

432 | Juni 1983

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Peter Alwardt

Beitrag zur Berechnung von instationären Kavitationserscheinungen am Tragflügel und Schiffspropeller

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

**Beitrag zur Berechnung von instationären Kavitationserscheinungen am Tragflügel und
Schiffspropeller**

P. Alwardt , Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1983

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 432

Beitrag zur Berechnung von
instationären Kavitationserscheinungen
am Tragflügel und Schiffspropeller

Peter Alwardt

Juni 1983

INHALT

1.0	EINFÜHRUNG	1
2.0	INSTATIONÄRE KAVITATIONSTHEORIE FÜR TRAGFLÜGEL	4
2.1	Das instationäre Integralgleichungssystem	5
2.1.1	Grundlagen	6
2.1.1.1	Geschwindigkeitspotential	6
2.1.1.2	Strömungsrandbedingung	11
2.1.1.3	Druckrandbedingung	15
2.1.1.4	Instationäre Druckverteilung ohne Kavitation	17
2.1.2	Aufstellung des Gleichungssystems	20
2.2	Lösung des Integralgleichungssystems	22
2.2.1	Stationäre Lösung	24
2.2.2	Instationäre Lösung	31
2.2.2.1	Konvergenzbetrachtungen	33
2.3	Anmerkungen zur Theorie	38
2.4	Blasendynamische Abschätzung für die Zusammenfallstrecke	42
2.5	Druckverteilung mit Kavitationsschicht	43
3.0	EXPERIMENTELLE DATEN EINES SCHWINGENDEN TRAGFLÜGELS	45
3.1	Beschreibung des Experimentes	45
3.2	Fehlerbetrachtungen	46
4.0	DISKUSSION VON THEORIE UND EXPERIMENT	49
4.1	Stationär belastete Flügelprofile	49
4.2	Das instationär belastete Flügelprofil	55
4.3	Diskussion vergleichbarer Arbeiten	65
4.4	Resümee der Tragflügeldiskussion	68
5.0	ANWENDUNGEN AUF DEN PROPELLER	71
5.1	Modifizierung der Theorie	71
5.2	Diskussion der Ergebnisse beim Propeller	75
5.3	Resümee der Betrachtungen am Propeller	79
6.0	ZUSAMMENFASSUNG	80
7.0	LITERATUR	82
A.0	INTEGRALE UND MATHEMATISCHE UMFORMUNGEN	87
B.0	ANALYTISCHER LÖSUNGSVERSUCH	94
C.0	PROGRAMMÜBERSICHT	99

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

Abbildung	1. Bezeichnungen am Tragflügel	5
Abbildung	2. Bezeichnungen zu den Wirbeln	14
Abbildung	3. Transformationen	29
Abbildung	4. Konvergenzverhalten I	34
Abbildung	5. Verlauf der Konvergenzbedingung (98)	37
Abbildung	6. Konvergenzverhalten II und III	38
Abbildung	7. Kavitationsausdehnungen	40
Abbildung	8. Verlauf der Kavitationsamplituden	40
Abbildung	9. Phasenverlauf	41
Abbildung	10. Variation der Amplitude des Anstellwinkels	42
Abbildung	11. Versuchsaufbau am Kavitationstunnel	45
Abbildung	12. Kavitationsausdehnung beim Profil NACA 0015	50
Abbildung	13. Dicke der Kavitationsschicht am Profil NACA 0015	50
Abbildung	14. Zusatzwirbel	51
Abbildung	15. Stationäre Druckverteilung am Profil NACA 0015	52
Abbildung	16. Stationäre Kavitationsausdehnung am NACA 16006	53
Abbildung	17. Grenzschichtverhalten	54
Abbildung	18. Kavitationsausdehnung beim Profil NACA 16006	56
Abbildung	19. Einfluß der Winkelparameter auf die Rechnung	58
Abbildung	20. Kavitationsausdehnung beim Profil NACA 16006	59
Abbildung	21. Dicke der Kavitationsschicht NACA 16006	61
Abbildung	22. Dicke der Kavitationsschicht NACA 16006	61
Abbildung	23. Kavitationsfläche NACA 16006	62
Abbildung	24. Instationäre Druckverteilung am NACA 16006	64
Abbildung	25. Instationäre Druckverteilung am NACA 16006	65
Abbildung	26. Bezeichnungen am abgewickelten Propellerschnitt	71
Abbildung	27. Bezeichnungen am Propeller	72
Abbildung	28. Tragflügel mit endlicher Spannweite	73
Abbildung	29. Instationäre Druckverteilung am Propeller HSVA 1917	76
Abbildung	30. Instationäre Kavitation am Propeller HSVA 1917	77
Abbildung	31. Kavitationsdicke am Propeller HSVA 1917	78
Abbildung	32. Flußdiagramm	99

1.0 EINFÜHRUNG

Mit Kavitation bezeichnet man die instabile Aufweitung von Dampfkeimen in Flüssigkeiten im Druckfeld eines Strömungskörpers (vgl. z.B. /1/). Kavitation tritt (abhängig von der Geometrie der Keime) auf, wenn der örtliche Druck kleiner als der thermodynamische Gleichgewichtsdampfdruck ist. Dabei werden Volumengebiete sichtbar, die mit Dampf gefüllt sind. Betrachtet man z.B. die Schichtkavitation auf der Propellersaugseite, so beeinflusst die Kavitation im starken Maße die hydrodynamischen Eigenschaften (Auftriebs- und Druckverteilung) des Propellers und ist ebenfalls Ursache für Vibration, Lärm und Erosion.

Die Möglichkeit einer Kavitationsvorhersage bei Schiffe im Entwurfszustand fände bei der Schiffsindustrie großes Interesse, um damit die negativen Auswirkungen der Kavitation zu kennen und möglichst gering zu halten. Die Kavitationsberechnungen für Propeller stehen in dieser Arbeit nicht im Vordergrund. Schwerpunktartig wird der Tragflügel als spezieller Fall betrachtet, um die gesamte Problematik mit einfacheren Ansätzen zu bewältigen. Das dreidimensionale Problem beim Propeller wird zu einem zweidimensionalen beim Tragflügel reduziert. Diese Arbeit kann nicht den Anspruch auf abschließende Behandlung der instationären Kavitationsberechnungen erfüllen, sondern soll als Diskussionsgrundlage für weitere theoretische und experimentelle Untersuchungen am Tragflügel und vor allem am Propeller verstanden sein.

Für Kavitationsberechnungen stehen grundsätzlich die Methoden der Blasendynamik und die der Profiltheorie zur Verfügung.

Bei dem Verfahren der Blasendynamik wird das Entstehen von Kavitation physikalisch als Verdampfungsprozeß um Störstellen erklärt. Diese Störstellen mit bereits vorhandenen Phasentrennflächen (z.B. Luftblasen oder Porenkeime) weiten sich bei der Absenkung des Wasserdrucks unter dem Gleichgewichtsdampfdruck instabil auf. Das Verschwinden von Kavitationsgebieten kann entsprechend bei ansteigendem Druck des Wassers als Kondensationsvorgang an diesen Störstellen erklärt werden. Die Blasendynamik hat den Vorteil, daß sie den eigentlich physikalischen Vorgang der Kavitation mit den dabei beteiligten Stoffen und deren Eigenschaften (z.B. die Wasserqualität einschließlich dem Zugspannungsabbau im Wasser) mit erfassen kann.

In der Literatur findet man eine Anzahl verschiedener Ansätze und Modelle (z.B. /1, 2, 3 oder 4/), die diese dynamische Stabilität der miteinander in Wechselwirkung stehender Blasen oder Keime unter dem Einfluß des Außendruckes beschreiben. Diese Ansätze sind jedoch noch nicht zufriedenstellend, da sie zum Teil mit empirischen Parametern arbeiten oder

das Vielblasensystem aufgrund mangelnder Kenntnis ihres physikalischen Verhaltens im Vergleich zum Experiment ungenau beschreiben.

Bei der Bewertung beider Verfahren ist wesentlich, daß die Blasendynamik die genaue Messung der Keimverteilung (also Anzahl und Größe der enthaltenen Keime) in der Zuströmung voraussetzt. Bei der experimentellen Bestimmung der Verteilung kleiner Keime sind jedoch noch unüberbrückbare Schwierigkeiten vorhanden /5/, so daß schon aus diesem Grund die Blasendynamik als Berechnungsverfahren der Kavitation für die Gewinnung quantitativer Resultate weniger geeignet erscheint.

Bei der Methode der Profiltheorie wird die Kavitationsschicht auf der Flügelsaugseite wie weiter unten genauer beschrieben als eine Art zusätzlicher Verdrängungskörper aufgefaßt. Die infolge der Kavitation veränderte Strömung und Druckverteilung werden durch zusätzliche Quellen, Senken und Wirbel mathematisch erfaßt. Als Eingangsgrößen bei diesem Verfahren wird nur die Geometrie des Tragflügels und keine Messung der Keimverteilung vorausgesetzt. Im Gegensatz zur Blasendynamik gestattet die Profiltheorie eine relativ genaue Berechnung der Kavitationsgeometrie (Dicke bzw. Volumen), die z.B. zur Bestimmung von Vibrationserzeugung am Hinterschiff für den Fall eines Propellers benötigt werden. Nachteilig an der Profiltheorie ist, daß die physikalischen Eigenschaften des Strömungsmediums nicht erfaßt werden können.

Der Vergleich der Brauchbarkeit beider vorgestellter Methoden ergibt aus dem oben gesagten, daß z.Zt. die Profiltheorie die sinnvollste und erfolgversprechendste Methode der Kavitationsvorhersage ist.

Der Ansatz der stationären Profiltheorie, d.h. für einen festen Anstellwinkel, geht auf /6/ zurück. In dieser Arbeit sind wie z.B. auch in /7/ noch im Gegensatz zum Experiment stehende Singularitäten in der Druckverteilung bzw. in den Belegungsfunktionen enthalten. Dieser Widerspruch der Theorie zum Experiment konnte in /8/ mit Hilfe einer analytischen Lösung der zugrundeliegenden Theorie beseitigt werden. In Verbindung mit /9/ (vgl. auch /10/) konnte die stationäre Kavitationsberechnung somit abschließend behandelt werden. Auf dieser Grundlage der stationären Theorie wurde die weiter unten vorgestellte instationäre Theorie entwickelt.

Schwerpunkt dieser Arbeit soll die instationäre Kavitationsberechnung sein, wobei im Gegensatz zu einer Reihe von Veröffentlichungen (z.B. /11, 13 oder 14/) die Kavitationsgrenze von der Zeit abhängig sein soll. Erst in jüngster Zeit sind drei Arbeiten (/15, 16 und 17/) erschienen, die ebenfalls von variablen Grenzen ausgehen, jedoch andere in manchen Punkten bedenkliche Lösungswege heranziehen. An späterer Stelle sollen die inter-

essierenden Veröffentlichungen -insbesondere die drei letzt genannten- gesondert diskutiert werden, um die eigene Theorie bzgl. ihrer Aussagemöglichkeit besser einordnen zu können.

Angemerkt werden soll noch, daß mit der hier vorgelegten Theorie neben der geometrischen Form der Kavitationsschicht erstmals auch die instationäre Druckverteilung eines kavitierenden Profils berechnet werden konnte.

Eine Theorie ist immer nur in Verbindung ihrer experimentellen Überprüfung zu sehen. In der Literatur sind jedoch keine Kavitationsmessungen am Tragflügel zu finden gewesen, die im Hinblick auf die Diskussion mit der hier vorgestellten Theorie (bzgl. der erforderlichen Voraussetzung von Teilkavitation in einer Potentialströmung) geeignet erschienen. Um so mehr gilt dem Institut für Schiffs- und Meerestechnik der TU Berlin der Dank für durchgeführte Kavitationsmessungen, die den Anforderungen in der Versuchsausführung gerecht wurden.

Diese weiter unten beschriebenen Kavitationsmessungen an einem schwingenden Tragflügelprofil sind jedoch auch nur bedingt zum Vergleich mit der Theorie heranzuziehen, da der benutzte Tragflügel -wie sich erst im nachhinein herausstellte- schon bei relativ kleinem Anstellwinkel laminare und turbulente Ablöseerscheinungen der Grenzschicht aufweist (siehe weiter unten).

Die hier behandelte instationäre Kavitationstheorie mit zeitlich abhängigen Kavitationsgrenzen konnte nur numerisch gelöst werden. Eine analytische Lösung des Integralgleichungssystems, auch für den Grenzfall zum stationären Zustand, führte, wie weiter unten geschildert, zu keinem Erfolg. Günstigerweise basiert nun der numerische Lösungsweg der instationären Theorie auf den Ergebnissen der stationären Behandlung. Diese stationäre Lösung konnte weitgehend analytisch durchgeführt werden /8/ und ist durch Experimente abgesichert.

Mit der Grundlage der stationären Lösung und einer Diskussion der numerischen instationären Resultate soll an späterer Stelle die Konsistenz der hier vorgestellten Theorie aufgezeigt werden.

2.0 INSTATIONÄRE KAVITATIONSTHEORIE FÜR TRAGFLÜGEL

Inkompressible, reibungslose Strömungen können im ruhenden System als Potentialströmung mit dem Ansatz $\vec{w} = \text{grad}\phi$ behandelt werden, mit \vec{w} als dem Geschwindigkeitsvektor und ϕ dem zugehörigen Geschwindigkeitspotential. In den nachfolgenden Betrachtungen wird solch eine Potentialströmung vorausgesetzt, bei der dann wegen der Linearität der Laplace Gleichung $\Delta\phi=0$ das Prinzip der Superposition gilt.

Weiterhin liegt den hier vorgestellten instationären Kavitationsberechnungen die Profiltheorie (Tragflügel mit unendlicher Spannweite) in der weiter unten beschriebenen linearisierten Form zugrunde. Die Geschwindigkeitsverteilung (bzw. die gesuchte Kavitationsgeometrie) an einem vorgegebenen Tragflügelprofil läßt sich mit der Profiltheorie durch zwei unterschiedliche Verfahren, nämlich mit Hilfe a) der konformen Abbildung und b) der Singularitätenmethode, ermitteln.

Die Methode a) ist nur für das ebene Problem gültig und bestimmt die gesuchte Strömung um einen vorgegebenen Körper durch eine konforme Abbildung (vgl. /18/) auf eine bekannte Strömung eines in der Geometrie ebenfalls bekannten Strömungskörpers. Bei bekannter Abbildungsfunktion ist die Lösung exakt bestimmt. Der Nachteil dieses Lösungsweges ist, daß die Vorgabe einer Abbildungsfunktion nicht ohne weiteres möglich ist.

In der in dieser Arbeit verwendeten Singularitätenmethode (Verfahren b)), wird der umströmte Körper durch Quellen, Senken und Wirbel, den sogenannten Singularitäten, ersetzt. Diese ordnet man im inneren des Profils in geeigneter Weise an, um mit der überlagerten Anströmung mathematisch die gewünschten Körperkonturen zu erzeugen. Diese Methode ist auch dreidimensional anwendbar und ist, wie die Erfahrung zeigt /18/, gegenüber der konformen Abbildung mathematisch zweckmäßiger und einfacher zu lösen, obwohl sie nur Näherungslösungen aufgrund der notwendigen Linearisierung liefert.

Für den Theorieansatz wird die Erkenntnis (z.B. /18/) verwendet, daß die Wirkung eines Tragflügels auf die umgebene Strömung aus zwei physikalischen Effekten besteht, die getrennt behandelt werden können:

- der zirkulatorischen Umströmung des Profils, die verantwortlich für die Auftriebskraft ist und mathematisch durch eine Wirbeldichte γ beschrieben wird. Dieser Effekt entsteht durch die Profilwölbung und dem wirksamen Anstellwinkel.
- der Verdrängungswirkung der endlichen Profildicke, die eine Verkleinerung der Drücke auf beiden Profildicken bewirkt und die

mathematisch durch eine Quellen-Senkenbelegung q nachgebildet wird.

Analoge Betrachtungen werden für die Kavitationsschicht, die auf der Profilsaugseite haftet (Abb.1), durchgeführt. Diese Schicht wird als eine Art

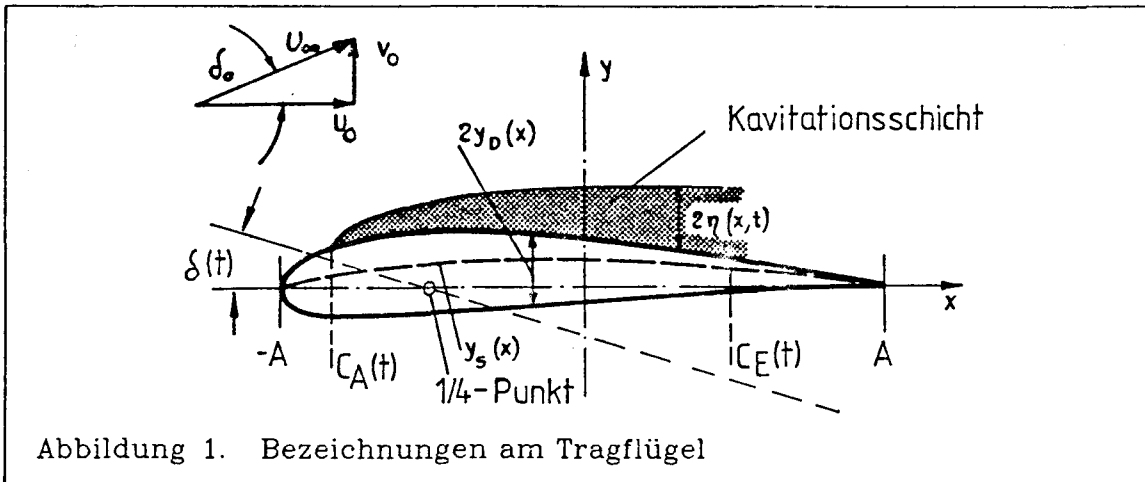


Abbildung 1. Bezeichnungen am Tragflügel

Verdrängungskörper aufgefaßt, dessen Wirkung durch eine zusätzliche Quellen-Senkenbelegung q_η und die durch die Kavitation veränderte Auftriebsverteilung durch eine zusätzliche Wirbelbelegung γ_η berücksichtigt wird.

