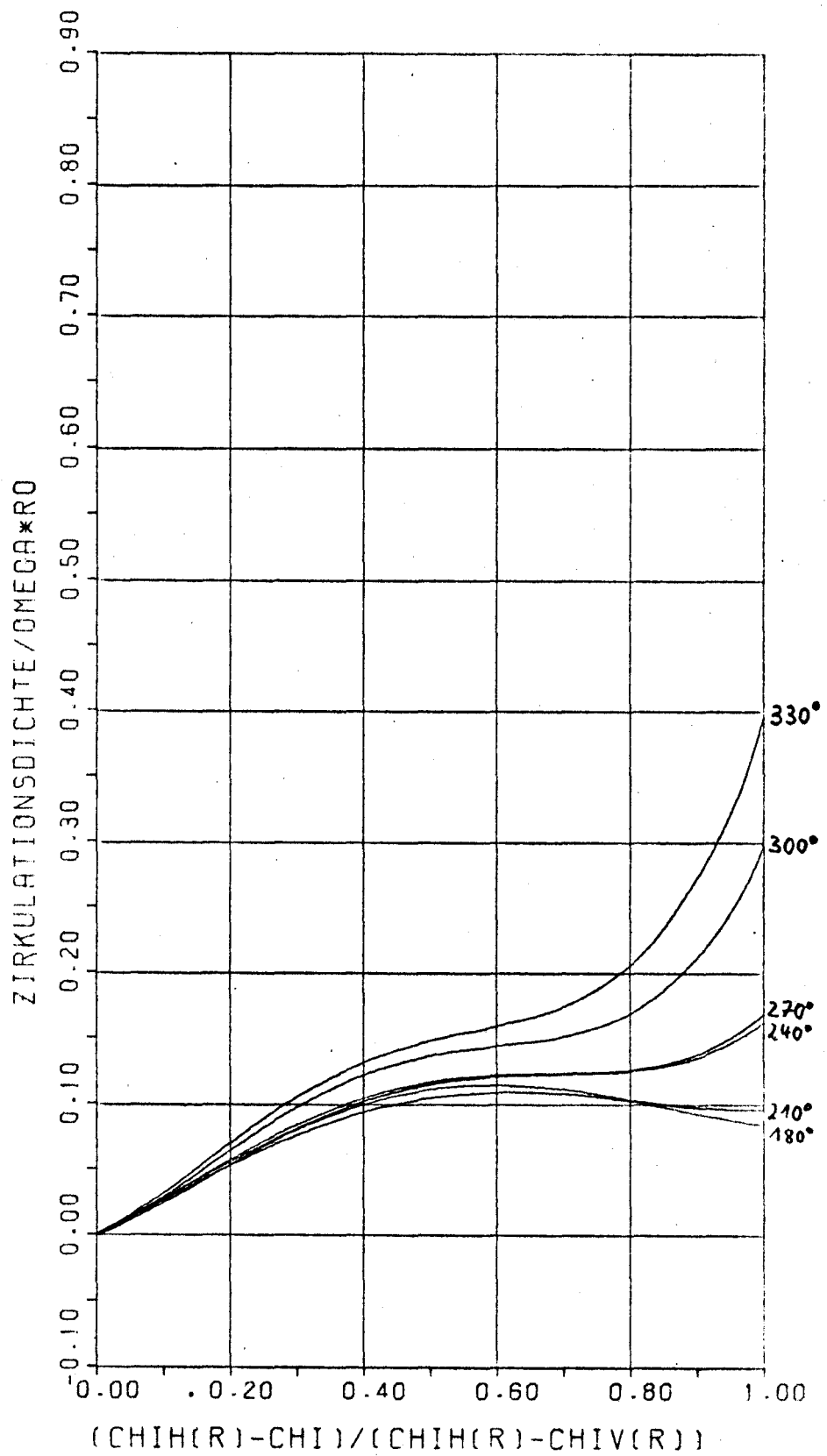
$\tau = 0.25 R_0$

A66.35



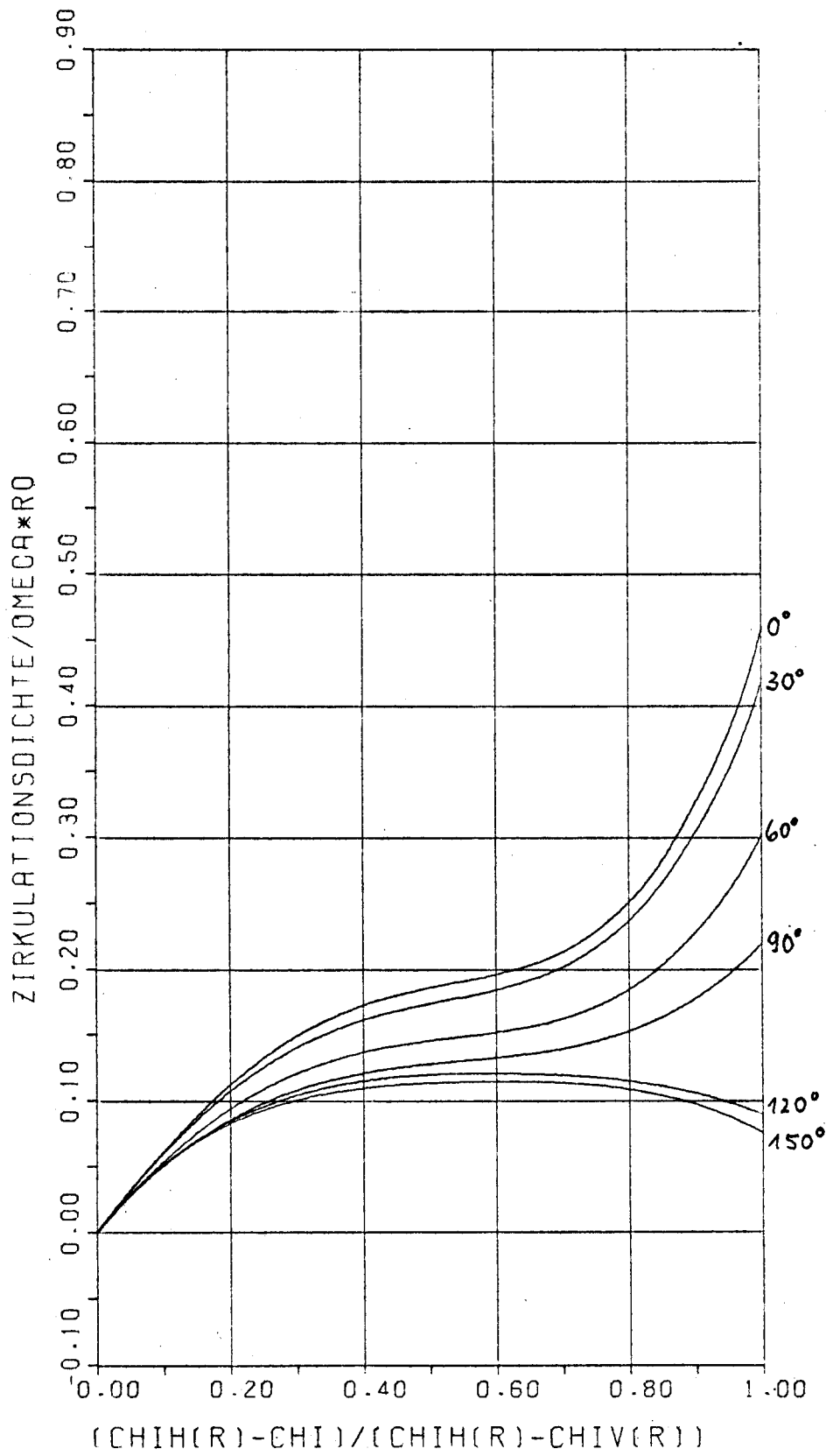
$\tau = 0.3 R_0$

A66.36



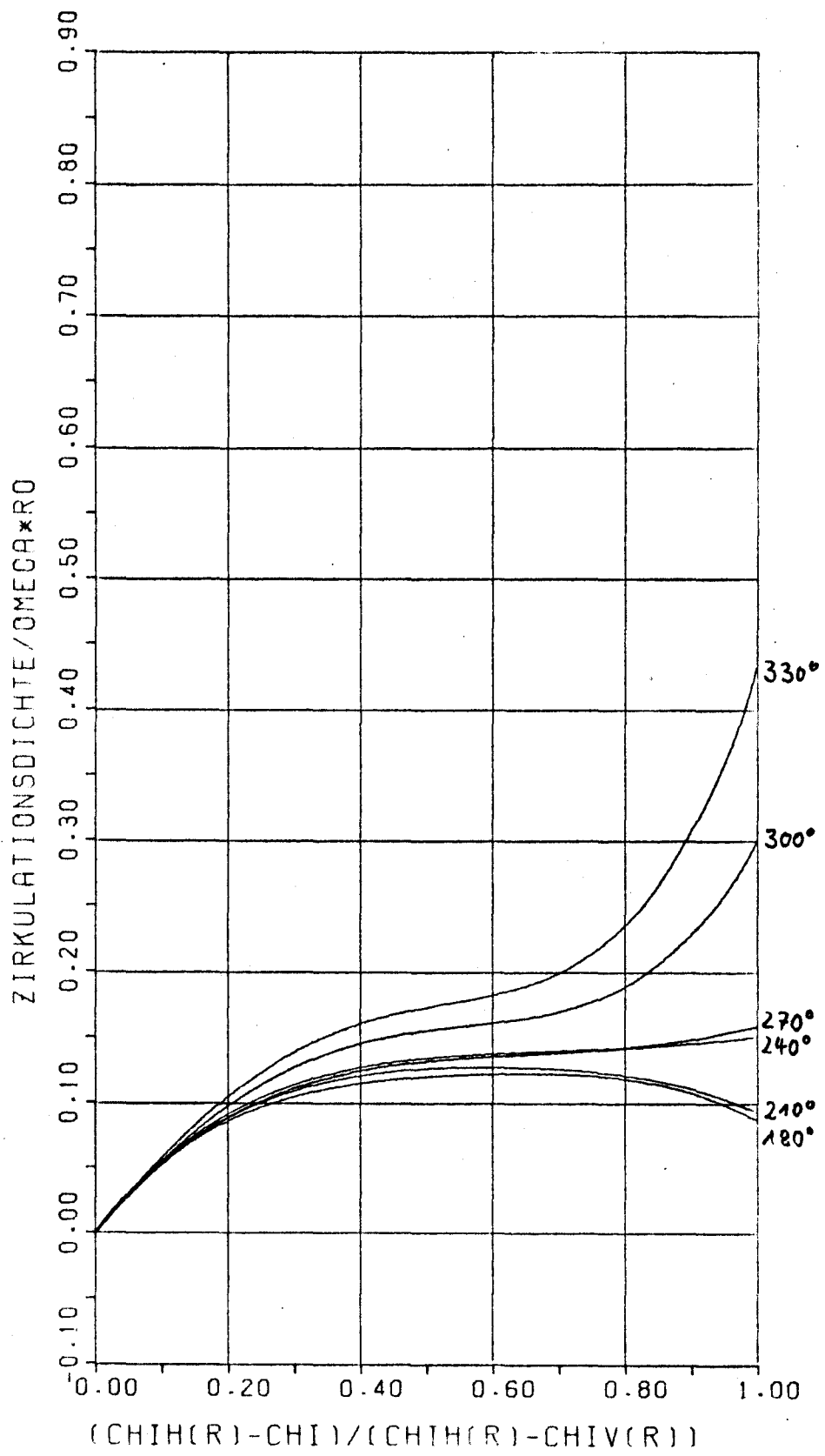
$$\tau = 0.3 R_0$$

A66.37



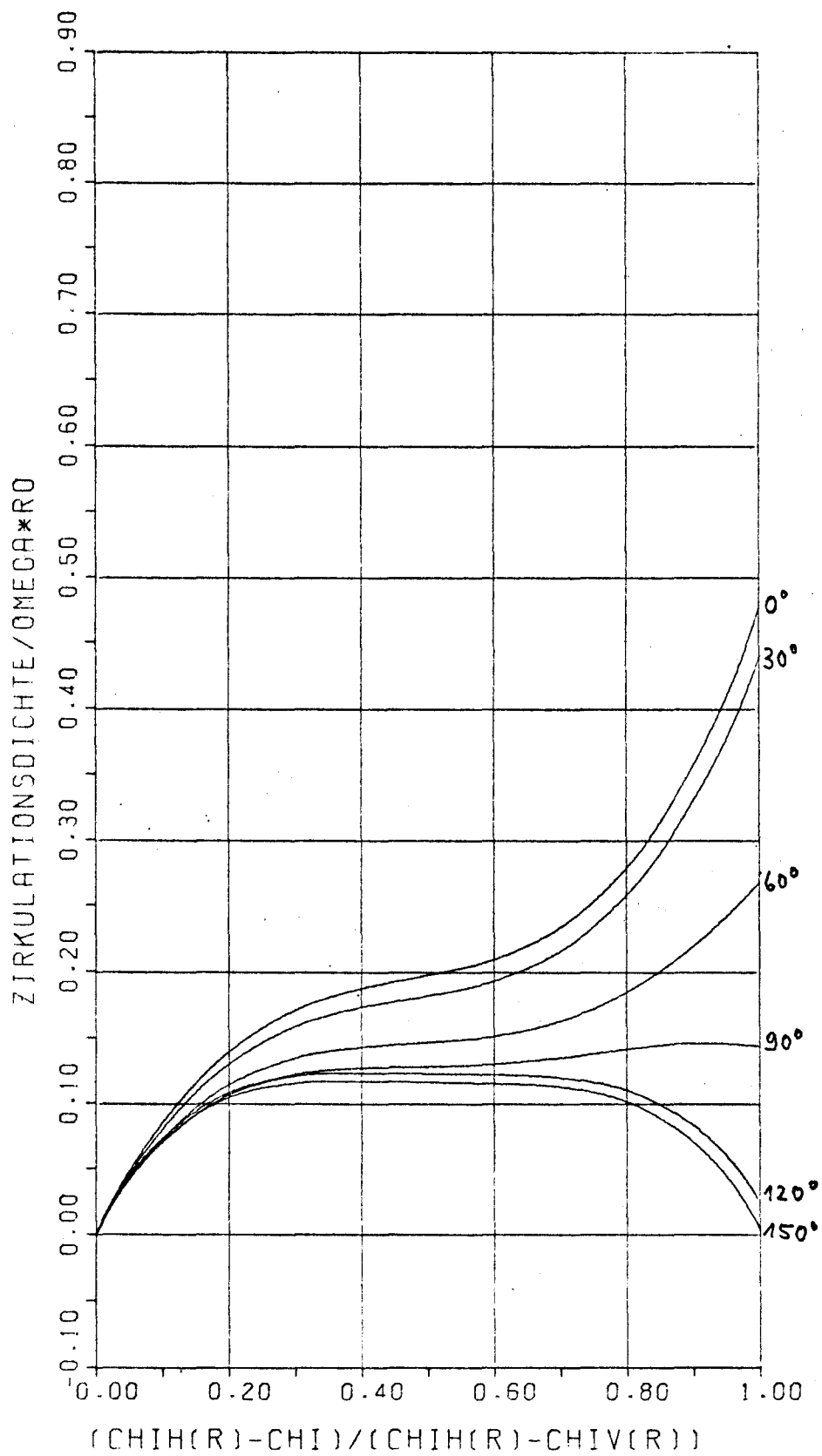
$\tau = 0.4 R_0$

A66.38



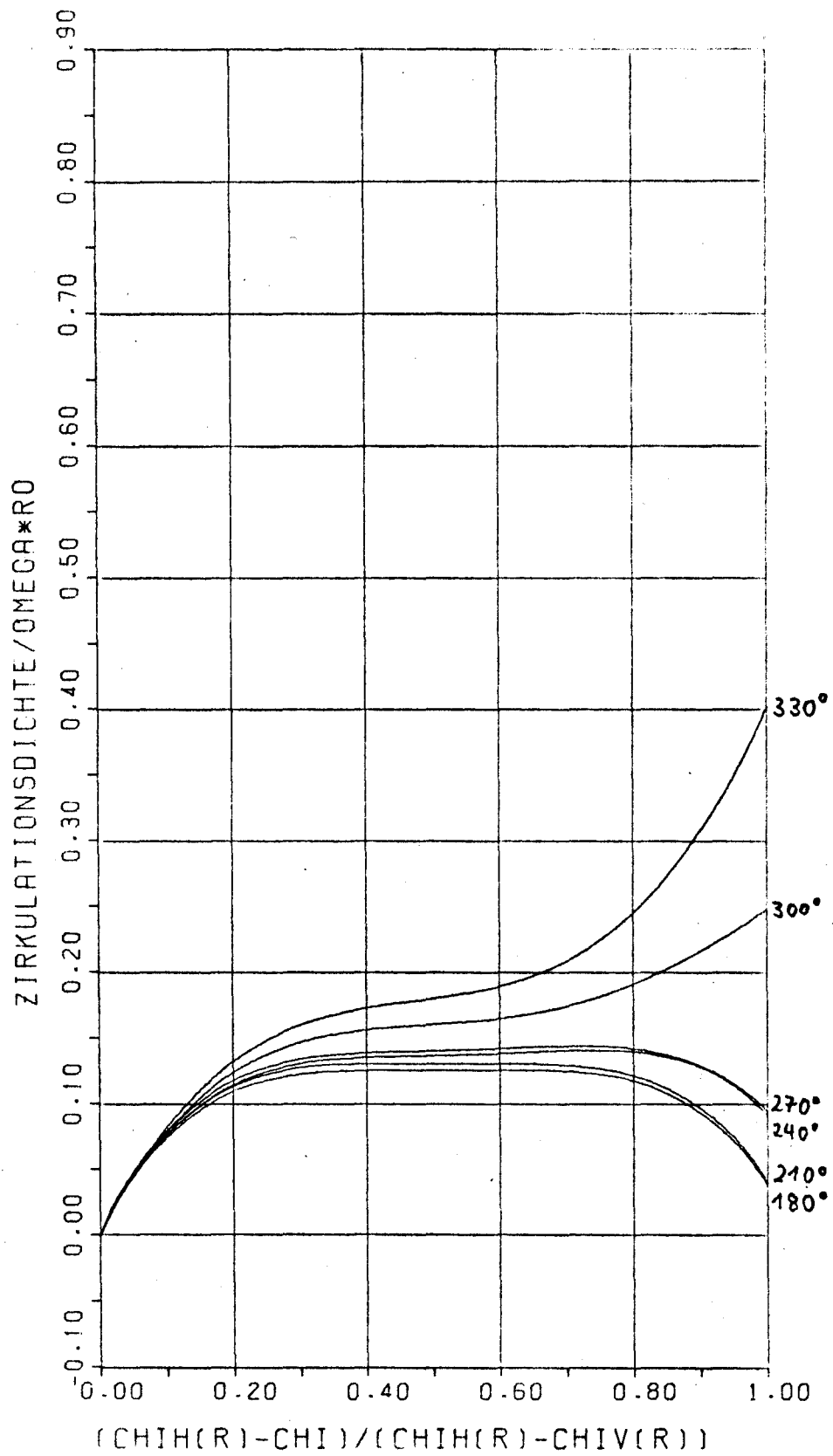
$\tau = 0.4 R_0$

A66.39



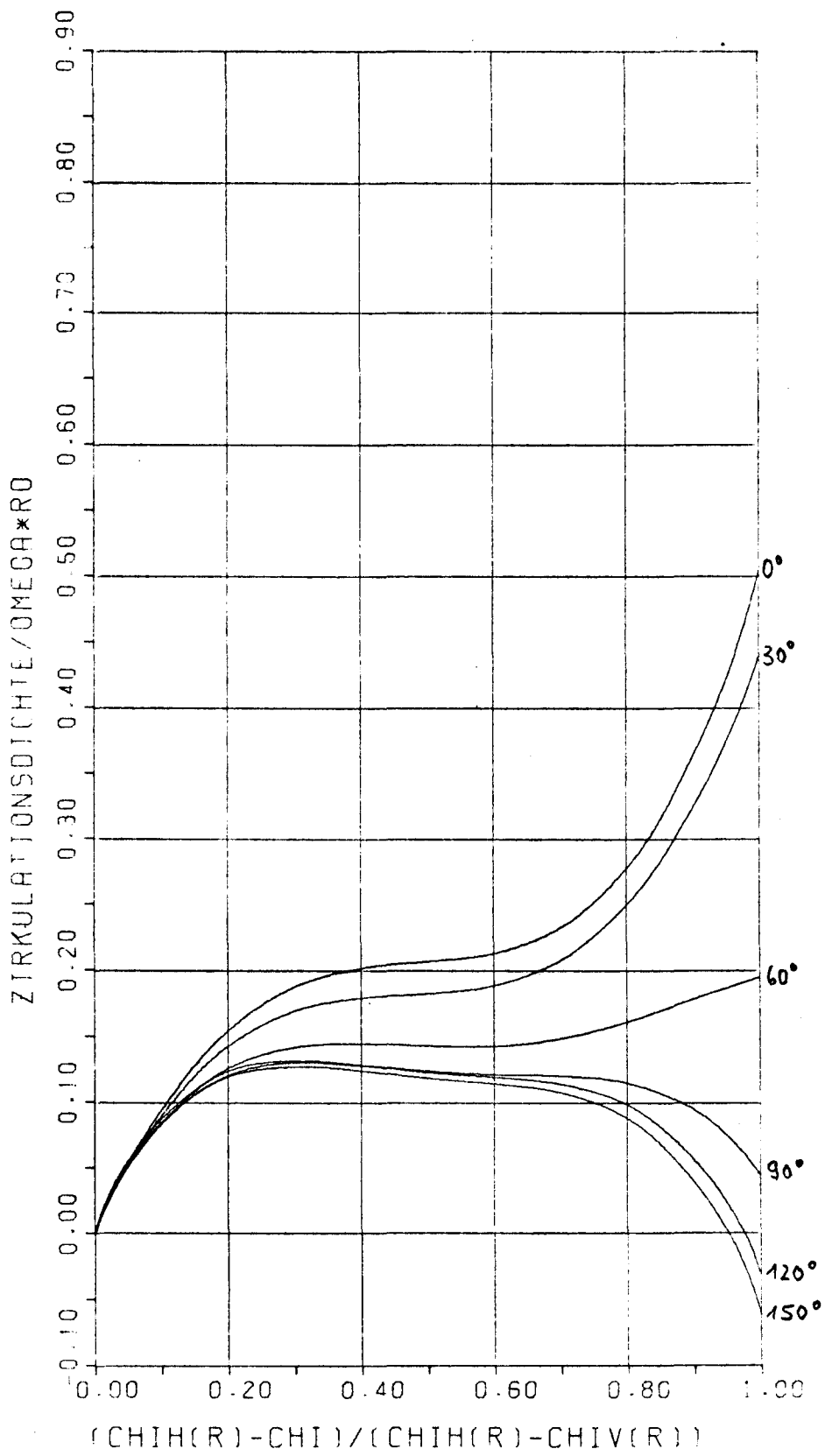
$$r = 0.5 R_0$$

A66.40



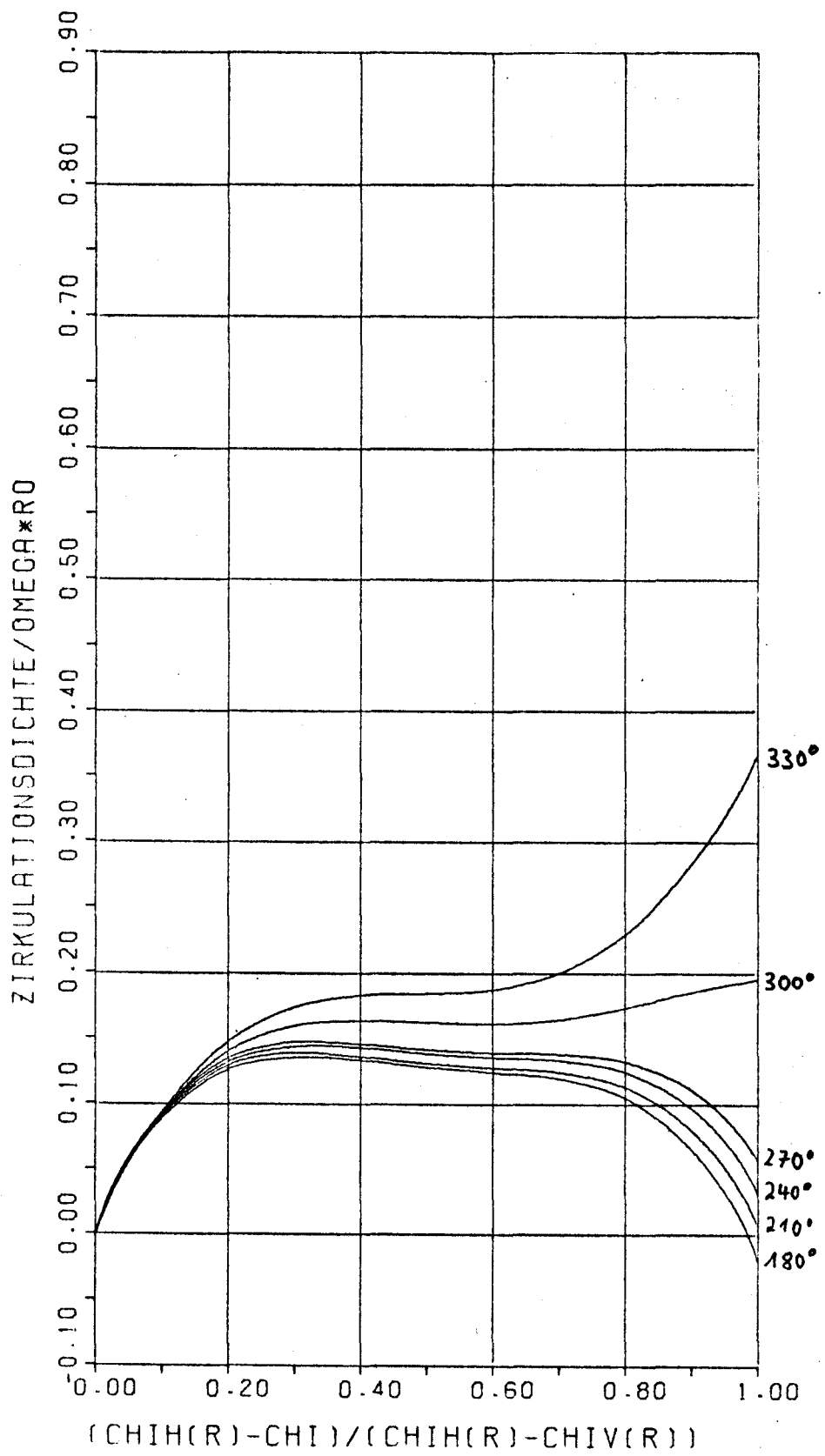
$$\tau = 0.5 R_0$$

A66.41



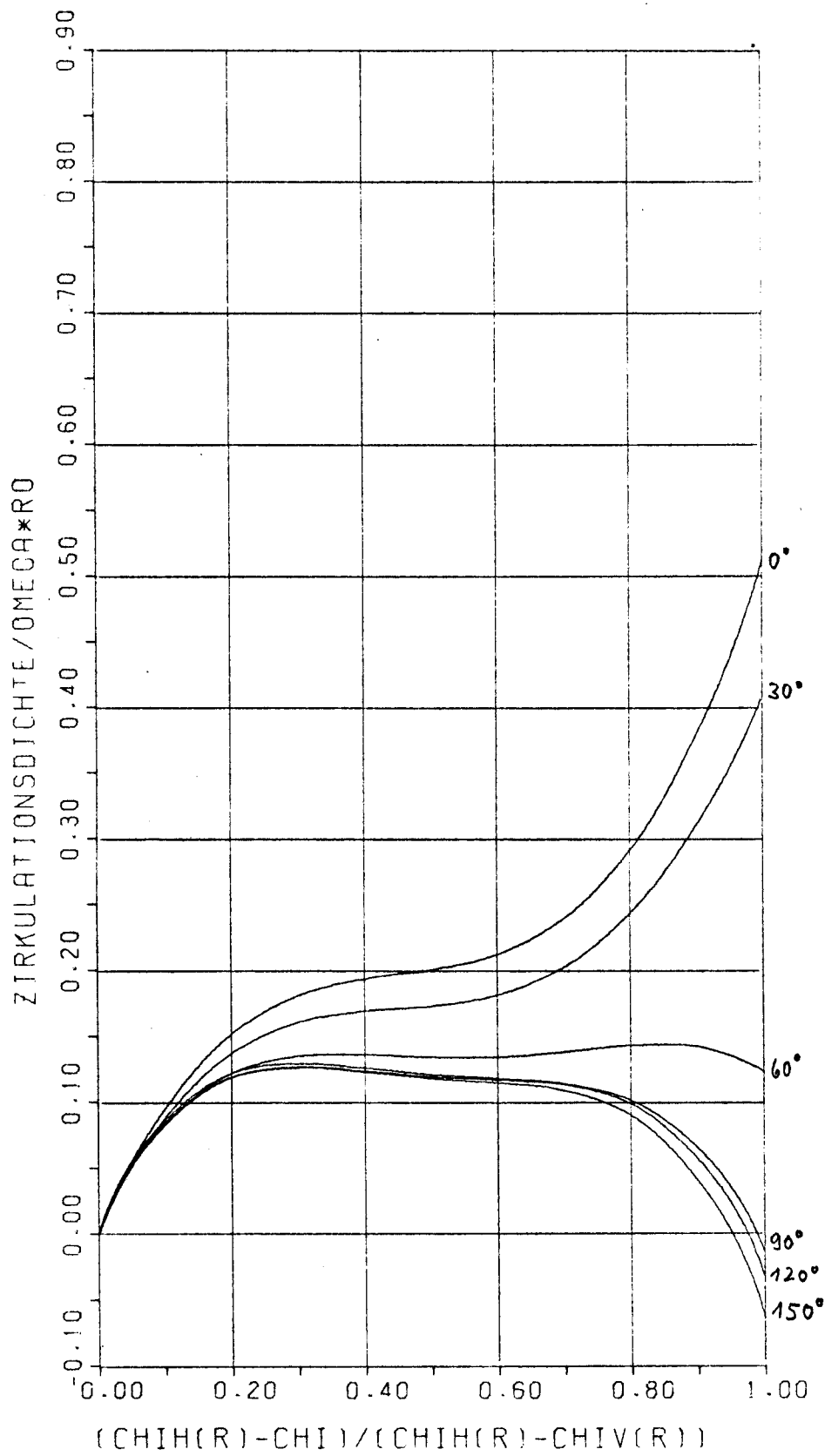
$$r = 0.6 R_0$$

Abb. 42



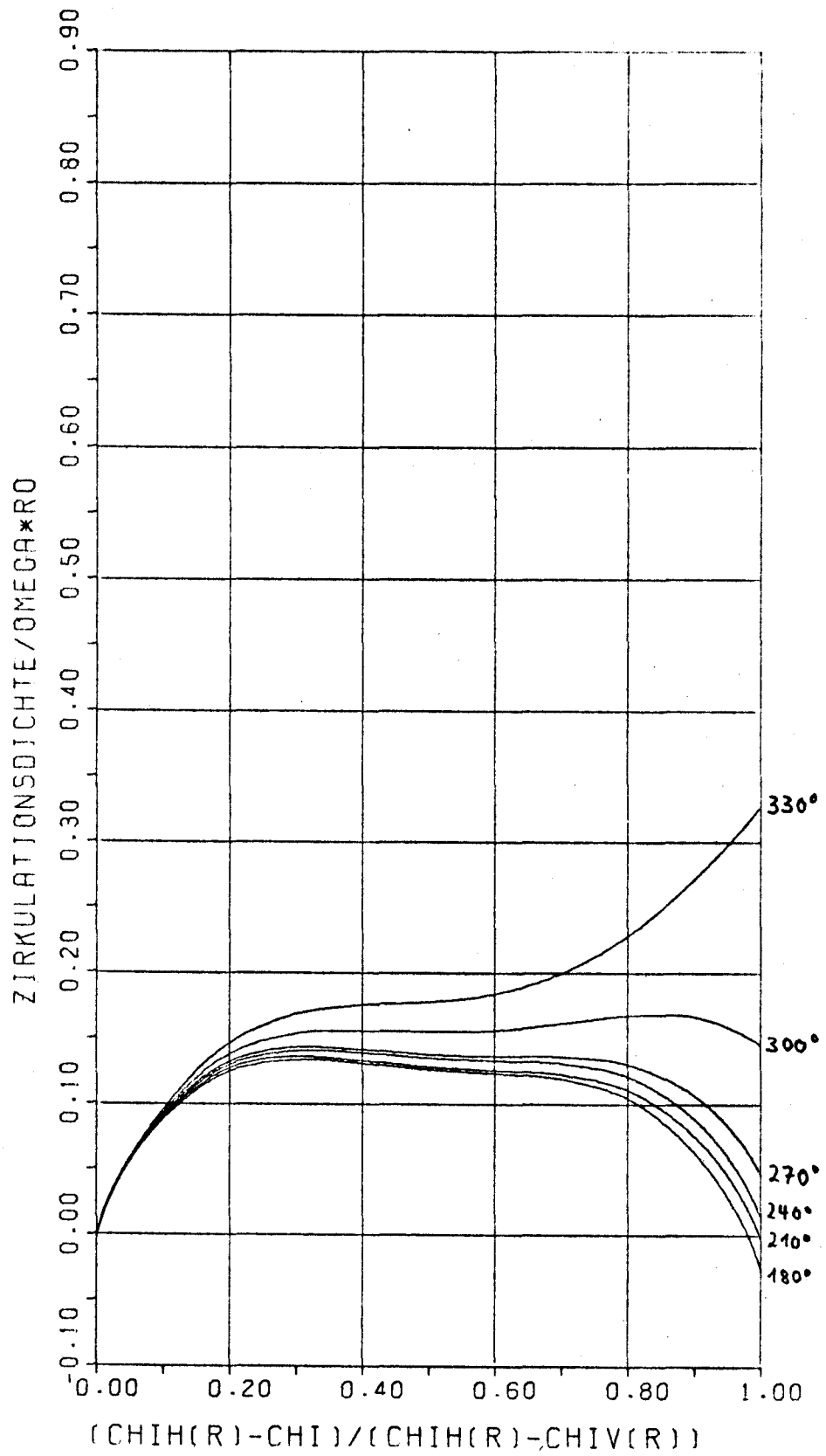
$$\tau = 0.6 R_0$$

A66.43



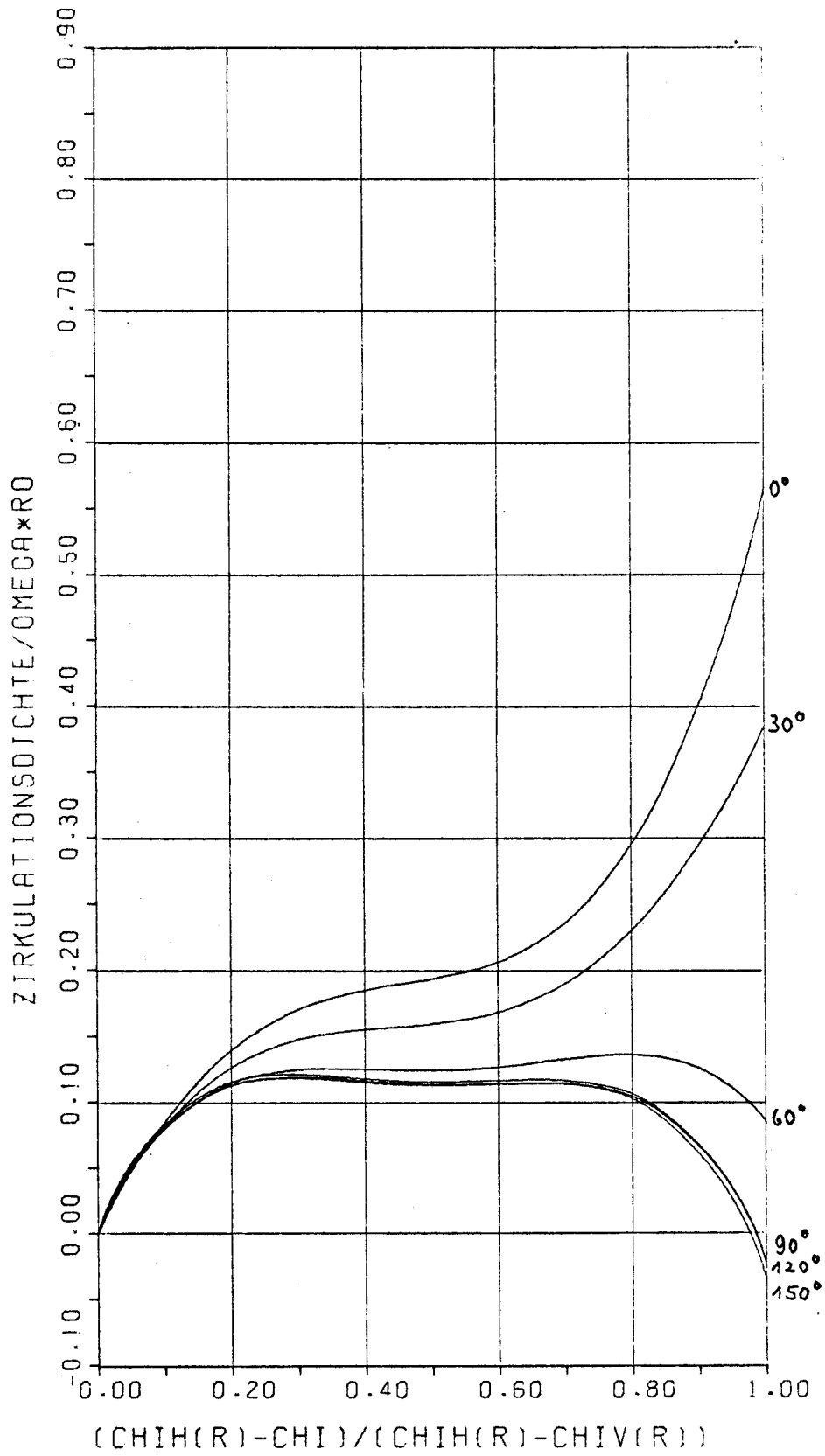
$$\tau = 0.7 R_0$$

1966, 44



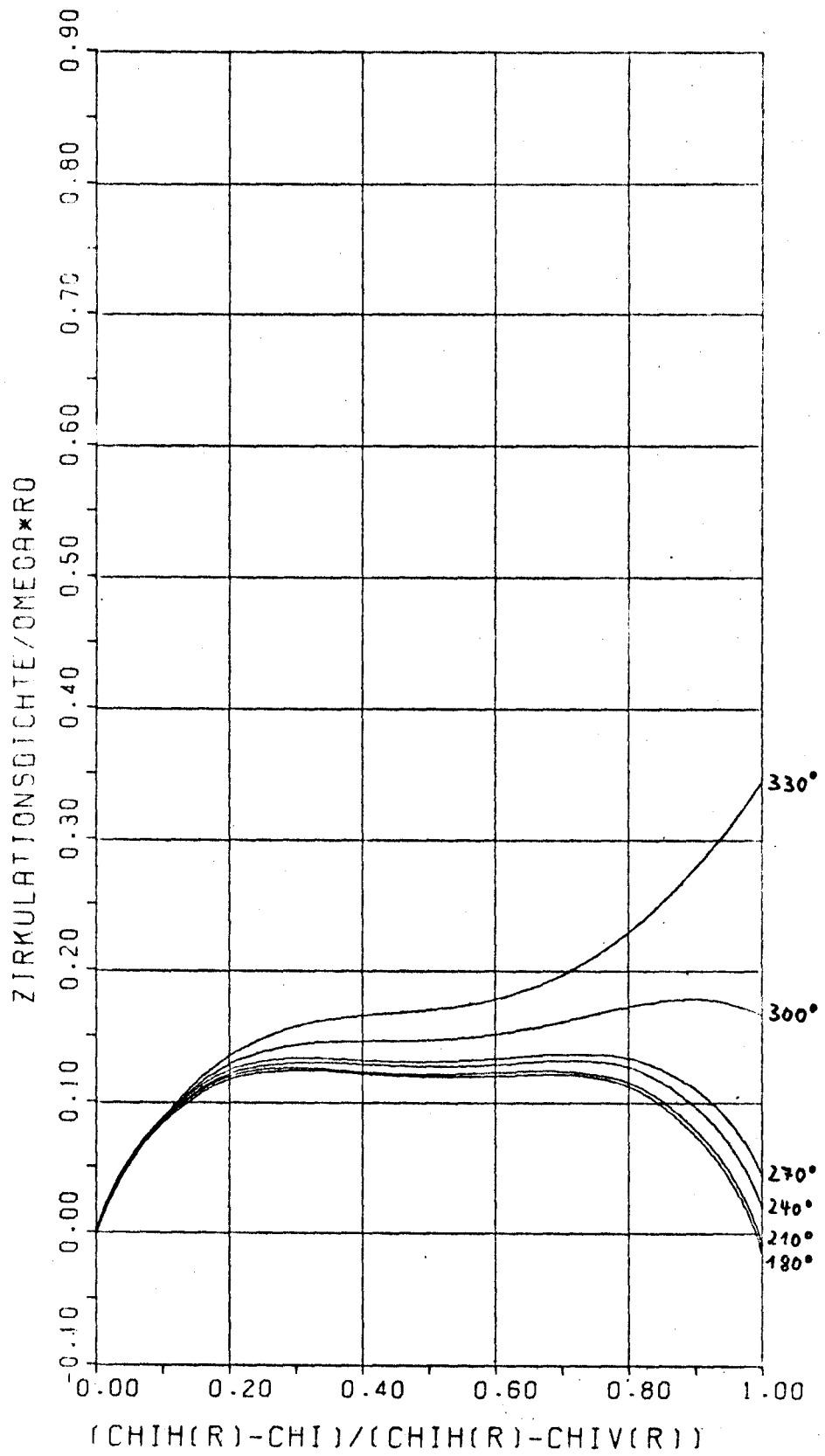
$$r = 0.7 R_0$$

A66.45



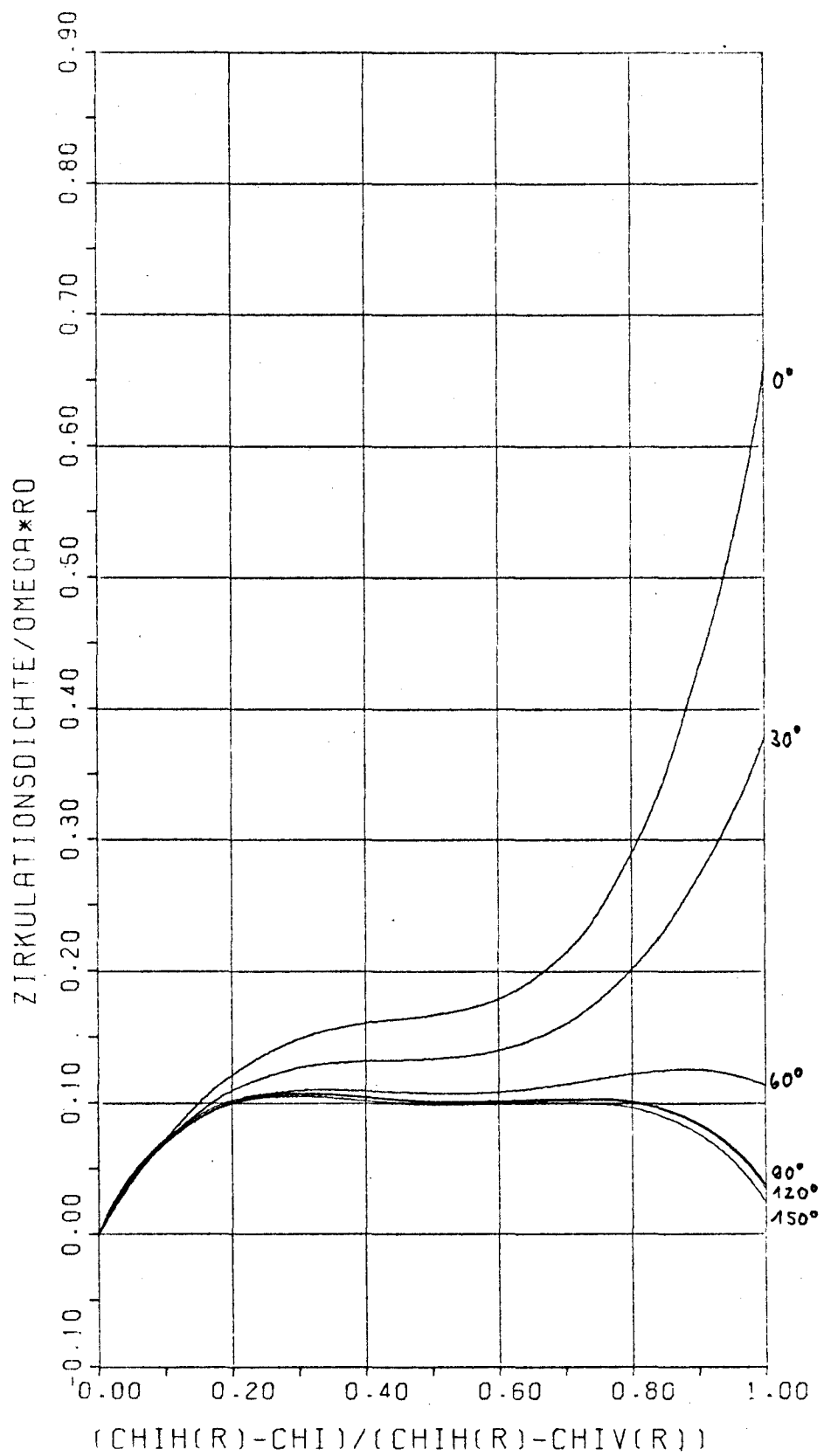
$\tau = 0.8R_0$

A66.46



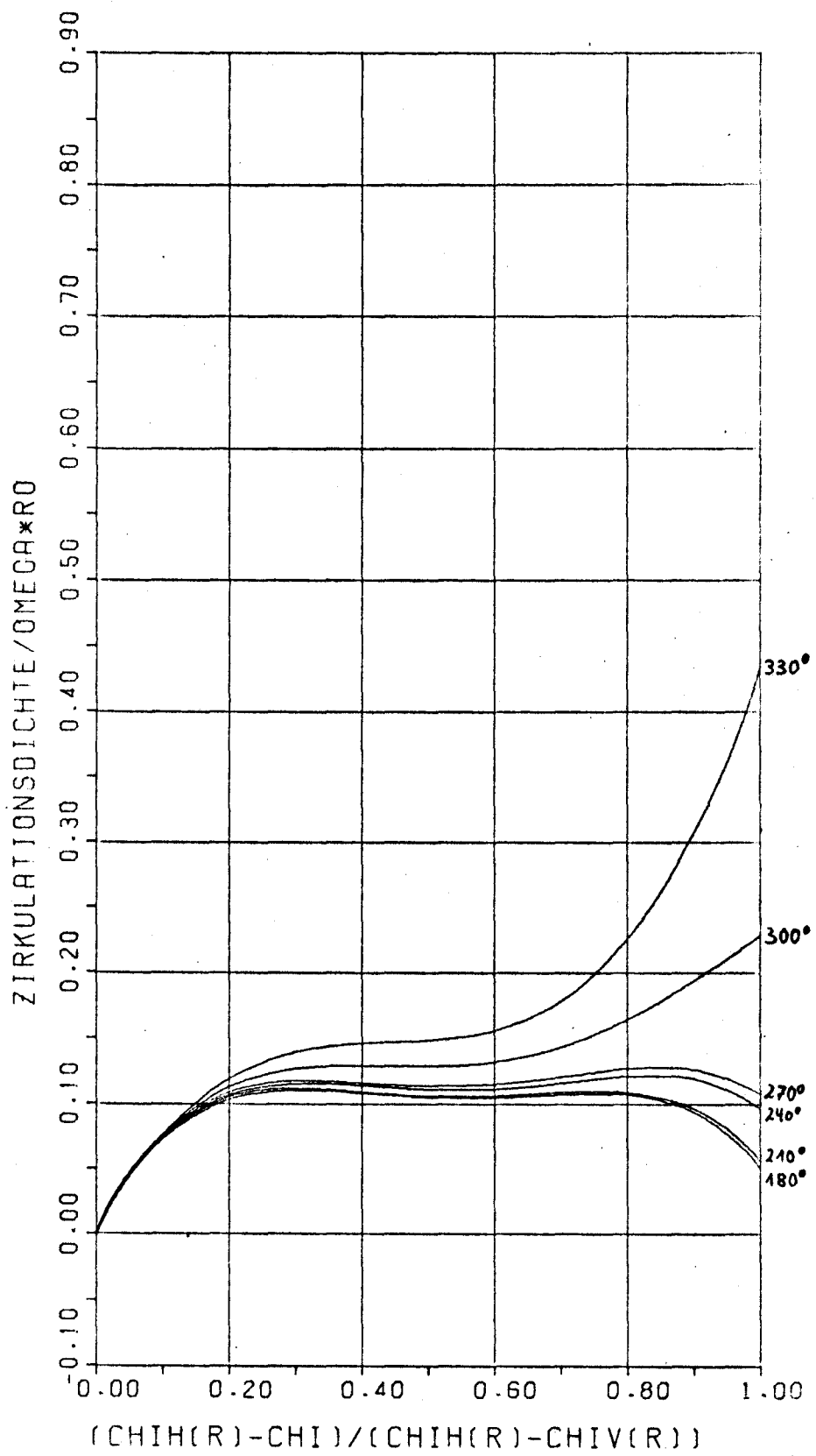
$\tau = 0.8 R_0$

A66.47



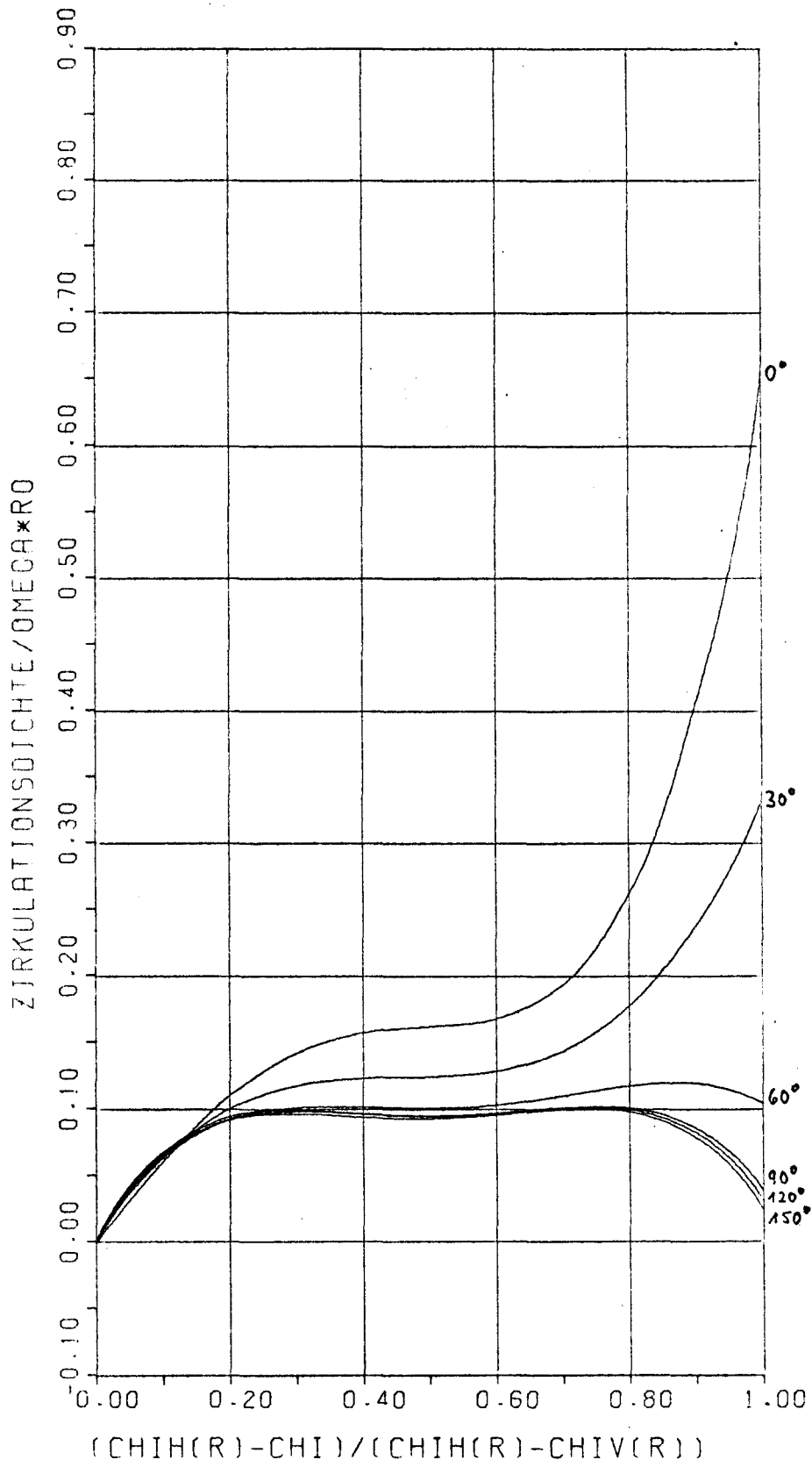
$r = 0.9 R_0$

A66.48

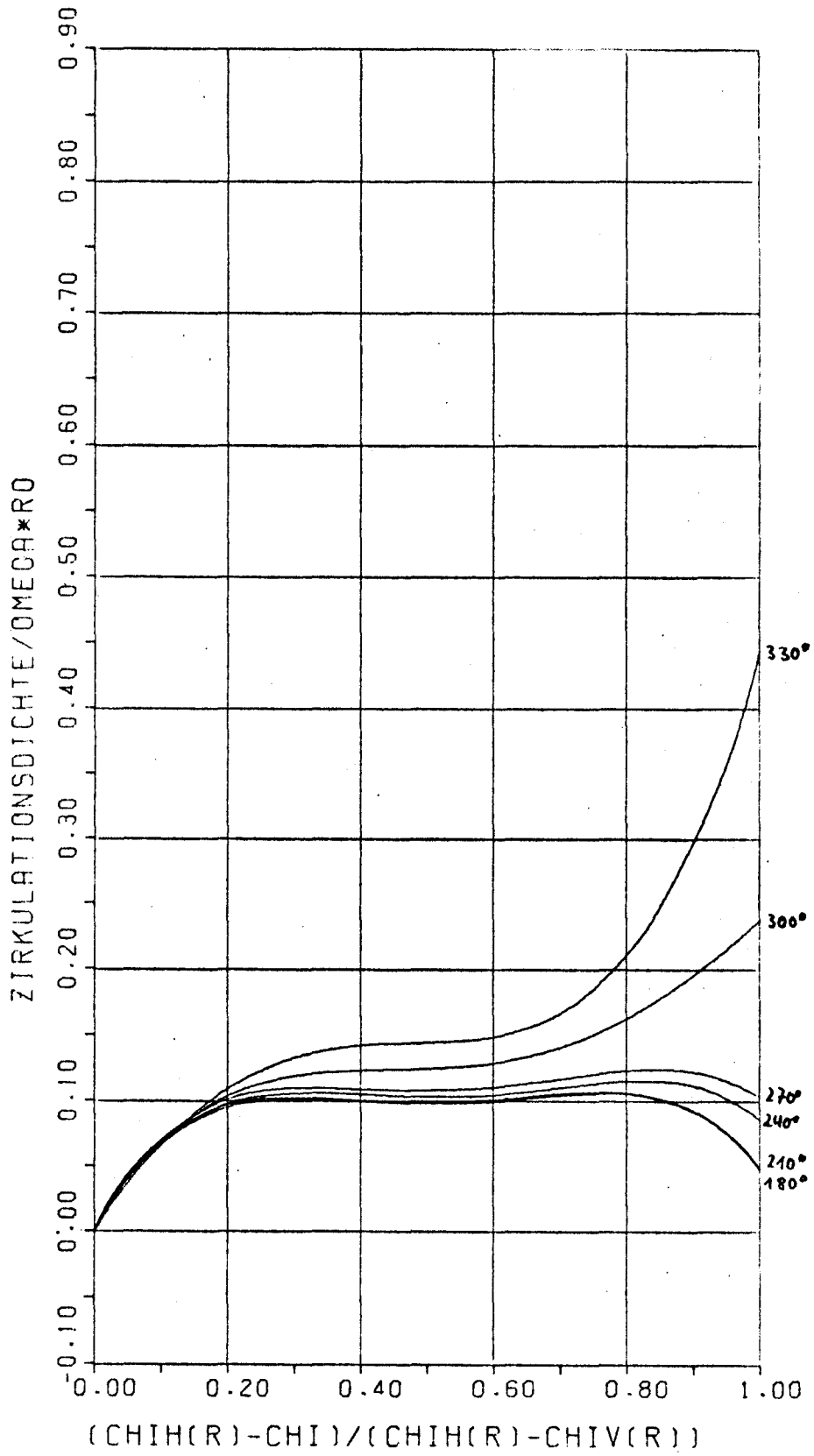


$r = 0.9R_0$

A66.49

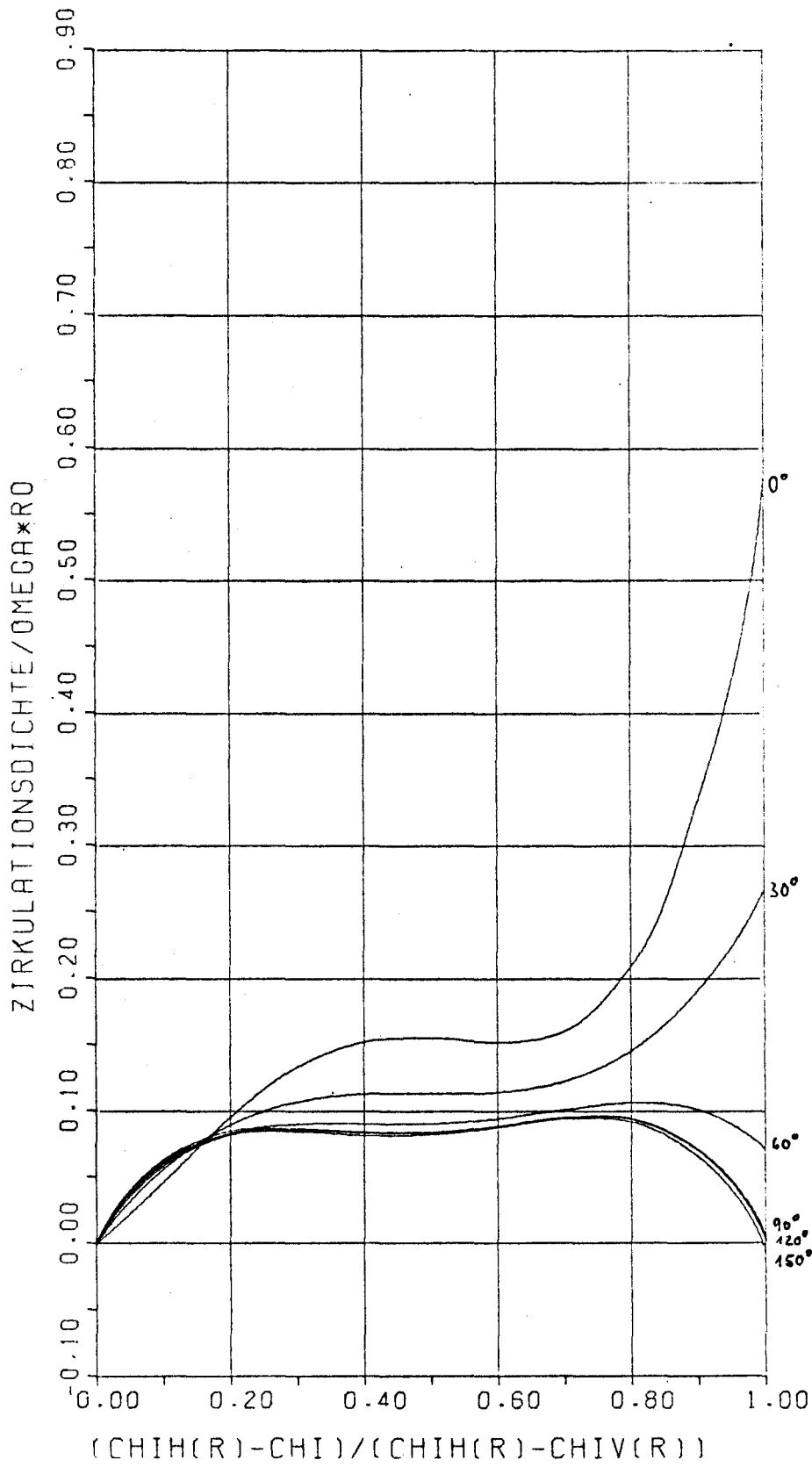


$r = 0.95 R_0$
 A66.50



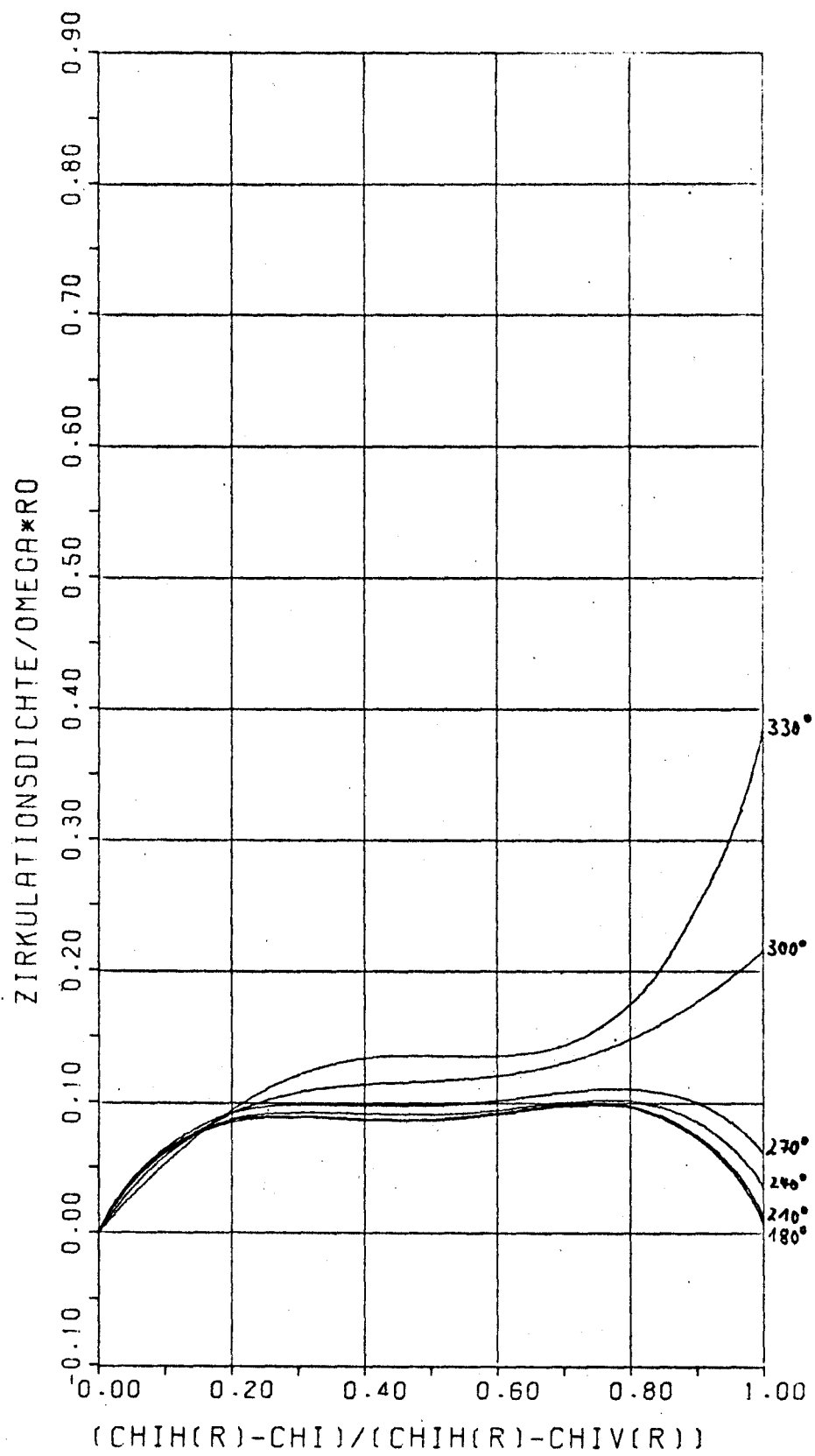
