

516 | März 1991

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Wolfgang Hermann Isay

**Eine Näherungslösung für das
Geschwindigkeits- und Druckfeld
eines Flügelspitzenwirbels in
turbulenter Strömung**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Eine Näherungslösung für das Geschwindigkeits- und Druckfeld eines Flügelspitzenwirbels in turbulenter Strömung

Wolfgang Hermann Isay, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1991

ISBN: 3-89220-516-7

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 516

Eine Näherungslösung für das Geschwindigkeits-
und Druckfeld eines Flügelspitzenwirbels in
turbulenter Strömung

von

Wolfgang Hermann Isay

März 1991

Zusammenfassung

Der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ist die Newmansche auf grenzschichtähnlichen Abschätzungen beruhende Lösung des Impulssatzes für das laminare Geschwindigkeits- und Druckfeld eines aufgerollten Tragflügel-Spitzenwirbels.

Es wird gezeigt, daß es durch eine an die Theorie turbulenter Grenzschichten angelehnte Modifikation des Ansatzes für den Kernradius möglich ist, eine Näherungslösung für das turbulente Strömungsfeld eines aufgerollten Spitzenwirbels zu erhalten. Dabei ergeben sich realistische Ausdrücke für die Reynolds-Spannungen. Unter Verwendung des dabei erhaltenen Minimaldrucks im Zentrum des Spitzenwirbels ist es möglich, den Beiwert des Kavitationseinsatzes σ_{vi} in Abhängigkeit von Auftriebsbeiwert und Reynolds-Zahl des Flügels voranzuberechnen. Ebenso gelingt es, für Kavitationsbeiwerte $\sigma_v < \sigma_{vi}$ eine Näherungsformel für den Radius des Dampfbereichs im Spitzenwirbel anzugeben.

Schließlich wird gezeigt, daß sich die Ergebnisse der Theorie auch auf Propellerspitzenwirbel übertragen lassen.

Der Vergleich der theoretischen Resultate mit Meßdaten, die sowohl bei Tragflügeln als auch bei Propellern gewonnen wurden, ergibt eine noch annehmbare Übereinstimmung.

1. Einleitung

Das Strömungsfeld im Bereich der sich durch den Druckausgleich am Rand von Tragflächen und Propellerflügeln ausbildenden Randwirbel oder Spitzenwirbel beansprucht seit vielen Jahren die Aufmerksamkeit der internationalen Forschung. Insbesondere bei Schiffspropellern führen die im Zentrum derartiger Wirbel auftretenden niedrigen Drücke zur Kavitation und damit zur Vibrationserregung der in der Nähe des Propellers befindlichen Bereiche der Schiffsstruktur sowie zur Geräuschabstrahlung durch die sich ausbildenden Druckwellen.

Das Strömungsfeld im Bereich der Spitzenwirbel von Propellern und Tragflügeln ist voll dreidimensional und in hohem Maße durch Viskositätseinflüsse, insbesondere auch durch Turbulenz und Strömungsablösung geprägt. Für eine sachgerechte Erfassung dieser Probleme müßten daher eigentlich die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Und für künftige Forschungsaktivitäten ist dies auch die vordringliche Zielsetzung. Wegen der Komplexität derartiger Navier-Stokes-Lösungen und des sehr hohen Rechenaufwandes sind aber immer noch einfache Näherungslösungen von Interesse, sofern diese eine der Realität entsprechende Beschreibung wenigstens von Teilaspekten des Spitzenwirbelproblems gestatten. Einem solchen Teilproblem ist die vorliegende Untersuchung gewidmet. Die dabei zugrunde liegende Vereinfachung ist, daß der komplizierte Entstehungs- und Aufrollvorgang des Spitzenwirbels bereits als abgeschlossen betrachtet wird. Unter Vernachlässigung des gegenüber liegenden Spitzenwirbels der Tragfläche kann dann von einem rotationssymmetrischen Strömungsproblem ausgegangen werden. Bei der Übertragung der Resultate auf Propellerflügel wird entsprechend der Einfluß der Nachbarflügel vernachlässigt. Wegen des als groß im Vergleich zum Spitzenwirbeldurchmesser angenommenen Propellerradius wird auch die Krümmung der schraubenlinienförmigen freien Wirbel nicht berücksichtigt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit geben wir eine Näherungslösung für das Geschwindigkeits- und Druckfeld eines aufgerollten Flügel-Spitzenwirbels in turbulenter Strömung an. Damit ist es möglich, auf der Reynolds-Zahl beruhende Maßstabeffekte hinsichtlich des Minimaldruckes und auch des Kavitationseinsatzes im Kern des Spitzenwirbels zu behandeln. Schließlich soll eine Formel für den Radius des Dampfbereichs im kavitierenden Spitzenwirbel in Abhängigkeit vom Kavitationsbeiwert abgeleitet und mit experimentellen Daten korreliert werden.

2. Das laminare Strömungsfeld eines aufgerollten rotationssymmetrischen Spitzenwirbels

Wir gehen aus von einer in dieser Form von Newman /1/ für laminare Strömung angegebenen Lösung des Impulssatzes (Navier–Stokes–Gleichung) in Zylinderkoordinaten unter der Voraussetzung vollständiger Rotationssymmetrie. Die x–Achse des Koordinatensystems falle mit der Wirbelachse zusammen. (vgl. Abb. 1) und der Geschwindigkeitsvektor werde der Form

$$(1) \quad \mathbf{V} = (U_o + U_\star) \mathbf{e}_x + V \mathbf{e}_\varphi + W \mathbf{e}_r$$

angesetzt, zerlegt in Axial–, Umfangs– und Radialkomponente.

Mit Hilfe von in Analogie zur Grenzschichttheorie entwickelten Abschätzungen (U_o ist die Zuströmgeschwindigkeit zum Tragflügel)

$$(2) \quad U_o \sim 1, U_\star \sim \varepsilon, V \sim \varepsilon, W \sim \varepsilon^2, x \sim 1, r \sim \varepsilon, \nu \sim \varepsilon^2$$

für den Innenbereich des Spitzenwirbels lautet die von Newman /1/ erhaltene Lösung des Impulssatzes und der Kontinuitätsgleichung (Inkompressible Strömung)

$$(3) \quad V(x, r) = \frac{\Gamma_o}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/r_k^2}); U_\star(x, r) = -\frac{D_o}{x} e^{-r^2/r_k^2}; W(x, r) = -\frac{D_o r^{-r^2/r_k^2}}{2x^2}.$$

Dabei ist Γ_o der Maximalwert der Flügelzirkulation (etwa in der Mitte der Spannweite angenommen) und D_o eine Konstante, die mit dem Widerstand des Flügels zusammenhängt. ν ist die kinematische Zähigkeit.

Mit

$$(4) \quad r_k = 2x \sqrt{\frac{\nu}{U_o x}}$$

wird der sogenannte Kernradius des Innenbereichs des Spitzenwirbels bezeichnet; dies bedeutet, für $r < r_k$ hat V überwiegend die Form $V \sim r$ (Starrkörper), und für $r > r_k$ liegt annähernd die Form $V \sim 1/r$ vor (Potentialwirbel). Ein solches Feld ist auch als Rankinewirbel bekannt. Das Druckfeld ergibt sich durch Integration der radialen Impulsgleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V^2}{r},$$

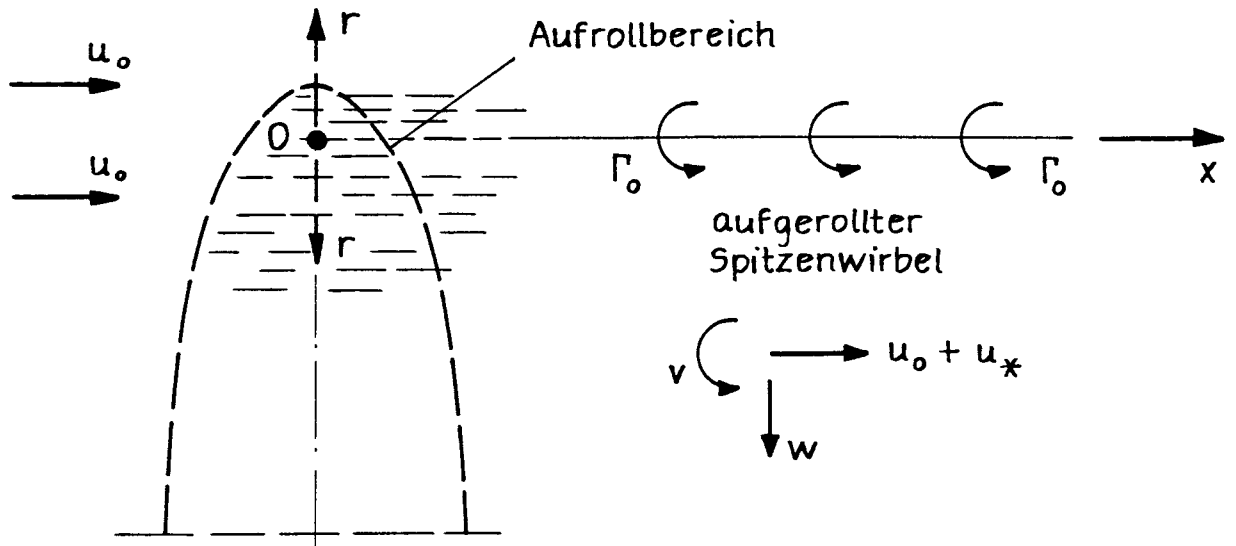


Abb. 1 : Geschwindigkeiten und Koordinaten am Tragflügelspitzenwirbel

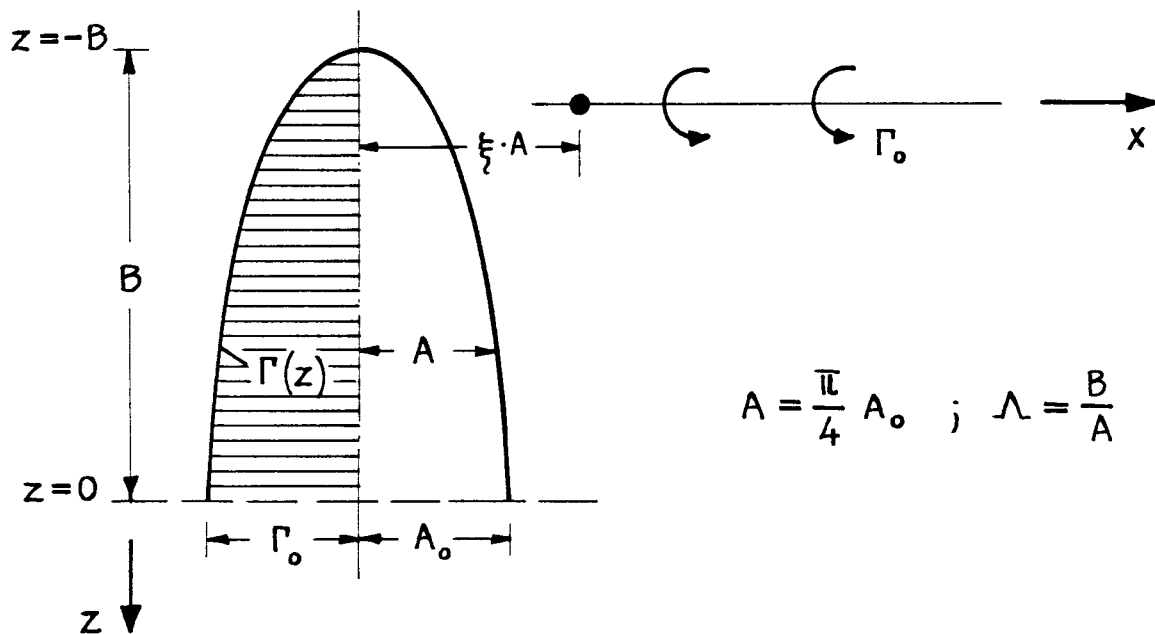


Abb. 2 : Grundriß und Koordinaten am Halb- Tragflügel.
Zirkulationsverteilung $\Gamma(z)$.