Außerdem liegt unseren theoretischen Ansätzen das offene Kavitationsmodell zugrunde. Eine Kavitationsschicht kann nämlich nicht als geschlossener Strömungskörper angenommen werden, da beim Kavitationsende kein Staupunkt auftritt. Fordert man trotzdem eine Schließungsbedingung, so liefert die Theorie stets unrealistische Singularitäten. Bei diesem Ansatz wird der Zusammenfall hinter der Kavitationsschicht unberücksichtigt gelassen. Der Zusammenfall bewirkt eine Verlängerung der Kavitationsschicht über $C_E(t)$ hinaus, der in einem späteren Abschnitt mit Hilfe der Blasendynamik abgeschätzt und bei den späteren Rechnungen bedacht werden soll.

Berechnet werden soll die Kavitationsausdehnung $C_E(t)$, die Kavitationsdicke $2\eta(x,t)$ und die Kavitationsfläche $F(t)$.

2.1 DAS INSTATIONÄRE INTEGRALGLEICHUNGSSYSTEM

Für die nachfolgende Aufstellung eines Integralgleichungssystems wird ein mäßig dickes und gewölbtes Flügelprofil betrachtet, dessen Sehne mit der

x-Achse im Intervall $-A \leq x \leq A$ zusammenfällt. Mit u^∞ und $\delta(t)$ werden die Anströmgeschwindigkeit und der Anstellwinkel bezeichnet; p^∞ ist der Zuströmdruck. Die Kavitationsschicht beginnt bei $C_A(t)$ und endet bei $C_E(t)$. Die Skelettlinie ist mit $Y_S(x,t)$, die Dickenlinie mit $Y_D(x,t)$ bezeichnet. Siehe hierzu die Abb.1.

Die durch die Kavitationsschicht hervorgerufenen Effekte auf die umgebene Strömung werden durch die bereits eingeführten Zusatzbelegungen $q_\eta(x,t)$ und $\gamma_\eta(x,t)$ erfaßt, die sich mit Hilfe eines Integralgleichungssystems bestimmen lassen. Dazu wird die Strömungsrandbedingung und die Druckbedingung jeweils für den Zustand mit und ohne Kavitation aufgestellt, aus denen dann durch Vergleich das gesuchte Gleichungssystem folgt. Die Bildung des Geschwindigkeitspotentials bedarf dabei besonderer Überlegung.

Das Problem bei der Auflösung des gekoppelten Integralgleichungssystems sind die zeitabhängigen Integrationsgrenzen $C_A(t)$ und $C_E(t)$. Zur Vereinfachung wird deshalb angenommen, daß der Kavitationsbeginn im Minimum der Druckverteilung des nichtkavitierenden Profils liegen soll. Dieses Druckminimum ist bzgl. der Profiltiefe als zeitlich konstant anzunehmen (siehe weiter unten), so daß auch der Kavitationsbeginn in der späteren Behandlung als zeitlich konstant bei etwa 0.1% der Profiltiefe eingeführt werden kann; zunächst soll die Theorie auch für ein variables $C_A(t)$ aufgestellt werden. Die Annahme eines konstanten Kavitationsbeginns wird durch weiter unten beschriebene Experimente abgesichert. Mit der Lösung ist auch die gesuchte instationäre Kavitationsausdehnung $C_E(t)$ und die Kavitationsdicke $2\cdot\eta(x,t)$ bzw. die Kavitationsfläche $F(t)$ bekannt.

In den folgenden Vorüberlegungen soll auf die notwendigen Randbedingungen, auf das zur Potentialströmung gehörende Geschwindigkeitspotential sowie auf die instationäre Druckverteilungsberechnung (ohne Berücksichtigung der Kavitationsschicht) gesondert eingegangen werden.

2.1.1 Grundlagen

2.1.1.1 Geschwindigkeitspotential

In diesem Abschnitt soll das Geschwindigkeitspotential $\Phi_{q\eta}(x,t)$ der Zusatzbelegung $q_\eta(x,t)$ bestimmt werden.

Bei lufthaltigem Wasser zeigt die Erfahrung, daß bei Strömungsvorgängen näherungsweise Inkompressibilität vorausgesetzt werden kann, so fern man Untersuchungen in Nähe des Strömungskörpers durchführen will und

außerdem dabei die auftretenden Geschwindigkeiten der Strömung etwa 30% der örtliche Schallgeschwindigkeit ist. In solch einem Fall gilt für die Berechnung des Geschwindigkeitspotentials die Laplace-Gleichung $\Delta\phi=0$ (vgl. /19/).

Bei dem vorliegenden Problem ruft das schwingende Flügelprofil in dem vorhandenen kompressiblen Medium (lufthaltiges Wasser) Verdichtungen und Verdünnungen, eine instationäre Druckverteilung, hervor. Dadurch werden Schallwellen erzeugt, die aufgrund ihrer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit für einen Ort mit endlichem Abstand vom Profil nacheinander phasenverschoben bzgl. der Profilschwingung sind. Für diesen instationären Strömungsvorgang kann das Potential einer zeitabhängigen Quelle nicht mehr aus den Formeln der inkompressiblen zweidimensionalen Strömung entnommen werden (vgl. /20, 21/), sondern das gesuchte Potential $\phi_{q\eta}(x,t)$ muß aus der Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung für kompressible Unterschallströmung im Grenzübergang zur unendlichen Spannweite abgeleitet werden. Denn Lösungen der Wellengleichungen mit geraden Raumdimensionen führen nach dem Huyghenschen Prinzips zu physikalisch unsinnigen Ergebnissen. Das Huyghensche Prinzip besagt in diesem Zusammenhang, daß ein scharf lokalisierter Anfangszustand sich später an einer anderen Stelle als ein zeitlich ebenso scharf begrenzter Effekt zeigt /21/.

Gemäß der instationären Aerodynamik /22/, vgl. auch /12,23/, lautet die dreidimensionale Wellengleichung für akustische Ausbreitungsvorgänge im kompressiblen Medium:

$$(1) \quad \Delta\phi_{q\eta} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \phi_{q\eta}}{\partial t^2} - \frac{2u_\infty}{a_0^2} \frac{\partial^2 \phi_{q\eta}}{\partial x \partial t} - \frac{u_\infty^2}{a_0^2} \frac{\partial^2 \phi_{q\eta}}{\partial x^2} = f(x,y,z,t) .$$

Dabei ist a_0 die Schallgeschwindigkeit des Wassers. Die auf Kirchhoff zurückgehende Lösung von (1) lautet nach /20/:

$$(2) \quad \phi_{q\eta} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \frac{1}{D} q\eta(\xi, \zeta, t + \frac{u_\infty(x-\xi)}{\beta^2 a_0^2} - \frac{D}{\beta^2 a_0}) d\xi d\zeta$$

mit

$$(3) \quad D = \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2 + \beta^2 (z-\xi)^2}$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{u_\infty^2}{a_0^2}$$

Der Flügelgrundriß wird durch die Koordinaten A und B begrenzt; A wird wie in Abb.1 verwendet und die Spannweite durch das Intervall $-B \leq \zeta \leq B$

angegeben. Im Sinne einer Absteigemethode soll im nachfolgenden von einer drei- auf eine zweidimensionalen Strömung übergegangen werden, d.h., das Potential $\Phi_{q\eta}(x,t)$ soll nicht mehr von der Spannweite abhängen. Als Voraussetzung soll ebenfalls die Quelledichte $q_\eta(x,t)$ nicht mehr von der Spannweite abhängen. Außerdem soll aus Zweckmäßigkeit bei der späteren Formulierung des Integralgleichungssystems an den festen Integrationsgrenzen A und B in (2) für die Integration über ξ festgehalten werden. Deshalb muß in (2) $q_\eta(x,t)$ für den Bereich des Flügelgrundrisses ohne Kavitation verschwinden, d.h. es muß gelten

$$(4) \quad q_\eta(x,t) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} -A \leq \xi \leq C_A(t) \\ C_E(t) \leq \xi \leq A \end{cases}$$

Die Quellen-Senkenverteilung soll nun in eine Fourierreihe der Form

$$(5) \quad q_\eta(x,t) = \sum_{\mu=-M}^M q_{\eta\mu}(x) \cdot e^{i\mu\omega t}$$

entwickelt werden. Solch eine Darstellung ist grundsätzlich für jede zeitlich periodische stetige im Bereich $-A \leq x \leq A$ definierte Funktion möglich. Diese Entwicklung ist auch deswegen notwendig, da für eine spätere Anwendung $\Phi_{q\eta}(x,t)$ nach der Zeit differenziert werden muß. Bei einer quasistationären Rechnung, bei der man im Intervall $C_A(t) \leq x \leq C_E(t)$ nur eine diskrete endliche Anzahl von $q_\eta(x,t)$ -Funktionen erhält, ist eine Differentiation nur auf diese Weise möglich.

Um den Grenzübergang für $\Phi_{q\eta}(x,t)$ für unendliche Spannweite durchzuführen, muß $q_\eta(x,t)$ weiter umgeformt und diskutiert werden, wobei aus Zweckmäßigkeit neben dem Glied für den stationären Anteil ($\mu=0$) nur das erste instationäre Glied ($\mu=1$) behandelt werden soll. Die anderen Anteile $2 \leq \mu \leq M$ ergeben sich aus analogen Betrachtungen.

Der Grenzübergang zur ebenen Theorie soll -wie schon gesagt- bei einem Flügel mit großem Seitenverhältnis ($A < B$) erfolgen, und man kann sich deshalb auf eine Flügelebene $B \leq z \leq 0$ beschränken. Die ξ -Integration in (2) kann in zwei Teile aufgespalten werden:

$$(6) \quad \int_{-B}^B d\xi = \int_{-B}^z d\xi + \int_z^B d\xi = 2 \int_{-B}^z d\xi$$

Folgende Substitution wird eingeführt

$$(7) \quad (\zeta - z) = \frac{1}{\beta} \sqrt{\sigma^2 - 1} \cdot \sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2 y^2} \quad \text{für } \begin{cases} +\zeta > z \\ -\zeta < z \end{cases}$$

aus der unmittelbar der Zusammenhang folgt:

$$(8) \quad \sigma = \sqrt{\frac{(\zeta - z)^2 \beta^2}{(x - \xi)^2 + \beta^2 y^2} + 1}$$

$$\frac{d\zeta}{D} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} d\sigma$$

Aus der Lösung (2) ergibt sich mit dem stationären Anteil $\Phi_{q\eta_0}(x, t)$ aus (5) und durchgeführter Transformation (7)

$$(9) \quad \phi_{\eta_0} = -\frac{1}{2\pi\beta} \int_{-A}^A d\xi \int_1^{\sigma} q_{\eta_0}(\xi) \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}$$

mit

$$G = \sqrt{\frac{\beta^2 B^2}{(x - \xi)^2 + \beta^2 y^2} + 1}$$

Die Integration in Spannweitenrichtung kann exakt durchgeführt werden und man erhält

$$(10) \quad \phi_{\eta_0} = -\frac{1}{2\pi\beta} \int_{-A}^A q_{\eta_0}(\xi) \ln \left[\sqrt{\frac{\beta^2 B^2}{(x - \xi)^2 + \beta^2 y^2} + 1} + \frac{\beta B}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2 y^2}} \right] d\xi$$

Für Wasser kann die Zuströmgeschwindigkeit u_∞ als klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit a_0 angenommen werden. Mit $a_0 \ll u_\infty$ ergibt sich für (3) $\beta^2 \sim 1$. Außerdem gilt beim Grenzübergang $B \rightarrow \infty$ für große Seitenverhältnisse ($A \ll B$) $\sqrt{(x - \xi)^2 + \beta^2 y^2} \ll \beta$. Damit läßt sich Gleichung (10) vereinfacht darstellen:

$$(11) \quad \phi_{\eta_0} = +\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q_{\eta_0}(\xi) \ln \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{2B} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q_{\eta_0}(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi,$$

denn für das Potential besitzen additive Konstanten keine Bedeutung, so daß die Normierungskonstante $2B$ im Logarithmus gestrichen werden kann. Die Gleichung (11) ist nicht von der Zeit abhängig.

Der instationäre Anteil $\mu=1$ aus Lösung (2) hat nach erfolgter Transformation mit (7) die Form

$$(12) \quad \phi_{\eta_1} = -\frac{1}{2\pi\beta} \int_{-A}^A d\xi \int_1^G q_{\eta_1}(\xi) \exp\left\{i\omega \frac{\mu_{\infty}(x-\xi)}{\beta^2 a_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{-i \frac{\omega G \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2}}{\beta^2 a_0}\right\} \frac{dG}{\sqrt{G^2-1}} e^{i\omega t}.$$

Die obere Integrationsgrenze G ist identisch mit der in (9). Wollte man in (12) gleichzeitig die Grenzübergänge $a_0 \rightarrow \infty$ zur inkompressiblen Strömung und $B \rightarrow \infty$ zur unendlichen Spannweite durchführen, so würde das Integral über $d\xi$ und damit $\Phi_{q_{\eta_1}}(x,t)$ über alle Grenzen wachsen und somit sinnlos werden. Also muß entweder a_0 oder B als endlicher Wert beibehalten werden.

In einer zweidimensionalen Profiltheorie hatte eine endliche Spannweite $2B$ keine physikalische Grundlage, da der angenommene Wert für B nicht begründbar und somit willkürlich wäre. Die Schallgeschwindigkeit a_0 im reinem Wasser stellt hingegen mit etwa 1500 m/s einen physikalisch wohldefinierten Grenzwert dar. Somit soll in (12) der Grenzübergang $B \rightarrow \infty$ erfolgen.

Zunächst sollen einige Umformungen durchgeführt werden. Die Hankel-Funktion 2. Art läßt sich darstellen /24 oder 25/ aus

$$(13) \quad \int_{-1}^{\infty} \exp\{-i\Theta\sigma\} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}} = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(\Theta) \quad \text{mit} \quad \Theta = \frac{\omega}{\beta^2 a_0} \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2}.$$

Mit (12) für $b \rightarrow \infty$ erhält man durch Einsetzen aus (13)

$$(13a) \quad \phi_{\eta_1} = -\frac{e^{i\omega t}}{4i\beta} \int_{-A}^A q_{\eta_1}(\xi) H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{\beta^2 a_0} \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2}\right) e^{i \frac{\omega \mu_{\infty}}{\beta^2 a_0^2} (x-\xi)} d\xi$$

Für die Werte, so wie sie weiter unten in der Strömungs- und Druckrandbedingung gebraucht werden, gilt die Abschätzung

$$(14) \quad \Theta = \frac{\omega}{a_0} \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} \leq 2 \frac{\omega A}{a_0} = 2k \frac{\mu_{\infty}}{a_0}$$

mit $k = \omega A / u_{\infty}$ als die reduzierte Frequenz. Mit der Annahme einer nahezu kompressiblen Strömung gilt $u_{\infty} \ll a_0$. Damit kann Θ als klein vorausgesetzt werden und für die Hankelfunktionen gilt z.B. nach /24/ für kleine Werte von Θ folgende Näherung:

$$(15) \quad H_0^{(2)}(\Theta) = 1 - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\Theta}{2} - \frac{2i}{\pi} 0,577 + \mathcal{O}(\Theta^2)$$

In dem Term $\mathcal{O}(\Theta^2)$ sind alle quadratischen Terme von Θ zusammengefaßt, die für kleine Θ vernachlässigt werden. Mit der obigen Annahme einer nahezu kompressiblen Strömung folgt für β nach (3) $\beta^2 \sim 1$ und für den

Exponentialterm in (13a) $\exp\{i\omega\infty(x-\xi)/a_0^2\} \sim 1$. Somit gilt mit (14) und (15) für $\Phi_{q\eta_1}(x,t)$ aus Gleichung (13a)

$$(16) \quad \Phi_{q\eta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q_{\eta_1}(\xi) \left[\ln \frac{\omega \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}{2a_0} + 0.577 + i \frac{\pi}{2} \right] e^{i\omega t} d\xi .$$

Bei Berücksichtigung aller instationären Anteile folgt somit endgültig für Gleichung (2)

$$(17) \quad \begin{aligned} \phi_{q\eta_1} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q_{\eta_0}(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi + \\ & + \sum_{\mu=-M}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q_{\eta_\mu}(\xi) \left[\ln \frac{\mu\omega \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}{2a_0} + 0.577 + i \frac{\pi}{2} \right] e^{i\mu\omega t} d\xi . \end{aligned}$$

Die Machzahl u_∞/a_0 der Strömung dient also zur Normierung des Logarithmus-Terms des Potentials, da gilt

$$(18) \quad \frac{\omega x}{a_0} = \frac{x}{A} k \frac{\mu\omega}{a_0} .$$

In der folgenden Gleichung soll die Ableitung von $\Phi_{q\eta_1}(x,t)$ nach der Zeit bereitgestellt werden. Dabei wird nun der Grenzübergang $y \rightarrow 0$ vollzogen, da gemäß der Näherung der linearisierten Profiltheorie die Quellen- Senkenverteilung auf der x-Achse angeordnet sind:

$$(19) \quad \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_{q\eta_1}}{\partial t} = \sum_{\mu=-M}^M i \frac{\mu\omega}{\mu_\infty^2 \pi} \int_{-A}^A q_{\eta_\mu}(\xi) \left[\ln \frac{\mu\omega \sqrt{(x-\xi)^2}}{2a_0} + 0.577 + i \frac{\pi}{2} \right] e^{i\mu\omega t} d\xi .$$

Gleichung (19) wird in der späteren Aufstellung des Integralgleichungssystems verwendet werden. In (19) ist wegen der Zeitunabhängigkeit von Φ_{η_0} (11) der Term $\mu=0$ bei der Ableitung nicht mehr enthalten.