$\tau = 0.95R_o$

A66.51



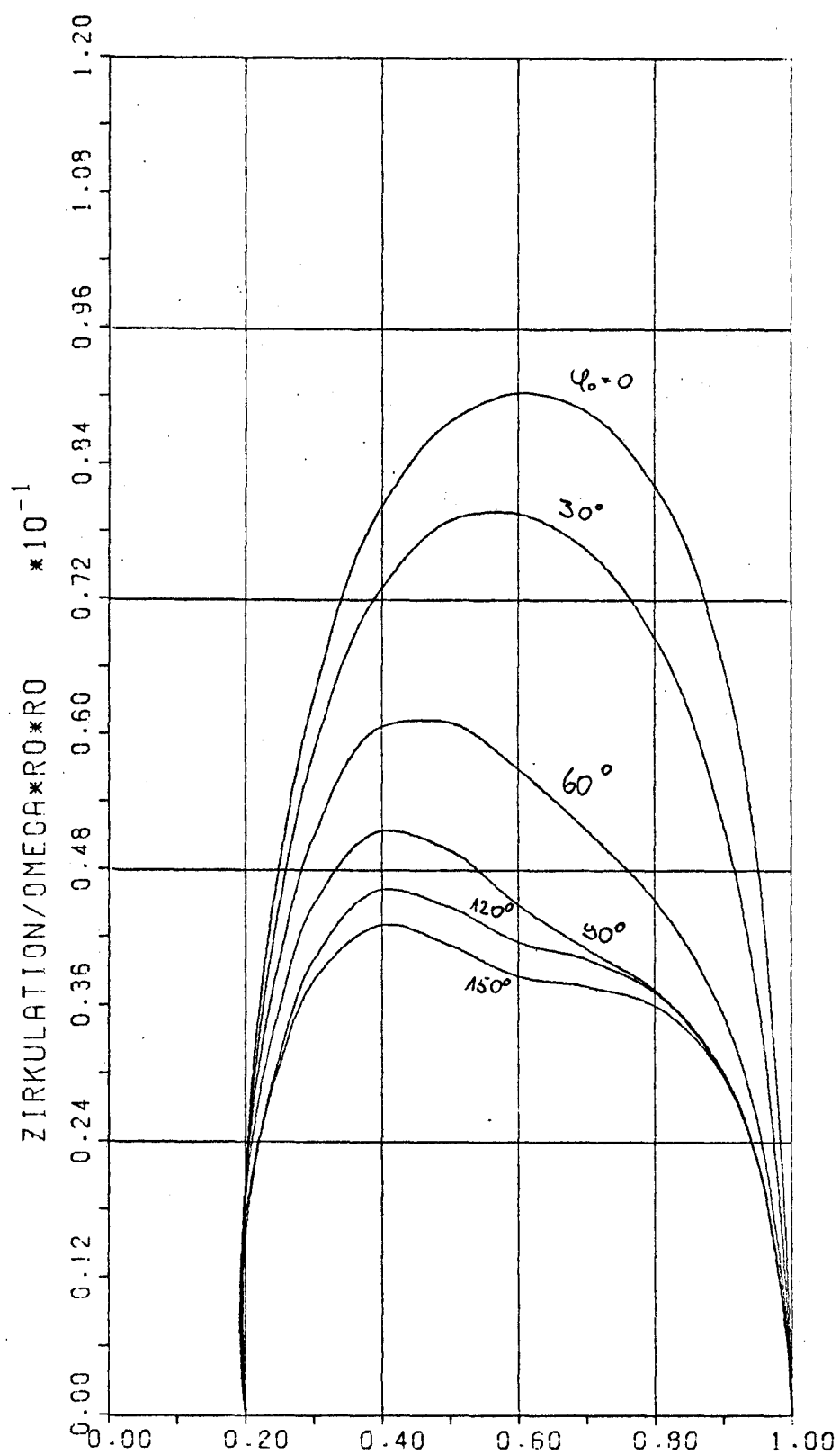
$\tau = 0.975 R_0$

A66.52



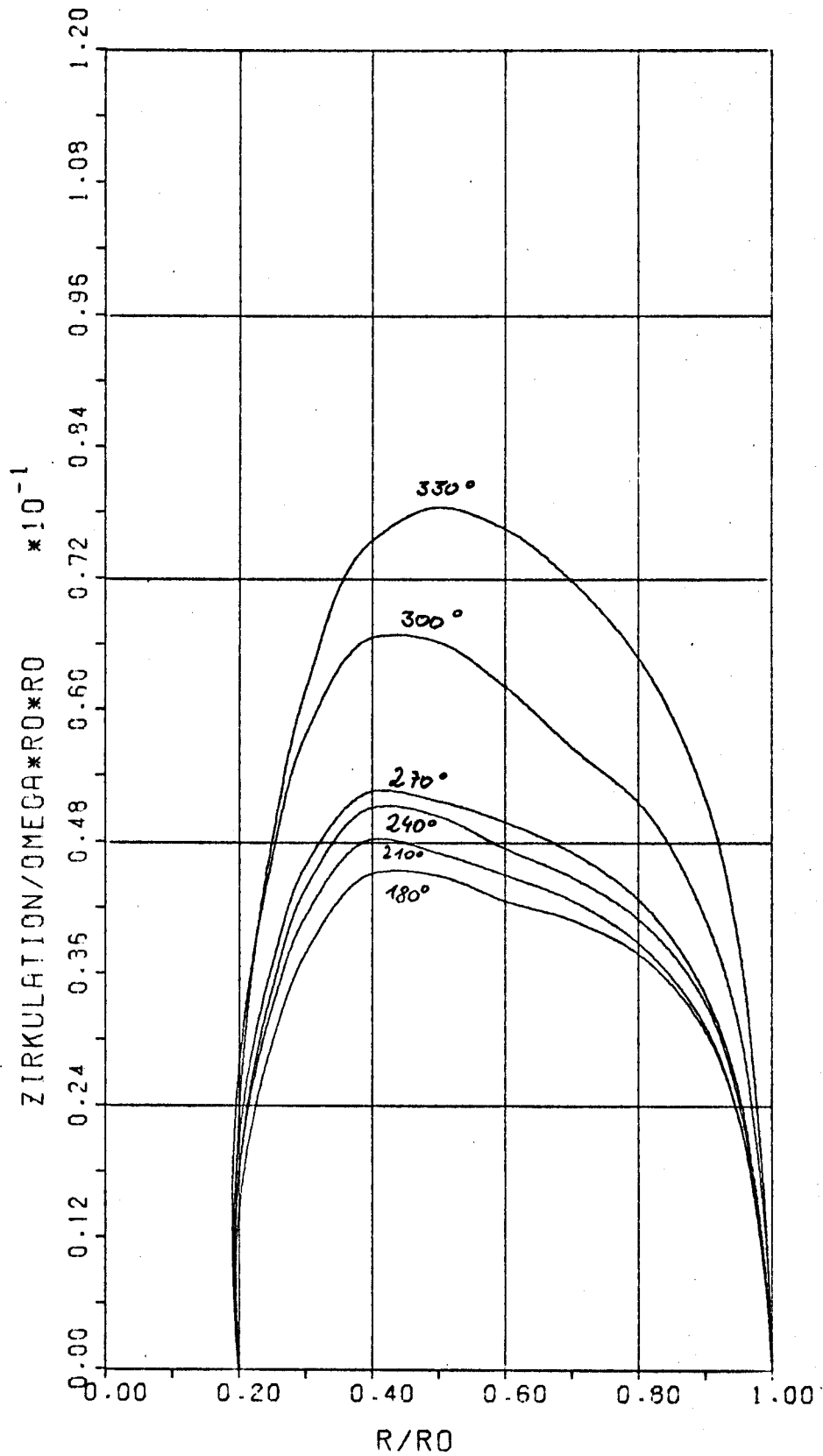
$$\gamma = 0.975 R_0$$

A66.53



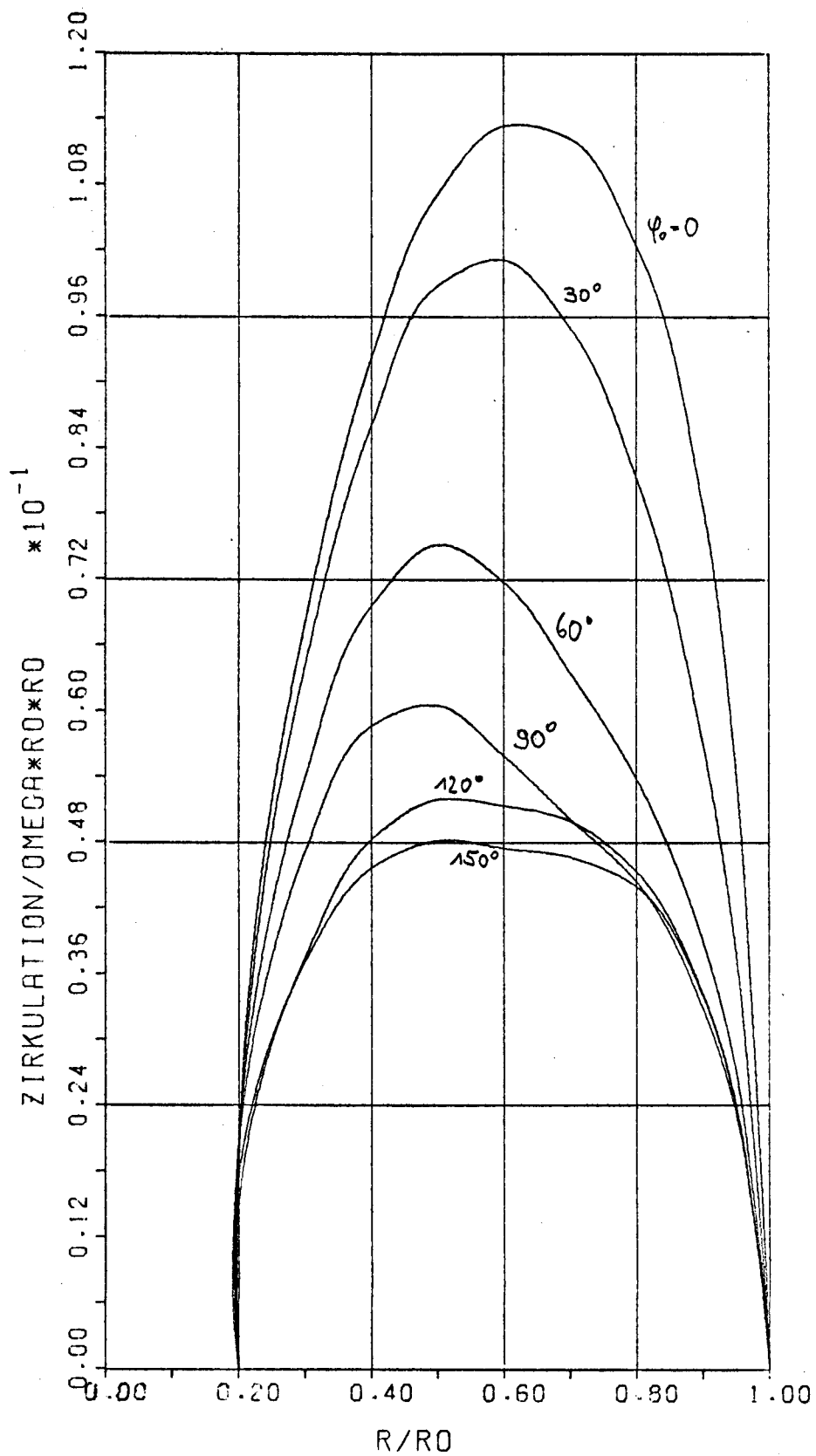
Göttinger Propeller $T(\phi_0)$

Abb. 54



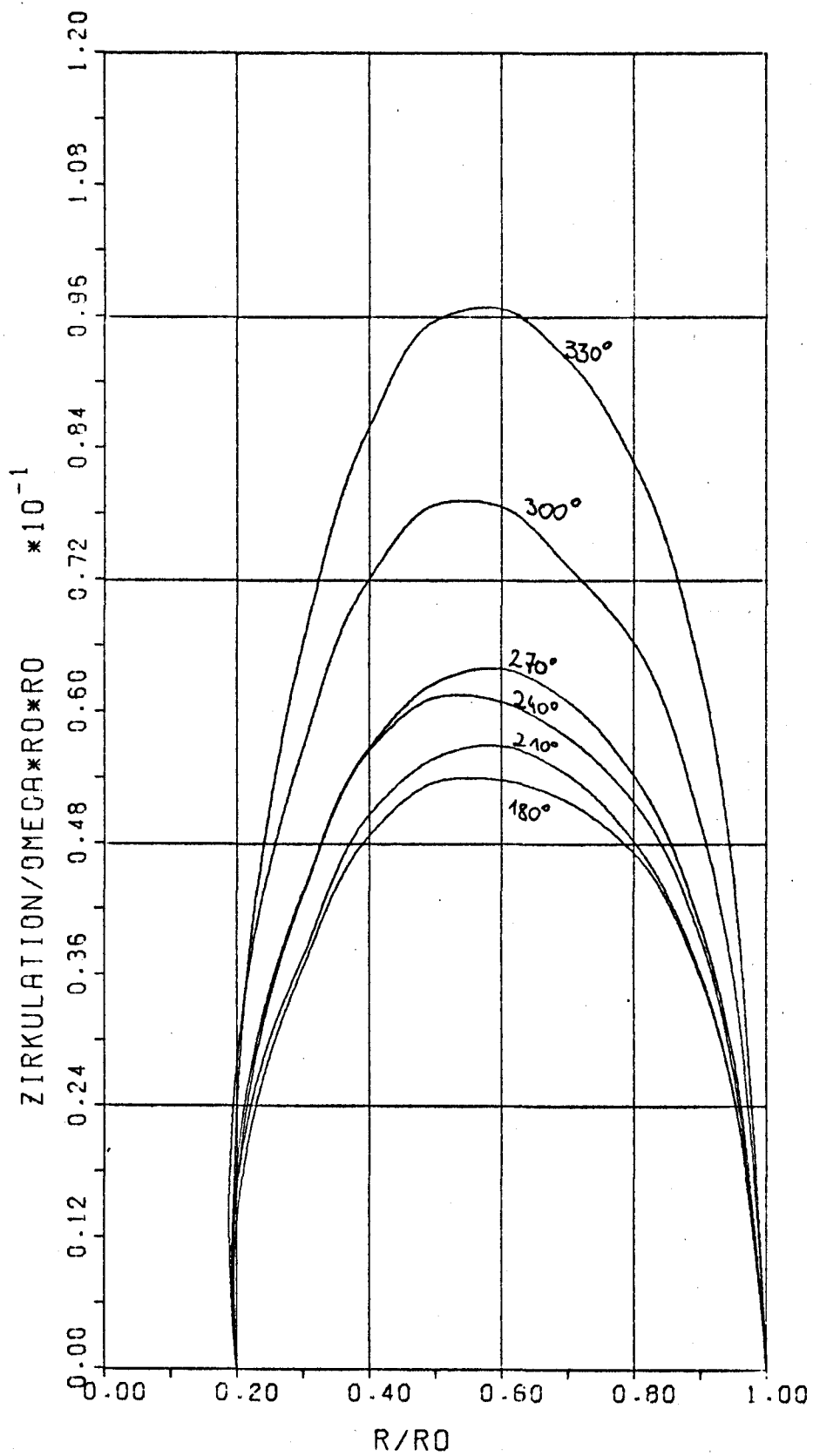
Göttinger Propeller T(40)

A66.55



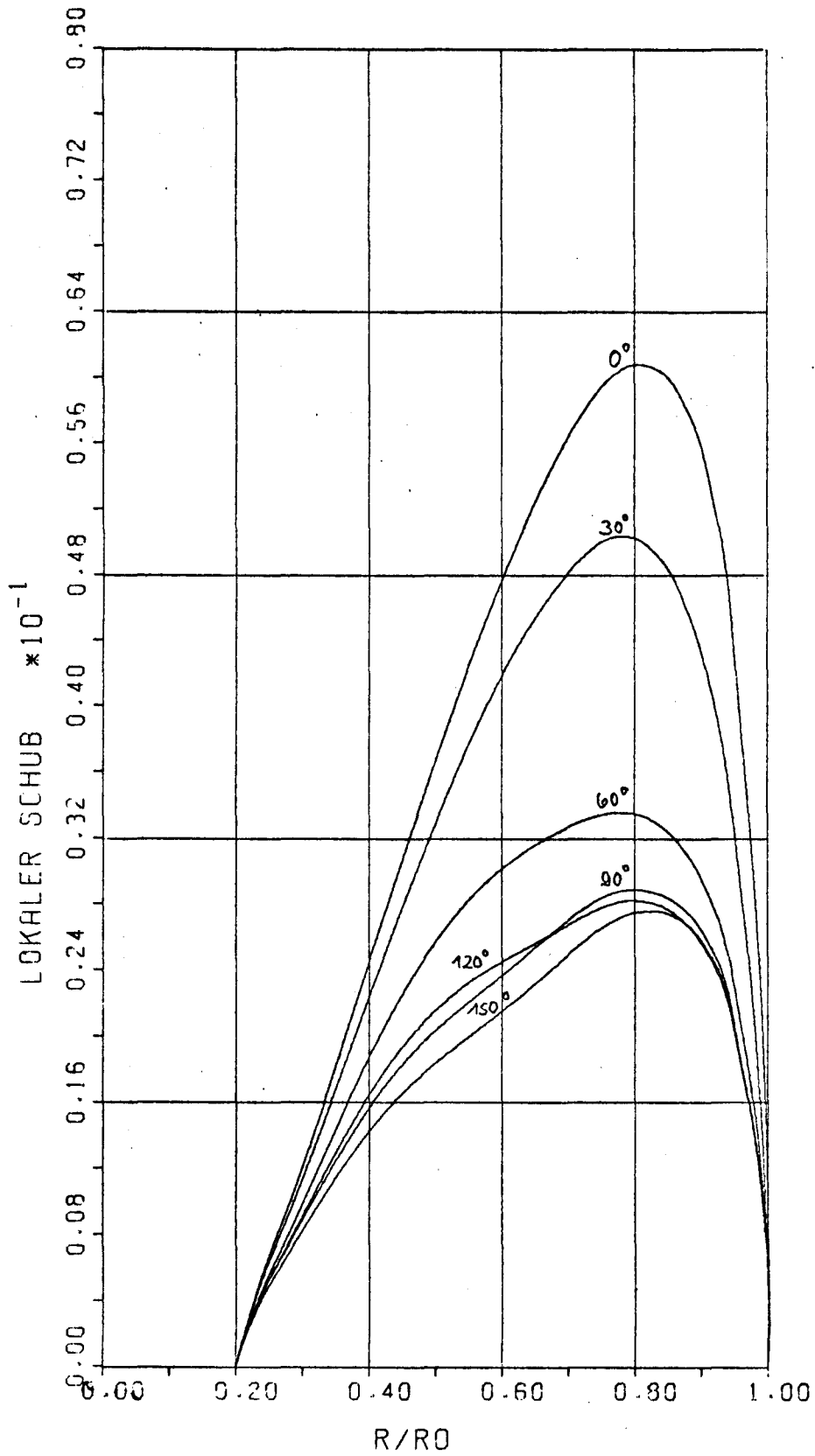
JTTC-Propeller $T(\psi_0)$

A66.56



JTTC - Propeller T'(y₀)

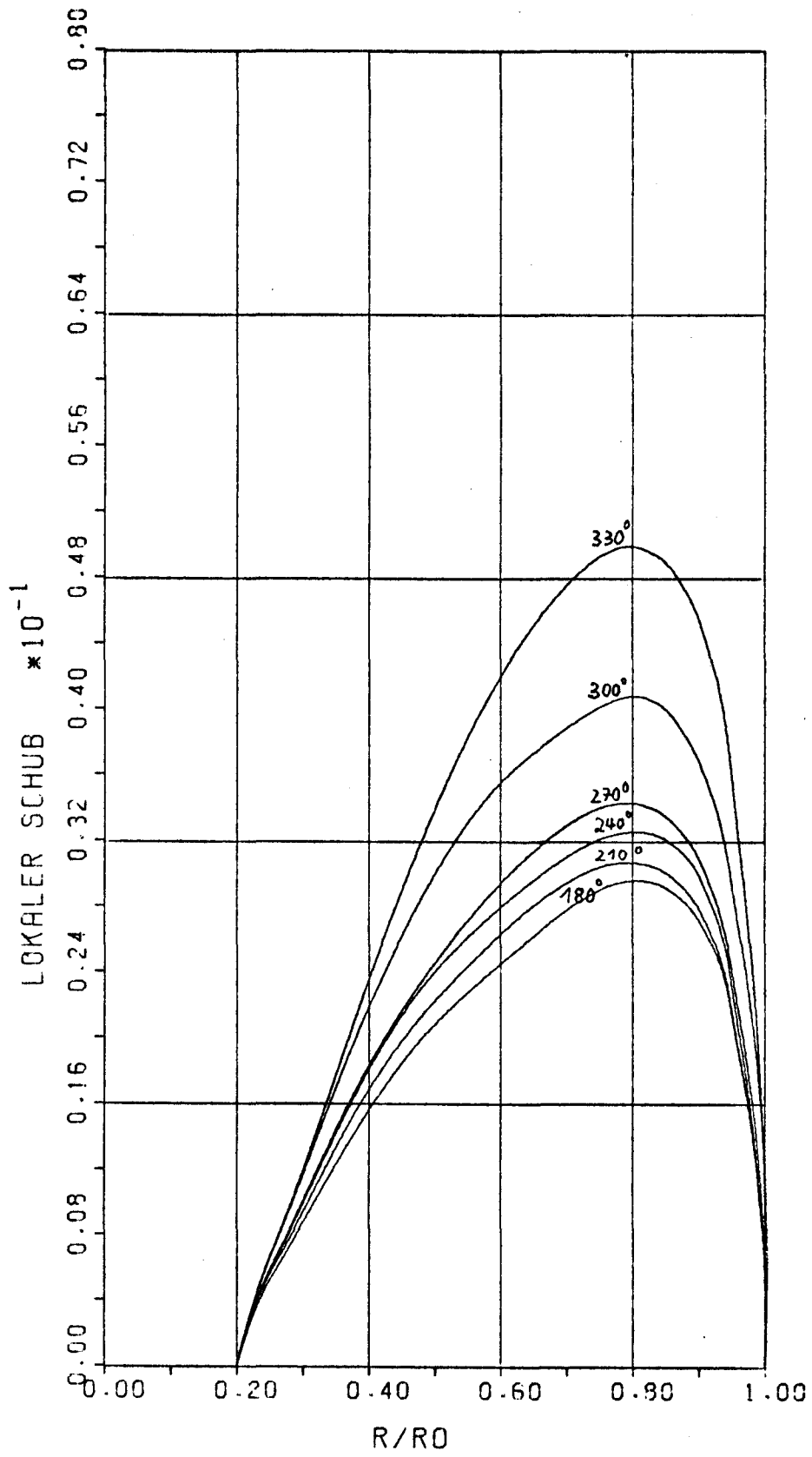
A66. 57



GÖTTINGER PROPELLER

(ohne Dicke)

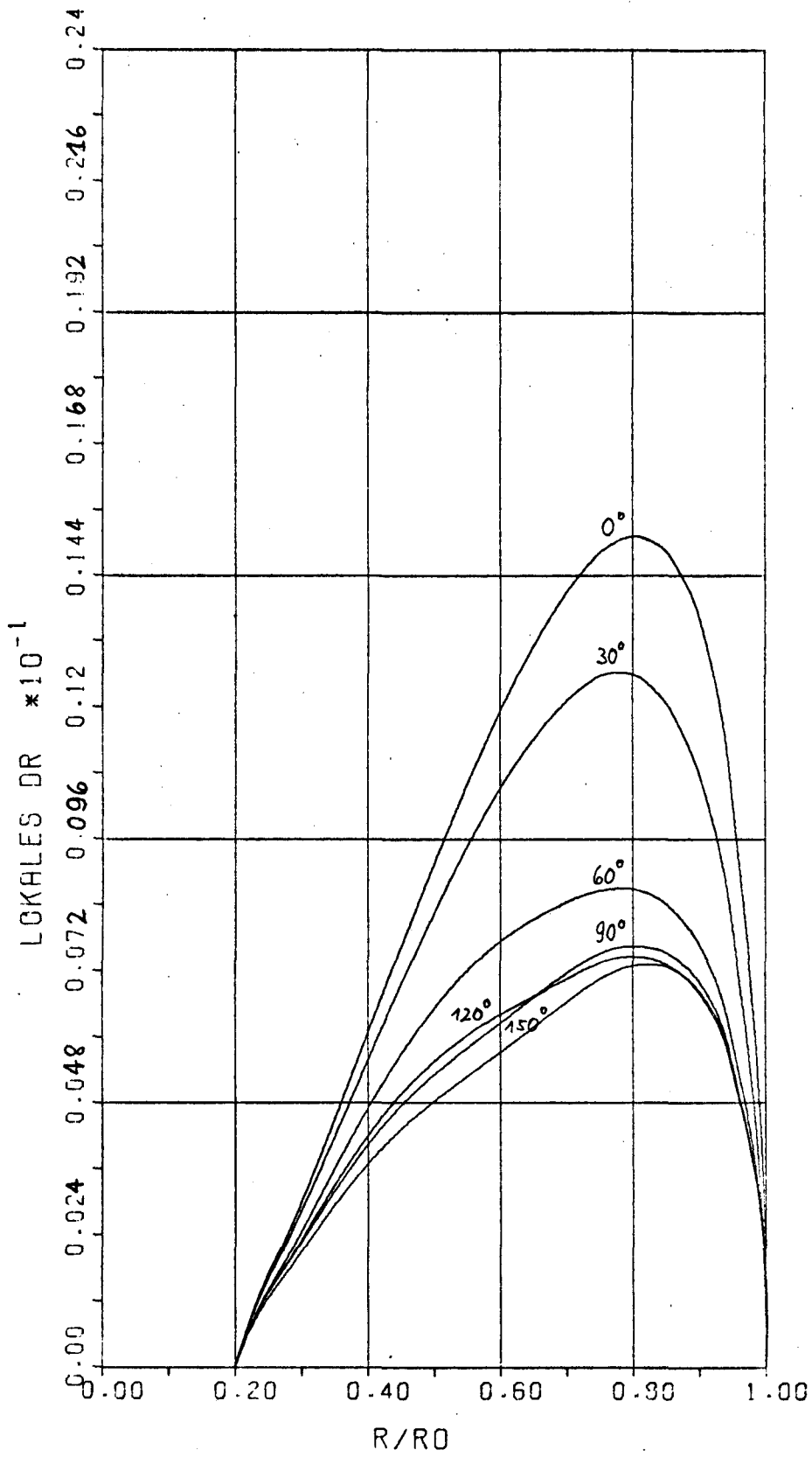
A66.58



GÖTTINGER PROPELLER

(ohne Dicke)

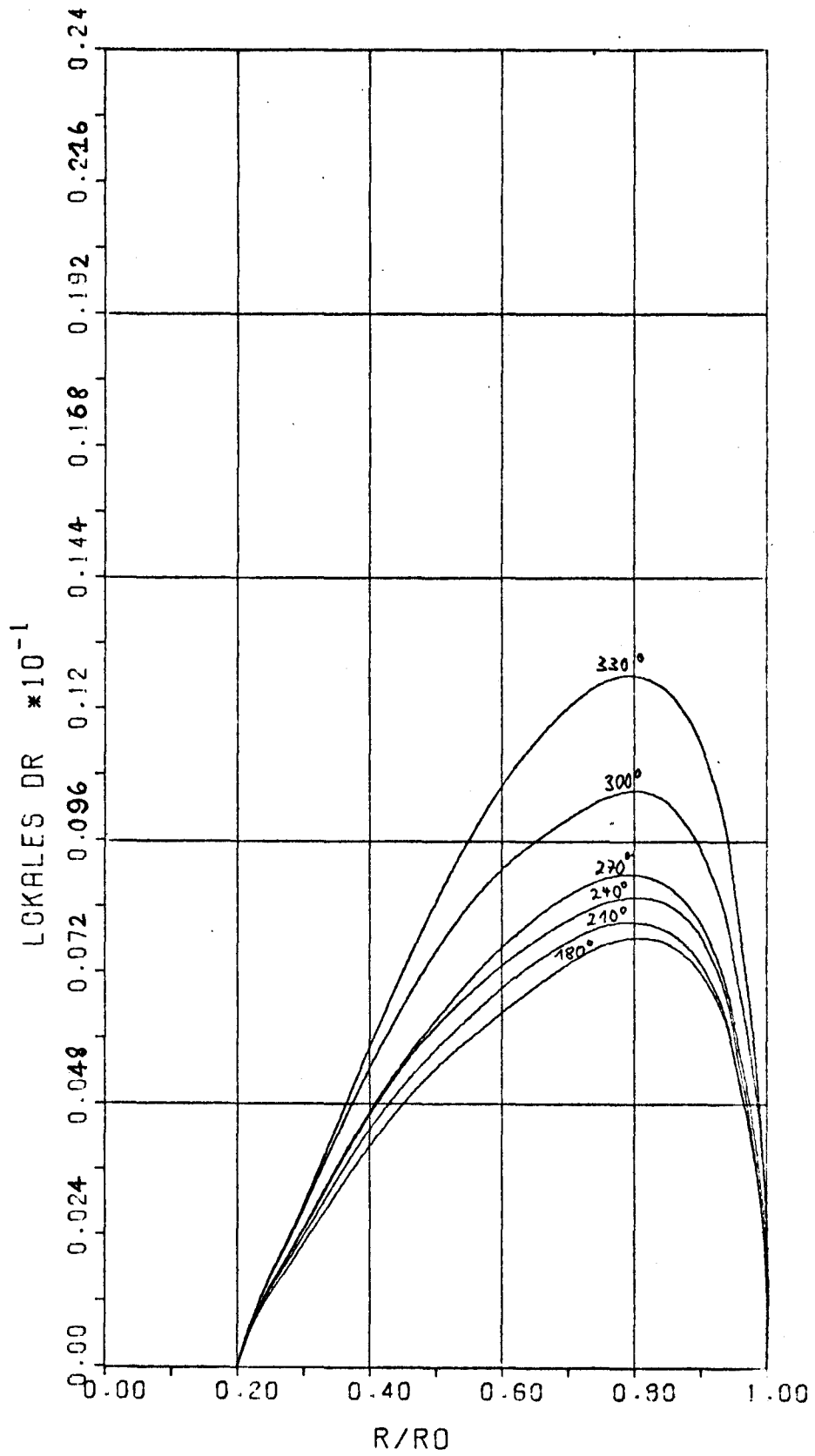
Abb. 59



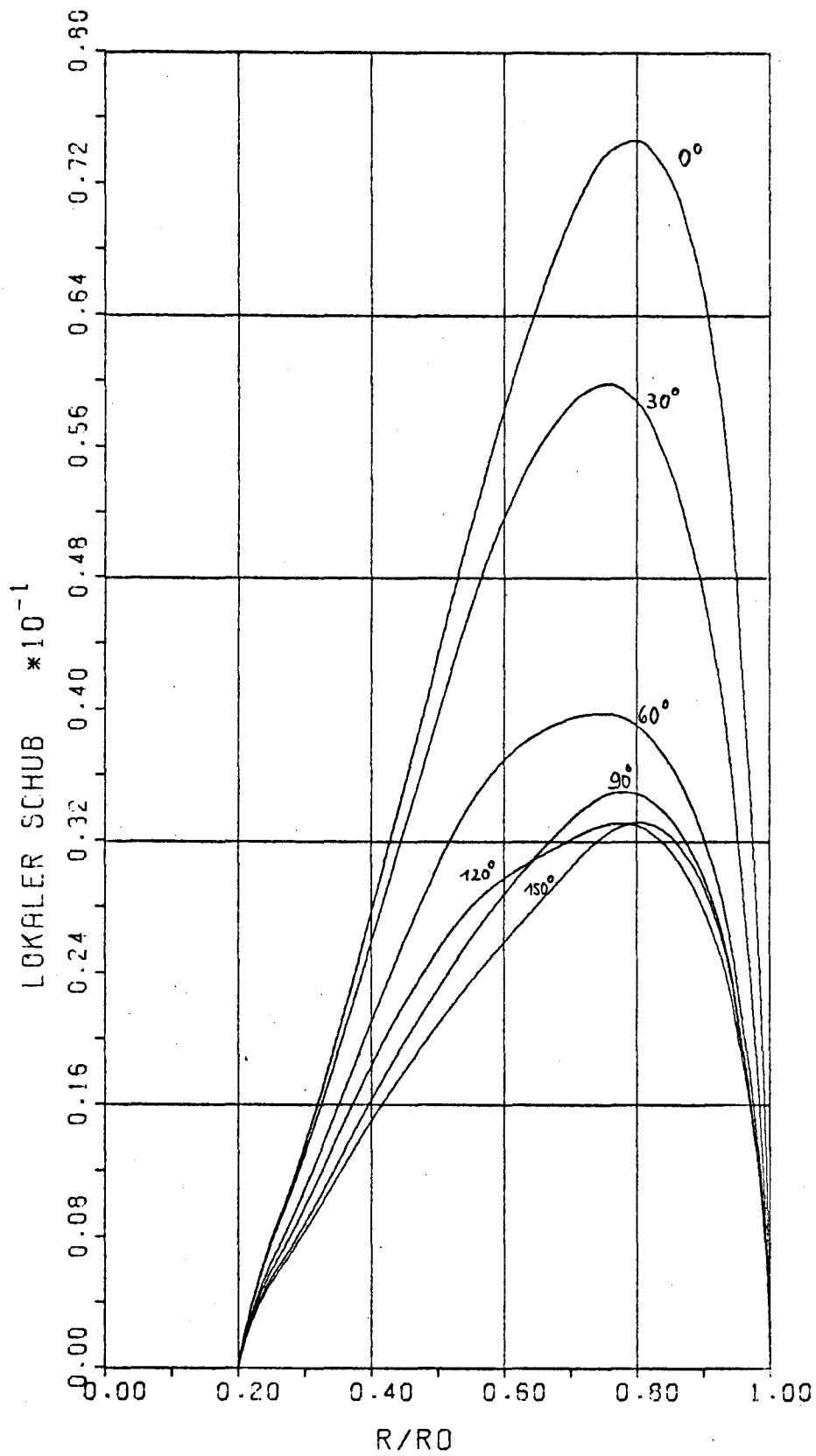
GÖTTINGER PROPELLER

(ohne Dicke)

Abb. 60

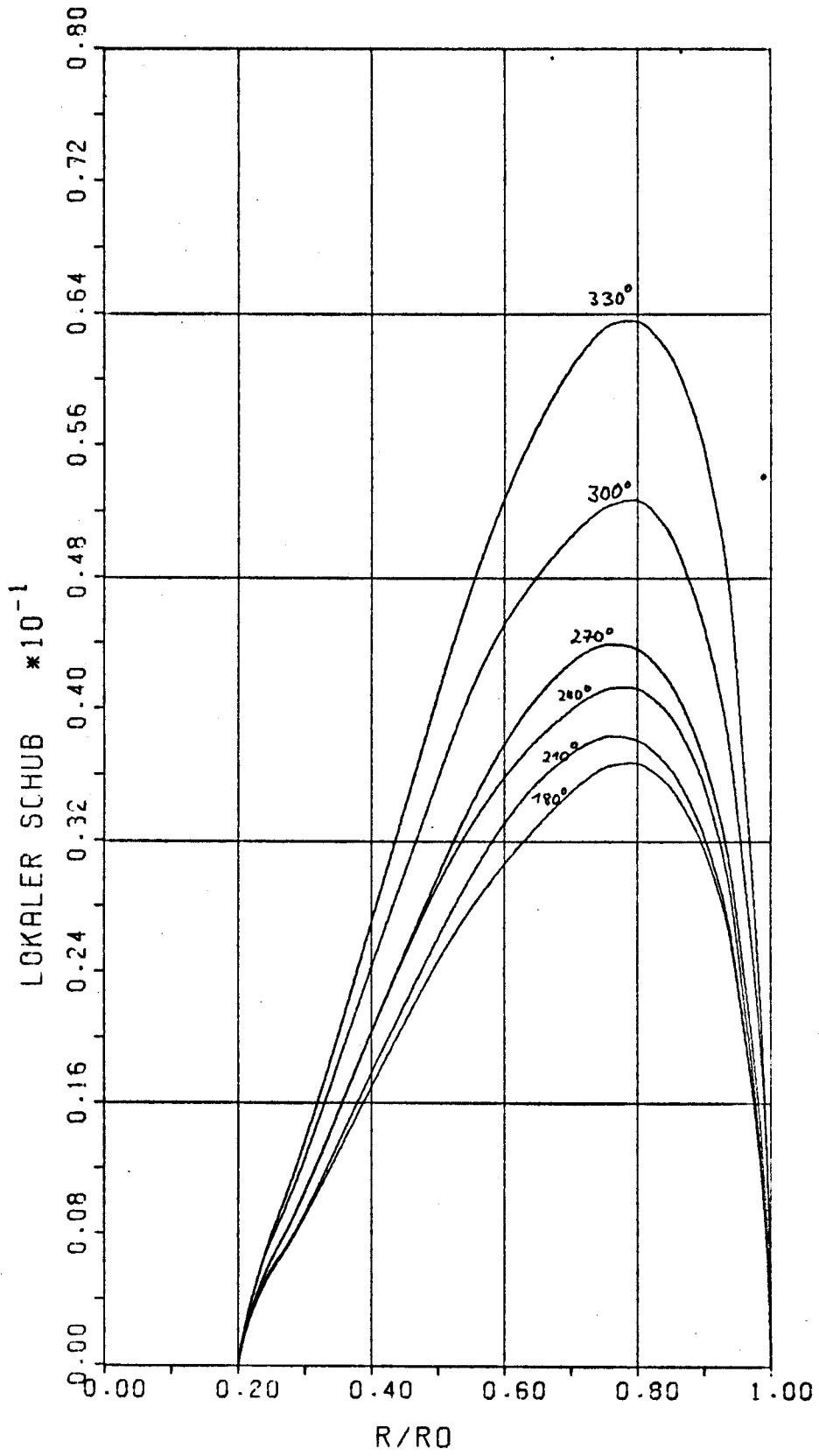


GÖTTINGER PROPELLER
 (ohne Dicke)
 Abb. 61



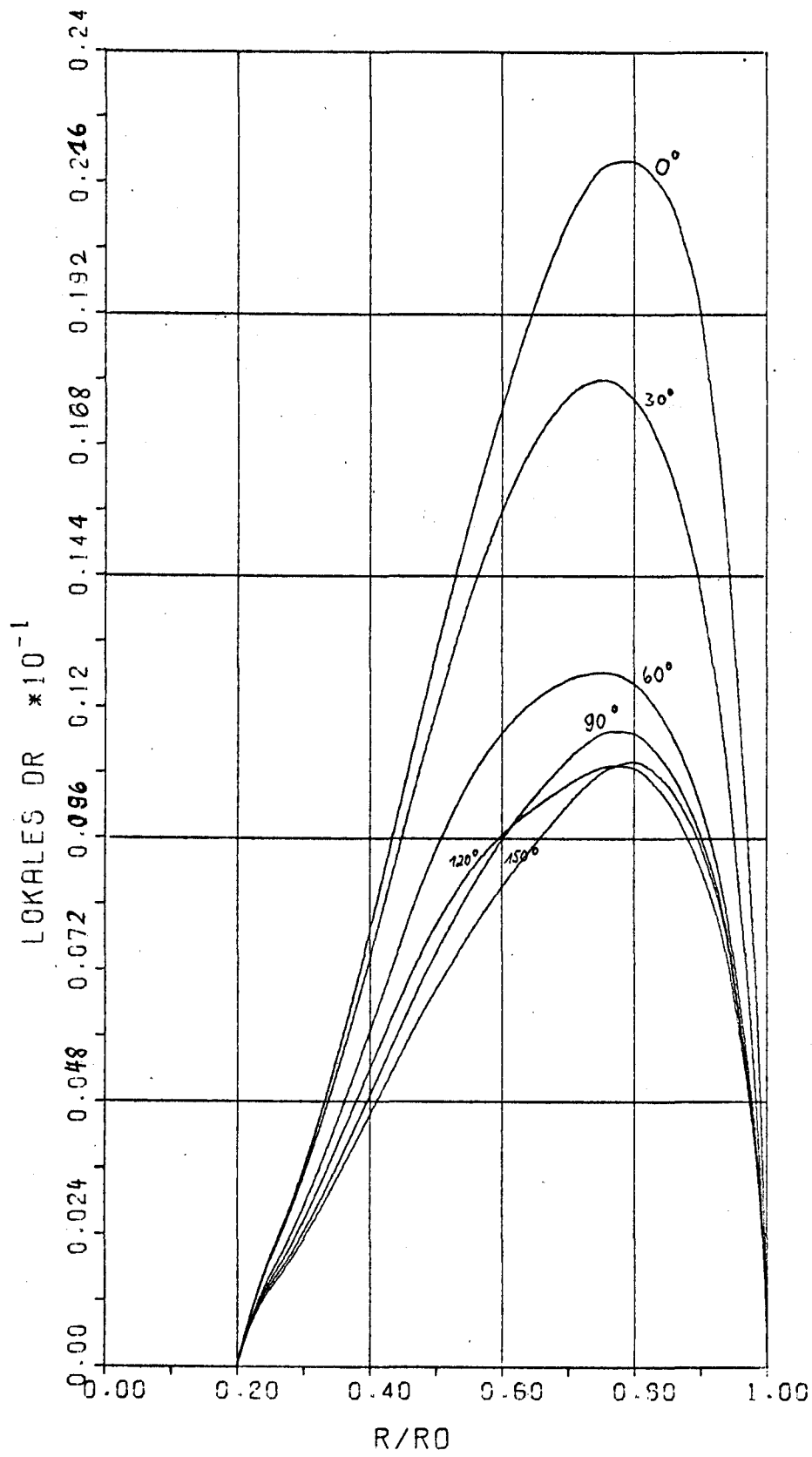
ITTC-PROPELLER

Abb. 62



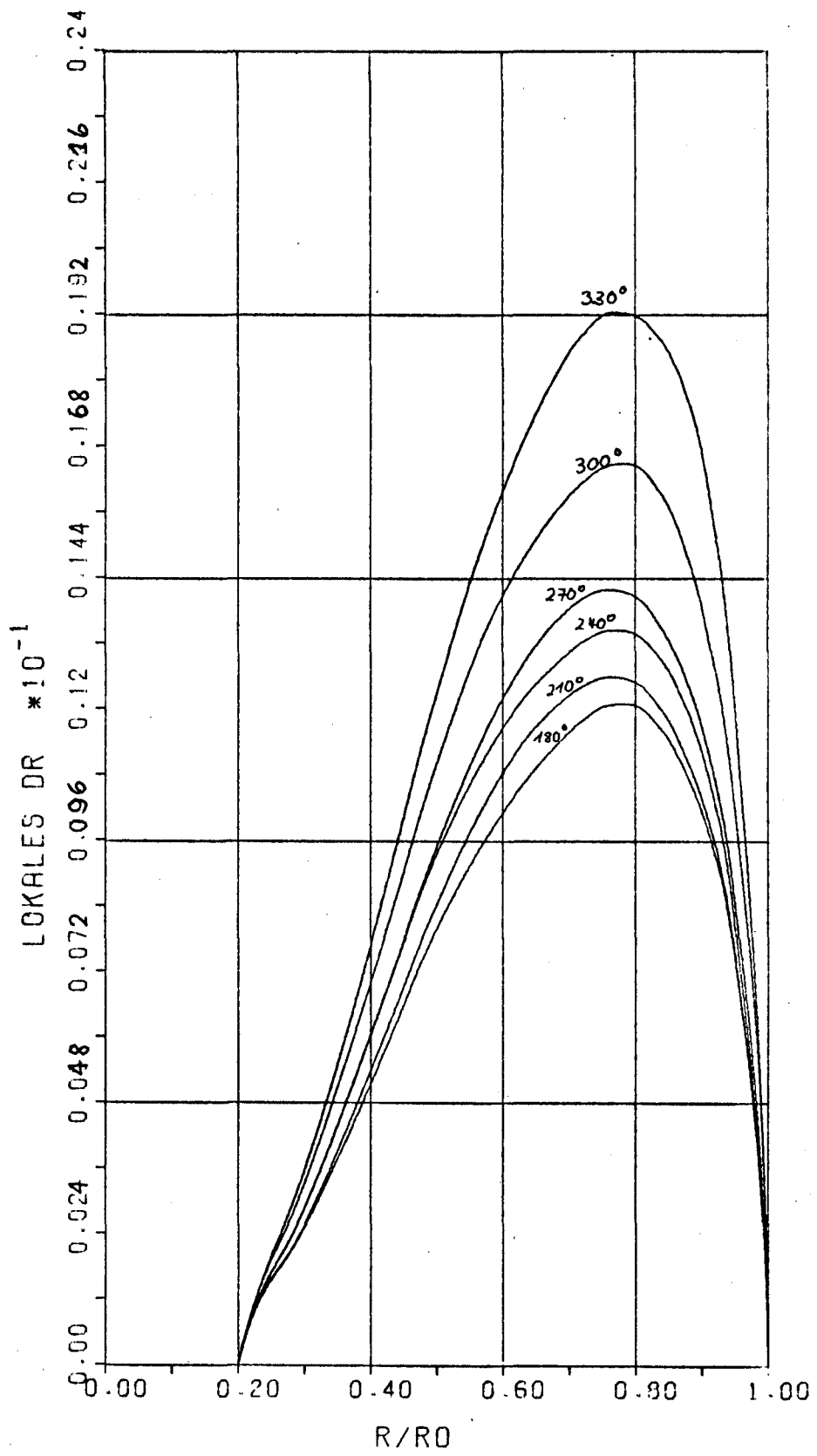
ITTC-PROPELLER

A66.63



ITTC-PROPELLER

Abb. 64



ITTC-PROPELLER

R66. 65

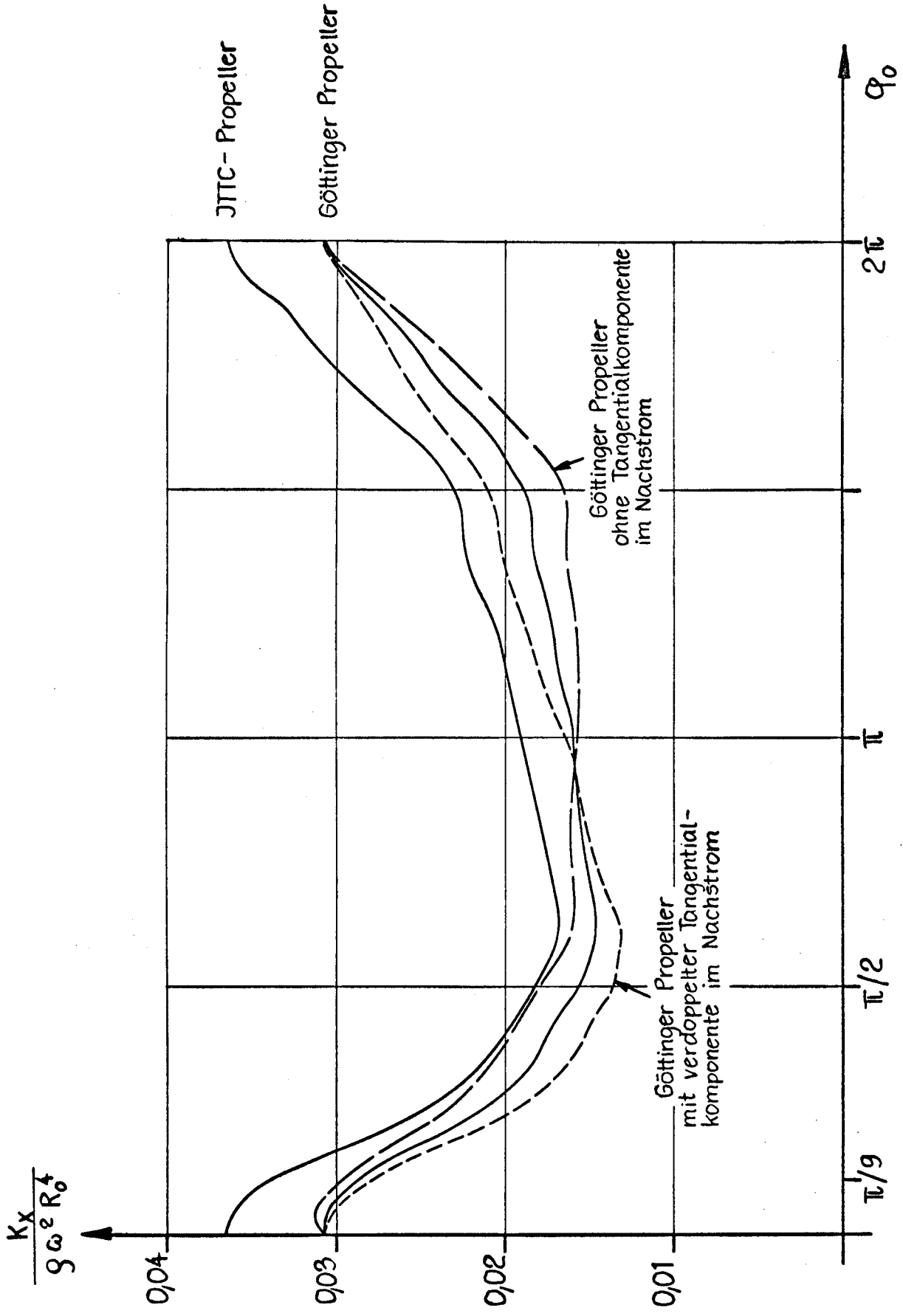
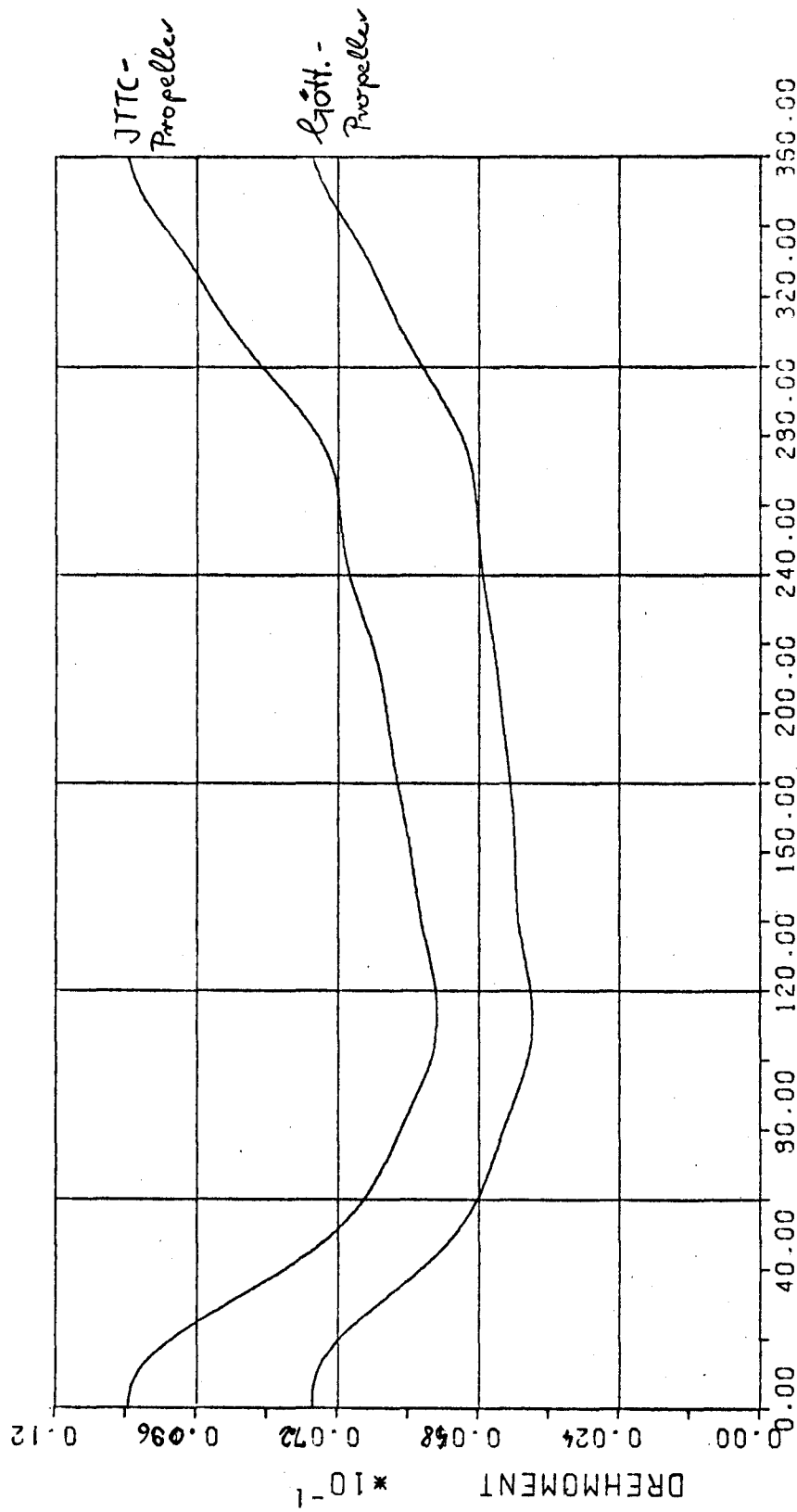