und zwar mit E_i als der Integralexponentiellen der Druckbeiwert

$$\begin{aligned}
 c_p(x, r) &= \frac{p_o - p(x, r)}{\rho/2 \cdot U_o^2} = \\
 (5) \quad &= \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi U_o r_k} \right)^2 \left[\left(\frac{r_k}{r} \right)^2 \left(1 - e^{-r^2/r_k^2} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2E_i \left(-r^2/r_k^2 \right) + 2E_i \left(-2r^2/r_k^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Aus Formel (5) folgt

$$(6) \quad c_{p_{\min}} = \frac{p_o - p(x, o)}{\rho/2 \cdot U_o^2} = \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi U_o A} \right)^2 \frac{A \ln 2}{4x} \left(\frac{2AU_o}{r} \right).$$

Für eine zusammenfassende Herleitung der Formel (3) bis (6) mit graphischen Darstellungen der Funktionsverläufe wird auf /2/ Kapitel 23 verwiesen.

Das durch die Formeln (3) und (6) beschriebene Feld gilt für laminare Strömung. So ergibt sich aus Gl. (6) für eine Stelle $x = \xi A$ ($\xi > 1,5$) (vgl. Abb. 2) hinter dem Flügel die Abhängigkeit

$$(7) \quad c_{p_{\min}} \sim \Re_e, \quad \Re_e = \frac{2AU_o}{\nu}$$

von der Reynolds-Zahl $2AU_o/\nu$ des Flügels. Dabei ist $2A$ die mittlere Flügeltiefe. (Abb. 2).

Wie bereits von Mc Cormick /3/,/4/ sowie Billet und Holl /5/ und auch später in weiteren Experimenten /6/ festgestellt wurde, wird der durch Formel (6),(7) beschriebene Zusammenhang zwischen $c_{p_{\min}}$ und $\Re_e = \frac{2AU_o}{\nu}$ schon unter Modellversuchsbedingungen nicht bestätigt. Im Bereich

$$(8) \quad 4 \cdot 10^5 \leq \Re_e \leq 5 \cdot 10^6$$

gilt vielmehr

$$(9) \quad c_{p_{\min}} \sim (\Re_e)^{2n}$$

mit $0,18 < n < 0,21$.

Zur Aufklärung dieser Diskrepanz wurde bereits von Mc Cormick /3/ auf die Tatsache verwiesen, daß Gl.(6) unter der Voraussetzung laminarer Strömung abgeleitet wurde während im $\Re_e$ -Bereich (8) turbulente Strömung vorliegt.

Nun ist zu bedenken, daß die in Formel (4) zum Ausdruck kommende Abhängigkeit

$$(10) \quad r_k/x \sim 1/\sqrt{\Re_e}$$

typisch ist für laminare Grenzschichtparameter wie etwa Grenzschichtdicke δ , Verdrängungsdicke δ^* , Impulsverlustdicke Θ . Einen solchen Zusammenhang herzustellen liegt nahe, wenn man bedenkt, daß der viskose Innenbereich des Flügelspitzenwirbels aus der Flügelschicht aufgebaut wird.

Andererseits ist beispielsweise für die turbulente Plattengrenzschicht im $\Re_e$ -Bereich (8) eine Abhängigkeit der Form

$$\delta/x, \Theta/x \sim (\Re_e)^{-0,2}$$

bekannt. Ein analoger Ansatz für r_k , nämlich

$$(11) \quad r_k/x \sim (\Re_e)^{-0,2}$$

anstelle von (10) würde recht gut den erwänten Meßdaten (9) entsprechen. Im folgenden wollen wir daher die Idee von Mc Cormick zu einem einfachen Modell für die turbulente Spitzenwirbel-Strömung ausbauen.

3. Der Spitzenwirbel in turbulenter Strömung

Bei turbulenter Strömung treten in den zeitlich gemittelten Impulsgleichungen gegenüber dem laminaren Zustand zusätzlich die sogenannten Reynolds-Spannungen auf. Eine vollständige Formulierung des Impulssatzes für den aufgerollten Spitzenwirbel in turbulenter Strömung wurde von Phillips /7/,/8/ angegeben. Später hat Heckel /9/ diese Impulsgleichungen dadurch vereinfacht, daß er im Sinne der Grenzschichttheorie bei den Reynolds-Spannungen nur die Anteile $\sim \partial/\partial r$ berücksichtigte, während die Terme mit Ableitungen in Axial- und Umfangsrichtung weggelassen wurden. Schreibt man wie bei turbulenter Strömung üblich den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{V}$ anstelle von (1) in der Form

$$(12) \quad u = U_o + \bar{U}_* + U'; V = \bar{V} + V'; W = \bar{W} + W',$$

so nehmen nach Phillips und Heckel die axiale und die radiale Impulsgleichung die Form an:

$$(13) \quad U_o \frac{\partial \bar{U}_*}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}_*}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{U}' \bar{W}').$$

$$(14) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\bar{V}^2}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \bar{W'^2} + \frac{1}{r} (\bar{V'^2} - \bar{W'^2}).$$

Die Umfangskomponente des Impulssatzes ergibt sich in der Gestalt

$$(15) \quad U_o \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - \frac{\bar{V}}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{V}' \bar{W}').$$

Schließlich ist noch die Kontinuitätsgleichung in der Form zu berücksichtigen

$$(16) \quad \frac{\partial \bar{U}_*}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{W}) = 0.$$

Nach Untersuchungen von Phillips /7/ gibt Formel (3) den Verlauf der gemittelten Umfangsgeschwindigkeit $\bar{V}$ auch bei turbulenter Strömung prinzipiell zufriedenstellend wieder. Daher machen wir den Ansatz

$$(17) \quad \bar{V}(x, r) = \frac{\Gamma_o}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/r_k^2(x)} \right)$$

mit einem gemäß (11) verallgemeinerten Kernradius

$$(18) \quad r_k(x) = Cx \left(\frac{\nu}{U_o x} \right)^n.$$

Dabei ist C eine Konstante.

Die Lösung für die gemittelte axiale Zusatzgeschwindigkeit $\bar{U}_*$ setzen wir in der gegenüber der laminaren Lösung (3) verallgemeinerten Form

$$(19) \quad \bar{U}_*(x, r) = -U_o f(x) e^{-r^2/r_k^2(x)}$$

an mit einer noch unbekannten Funktion $f(x)$.

Die gemittelte Radialkomponente $\bar{W}$ ergibt sich dann durch die geschlossen durchgeführte Integration der Kontinuitätsgleichung (16) zwischen $r = 0$ und r . Das Resultat ist

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{W}(x, r) = U_o \left[f(x) \frac{dr_k}{dx} + \frac{1}{2} r_k \cdot \frac{df}{dx} \right] \frac{r_k}{r} (1 - e^{-r^2/r_k^2}) - \\ - U_o f(x) \frac{dr_k}{dx} \frac{r}{r_k} e^{-r^2/r_k^2(x)}. \end{aligned}$$

Wie es sein muß, verschwindet $\bar{W}$ bei $r = 0$ im Zentrum des Wirbels.

Für den radialen Verlauf ist insbesondere die Funktion

$$(21) \quad H_1 \left(\frac{r}{r_k} \right) = \frac{r_k}{r} (1 - e^{-r^2/r_k^2})$$

verantwortlich, die in Abb. 3 dargestellt ist.

Wir zeigen nun, daß das Geschwindigkeitsfeld (17), (19) und (20) eine realistische Näherungslösung für die turbulente Strömung des aufgerollten Spitzenwirbels darstellt. Durch Einsetzen der Geschwindigkeiten $\bar{V}$ und $\bar{U}_*$ in die zugehörigen Impulsgleichungen (15) und (13) ergeben sich nämlich realistische Ausdrücke für die auftretenden Reynoldsspannungen. Aus Gl.(15) folgt mit (17)

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \bar{V}' \bar{W}') = \frac{U_o \Gamma_o}{\pi} \frac{r^3}{r_k^3} \left(\frac{dr_k}{dx} - \frac{2\nu}{U_o r_k} \right) e^{-r^2/r_k^2},$$

und hieraus durch elementare Integration von $r = 0$ bis r die gesuchte Reynoldsspannung:

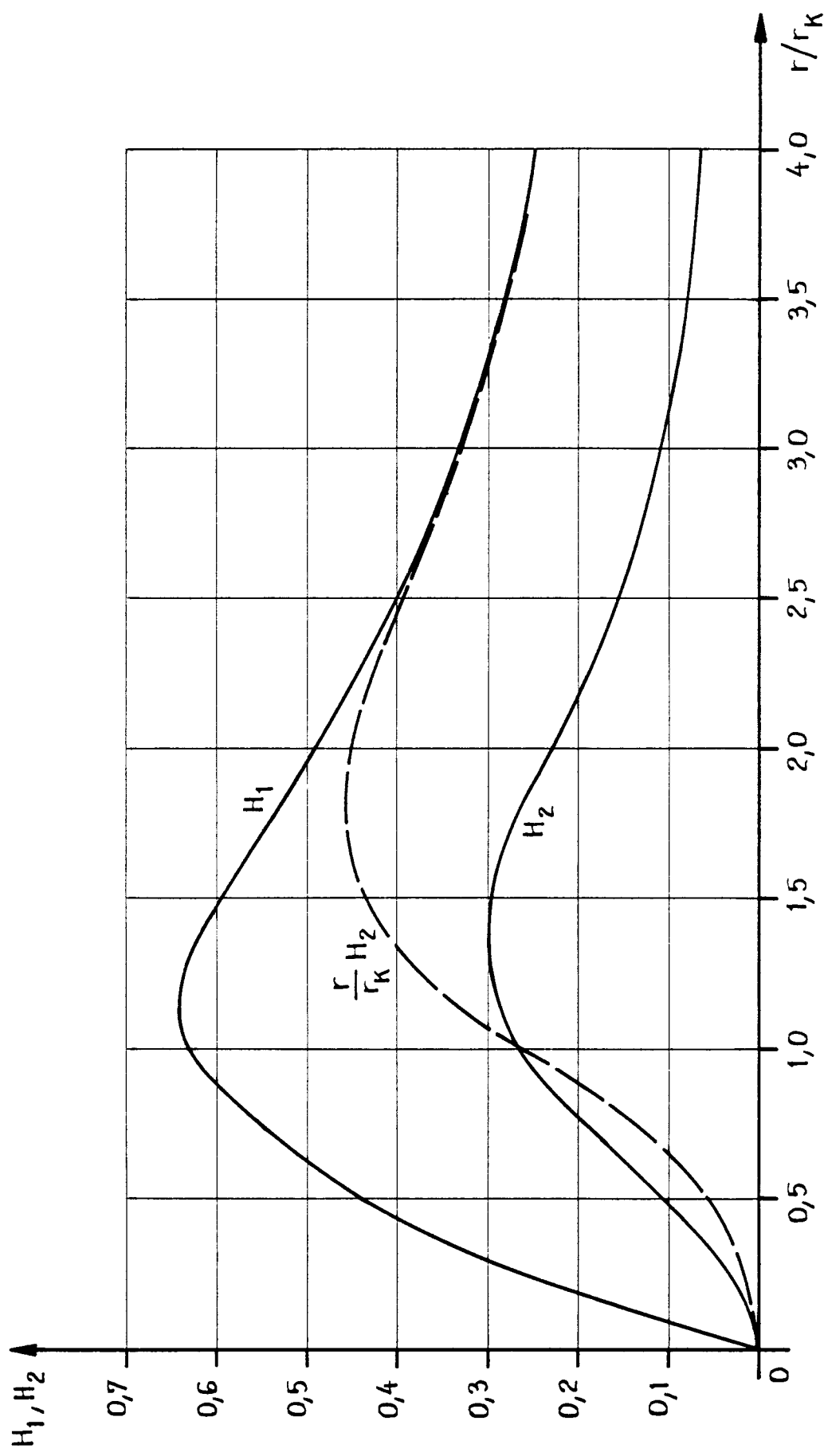


Abb. 3 : Verteilungsfunktionen für den radialen Verlauf der Reynoldsspannungen

$$(22) \quad \frac{\overline{V'W'}}{U_o^2} = \frac{\Gamma_o}{2\pi U_o r_k} \left(\frac{dr_k}{dx} - \frac{2\nu}{U_o r_k} \right) \cdot \left[\frac{r_k^2}{r^2} \left(1 - e^{-r^2/r_k^2} \right) - e^{-r^2/r_k^2} \right].$$

Für deren Verlauf in Abhängigkeit vom Radius ist die in Abb. 3 dargestellte Funktion

$$(23) \quad H_2 \left(\frac{r}{r_k} \right) = \frac{r_k^2}{r^2} \left(1 - e^{-r^2/r_k^2} \right) - e^{-r^2/r_k^2}$$

maßgebend. Man erkennt, daß $\overline{V'W'}$ für $r = 0$ und $r \gg r_k$ verschwindet und dazwischen etwa bei $r = 1,4r_k$ einen Maximalwert annimmt. Ein solcher Verlauf ist physikalisch plausibel.

Wir setzen nun $\overline{U}_*$ in den Impulssatz (13) ein und erhalten nach Ausführung der elementar möglichen Integration zwischen $r = 0$ und r mit einer etwas längeren Zwischenrechnung die weitere Reynoldsspannung

$$(24) \quad \frac{\overline{U'W'}}{U_o^2} = f(x) \left(\frac{dr_k}{dx} - \frac{2\nu}{U_o r_k} \right) \frac{r}{r_k} \left[\frac{r_k^2}{r^2} \left(1 - e^{-r^2/r_k^2} \right) - e^{-r^2/r_k^2} \right] + \left(\frac{1}{2} r_k \frac{df}{dx} + \frac{2\nu}{U_o r_k} f(x) \right) \cdot \frac{r_k}{r} \left(1 - e^{-r^2/r_k^2} \right).$$

Auch $\overline{U'W'}$ verschwindet für $r = 0$ und $r \gg r_k$, nimmt dazwischen einen Extremalwert an. Für den Verlauf in radialer Richtung sind die Funktionen H_1 und H_2 verantwortlich. Durch die noch freie Funktion $f(x)$ besteht ein großer Spielraum für eine Anpassung an Meßdaten.

Schließlich betrachten wir die Radialkomponente (14) des Impulssatzes. Nach Untersuchungen von Phillips /8/ kann davon ausgegangen werden, daß die beiden Reynoldsspannungen $\overline{V'^2}$, $\overline{W'^2}$ sich in etwa kompensieren. Dann liefert die Integration von r bis $r \rightarrow \infty$ für $c_p(x, r)$ einen Ausdruck der Form (5) mit $r_k(x)$ gemäß Formel (18), der auf der rechten Seite zusätzlich den Term der Reynoldsspannung $2\overline{W'^2}/U_o^2$ enthält. Wenn wir analog wie bei Gl.(22) und (24) davon ausgehen, daß diese Reynoldsspannung bei $r = 0$ verschwindet, so erhalten wir für den Minimaldruck in turbulenter Strömung den Beiwert

$$(25) \quad c_{p\min} = \frac{p_o - p(x, o)}{\rho/2 \cdot U_o^2} = \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi U_o A} \right)^2 \cdot \frac{2\ln 2}{(2)^{2n} \cdot c^2} \left(\frac{A}{x} \right)^{2-2n}.$$

$$\cdot \left(\frac{2AU_o}{\nu} \right)^{2n} \sim (\Re_e)^{2n}.$$

Diese Abhängigkeit entspricht genau den aus dem $\Re_e$ -Zahlbereich (8) bekannten Meßdaten.

Die aus dem Ansatz (18) stammende Konstante C bleibt zunächst unbestimmt. Dies entspricht der Tatsache, daß eine rein theoretische Vorausberechnung des Kernradius eines Spitzenwirbels in turbulenter Strömung derzeit noch nicht möglich ist, dies würde eine Navier-Stokes-Lösung erfordern.

Mc Cormick /4/ hat für einen $\Re_e$ -Zahlbereich unterhalb von etwa 10^6 eine empirische Formel für r_k angegeben, nämlich

$$r_k = 2A(0,024 + 0,042C_L)$$

mit C_L als dem Auftriebsbeiwert des Flügels. Nach Untersuchungen von Francis und Katz /10/ nehmen die r_k -Werte für größere $\Re_e$ -Zahlen etwas ab. Wir modifizieren daher die Mc Cormick-Formel, indem wir schreiben

$$(26) \quad \frac{r_k}{2A} = (0,024 + 0,042C_L) \left(\frac{8 \cdot 10^5}{2AU_o/\nu} \right)^n.$$

Dabei soll sich r_k nun auf die Stelle $x = \xi A$ beziehen, wo der Aufrollvorgang des Spitzenwirbels vollendet ist und der Spitzenwirbel seine volle Form erreicht hat; diese Stelle soll als maßgebend für den Minimaldruck angesehen werden. Damit erhalten wir anstelle von (25)

$$(27) \quad C_{p_{min}} = \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi U_o A} \right)^2 \frac{\ln 2 \left(\frac{5}{4} 10^{-6} \right)^{2n} (2AU_o/\nu)^{2n}}{(0,024 + 0,042C_L)^2}.$$

Die Formel (27) enthält keine unbekannten Größen mehr. Die Werte von C_L und $\Gamma_o/(2\pi U_o A)$ sind aus der Potentialströmung des Tragflügels bekannt. Weiter ist n aus dem Wertebereich $0,18 \leq n \leq 0,20$ zu nehmen. Für $\Re_e$ -Zahlen unter $8 \cdot 10^5$ wird die unmodifizierte Formel verwendet.

Durch Vergleich der Formeln (26) und (18) an der Stelle $x = \xi A$ ist es möglich, eine Aussage über den Wert der Konstanten C aus Gl.(18) zu machen. Man erhält

$$(28) \quad C = 2(\xi)^{n-1} (0,024 + 0,042C_L) (4 \cdot 10^5)^n.$$

Zum Schluß dieses Abschnittes soll noch eine Formel für den Radius r_v des Dampfereichs im kavitierenden Spitzenwirbel in Abhängigkeit vom Kavitationsbeiwert

$$(29) \quad \sigma_v = (p_o - p_v) / \frac{\rho}{2} U_o^2$$

abgeleitet werden. Dabei gilt $p = p_v$ für $r = r_v$. Wie in /2/ Kapitel 23 gezeigt wurde, kann Formel (5) in guter Näherung invertiert werden zu

$$(30) \quad \frac{r}{r_k} = \left[\frac{10}{3} \left(\ln \frac{\Gamma_o \sqrt{2 \ln 2}}{2\pi U_o r_k \sqrt{C_p}} \right) \right]^{2/3}.$$

Bei der Dampfbildung im Zentrum des Wirbelkerns ist zu berücksichtigen, daß der viskose Kernbereich des Spitzenwirbels nach außen verschoben wird. Dies bedeutet, daß der ohne Kavitation bestehende Kernradius r_k gemäß Formel (26) nun zu ersetzen ist durch

$$(31) \quad r_{kv} = r_k G(\eta), \eta = \sigma_{vi} / \sigma_v$$

mit $G(\eta) \geq 1$ für $\eta \geq 1$. Dabei ist $G(1) = 1$. Der Verlauf der Funktion $G(\eta)$ muß empirisch anhand von Versuchsdaten bestimmt werden. Hierauf kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

Aus Formel (30) und (26) folgt für $p = p_v$ mit r_{kv} anstelle von r_k der gesuchte Kavitationsradius des Spitzenwirbels:

$$(32) \quad \frac{r_v}{2A} = (0,024 + 0,042C_L) \left(\frac{8 \cdot 10^5}{2AU_o/\nu} \right)^n \cdot G(\eta).$$

$$\cdot \left[\frac{10}{3} \ln \frac{\Gamma_o \sqrt{2 \ln 2} \left(\frac{5}{4} 10^{-6} \right)^n (2AU_o/\nu)^n}{4\pi U_o A \cdot G(\eta) (0,024 + 0,042C_L) \sqrt{\sigma_v}} \right]^{2/3}.$$

4. Anwendung der Theorie auf Tragflügel–Spitzenwirbel

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir einen von Souders und Platzer /11/ experimentell untersuchten Tragflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 2,55$ mit elliptischen Grundriß. Die maximale Flügeltiefe $2A_o$ beträgt $30,5\text{cm}$, die mittlere Tiefe $2A = 23,94\text{cm}$. Es gilt die Relation

$$\frac{\Gamma_o}{2\pi U_o A} = \frac{2}{\pi^2} C_L.$$

Die Reynolds–Zahl $2AU_o/\nu$ ist $5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^6$. Mit einem Exponenten $n = 0,18$ wird dann

$$\left(\frac{8 \cdot 10^5}{2A \cdot U_o/\nu} \right)^{0,18} = 0,75.$$

Zwischen dem C_L –Wert und dem Anstellwinkel besteht die Beziehung /11/

$$C_L = 0,0525 (2,94 + \alpha),$$

wobei der Anstellwinkel α in Grad zu rechnen ist.