2.1.1.2 Strömungsrandbedingung

Das hier betrachtete Tragflügelprofil führt zeitlich periodische Dreh-schwingungen um den 1/4-Punkt (vgl. Abb.1) aus, und es gelten folgende Voraussetzungen für die Linearisierung:

- Das Profil ist dünn und schwach gewölbt, so daß die Geschwindigkeitskomponenten am Ort der Sklettlinie annähernd gleich der auf der Profilhöhle sind (vgl./18/). Demnach wird die Sehne und nicht die

Sklettlinie mit den entsprechenden Wirbeln, Quellen und Senken belegt. Dieses führt zu mathematischen Vereinfachungen.

- Die Amplitudenänderungen der Anströmgeschwindigkeit infolge des zeitabhängigen Anstellwinkels $\alpha(t)$ in Richtung der Sehne (x-Achse) ist gegenüber der mittleren Anströmung u^∞ klein.
- Die Auslenkungsamplitude des Profils wird als klein gegenüber der Profiltiefe angenommen.

Aus den letzten beiden Punkten folgt, daß die instationäre Lageveränderung des Profils vernachlässigt werden kann. Dieses trifft jedoch verständlicher Weise für die Bewegungsgeschwindigkeiten nicht zu.

Zunächst werden Anstellwinkel und Wölbung des nichtkavitierenden Profils durch eine auf der Sehne angeordneten sog. gebundene Wirbelverteilung $\gamma(\xi, t)$ mit $-A \leq \xi \leq A$ beschrieben. Gemäß dem zeitlichen Wirbelerhaltungssatz werden im Grenzfall verschwindender Zähigkeit (wie hier angenommen) von den gebundenen Wirbeln laufend freie Längswirbel gebildet, die mit u^∞ auf der x-Achse abschwimmen und die eine Geschwindigkeit am Orte des Profils induzieren. Der räumliche Wirbel-Erhaltungssatz ist wegen der Voraussetzung der unendlichen Spannweite von vornherein erfüllt.

Die Strömungsrandbedingung besagt, daß der Quotient aus der Summe aller Geschwindigkeitskomponenten in y-Richtung und der aller Komponenten in x-Richtung gleich der totalen Ableitung der Sklettlinie nach der Zeit ist, d.h. die Sklettlinie soll Stromlinie sein. Für den kavitationsfreien Zustand gilt also

$$(20) \quad \frac{dY_s(x,t)}{dt} = \frac{v_0 + v_\gamma + v_L + v_q}{u_0 + u_\gamma + u_L + u_q}$$

In y-Richtung ist v_0 die Komponente der Zuströmung, v_γ die von den gebundenen Wirbeln und v_L die von den freien Längswirbeln induzierten Geschwindigkeit. v_q ist die von den noch einzuführenden Quellen- Senkenverteilung induzierten Geschwindigkeitskomponente. Die entsprechenden Komponenten in x-Richtung sind u_0 , u_γ , u_L und u_q . Für diese Geschwindigkeiten gelten folgende Vereinfachungen:

- $u_0 \sim u^\infty$ aufgrund $\cos\delta_0 = u_0/u^\infty$ und $\cos\delta_0 \sim 1$ wegen der geringen Auslenkung (vgl. Abb.1)
- $v_0 \sim \delta \cdot u^\infty$ wegen $u_0 \sim u^\infty$ und $\sin\delta_0 \sim \delta_0$
- u_γ , v_q und u_L sind im arithmetischen Mittel Null, da die von einer Wirbelschicht (bzw. Quellen-Senken-Verteilung) induzierte Tangential-

komponente (Normalkomponente) beim Durchtritt durch die Wirbelschicht (Quellen-Senken-Schicht) einen Sprung erleidet (vgl. auch /12/).

- $u_q < u_0$, u_q wird wie in der linearisierten Profiltheorie üblich gegenüber u_0 vernachlässigt.

Die Terme der Strömungsrandbedingung reduzieren sich also für das von Kavitation freie Profil zu dem folgenden Ausdruck, wobei u_∞ zur Normierung der Geschwindigkeiten dient:

$$(21) \quad \frac{dY_s(x,t)}{dt} = \delta(t) + \frac{v_x}{u_\infty} + \frac{v_L}{u_\infty} = \frac{\partial Y_s}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial Y_s}{\partial x}.$$

Für den Fall einer ausgebildeten Kavitationsschicht auf der Flügeloberseite lassen sich analoge Betrachtungen und Vereinfachungen durchführen.

Die mathematische Beschreibung der durch den Einfluß der Kavitationsschicht veränderten Strömung erfolgt mit Hilfe der bereits erwähnten zusätzlichen Wirbelverteilung $\gamma_\eta(x,t)$, die aufgrund der Gültigkeit des Prinzips der Superposition mit $\gamma(x,t)$ überlagert werden kann. Die Strömungsrandbedingung fordert nun bei einem Profil mit Kavitation, daß die Mittellinie $M(x,t) = Y_s(x,t) + \eta(x,t)$ (vgl. Abb. 1) Stromlinie sein soll. Analog zu (20) folgt

$$(23) \quad \frac{d(Y_s(x,t) + \eta(x,t))}{dt} \frac{1}{u_\infty} = \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial Y_s}{\partial t} + \frac{\partial Y_s}{\partial x} + \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ = \delta(t) + \frac{1}{u_\infty} v_x + \frac{1}{u_\infty} v_{x\eta} + \frac{1}{u_\infty} v_L + \frac{1}{u_\infty} v_{L\eta}$$

Dabei ist in y-Richtung $v_{y\eta}$ von der zusätzlichen Wirbelbelegung $\gamma_\eta(x,t)$ und $v_{L\eta}$ von den freien Längswirbeln induziert.

Vergleicht man nun Gl. (20) für den Fall ohne und Gl. (23) für den Fall mit Kavitation, so erhält man

$$(24) \quad \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{u_\infty} v_{y\eta} + \frac{1}{u_\infty} v_{L\eta}$$

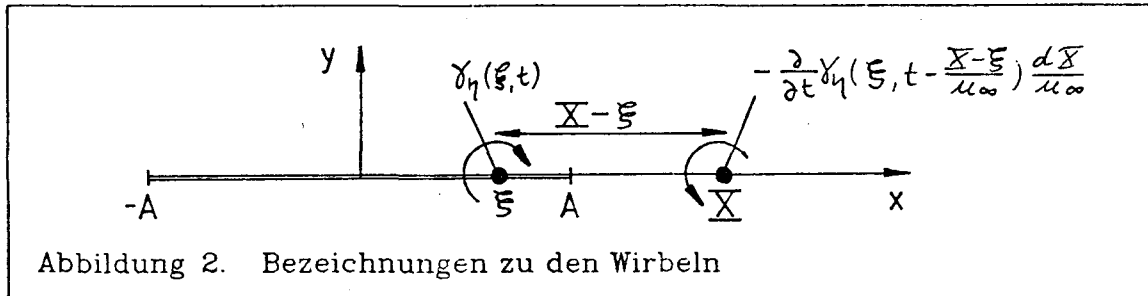
Alle freien Wirbelelemente der Zusatzbelegung induzieren auf der x-Achse bekanntermaßen die Geschwindigkeit $v_{L\eta}$

$$(25) \quad v_{L\eta} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \gamma(\xi, t - \frac{x-\xi}{u_\infty}) \frac{d\xi d\xi}{x-\xi}$$

und die gebundenen Wirbel die Geschwindigkeit $v_{\gamma\eta}$

$$(26) \quad v_{\gamma\eta} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma_{\eta}(\xi, t)}{x-\xi} d\xi$$

Für die Bezeichnungen der freien und gebundenen Wirbel vgl. Abb.2.



Das gebundene Wirbelelement γ_{η} induziert dauernd die freien Längswirbel der Stärke

$$(26a) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\eta}(\xi, t - \frac{X-\xi}{u_{\infty}}) \frac{dX}{u_{\infty}},$$

die mit der Geschwindigkeit u_{∞} hinter dem Profil abschwimmen.

Bei einem symmetrischen Profil mäßiger Dicke gilt für die Quellverteilung in linearer Näherung bei Vernachlässigung der induzierten Geschwindigkeit u_q gegenüber u_{∞} nach der Randbedingung für die Verdrängungsströmung:

$$(27) \quad \frac{q(x)}{2u_{\infty}} = \frac{dY_s}{dx}$$

Daraus folgt analog für die zeitabhängige Kavitationsdicke aus der entsprechenden Randbedingung nach erfolgter totaler Differentiation von $\eta(x, t)$ (vgl./1/).

$$(28) \quad \frac{q_{\eta}(x, t)}{2} = \frac{d\eta(x, t)}{dt} = u_{\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Setzt man in (28) nacheinander die Gleichungen (24), (25) und (26) ein, so erhält man insgesamt aus der Strömungsrandbedingung

$$(29) \quad q_{\eta}(x, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma_{\eta}(\xi, t)}{x-\xi} d\xi + \frac{1}{\pi u_{\infty}} \int_{-A}^{\infty} \int_{\bar{x}=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{\eta}(\xi, t - \frac{\bar{x}}{u_{\infty}}) \frac{d\bar{x} d\xi}{x-\xi},$$

die man weiter unten in dieser Form verwenden wird.

2.1.1.3 Druckrandbedingung

Neben der Stromlinienbedingung (29), die im vorhergehenden Abschnitt abgeleitet wurde, muß außerdem noch die Druckrandbedingung erfüllt sein.

Für den kavitationsfreien Zustand des Profils wird der Druckbeiwert $c_p(x,t)$ definiert durch

$$(30) \quad c_p(x,t) = \frac{p_\infty - p(x,t)}{\rho/2 \cdot u_\infty^2} ,$$

wobei p_∞ der Druck weit vor dem Profil, $p(x,t)$ der von der Profiltiefe und der Zeit abhängige Druck auf der Flügelsaugseite und ρ die Dichte des Strömungsmediums ist.

Für den Fall mit Kavitation soll im Bereich $C_A(t) \leq x \leq C_E(t)$ Dampfdruck $p=p_v$ herrschen. Außerhalb des Kavitationsgebietes wird der Druckbeiwert allgemein von (30) abweichen. Deshalb soll bei Kavitation für das Profil der Kavitationsbeiwert $c_{vp}(x,t)$ gelten:

$$(31) \quad c_{vp}(x,t) = \begin{cases} c_v = \frac{p_\infty - p_v}{\rho/2 \cdot u_\infty^2} & \text{für } C_A(t) \leq x \leq C_E(t) \\ c_{vp}(x,t) & \text{für } \begin{cases} -A \leq x \leq C_A(t) \\ C_E(t) \leq x \leq A \end{cases} \end{cases} .$$

Die Druckbedingung soll im kavitierenden Zustand im ganzen Profilbereich $-A \leq x \leq A$ auf der Flügelsaugseite $y=+0$ gelten.

Gleichung (30) soll nun mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung bestimmt werden, die gestattet, einen Zusammenhang zwischen den ungestörten Zuströmgrößen weit vor dem Profil und den entsprechenden Größen direkt am Profil aufzustellen, wobei aus dem oben gesagten nur die axialen Geschwindigkeitskomponenten berücksichtigt werden:

$$(32) \quad \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{1}{2} u_\Sigma^2 + \frac{p(x,t)}{\rho} + \frac{\partial \Phi_\Sigma(x,t)}{\partial t}$$

mit

$$u_\Sigma = \sum_i u_i = u_\infty + u_y + u_z$$

Darin ist u_∞ die ungestörte Zuströmkomponente und p_∞ der zugehörige Druck. u_∞ ist konstant bzgl. der Zeit, so daß die Ableitung des zu u_∞ gehörenden Potentials Φ_∞ nach der Zeit Null ist. Weiter sind in (32) u_y und u_z die Komponenten, die von der Wirbeldichte $\gamma(x,t)$ und von der Quellen-

Senkenverteilung $q(x,t)$ in x -Richtung induziert werden. Vernachlässigt man die nichtlinearen Terme in (32), so ergibt eine Umstellung dieser Gleichung den für (30) gesuchten Zusammenhang:

$$(33) \quad c_p(x,t) = \frac{p_\infty - p(x,t)}{\rho/2 \mu_\infty^2} = \frac{2\mu_x}{\mu_\infty} + \frac{2\mu_y}{\mu_\infty} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_q(x,t)}{\partial t} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_s(x,t)}{\partial t}$$

In ähnlicher Weise läßt sich für (31) eine Bestimmungsgleichung aufgrund des Prinzips der Superposition erstellen:

$$(34) \quad c_{vp}(x,t) = \frac{2\mu_x}{\mu_\infty} + \frac{2\mu_y}{\mu_\infty} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_q(x,t)}{\partial t} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_s(x,t)}{\partial t} + \frac{2\mu_{xy}}{\mu_\infty} + \frac{2\mu_{qy}}{\mu_\infty} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_{qy}(x,t)}{\partial t} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_{sy}(x,t)}{\partial t}$$

Subtrahiert man nun (33) und (34) voneinander, so erhält man

$$(35) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) = \frac{2}{\mu_\infty} (\mu_{xy} + \mu_{qy}) + \frac{2}{\mu_\infty^2} \left(\frac{\partial \phi_{qy}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{sy}(x,t)}{\partial t} \right)$$

Gemäß der linearisierten Profiltheorie (/25/ und /26/) läßt sich setzen

$$(36) \quad \delta_y(x,t) = \left(2 \frac{\partial \phi_{xy}}{\partial x} + \frac{2}{\mu_\infty} \frac{\partial \phi_{xy}}{\partial t} \right)_{y=+0}$$

mit $\mu_{xy}(x,t) = \frac{\partial \phi_{xy}}{\partial x} \quad c_E(t)$

und $\mu_{qy}(x,t) = \frac{\partial \phi_{qy}}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{c_A(t)}^{c_E(t)} \frac{q_y(\xi,t)}{x-\xi} d\xi$

Man erhält einen Zusammenhang der Kavitationsbeiwerte für den Fall eines Profils mit und ohne Kavitation.

$$(37) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) = \frac{\delta_y(x,t)}{\mu_\infty} + \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{c_A(t)}^{c_E(t)} \frac{q_y(\xi,t)}{x-\xi} d\xi + \frac{2}{\mu_\infty} \frac{\partial \phi_{qy}}{\partial t}$$

Diese Gleichung wird ebenfalls im nächsten Abschnitt verwendet. In ihr ist die durch Formel (19) definierte Ableitung $\phi_{qy}(x,t)$ nach der Zeit enthalten.

2.1.1.4 Instationäre Druckverteilung ohne Kavitation

Die zirkulatorische Umströmung des Profils bewirkt auf der Saugseite eine Vergrößerung und auf der Druckseite eine Verkleinerung der Strömungsgeschwindigkeit. Dieser physikalische Effekt wird -wie bereits erwähnt- mit Hilfe einer Wirbelverteilung γ beschrieben, die periodisch mit dem zeitabhängigen Anstellwinkel oszilliert. Die zirkulatorische Umströmung ist vom Anstellwinkel abhängig, so daß in deren Folge die Wirbelverteilung γ ebenfalls zeitabhängig sein muß

Der Effekt der Verdrängungswirkung infolge der endlichen Dicke des Profils beschreibt eine Quellen-Senkenverteilung. Diese ist zeitunabhängig, da die Verdrängungswirkung nicht vom Anstellwinkel beeinflußt wird.

Ebenfalls wird wieder eine Potentialströmung angenommen, so daß sich zur Bestimmung der Druckverteilung instationär belasteter Flügelprofile ohne Kavitation die Bernoulli-Gleichung anbietet. Diese Berechnungsmethode ist bekannt und soll an dieser Stelle nur skizziert werden (z.B. /18/).

Das Geschwindigkeitsfeld (mit den Komponenten u und v in x - und y -Richtung) auf der Profilschneide bzw. x -Achse wird wieder vereinfacht, indem v wieder vernachlässigt wird (vgl. Abb.1). Die Komponente u setzt sich aus dem Anteil der Zuströmung u_0 und aus den aus der Wirbel- und Quellen-Senkenbelegung induzierten Teilen u_q und u_γ (alle in x -Richtung) zusammen.