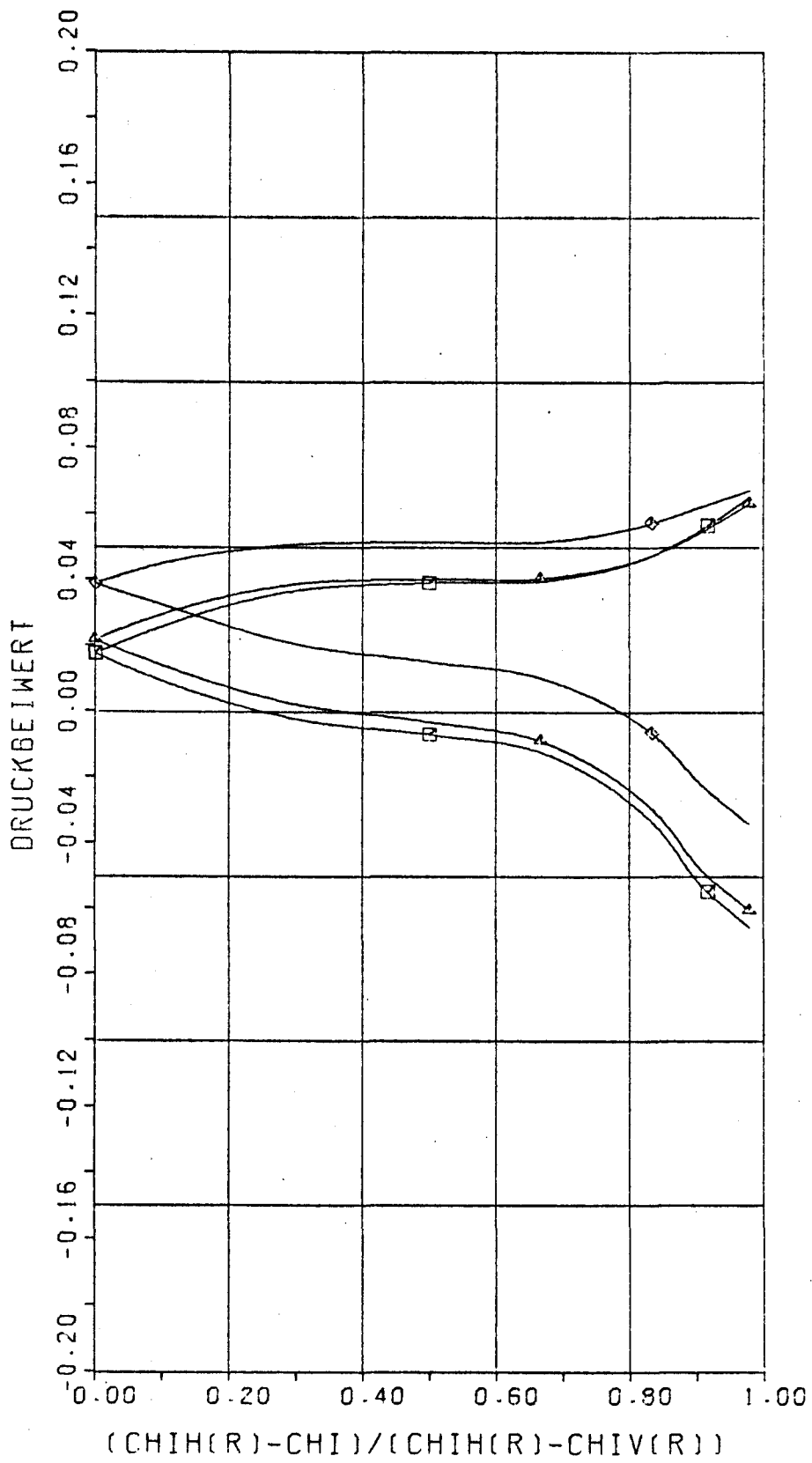
Abb. 66 Schub im JTTC - Nachstrom



PHI0(GRAD)