In Abb. 4 ist der beobachtete Beiwert σ_{vi} des Kavitationseinsatzes dem Berechnungsergebnis nach Formel (27) mit $C_{p_{min}} = \sigma_{vi}$ gegenübergestellt. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Kavitation mit dem Erreichen des Dampfdrucks als Minimaldruck ($p_{min} = p_v$) beginnt. Diese Annahme gilt für ungefiltertes, viele Keime enthaltendes Wasser.

Die Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen und den Resultaten der Formel (27) ist relativ gut.

Für verschiedene Kavitationsbeiwerte $\sigma_v < \sigma_{vi}$ wurde von Souders und Platzer auch der Radius r_v des Dampfereichs im Spitzenwirbel beobachtet. Für die drei den Werten $C_L = 0,364; 0,469; 0,574$ entsprechenden Anstellwinkel $\alpha = 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ$ wurden die experimentellen Daten mit Formel (32) nachgerechnet. Dabei wurden die Werte der noch unbekannten Funktion $G(\eta)$ jeweils so bestimmt, daß sich eine Übereinstimmung mit den beobachteten Daten für $r_v/2A_o$ ergab. Es zeigte sich, daß die zu den drei genannten Auftriebsbeiwerten C_L gehörenden G –Werte in guter Näherung durch eine einzige universelle Funktion $G(\eta)$ approximiert werden können. Diese Kurve $G(\eta)$ ist in Abb. 5 dargestellt. Zugleich zeigen die in Abb. 5 eingetragenen Punkte die genau den jeweiligen C_L –Werten zugeordneten Meßdaten.

Unter Verwendung der universellen Funktion $G(\eta)$ lassen sich mit Formel (32) die Werte für $r_v/2A_o$ ($A_o = 4A/\pi$) theoretisch bestimmen.

Abb. 6 zeigt das Ergebnis dieser Berechnung und zum Vergleich die Beobachtungswerte von Souders und Platzer /11/. Trotz gewisser Abweichungen wird der Verlauf der beobachteten Daten–Kurven durch die Theorie noch befriedigend wiedergegeben.

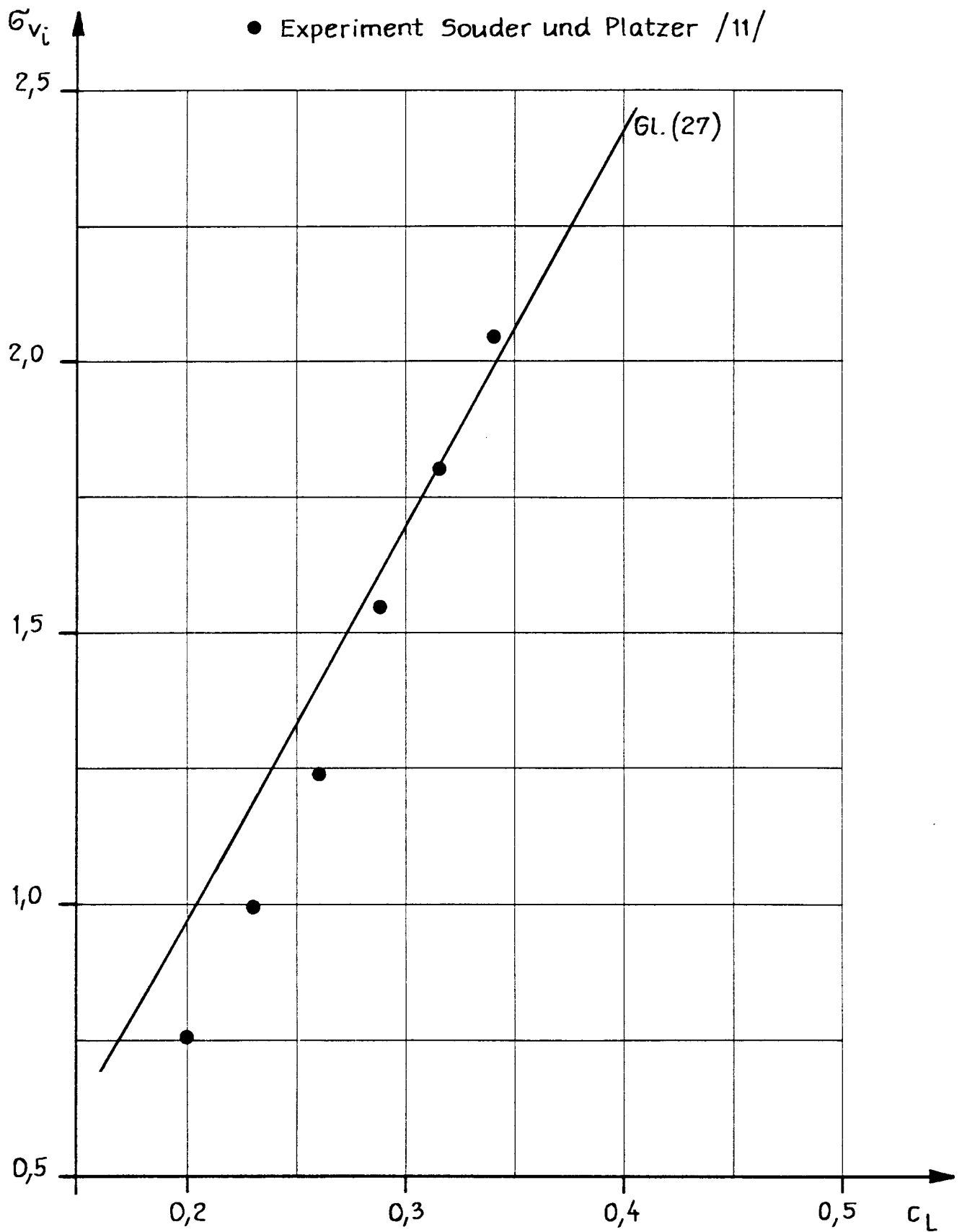


Abb. 4: Beiwert des Kavitationseinsatzes in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_L .

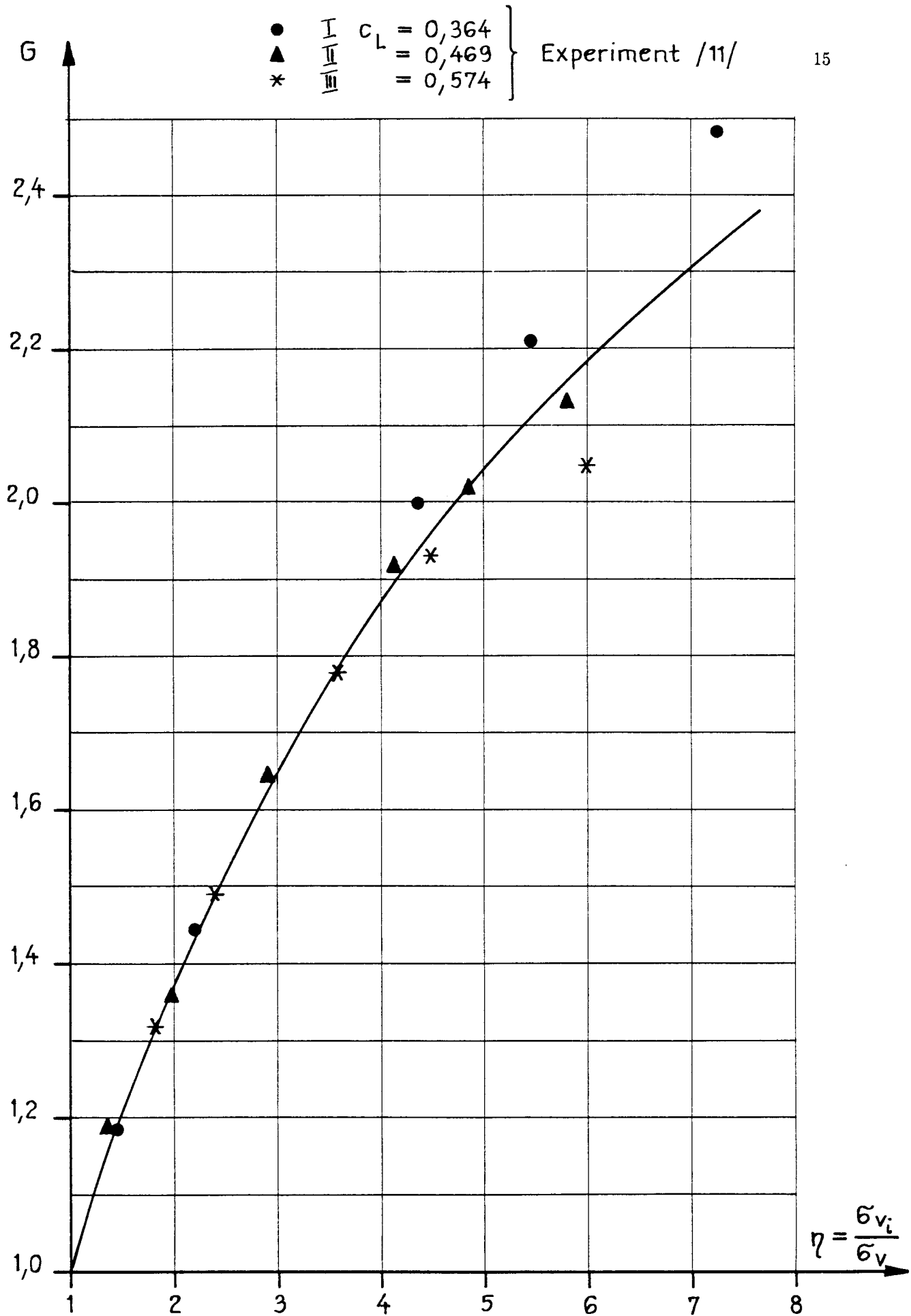


Abb. 5: Interpolationskurve $G(\eta)$ zur Erfassung des Verdrängungseffektes der Dampfbildung