Setzt man die Dickenlinie Y_D , die zur Beschreibung der Außenkontur des Profils benutzt wird, voraus, so läßt sich bei der oben durchgeführten Vernachlässigung der Geschwindigkeiten in y -Richtung die Tangentialgeschwindigkeit u_T längs der Profilkontur nach einer in /30/ (vgl. auch /18/) begründeten Formel angeben:

$$(38) \quad u_T = \frac{u_0 + u_q + u_\gamma}{\sqrt{1 + Y_D'^2}}$$

Die Tangentialgeschwindigkeit u_T wird dabei durch konforme Abbildung auf die x -Achse gewonnen. Der Faktor $\sqrt{1 + Y_D'^2}$ ist in der Literatur als Riegelsfaktor bekannt. Die Korrektur durch den Riegelsfaktor (vgl. /18/) ermöglicht, die Vorderkantenumströmung im Rahmen der linearisierten Profiltheorie sinnvoll zu erfassen. In (38) sind u_0 und u_q zeitlich unabhängig, nicht hingegen u_γ (siehe oben).

Gleichung (38) läßt sich in einen zeitunabhängigen und zeitabhängigen Teil trennen. Man erhält

$$(39) \quad \left(\frac{\mu_T}{\mu_\infty}\right)^2 = \frac{1}{1+\gamma_D'^2} \left\{ \left(1 + \frac{\mu_g}{\mu_\infty} + \frac{\mu_{\gamma_0}}{\mu_\infty}\right) + \frac{\mu_{\gamma_1}}{\mu_\infty} \right\}^2$$

$$= \frac{1}{1+\gamma_D'^2} \left(1 + \frac{\mu_g}{\mu_\infty} - \frac{\mu_{\gamma_0}}{\mu_\infty}\right) + \frac{2}{1+\gamma_D'^2} \left(1 + \frac{\mu_g}{\mu_\infty} + \frac{\mu_{\gamma_0}}{\mu_\infty}\right) \frac{\mu_{\gamma_1}}{\mu_\infty}$$

Aufgrund der Linearisierung wird der Term $(u_{\gamma_0}/u_0)^2$ vernachlässigt. Die Bernoulli-Gleichung (vgl. Abschnitt 2.2.1.3.) lautet zunächst

$$(40) \quad \frac{v_0^2}{2} + \frac{\mu_0^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{\mu_T^2}{2} + \frac{p(x,t)}{\rho} + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial t}$$

Die linke Seite von (40) bezieht sich auf den ungestörten Strömungszustand, die rechte Seite auf den unmittelbar am Profil. Als einziges von der Zeit abhängige Geschwindigkeitspotentiale ist nur noch das von der zeitlich abhängigen Wirbelverteilung γ geblieben. Wird (40) in der Form von (30) umgestellt, so ergibt sich

$$(41) \quad c_p(x,t) = \frac{p_\infty - p(x,t)}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \left(\frac{\mu_T}{\mu_\infty}\right)^2 - 1 - \left(\frac{v_0}{u_0}\right)^2 + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial t}$$

Die bereits eingeführte Näherung $u_0 \sim u_\infty$ wurde vollzogen. Der Term $(v_0/u_0)^2$ kann ebenfalls wieder vernachlässigt werden. Wird nun (39) in (41) eingesetzt, so ergibt sich

$$c_p(x,t) = c_{p0}(x) + c_{p1}(x,t)$$

$$(42) \quad \text{mit } c_{p0}(x) = \frac{1}{1+\gamma_D'^2} \left\{ \left(1 + \frac{\mu_g}{\mu_\infty} + \frac{\mu_{\gamma_0}}{\mu_\infty}\right)^2 \right\} - 1$$

$$c_{p1}(x,t) = \frac{2}{1+\gamma_D'^2} \left(1 + \frac{\mu_g}{\mu_\infty} + \frac{\mu_{\gamma_0}}{\mu_\infty}\right) \frac{\mu_{\gamma_1}}{\mu_\infty} + \frac{2}{\mu_\infty^2} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial t}$$

Für die induzierte Geschwindigkeit gilt aufgrund des zeitlichen Wirbelerhaltungssatzes

$$(43) \quad \mu_{\gamma_1}(x,t) = \frac{1}{2} \gamma_1^*(x,t) - \frac{1}{\mu_\infty} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial t}$$

Werden im Rahmen der Linearisierung in $c_{p1}(x,t)$ die Terme zweiter Ordnung bzgl. γ vernachlässigt (d.h. $\sqrt{1+c_{p0}(x)} \sim 1$), so ergibt sich für $c_{p1}(x,t)$

$$(44) \quad c_{p1}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}} \frac{\gamma_1^*(x,t)}{\kappa_\infty}$$

Dabei läßt sich γ_1^* in eine Fourierreihe entwickeln, wobei nur die linearen Terme berücksichtigt werden:

$$(45) \quad \gamma_1^*(x,t) = \gamma_1(x) e^{i\omega t} + \bar{\gamma}_1(x) e^{-i\omega t}$$

Die zur Berechnung von $c_{p0}(x)$ benötigten Größen u_q und $u_{\gamma 0}$ sind bekannt (vgl. z.B. /12/). Dieser stationäre Anteil der Druckverteilung wird also mit dem aus der Profiltheorie bekannten Verfahren der zweidimensionalen stationären Strömung um Flügelprofile mäßiger Wölbung und Dicke bei Berücksichtigung des Tunneleffektes nach einem Rechenprogramm von /5/ berechnet. Die Geometrie des verwendeten Profils NACA 16-006 kann /30/ entnommen werden.

Die für die Berechnung des instationären Anteils $c_{p1}(x,t)$ benötigte Wirbelverteilung $\gamma_1(x)$ ist ebenfalls hinlänglich bekannt. Sie lautet

$$(49) \quad \frac{\gamma_1(\vartheta)}{2\kappa_\infty} = \left\{ \frac{b_0 H_1^{(2)}(k) + i/2 b_1 H_0^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} - [b_1 - ik b_0] \sin \vartheta - i/4 k b_1 \sin 2\vartheta \right\} (-\delta_1)$$

Dabei ist x auf ϑ durch $x = -A \cos \vartheta$ transformiert. Weiter ist δ_1 die Amplitude der Winkelauslenkung und $H_0^{(2)}$ bzw. $H_1^{(2)}$ die Hankel-Funktionen zweiter Art. k ist die in (14) eingeführte reduzierte Frequenz. Für den hier vorliegenden Fall einer Drehschwingung um den 1/4-Punkt ist:

$$(50) \quad \begin{aligned} b_0 &= -\delta_1 (i/2 - k/4) \\ b_1 &= -\delta_1 k/2 \end{aligned}$$

Damit läßt sich (49) durch

$$(51) \quad \frac{\gamma_1(\vartheta)}{\kappa_\infty} = -\delta_1 \left\{ \frac{(i - k/2) H_1^{(2)}(k) + i k/2 H_0^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} - (2k + i k/2) \sin \vartheta - \frac{i k^2}{4} \sin 2\vartheta \right\}$$

darstellen. Wegen der Fourierentwicklung von $\gamma(\vartheta,t)$

$$(52) \quad \gamma(\vartheta,t) = \sum_{\mu=-M}^M \gamma_\mu(\vartheta) \exp\{i\mu\omega t\}$$

folgt für $\mu = \pm 1$ der Realteil daraus

$$(53) \quad \begin{aligned} \gamma(\vartheta,t) &= 2 \gamma_1(\vartheta) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &= \operatorname{Re}(\gamma_1(\vartheta)) \cos \omega t - \operatorname{Im}(\gamma_1(\vartheta)) \sin \omega t \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (46)

$$(54) \quad c_{p1}(x,t) = \delta_1 \left\{ (2A_0' \operatorname{ch} \frac{\vartheta}{2}) + 4k \sin \vartheta \right\} \cos \omega t + \\ + \delta_1 \left\{ -2A_0'' \operatorname{ch} \frac{\vartheta}{2} - k^2 (\sin \vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta) \right\} \sin \omega t$$

mit den in Real- und Imaginärteil aufgespaltenen Abkürzungen

$$(56) \quad -A_0' - i A_0'' = \frac{(i - \frac{k}{2}) H_1^{(2)}(k) + \frac{i k}{2} H_0^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)}$$

Mit der Transformation $\vartheta \rightarrow x$ vom Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ auf $-1 \leq x \leq 1$ folgt für den linearisierten instationären Term eine für die Berechnung geeignete Form

$$(57) \quad c_{p1}(x,t) = \left\{ \delta_1 \left[2A_0' \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} + 4k \sqrt{1 + \frac{x^2}{A^2}} \right] \cos \omega t + \right. \\ \left. + \delta_1 \left[-2A_0'' \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} - k^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{A^2}} \left(1 - \frac{x}{2A}\right) \right] \sin \omega t \right\} \cdot \\ \cdot \left(1 + \frac{Rv}{4A} \frac{A - x/A}{A + x/A}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Der Wurzelterm stellt den Riegelfaktor nun in der Schreibweise mit R_v als dem Vorderkantenradius des Tragflügels dar.

Damit ist die instationäre Druckverteilung (42) bzw. (30) für den kavitationsfreien Tragflügel bestimmt. Ein Vergleich zwischen Testrechnungen und Meßergebnissen instationärer Druckverteilungen eines schwingenden Profils /32/ zeigen gute Übereinstimmung und rechtfertigen den in diesem Abschnitt durchgeführten Ansatz für die instationäre Druckverteilungsberechnung.

2.1.2 Aufstellung des Gleichungssystems

Die Gleichung der Strömungsrandbedingung (29) und die der Druckbedingung (37) in Verbindung mit dem nach der Zeit abgeleiteten Potential (19) gestatten, ein Gleichungssystem aufzustellen mit dem die gesuchten Größen der Kavitationsausdehnung $C_F(t)$, der Kavitationsdicke $2\eta(x,t)$ und der Kavitationsfläch $F(t)$ ermittelt werden können. Diese drei Gleichungen werden übersichtshalber im folgenden noch einmal zusammengestellt:

$$(29) \quad \eta(x,t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\delta\varphi(\xi,t)}{x-\xi} d\xi + \frac{1}{\pi u_\infty} \int_{-A}^A \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \delta\eta(\xi,t - \frac{x-\xi}{u_\infty}) \frac{d\xi d\xi}{x-\xi}$$

$$(37) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) = \frac{\delta\eta(x,t)}{\mu_\infty} + \frac{1}{\pi\mu_\infty} \int_{C_A(t)}^{C_E(t)} \frac{q_\eta(\xi,t)}{x-\xi} d\xi + \frac{2}{\mu_\infty} \frac{\partial \phi_{q_\eta}(x,t)}{\partial t}$$

$$(19) \quad \frac{2}{\mu_\infty} \frac{\partial \phi_{q_\eta}(x,t)}{\partial t} = \sum_{\mu=-M}^M \frac{i\mu\omega}{\pi\mu_\infty^2} \int_{-A}^A q_{\eta\mu}(\xi) \left[\ln \frac{\mu\omega\sqrt{(x-\xi)^2}}{2a_0} + 0.577 + i\frac{\pi}{2} \right] \cdot \exp\{i\mu\omega t\} d\xi$$

Setzt man (19) in (37) ein, so erhält man das gesuchte Integralgleichungssystem:

$$(59) \quad -q_\eta(x,t) + R_L(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\delta\eta(\xi,t)}{x-\xi} d\xi$$

$$(60) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) - Q_L(x,t) = \frac{\delta\eta(x,t)}{\mu_\infty} + \frac{1}{\pi\mu_\infty} \int_{C_A(t)}^{C_E(t)} \frac{q_\eta(\xi,t)}{x-\xi} d\xi$$

mit den instationären Termen

$$(61) \quad R_L(x,t) = \frac{1}{\pi\mu_\infty} \int_{-A}^A d\xi \int_{\bar{x}=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \delta\eta(\xi, t - \frac{\bar{x}}{\mu_\infty}) \frac{d\bar{x}}{x-\bar{x}}$$

und

$$(62) \quad Q_L(x,t) = \frac{1}{\pi\mu_\infty} \sum_{\mu=-M}^M \frac{i\mu\omega}{\mu_\infty} \int_{-A}^A q_{\eta\mu}(\xi) \left\{ \ln \frac{\mu\omega|x-\xi|}{2a_0} + 0.577 + i\frac{\pi}{2} \right\} \cdot \exp\{i\mu\omega t\} d\xi$$

Darin ist σ_v der in (31) definierte Kavitationsbeiwert innerhalb und $\sigma_{vp}(x,t)$ der ebenfalls in (31) erklärte Beiwert außerhalb des Kavitationsgebietes. Mit c_p ist gemäß (30) der Druckbeiwert des nichtkavitierenden Tragflügels bezeichnet. ρ ist wieder die Dichte des Strömungsmediums und a_0 die Schallgeschwindigkeit der Zuströmung. $R_L(x,t)$ und $Q_L(x,t)$ beinhalten den instationären Anteil des Gleichungssystems und sind nur von der Wirbel-dichte γ_η bzw von der Quellen-Senkenbelegung q_η abhängig. Werden $R_L(x,t)$

und $Q_L(x,t)$ Null gesetzt, so geht das instationäre Gleichungssystem in das stationäre über, das in /8/ ausführlich beschrieben und diskutiert wird. q_η ist nur für den Kavitationsbereich definiert, $\gamma_\eta(x,t)$ hingegen für die gesamte Profiltiefe. Die instationären Terme $R_L(x,t)$ und $Q_L(x,t)$ werden weiter unten für die konkrete numerische Auswertung noch entsprechend umgeformt.

Die Dicke $2\eta(x,t)$ der Kavitationsschicht ergibt sich durch Inversion der Gleichung (28), also aus der Formel

$$(63) \quad 2\eta(x,t) = \frac{1}{\mu_\infty} \int_{C_A(t)}^x q_\eta(\xi, t - \frac{x-\xi}{\mu_\infty}) d\xi, \quad x < C_E(t)$$

Die Kavitationsfläche ergibt sich aus dem bekannten Zusammenhang

$$(64) \quad F(t) = 2 \int_{C_A(t)}^{C_E(t)} \eta(x,t) dx$$

Die Schwierigkeit, eine Lösung von (59) und (60) zu finden, ist -wie schon gesagt- durch die von der Zeit abhängigen Integrationsgrenzen $C_A(t)$ und $C_E(t)$ bedingt. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß der Kavitationsbeginn $C_A(t)$ zeitlich konstant ist und mit der Lage des Druckminimums des nichtkavitierenden Tragflügelprofils bei etwa 0.1% der Profiltiefe zusammenfällt. Diese vereinfachte Annahme für den Einsatz der Kavitation ist durch experimentelle Ergebnisse begründet (siehe weiter unten).

2.2 LÖSUNG DES INTEGRALGLEICHUNGSSYSTEMS

Mit drei voneinander unabhängigen Verfahren ist nun versucht worden, das Integralgleichungssystem (59), (60) zu lösen (als Übersicht siehe /34/).

- Näherung mit festen Grenzen
- Analytische Lösung (sog. Fehler-Quadrat-Verfahren)
- Iterationsverfahren

Bei dem ersten ausführlich in /29/ beschriebenen Verfahren wurde vorausgesetzt daß für den Fall kleiner Anstellwinkelamplituden ($\delta_{1\max} \lesssim 1^\circ$) die Kavitationsausdehnung konstant angenommen werden kann und der instationäre Vorgang nur durch die veränderliche Kavitationsdicke

beschrieben wird. Die Diskussion in /29/ zeigt jedoch, daß diese Annahme physikalisch unsinzig ist. Grundsätzlich muß mit wachsendem Anstellwinkel auch die Kavitationsgrenze größer werden, da sonst Widersprüche im Druckverlauf entstehen. Ebenfalls zeigen Berechnungen der Kavitationsdicke (s.u.) in Abhängigkeit von der Zeit, daß die Kavitationsdicke mit der -ausdehnung im gleichen Maße steigt bzw. fällt (größte Dicke bei der größten Ausdehnung). Die Kavitationsgrenzen können also nicht als zeitunabhängig angenähert werden, da sonst zur Physik widersprüchliche Singularitäten im Druckverlauf entstehen. Dennoch sind in der internationalen Literatur solche Voraussetzungen gemacht worden (vgl. z.B. /35/).

Ebenso hat das Fehler-Quadrat-Verfahren keine sinnvollen Lösungen gebracht. Eine Übersicht über diesen Lösungsweg ist im Anhang zu finden (vgl. auch /29/). Nach Separierung der Zeit läßt sich bei diesem Verfahren Gleichung (59) (Stromlinienbedingung) exakt invertieren. Die gewonnene Lösung kann in die Druckbedingung (60) eingesetzt werden und in der sich daraus ergebenden Integralgleichung können die Variablen in geeignete trigonometrische Bereiche transformiert werden. Eine anschließende Fourierapproximation führt die Integralgleichung in eine Form über, für die eine Lösungstheorie bekannt ist. Nachteilig an diesem Verfahren ist, daß sowohl $C_A(t)$ als auch $C_E(t)$ jeweils in Form einer Approximation mit einer von verschiedenen Parametern abhängenden Funktion vorgegeben werden muß. Ebenso ist nach diesem Verfahren die c_{vp} -Verteilung hinter dem noch unbekanntem Ende der Kavitationsschicht in einer Annahme als Eingabe notwendig. Mit Hilfe einer im Anhang beschriebenen sog. Minimumsbedingung sollte dann aus der Vielzahl der Eingangsparameter ein Lösungssatz ausgewählt werden, der dann die Kavitationsausdehnung bzw. die c_{vp} -Verteilung beschreibt. Dieses Verfahren wurde zunächst vereinfacht, indem $C_A(t)$ konstant an der Vorderkante bei $x=-A$ beginnen sollte. Dieser spezielle Fall ist nun in /9/ als stationäre Fall untersucht worden. Das Ergebnis zeigt darin, daß die Inversion von (59) unter der Annahme einer auch hinter der Kavitationsschicht definierten zusätzlichen Quellen-Senkenbelegung zu physikalisch unsinnigen Ergebnissen ebenfalls bzgl. der Druckverteilung führt. Numerische Lösungsversuche des allgemeinen Ansatzes scheiterten wegen der zu großen Anzahl von Parametern, die notwendigerweise vorgegeben werden müssen. Als Ergebnis dieses Lösungsversuches bleibt festzustellen, daß der mathematische Apparat zur Lösung von Integralgleichungen dieses Typs noch nicht ausreichend ist.