R66.67

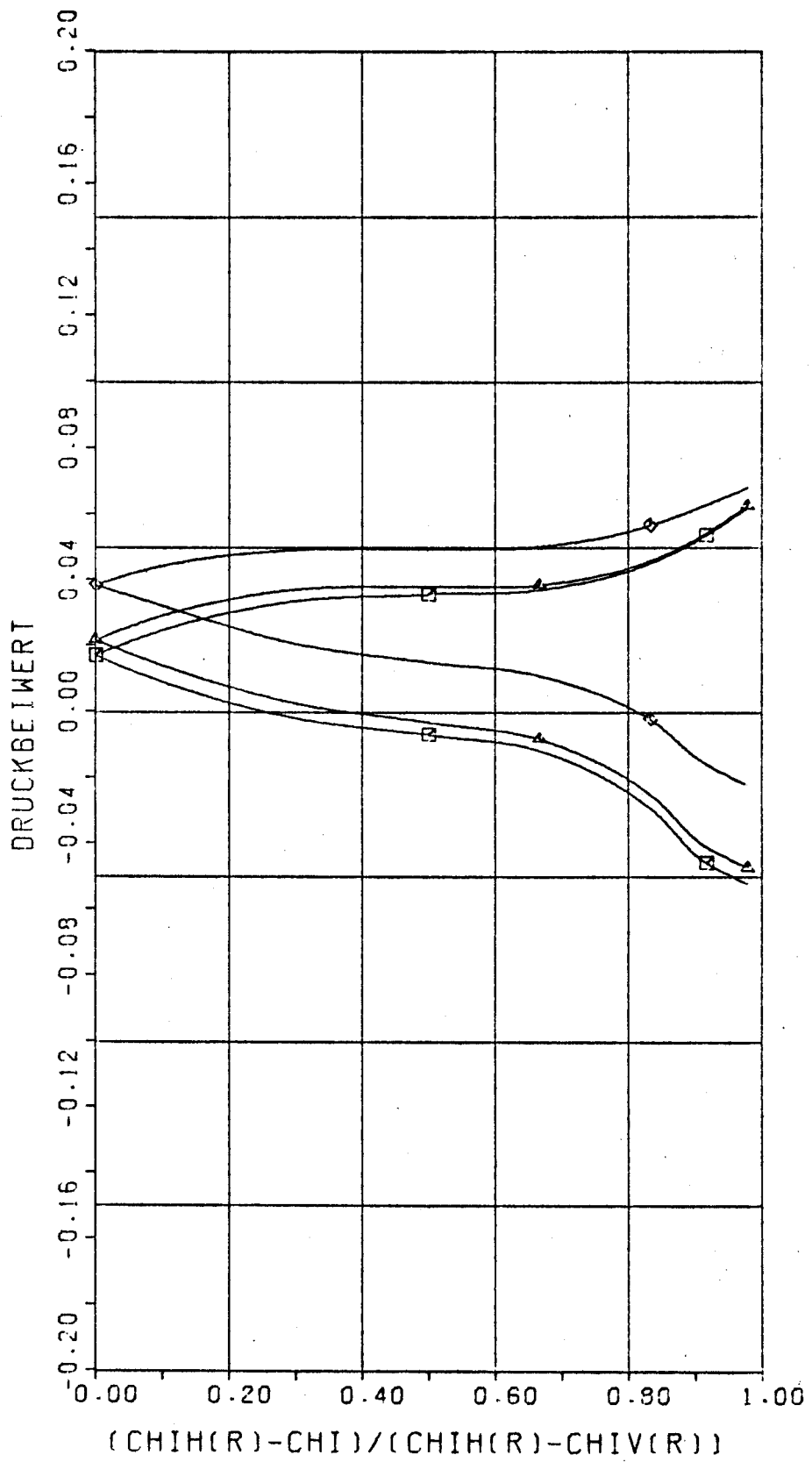
Drehmoment im JTTC-Nachstrom



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$q_0 = 0$$

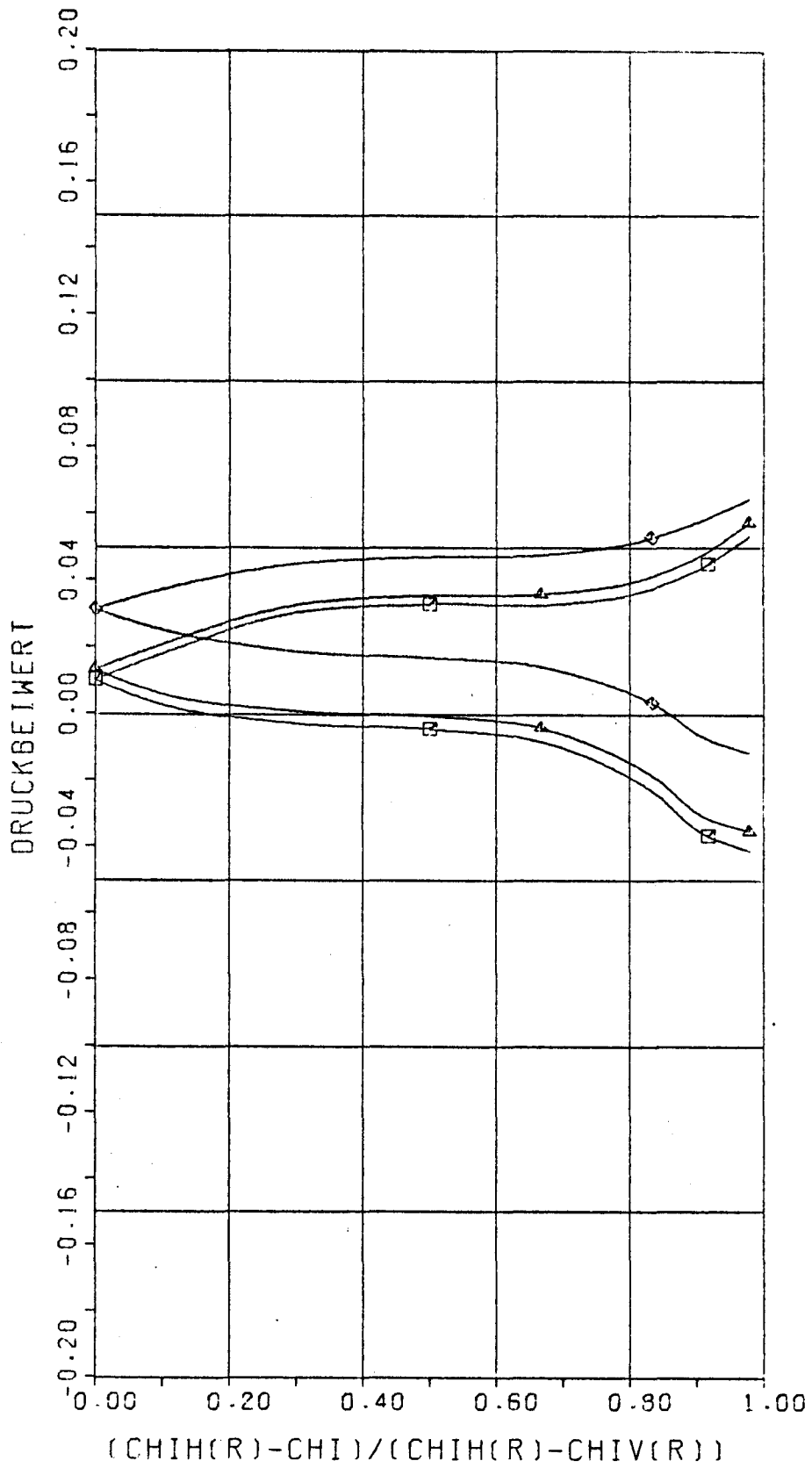
Abb. 68



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

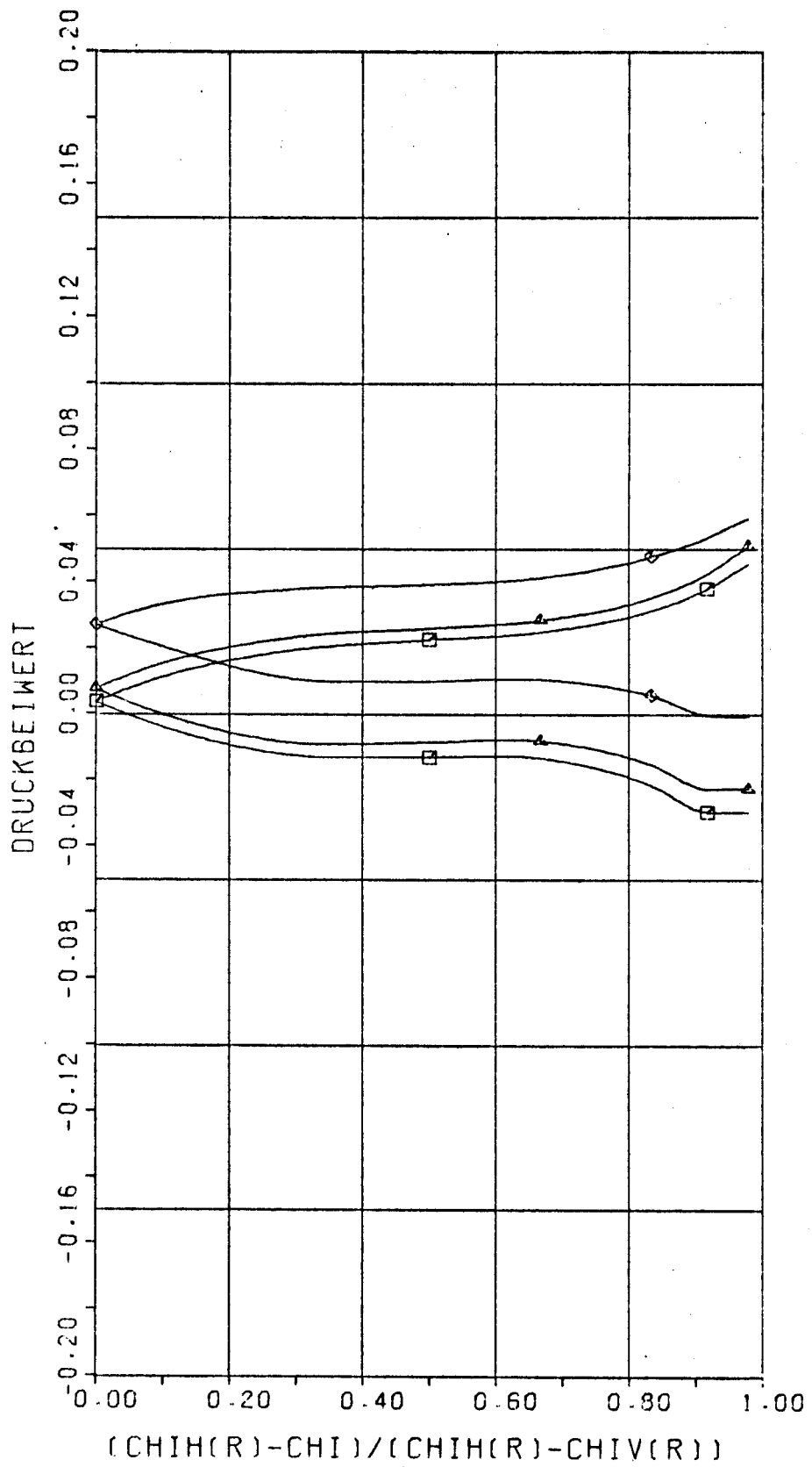
A66.69



$$r = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \pi$$

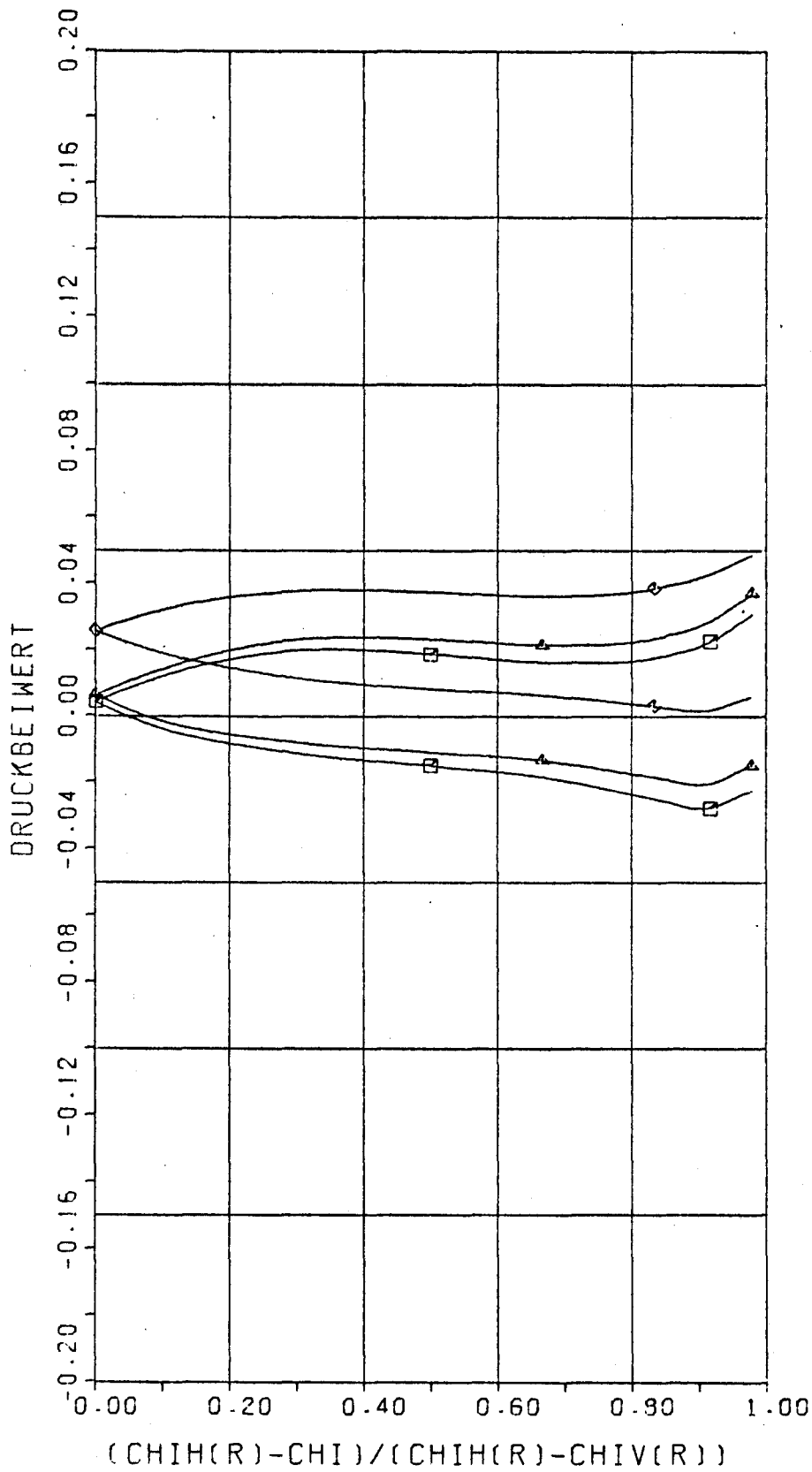
Fl. 66. 70



$$r = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \pi$$

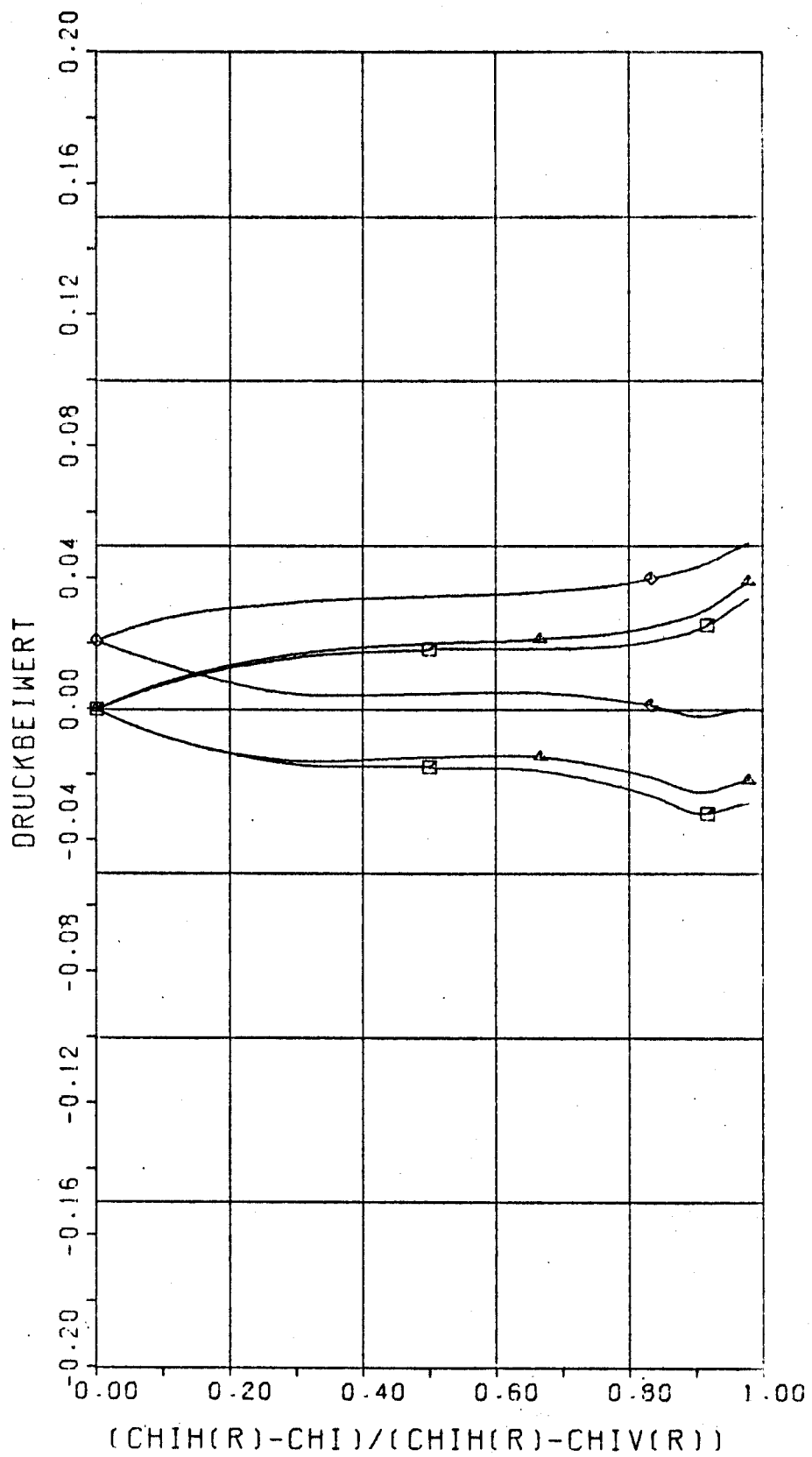
A66.71



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4}{6} \pi$$

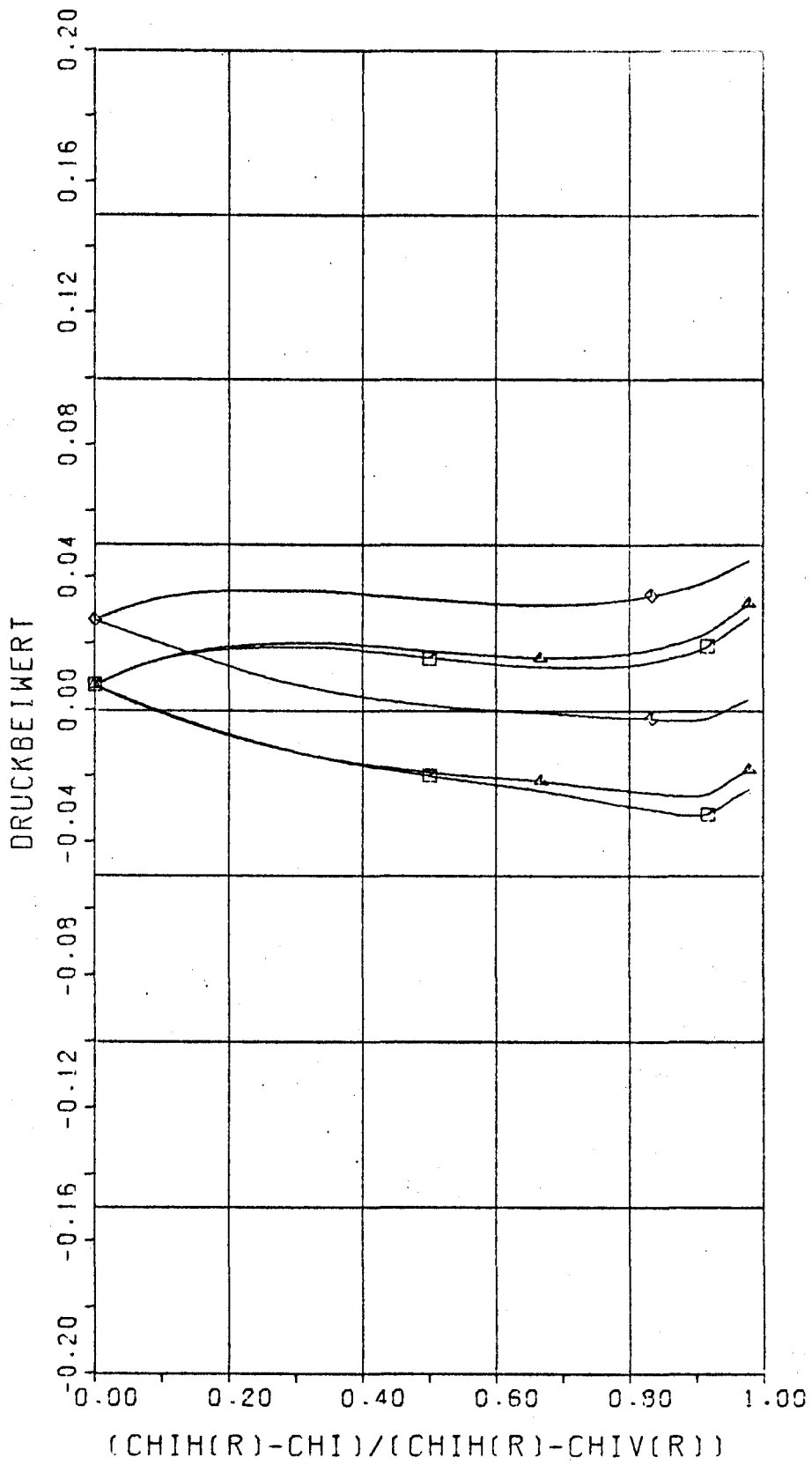
Abg. 72



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6} \pi$$

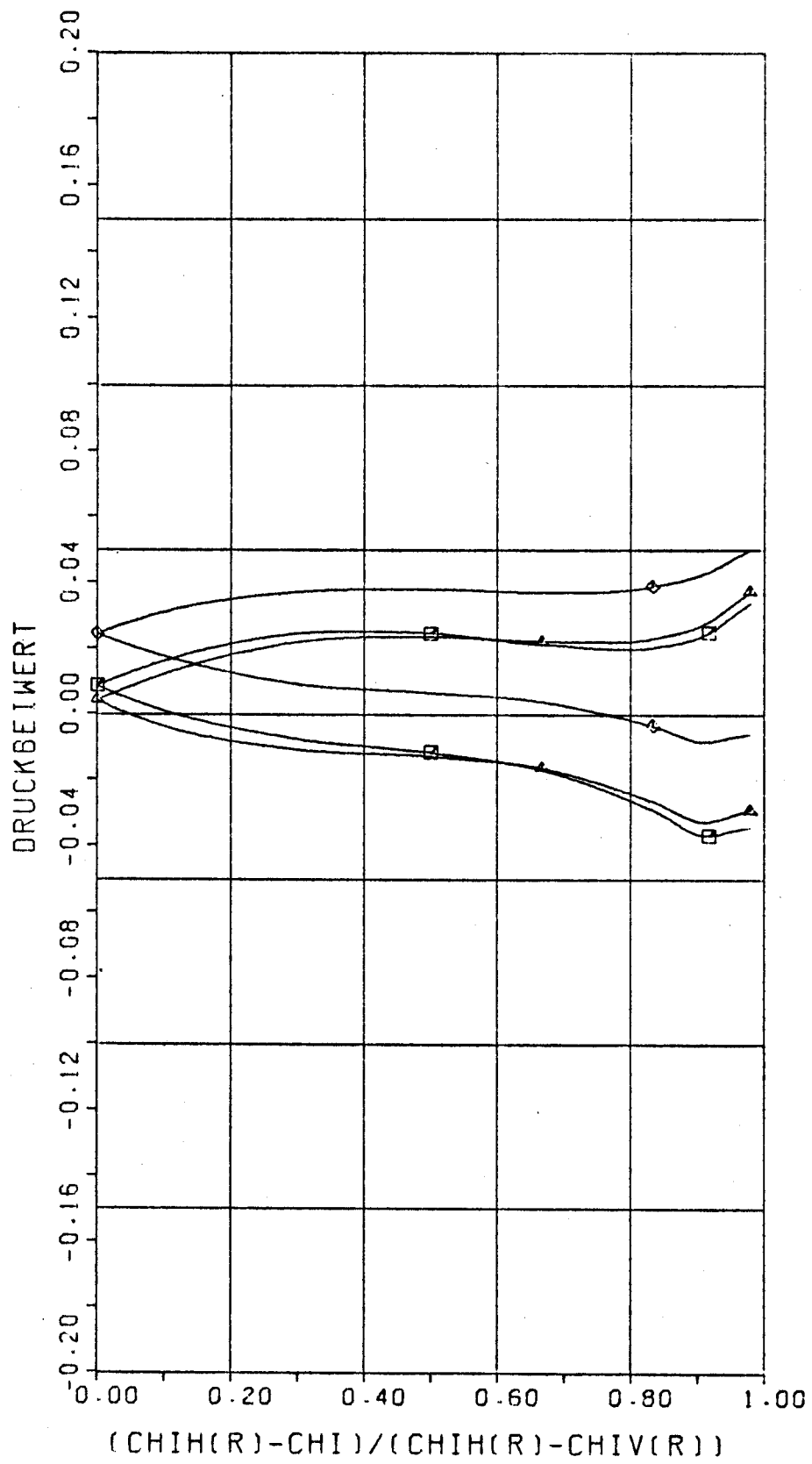
Fl. 66.73



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

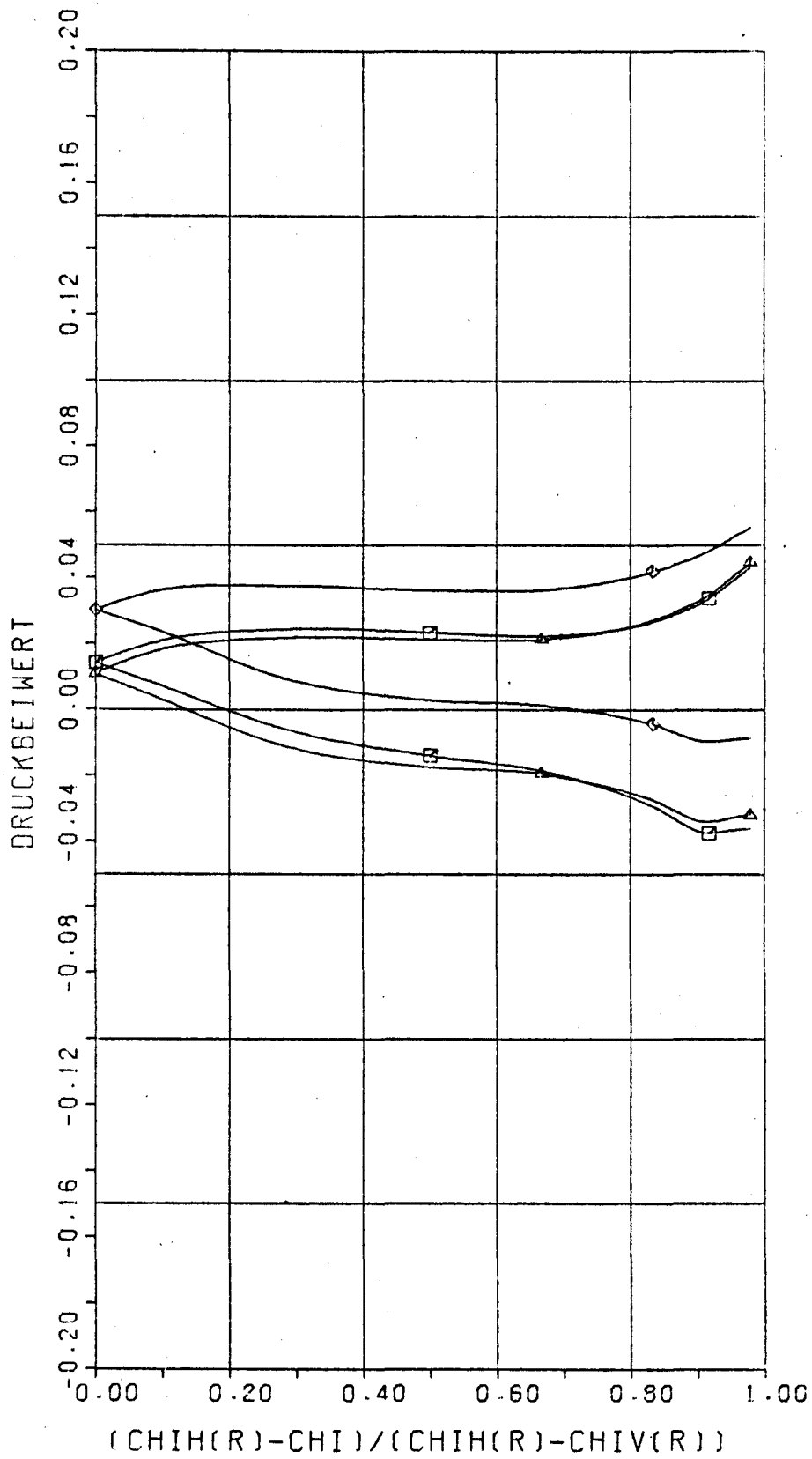
AGG. 74



$$r = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

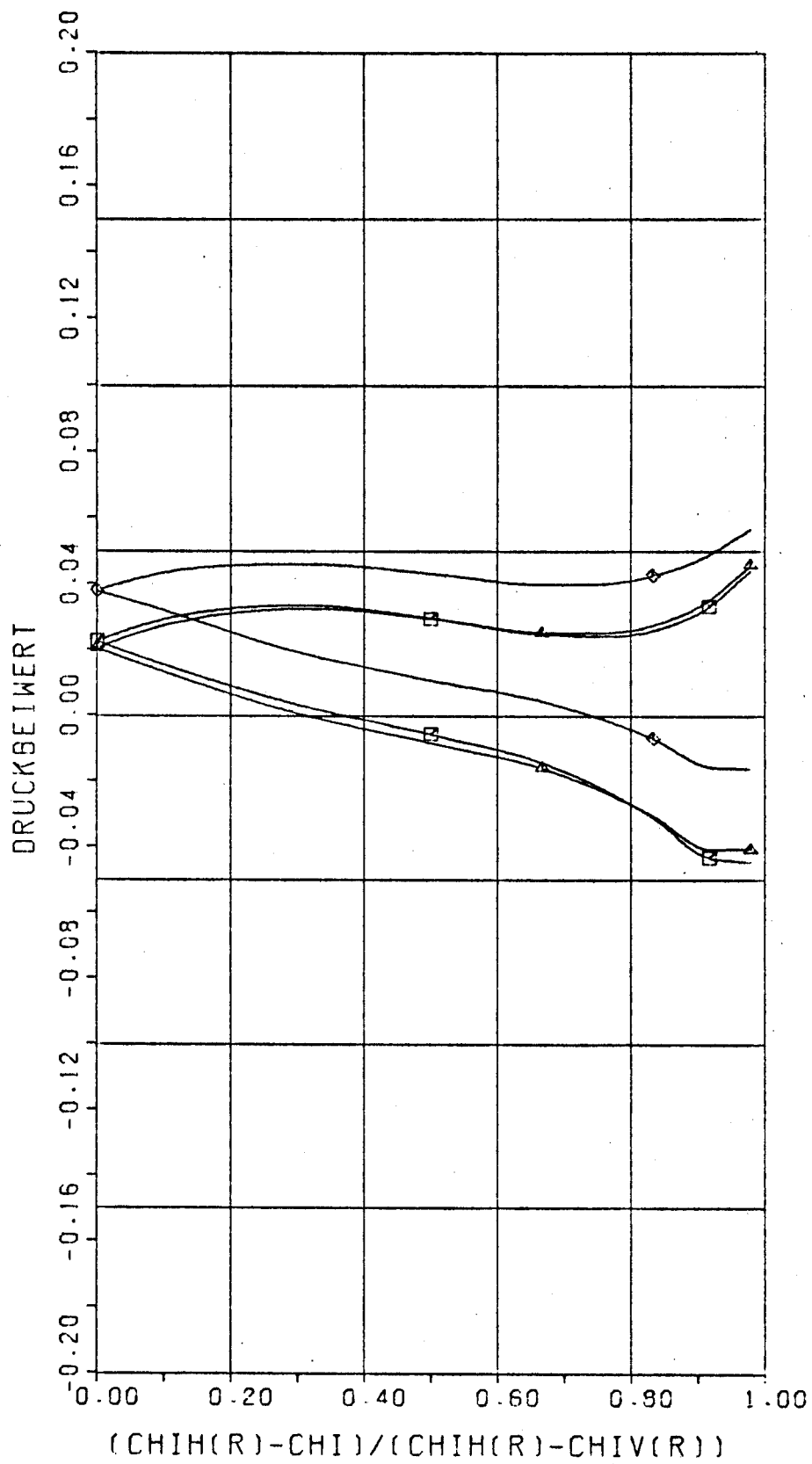
A66.75



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8}{6} \pi$$

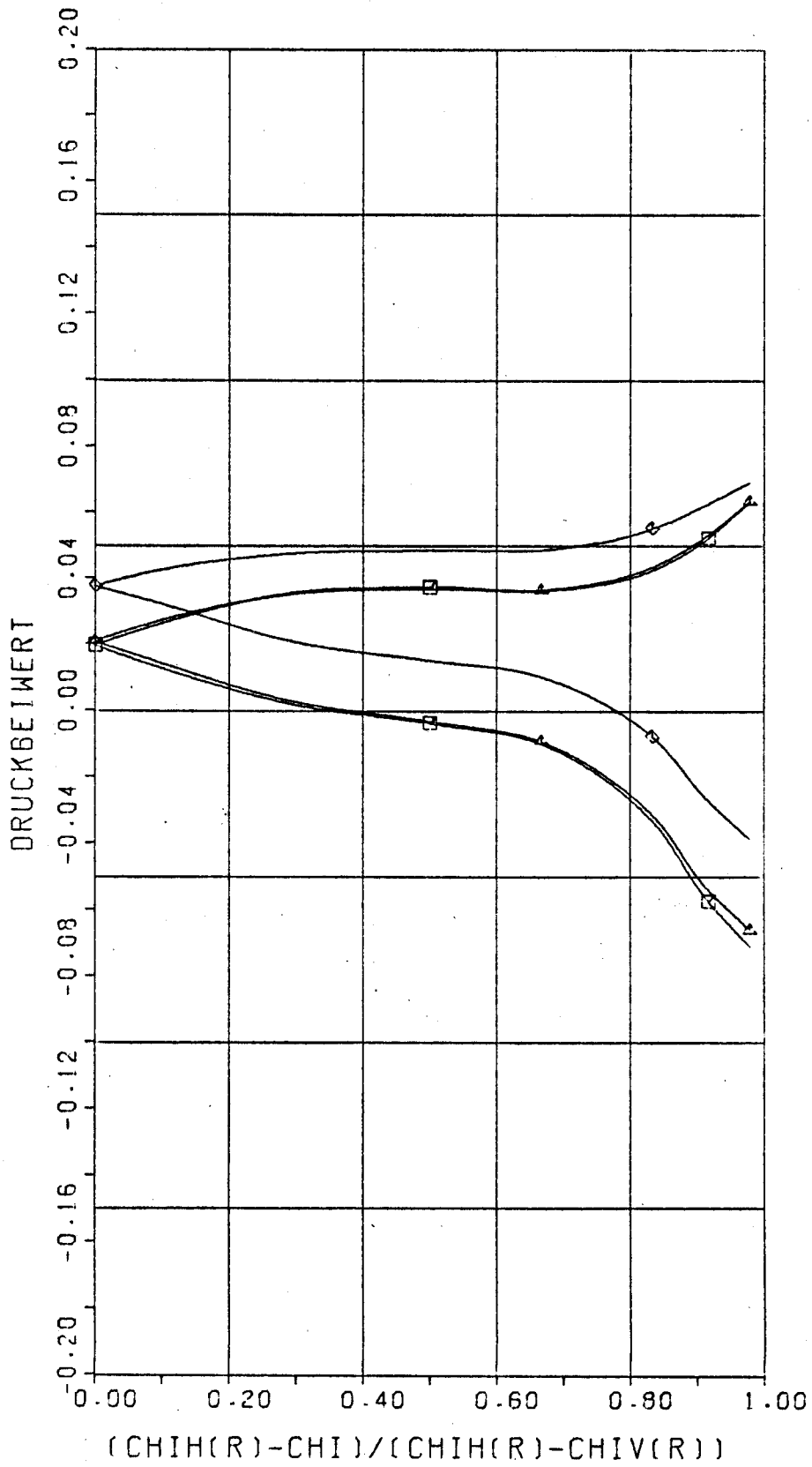
A66.76



$$r = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{6} \pi$$

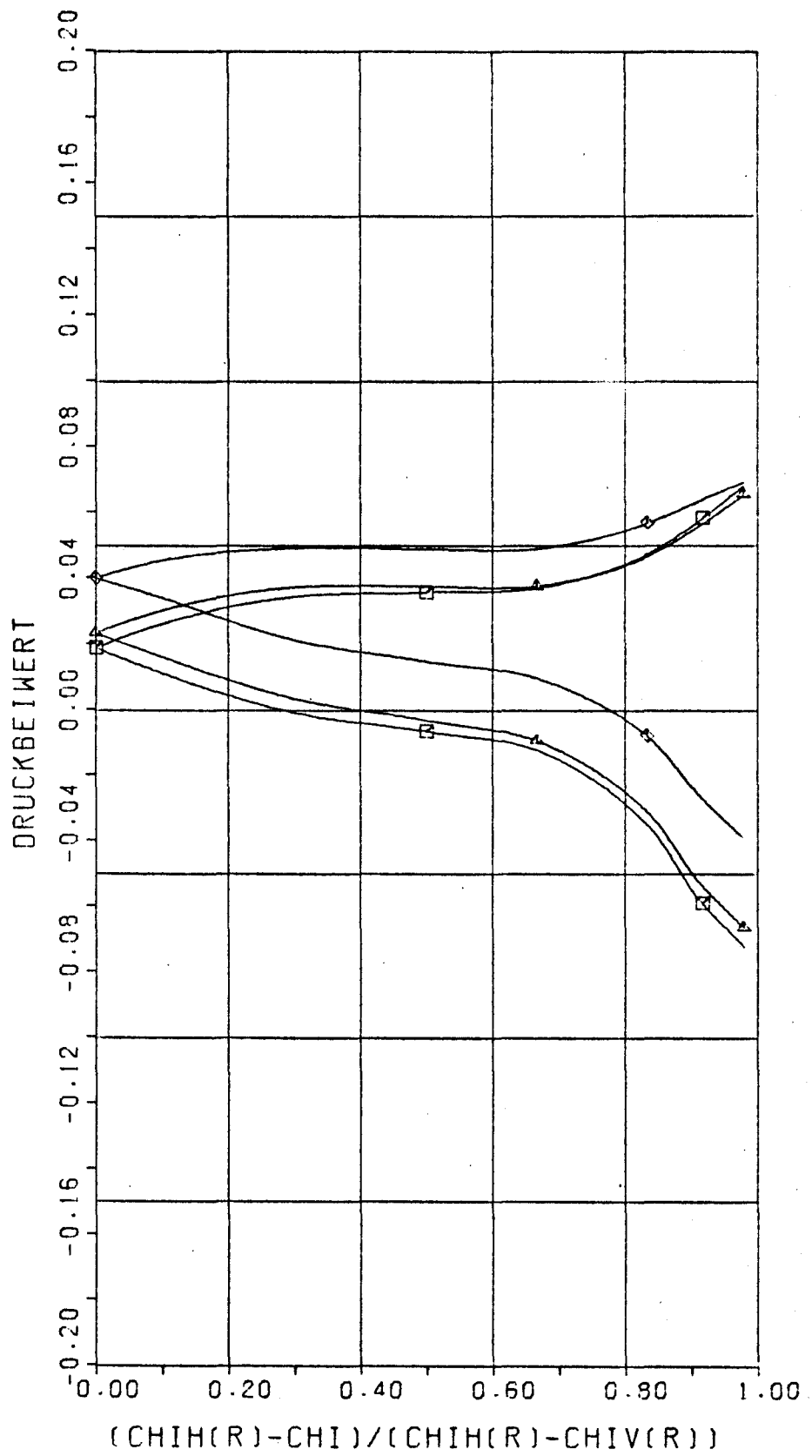
Abb. 77



$$\tau = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

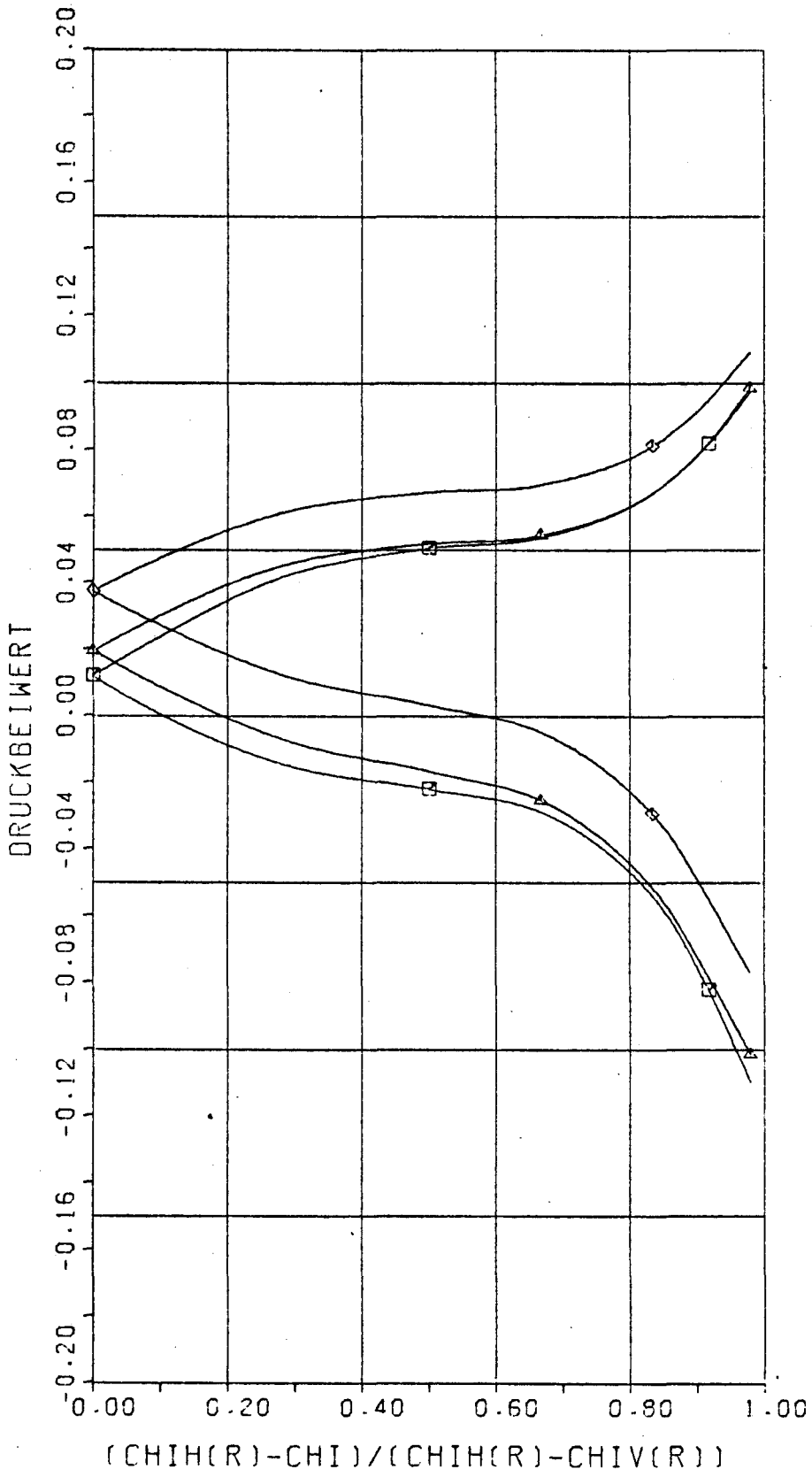
A66.78



$$r = 0.3 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

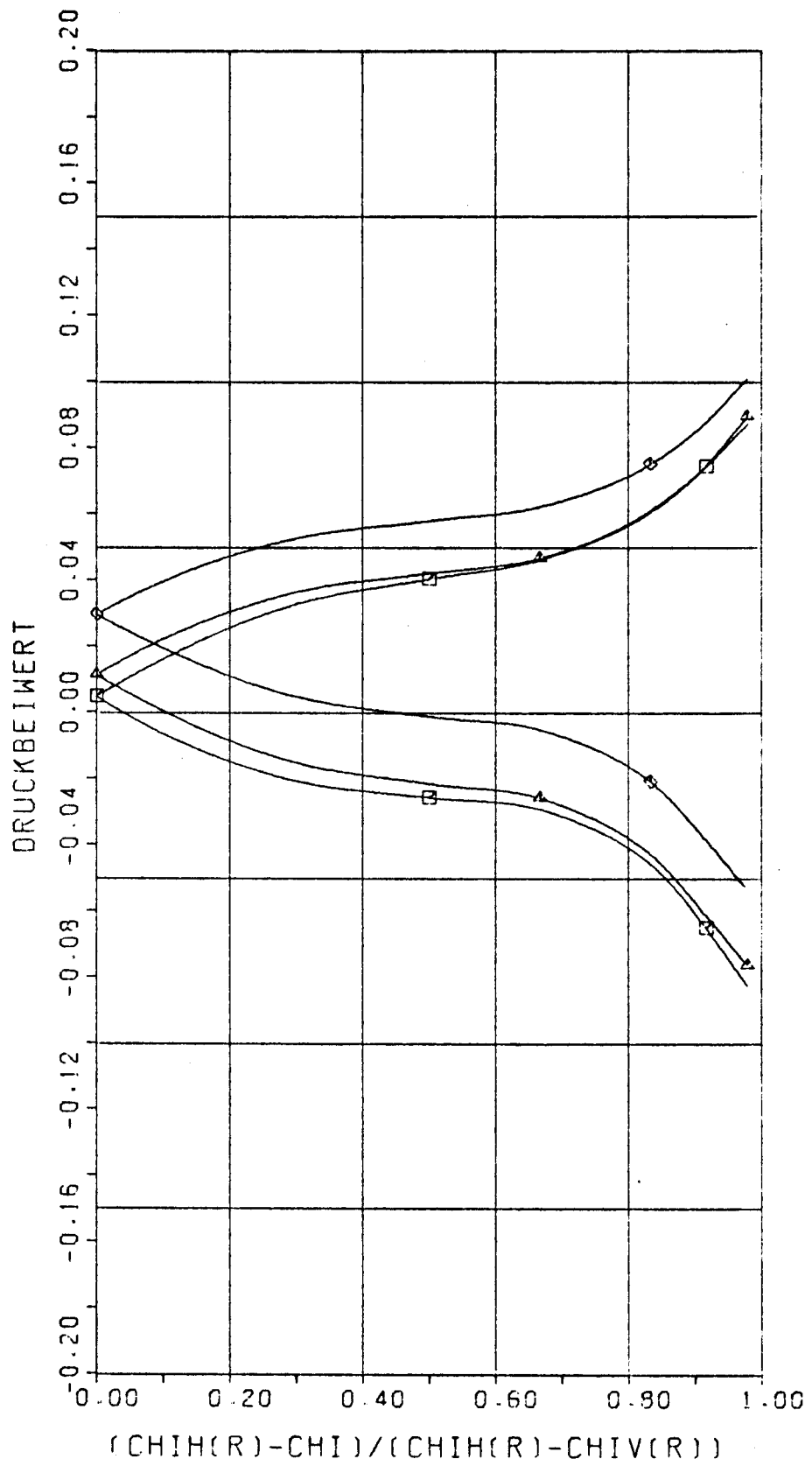
A66.79



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = 0$$

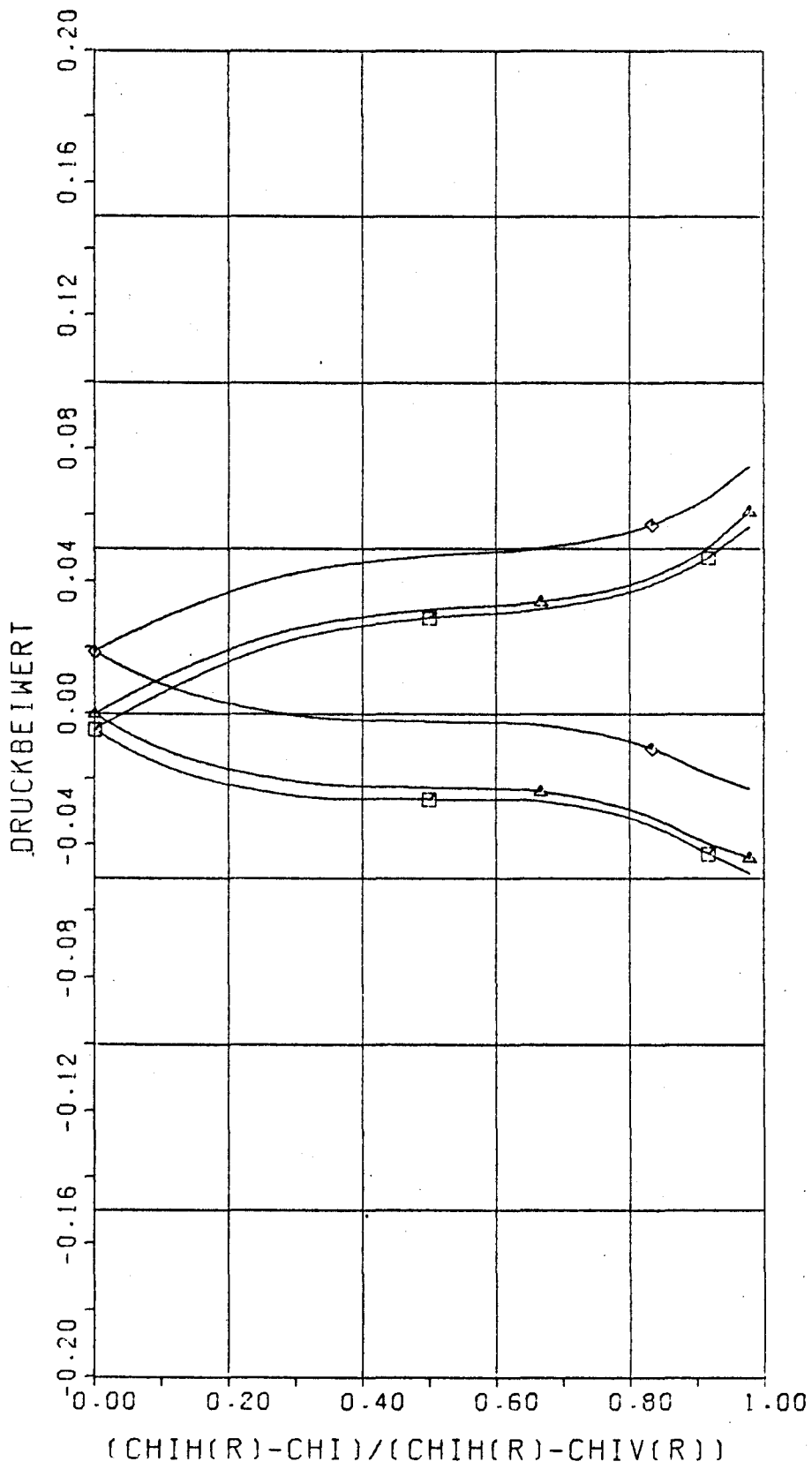
A66.80



$$\tau = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

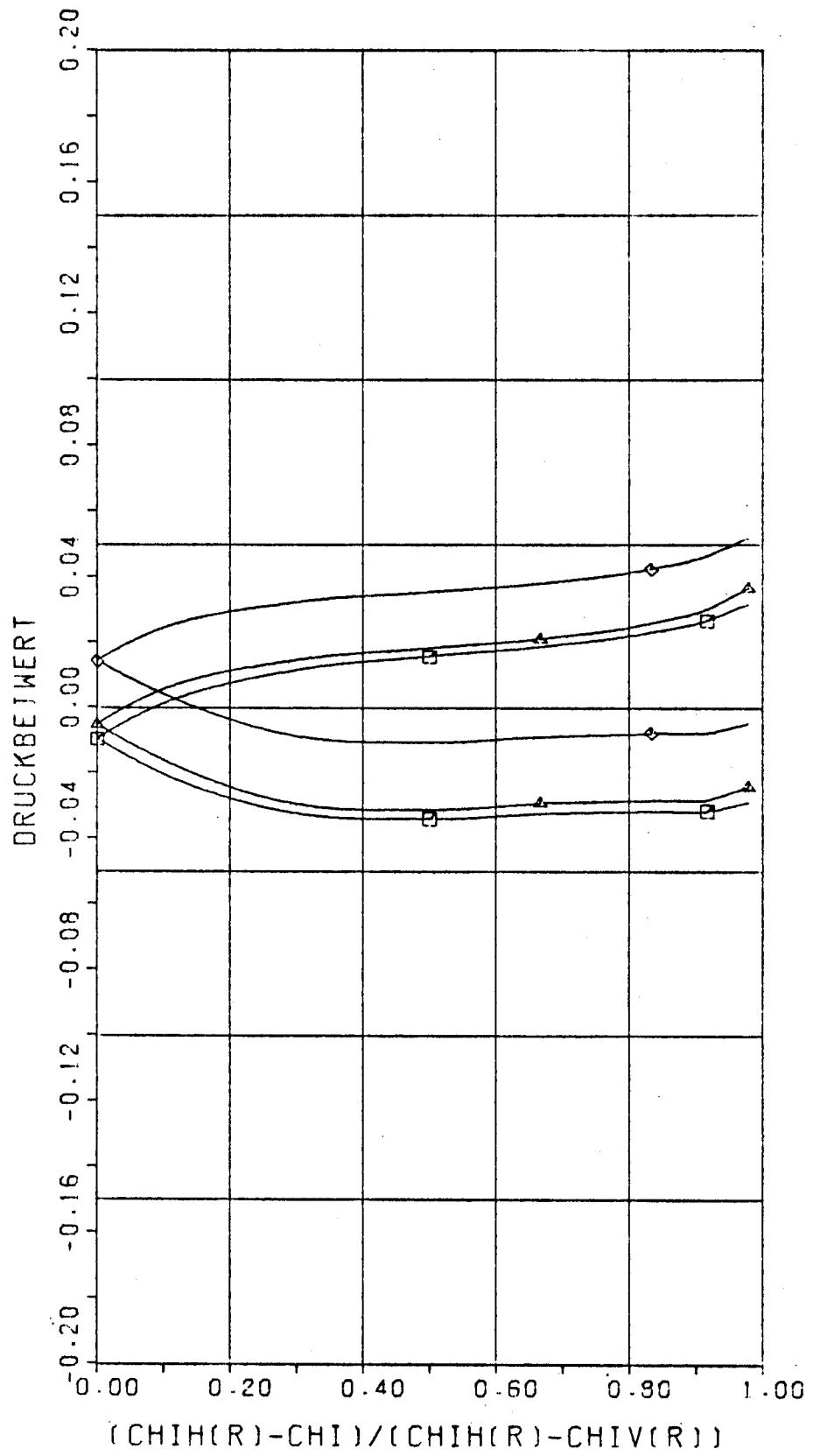
A66.81



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \pi$$

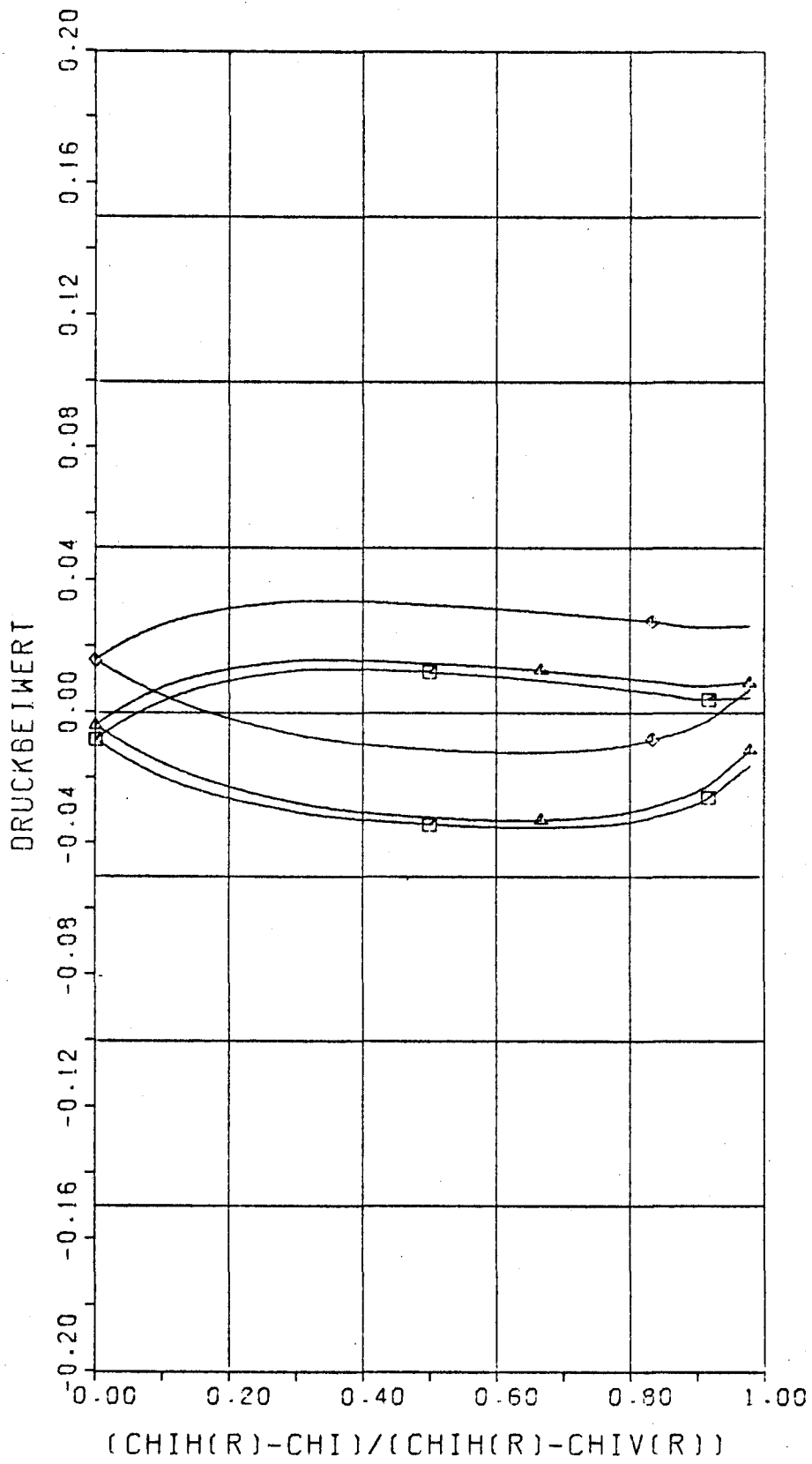
Flg. 82



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \pi$$

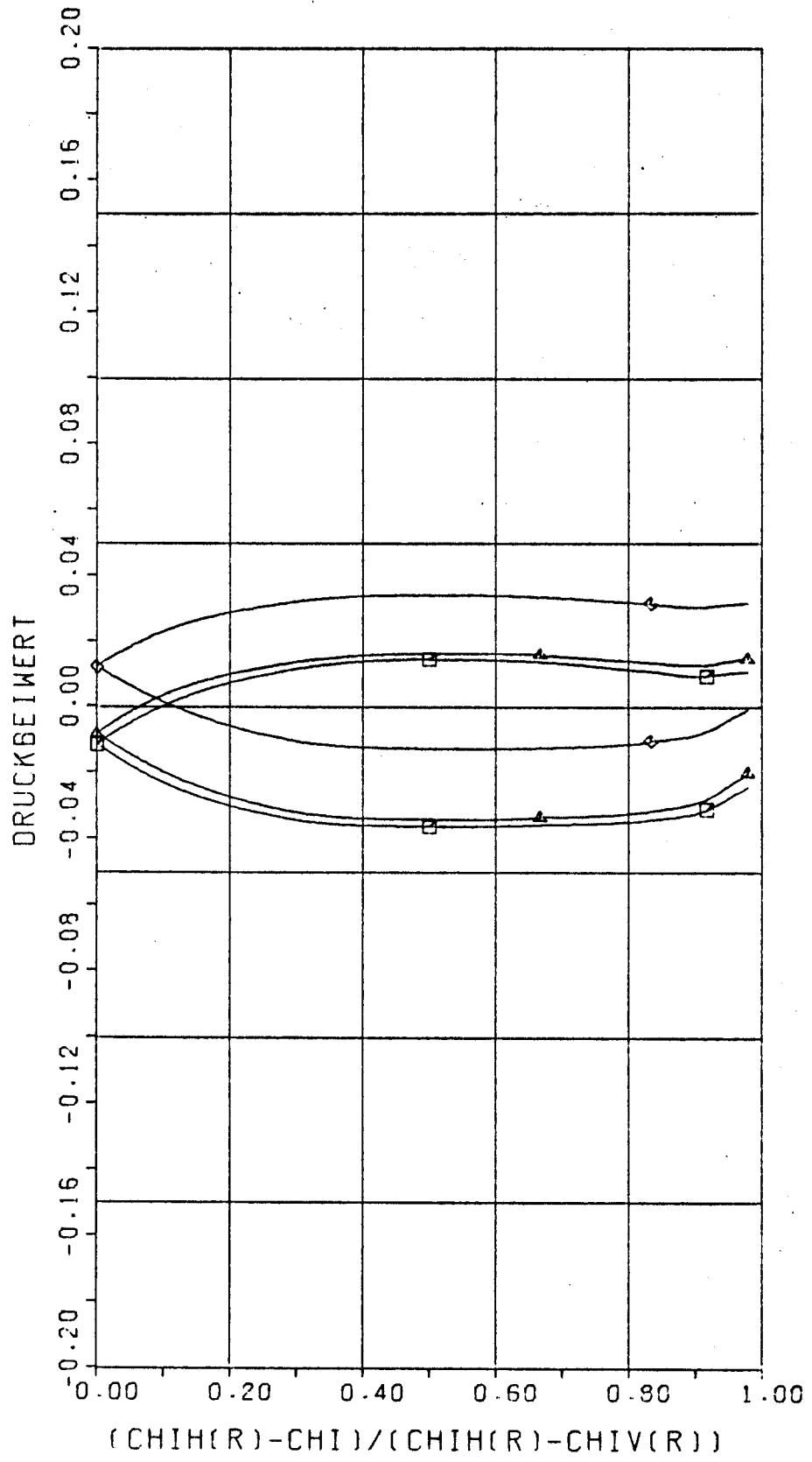
A66.83



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4}{6} \pi$$

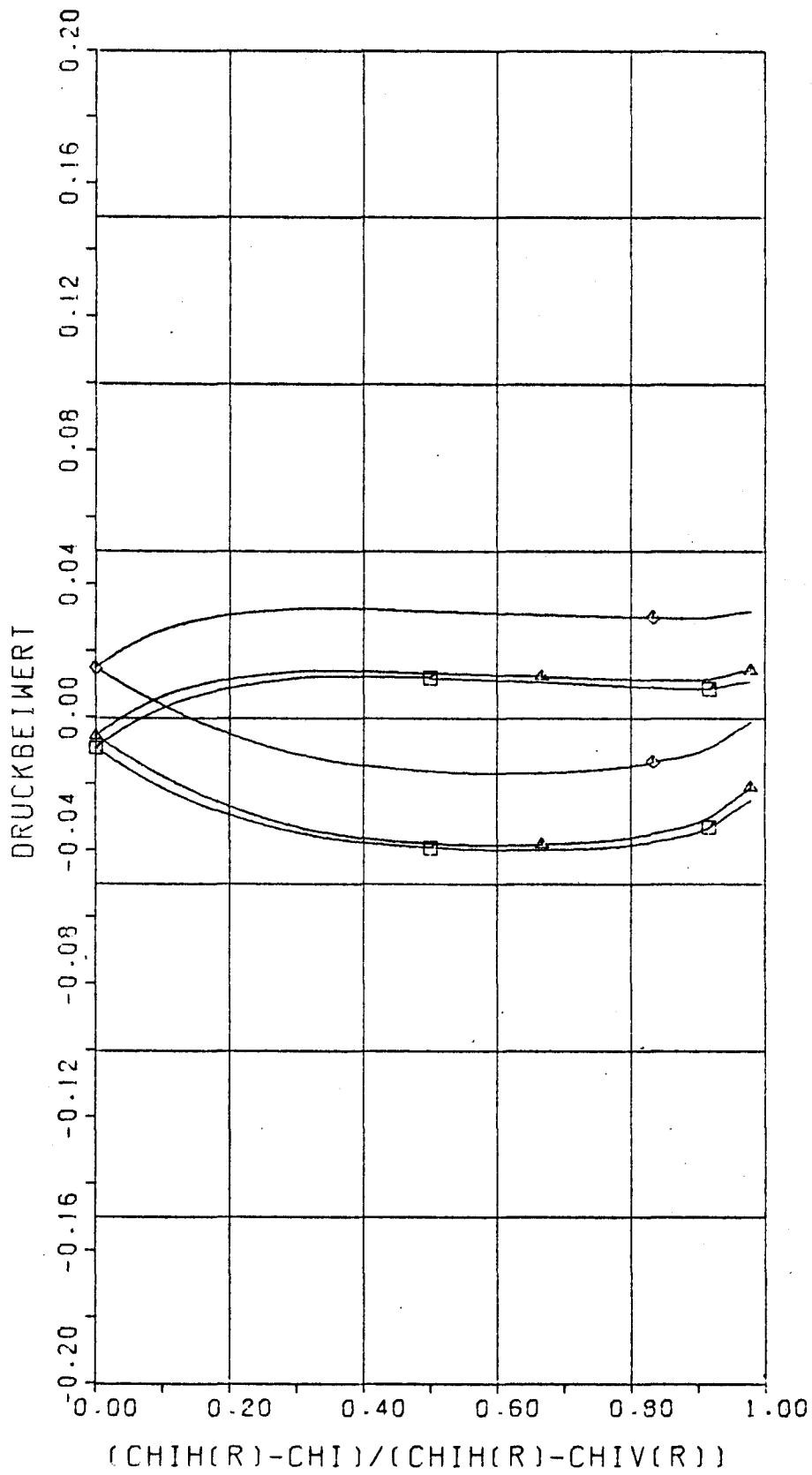
1766.84



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6} \pi$$

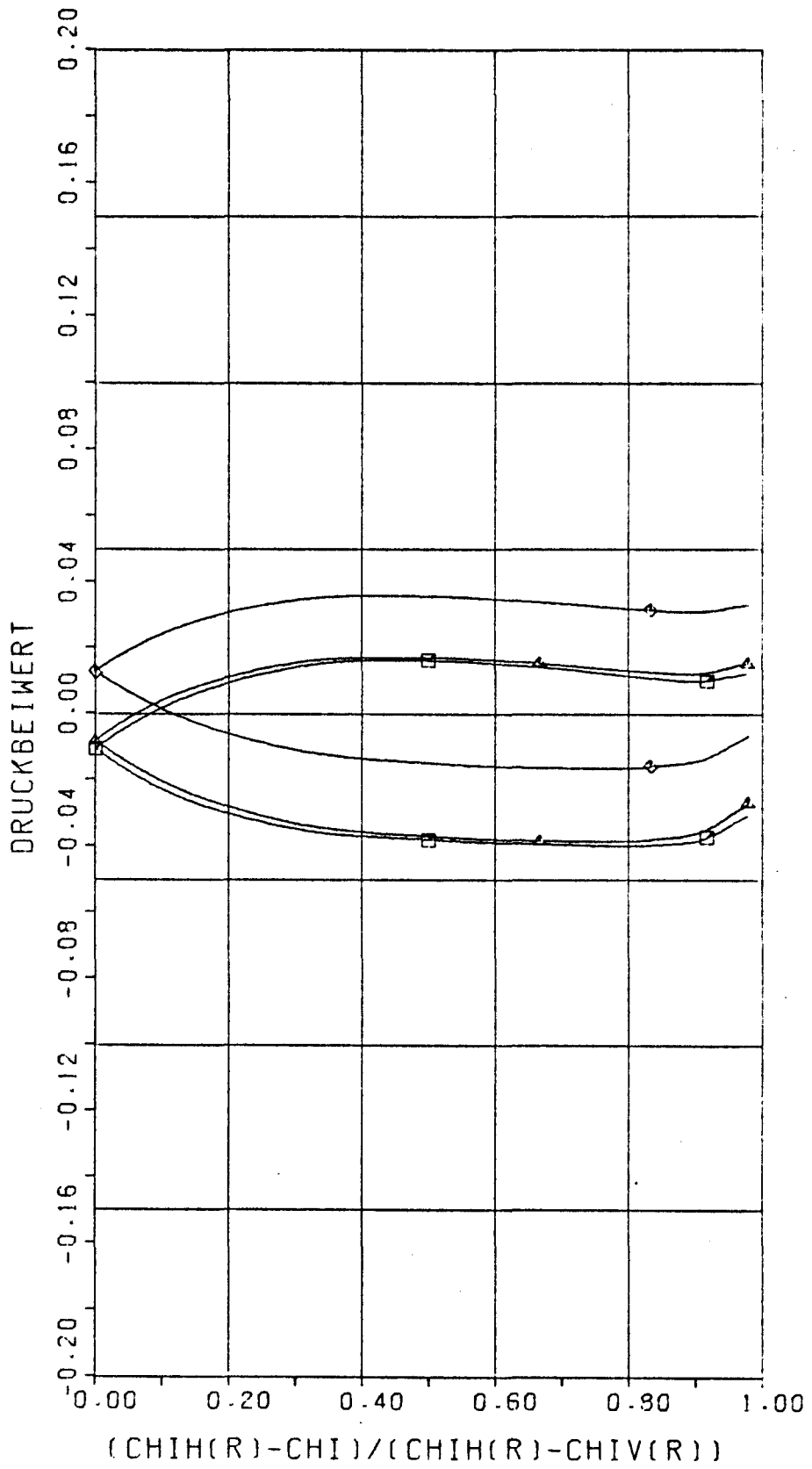
Abb. 85



$$\tau = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