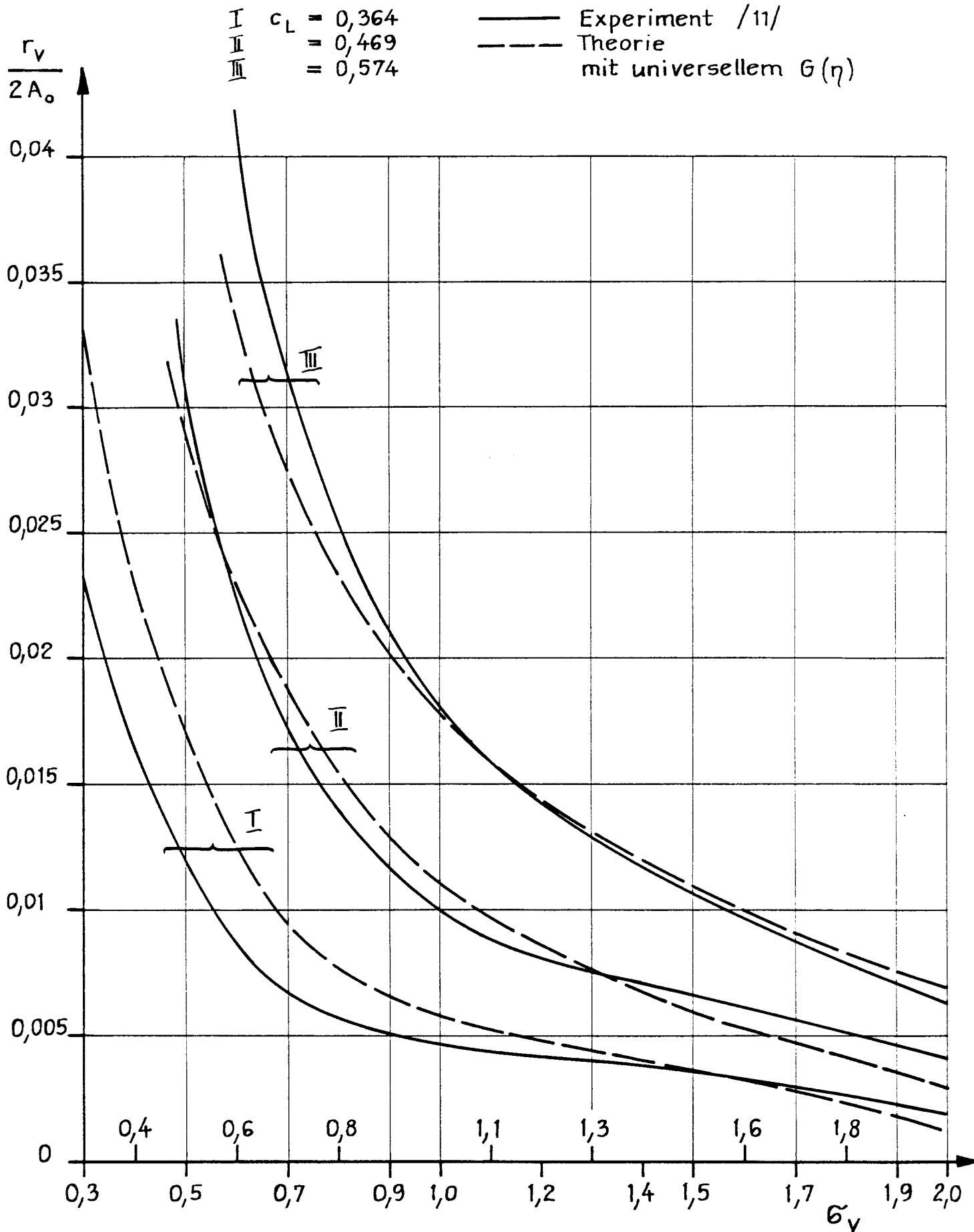


Abb. 6 : Kavitationsradius in Abhängigkeit vom Kavitationsbeiwert σ_v

Für die behandelte Spitzenwirbelströmung soll nun noch die Reynoldsspannung $\overline{V'W'}/U_o^2$ gemäß Formel (22) bestimmt werden. Mit (18) und für $x = \xi A$ ergibt eine elementare Rechnung

$$(33) \quad \frac{\overline{V'W'}}{U_o^2} = \frac{\Gamma}{2\pi U_o A} \frac{1}{\xi} \left[1 - n - \frac{2}{C^2} \left(\xi \frac{AU_o}{\nu} \right)^{2n-1} \right] H_2 \left(\frac{r}{r_k} \right).$$

Mit $n = 0,18$ und für $H_2 = H_{2\max} = 0,298, \xi = 2,5$ erhalten wir z.B. für $C_L = 0,469$ ($\alpha = 6^\circ$) einen Wert: $(\overline{V'W'}/U_o^2)_{\max} = 0,0093$.

Dabei ist der zweite Summand in der eckigen Klammer von (33) vernachlässigbar.

Der erhaltene Wert erscheint zwar relativ hoch, aber naech von einer realistischen Größenordnung. Auf die Angabe der anderen Reynolds-Spannung $\overline{U'W'}/U_o^2$ aus Formel (24) sei hier verzichtet, da die noch frei wählbare Funktion $f(x)$ ohnehin eine Anpassung an jeden Meßwert erlaubt.

Zum Schluß noch ein weiteres Beispiel.

Mc Cormick /3/,/4/ hat festgestellt, daß der Beiwert σ_{vi} des Kavitationseinsatzes im Spitzenwirbel bei Tragflügeln mit elliptischem Grundriß (fast unabhängig vom Seitenverhältnis Λ) gut durch die empirische Formel

$$\sigma_{vi} = 0,15 (\alpha)^{1,29}$$

wiedergegeben wird. (α in Grad). Dies gilt für $\Re_e$ -Zahlen unter 10^6 . Unter der Annahme $\sigma_{vi} = C_{pmin}$ wurde mit Hilfe der unkorrigierten Formel (27)

$$(34) \quad \sigma_{vi} = 2 \ln 2 \left(\frac{2\alpha\Lambda(2+\Lambda)^{-1}}{\pi(0,024 + 0,042C_L)} \right)^2$$

eine Nachrechnung vorgenommen. Dabei ist in der Formel (34) bereits berücksichtigt, daß für Flügel mit elliptischem Grundriß gilt

$$\Gamma_o / (2\pi U_o A) = 2C_L / \pi^2 = \frac{4}{\pi} \Lambda \alpha (2 + \Lambda)^{-1}.$$

Das Ergebnis dieser Berechnung ist in Abb. 7 dargestellt. Man erkennt eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

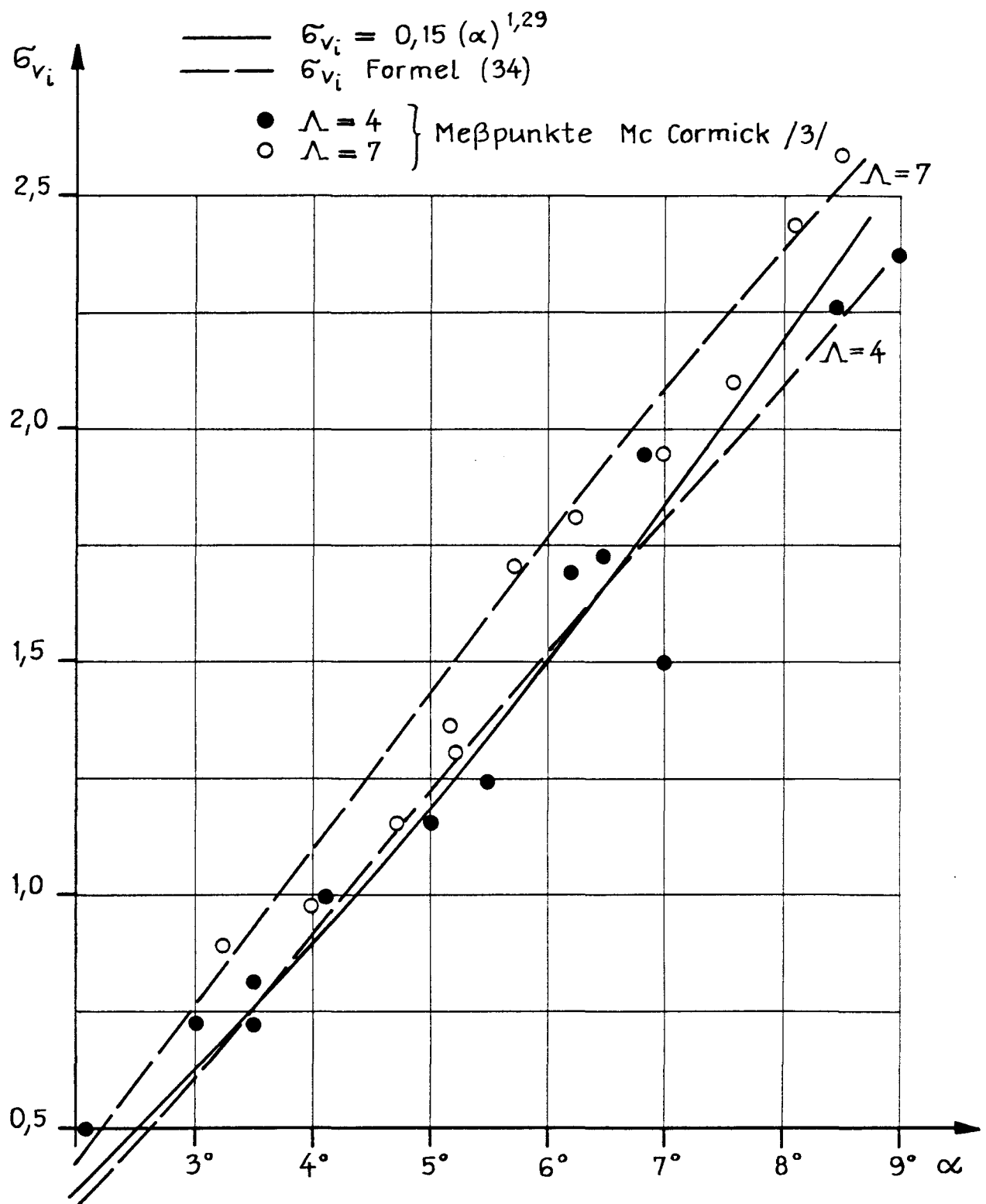


Abb. 7: Beiwert des Kavitationseinsatzes in
 Abhängigkeit vom Anstellwinkel α

5. Übertragung der Theorie auf Propellerflügel

Bei der Anwendung der Formeln aus Abschnitt 2 und 3 auf Propellerspitzenwirbel setzen wir mit ωR_a als der Spitzenumfangsgeschwindigkeit und R_a als dem Propelleraußenradius, (R_i sei der Nabenradius):

$$(35) \quad U_o = \omega R_a \sqrt{1 + (J/\pi)^2}.$$

J ist die Fortschrittsziffer des Propellers.

Dann wird

$$(36) \quad \sigma_v = \frac{p_o - p_v}{\rho/2 \cdot \omega^2 R_a^2 (1 + J^2/\pi^2)}$$

der Kavitationsbeiwert, und aus Formel (5) und (6) folgt sinngemäß der Beiwert des Minimaldruckes zu

$$(37) \quad C_{pmin} = 2 \ln 2 \left(\frac{\Gamma_o}{2\pi\omega R_a^2 \sqrt{1 + (J/\pi)^2}} \right)^2 \left(\frac{R_a}{r_k} \right)^2.$$

Wir stellen zunächst einige Formeln aus der Propellertheorie zusammen.