Allein das Iterativeverfahren brachte eine Lösung des Integralgleichungssystems und wurde in dieser Arbeit nach dem folgenden Lösungsprinzip verwendet. Das instationäre Integralgleichungssystem (59), (60) geht in den stationären Fall über, wenn $R_L(x,t)$ und $Q_L(x,t)$ Null gesetzt werden. Die Lösung des stationären Gleichungssystems ist bekannt und

durch Vergleiche mit Experimenten an Tragflügelprofilen abgesichert (vgl./8/) und stellt die Grundlage der instationären iterativen Lösung von (59) und (60) dar. Mit der quasistationären Lösung von $q_n(x,t)$ und $\gamma_n(x,t)$ lassen sich $R_L(x,t)$ und $Q_L(x,t)$ berechnen, mit denen dann wie weiter unten genauer beschrieben iterativ Lösungen von $C_E(t)$ zu berechnen sind. In /36/ ist bereits ein Iterationsverfahren in dem dort dargestellten Lösungsweg der instationären Kavitationsberechnungen eingefügt. Im Gegensatz zu der hier vorliegenden Arbeit ist in /36/ ein anderes Geschwindigkeitspotential zugrunde gelegt, worin die Spannweite zwar als groß aber -mit einer gewissen Willkür- als endlich angenommen wird. Weitere zu bemängelnde Voraussetzungen in /36/ sind, daß einmal ein instationärer Term, später mit R_L , bezeichnet vernachlässigt wird und zum anderen eine empirische Beziehung (Nishiyama-Bedingung) zur Lösung herangezogen wird. Diese Nishiyama Bedingung gibt die Kavitationsdicke als Funktion von Anstellwinkel und Kavitationsausdehnung an und hat ihre Rechtfertigung nur für den stationären Fall /7/. Der Lösungsversuch in /36/ blieb ohne Erfolg.

Im folgenden soll zunächst der stationäre Lösungsweg erläutert werden, aus dem dann im Anschluß die instationäre iterative Lösung folgt.

2.2.1 Stationäre Lösung

Für $R_L(x,t)=0$ und $Q_L(x,t)=0$ geht das Gleichungssystem (59), (60) in folgende Form über:

$$(65) \quad -q_y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \gamma_y(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

$$(66) \quad G_v - c_p(x) = \frac{\delta_y(x)}{\mu_\infty} + \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{C_A}^{C_E} q_y(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

mit

$$(67) \quad \begin{aligned} q_y(x) &\neq 0 && \text{für } C_A < x < C_E \\ q_y(x) &= 0 && \text{für } \begin{cases} -A \leq x \leq C_A \\ C_E \leq x \leq A \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$(68) \quad \delta_y(x) \text{ def. für } -A \leq x \leq A$$

Die Lösung von (65), (66) ist in /8/ enthalten und wird nach folgendem Prinzip durchgeführt. Die Gleichung (65) wird invertiert und unter Beachtung der Kuttaschen Abflußbedingung in (66) eingesetzt. Man erhält eine Integralgleichung für $q_\eta(x)$. Diese Bestimmungsgleichung für $q_\eta(x)$ wird mittels bestimmter Transformation der Variablen in trigonometrische Größen in solch eine Form gebracht, daß eine Lösung durch Fourierapproximation existiert. Das bekanntem $q_\eta(x)$ ergibt durch Einsetzen in die invertierte Form von (65) die zusätzliche Wirbelverteilung $\gamma_\eta(x)$. Der eben skizzierte Lösungsweg soll nun im einzelnen erfolgen:

Eine Unstetigkeit in der Neigung der Mittellinie $Y_{s+\eta}$ führt zu physikalisch nicht interpretierbare Singularitäten in der Druckverteilung. Um dieses zu vermeiden, muß noch die Zusatzbedingung

$$(69) \quad \begin{aligned} \varphi_\eta(C_A) &= 0 \\ \varphi_\eta(C_E) &= 0 \end{aligned}$$

gelten, die bereits implizit in (67) enthalten ist. Damit kann sich die Strömung der Kontur aus Profil und Kavitationsschicht im Sinne einer Stromlinie anschmiegen, was bei irgendwelchen Kanten oder Ecken an der Körperform nicht mehr möglich wäre.

Wie in /37/ gezeigt wurde, führt die Inversion von (65) zu der Gleichung

$$(70) \quad \delta_\eta(\xi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{C_A}^{C_E} \varphi_\eta(\xi) \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Dabei legt die Kuttasche Abflußbedingung $\gamma_\eta(A)=0$, also daß kein Drucksprung an der Flügelhinterkante auftritt, ein nach /37/ beliebig vorgebbaren Faktor fest. Wird (70) in (66) eingesetzt, zu erhält man folgende Integralgleichung zur Bestimmung von $q_\eta(x)$:

$$(71) \quad \sigma_v - c_p(x) = \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{C_A}^{C_E} \varphi_\eta(\xi) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x} \frac{A+\xi}{A-\xi}} \right\} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Die Transformation vom Intervall $C_A \leq x \leq C_E$ auf $-1 \leq y \leq +1$ wird durch die Beziehung

$$(72) \quad \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = \beta_3 y + \beta_4 = \frac{1}{4} (1/b - 1/b') y + \frac{1}{4} (1/b + 1/b')$$

mit

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A+CE}{A-CE}}$$

$$b' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A+CA}{A-CA}}$$

eingeführt. Wird diese auf (71) angewendet, so ergibt sich

$$(73) \quad \frac{\mu_0}{2} (\sigma_v - c_p(y)) \frac{1}{1+(\beta_3 y + \beta_4)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_n(y') \frac{1}{1+(\beta_3 y' + \beta_4)^2} \frac{dy'}{y-y'}$$

Die Lösung von (73) bei Erfüllung der Zusatzbedingung (69) lautet nach der Theorie der Integralgleichungen /37/:

$$(74) \quad \frac{q_n(y)}{\mu_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 [c_p(y') - \sigma_v] \frac{1+(\beta_3 y + \beta_4)^2}{1+(\beta_3 y' + \beta_4)^2} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-y'^2}} \frac{dy'}{y-y'}$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$(75) \quad \int_{-1}^1 [c_p(y') - \sigma_v] \frac{1}{1+(\beta_3 y' + \beta_4)^2} \sqrt{1-y'^2} dy' = 0$$

Mit Hilfe von (75) können die in (74) zur Bestimmung von $q_n(x)$ noch enthaltenen unbekanntenen Grenzen bestimmt werden, so fern C_A -so wie angenommen- im Druckminimum definiert wird.

Werden die trigonometrischen Variablen

$$(76) \quad \begin{aligned} y &= -\cos \delta \\ y' &= -\cos \tau \end{aligned}$$

eingeführt und in (74) eingesetzt, so erhält man eine für die numerische Auswertung günstigere Form:

$$(77) \quad \frac{q_n(\delta)}{\mu_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [c_p(\tau) - \sigma_v] \frac{4 + (1/b \sin^2 \tau/2 + 1/b' \cos^2 \tau/2)^2}{4 + (1/b \sin^2 \tau/2 + 1/b' \cos^2 \tau/2)^2} \frac{\sin \delta}{\cos \tau - \cos \delta} d\tau$$

Dabei sind b und b' die in (72) definierten Größen. Wird nun die Fourierapproximation

$$(78) \quad \frac{c_p(\tau) - \sigma_v}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} \sin^2 \frac{\tau}{2} + \frac{1}{b'} \cos^2 \frac{\tau}{2} \right)^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} \cos \lambda \tau$$

angewendet, so erhält man für die Lösung (77)

$$(79) \quad \frac{q_{\eta}(\vartheta)}{\mu_{\infty}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{b'} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2 \right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \sin \lambda \vartheta$$

Die Zusatzbedingung (75) läßt sich mit der Fourierapproximation (78) bei vorheriger Anwendung von (76) zu der einfachen Form

$$(80) \quad a_0 = 0$$

reduzieren, die -wie bereits gesagt- den Zusammenhang des Beginns C_A und des Ende der Kavitation C_E liefert. Damit ist die Quellen-Senkenverteilung für den Kavitationsbereich bestimmt. Im Bereich vor und hinter der Kavitationsschicht verschwindet gemäß der Voraussetzung (69) $q_{\eta}(x)$.

Im folgenden muß nun noch die zusätzliche Wirbeldichte $\gamma_{\eta}(x,t)$ längs der gesamten Profiltiefe bestimmt werden. Dabei erfolgt eine Unterteilung in folgende drei Teilbereiche:

- Bereich vor der Kavitationsschicht (Fall I) $-A \leq x \leq C_A$
- Bereich der Kavitationsschicht (Fall II) $C_A \leq x \leq C_E$
- Bereich hinter der Kavitationsschicht (Fall III) $C_E \leq x \leq +A$

Für diese drei Fallunterscheidungen gilt die Lösung von $q_{\eta}(x)$ in (79), die in (70) eingesetzt zu einer Bestimmungsgleichung für $\gamma_{\eta}(x)$ führt. Bei jedem dieser drei Fälle wird die Transformation (72) verwendet, wobei jedoch (76) beim Fall I und III modifiziert werden müssen. Im einzelnen soll dieses im nachfolgenden erläutert werden:

Für die Abbildung des Bereiches der Kavitation (Fall II) $C_A \leq x \leq C_E$ auf $0 \leq \delta \leq \pi$ wurde die Transformation (72) und (76) verwendet, um so die Lösung (79) für $q_{\eta}(x)$ zu erhalten. Diese beiden Transformationen lassen sich auch in der Form

$$(81) \quad \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = \beta_4 - \beta_3 \cos \delta = \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \quad \text{mit } x^2 = \cos \psi$$

darstellen. Wird (79) nun in (70) eingesetzt, so folgt unter Beachtung der Kuttaschen Abflußbedingung

$$(82) \quad \frac{\gamma_4(\vartheta)}{\mu_\infty} = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{b'} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2 \right\} \cdot \left(\frac{1}{b} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{b'} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \tau \sin \lambda \tau}{2\beta_4 - \beta_3 \cos \tau - \beta_3 \cos \lambda \tau} \frac{d\tau}{\cos \tau - \cos \lambda \tau}$$

Die Kuttasche Abflußbedingung fordert für $\gamma_\eta(x)$ an der Stelle A bei der Invertierung von (65) $\gamma_\eta(A)=0$, d.h. es sind an der Hinterkante keine Diskontinuitäten im Druck vorhanden. Mit Hilfe der im Anhang A (vgl. auch /8/) bewiesenen Integralformel

$$(83) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau + \cos \lambda \tau - 2\beta_4/\beta_3} \frac{d\tau}{\cos \tau - \cos \lambda \tau} = \frac{1/2}{\cosh \lambda - \beta_4/\beta_3} \left\{ \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} - (-1)^\lambda \frac{e^{-\lambda \chi}}{\sinh \chi} \right\}$$

folgt mit partieller Integration aus (82)

$$(84) \quad \frac{\gamma_4(\vartheta)}{\mu_\infty} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{b'} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2 \right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \left\{ (-1)^\lambda \frac{e^{-\lambda \chi}}{\sinh \chi} - \cos \lambda \vartheta \right\}$$

mit

$$\cosh \chi = \cos \vartheta - 2\beta_4/\beta_3$$

Die Gleichung (84) stellt die Lösung für $\gamma_\eta(x,t)$ im Bereich der Kavitation (Fall II) dar.

Als nächstes soll die zusätzliche Wirbeldichte $\gamma_\eta(x)$ im Profilbereich vor der Kavitationsschicht (Fall I) berechnet werden. Diesem Bereich $-A \leq x \leq C_A$ soll das Intervall $\infty \geq \Phi \geq 0$ entsprechen; dafür muß an Stelle (76) nun

$$(85) \quad y = -\cosh \Phi$$

gesetzt werden. Daraus folgt, daß das Intervall $-A \leq x \leq C_A$ durch

$$(86) \quad \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = \beta_4 - \beta_3 \cosh \Phi = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

auf den Bereich $\infty \geq \Phi \geq 0$ transformiert wird. Die folgende Abb.3 gibt eine Übersicht der verwendeten Transformationen.

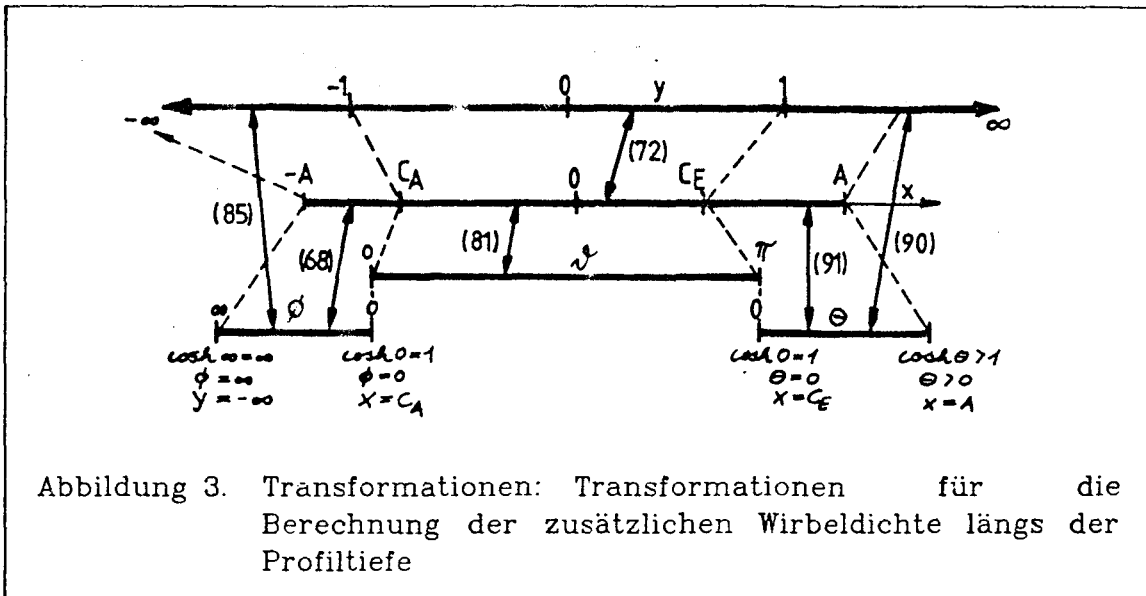


Abbildung 3. Transformationen: Transformationen für die Berechnung der zusätzlichen Wirbeldichte längs der Profiltiefe

Aus (74) folgt nun mit (86)

$$(87) \quad \frac{\delta\eta(\vartheta)}{\mu_\infty} = (\beta_4 - \beta_3 \cosh \varphi) [1 + (\beta_4 - \beta_3 \cosh \varphi)^2] \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \int_0^\pi \frac{\sin \lambda \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(\cos \vartheta - \cosh \varphi)(2\beta_4 - \beta_3 \cosh \varphi - \beta_3 \cos \vartheta)}$$

Mit der ebenfalls bekannten Integralformel (vgl. Anhang A)

$$(88) \quad \frac{1}{|\beta_3| \pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \vartheta d\vartheta}{(\cos \vartheta - \cosh \varphi)(2\beta_4/|\beta_3| + \cosh \varphi + \cos \vartheta)} = \frac{1}{|\beta_3|} \frac{1}{\cosh \varphi + \cosh \Xi} \left\{ -\frac{e^{-2\varphi}}{\sinh \varphi} - (-1)^\lambda \frac{e^{-2\Xi}}{\sinh \Xi} \right\}$$

mit $\cosh \Xi = 2\beta_4/|\beta_3| + \cosh \varphi$

folgt damit für (87) die gesuchte Wirbeldichte vor dem Bereich der Kavitationsschicht:

$$(89) \quad \frac{\delta\eta(\vartheta)}{\mu_\infty} = -\frac{1}{|\beta_3|} (\beta_4 - \beta_3 \cosh \varphi) \left\{ 1 + (\beta_4 - \beta_3 \cosh \varphi)^2 \right\} \frac{1}{\cosh \varphi + \cosh \Xi} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \left\{ e^{-2\varphi} + (-1)^\lambda e^{-2\Xi} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ 1 + (\beta_4 - \beta_3 \cosh \varphi)^2 \right\} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \left\{ e^{-2\varphi} + (-1)^\lambda e^{-2\Xi} \right\}$$

Für $\Phi=0$ folgt $\cosh \Xi = 1 - 2\beta_4/\beta_3$ und damit aus (89) genau das Ergebnis (84) für $\delta=0$.