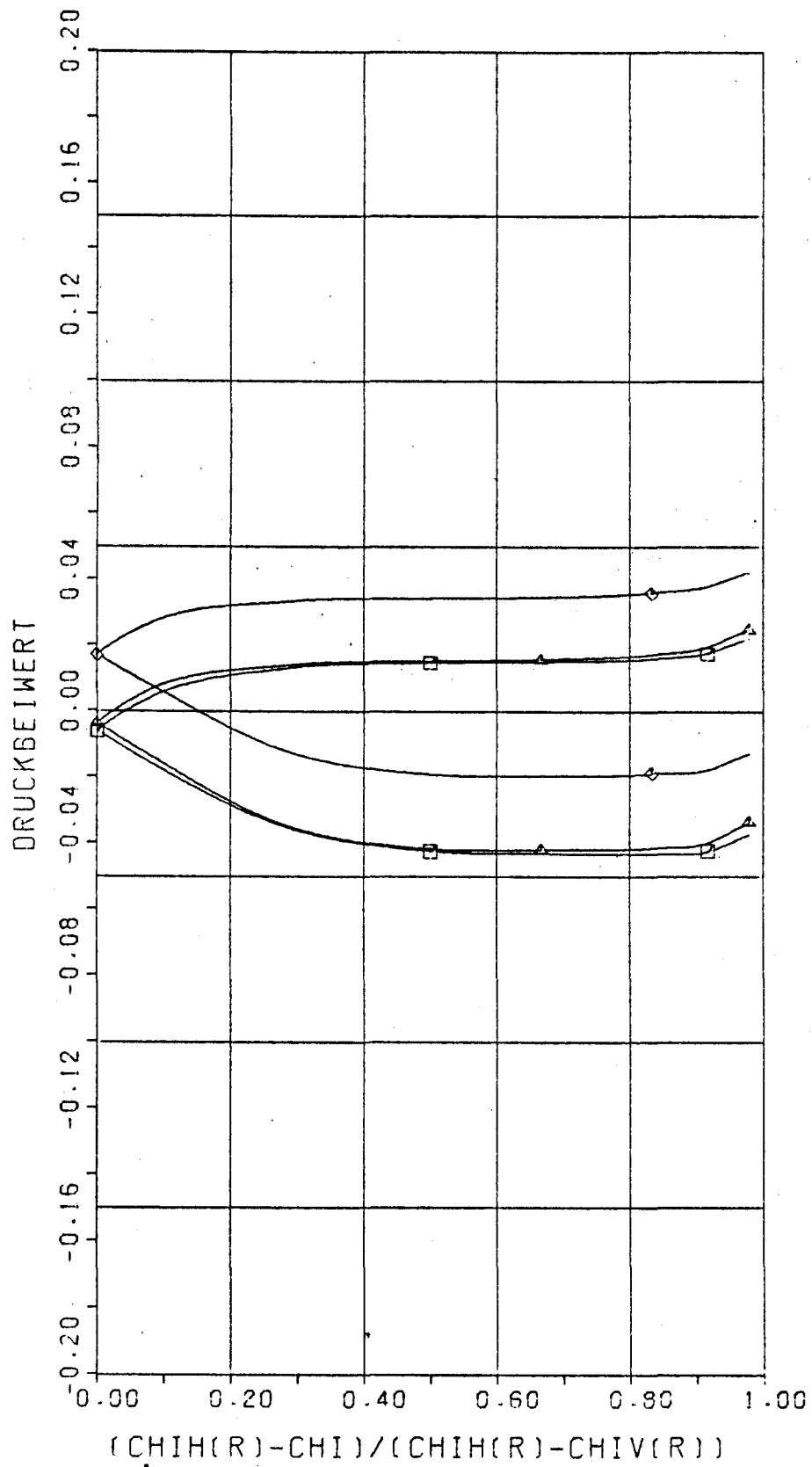
A66.86



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

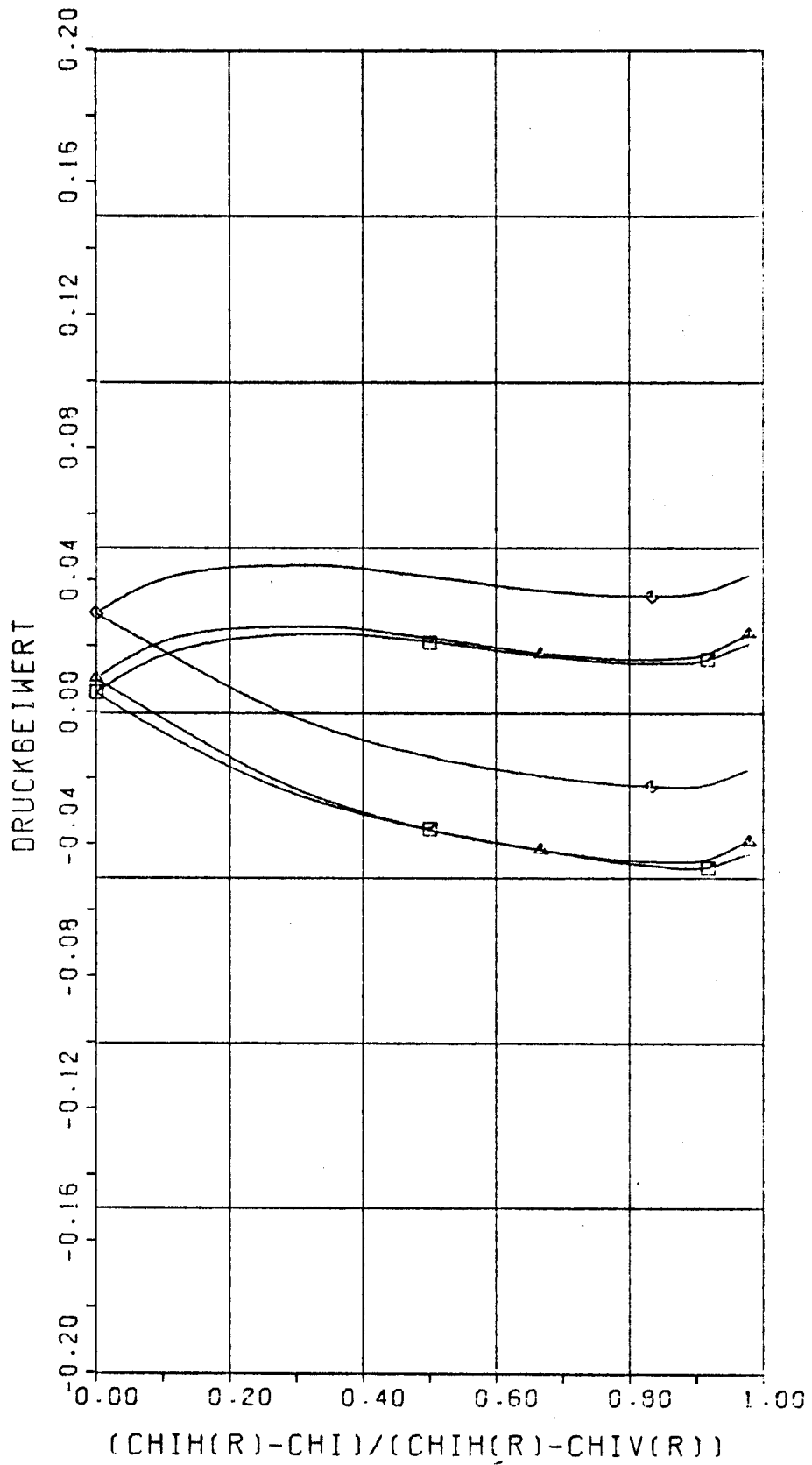
Abb. 87



$$\tau = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8}{6} \pi$$

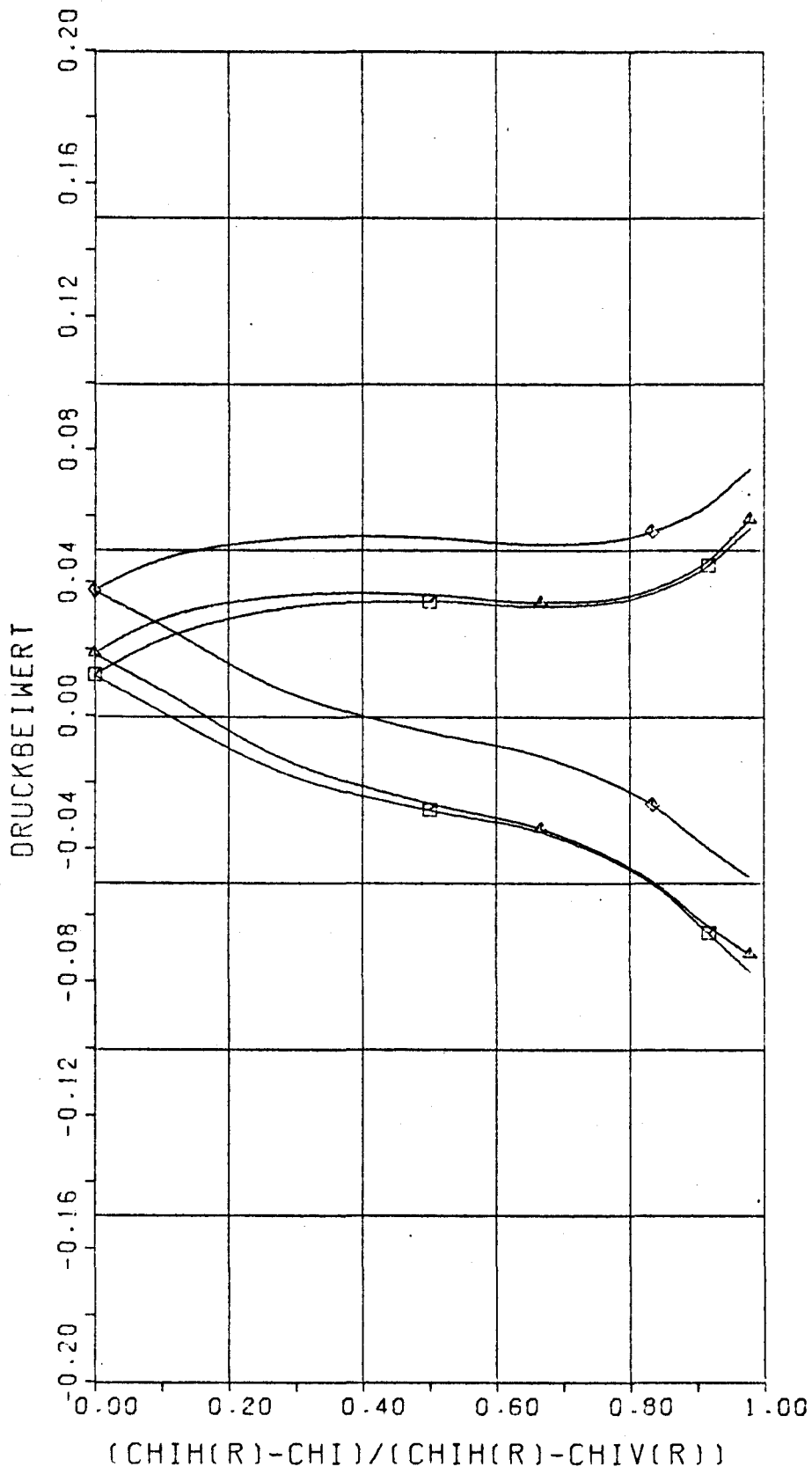
A66.88



$$\tau = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6} \pi$$

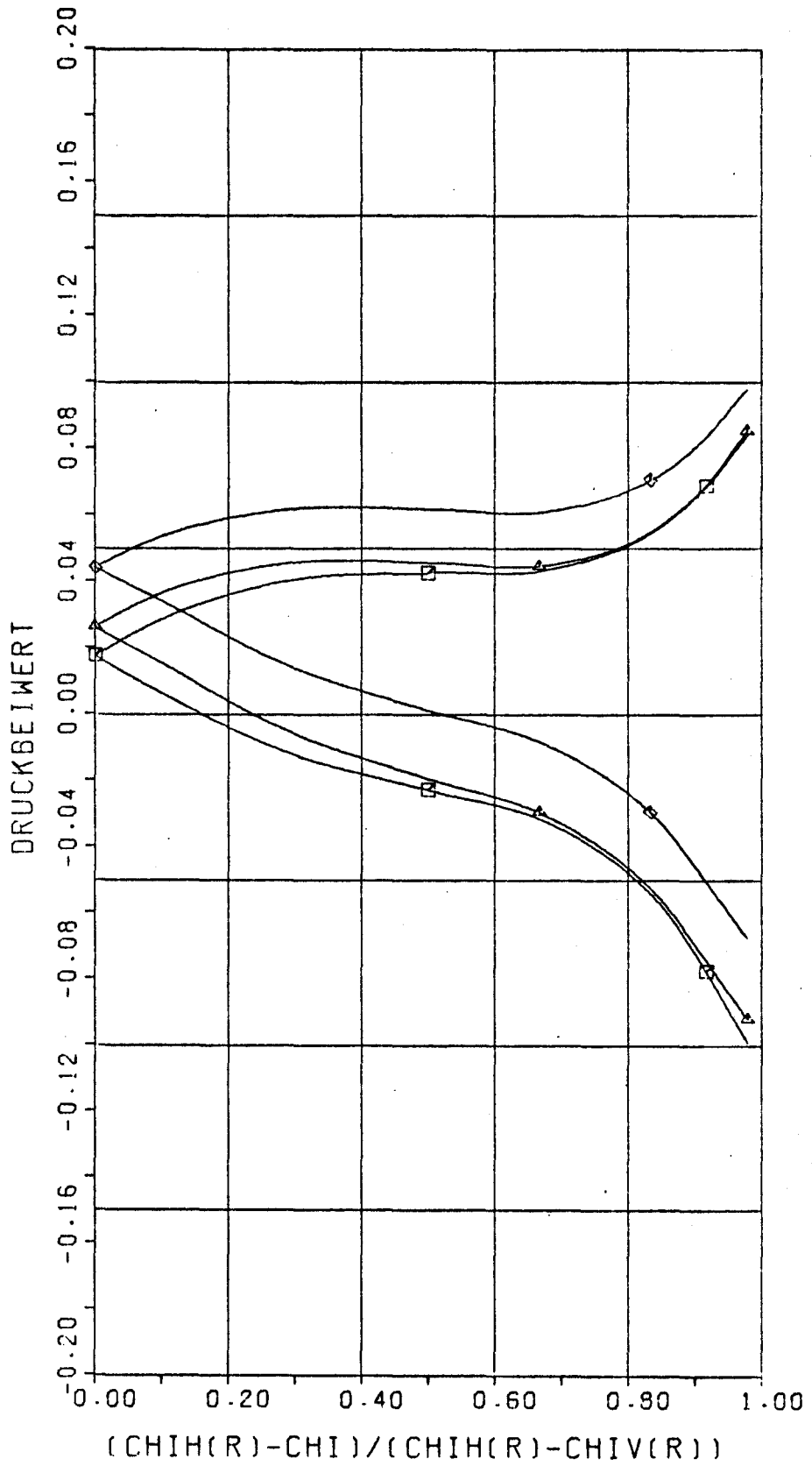
R66.89



$$\tau = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

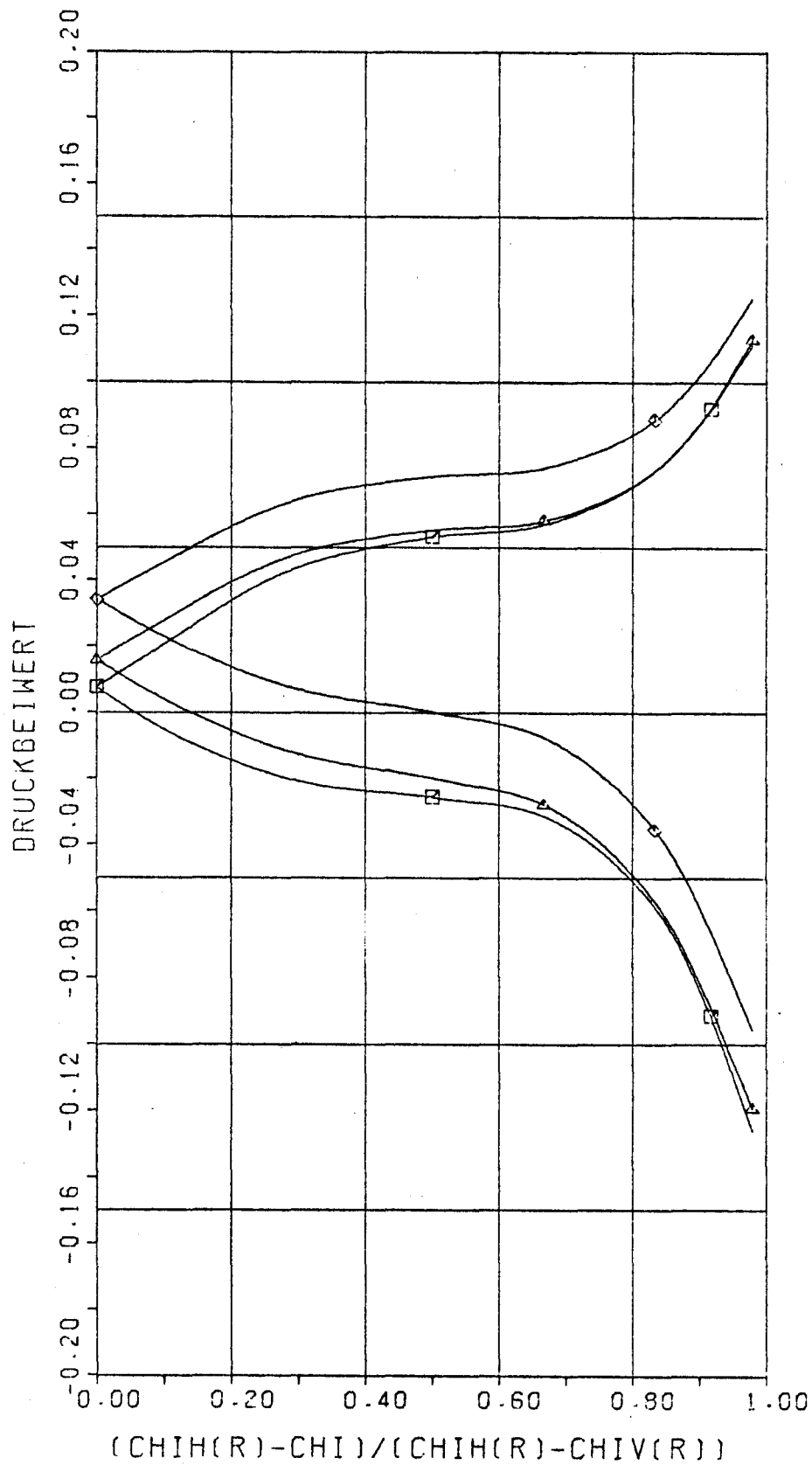
A66.90



$$r = 0.5 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

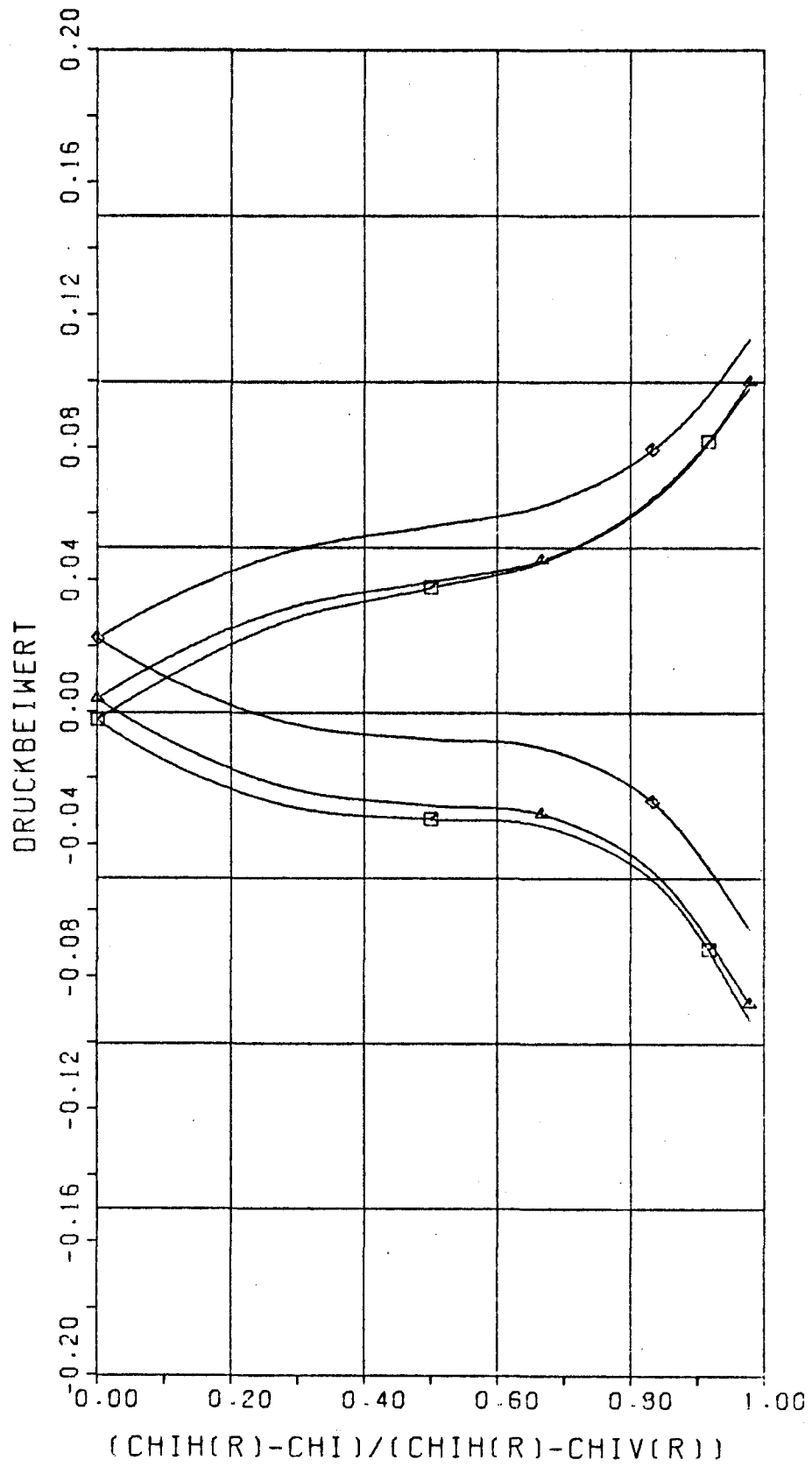
Flg. 91



$r = 0.6 R_0$

$\varphi_0 = 0$

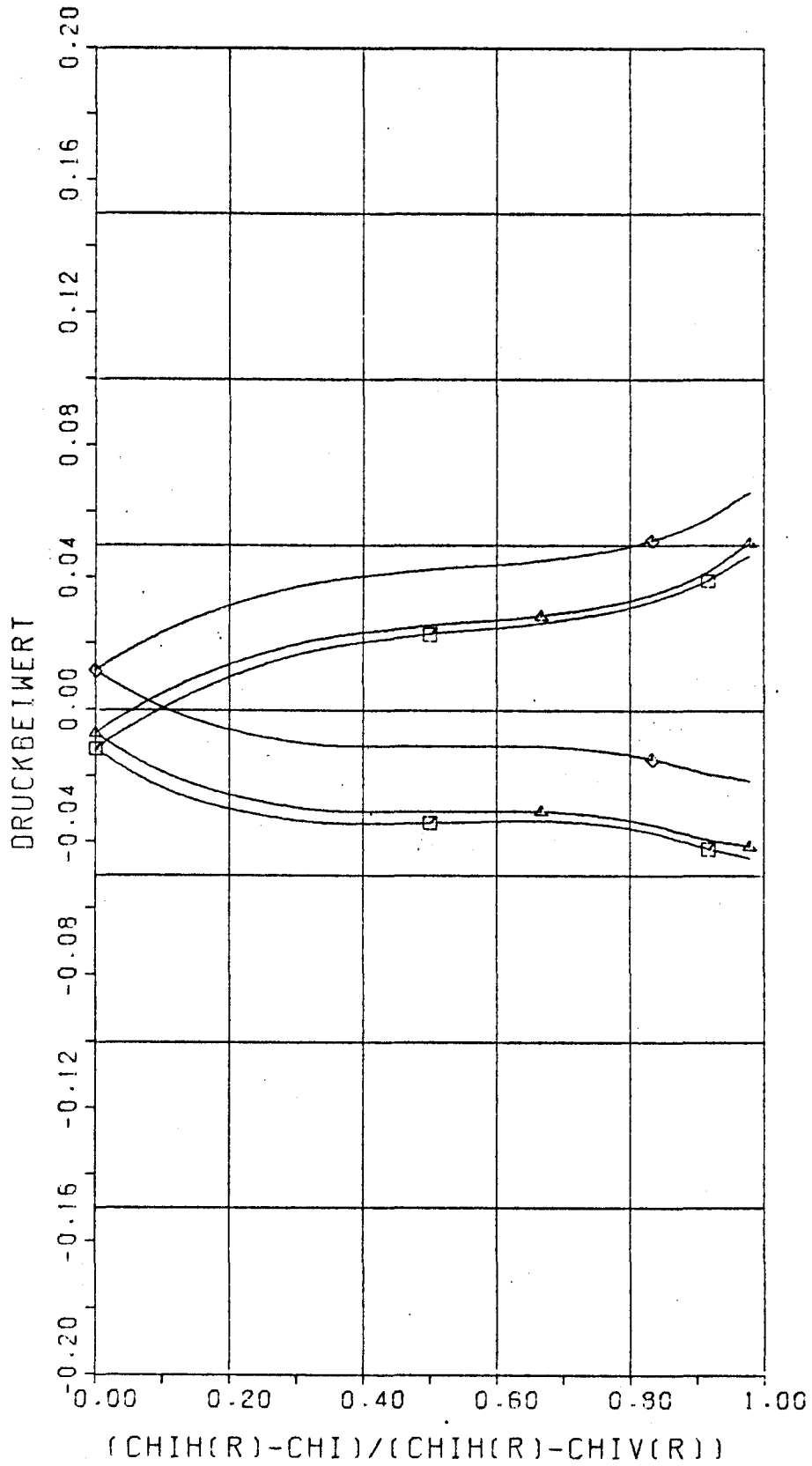
A66.92



$$\tau = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

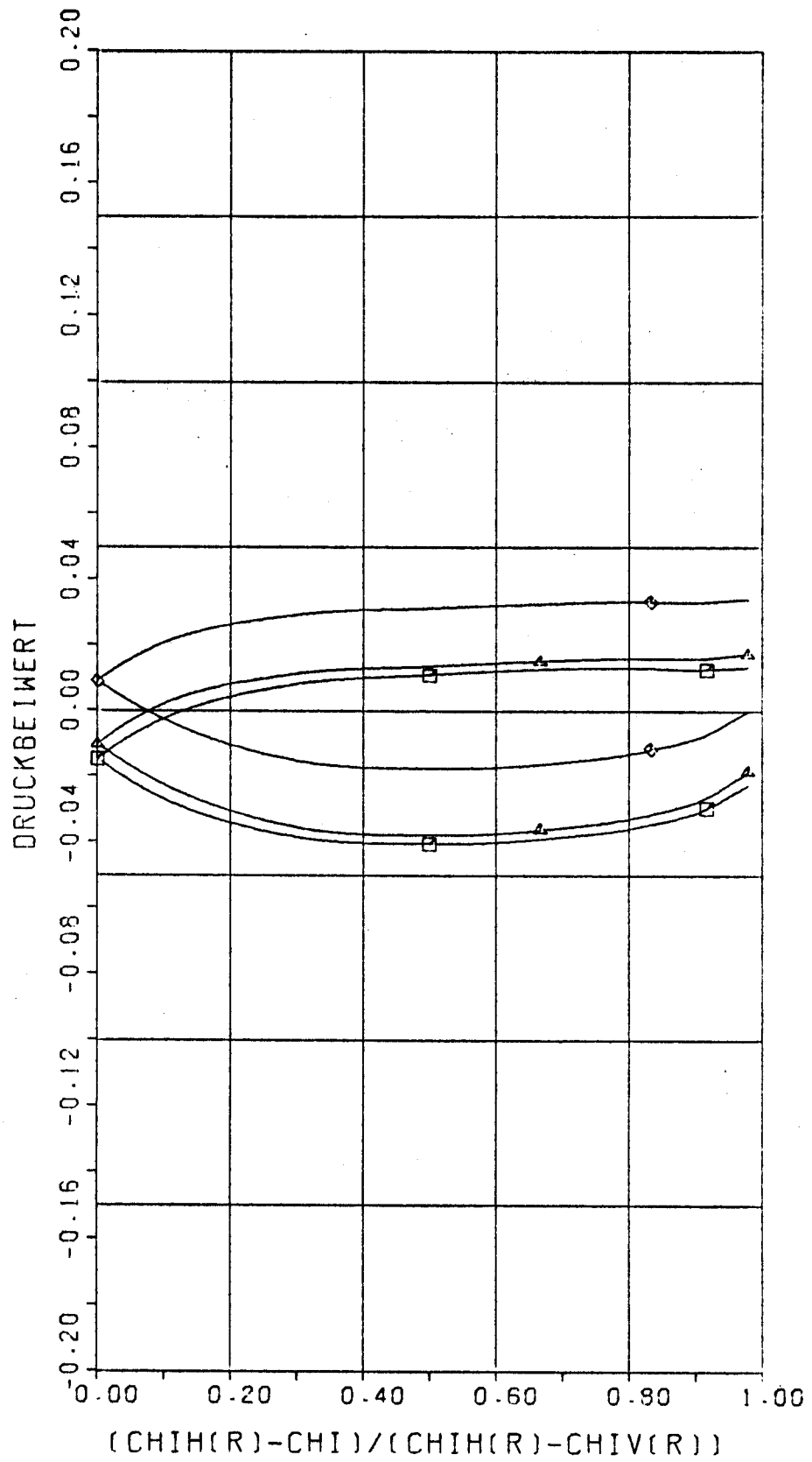
Abb. 93



$$r = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \pi$$

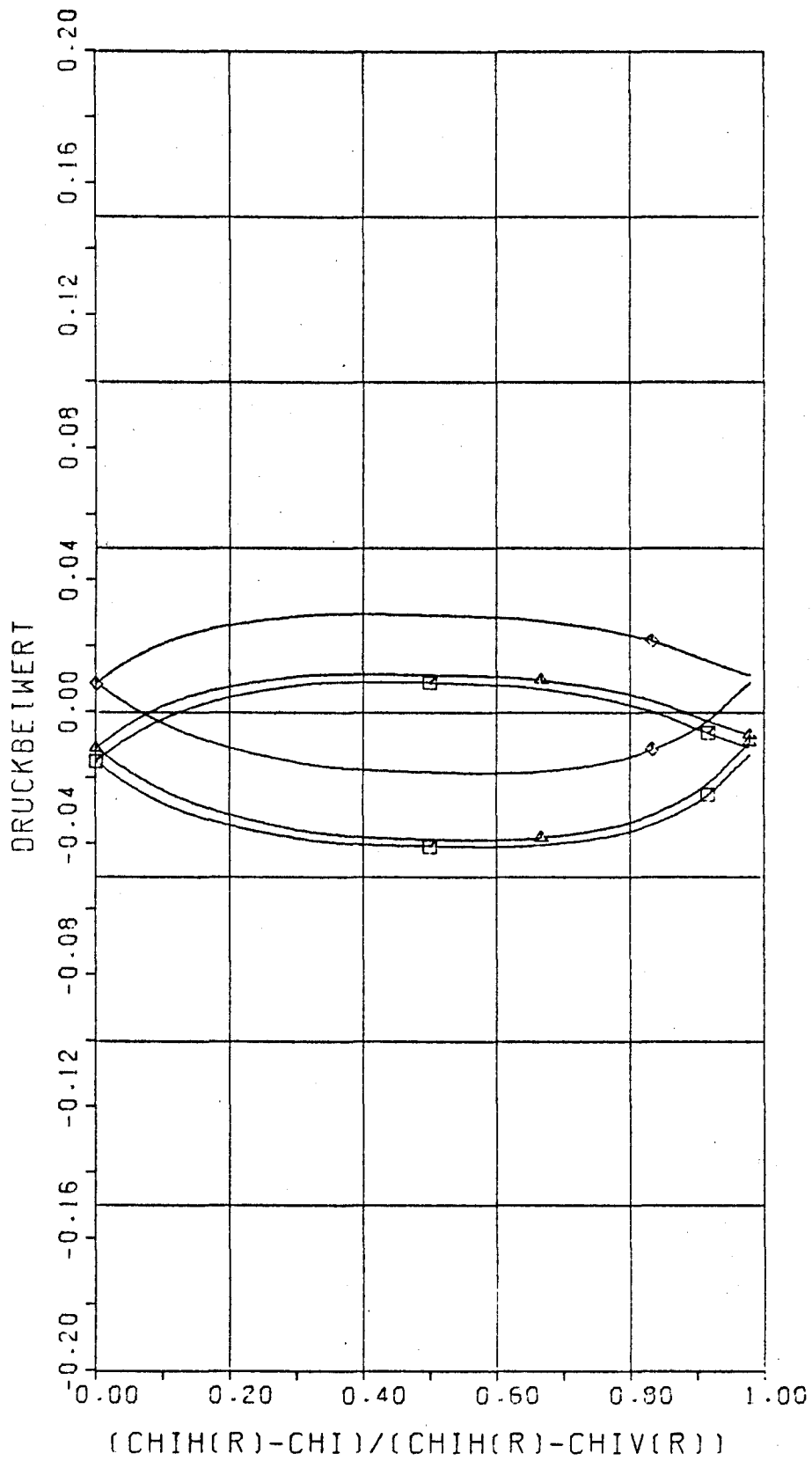
A66.94



$$r = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \pi$$

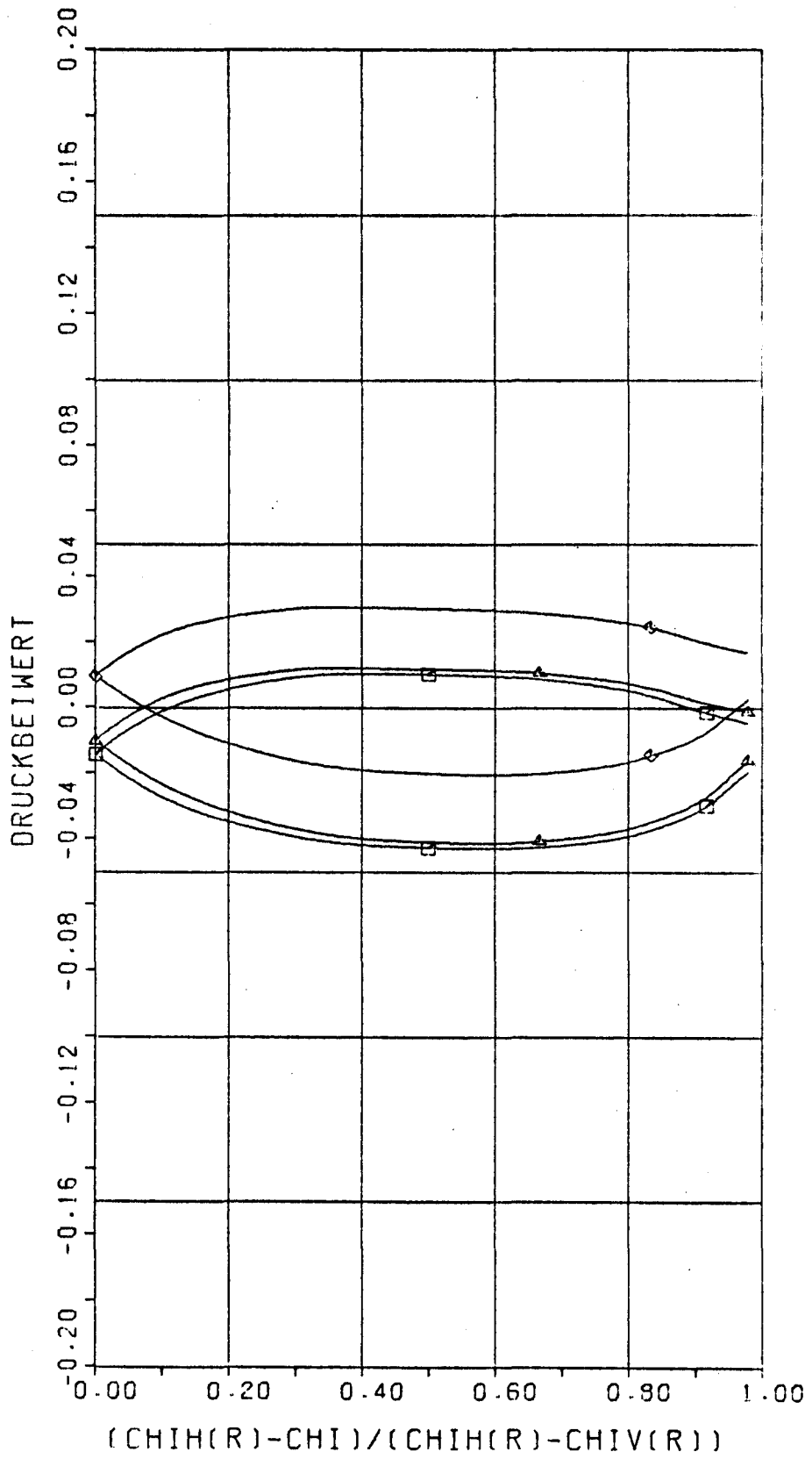
A66.95



$$\tau = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4}{6} \pi$$

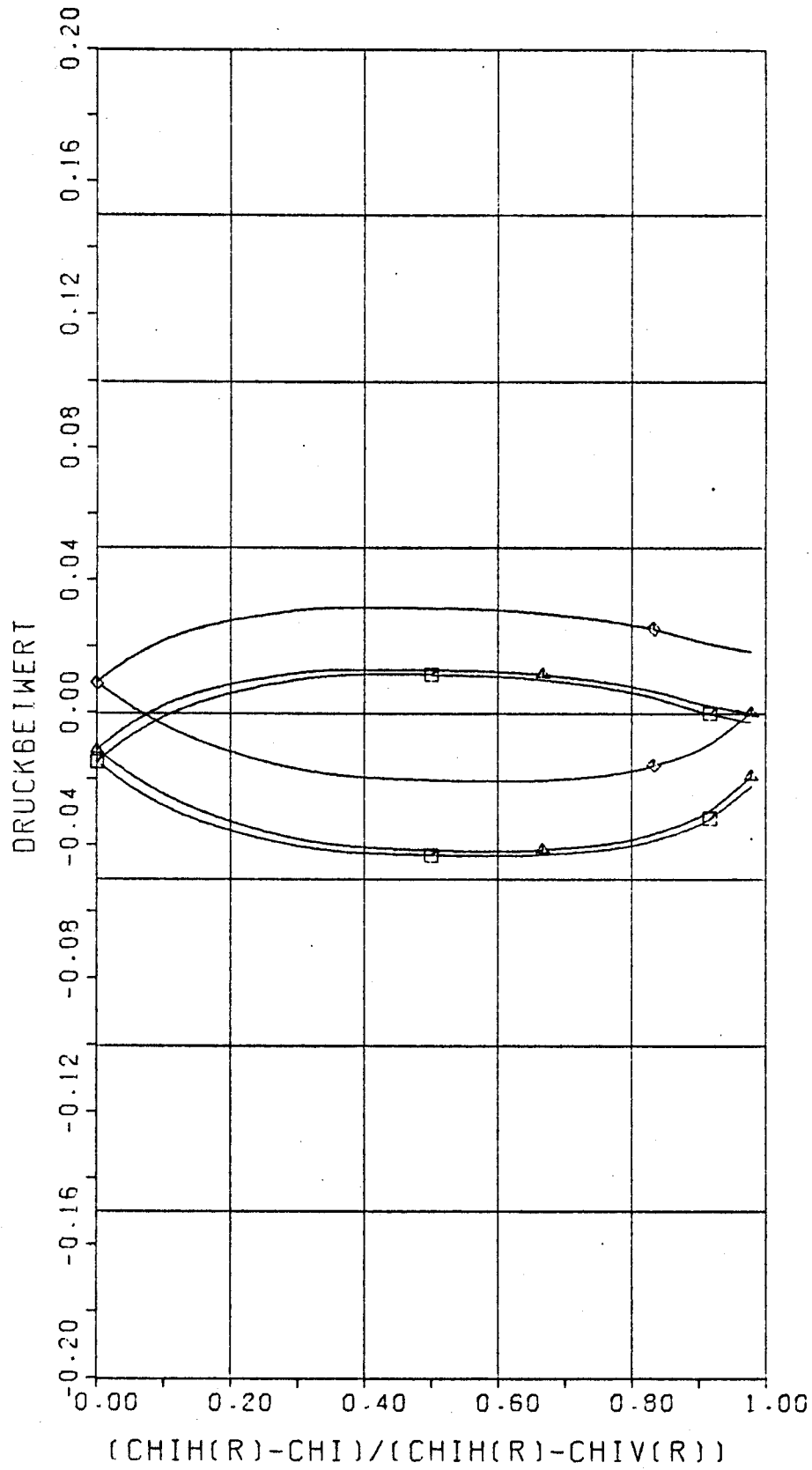
A66. 56



$$r = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6} \pi$$

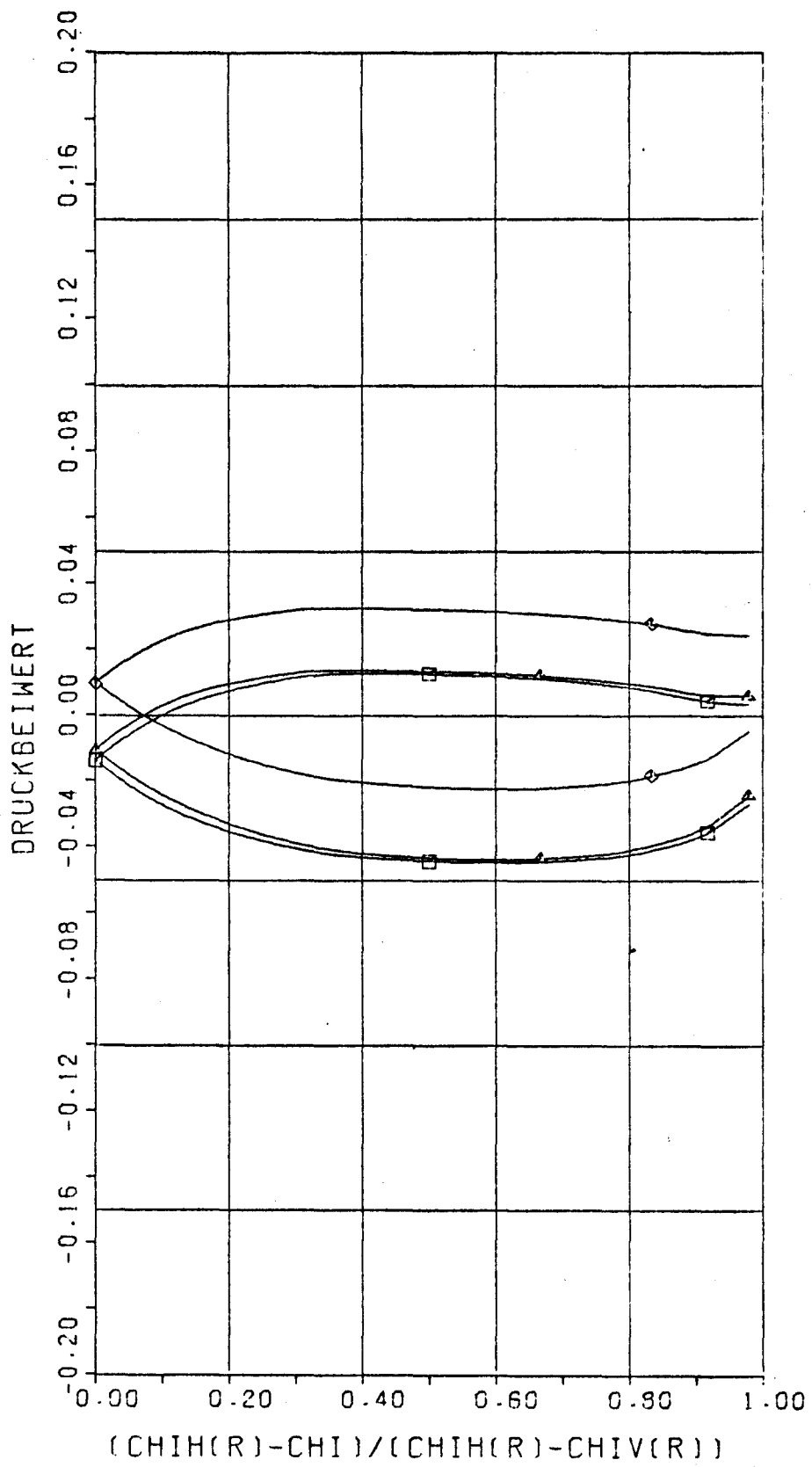
H66.97



$$\tau = 0.6 R_0$$

$$q_0 = \pi$$

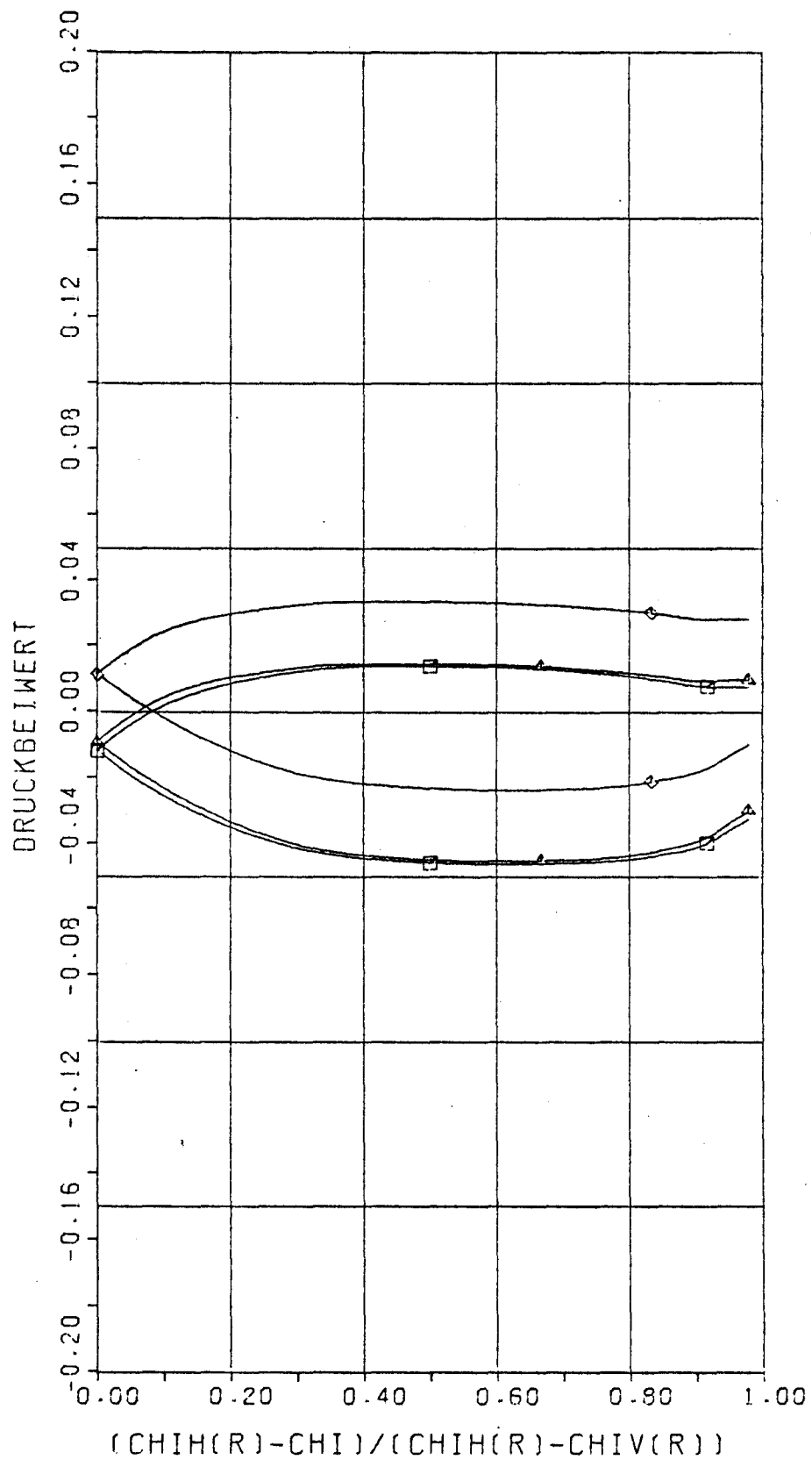
176.98



$$\tau = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

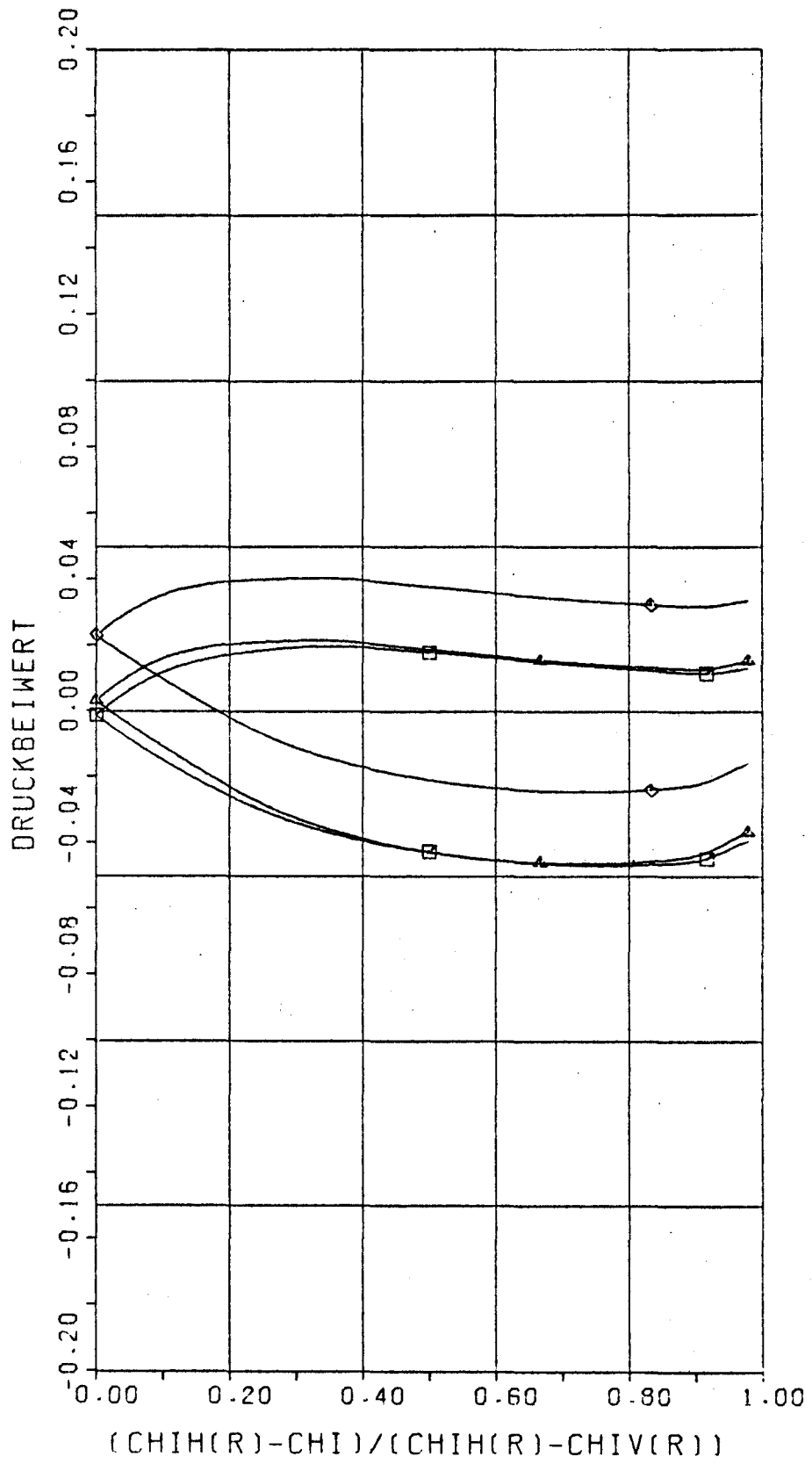
Abb. 99



$$r = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8}{6} \pi$$

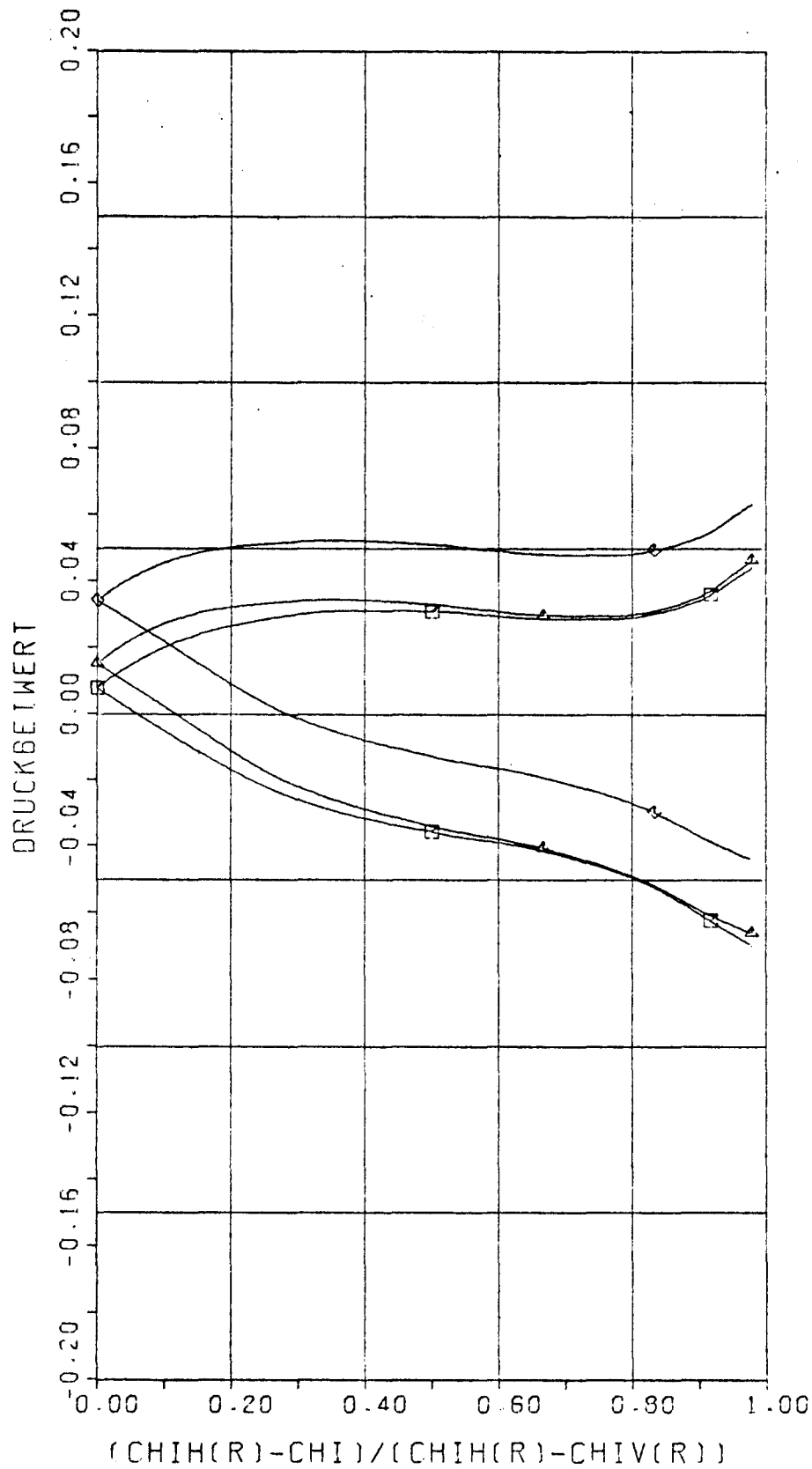
A66.100



$$r = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6} \pi$$

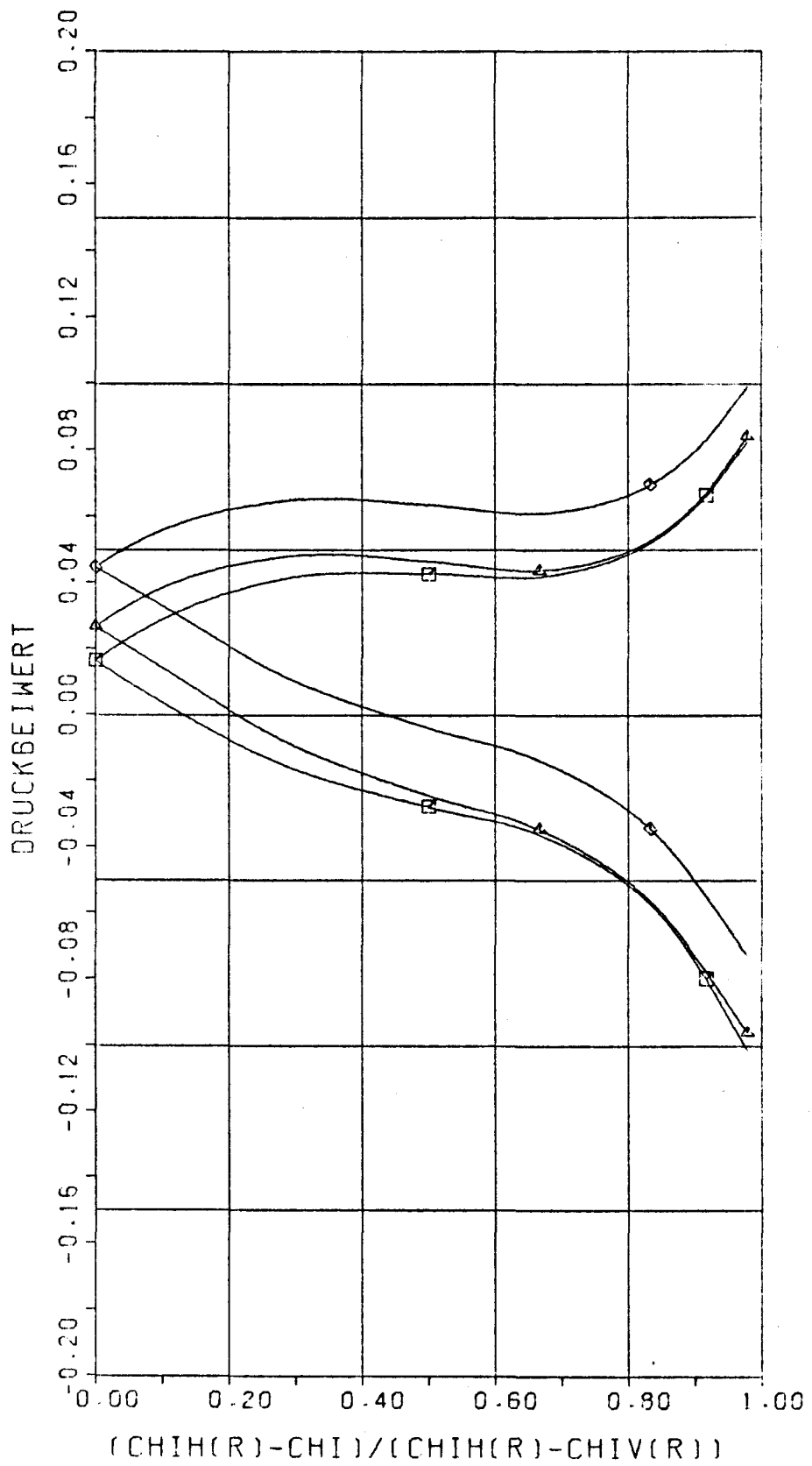
Abb. 101



$$r = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

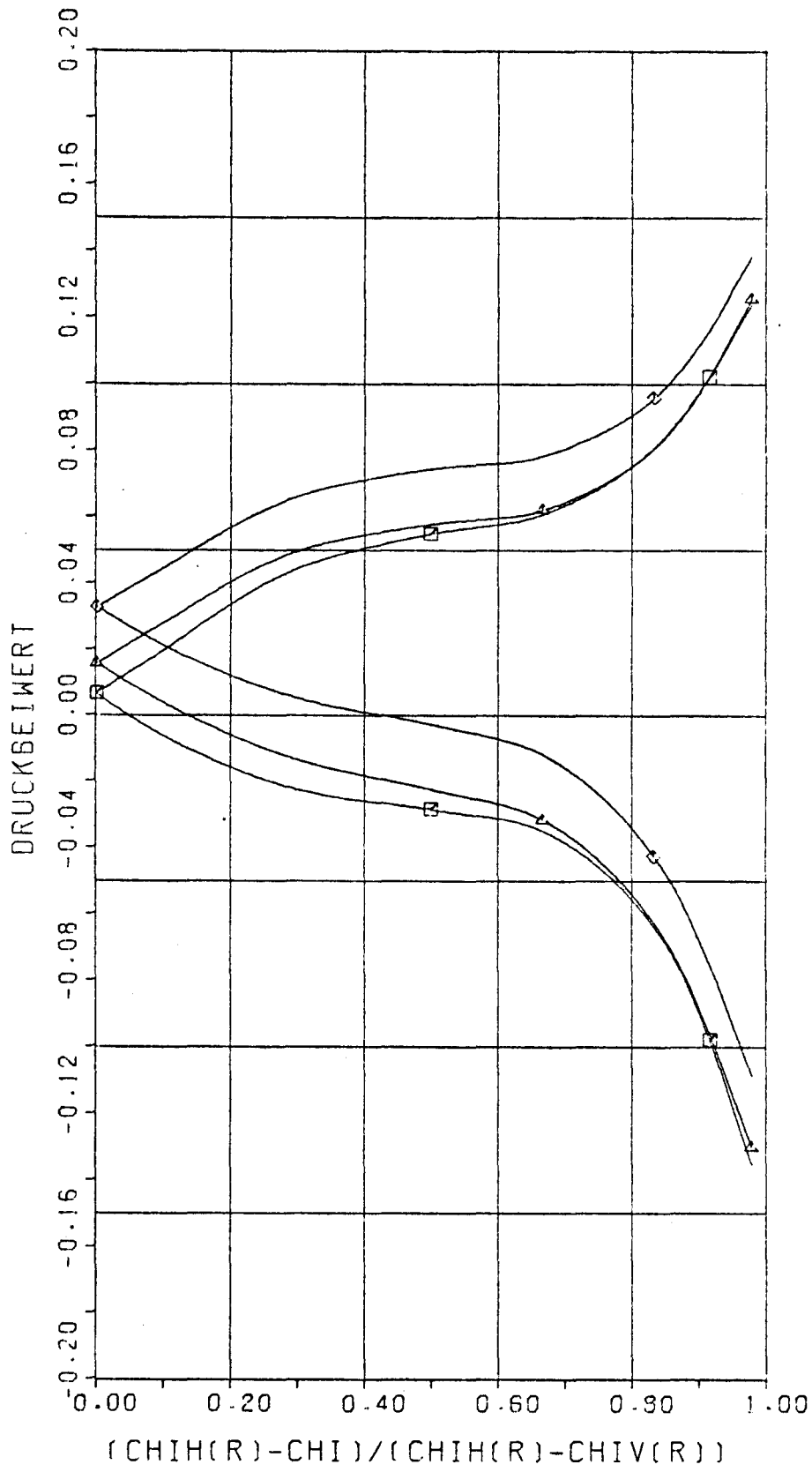
Abb. 102



$$\tau = 0.6 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

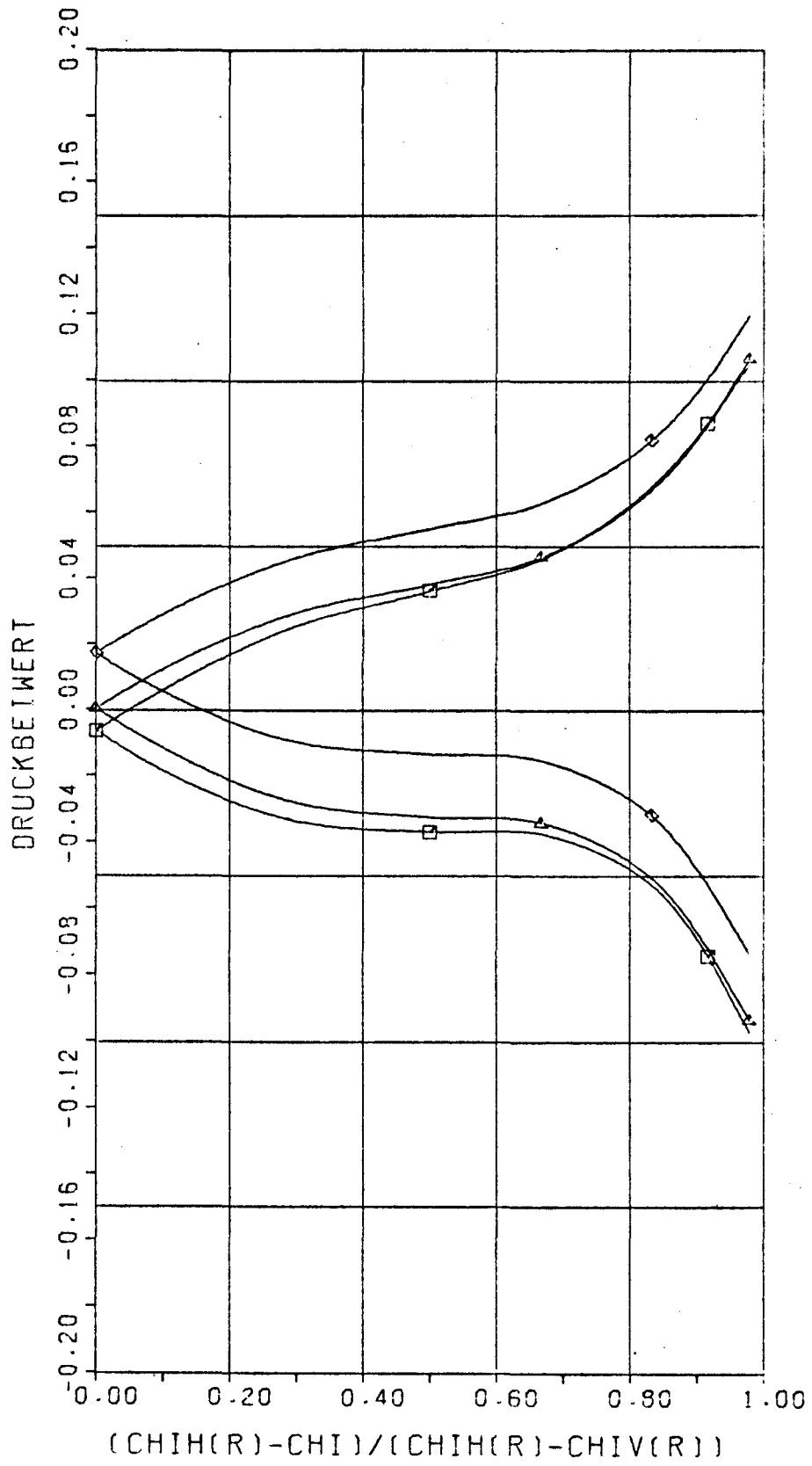
A66.103



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = 0$$

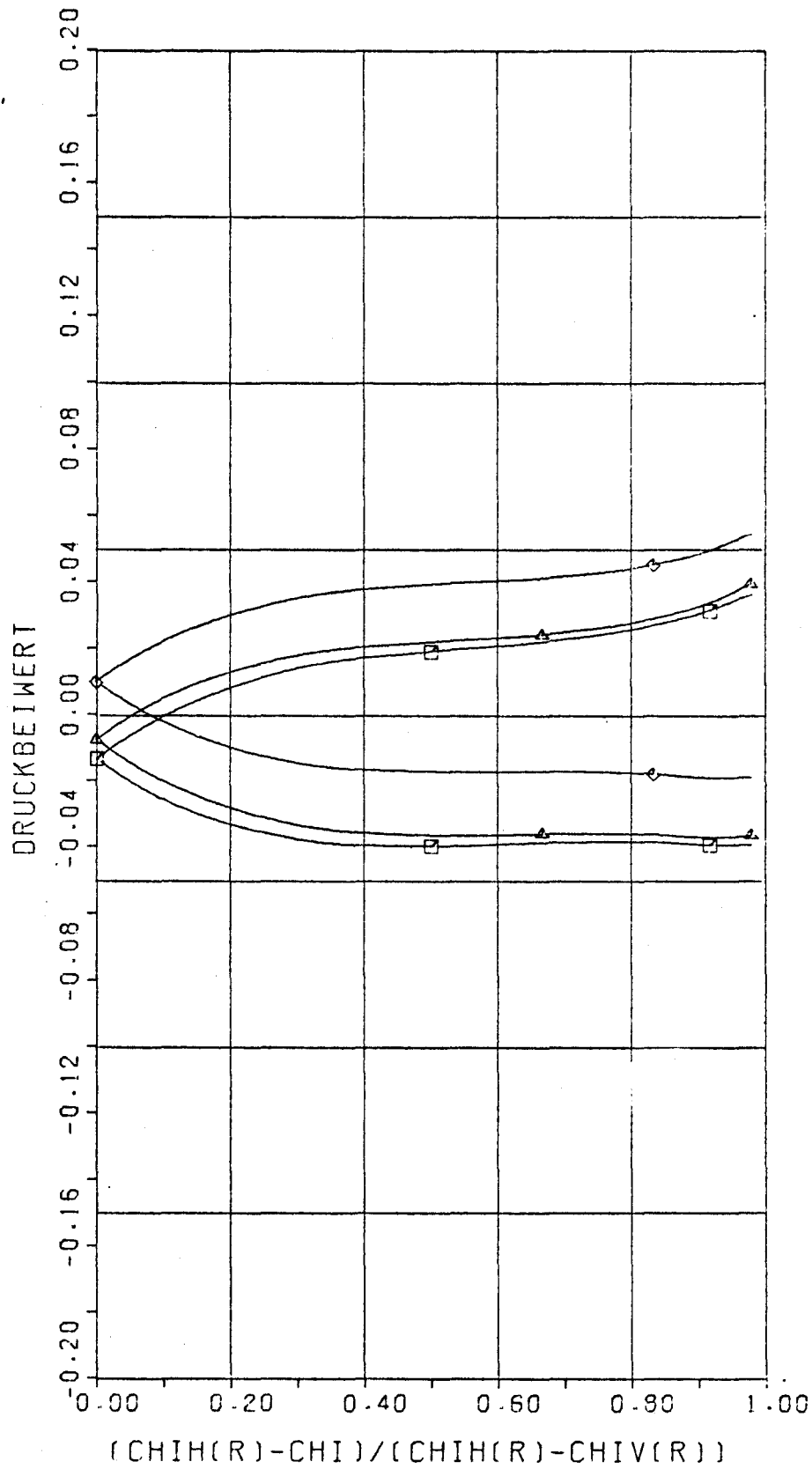
1766.104



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

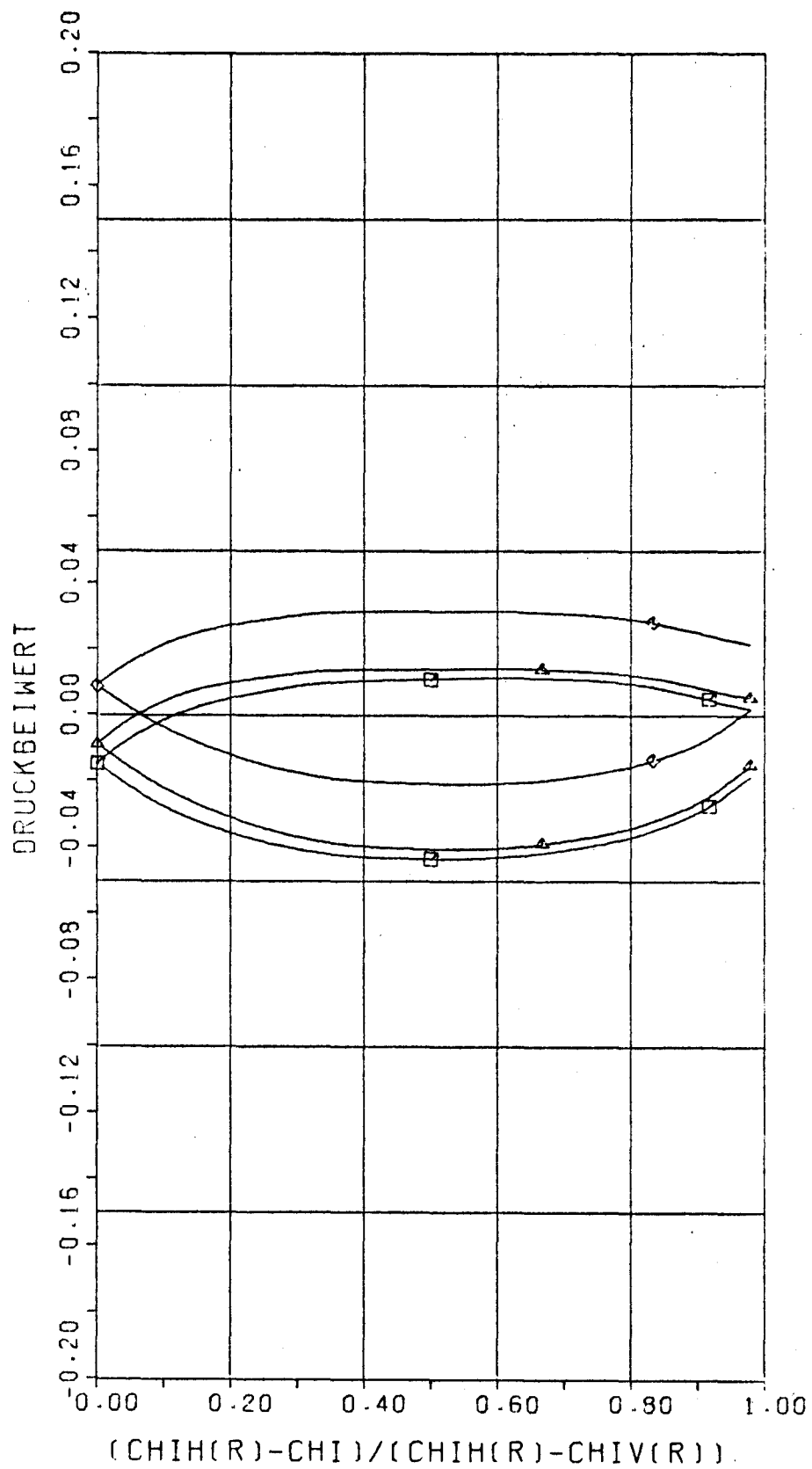
A66.105