Bei einem Näherungsansatz für die Flügelzirkulation des Propellers in der Form

$$(38) \quad \Gamma(r) = \Gamma(\vartheta) = \Gamma_1 \sin \vartheta + \Gamma_2 \sin 2\vartheta,$$

mit

$$2r = R_a + R_i - (R_a - R_i) \cos \vartheta$$

ergibt sich ohne Berücksichtigung der induzierten Geschwindigkeiten folgender Ausdruck für den Schubbeiwert K_T (N ist die Flügelzahl)

$$(39) \quad \frac{K_T}{N} = \frac{\pi^3}{32} \frac{\Gamma_1}{\omega R_a^2} \left(1 - \frac{R_i^2}{R_a^2} \right) - \frac{\pi^3}{64} \frac{\Gamma_2}{\omega R_a^2} \left(1 - \frac{R_i}{R_a} \right)^2.$$

Wir bezeichnen mit ϑ_o die Stelle des Propellerradius (vgl.(38)), an der die Zirkulation ihren Maximalwert $\Gamma(\vartheta_o) = \Gamma_o$ annimmt.

Dann liefert eine elementare Rechnung

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \vartheta_o}{\cos 2\vartheta_o}; \Gamma_1 = \Gamma_o \frac{1 - 2 \cos^2 \vartheta_o}{\sin^3 \vartheta_o},$$

und damit läßt sich der Schubbeiwert in der Form ausdrücken:

$$(40) \quad \frac{K_T}{N} = \frac{\pi^3}{32} \frac{\Gamma_o}{\omega R_a^2} \frac{1 - 2 \cos^2 \vartheta_o}{\sin^3 \vartheta_o} \left[1 - \frac{R_i^2}{R_a^2} + \frac{1}{4} \frac{\cos \vartheta_o}{2 \cos^2 \vartheta_o - 1} \left(1 - \frac{R_i}{R_a} \right)^2 \right].$$

Wir werten die Formel (40) für zwei Sonderfälle aus. Dabei sei $R_i/R_a = 0,2$ angenommen. Für rein elliptische Zirkulationsverteilung ($r_o/R_a = 0,6$) mit $\vartheta_o = \pi/2$ folgt $K_T/N = 0,96 \cdot (\Gamma_o/\omega R_a^2) \cdot \pi^3/32$. Für ein Zirkulationsmaximum bei $r_o/R_a = 0,8$; $\vartheta_o = 2\pi/3$ ergibt sich $K_T/N = 0,862 \cdot (\Gamma_o/\omega R_a^2) \cdot \pi^3/32$.

Um die Formel (26) für den Kernradius eines Propellerspitzenwirbels verwenden zu können, haben wir noch einen Zusammenhang zwischen der mittleren Flügelprofilltiefe $2A$ und dem Propellerradius R_a abzuleiten. Es gilt mit A_e als dem Flächenverhältnis des Propellers

$$2A(R_a - R_i) = \frac{1}{N} \pi R_a^2 A_e,$$

oder

$$(41) \quad 2A = \frac{A_e}{N} \pi R_a (1 - R_i/R_a)^{-1}$$

Die für den Propellerspitzenwirbel maßgebende Reynoldszahl wird dann

$$(42) \quad \Re_e = \frac{\omega R_a^2}{\nu} \frac{\pi A_e}{N} (1 - R_i/R_a)^{-1}.$$

Damit lautet die sachgemäße Übertragung der Formel (26) für den Radius des viskosen Bereichs im Spitzenwirbel auf Propellerflügel mit $\Re_e$ aus Gl.(42)

$$(43) \quad \frac{r_K}{R_a} = \frac{\pi A_e}{N} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{K_T}{N} \right) \left(1 - \frac{R_i}{R_a} \right)^{-1} \left(\frac{8 \cdot 10^5}{\Re_e} \right)^n.$$

Mit (37), (40) und (43) ergibt sich der Beiwert des Minimaldruckes im Propellerspitzenwirbel zu

$$(44) \quad C_{pmin} = \left\{ \frac{16}{\pi^5} \frac{K_r}{A_e} \left(1 - \frac{R_i}{R_a}\right) \left(\frac{\Re_e}{8 \cdot 10^5}\right)^n \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 K_T / N} \right\}^2 \cdot \left(\frac{1 - 2 \cos^2 \vartheta_o}{\sin^3 \vartheta_o} \left[1 - \frac{r_i^2}{R_a^2} + \frac{1}{4} \frac{\cos \vartheta_o}{2 \cos^2 \vartheta_o - 1} \left(1 - \frac{R_i}{R_a}\right)^2 \right] \right)^{-2} \frac{1}{1 + \left(\frac{J}{\pi}\right)^2}$$

In Formel (44) sind ε_1 und ε_2 zwei aus Experimenten festzulegende Zahlen, die den McCormickschen Werten aus Formel (26) entsprechen. Um sie zu ermitteln, wurden Versuchsergebnisse über den Einsatz der Spitzenwirbel /12/ an Modellpropellern der "Hongkong Express" und der "Sydney Express" aus dem kleinen Kavitationstunnel der HSVA mit Hilfe von Formel (44) unter der Annahme nachgerechnet, daß der Beiwert des Kavitationseinsatzes mit dem des Minimaldruckes übereinstimmt, also $\sigma_{vi} = C_{pmin}$. Die beiden Propeller wurden in homogener Zuströmung untersucht.

Für Formel (40) wurde der Wert $(\Gamma_o / \omega R_a^2) = 1,14 K_T / N$ zugrunde gelegt, der etwa einem Maximum der Flügelzirkulation auf dem Radius $r_o / R_a = 0,7$ entspricht. Die Daten der Modellpropeller sind: $n = 0,19$ sowie

"Sydney-Express":

$$R_a = 10 \text{ cm}, R_i / R_a = 0,19; N = 5; A_e = 0,78;$$

$$K_T = 0,18 \quad \text{mit} \quad J = 0,69 \quad \text{und} \quad K_T = 0,28 \quad \text{mit} \quad J = 0,44.$$

"Hongkong Express":

$$R_a = 11,1 \text{ cm}; R_i / R_a = 0,21; N = 6; A_e = 0,90;$$

$$K_T = 0,18 \quad \text{mit} \quad J = 0,88 \quad \text{und} \quad K_T = 0,29 \quad \text{mit} \quad J = 0,69.$$

Die Anpassung der Parameter ε_1 und ε_2 an die beobachteten σ_{vi} -Werte beider Propeller ergab in der Mittelung die einheitlichen Werte

$$\varepsilon_1 = 0,0145 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = 0,155.$$

Abb. 8 zeigt das Ergebnis der Nachrechnung der σ_{vi} -Werte mit Gl. (44) unter Verwendung der genannten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und zum Vergleich die Beobachtungsdaten. Unter Berücksichtigung der erheblichen Streuungen bei den Meßwerten darf der Vergleich noch als ausreichend gut angesehen werden. Im übrigen fällt auf, daß kein wesentlicher Unterschied zwischen dem Kavitationseinsatz bei normalem und gefiltertem Wasser besteht.

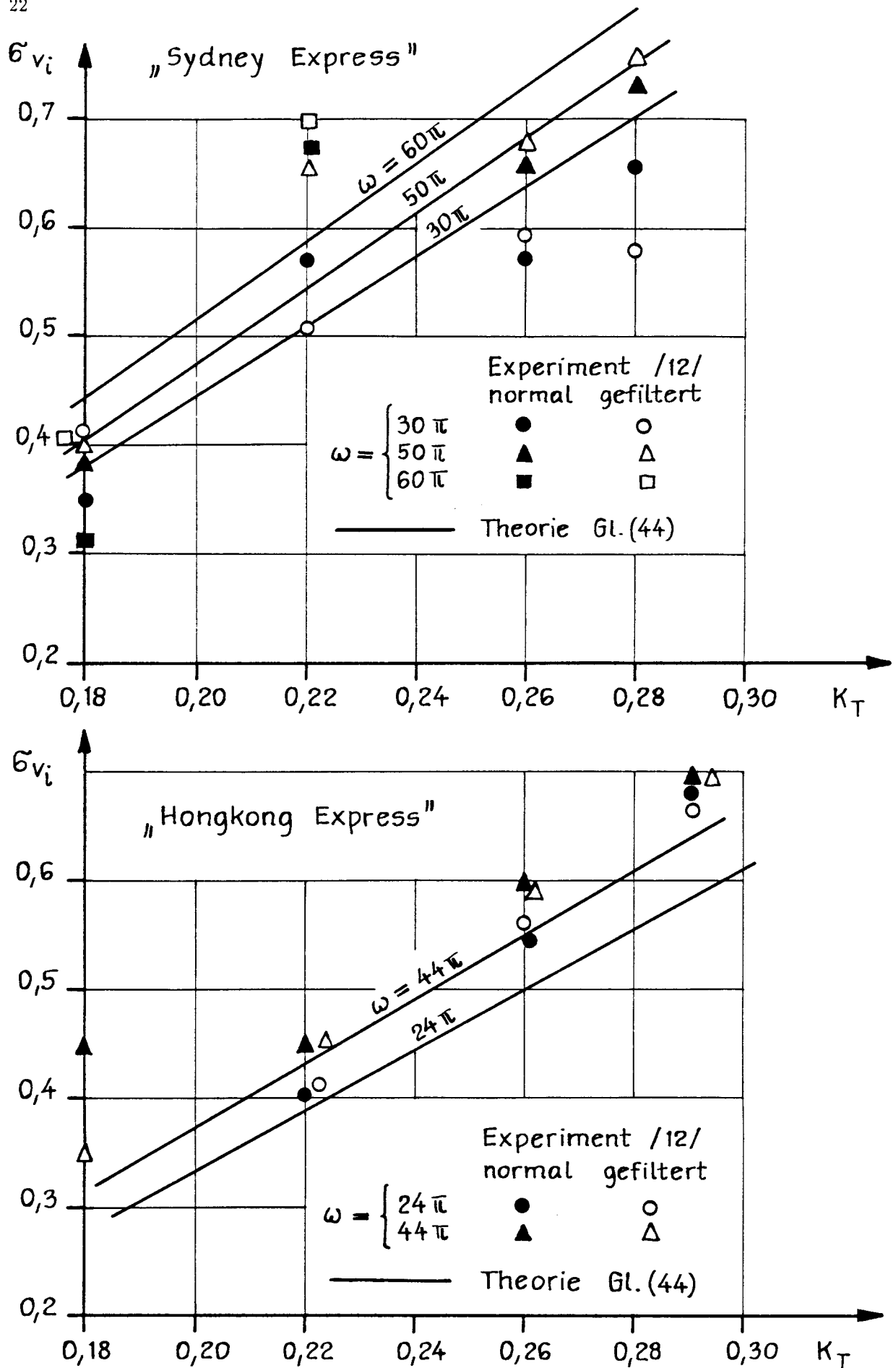


Abb. 8 : Beiwert des Kavitationseinsatzes in Abhängigkeit vom Schubbeiwert K_T des Propellers