Als letztes wird im Fall III der Bereich hinter der Kavitationsschicht $C_E(t) \leq x \leq A$ behandelt und an Stelle von (85) wird

$$(90) \quad y = \cosh \Theta$$

gesetzt. Analog zu dem vorhergehenden wird also der Bereich $C_E(t) \leq x \leq A$ mit der Transformation

$$(91) \quad \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = \beta_4 + \beta_3 \cosh \Theta$$

auf $0 \leq \Theta \leq \text{arcosh}(\beta_4/\beta_3)$ abgebildet (vgl. Abb.3). Analog zu (87) folgt aus (74) mit (91)

$$(92) \quad \frac{\gamma_4(\Theta)}{\lambda_{\infty}} = (\beta_4 + \beta_3 \cosh \Theta) \{1 + (\beta_4 + \beta_3 \cosh \Theta)^2\} \cdot \\ \cdot \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}{(\cos \vartheta + \cosh \Theta)(2\beta_4/\beta_3 + \cosh \Theta - \beta_3 \cos \vartheta)}$$

Mit der bekannten Integralformel (vgl. Anhang A)

$$(93) \quad \frac{1}{|\beta_3|} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\vartheta \, d\vartheta}{(\cos \vartheta + \cosh \Theta)(2\beta_4/\beta_3 + \cosh \Theta - \beta_3 \cos \vartheta)} = \\ = \frac{1}{|\beta_3|} \frac{(-1)^{\lambda}}{\cosh \Theta - \cosh \Omega} \left\{ \frac{e^{-2\Omega}}{\sinh \Omega} - \frac{e^{-2\Theta}}{\sinh \Theta} \right\}$$

mit

$$\cosh \Omega = 2\beta_4/\beta_3 + \cosh \Theta$$

folgt daraus bei partieller Integration für (92) die gesuchte Lösung für den Bereich hinter der Kavitationsschicht:

$$(94) \quad \frac{\gamma_4(\Theta)}{\lambda_{\infty}} = (\beta_4 + \beta_3 \cosh \Theta) (1 + (\beta_4 + \beta_3 \cosh \Theta)^2) \cdot \\ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_3|} \frac{(-1)^{\lambda} a_{\lambda}}{\cosh \Theta - \cosh \Omega} (e^{-2\Omega} - e^{-2\Theta}) \\ = -\frac{1}{2} (1 + (\beta_4 + \beta_3 \cosh \Theta)^2) \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} a_{\lambda} (e^{-2\Omega} - e^{-2\Theta})$$

Für $\Theta=0$ gilt $\cosh \Omega = -1 - 2\beta_4/\beta_3$ und daraus folgt genau das Ergebnis von (84) für $\delta=\pi$. Zwischen allen Teilbereichen von $\gamma_\eta(x,t)$ längs der Profiltiefe besteht also ein stetiger Übergang.

2.2.2 Instationäre Lösung

Mit der Lösung des stationären (bzw. quasistationären) Problems ist die Grundlage für die iterative Auflösung des Integralgleichungssystems (59),(60) geschaffen.

Setzt man die instationären Anteile $R_L(x,t)$ und $Q_L(x,t)$ zunächst als berechenbar voraus, dann läßt sich analog der stationären Lösung von (65) und (66) die instationäre Lösung des Integralgleichungssystems (59) und (60) gewinnen.

So wie (65) wird nun (59) gemäß /37/ invertiert und man erhält für einen bestimmten Zeitpunkt t_λ :

$$(95) \quad \gamma_\eta^{(n+1)}(x, t_\lambda) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{C_A}^{C_E(t_\lambda)} \varphi_\eta^{(n+1)}(\xi, t_\lambda) \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} d\xi - \\ - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \cdot \int_{-A}^A R_L^{(n)}(x', t_\lambda) \sqrt{\frac{A+x'}{A-x'}} \frac{dx'}{x-x'}$$

Dabei ordnet (n) bzw. (n+1) der jeweiligen Größe die Zahl des Integrations-schrittes zu. Die Gleichung (95) wird nun in (60) eingesetzt und analog zu (71) ergibt sich bei Beachtung von (31) eine für einen bestimmten Zeitpunkt t_λ im Bereich $C_A \leq x \leq C_{E\lambda}^{(n+1)}$ gültige Integralgleichung, in der nun $Q_L(x,t)$ und $R_L(x,t)$ nun ohne besondere Kennzeichnung aus dem vorhergehenden Iterationsschritt bestimmt wurden:

$$(96) \quad \sigma_v - c_p(x, t_\lambda) - Q_L(x, t_\lambda) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A R_L(x', t_\lambda) \sqrt{\frac{A+x'}{A-x'}} \frac{dx'}{x-x'} = \\ = \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{C_A}^{C_E(t_\lambda)} \varphi_\eta \left(1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x} \frac{A+\xi}{A-\xi}} \right) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Im Vergleich zu (71) treten in (96) nur die bereits als bekannt vorausgesetzten Terme $Q_L(x,t)$ und $R_L(x,t)$ auf, d.h. die linke Seite von (96) ist bekannt. Mit der entsprechenden Transformation (72) und (76) tritt nun an Stelle von (78) folgende Fourioerapproximation:

$$(97) \quad \frac{c_p(\tau, t_2) - \sigma_v + Q_L(\tau, t_2) - IR(\tau, t_2)}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} \sin^2 \tau_2 + \frac{1}{b'} \cos^2 \tau_2 \right)^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a'_\lambda \cos \lambda \tau$$

mit

$$IR(\tau, t_2) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A R_L(x', t) \sqrt{\frac{A+x'}{A-x'}} \frac{dx'}{x-x'}$$

Mit den entsprechenden Koeffizienten a'_λ - immer bei einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet - sind ebenfalls die Lösungen (79) für $q_\eta(\vartheta)$ und die der Zusatzbedingung (80) für den hier instationär betrachteten Fall gültig. Ebenso gelten die Bestimmungsgleichungen (84), (89) und (94) für $\gamma_\eta(x, t)$.

Die für die Berechnung von $Q_L(x, t)$ und $R_L(x, t)$ notwendigen numerischen Betrachtungen sollen an dieser Stelle nicht erfolgen, sondern es wird auf Anhang A verwiesen. Ebenfalls ist eine Kurzfassung der Programmbeschreibung /38/ im Anhang C enthalten, in der die für das Verständnis des Iterationsvorganges notwendigen Schritte während des Programmablaufes erläutert werden.

Die iterative Auslösung wird nach folgendem Prinzip durchgeführt:

- Im nullten Iterationsschritt (Index 0) werden R_L und Q_L Null gesetzt, und die Zusatzbelegungen $q_\eta(x)$ und $\gamma_\eta(x)$ können für verschiedene ωt -Werte aus der stationären Lösung berechnet werden. Diese nullte Näherung ist also mit einer quasistationären Rechnung identisch. Sind die Zusatzbelegungen $q_\eta^0(x, t)$ und $\gamma_\eta^0(x, t)$ mit ωt als Parameter bekannt, so lassen sich aus ihnen $R_L^0(x, t)$ und $Q_L^0(x, t)$ im nullten Iterationsschritt bestimmen.
- Im nachfolgenden ersten Iterationsschritt (Index 1) wird mit den so berechneten $R_L^0(x, t)$ - und $Q_L^0(x, t)$ -Werten in die eben beschriebene erweiterte für einen Zeitpunkt gültige stationäre Lösung gegangen. Diese beiden instationären Terme erscheinen in der Fourierapproximation (97), die damit die instationären Informationen der Kavitationsberechnung in die Lösungstheorie von (59), (60) bzw. (65), (66) einbringen. Nach der Auflösung des Gleichungssystem in dieser Iteration lassen sich $q_\eta^1(x, t)$ und $\gamma_\eta^1(x, t)$ quasistationär bestimmen, aus denen wieder $R_L^1(x, t)$ und $Q_L^1(x, t)$ berechnet werden können, die dann für die zweite Iteration Verwendung finden.
- In gleicher Weise können beliebig viele Iterationen folgen, bis eine ausreichende Konvergenz erreicht ist. Als Konvergenzkriterium wird dabei verstanden, daß sich die Zusatzbelegungen vor und nach einem

Iterationsschritt bis auf eine gewisse Ungenauigkeit nicht mehr unterscheiden.

Ist der letzte Iterationsschritt durchgeführt worden, so ergeben sich mit ihm neben der gesuchten Kavitationsausdehnung $C_E(t)$ auch die anderen gesuchten Größen wie Kavitationsdicke $\eta(x,t)$ und Kavitationsfläche. Auf die numerischen Ergebnisse wird weiter unten im einzelnen eingegangen.

2.2.2.1 Konvergenzbetrachtungen

Ein wesentlicher und genau zu klärender Punkt ist das Konvergenzverhalten dieser iterativen Methode. Unser Kriterium für eine gute Konvergenz soll sein, daß das Quadrat der Differenz aus den vor und nach einer Iteration berechneten Größen der zusätzlichen Wirbeldichte $\gamma_\eta(x,t)$ und der Quellen-Senken-Verteilung $q_\eta(x,t)$ als Summe über alle Zeitpunkte ωt und alle Aufpunkte x längs der Profiltiefe bis auf eine gewisse Ungenauigkeit gleich sein soll, d.h. es soll gelten

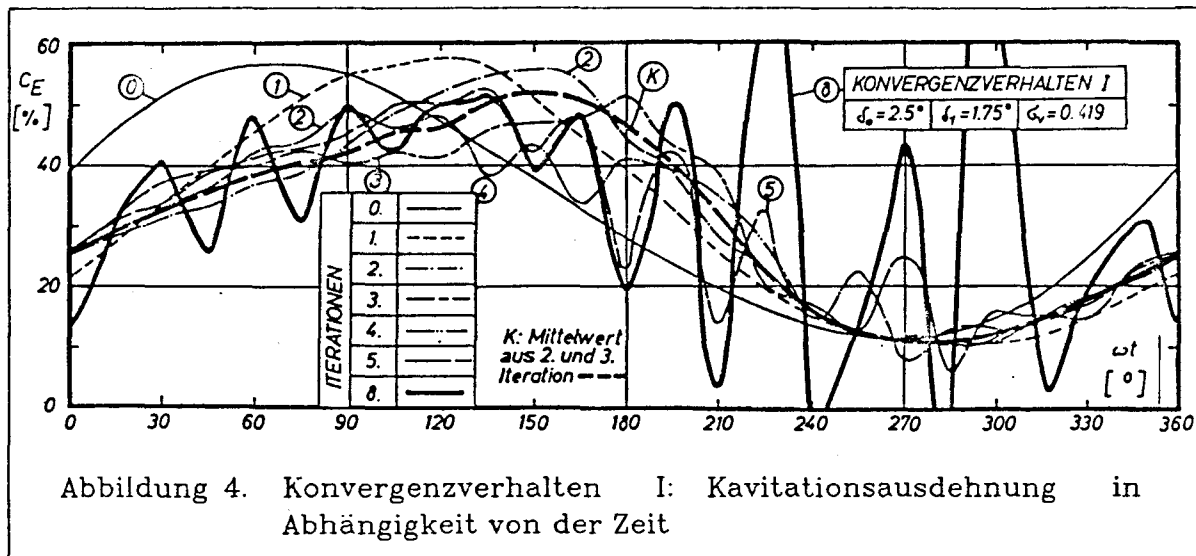
$$(98) \quad \sum_x \sum_{\omega t} (q_\eta^n - q_\eta^{n-1})^2 = MIN ; \quad \sum_x \sum_{\omega t} (\gamma_\eta^n - \gamma_\eta^{n-1})^2 = MIN$$

Im folgenden soll das Konvergenzverhalten für drei verschiedene Möglichkeiten bzgl. der Eingangswerte nachfolgender Iterationen betrachtet werden.

- Konvergenzbetrachtung I: Die Eingangswerte, d.h. die Quellen- Senkenverteilungen und die Wirbelbelegungen $q_\eta(x,t)$ und $\gamma_\eta(x,t)$, werden aus den Ergebnis der unmittelbar vorhergehenden Iteration genommen.

Bei den Rechnungen zeigte sich nun, daß bei diesem Iterationsverfahren die Lösungen nach (98) bis zum 5. bis 6. Iterationsschritt konvergierten und dann stark divergierten. Die Amplituden der Schwankungen bei zunehmender Iterationszahl wurden dabei größer als die Profiltiefe, so daß irgendeine Semi-Konvergenz ausgeschlossen werden konnte. Ebenso war dieses divergente Verhalten sowohl unabhängig von der Anzahl der ωt -Werte als auch von der Anzahl der Aufpunkte auf der Profiltiefe. Vermutet werden kann, daß von einem bestimmten Iterationsschritt ab das divergente Verhalten infolge numerischer Instabilitäten im Lösungsweg entsteht. Zu erinnern ist, daß Fourierentwicklungen für die Funktion $q_\eta(x,t)$ durchgeführt werden, die in weiten Bereichen ihres Verlaufes Null sind.

In der Abb.4 ist für diesen Fall I der charakteristische Verlauf der Konver-



genz gezeigt. In Abb. 4 ist $C_E(t)$ in Abhängigkeit von ωt für verschiedene Iterationen aufgetragen. Die achte Iteration (dick ausgezogene Linie) zeigt bereits stark divergentes Verhalten. Die Konvergenzbedingung (79) hat in diesem Fall für $q_n(x,t)$ beim dritten und für $\gamma_n(x,t)$ beim zweiten Iterationsschritt bereits das Minimum erreicht. Als beste Lösung wurde deshalb der Mittelwert der $C_E(t)$ -Verteilung aus der zweiten und dritten Iteration gebildet und als dick gestrichelte Linie K in Abb. 4 eingetragen.

Um solche numerisch instabile Verhalten aufzufangen, wurden Mittelungsverfahren eingeführt, die nicht nur die unmittelbare Vorgeschichte der Eingangswerte, also $q_n(x,t)$ und $\gamma_n(x,t)$, für einen nachfolgenden Iterationsschritt berücksichtigen, sondern weitere vorliegende Iterationen noch einen Einfluß zubilligen. Folgende zwei Möglichkeiten wurden untersucht:

- Konvergenzverhalten II: Die Eingangswerte einer neuen Iteration werden aus dem arithmetischen Mittel aller vorhergehenden Iterationen gebildet
- Konvergenzverhalten III: Nur die zwei unmittelbar vorhergehenden Iterationen werden zur Mittelwertbildung der Eingangswerte herangezogen

Formal läßt sich für die Auflösung z.B. der Größe $q_n(x,t)$ aus den Integralgleichungen (59), (60) folgende Operatorgleichung ansetzen

$$(99) \quad \mathcal{R}q^{(n+1)} = \mathcal{L}q^{(n)} + f$$

Dabei werden lineare Operatoren vorausgesetzt, wobei der zum Operator \mathcal{R} inverse \mathcal{R}^{-1} sei und $\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}=1$ gelten soll. Außerdem wird die Abkürzung $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{L}=\alpha$ verwendet. f sei dabei der stationäre Term auf dem der Operator \mathcal{R}^{-1} wirkt und damit die Lösung $q^{(1)}$ des nullten Iterationsschrittes mit $q^{(0)}=0$ liefert:

$$(100) \quad q^{(1)} = \mathcal{R}^{-1} f$$

Die Konvergenz der Iteration soll dann bei $q^{(n+1)} \sim q^{(n)}$ erreicht sein. Wird die Lösung (100) in (99) eingesetzt, so folgt

$$(101) \quad \begin{aligned} q^{(2)} &= \mathcal{L}\mathcal{R}^{-1}f + f = (1+\alpha)\mathcal{R}^{-1}f \\ q^{(3)} &= (1+\alpha+\alpha^2)\mathcal{R}^{-1}f \\ &\vdots \\ q^{(n)} &= (1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-1})\mathcal{R}^{-1}f \end{aligned}$$

Für die erste Möglichkeit der Mittelwertbildung (also Fall II) aus dem arithmetischen Mittel aller vorhergehenden Iterationen lautet das Iterationsschema:

$$(102) \quad \mathcal{R}q^{(n+1)} = \mathcal{L}q_A^{(n)} + f$$

Dabei stellt $q_A^{(n)}$ die arithmetische Mittelung aller vorhergehender Lösungen dar. Daraus folgt für den Iterationsvorgang:

$$(103) \quad \begin{aligned} q^{(1)} &= \mathcal{R}^{-1}f \\ q_A^{(1)} &= q^{(1)} \\ q^{(2)} &= (1+\alpha)\mathcal{R}^{-1}f \\ q_A^{(2)} &= \frac{1}{2}q^{(1)} + \frac{1}{2}q^{(2)} = (1+\frac{1}{2}\alpha)\mathcal{R}^{-1}f \\ q^{(3)} &= (1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2)\mathcal{R}^{-1}f \\ q_A^{(3)} &= \frac{1}{3}(q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)}) = (1+\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{6}\alpha^2)\mathcal{R}^{-1}f \\ &\vdots \\ q^{(6)} &= (1+\alpha+\frac{4}{5}\alpha^2+\frac{2^3}{60}\alpha^3+\frac{11}{120}\alpha^4+\frac{1}{120}\alpha^5)\mathcal{R}^{-1}f \\ q_A^{(6)} &= (1+\frac{5}{6}\alpha+\frac{163}{360}\alpha^2+\frac{101}{720}\alpha^3+\frac{17}{120}\alpha^4+\frac{1}{720}\alpha^5)\mathcal{R}^{-1}f \end{aligned}$$

Die alternative Mittelwertbildung (also Fall III) aus den zwei vorhergehenden Iterationen führt zu dem entsprechenden Schema

$$(104) \quad Rq^{(n+1)} = Lz q_z^{(n)} + f$$

Dabei stellt $q_z^{(n)}$ die arithmetische Mittelwertbildung der beiden vorhergehenden Lösungen dar. Daraus folgt wieder für den Iterationsvorgang