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \pi$$

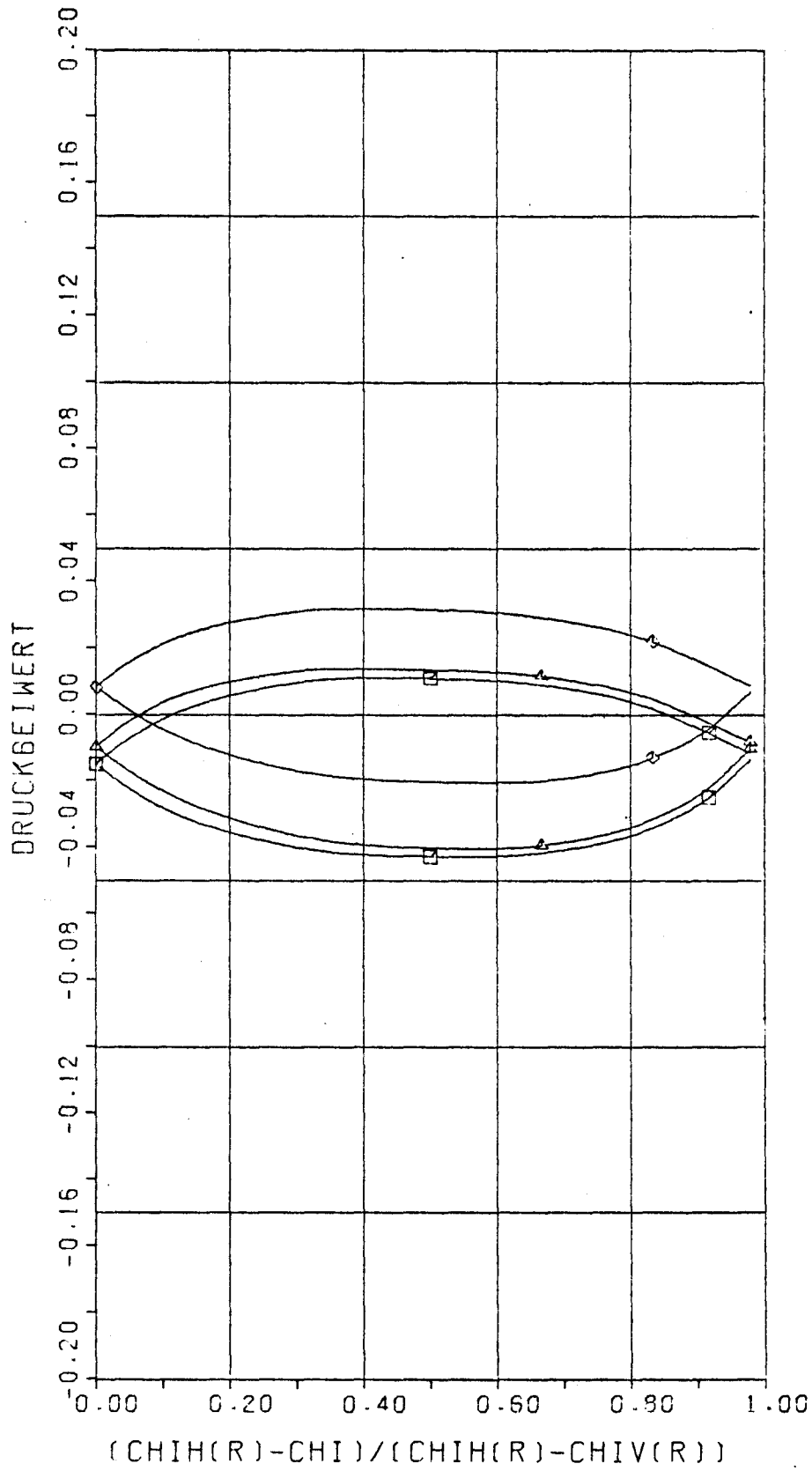
Abb. 106



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \pi$$

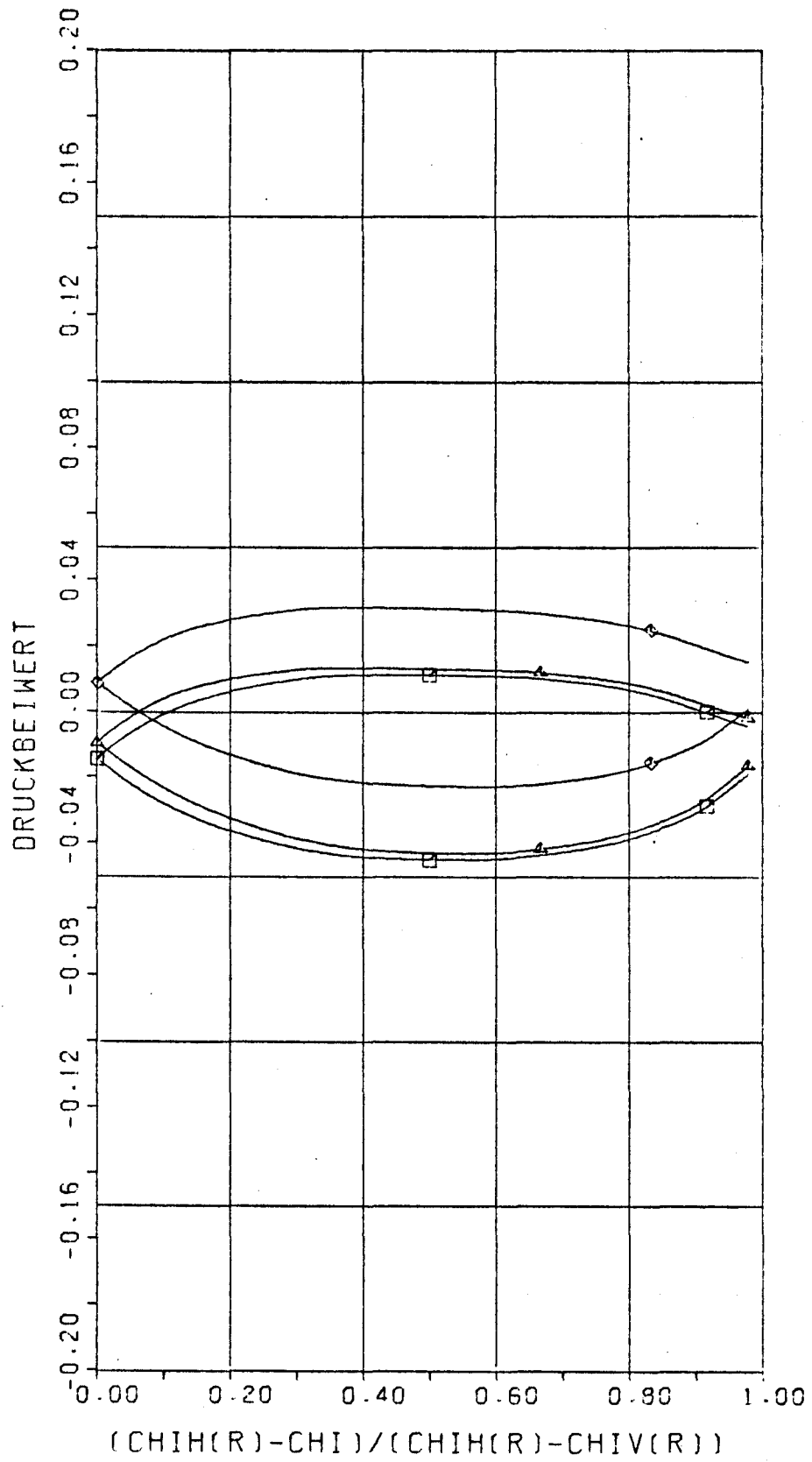
R66.107



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4}{6} \pi$$

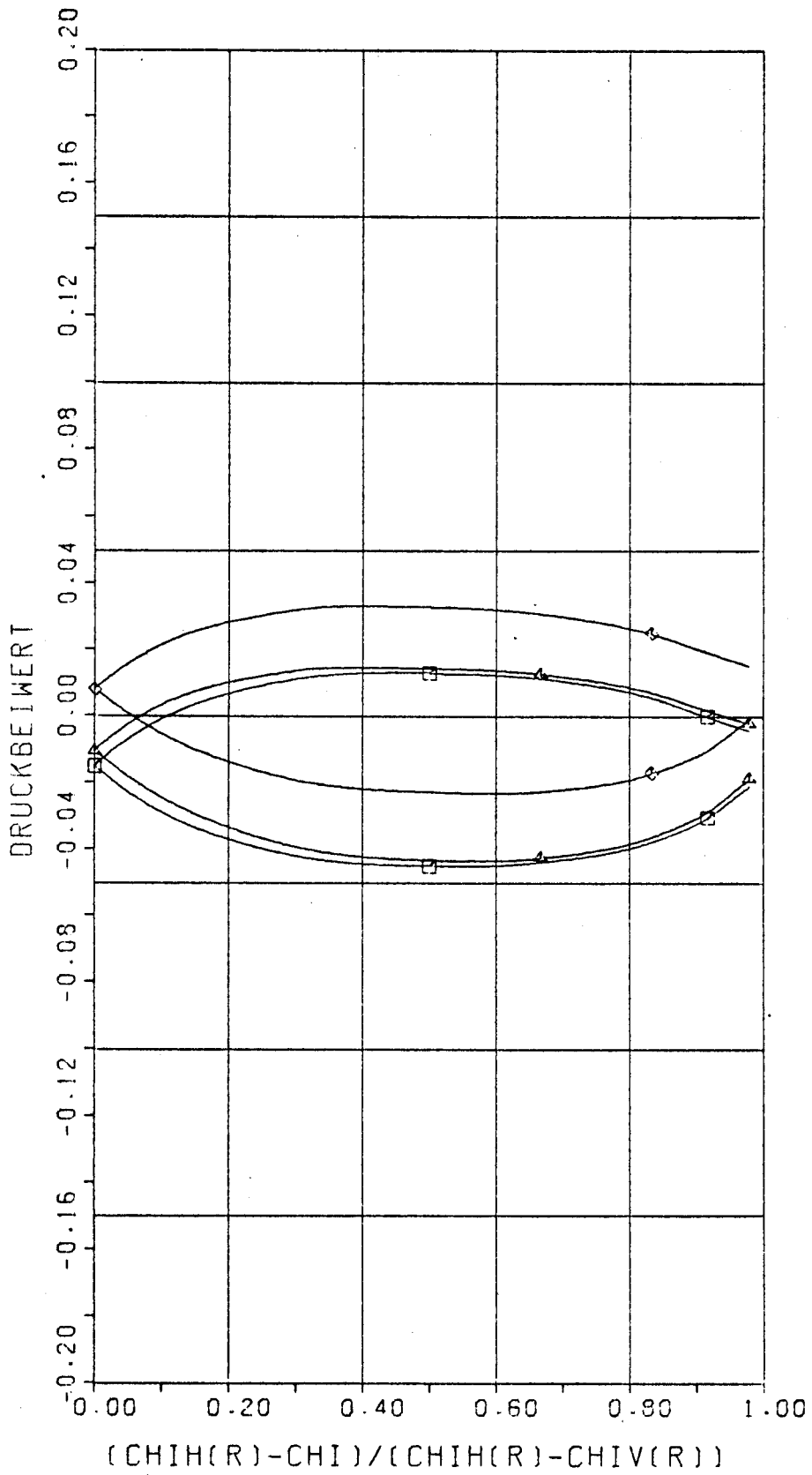
H66.108



$$r = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6} \pi$$

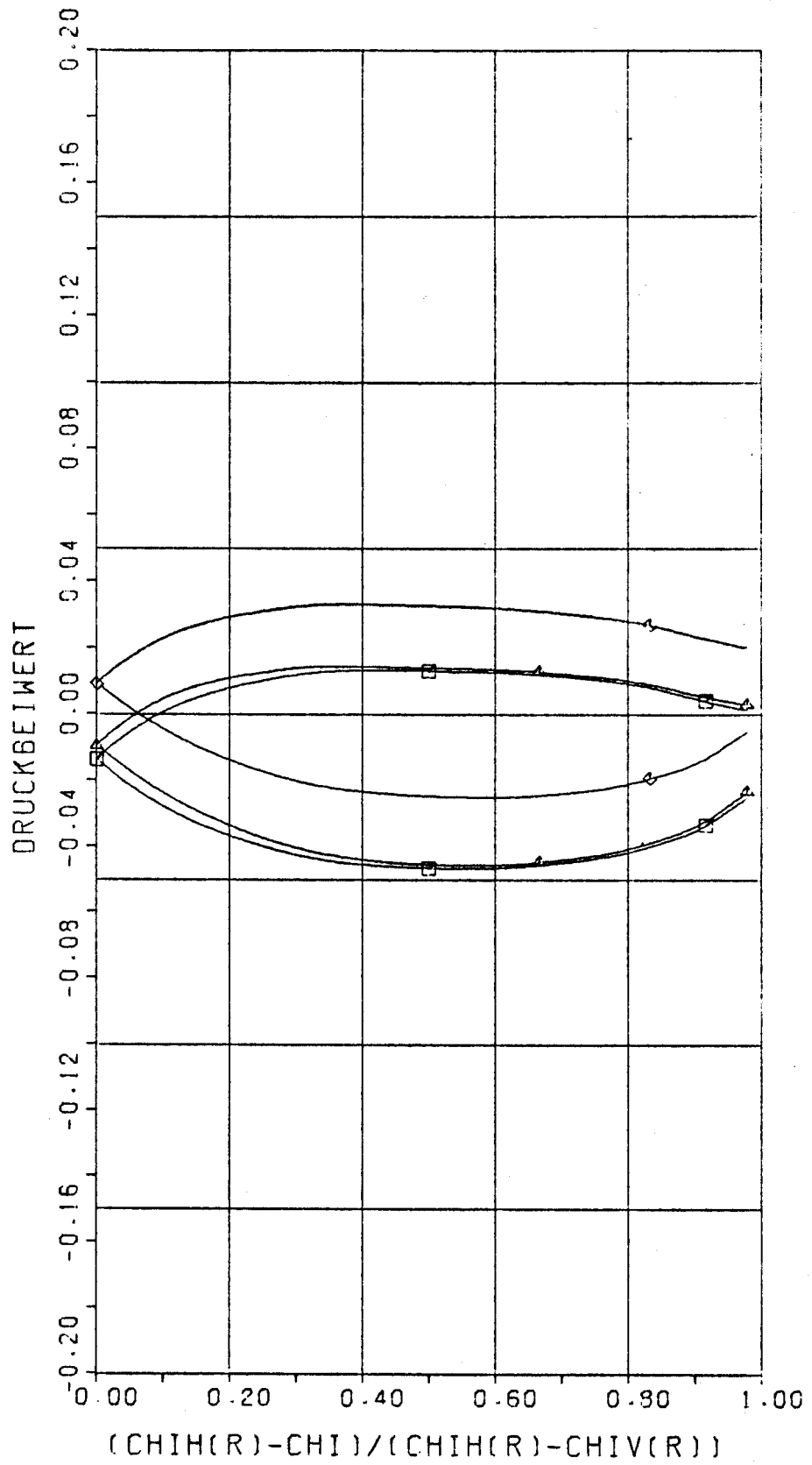
A66.109



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

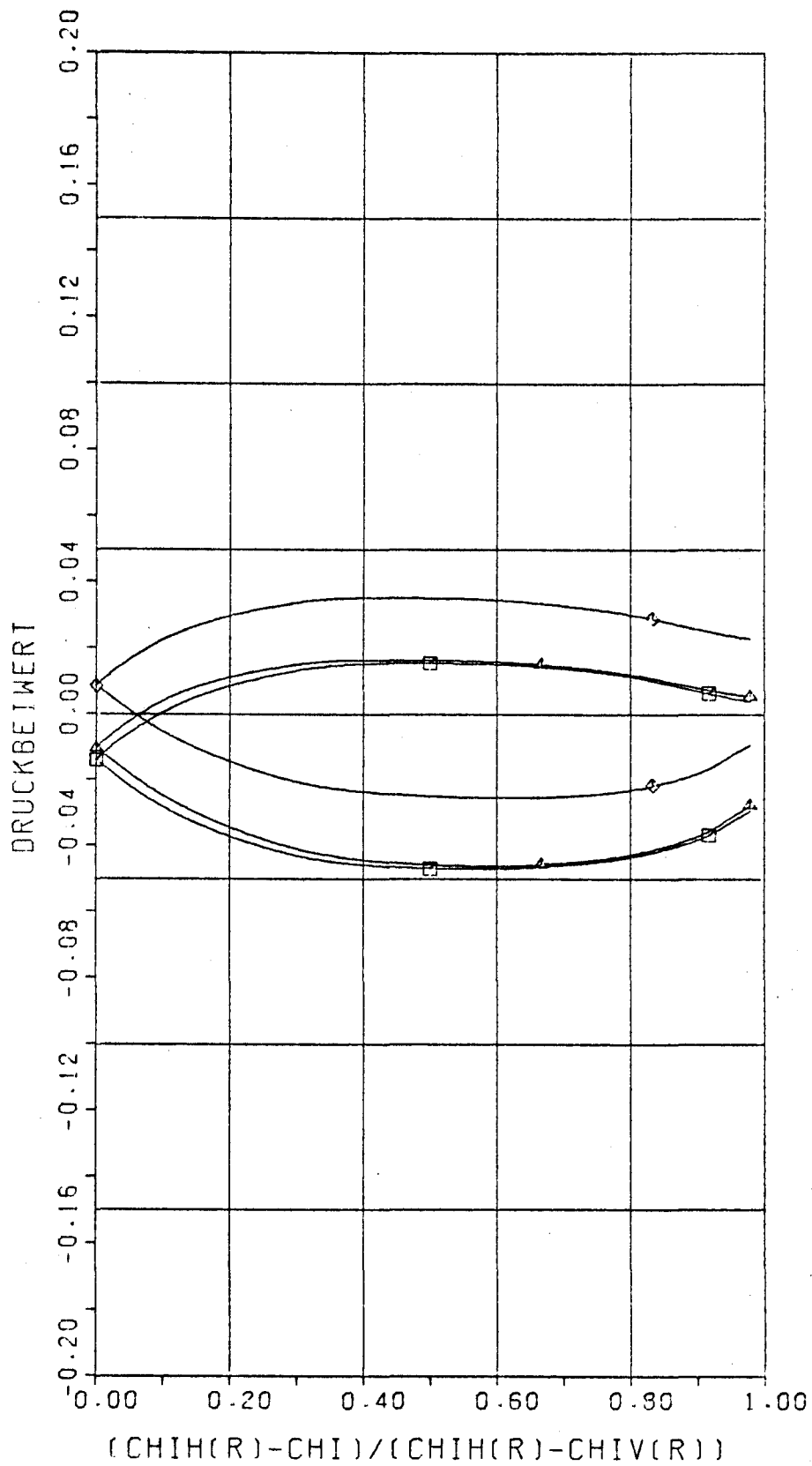
A66.110



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

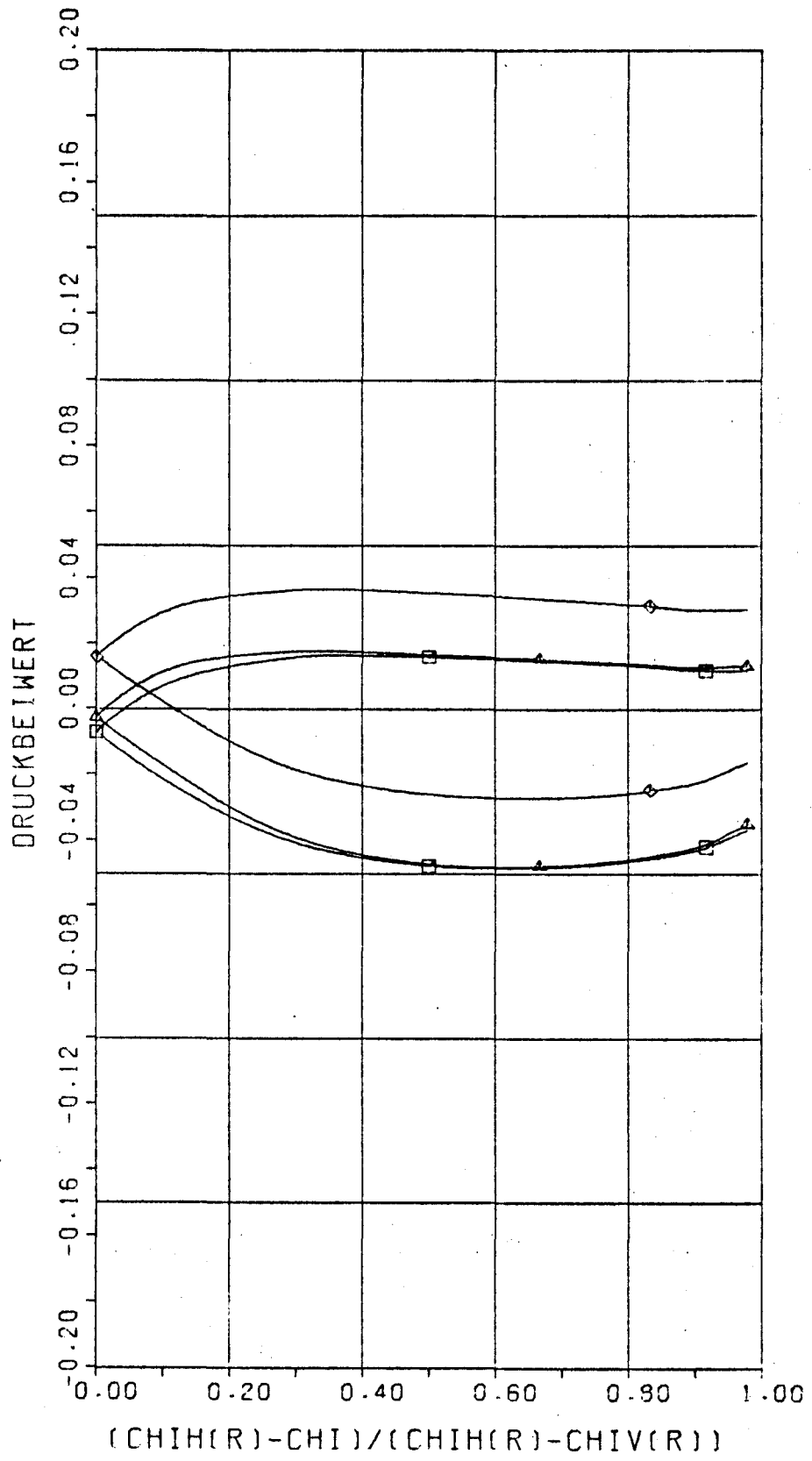
A66. 111



$$\tau = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8}{6} \pi$$

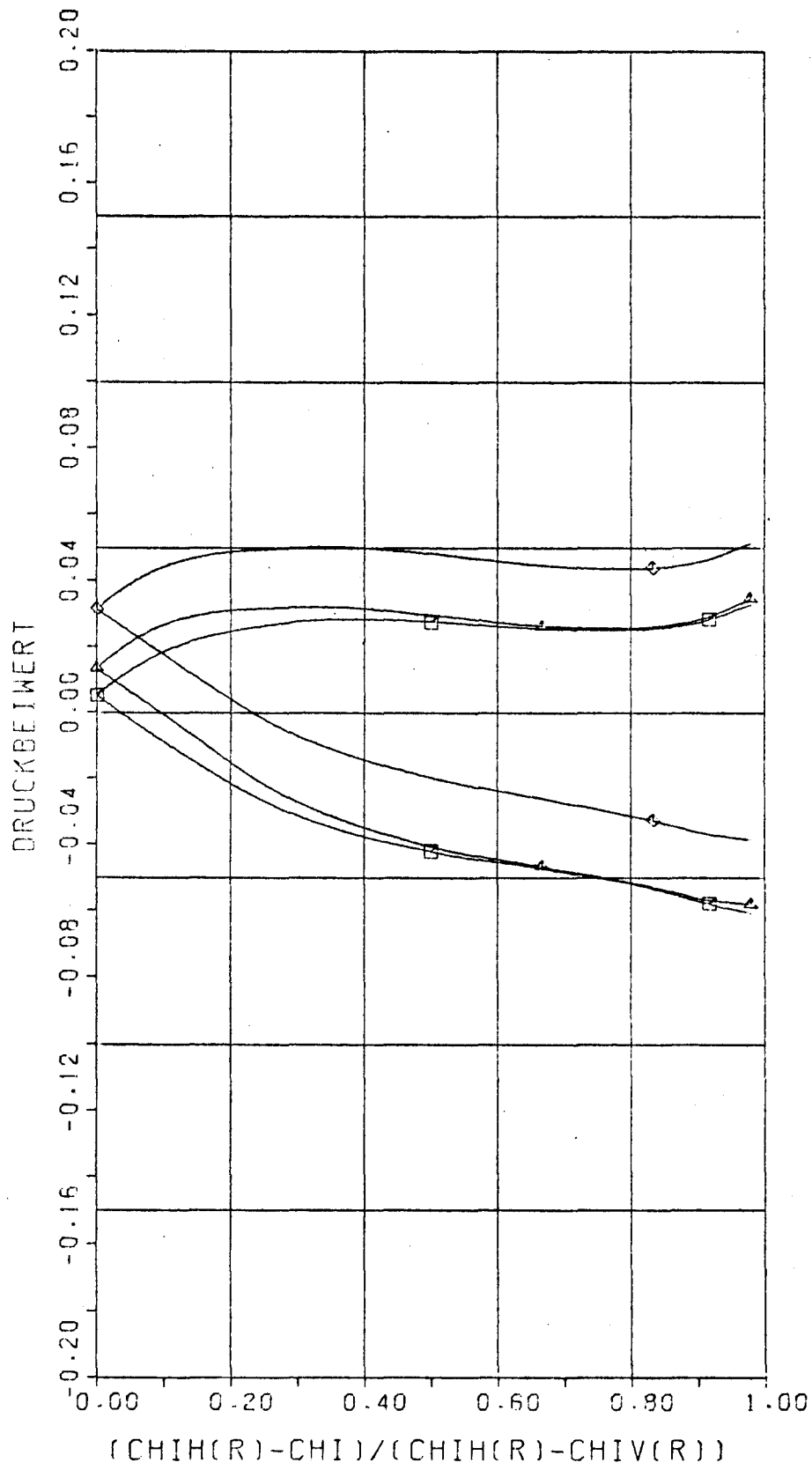
A66.112



$$r = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6} \pi$$

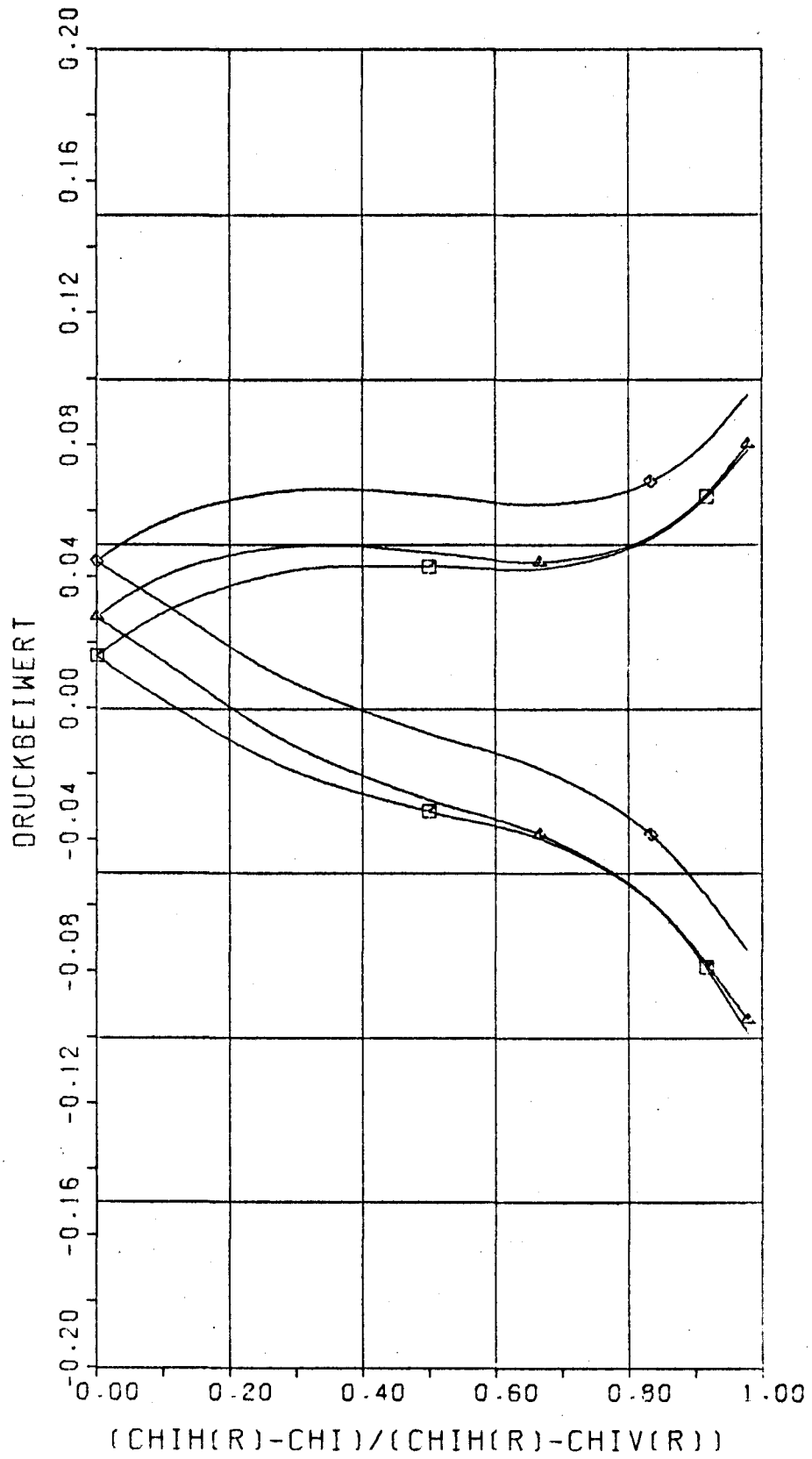
Abb. 113



$$r = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

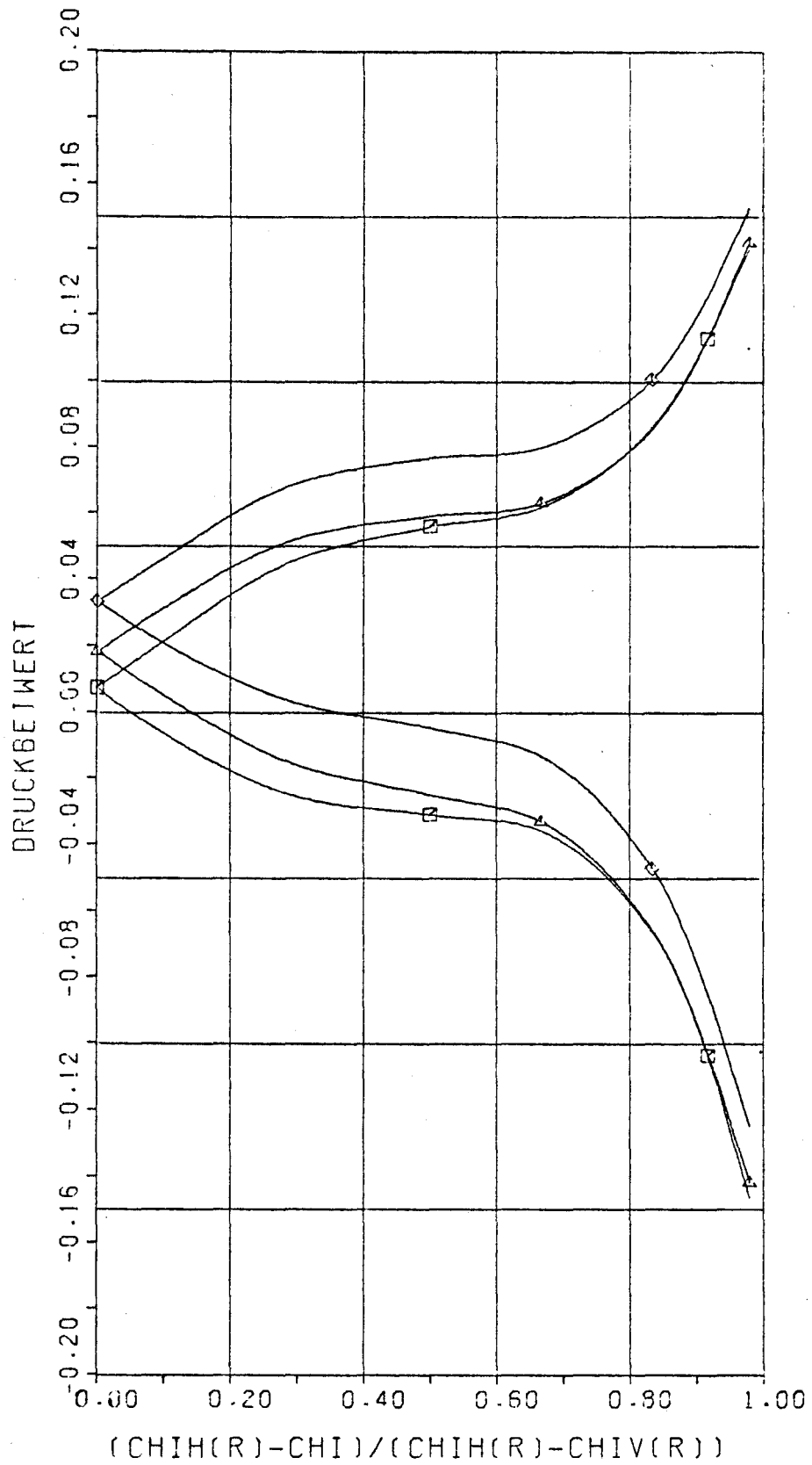
Fl66.114



$$r = 0.7 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

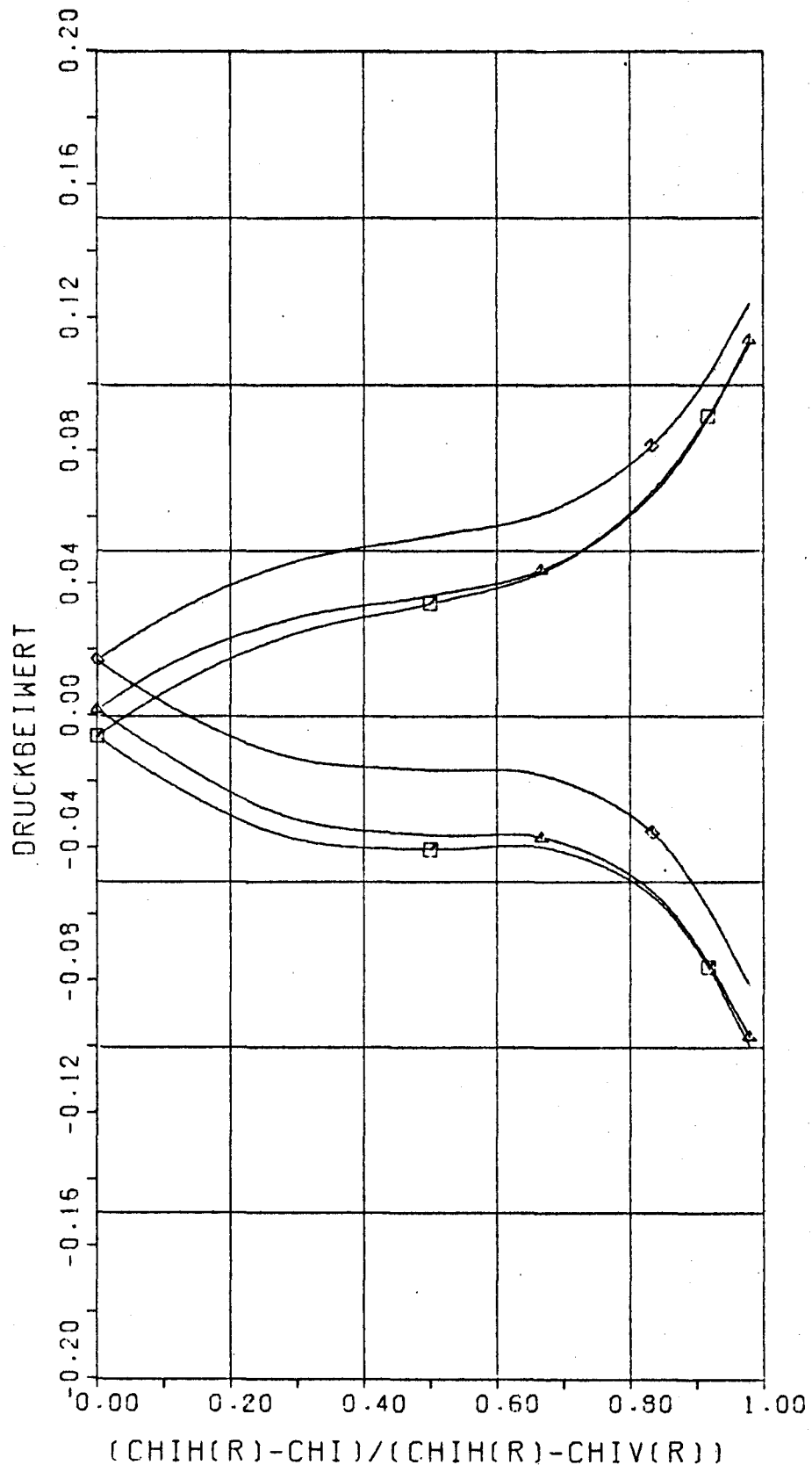
A66.115



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = 0$$

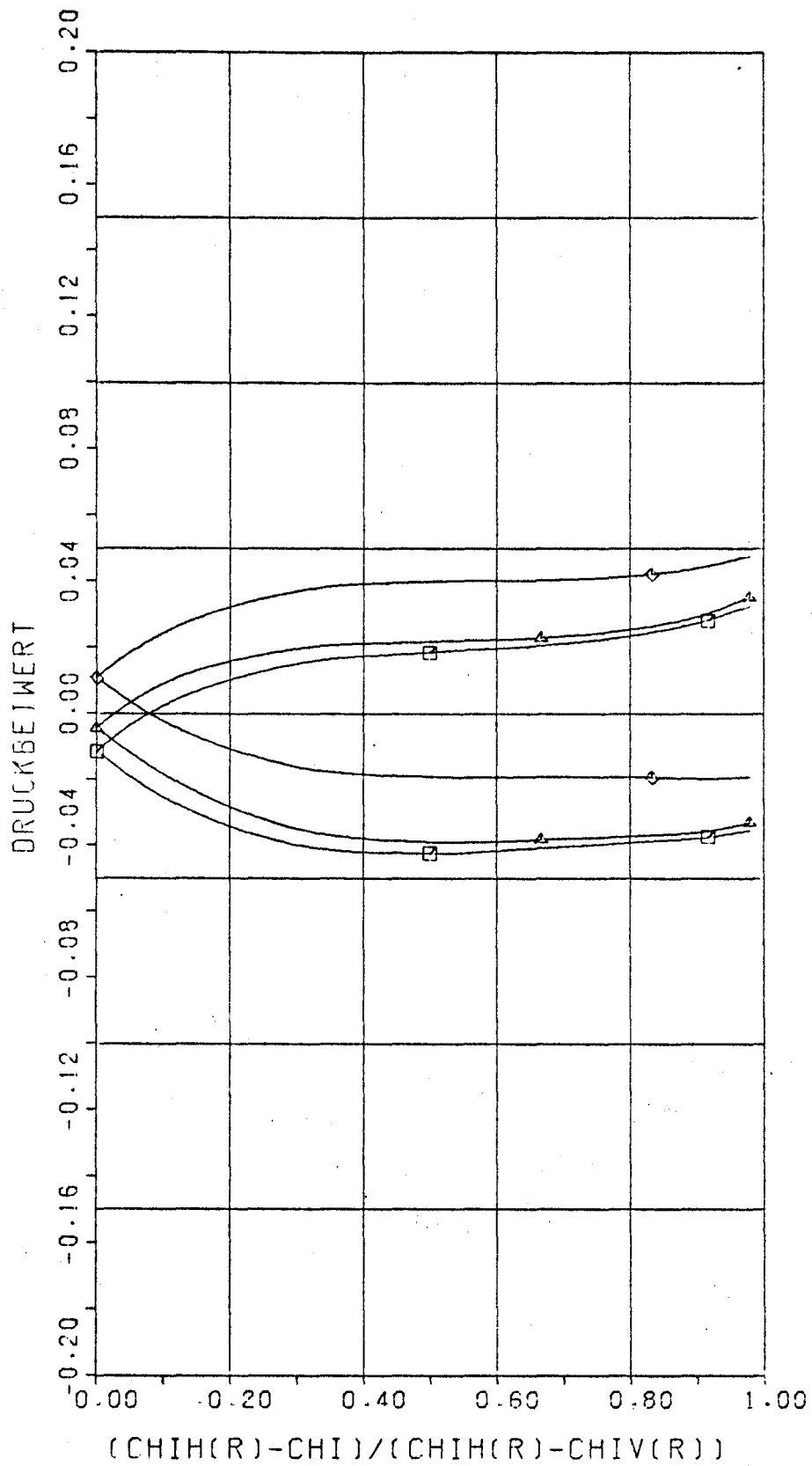
A66.116



$$\tau = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

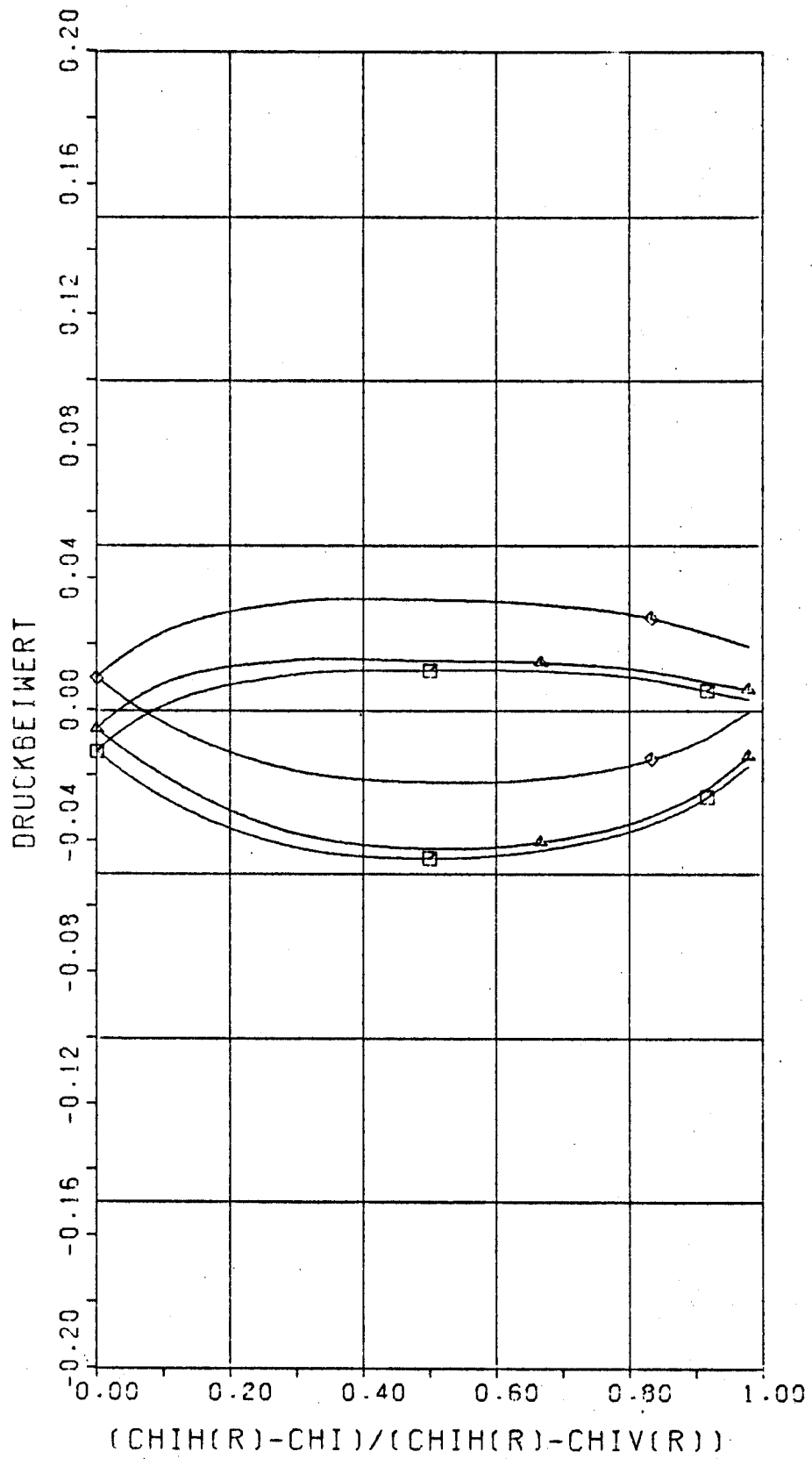
Abb. 117



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3}\pi$$

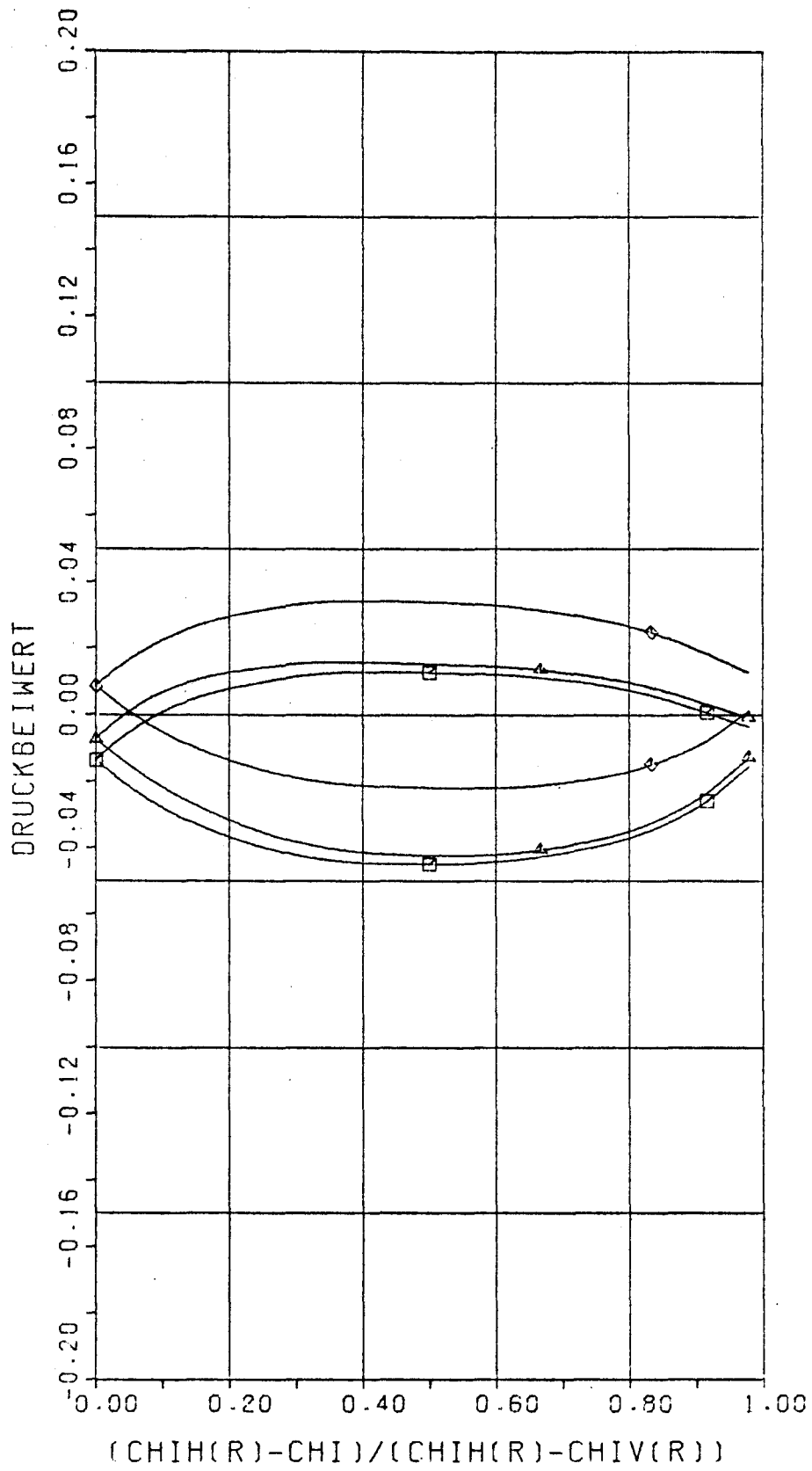
766. 118



$$\tau = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$$

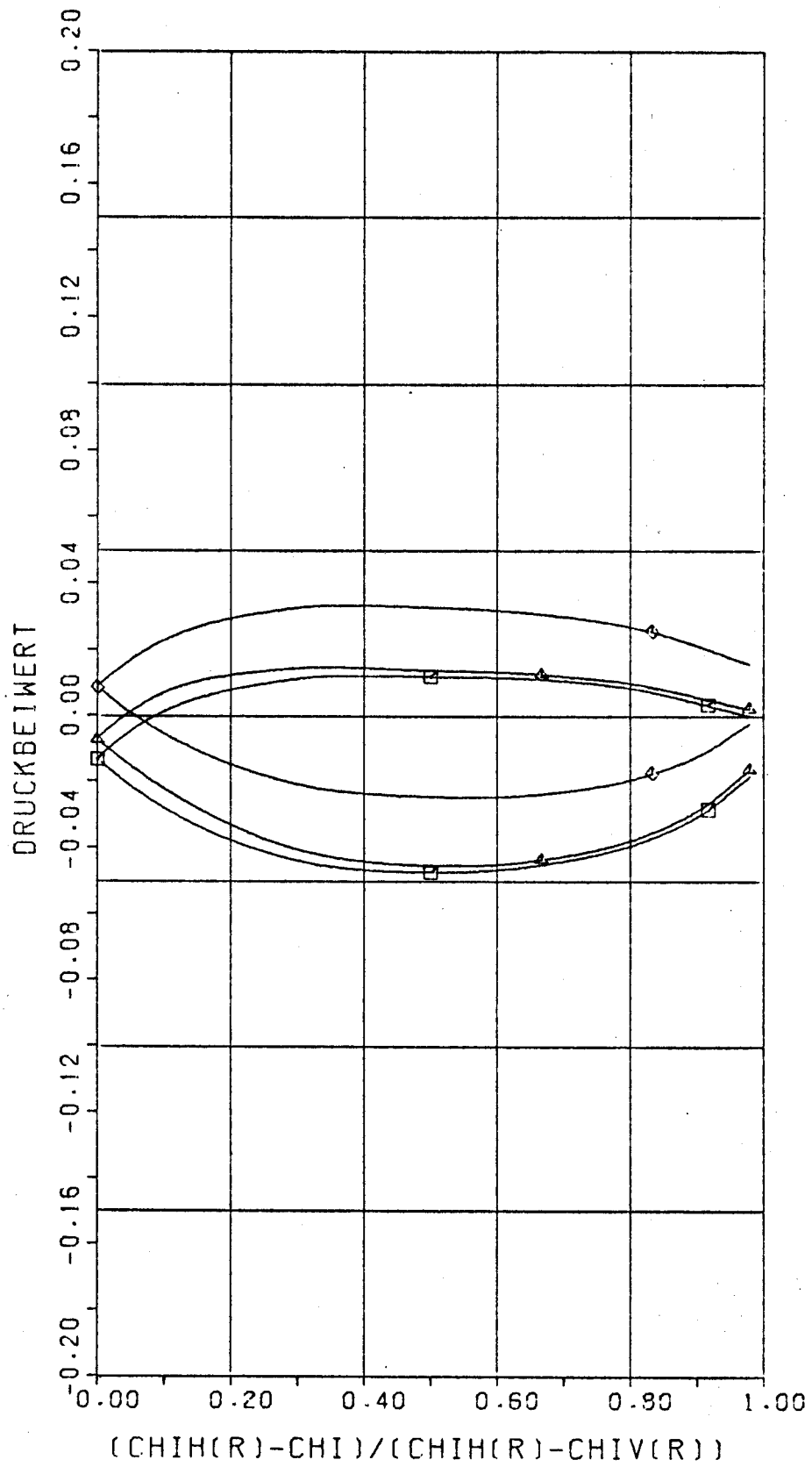
A66. 113



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4}{6} \pi$$

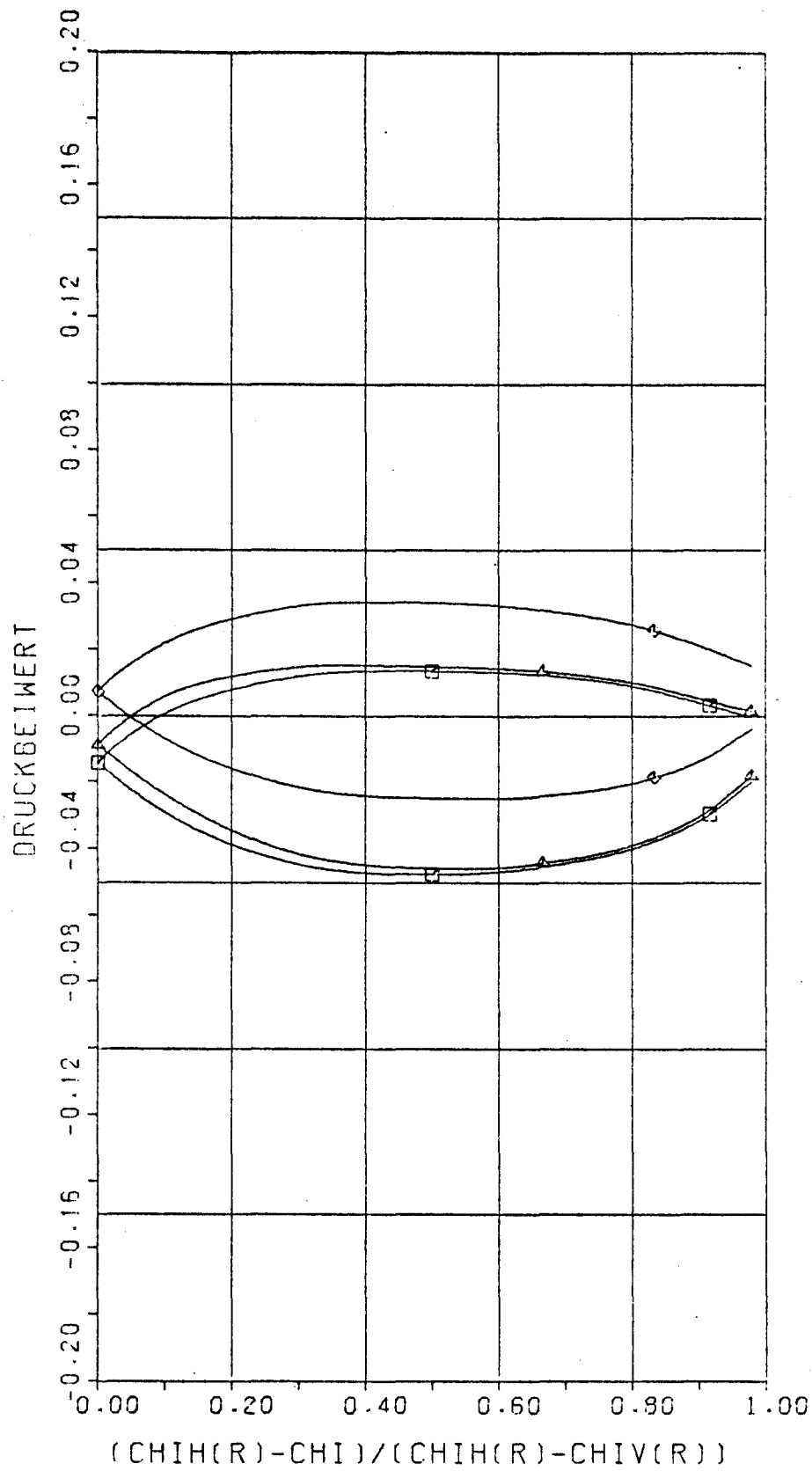
Abb. 120



$$r = 0.8R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$$

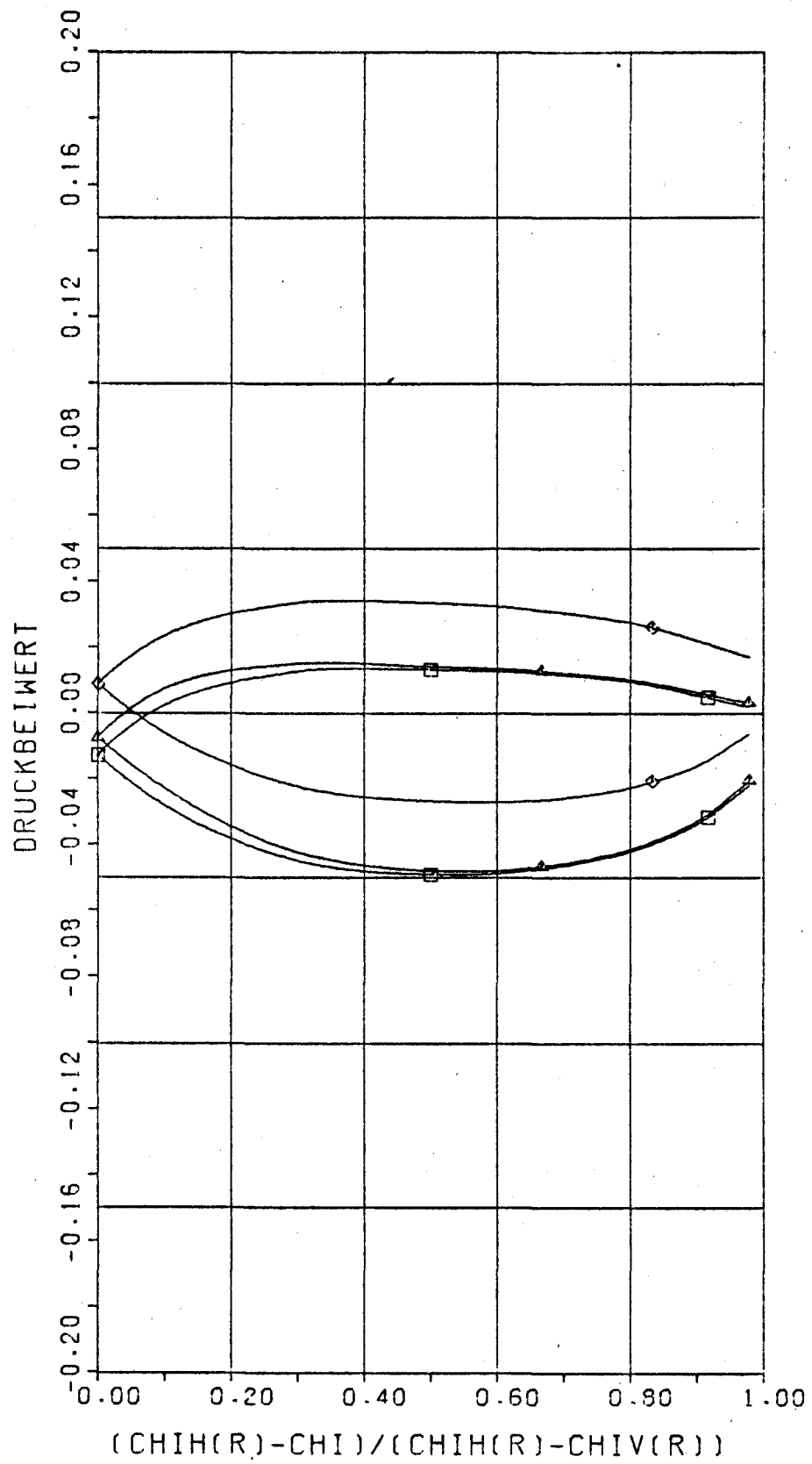
Abb. 121



$$\tau = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

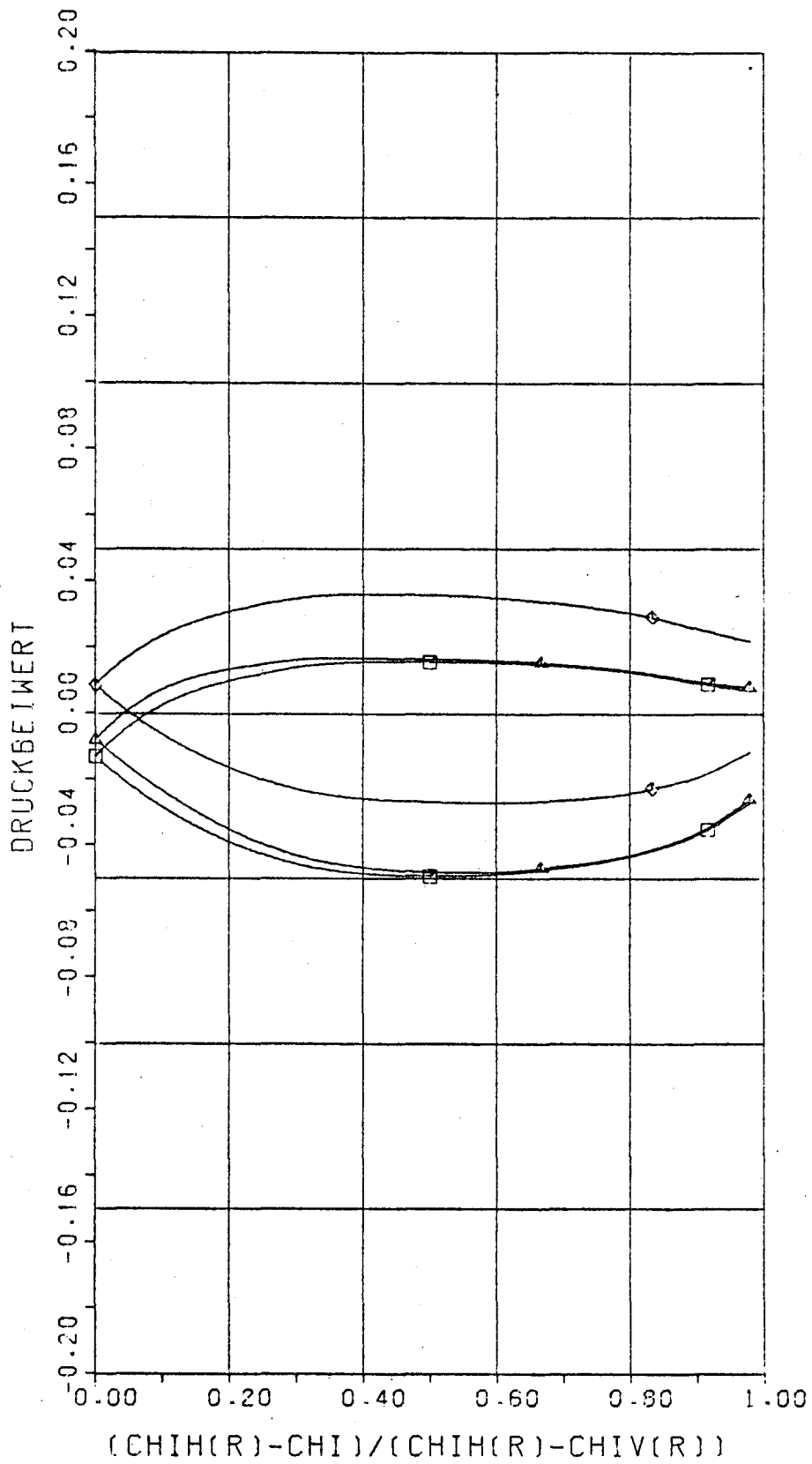
Abb. 122



$$\tau = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6}\pi$$

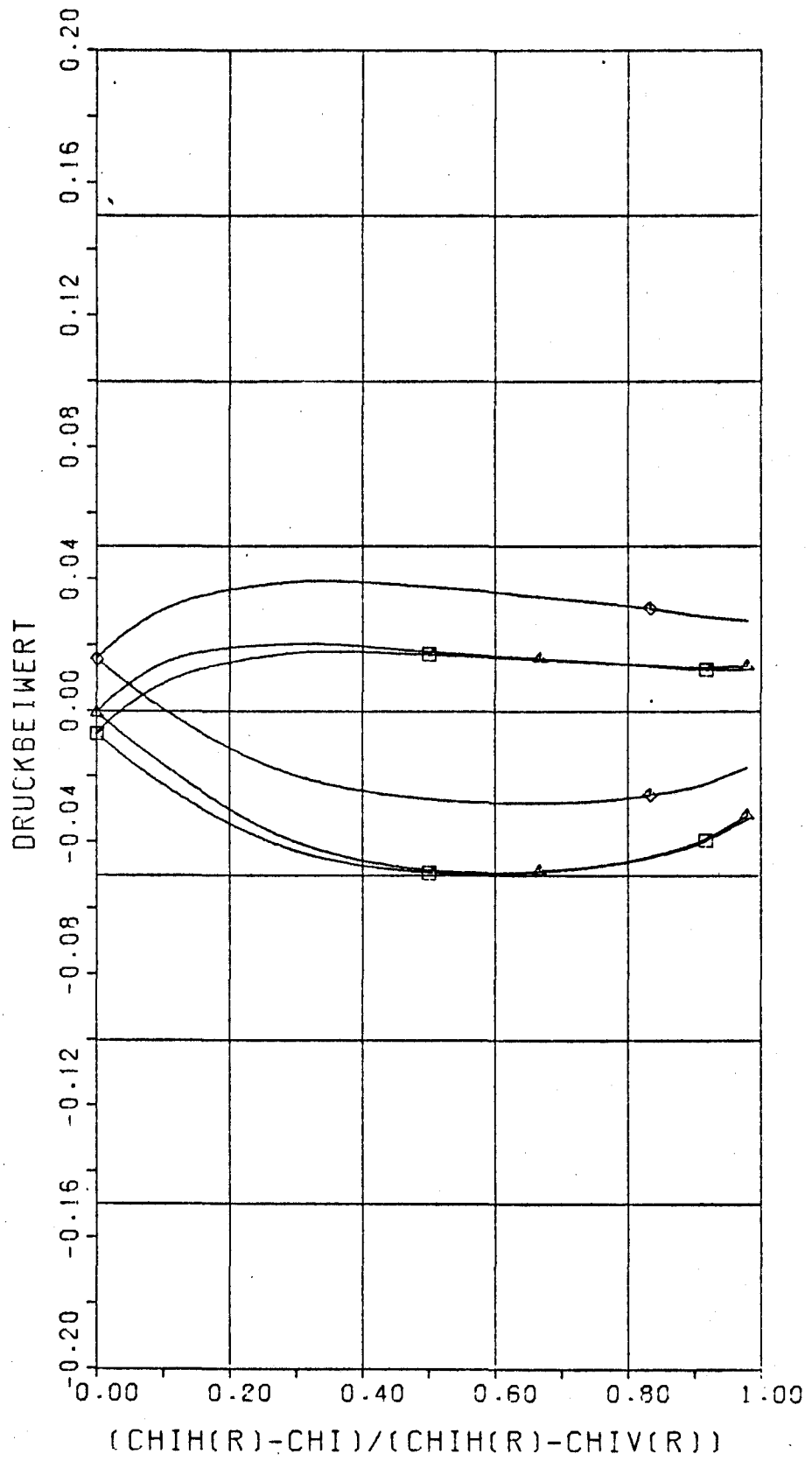
R66.123



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8}{6} \pi$$

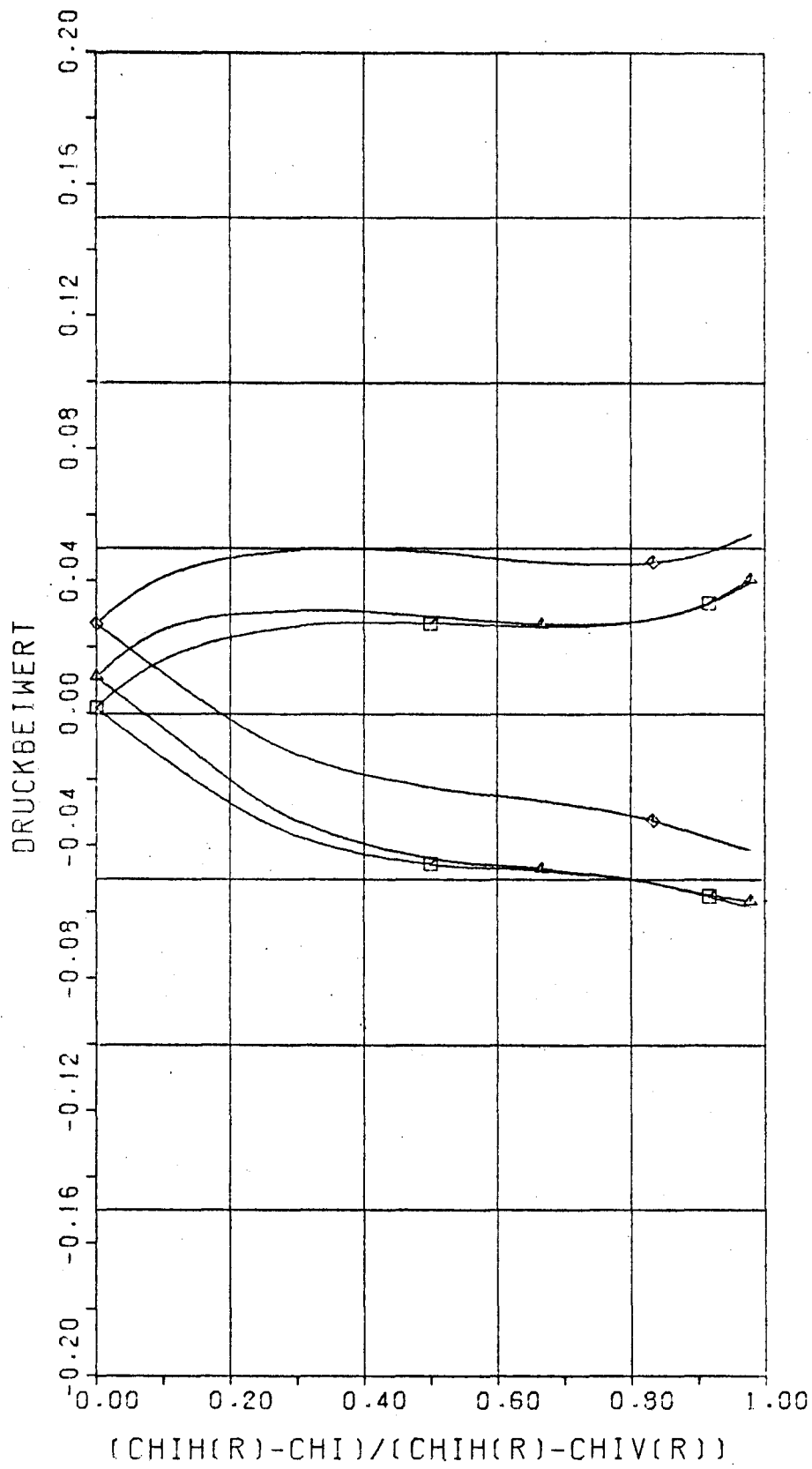
A66.124