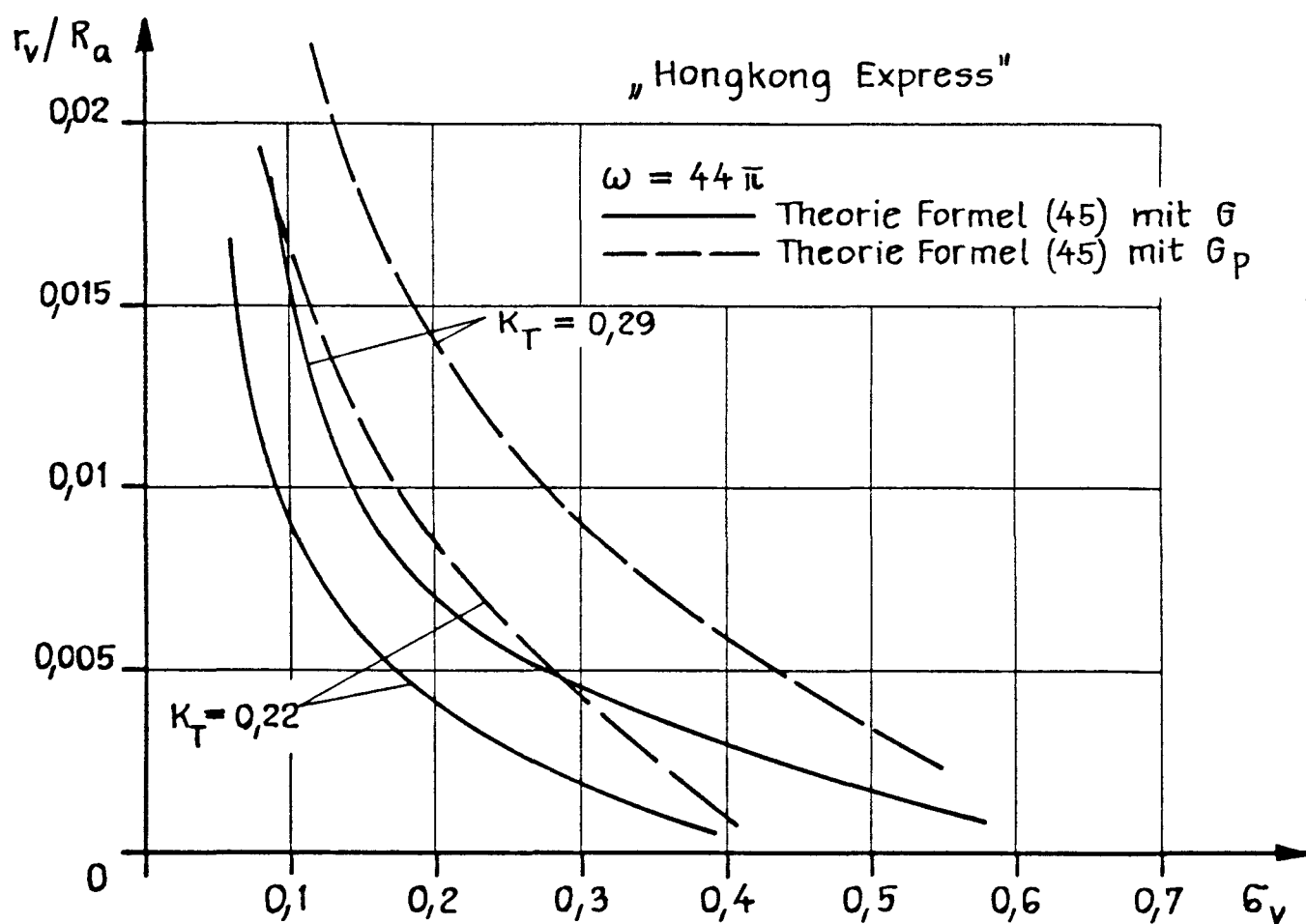
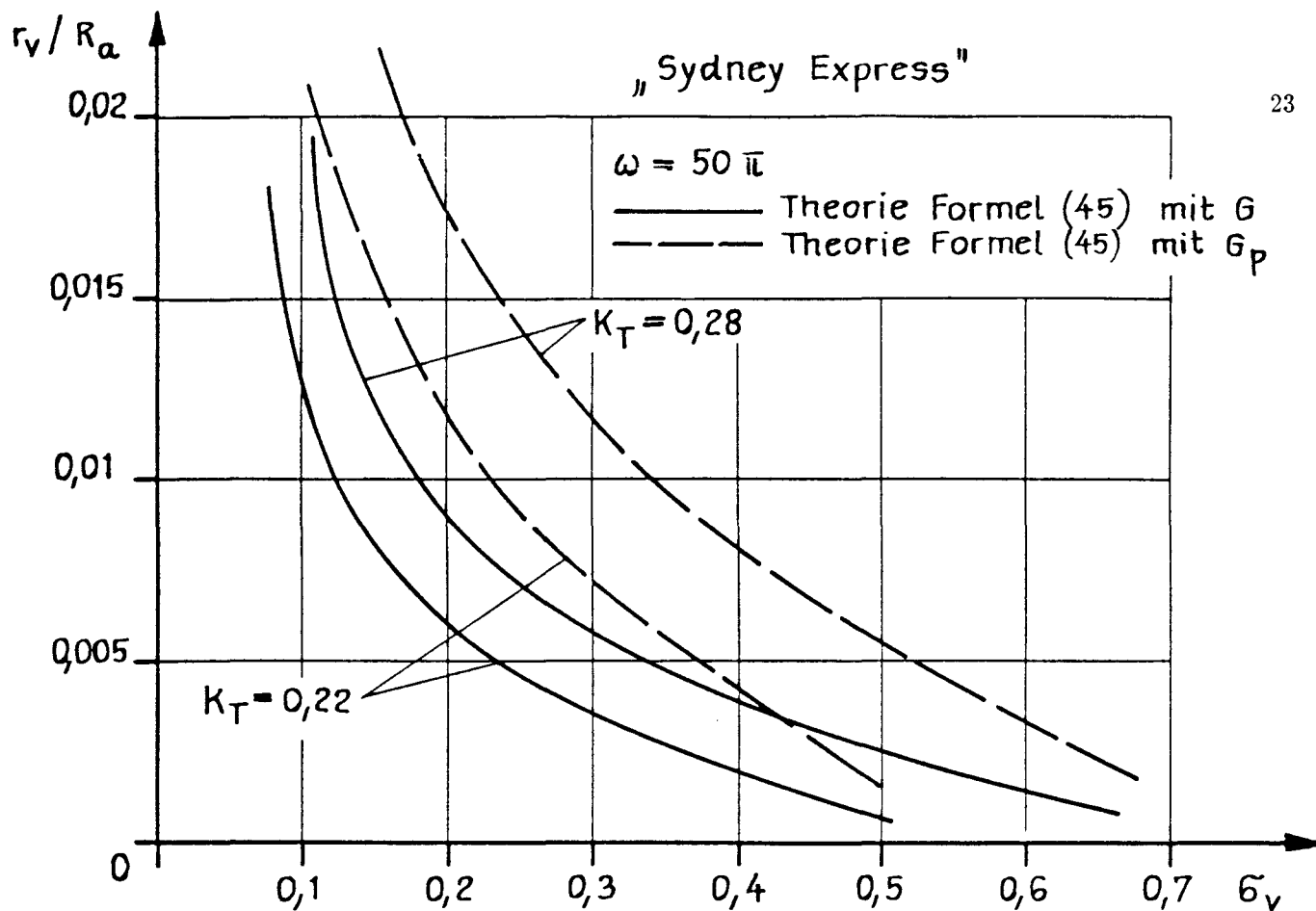


Abb.9 : Kavitationsradius in Abhängigkeit vom Kavitationsbeiwert σ_v

Dies kann nur so verstanden werden, daß trotz der Filterung noch genügend der für den Kavitationseinsatz im Unterdruckfeld des Spitzenwirbels verantwortlichen Keime vorhanden waren.

Schließlich sei noch erwähnt, daß ein anderer Zusammenhang $(\Gamma_o/\omega R_a^2) = ZK_T/N$ mit dem Zahelfaktor Z anstelle von 1,14 zu einer Modifikation beider ε -Werte um den Faktor $Z/(1,14)$ führen würde.

Auch Formel (32) für den Kavitationsradius des Spitzenwirbels läßt auf Propellerflügel übertragen. Und zwar folgt mit (42) und (43)

$$(45) \quad \frac{r_v}{R_a} = \frac{\pi A_e}{N} G(\eta) \frac{\varepsilon_1 + K_T/N \cdot \varepsilon_2}{1 - R_i/R_a} \left(\frac{8 \cdot 10^5}{\Re_e} \right)^n \cdot \left[\frac{10}{3} \ln \frac{N \Gamma_o \sqrt{2 \ln 2} (1 - R_i/R_a) \left(\frac{5}{4} 10^{-6} \cdot \Re_e \right)^n}{2 \pi^2 \omega R_a^2 \sqrt{1 + \left(\frac{J}{\pi} \right)^2} A_e G(\eta) (\varepsilon_1 + K_T/N \cdot \varepsilon_2) \sqrt{\sigma_v}} \right]^{2/3}.$$

Wegen fehlender Meßdaten war es nicht möglich die Funktion G mit $\eta = \sigma_{vi}/\sigma_v$ für Propellerspitzenwirbel neu zu bestimmen. In Abb. 9 sind einige Ergebnisse enthalten, die unter Verwendung von $G(\eta)$ aus Abb. 5 mit Formel (45) für die beiden vorher behandelten Modellpropeller erhalten wurden.

Für einen anderen Propeller liegen dagegen Beobachtungsdaten für den Kavitationsradius vor. Es handelt sich um das HSVA-Modell Nr.1283./13/.

Die Propellerabmessungen sind:

$$R_a = 12\text{cm}; R_i/R_a = 0,29; N = 3; A_e = 0,77. K_T = 0,22 \quad \text{mit} \quad J = 0,803$$

$$\text{und} \quad K_T = 0,27 \quad \text{mit} \quad J = 0,72 \quad \text{sowie} \quad K_T = 0,31 \quad \text{mit} \quad J = 0,66.$$

Durch Anpassung von Formel (45) an die beobachteten Werte des Kavitationsradius wurde versucht, eine neue universelle Funktion $G_P(\eta)$ zu bestimmen. Das Ergebnis zeigt Abb. 10. Die Streuung der Meßdaten ist dabei aber wesentlich größer als beim Tragflügel, wie ein Vergleich zwischen Abb. 10 und Abb. 5 zeigt. Auch weicht die neue Funktion $G_P(\eta)$ erheblich von der vorher bestimmten Funktion G ab. Um den Unterschied in den Ergebnissen zu zeigen, wurden die Kavitationsradien der Propeller "Sydney Express" und "Hongkong Express" auch mit der Funktion G_P ausgewertet. Hierzu vergleiche man die gestrichelten Kurven in Abb. 9. Schließlich enthält Abb. 11 das Ergebnis der Nachrechnung der Kavitationsradien des Propellers 1283 mit Formel (45) unter Verwendung der universellen Funktion G_P . Zum Vergleich sind die Beobachtungsdaten eingetragen.