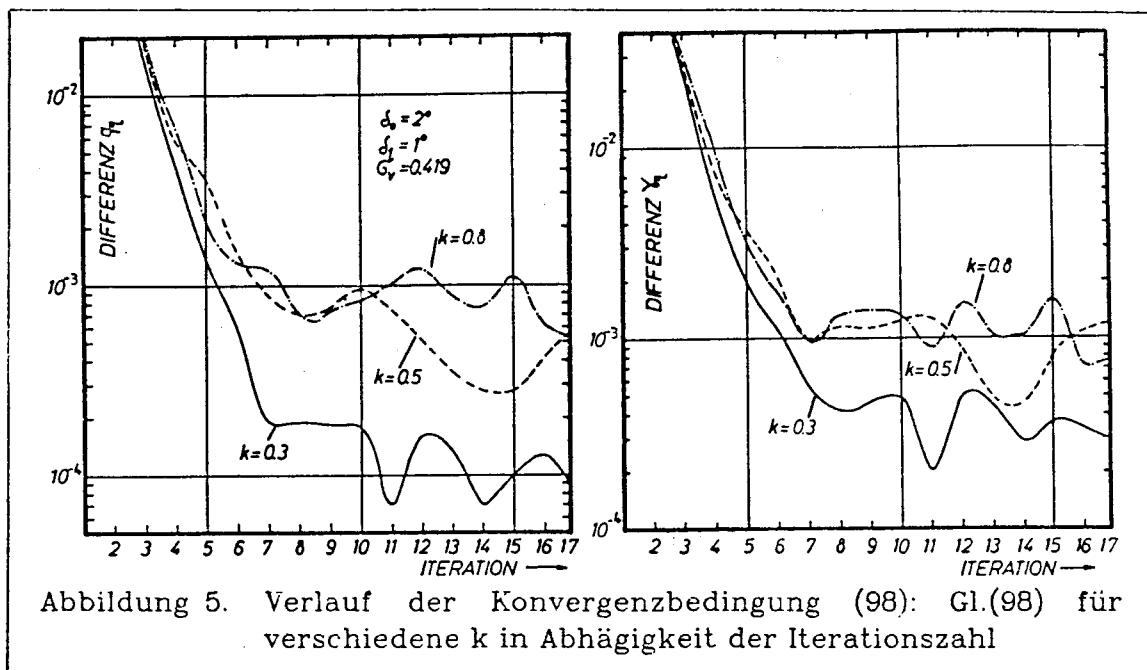
$$(105) \quad \begin{aligned} q^{(1)} &= R^{-1}f \\ q_z^{(1)} &= q \\ q^{(2)} &= (1 + \alpha) R^{-1}f \\ q_z^{(2)} &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = (1 + \frac{1}{2}\alpha) R^{-1}f \\ q^{(3)} &= (1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2) R^{-1}f \\ q_z^{(3)} &= \frac{1}{2}(q^{(3)} + q^{(2)}) = (1 + \alpha + \frac{1}{4}\alpha^2) R^{-1}f \\ &\vdots \\ q^{(6)} &= (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \frac{7}{4}\alpha^4 + \frac{1}{8}\alpha^5) R^{-1}f \\ q_z^{(6)} &= (1 + \alpha + \alpha^2 + \frac{7}{8}\alpha^3 + \frac{7}{16}\alpha^4 + \frac{1}{16}\alpha^5) R^{-1}f \end{aligned}$$

Eine ausreichende Konvergenz von (103) und (105) ist bei

$$(105a) \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} q^{(n)} &\sim q_A^{(n)} \\ q_z^{(n)} &\sim q_z^{(n)} \end{aligned}$$

erfüllt. Vergleicht man nun $q_A^{(6)}$ (103) und $q_z^{(6)}$ (105) bzgl. ihres Konvergenzverhaltens, so wird deutlich, daß das dritte Verfahren mit der Mittelwertbildung aus den Ergebnissen zweier vorhergehenden Iterationen besser konvergiert. Zwischen $q_z^{(6)}$ und $q^{(6)}$ aus (105) stimmen in der Klammer bereits die ersten Glieder überein. In (103) ist außer der Zahl 1 keine Übereinstimmung zwischen den Gliedern in der Klammer erreicht. Das dritte Verfahren hat somit seine Anwendung bei den späteren Rechnungen gerechtfertigt.

In der Abb.5 sind nun Die Verläufe der Bedingung (98) für den Fall III (nur



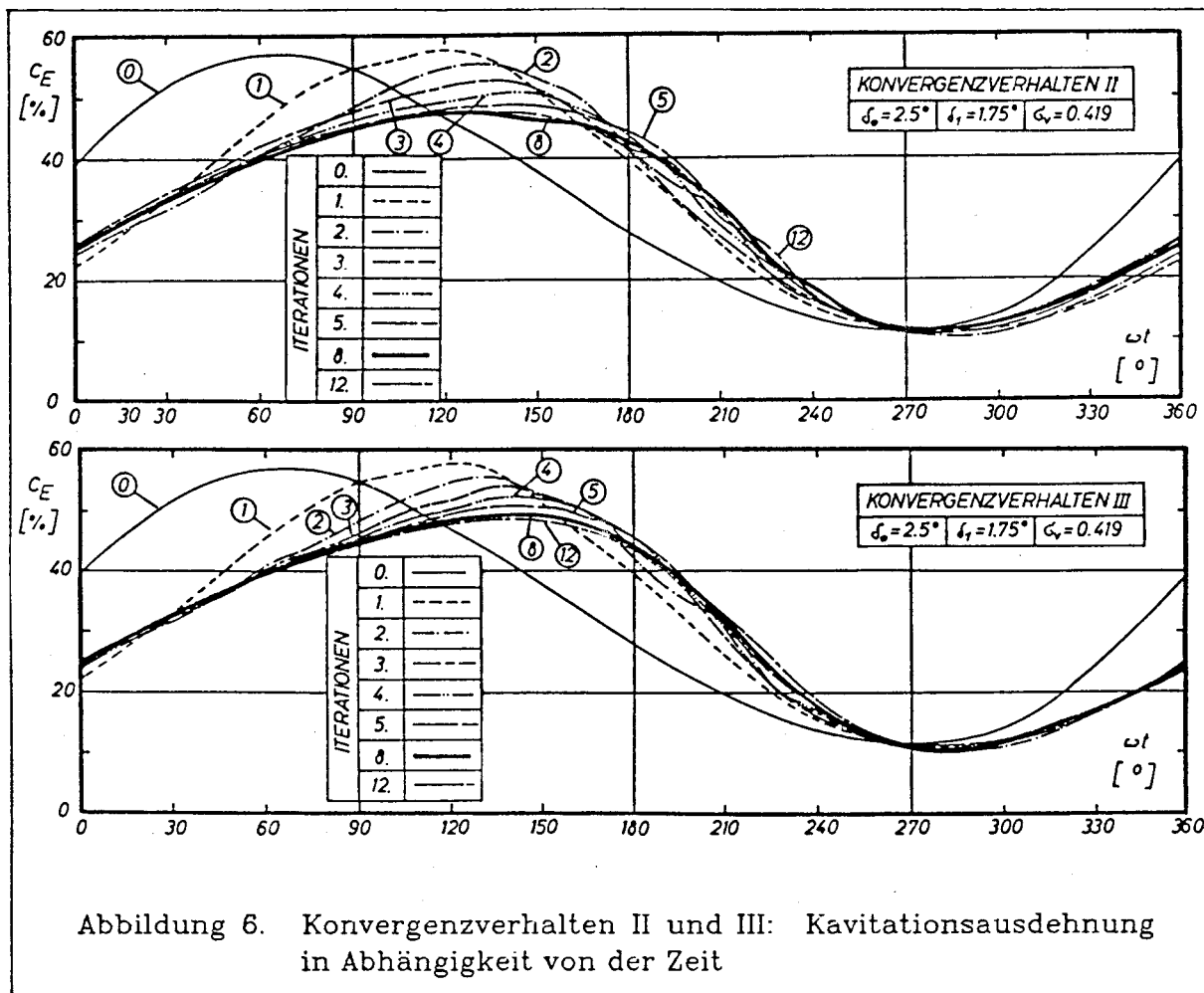
zwei vorhergehende Iterationen werden für den neuen herangezogen) aufgetragen. Man erkennt, daß etwa beim 7. Iterationsschritt das Minimum erreicht wurde und darüber hinaus nur eine Oszillation um das jeweilige Minimum vorhanden ist.

Von der Tendenz her ist zu erkennen, daß mit größerer reduzierter Frequenz der Mittelwert, um den die jeweilige Kurve der verschiedenen k-Werte schwankt, größer wird. D.h. die Bedingung (98) ist für größeres k schlechter, für kleinere k besser erfüllt.

Dieses Verhalten mag darin begründet sein, daß das hochgradige nicht-lineare Verhalten der instationären Theorie für große k betont wird und dadurch die numerischen Ungenauigkeiten dieses Verfahrens vor allem von dem in ihm enthaltenen Fourier-Approximationen mit der endlichen Zahl ihrer Koeffizienten mehr zum Tragen kommt.

In Abb.6 sind für diese beiden Fälle II und III die $C_E(t)$ -Verläufe in Abhängigkeit von ωt für einzelnen Iterationsschritte aufgetragen, wobei die nullte, erste und zweite Iteration aufgrund der gleichen Mittelung identisch sind. Ebenfalls ist für beide Fälle der $C_E(t)$ -Verlauf der achten Iteration aufgetragen, der sehr ähnlich ist. Der Vergleich zum 12. Schritt zeigt in diesen Fällen II und III keinen großen Unterschied mehr. Im Fall III oszillieren die Werte der achten und 12. Iterationen (bzw. höhere Iterationen) geringfügig um einen gemeinsamen Mittelwert. Im Fall II liegen die Werte der 12. Iteration geringfügig unterhalb und ab ca. $\omega t = 210^\circ$

schwach oberhalb bzgl. der achten Iteration. Höhere Iterationen weisen bzgl. ihrer $C_E(t)$ -Werte keinen Unterschied mehr auf.



Als Ergebnis ist festzustellen, daß die $C_E(t)$ -Werte der achten Iterationen in Abb. 6 zum gleichen Grenzwert streben und etwa mit dem vom Fall I in Abb. 4 für die beste Lösung gemäß (98) entsprechen. Die noch verbleibenden Unterschiede der $C_E(t)$ -Werte im Fall I und denen in II bzw. III müssen auf numerische Ungenauigkeiten zurückgeführt werden.

2.3 ANMERKUNGEN ZUR THEORIE

Aufgrund des stark durch die Grenzschichteffekte geprägten strömungsmechanischen Verhaltens des bei den Kavitationsversuchen verwendeten Profils NACA 16-006 lassen sich -wie an nachfolgender Stelle erläutert ist- Theorie und Experiment insbesondere bei höheren

Anstellwinkeln nur bedingt miteinander vergleichen. Deshalb ist der Wunsch verständlich, die Theorie aus sich heraus plausibel und konsistent darzustellen, ohne dabei die Diskussion der Theorie mit den vorliegenden bzw. noch kommenden experimentellen Untersuchungen zu ersetzen.

Untersucht wurde, ob sich das instationäre Gleichungssystem (59), (60) für kleine reduzierte Frequenzen ein Bezug zum stationären System aufstellen läßt, insbesondere ob sich Aussagen über die Phasenverschiebung φ der maximalen Kavitationslängen der stationären und instationären Lösung.

Im Anhang ist der gescheiterte Versuch (sog. Fehler-Quadrat-Verfahren) erläutert worden, das instationäre Gleichungssystem (59), (60) analytisch zu lösen. Ebenso ließ sich kein Ergebnis erhalten, wenn die in diesem Lösungsversuch enthaltenen Gleichungen für kleine reduzierte Frequenzen k entwickelt wurden und nur die linearen Terme von k berücksichtigt wurden. Auch andere eingeschlagene Lösungswege führten zu keinem Erfolg, da diese Voraussetzungen über physikalische Größen (z.B. über die Phasenverschiebung φ) forderten, die man eigentlich erst durch die Rechnung bestimmen wollte.

Eine gewisse Kontrolle der Rechnungen brachten durchgeführte im einzelnen hier nicht aufgeführte Grenzübergänge für $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$ des instationären Gleichungssystems (59), (60). Für $k \rightarrow 0$ geht die instationäre Theorie in die quasi-stationäre über, für $k \rightarrow \infty$ ergeben sich die rein stationären Gleichungen.

Dieser auch von der physikalischen Vorstellung her plausible Zusammenhang zeigt sich auch in den Rechnungen. In der Abb.7 sind die Kavitationsausdehnungen $C_E(t)$ in Prozent der Profiltiefe der quasistationären Rechnung (gestrichelte Kurven)

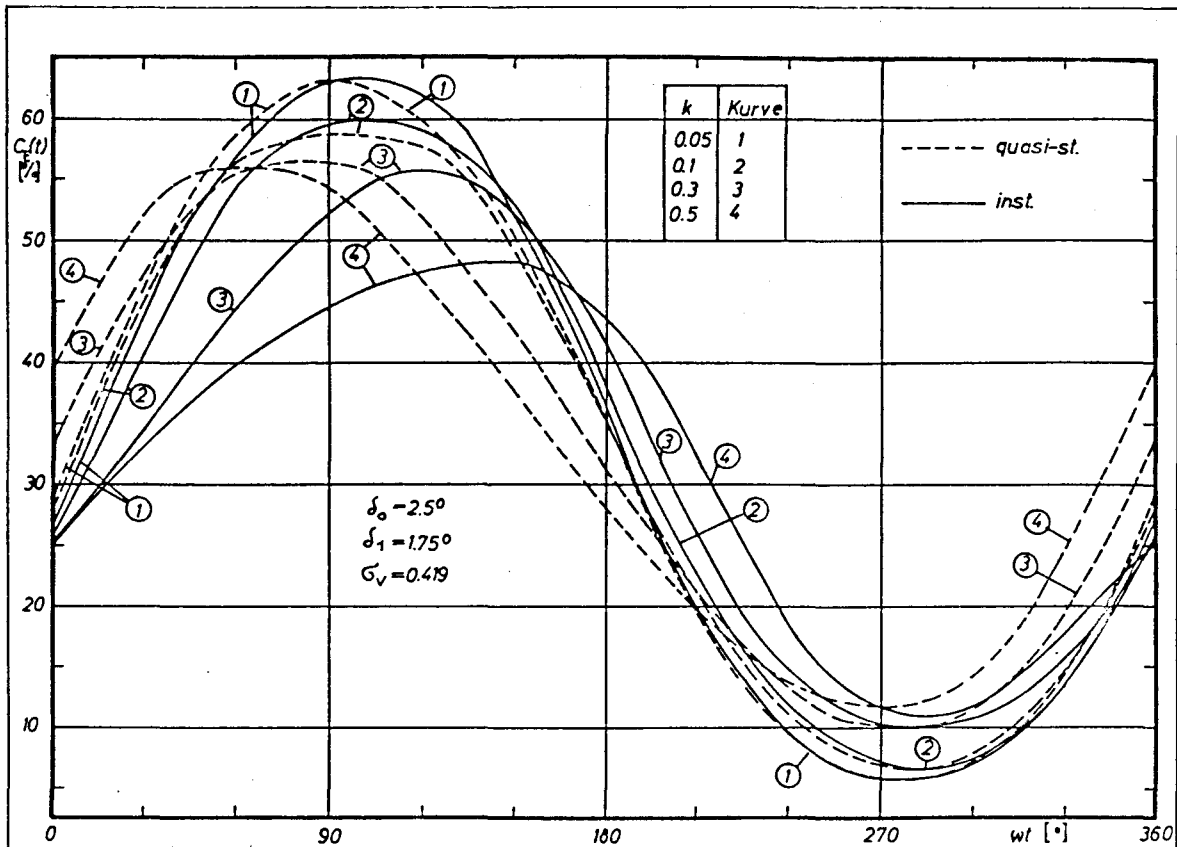


Abbildung 7. Kavitationsausdehnungen: Kavitationsausdehnung der quasistationären und instationären Theorie in Abhängigkeit von k

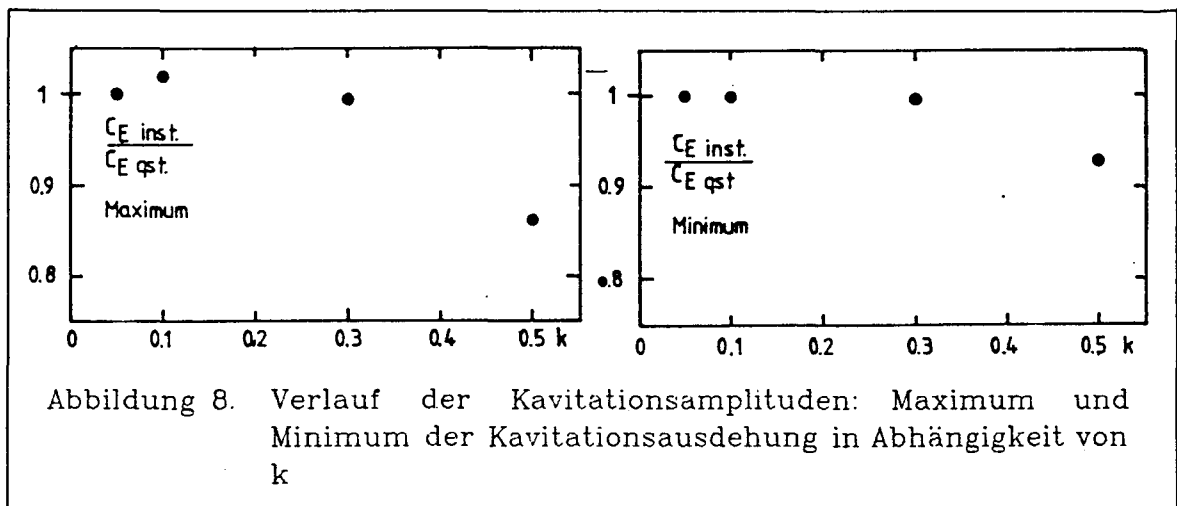
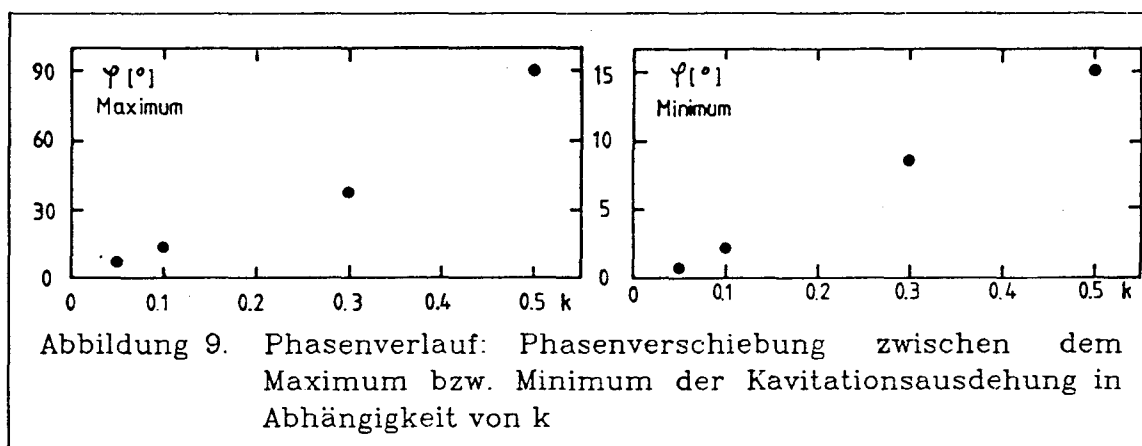


Abbildung 8. Verlauf der Kavitationsamplituden: Maximum und Minimum der Kavitationsausdehnung in Abhängigkeit von k

und der instationären Rechnung (ausgezogene Linien) über die Zeit ωt und für verschiedene reduzierte Frequenzen k aufgetragen.