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6} \pi$$

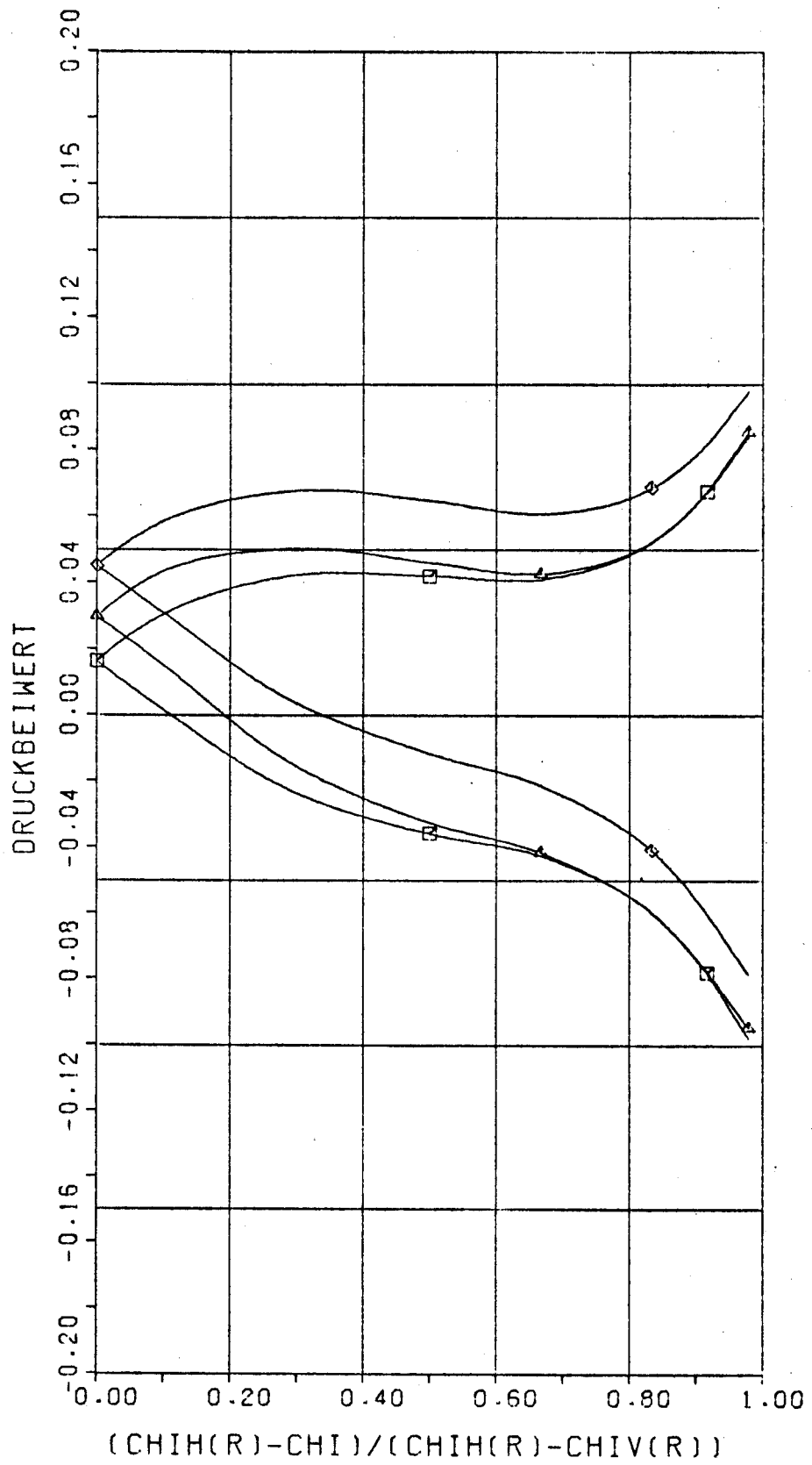
A66. 125



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

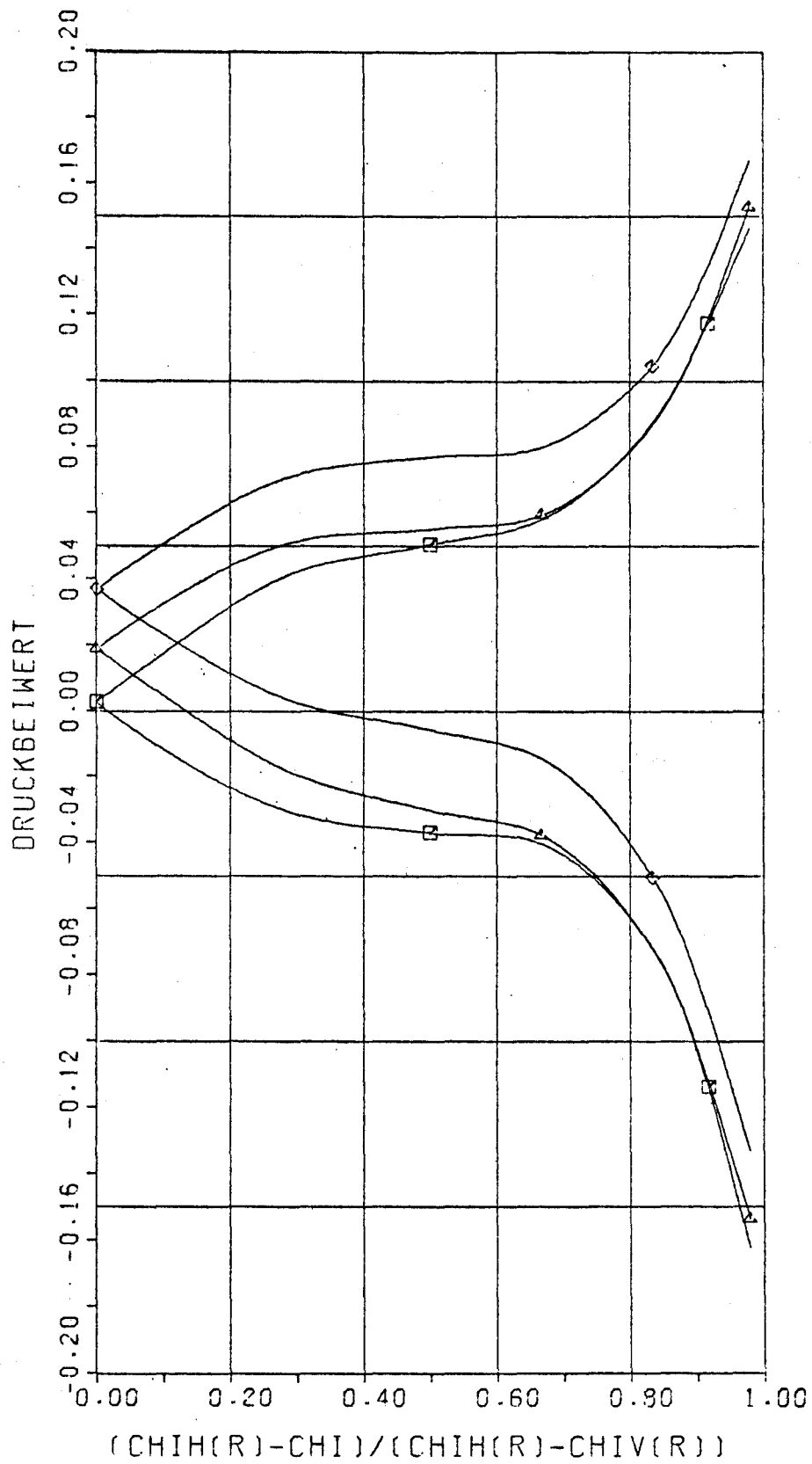
A66.126



$$r = 0.8 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

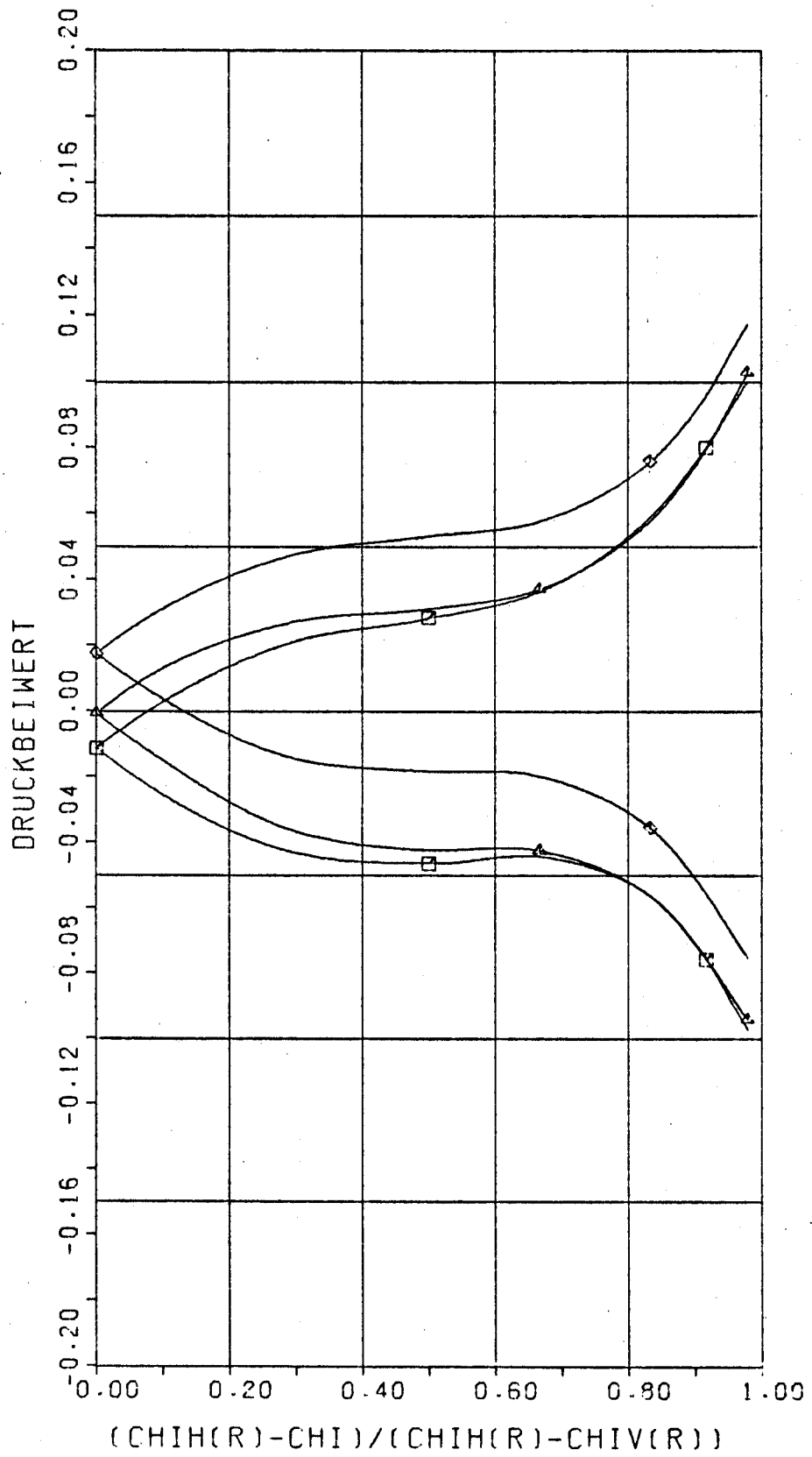
A66. 127



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = 0$$

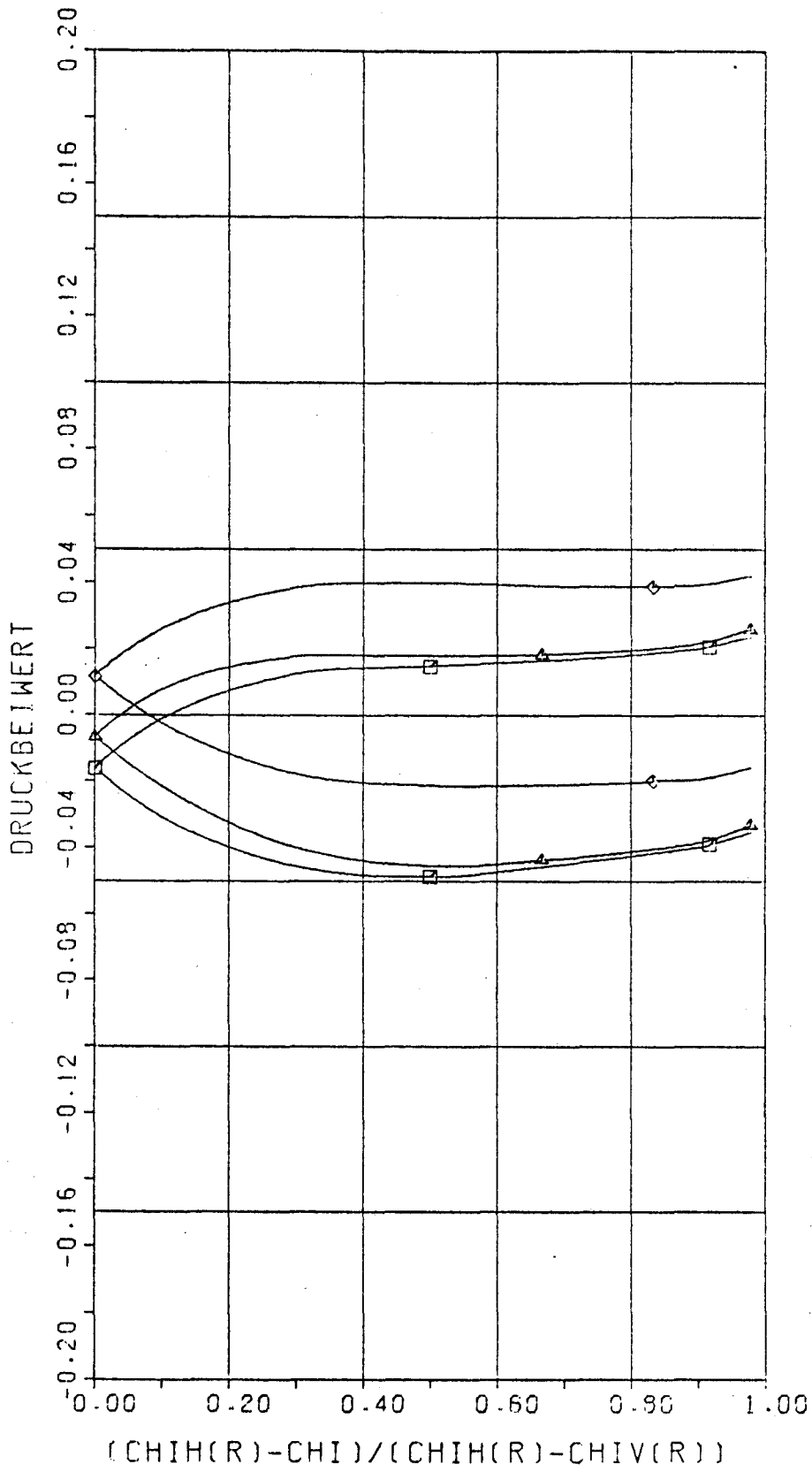
A66.128



$$r = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

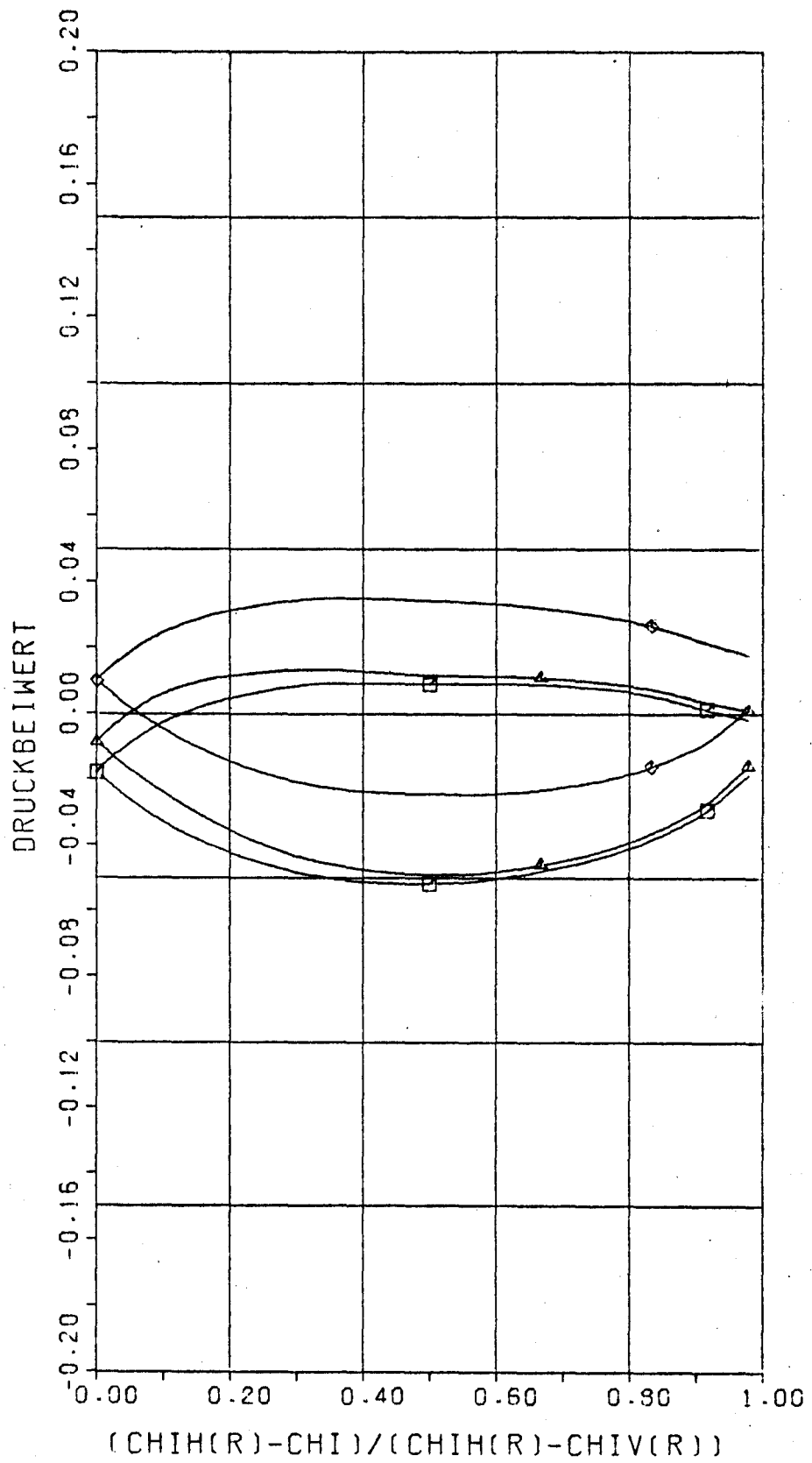
A66. 129



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} \pi$$

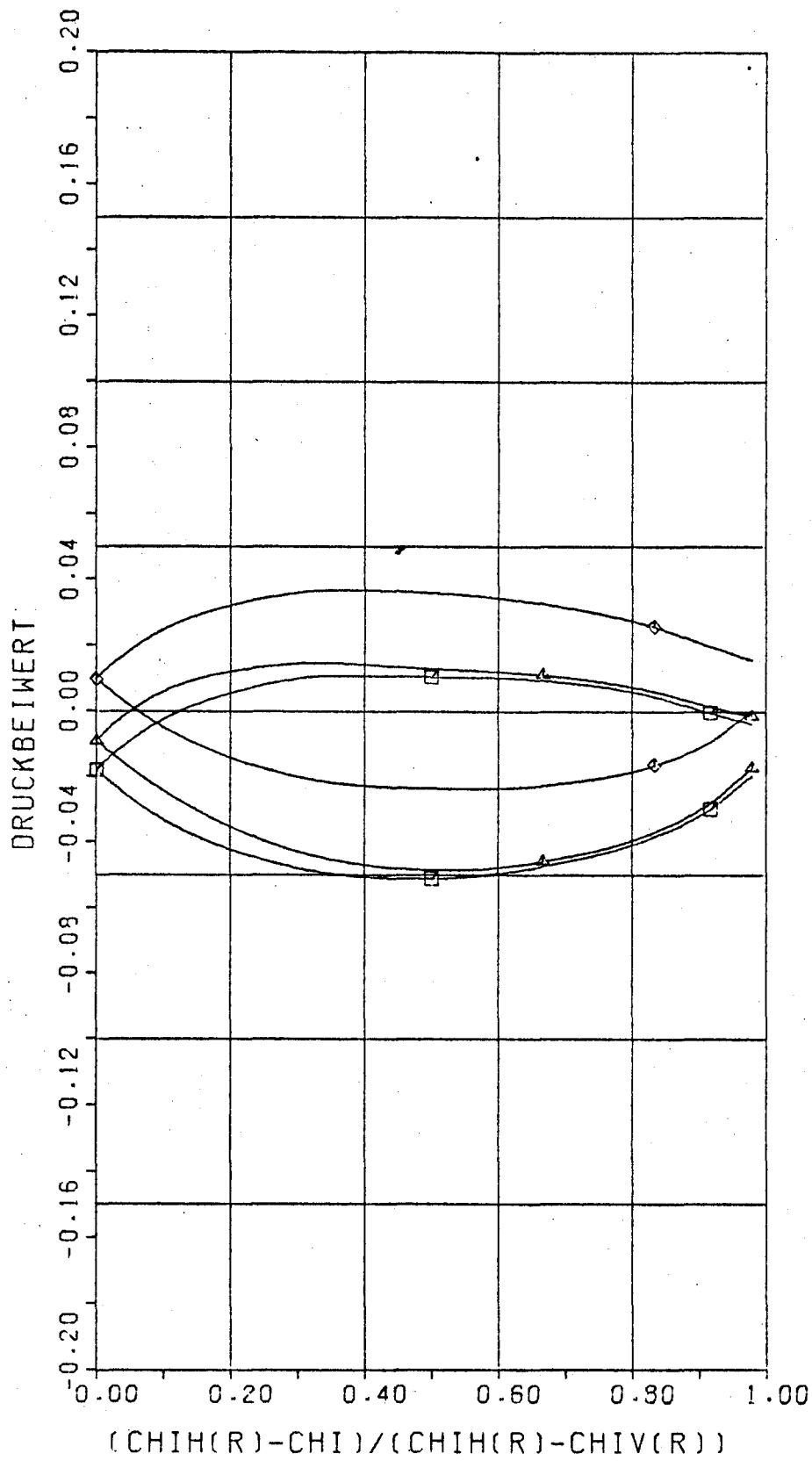
A66.130



$$r = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \pi$$

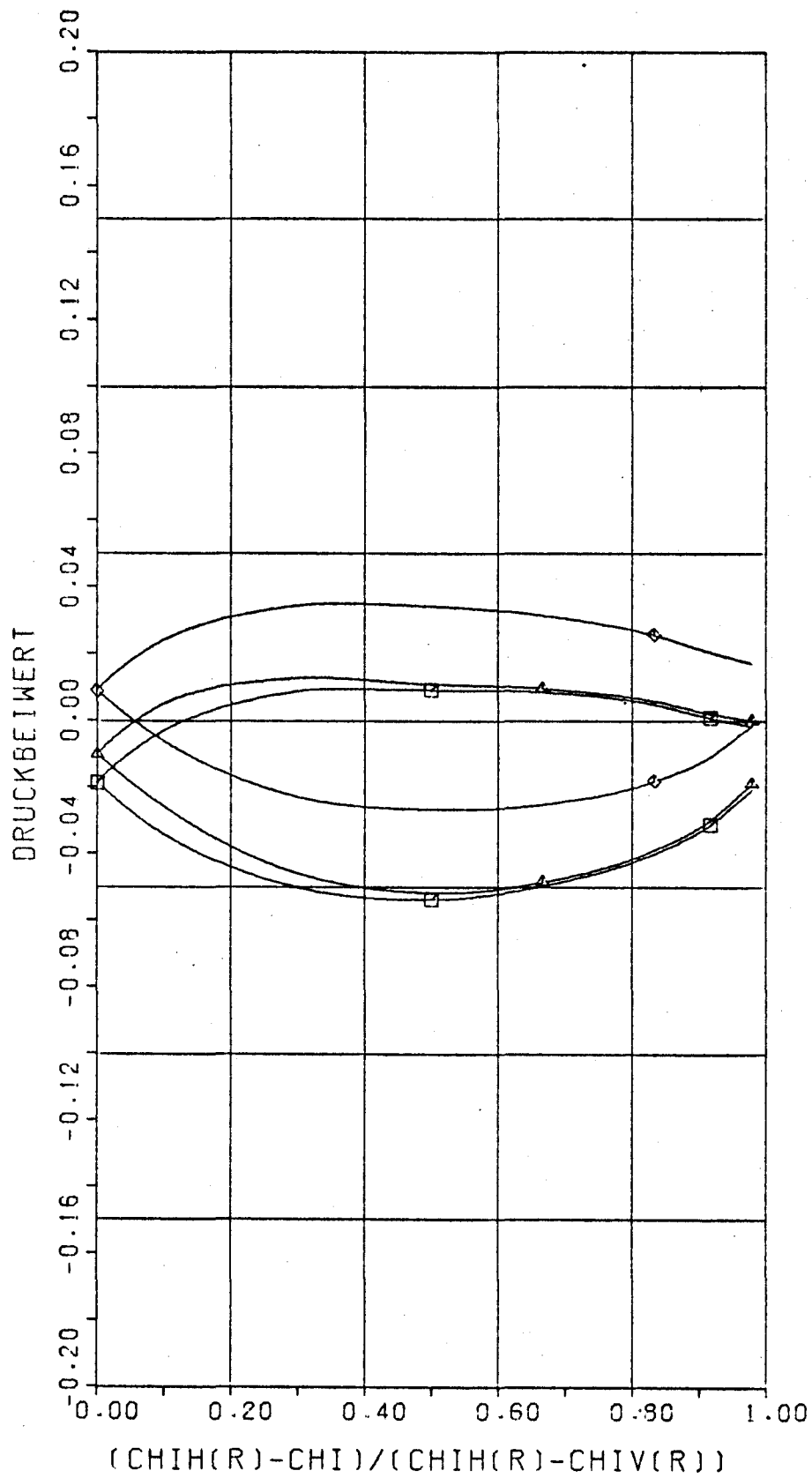
Abb. 131



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4\pi}{6}$$

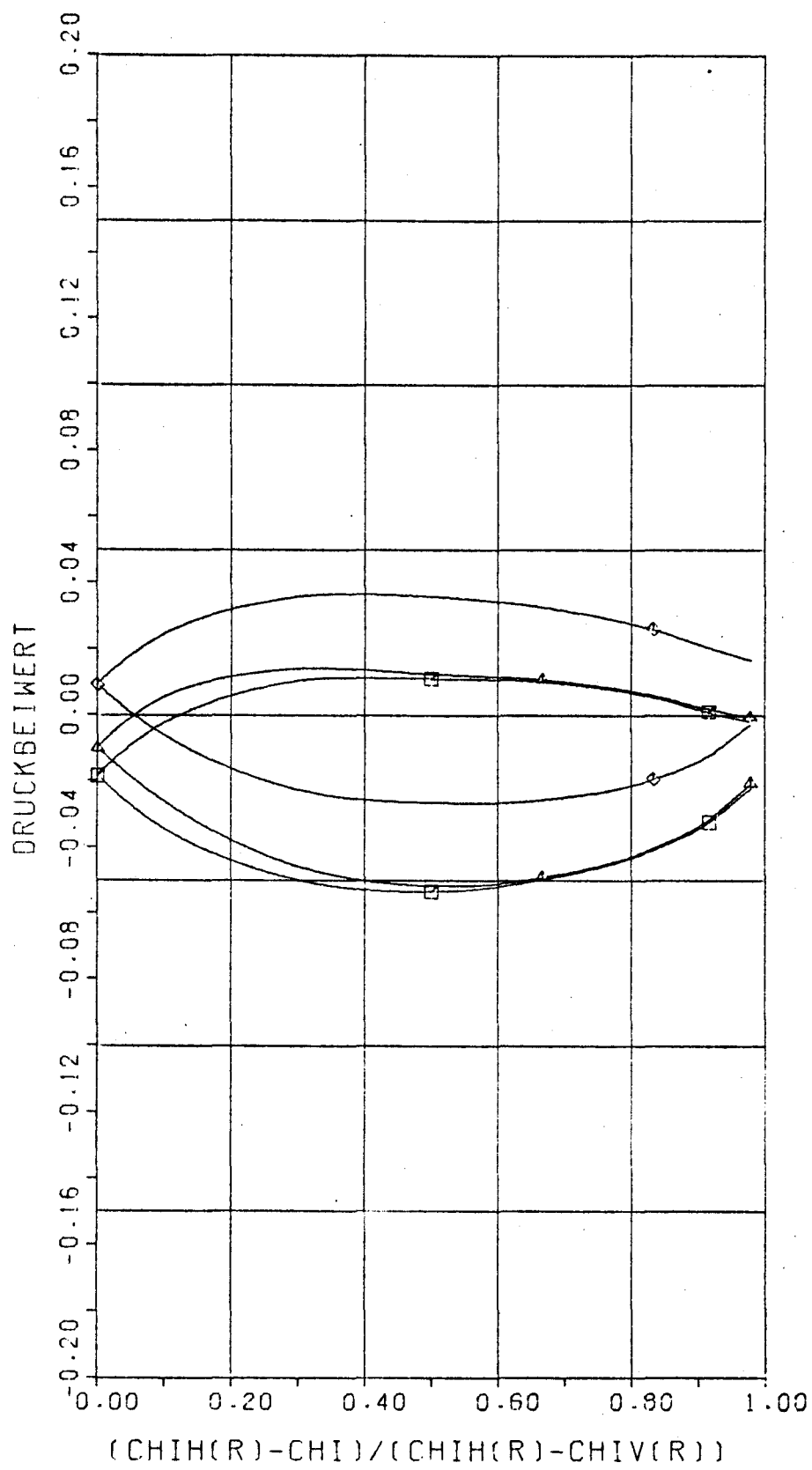
Abb. 132



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$$

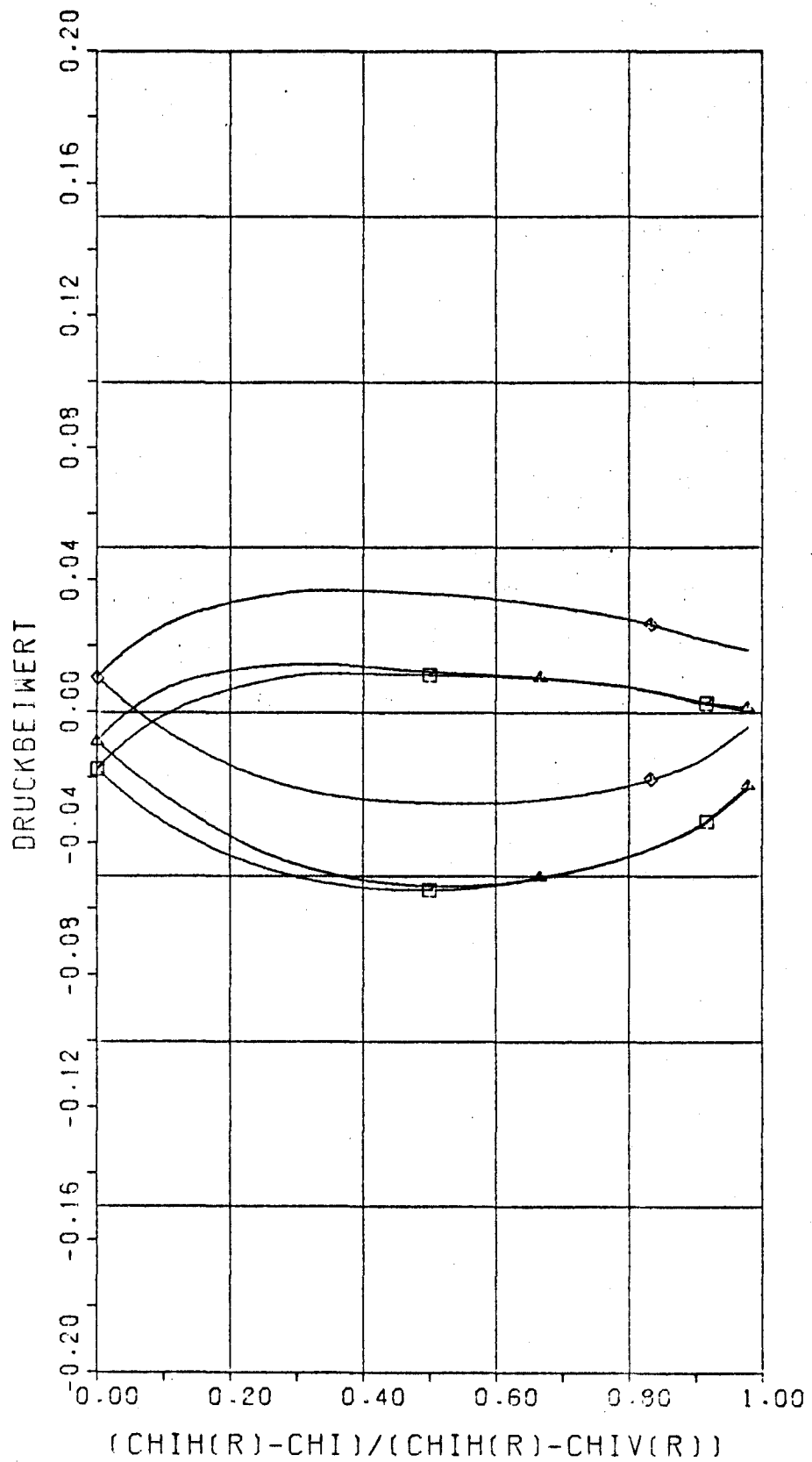
A66.133



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

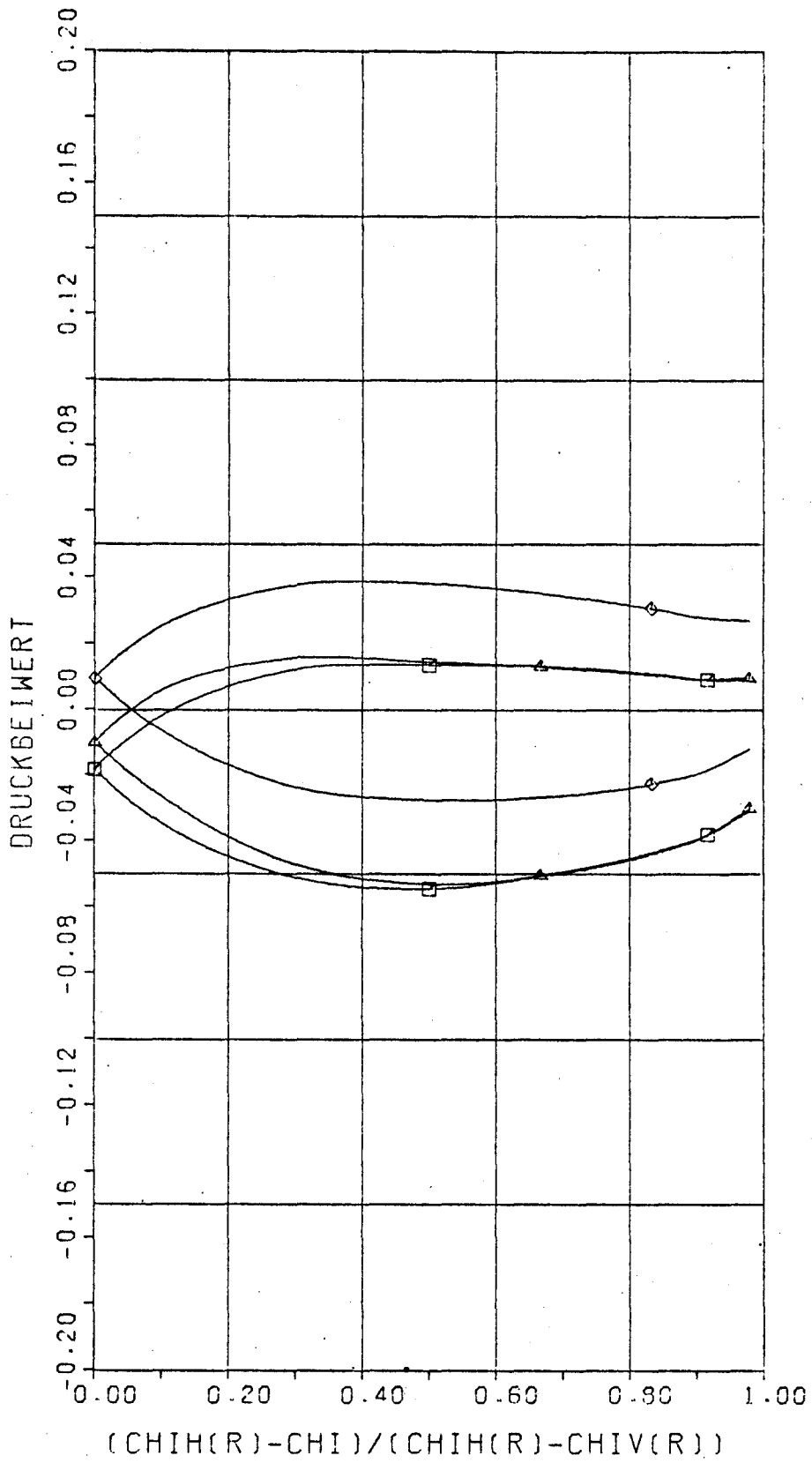
A66.134



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

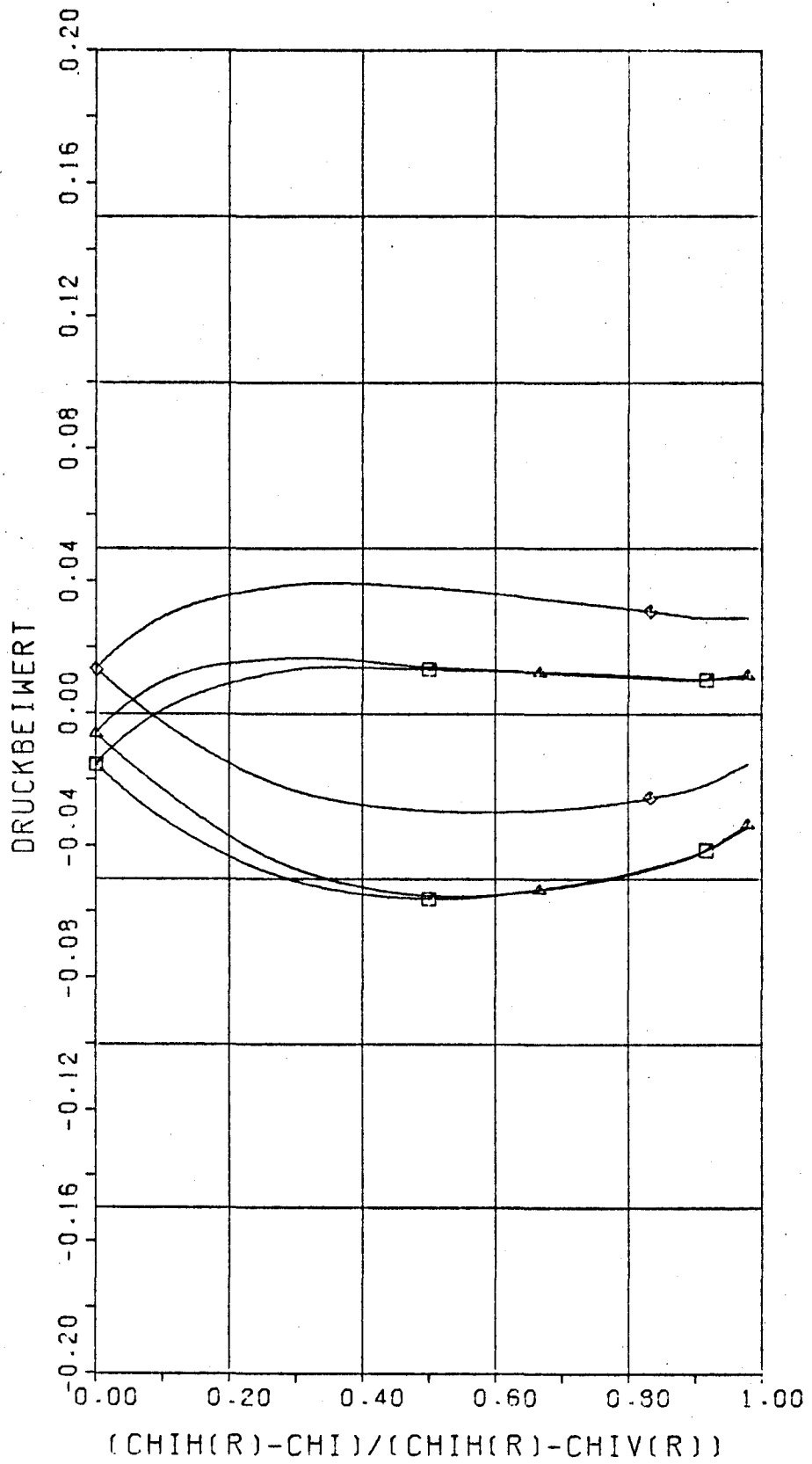
A66. 135



$$r = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8}{6}\pi$$

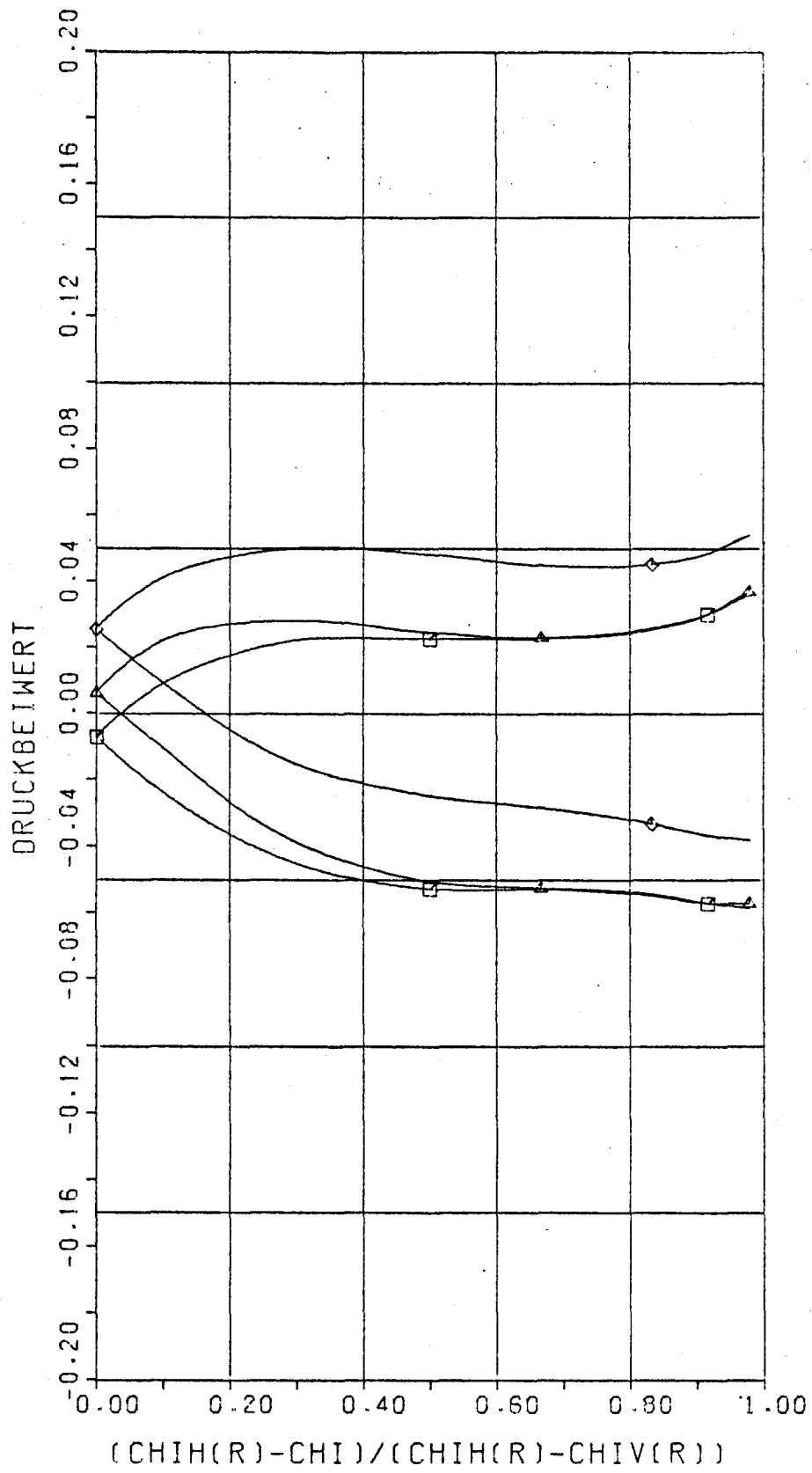
A66.136



$$r = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6} \pi$$

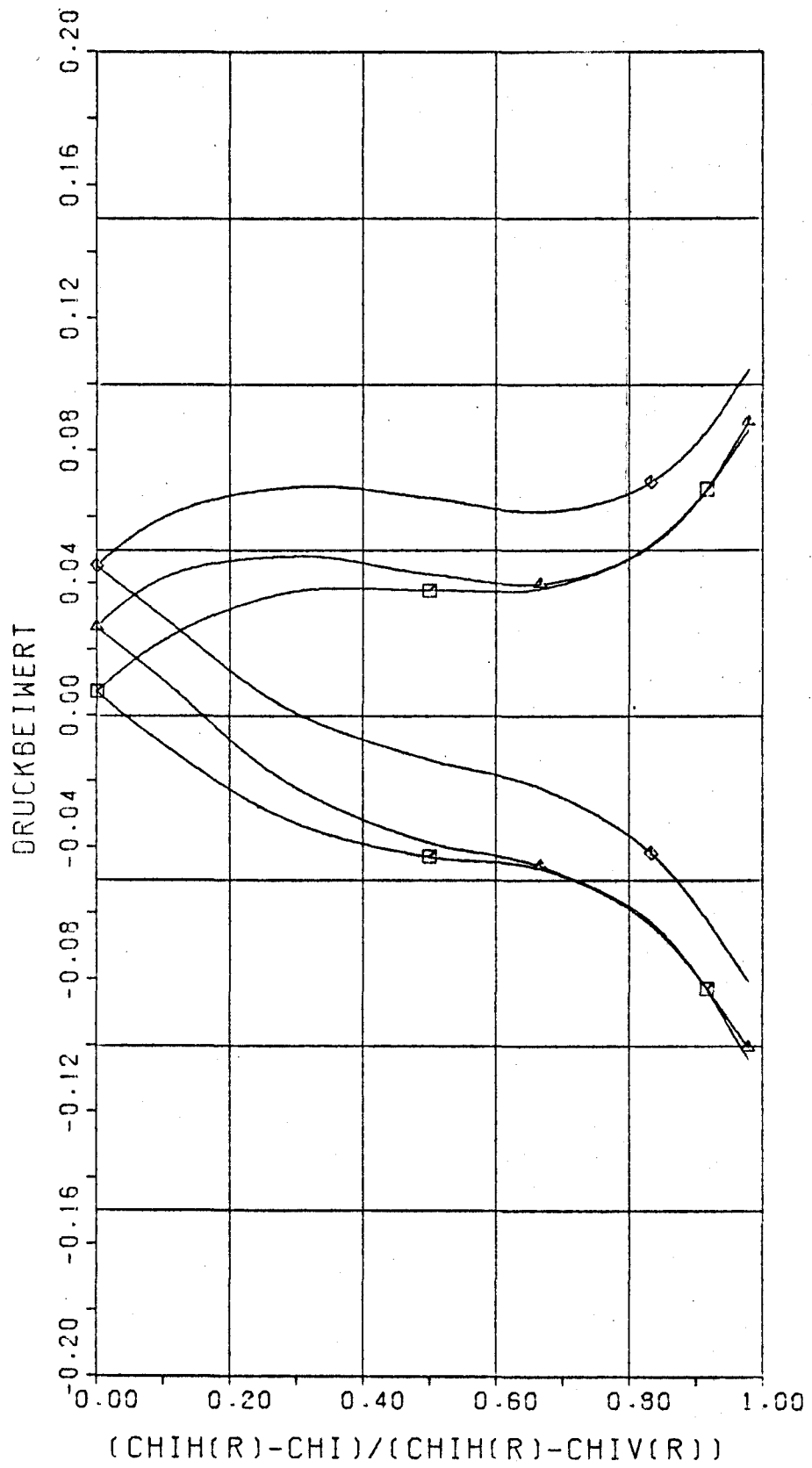
Abb. 137



$$\tau = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6}\pi$$

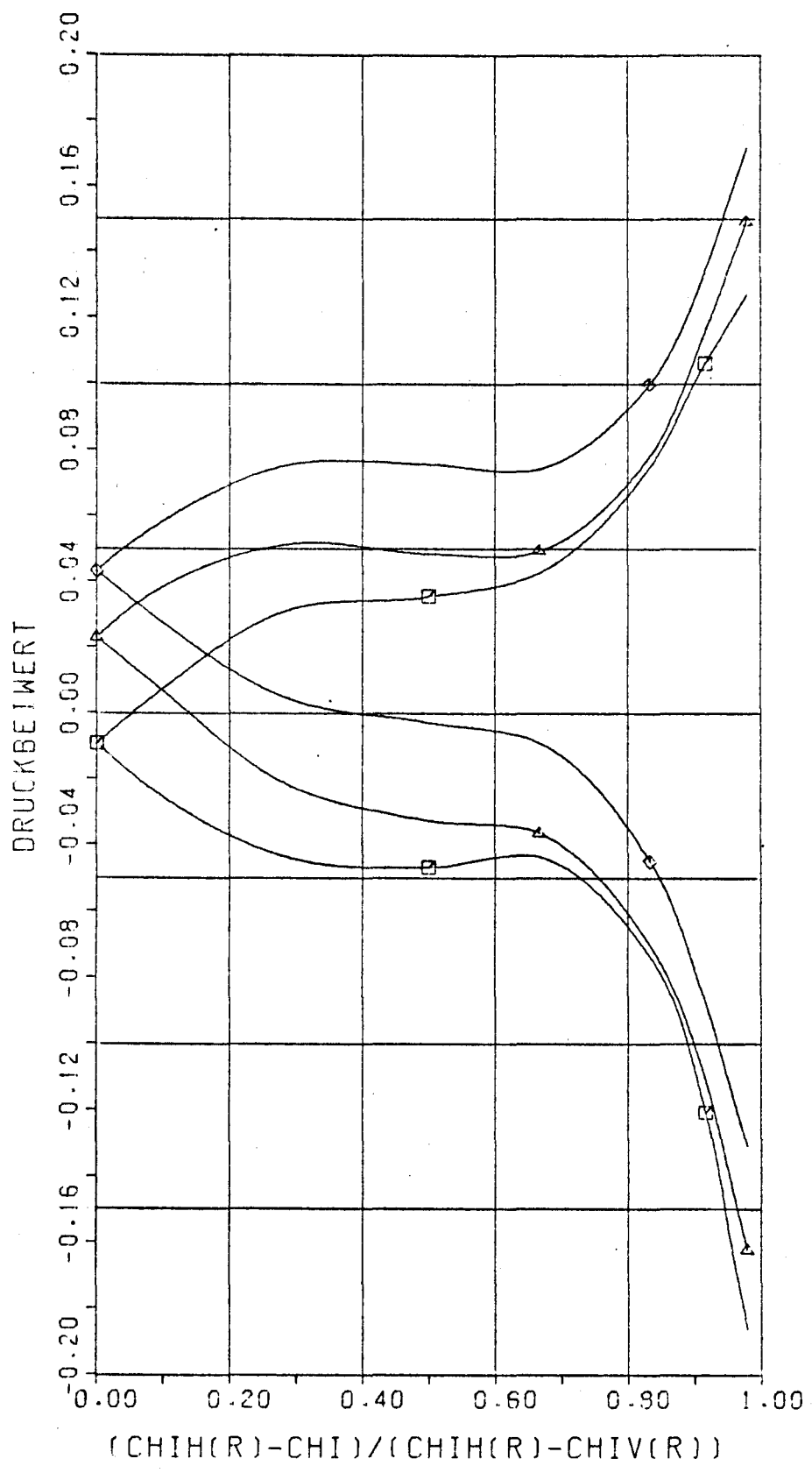
F66.138



$$r = 0.9 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

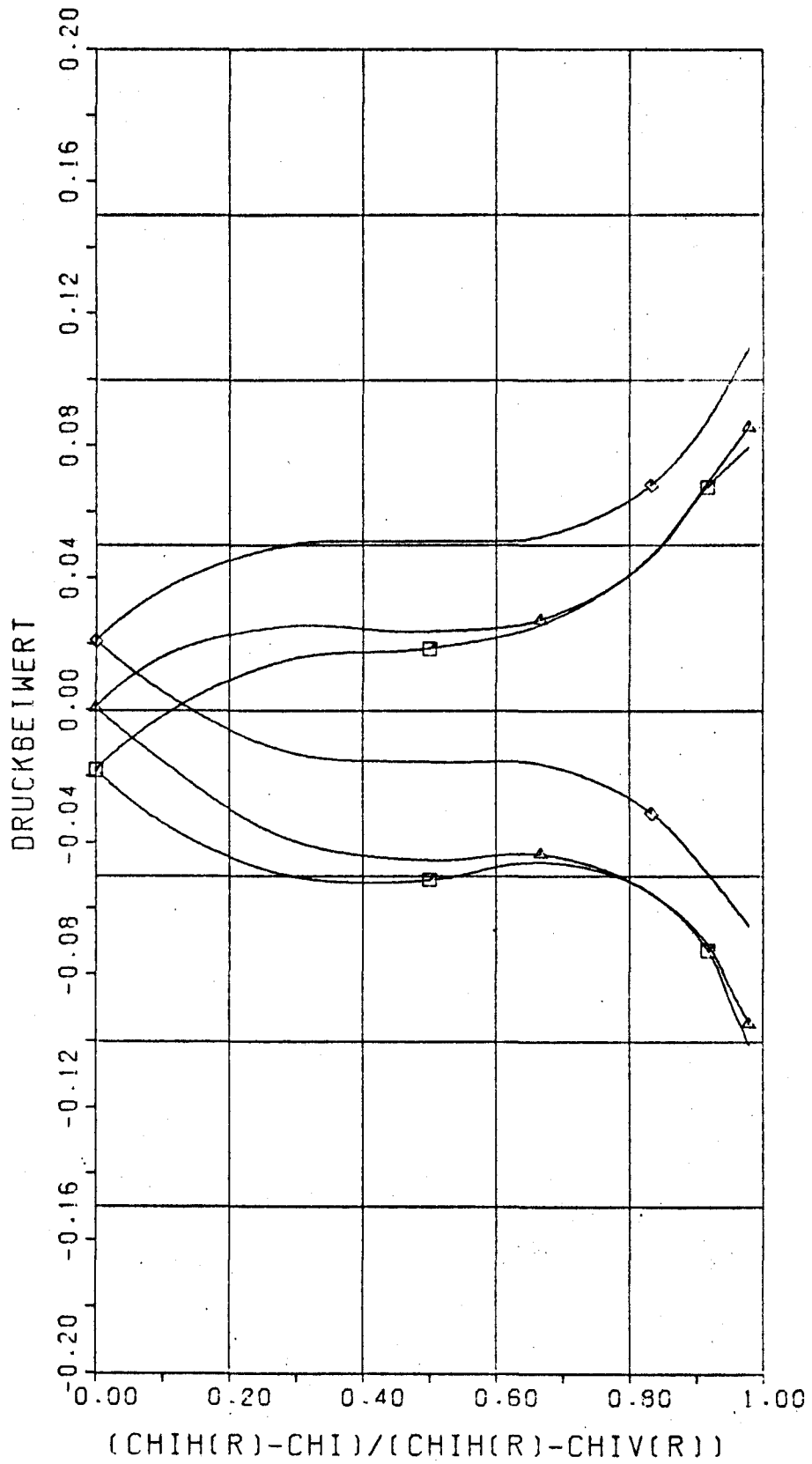
Abb. 139



$\tau = 0.95 R_0$

$\varphi_0 = 0$

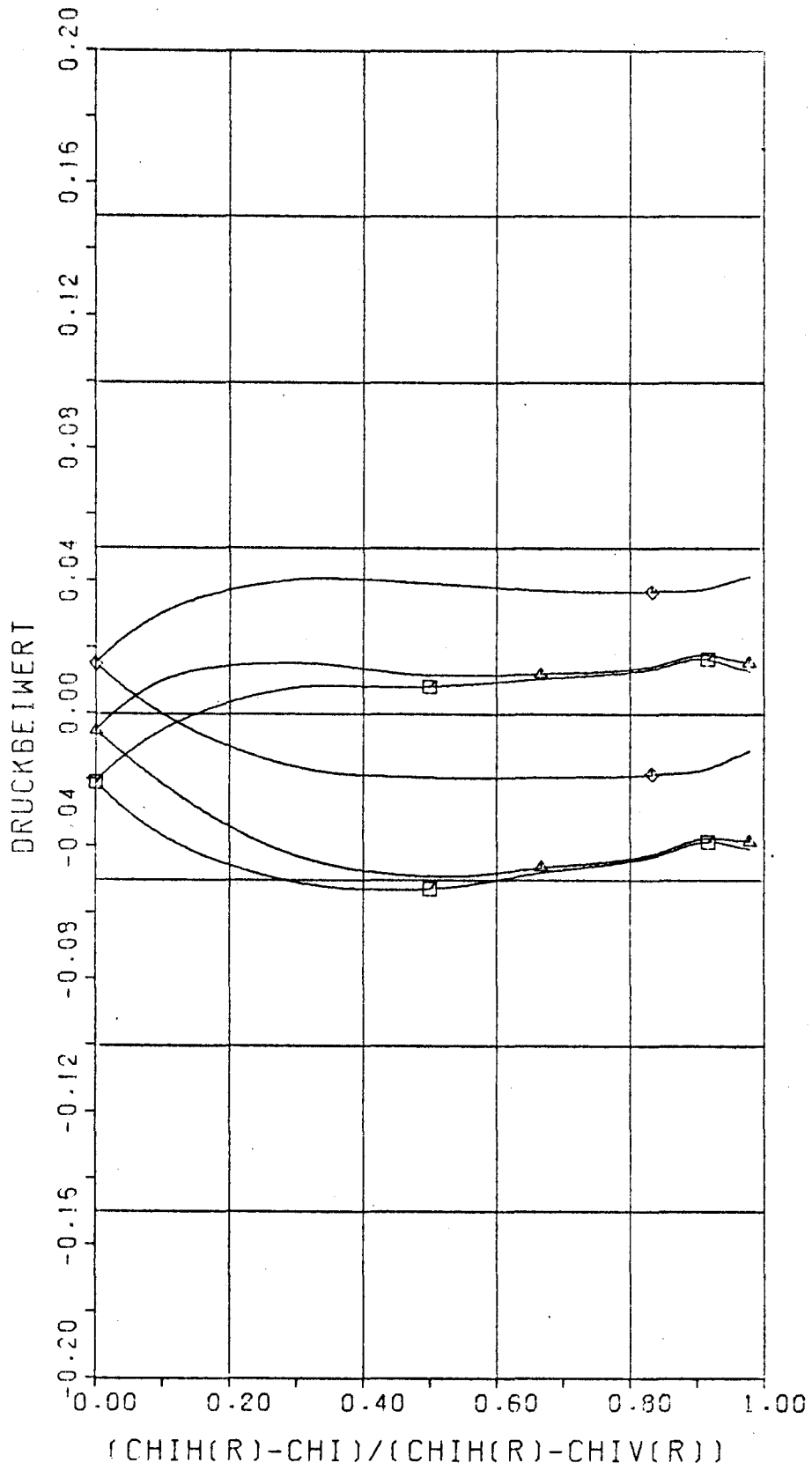
A 66. 140



$$T = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

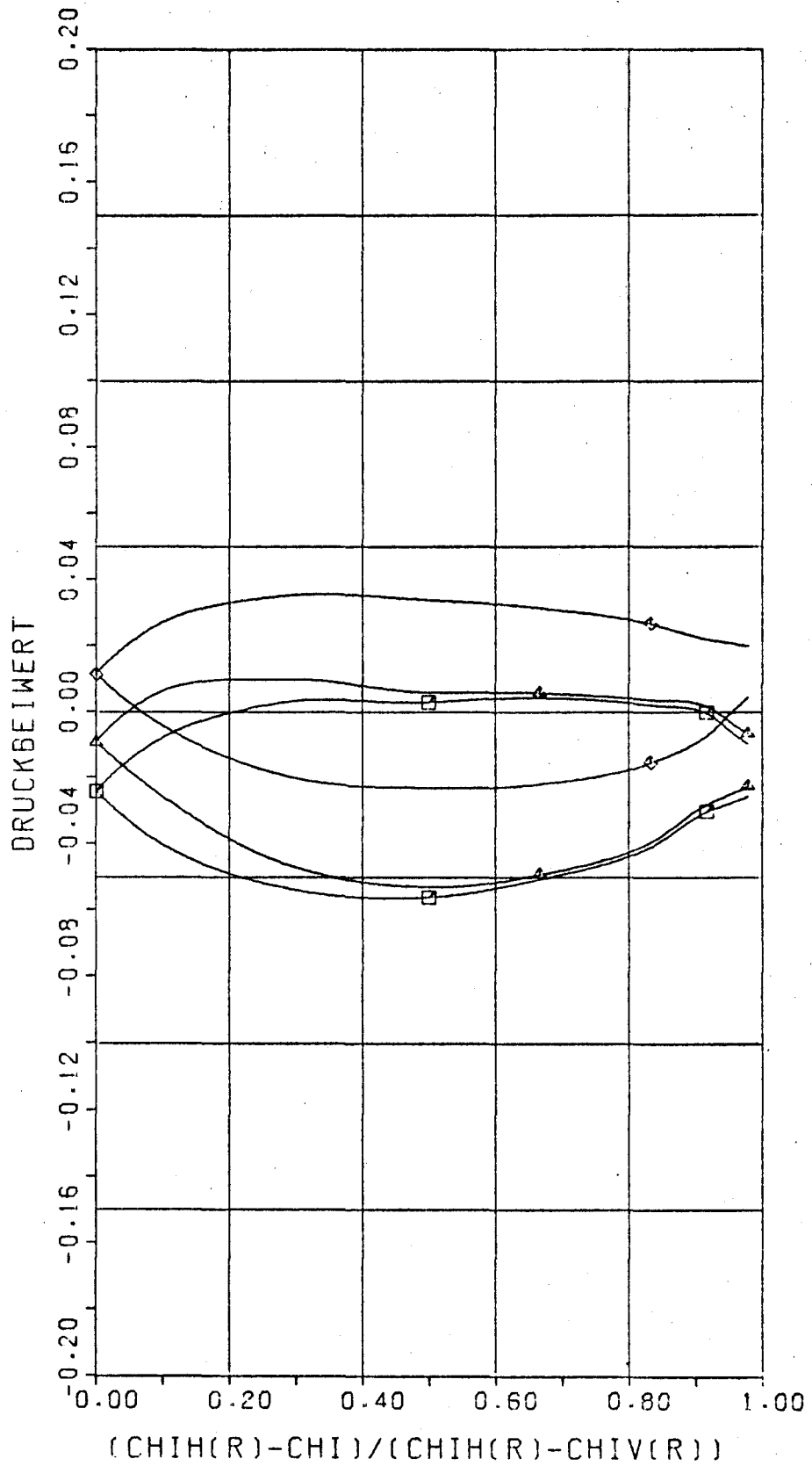
A66.141



$$r = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3}\pi$$

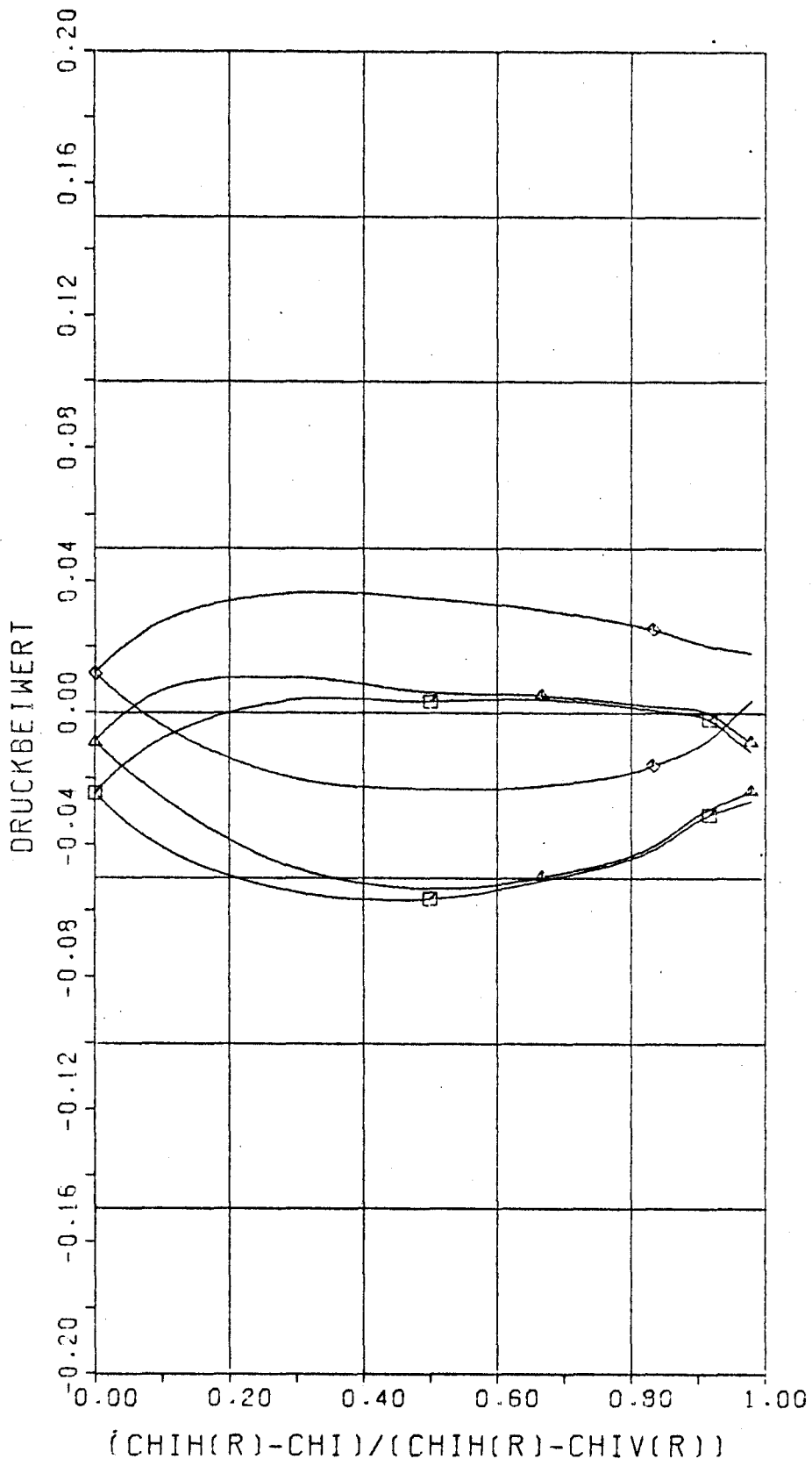
A66.142



$$r = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$$

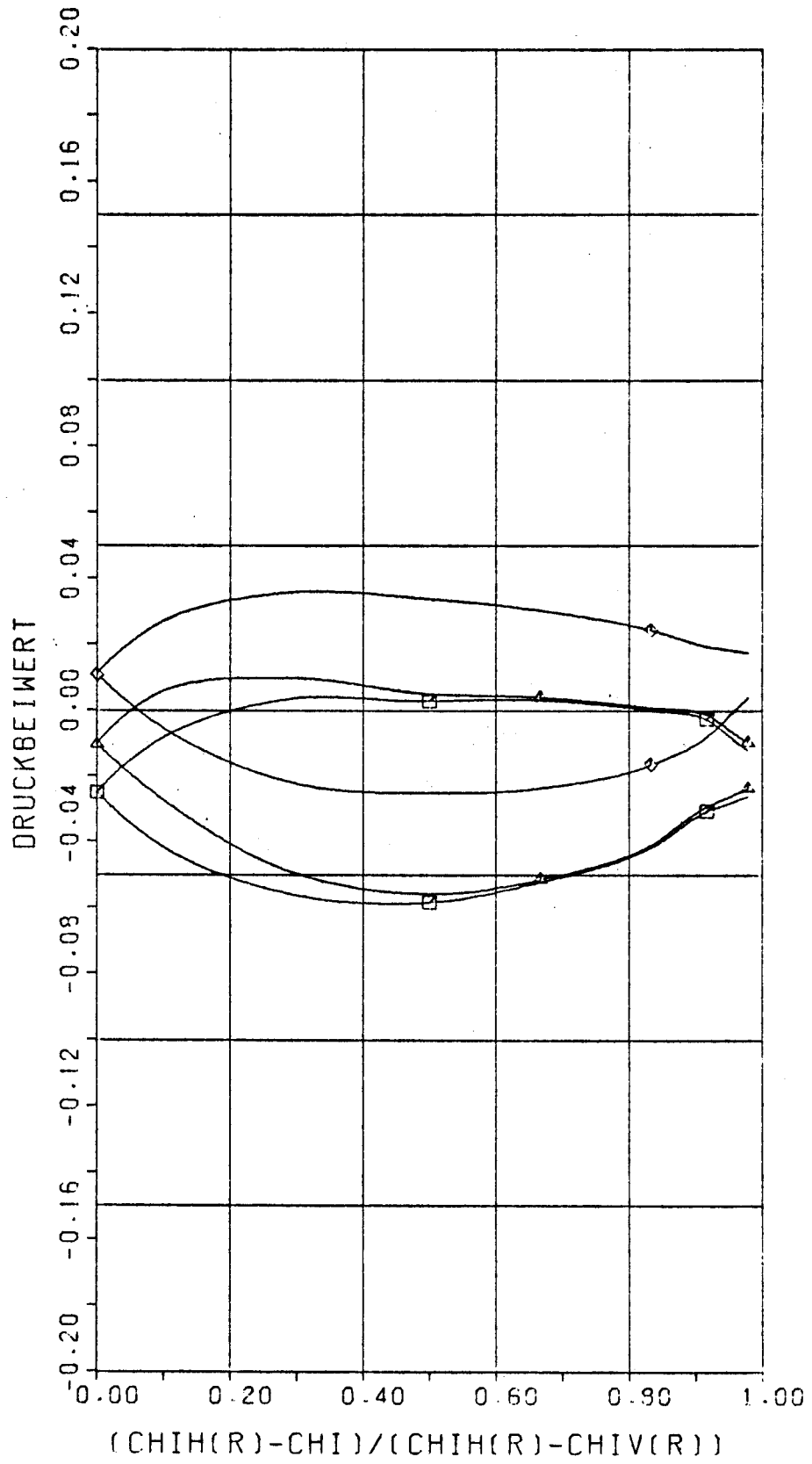
A66. 143



$$r = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4}{6} \pi$$