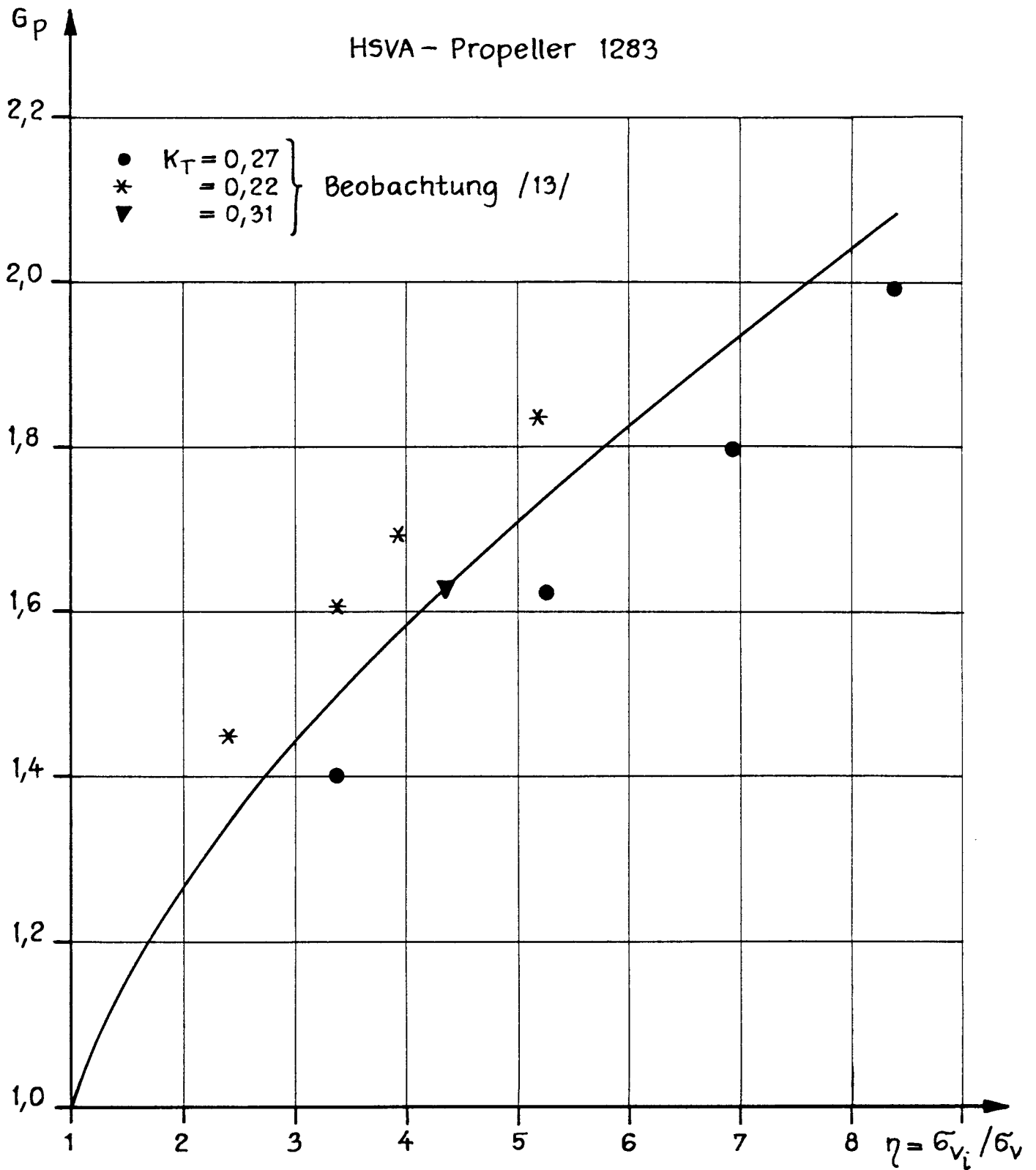


Abb. 10 : Interpolationskurve $G_p(\eta)$ zur Erfassung des Verdrängungseffektes der Dampfbildung

HSVA Propeller 1283

$$\omega = 50\pi$$

— Theorie Formel (45) mit G_p

$*$ $K_T = 0,22$
 $\bullet$ $= 0,27$
 $\blacktriangledown$ $= 0,31$

Beobachtung /13/

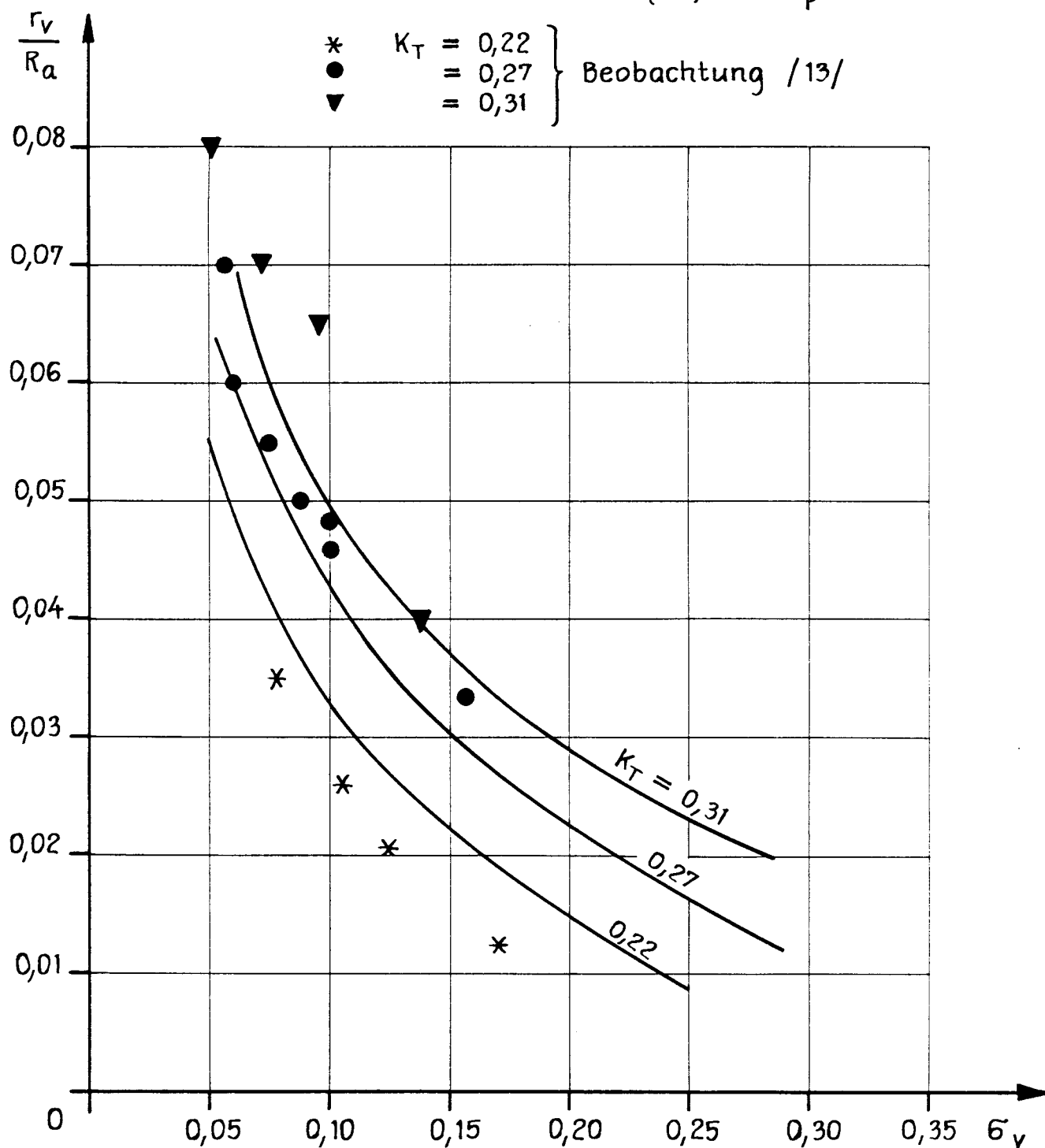


Abb. 11 : Kavitationsradius in Abhängigkeit vom Kavitationsbeiwert G_v

Wenn auch die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung noch einigermaßen tolerierbar erscheint, so muß doch betont werden, daß weitere systematische Experimente mit anderen Propellern notwendig sind, um die hier angegebenen Formeln abzusichern bzw. weiter zu verbessern.

Literaturverzeichnis

- /1/ Newman, B. G.: Flow in a Viscous Trailing Vortex; The Aeronautical Quarterly 10 (1959) p. 149.
- /2/ Isay, W. H.: Kavitation, Schiffahrtsverlag Hansa Hamburg. 3. Aufl. 1989.
- /3/ Mc Cormick, B. W.: On Cavitation Produced by a Vortex Trailing from a Lifting Surface; Journ. Basic Engineering 84 (1962) p. 369.
- /4/ Mc Cormick, B. W., Tangler, J. L. and Sherrieb, H. E.: Structure of Trailing Vortices; Journ. of Aircraft 5 (1968) p. 260.
- /5/ Billet, M. L. and Holl, J. W.: Scale Effects on Various Types of Limited Cavitation; Proc. ASME Intern. Symposium on Cavitation Inception. New York Dec. 1979.
- /6/ Hsu, C. C.: Studies of Scaling of Tip Vortex Cavitation Inception on Marine Lifting Surfaces. Proc. ASME Int. Symposium on Cavitation Inception. San Francisco Dec. 1989.
- /7/ Phillips, W. R. C.: The Turbulent Trailing Vortex During Roll-up. Journ. Fluid Mech. 105 (1981) p. 451.
- /8/ Phillips, W. R. C. and Graham, J. A.: Reynolds-Stress Measurements in a Turbulent Trailing Vortex. Journ. Fluid Mech. 147 (1984) p. 353.
- /9/ Heckel, Chr.: Einfluß der Turbulenz (Reynoldsspannungen) auf das Strömungsfeld von Spitzenwirbeln. Schiffstechnik 33 (1986) S. 217.
- /10/ Francis, T. B. and Katz, J.: Observations on the Development of a Tip Vortex on a Rectangular Hydrofoil. Journ. Fluids Engineering 110 (1988) p. 208.
- /11/ Souders, W. G. and Platzer, G. P.: Tip Vortex Cavitation Characteristics and Delay of Inception on a Three-Dimensional Hydrofoil. Report DT-NSRDC 81/007, 1981.
- /12/ Streckwall, H., Tanger, W. und Mills, L.: Bericht über Keimverteilungsmessungen in Kavitationstunneln der HSVA 1991 (in Vorbereitung).
- /13/ Weitendorf, E. A.: Der mittlere Radius eines kavitierenden Spitzenwirbels bei Propellern; Schrift Nr. 2214 Inst. f. Schiffbau Univ. Hamburg Nov. 1974.