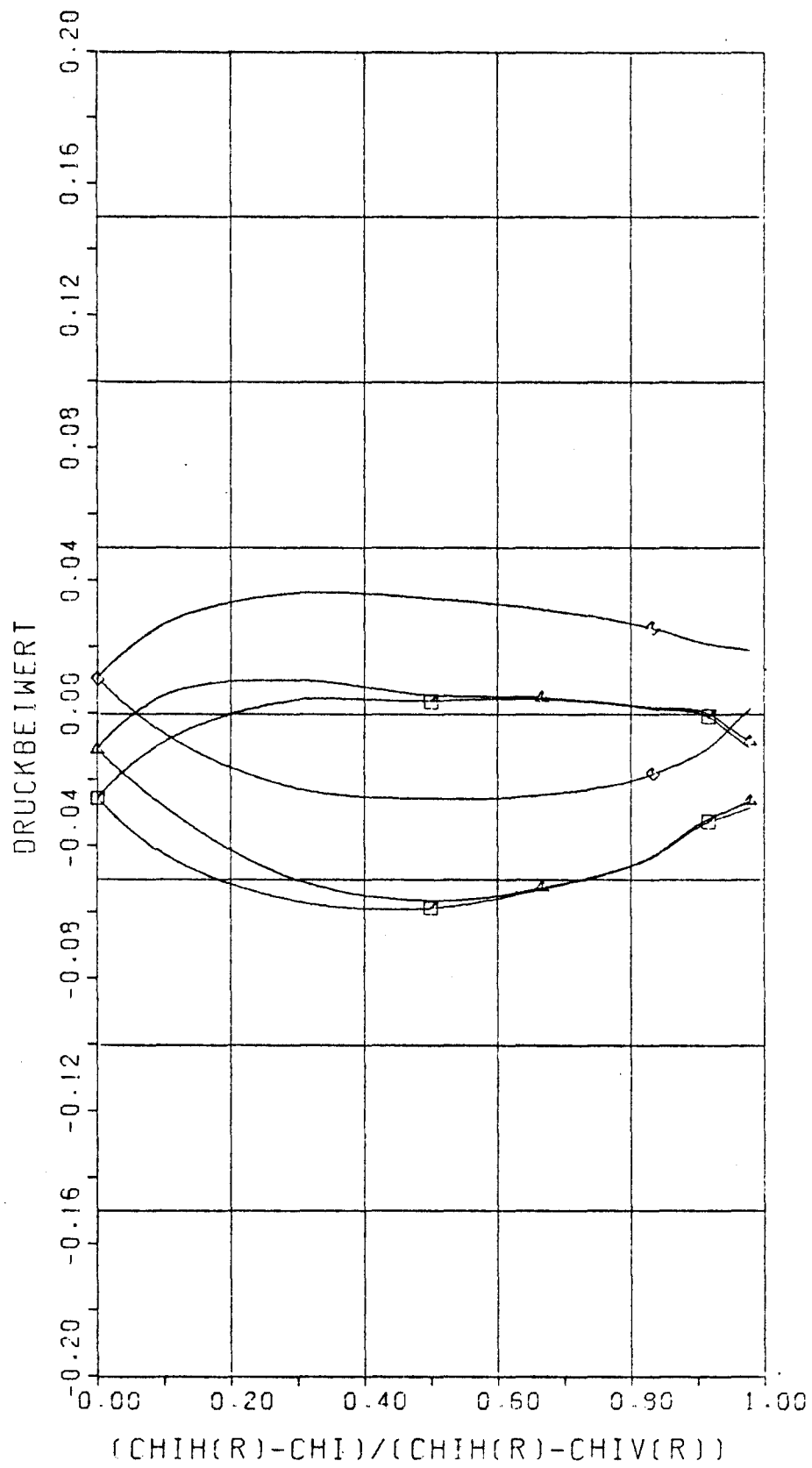
Abb. 144



$$\tau = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6} \pi$$

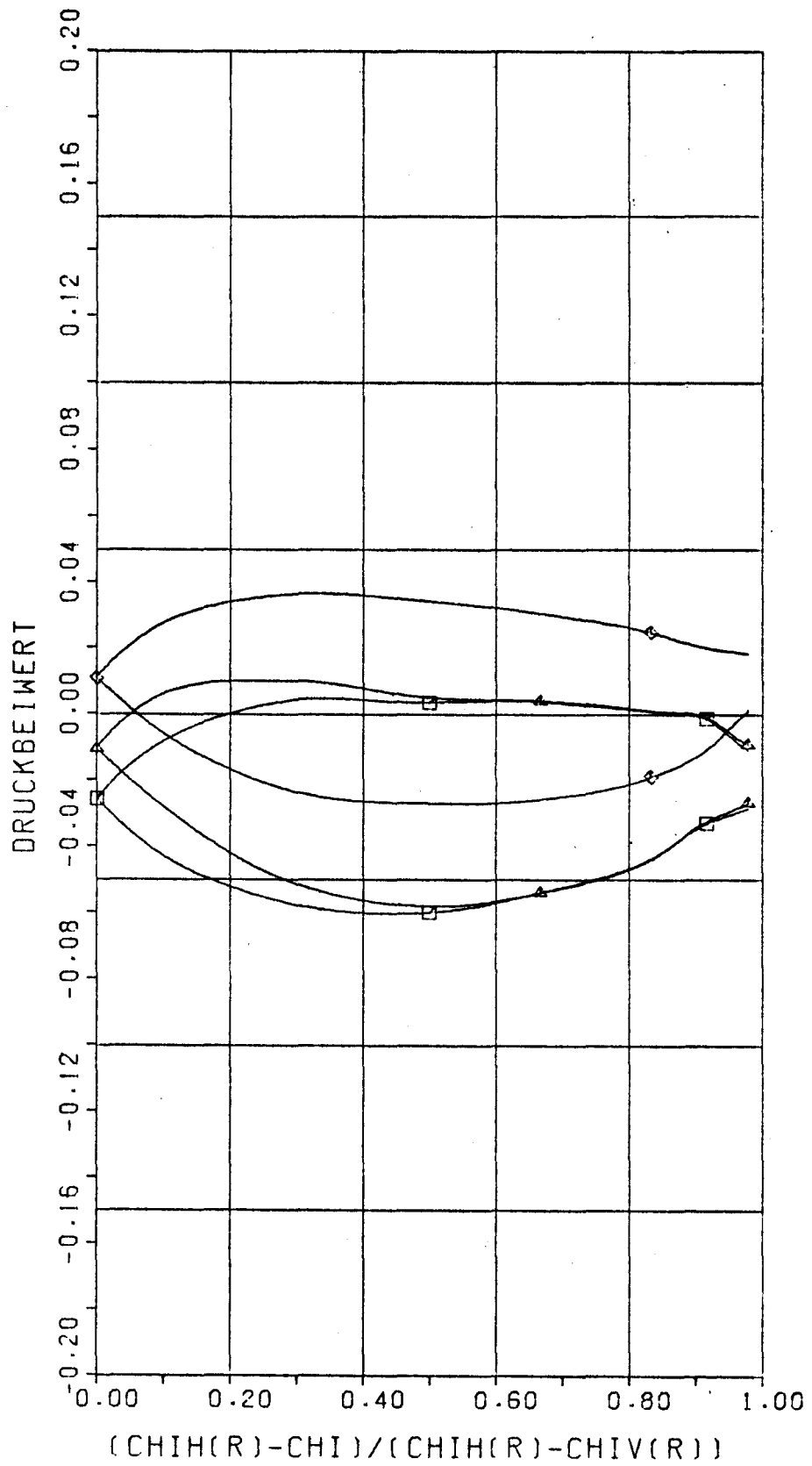
R66.145



$$r = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

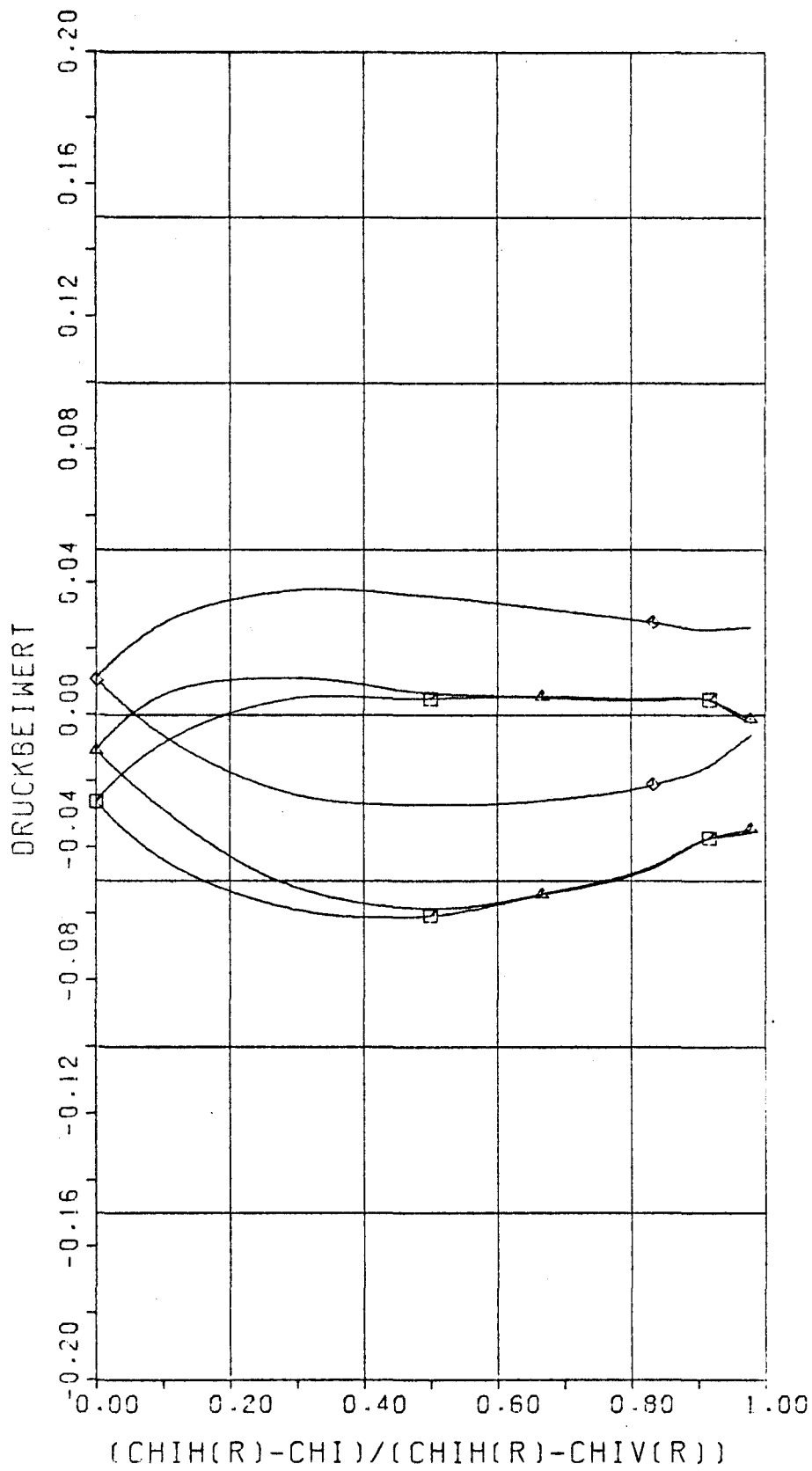
Abb. 146



$$r = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

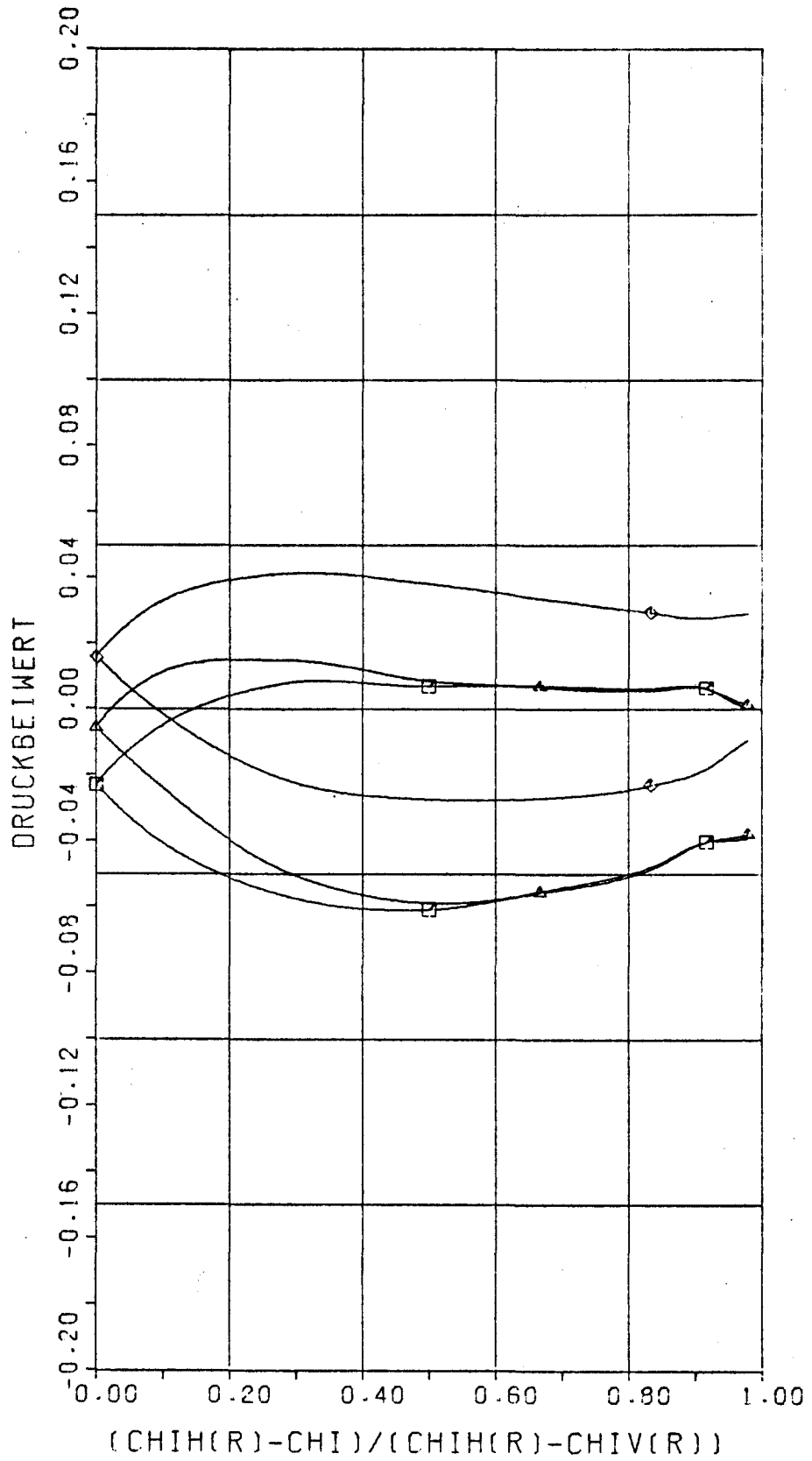
1766.147



$$\tau = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8\pi}{6}$$

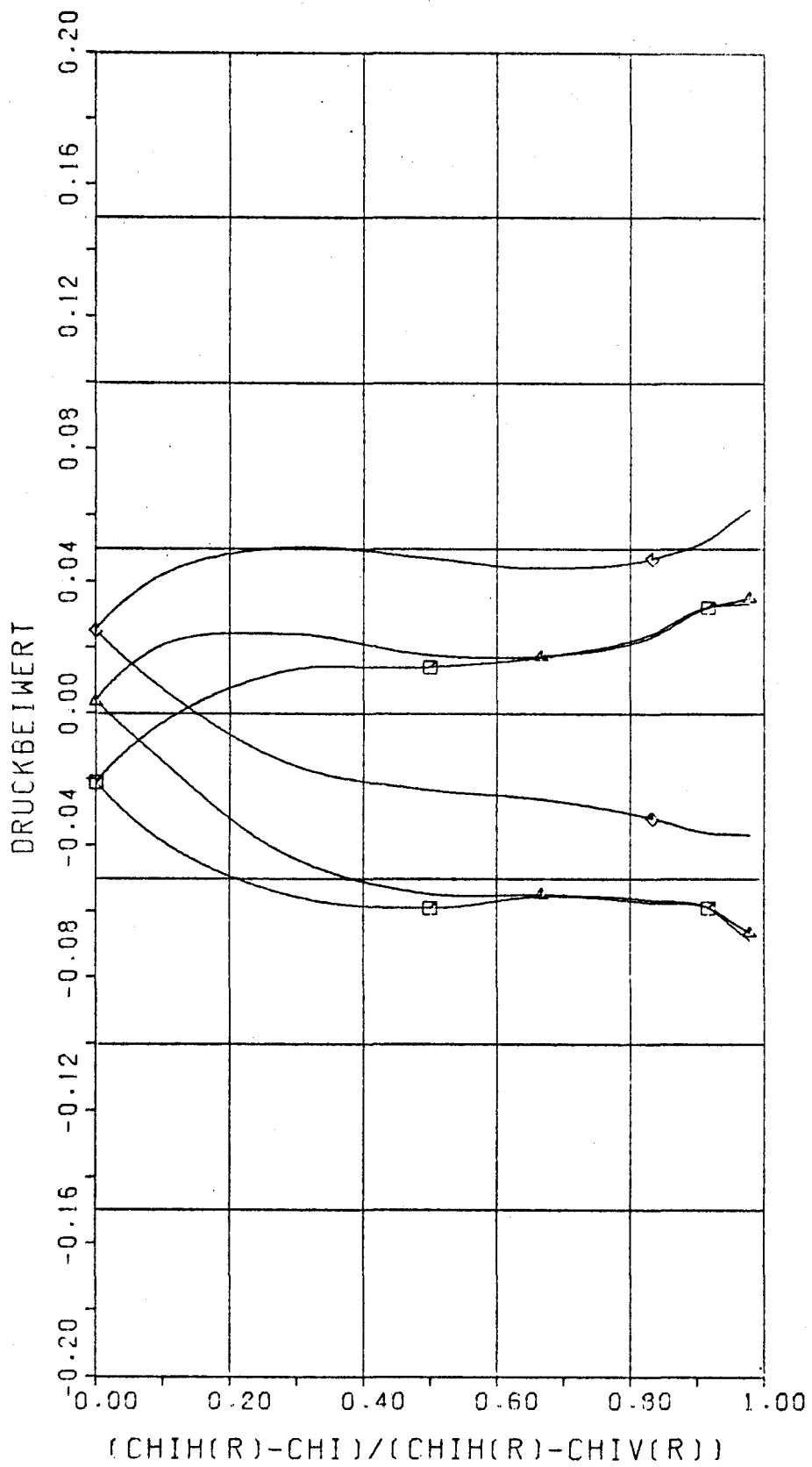
A66.148



$$r = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6} \pi$$

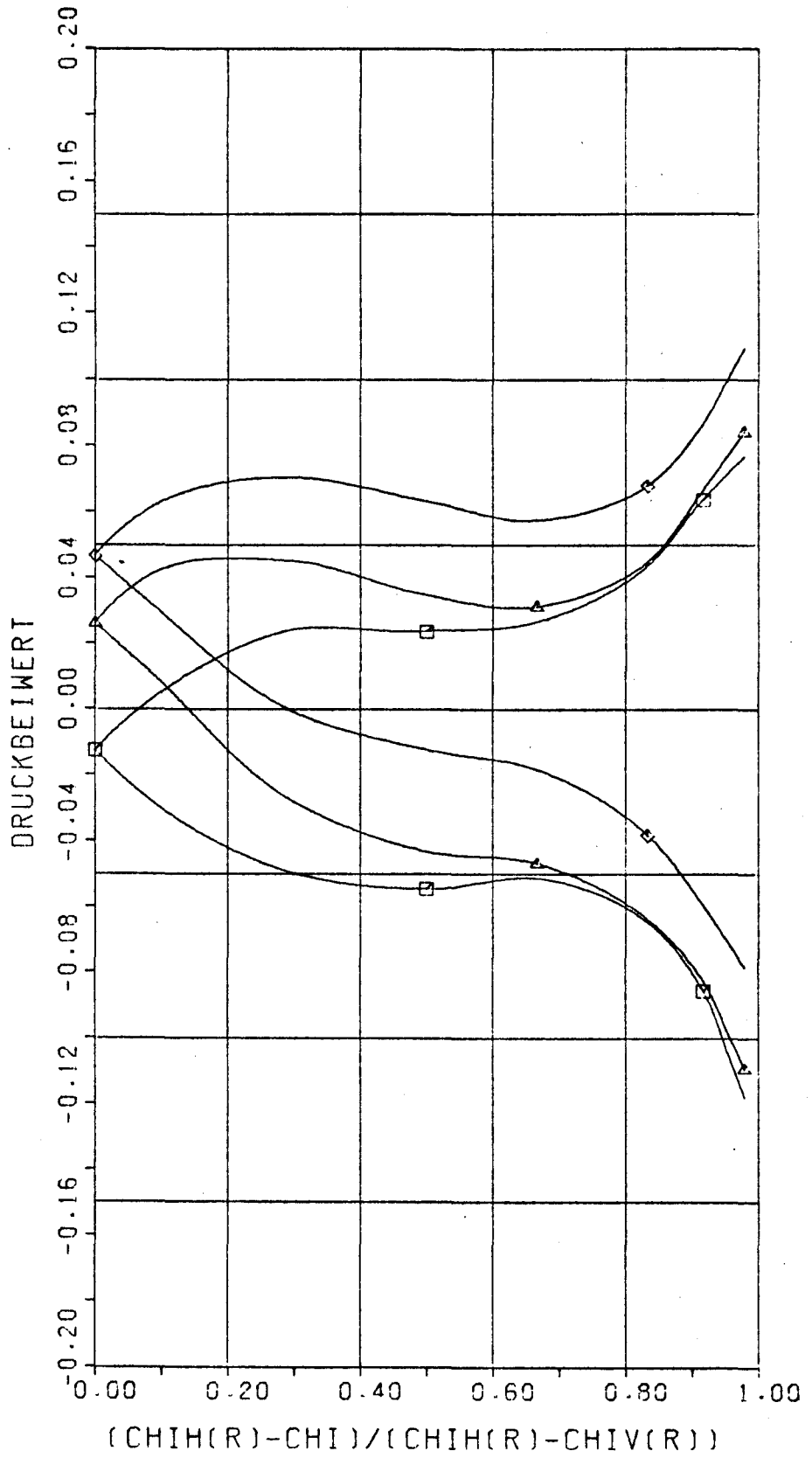
Abb. 149



$$\tau = 0.95 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

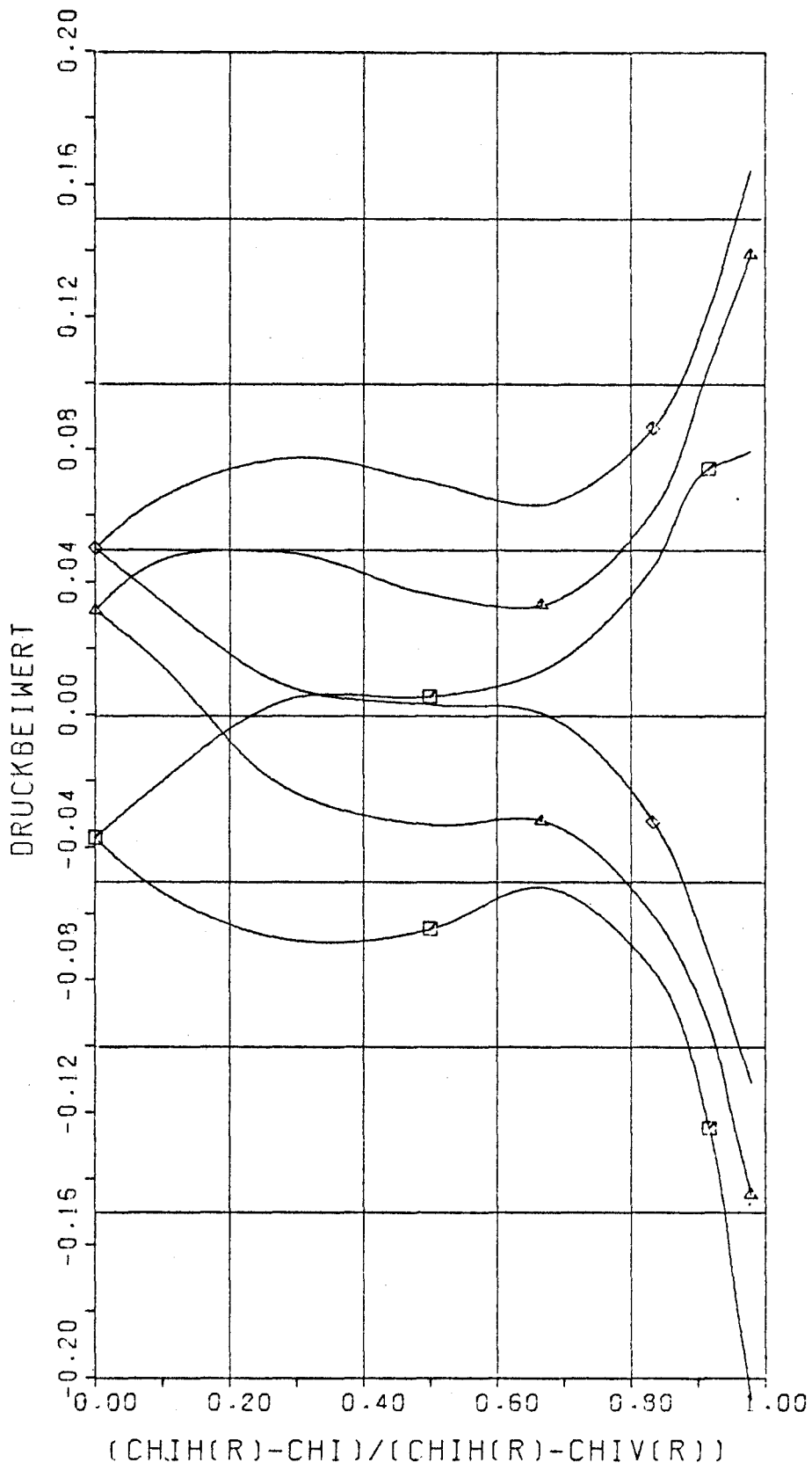
A66.150



$$r = 0.95R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

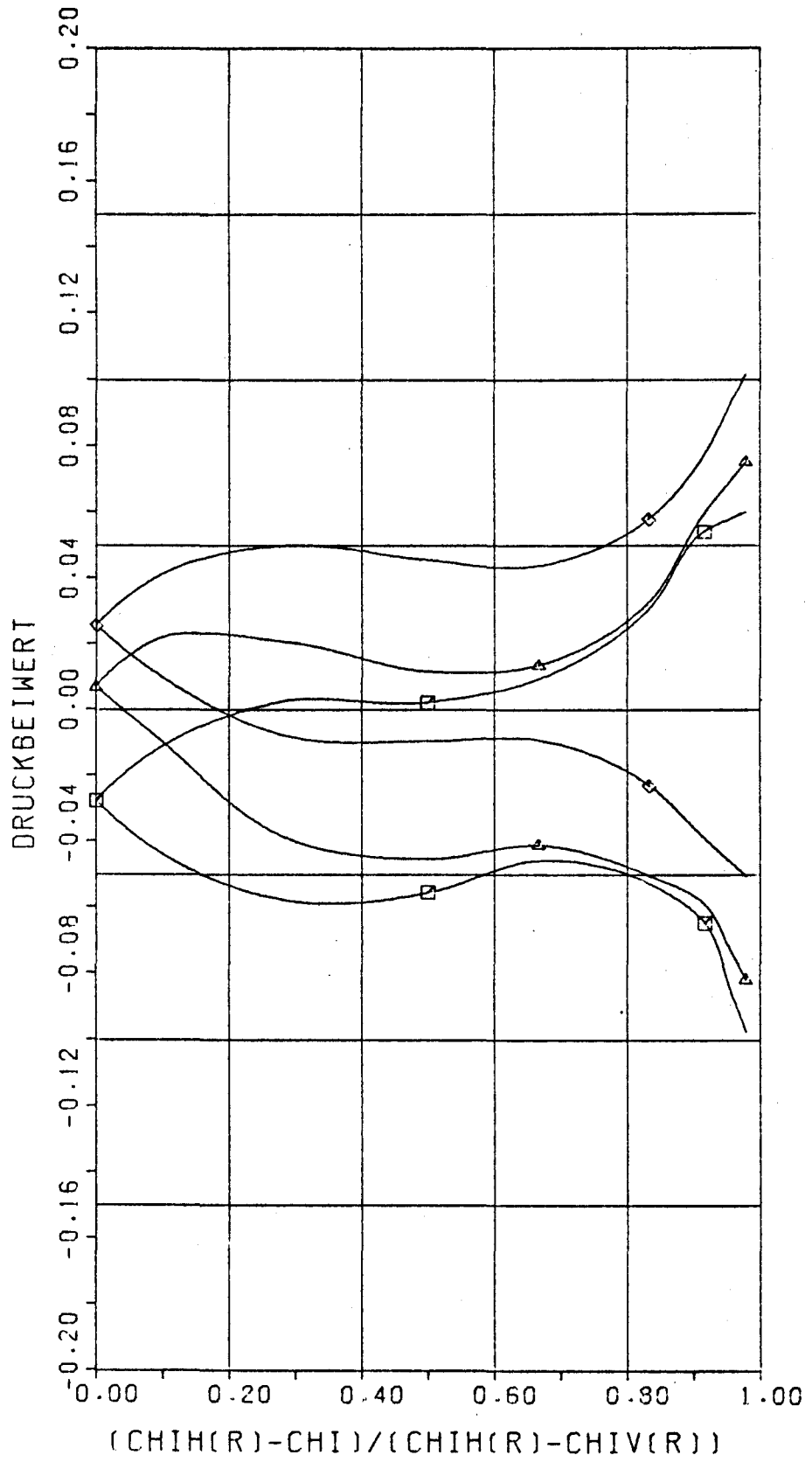
A66.151



$$r = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = 0$$

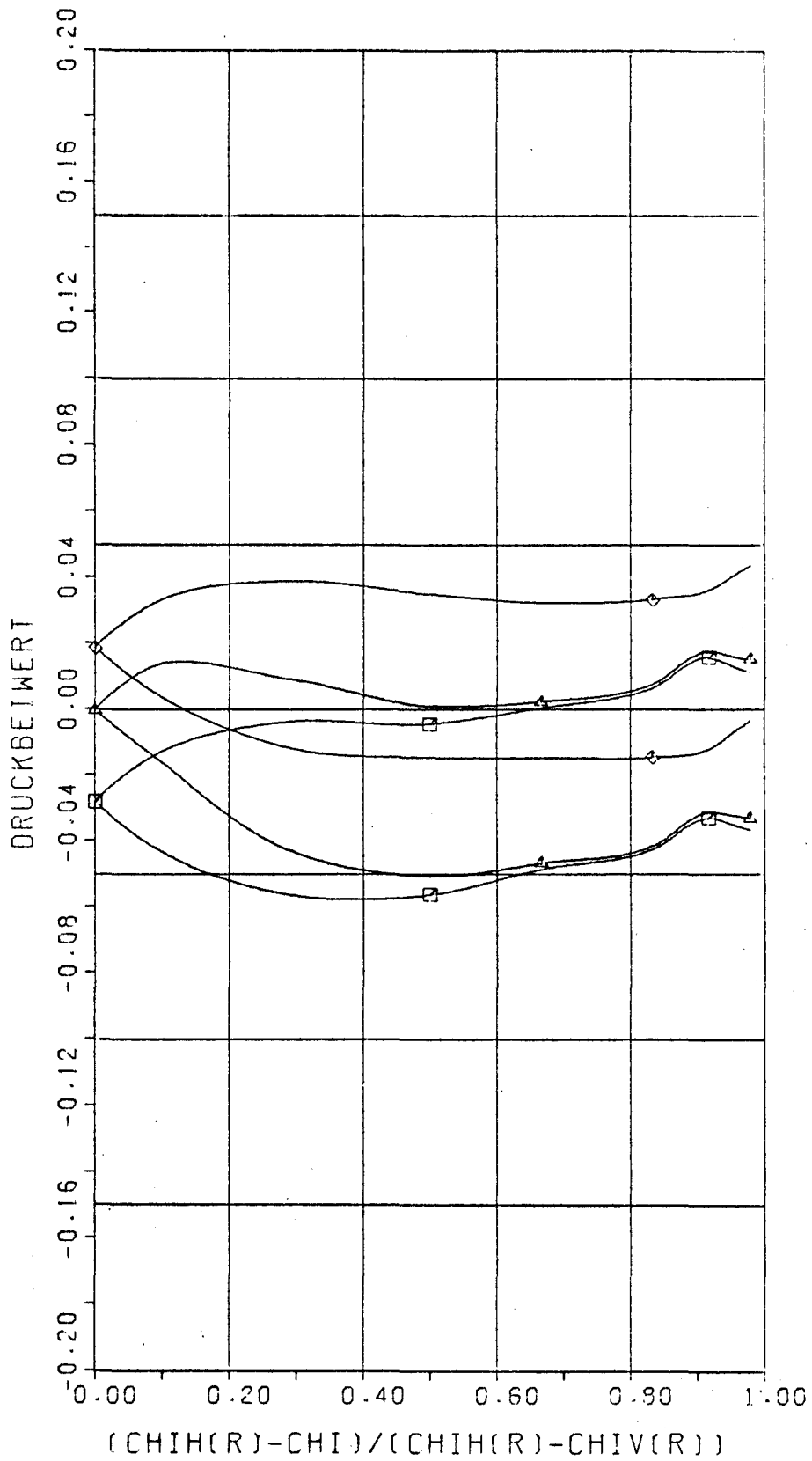
1766.152



$$\tau = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{6} \pi$$

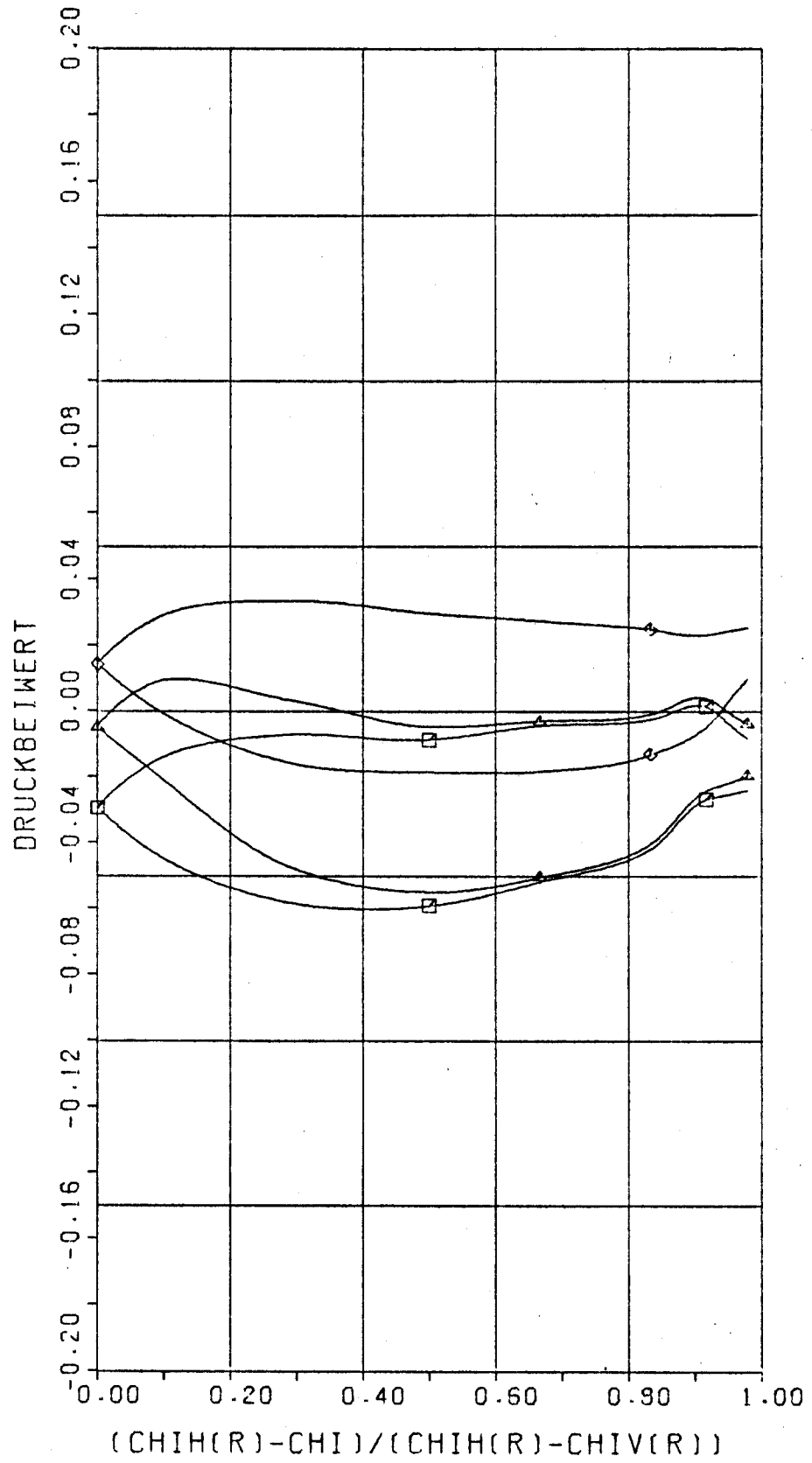
766.153



$$r = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3}\pi$$

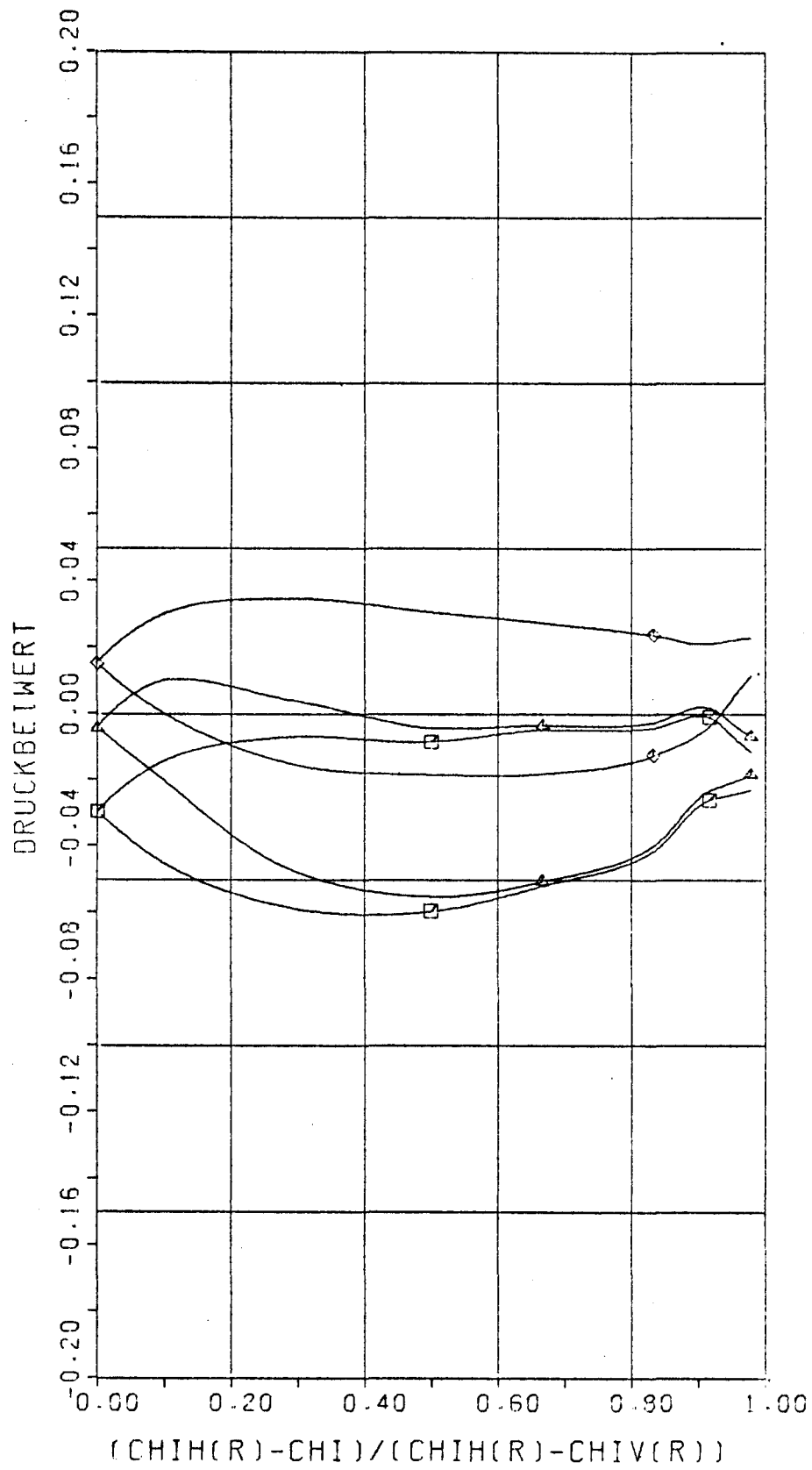
Abb. 154



$$r = 0.975R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$$

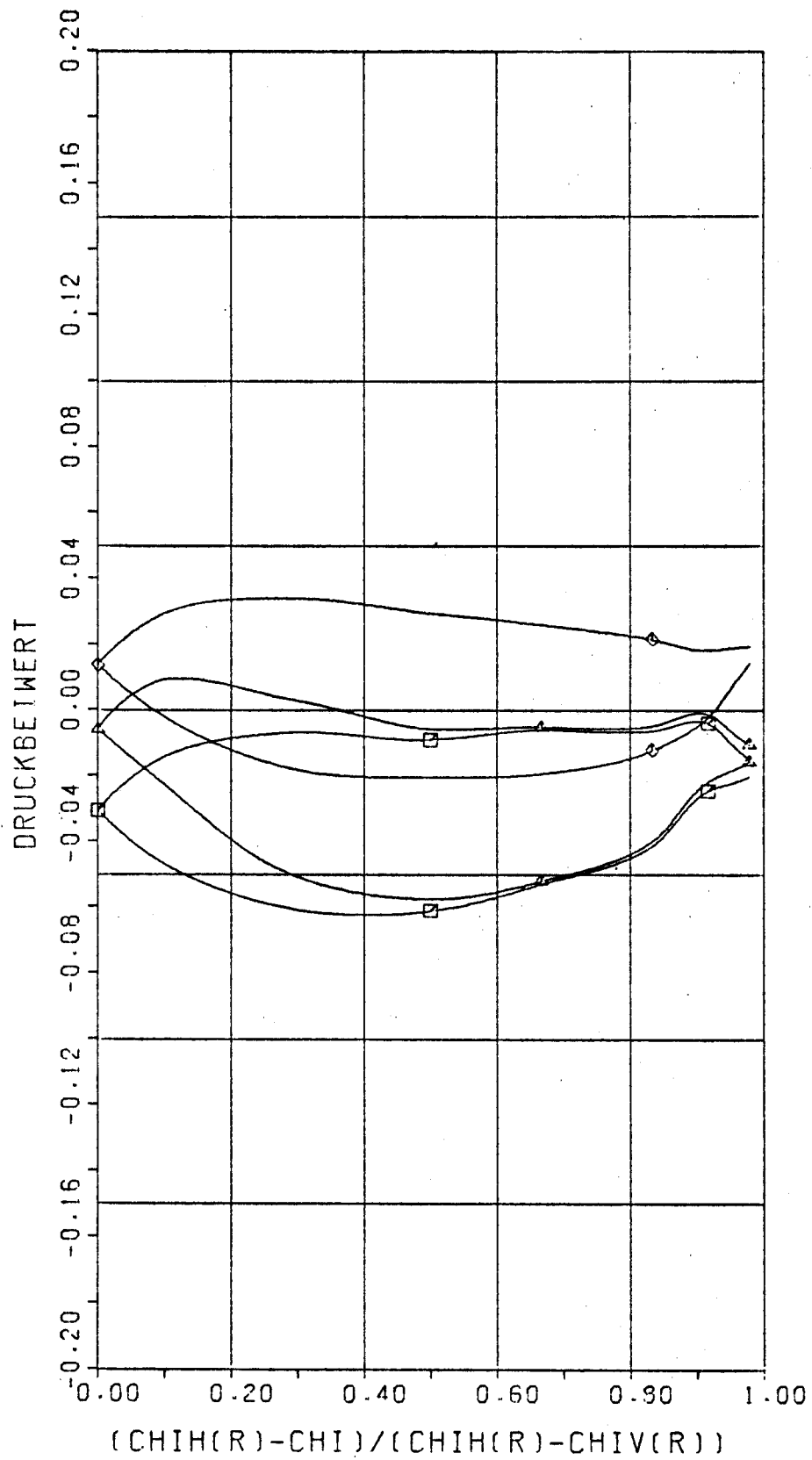
Abb. 155



$$\tau = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{4\pi}{6}$$

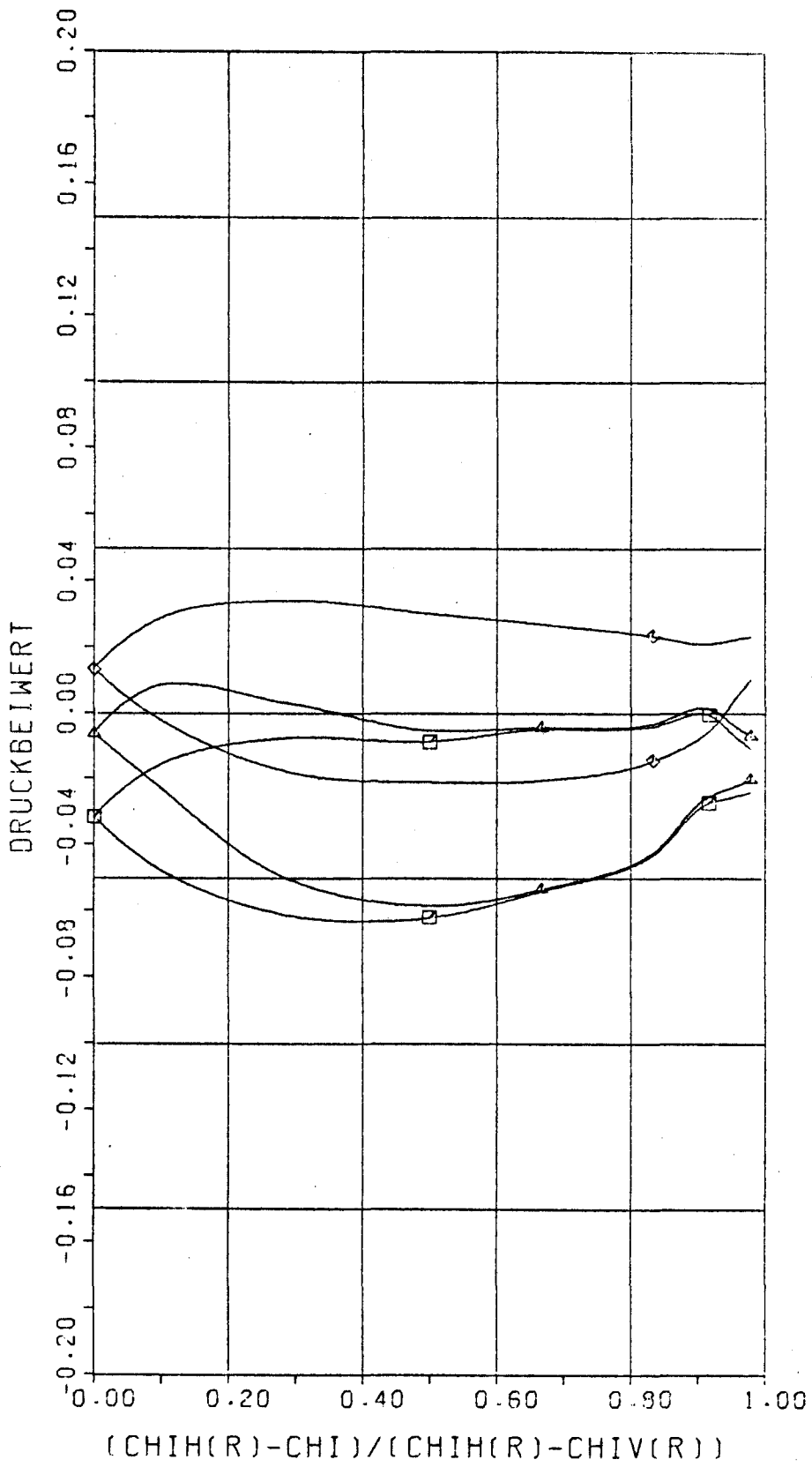
Abb. 156



$$r = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$$

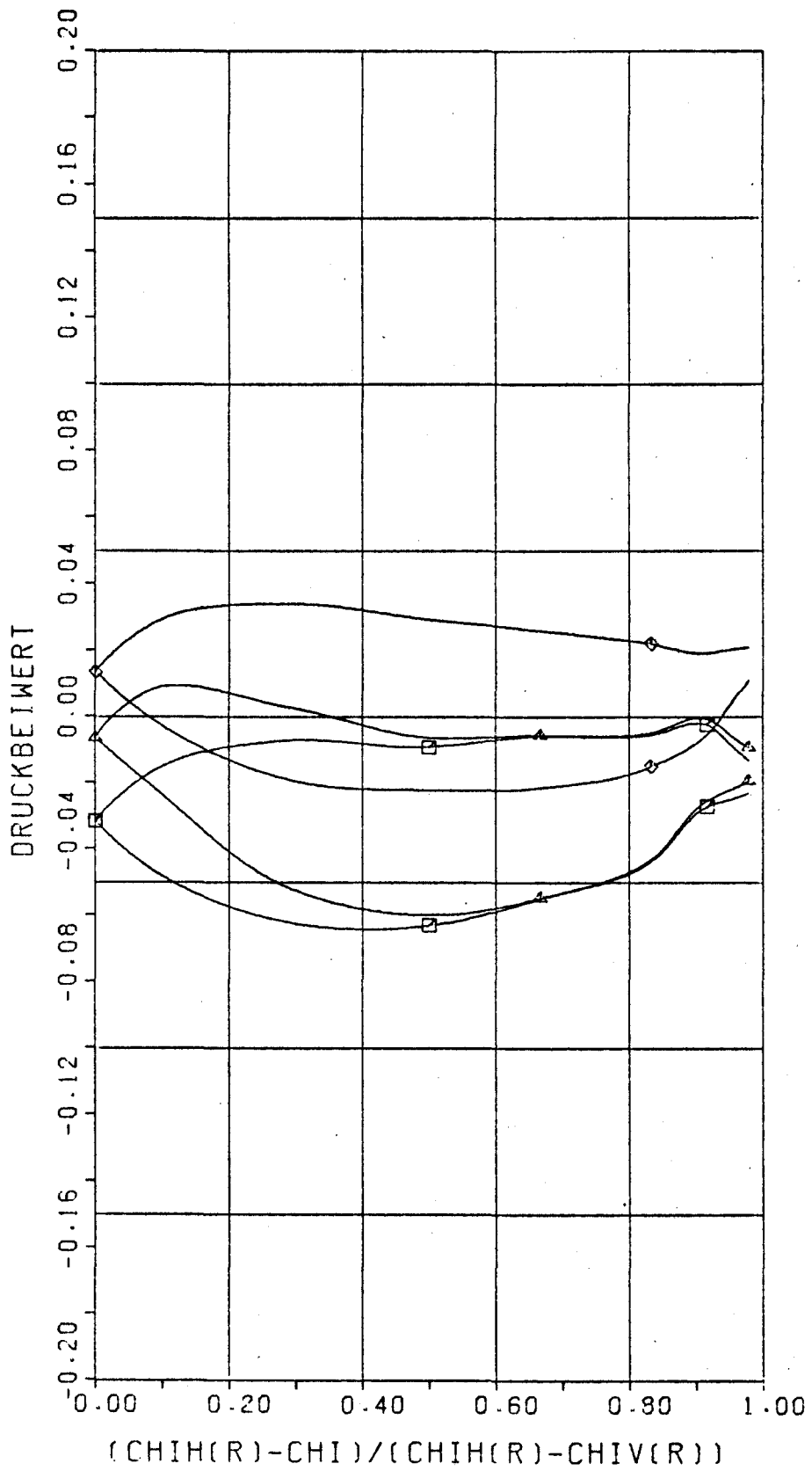
Abb. 157



$$r = 0.975R_0$$

$$\varphi_0 = \pi$$

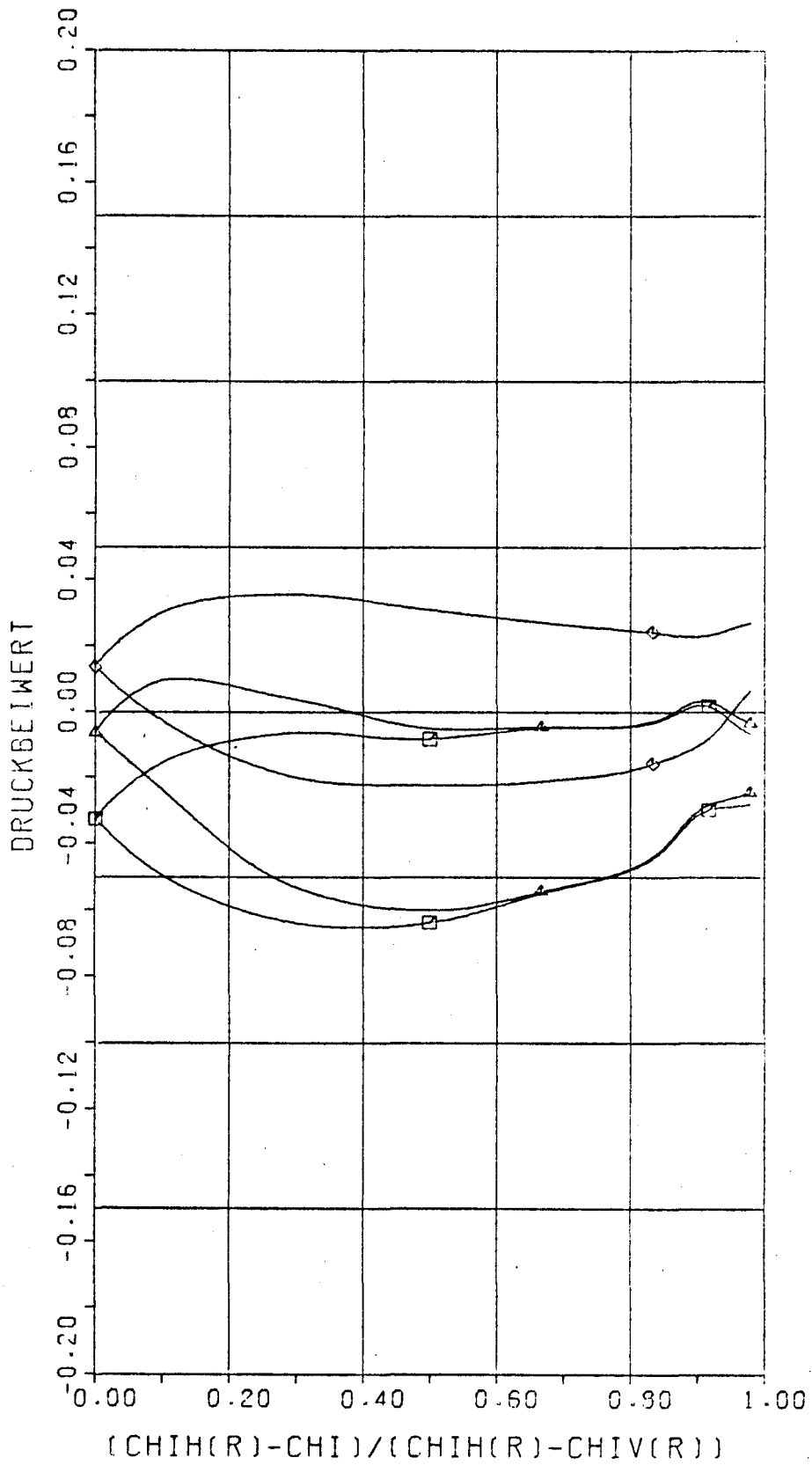
A66.158



$$\tau = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{7}{6} \pi$$

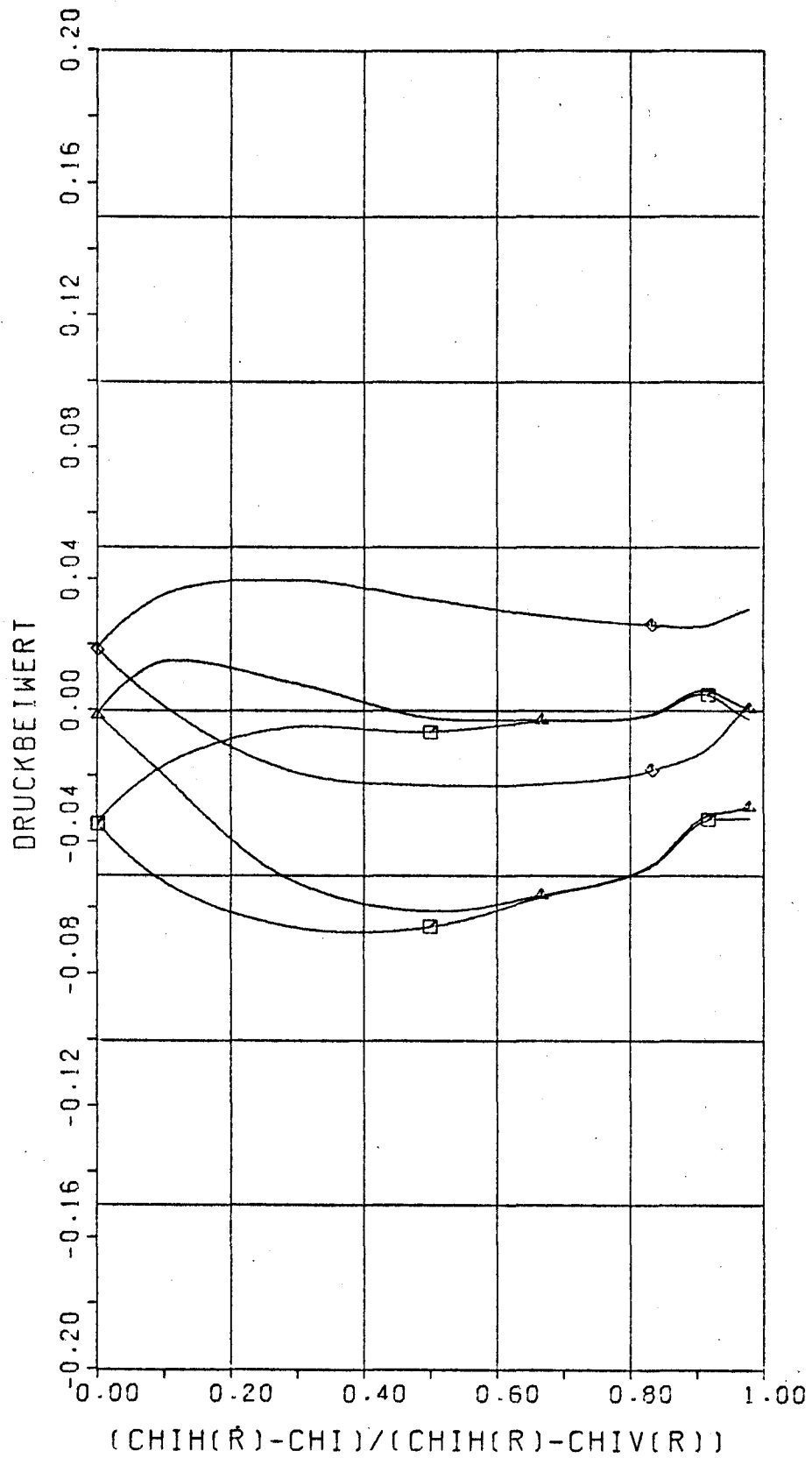
A66. 159



$$\tau = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{8\pi}{6}$$

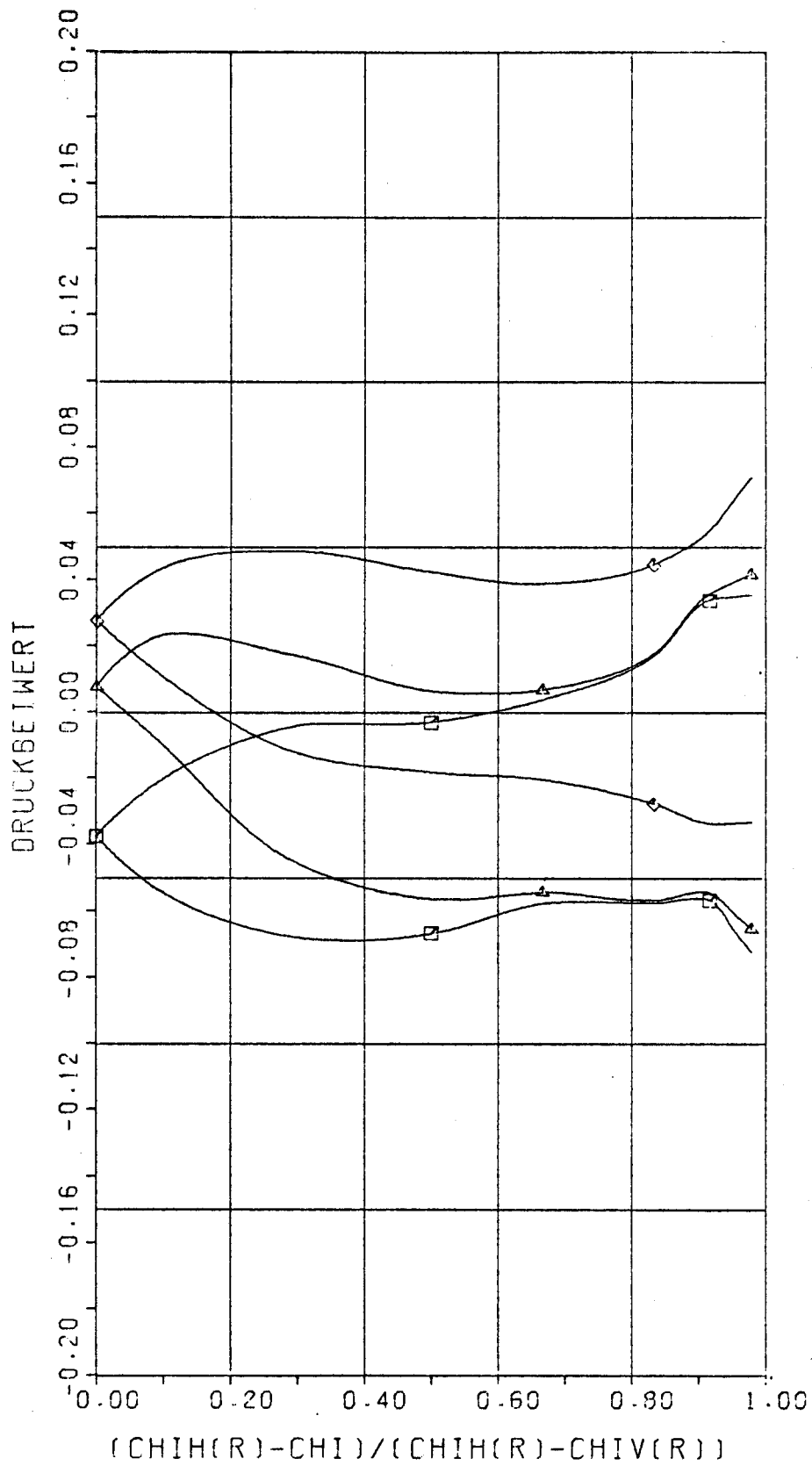
Abb. 160



$$r = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{9}{6}\pi$$

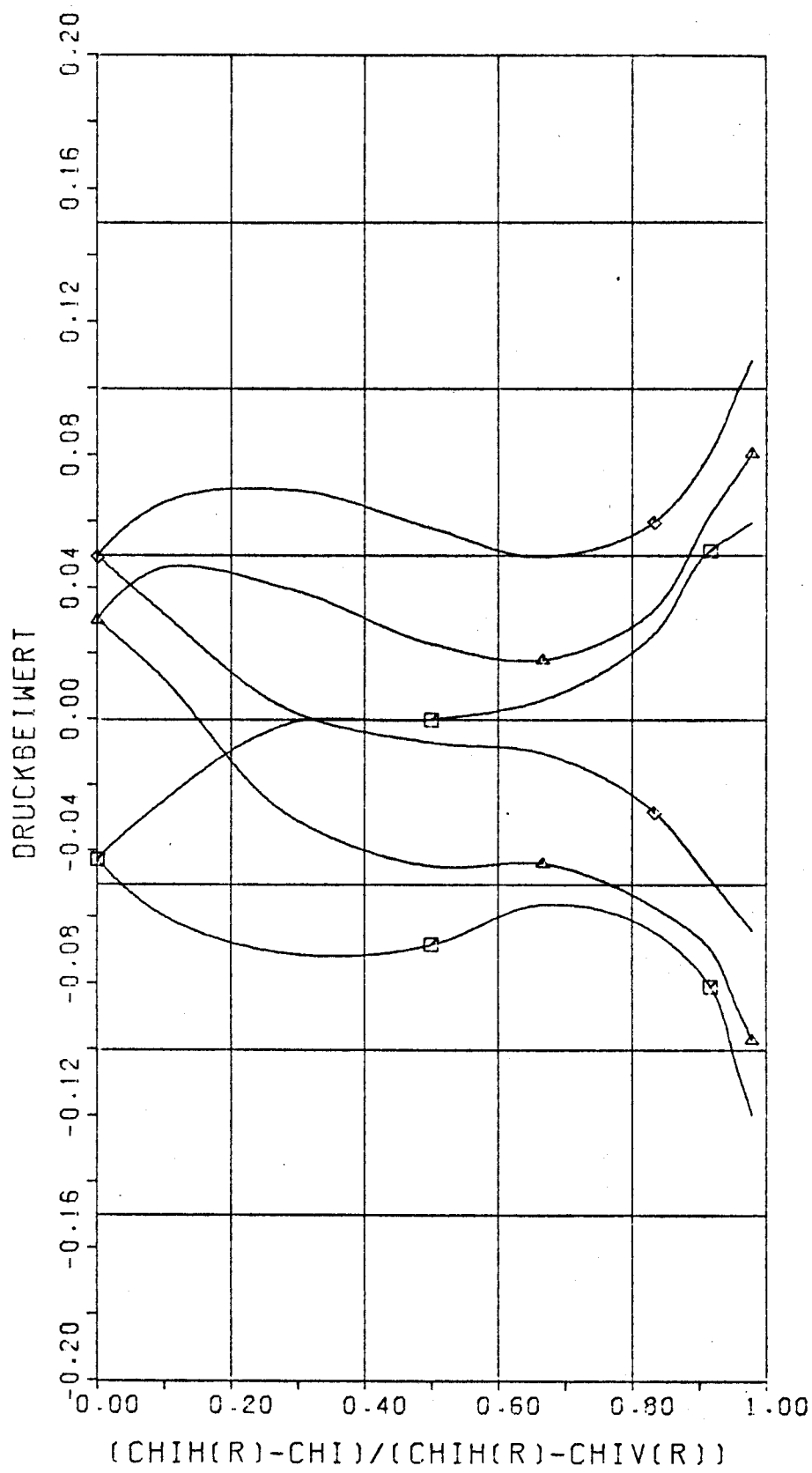
A66.161



$$\tau = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{10}{6} \pi$$

A66.162



$$\gamma = 0.975 R_0$$

$$\varphi_0 = \frac{11}{6} \pi$$

A66.163