Der Deutlichkeit wegen sind die interessanten Größen aus Abb.7 separat aufgetragen. In Abb.8 ist das Maximum bzw. das Minimum der Kavitationsausdehnung (normiert mit dem quasistationären Maximum bzw. Minimum) über k aufgetragen. Für kleine k stimmen die Maxima bzw. Minima der quasi-stationären bzw. instationären Rechnung bis auf eine gewisse Ungenauigkeit, die durch Recheneffekte hervorgerufen sein müßte, überein. Mit zunehmenden k verringern sich die Amplituden der Kavitationsausdehnungen, deutlicher für das Maximum als für das Minimum.

In Abb.9 ist die Phasenverschiebung zwischen dem jeweiligen Maxima bzw. Minima der quasi-stationären und der instationären Rechnung aufgetragen.



Für kleine reduzierte Frequenzen geht die Phasenverschiebung φ wie erwartet gegen Null. Bei größerem k vergrößert sich ebenfalls die Phasenverschiebung. Diese Effekte treten ebenfalls für die Maxima deutlicher hervor als für die Minima.

Das Minimum der Kurven in Abb.7 zeigt bzgl. seiner Amplituden-änderung oder bzgl. der Phasenverschiebung bei Variation des Parameters k also keine so drastischen Effekte wie das Maximum. Die relativ kleine noch verbleibende Kavitationsausdehnung (in diesem Beispiel etwa 10%) im Minimum hat offenbar keinen Einfluß auf die Rechengenauigkeit (Raster der Aufpunkte in Profiltiefe läßt sich nicht beliebig verfeinern; siehe /38/) Analoge Rechnungen, bei denen die Kavitationsausdehnung im Minimum noch über 40% der Profiltiefe ausmachten, brachten gleiche Resultate.

Der von der Zeit abhängige Anstellwinkel ϑ_1 geht bei den Rechnungen nur in die Gleichungen (57) der Druckverteilung ein. Geht ϑ_1 gegen Null, so muß, wie auch die Rechnungen in Abb.10 zeigen, die instationäre Rechnung in die rein stationäre übergehen.

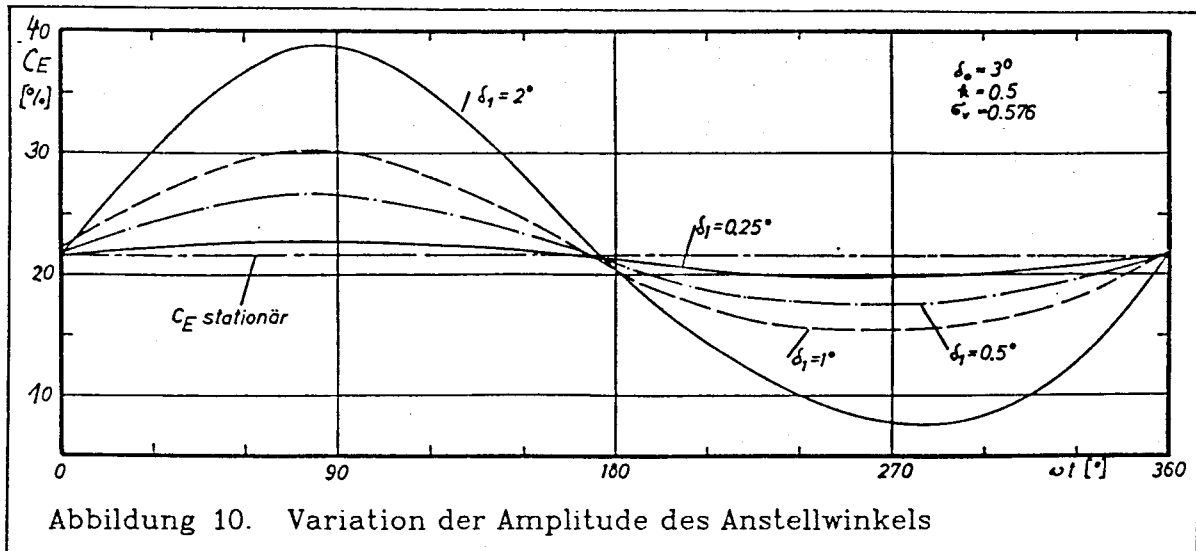


Abbildung 10. Variation der Amplitude des Anstellwinkels

Mit kleineren ϑ_1 gehen die Amplituden der Auslenkungen zurück. Aufgrund der Linearisierung der instationären c_p -Verteilung muß der Mittelwert aller $C_E(t)$ -Werte genau dem der stationären Rechnung entsprechen. Die arithmetische Mittelwertbildung der instationären $C_E(t)$ ergab bis auf ein bis zwei Prozent Abweichung den stationären Wert. Die Differenz ist auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen. Mit den Formeln der hier abgeleiteten Gleichungen ergeben sich exakt die gleichen Werte.

2.4 BLASENDYNAMISCHE ABSCHÄTZUNG FÜR DIE ZUSAMMENFALLSTRECKE

Die Profiltheorie geht von der Vorstellung aus, daß zugleich mit dem Ansteigen des Druckes p über den Dampfdruck p_v bei $C_E(t)$ die Kavitationsschicht endet. Der Schließungsvorgang für $\eta(x)$ wird wegen der Annahmen eines offenen Kavitationsmodells ausgeklammert. Tatsächlich wird jedoch durch den Druckanstieg über den Dampfdruck der Zusammenfall erst ausgelöst und die Kavitationsschicht zerfällt mehr oder weniger schnell im Bereich $x > C_E(t)$. Diese Annahme wird im Vergleich von der nach der Profiltheorie berechneten Kavitationsausdehnungen mit Experimenten deutlich /1, 8/. Die theoretischen $C_E(t)$ -Werte sind in der Regel kleiner als die beobachteten Kavitationsausdehnungen. Danach ist nun plausibel, den gemäß der Profiltheorie berechneten Kavitationsbereich $C_A \leq x \leq C_E(t)$ noch um eine Zusammenfallstrecke Δx_z zu verlängern.

Für eine Abschätzung dieser Zusammenfallstrecke gehen wir von dem Modell aus, daß bei $x=C_E(t)$ die Kavitationsschicht der Dicke $2\eta(C_E)$ aus Blasen des Durchmessers $2\eta(C_E)=2R_0$ besteht. Die Zeit t_z für den Zusammenfall ist aus der Blasendynamik bekannt (vgl./1/) und durch Experimente bestätigt und lautet

$$(106) \quad t_z = 0.915 R_0 \sqrt{\frac{p}{\rho - \rho_v}}$$

Dabei ist R_0 der Anfangsradius der Blase und p der den Zusammenfall auslösende Umgebungsdruck. In unserem Fall soll p der mittlere Druck im Profilbereich $C_E \leq x \leq \Delta x_z + C_E$ sein. Wird weiter $R_0 = \eta(C_E)$ gesetzt und gilt $\Delta x_z = u \cdot t_z$ so folgt mit $u/u_\infty = \sqrt{1+c_p}$ für die Zusammenfallstrecke

$$(107) \quad \Delta z = 1.3 \eta(C_E) \sqrt{\frac{1+c_p}{1-c_p}}$$

Die Lösung von (107) erfolgt mit einem Iterationsverfahren, in dem für die erste Näherung $c_p = c_p(C_E)$ genommen wird und sich somit eine erste Abschätzung von Δx_z ergibt. In der Iteration wird dann $c_p = 0.5 \cdot (c_p(C_E) + c_p(C_E + \Delta x_z))$ verwendet. Die Konvergenz ist gut, so daß in der Regel die erste Iteration ausreicht. Damit ist die Zusammenfallstrecke in einer Abschätzung bestimmt. Genauere Betrachtungen sollen anderen Arbeiten überlassen werden, die sich mit dem Verhalten von Mehr- und Vielblasensystemen beschäftigen.

2.5 DRUCKVERTEILUNG MIT KAVITATIONSSCHICHT

Im Abschnitt 2.1.1.4. wurde bereits die instationäre Druckverteilung am Tragflügel ohne Berücksichtigung der Kavitationsschicht besprochen (30). Ist eine Kavitationsschicht vorhanden, so beeinflußt diese die Druckverteilung entsprechend der Gleichung (31). Diese instationäre Druckverteilung eines kavitierenden Profils konnte erstmalig bestimmt werden und wird in diesem Abschnitt dargelegt.

Die instationäre Druckverteilung $c_{vp}(x,t)$ mit vorhandener Kavitationsschicht auf der Flügelsaugseite (31) ist bereits implizit in dem Integralgleichungssystem (59), (60) enthalten. Ihre Bestimmungsgleichung lautet durch Umstellen von (60)

$$(108) \quad c_{vp}(x,t) = c_p(x,t) + Q_L(x,t) + \frac{\delta \eta(x,t)}{\alpha_{\infty}} + \frac{1}{\pi \alpha_{\infty}} \int_{c_A}^{c_E(t)} q_{\eta}(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Ist der Iterationsvorgang abgeschlossen, so sind alle Größen auf der rechten Seite von (108) bekannt und $c_{vp}(x,t)$ läßt sich bestimmen. Nach der Voraussetzung (31) gilt natürlich für den Bereich der Kavitation

$$(109) \quad c_{vp}(x,t) = \sigma_v$$

Die Integration in (99) muß über q_{η} numerisch erfolgen, da diese Quellen-Senkenverteilung nicht analytisch sondern nur für eine diskrete Anzahl von Aufpunkten vorliegen (siehe Programmbeschreibung im Anhang B oder /38/).

Die Rechenergebnisse werden später vorgestellt.

3.0 EXPERIMENTELLE DATEN EINES SCHWINGENDEN TRAGFLÜGELS

In der Literatur ließen sich keine Experimente finden, die instationär belastete Tragflügel bei Teilkavitation behandelten und außerdem durch die Versuchsbedingungen die Annahme einer Potentialströmung zuließen. Deswegen gilt der Dank umsomehr dem Institut für Schiffs- und Meerestechnik der Technischen Universität Berlin, an dem Versuche gemäß unseren Wünschen durchgeführt werden konnten. Dabei wurde auf den experimentellen Aufbau und dem Versuchsablauf kein Einfluß genommen, sondern nur die Parameter der Messung vorgegeben.

Die Kavitationsmessungen erfolgten am Profil NACA 16-006, dessen geometrische Daten aus /31/ entnommen werden können.

3.1 BESCHREIBUNG DES EXPERIMENTES

Die Experimente des um den 1/4-Punkt oszillierenden Tragflügels wurden am kleinen Kavitationstunnel K28 durchgeführt. Die Beschreibung der Versuchsanordnung findet man in /39/ oder /40/. Der zweidimensionale Testbereich hat eine Weite von 70 mm und eine Höhe von 200 mm (vgl. Abb.11)

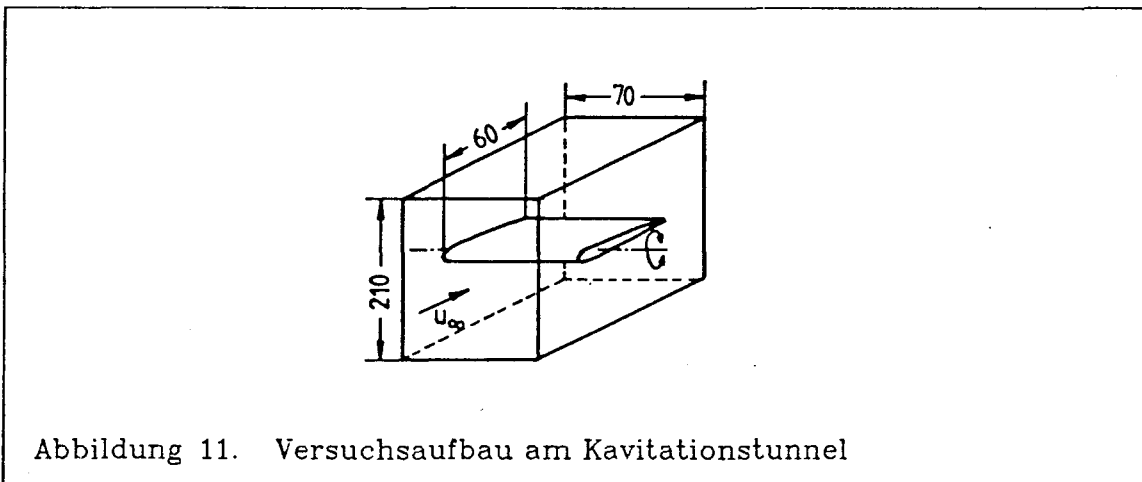


Abbildung 11. Versuchsaufbau am Kavitationstunnel

Der eingespannte Tragflügel mit einer Profiltiefe von 60 mm konnte auf einen mittleren Anstellwinkel δ_0 einstellen um den eine sinusförmige Drehschwingung um den 1/4-Punkt mit einer Amplitude von δ_1 erfolgte. Der momentane Anstellwinkel ist bei $\sin\omega t=0$ (also für ω gleich 0, π oder 2π) gleich dem mittleren Anstellwinkel δ_0 . Demnach lautet das Bewegungsgesetz der Sklettlinie

$$y_s(x,t) = -(x + \frac{A}{2}) \delta_1 \cdot \sin\omega t$$

Die Grenzschicht hat im Testbereich nach /39/ eine Dicke von etwa 5 mm. Im mittleren Tunnelbereich kann deshalb eine Potentialströmung angenommen werden.

Mit Hilfe einer Stroposkop- bzw. Blitzlicht-Einrichtung, die mit der Drehschwingung des Profils getriggert werden konnte, war es möglich, für beliebige Auslenkungen des Profils die Kavitation visuell zu beobachten und mittels einer oberhalb des Kavitationstunnels installierten Kamera zu fotografieren. Aufgrund des experimentellen Aufbaus war eine Beobachtung der Kavitationsdicke nicht möglich. Mit der Apparatur konnten ebenfalls stationäre Messungen bei festen Anstellwinkel durchgeführt werden.

Die Apparatur ist, wie in /39/ beschrieben, für Kavitationserosionsuntersuchungen konzipiert, d.h. für Versuche mit relativ großem Anstellwinkel δ_0 von 6° bis 8° Grad bei denen in der Regel Superkavitation untersucht wird. Beim Bau der Apparatur waren deshalb keine so große Genauigkeiten bzgl. der Einstellung der Winkel δ_0 oder δ_1 vorausgesetzt, wie sie zum Vergleich mit der hier vorgestellten Theorie, insbesondere bei kleinen Anstellwinkeln und kleinen Winkelamplituden wünschenswert wäre. Eine detaillierte Fehlerbetrachtung der gesamten Meßeinrichtung, die inzwischen zur Rekonstruktion abgebaut ist, liegt nicht vor.

Im nachfolgenden Abschnitt soll deshalb versucht werden, die möglichen Fehler und ihren Einfluß zu diskutieren.

3.2 FEHLERBETRACHTUNGEN

Konkrete Fehleraussagen mit Hilfe einer Fehlerrechnung sind nicht möglich, da die Fehlerquellen nicht genau und intensiv genug untersucht wurden, insbesondere nach einer in /40/ erwähnten Generalüberholung des Getriebes. Deswegen können an dieser Stelle nur Vermutungen geäußert werden, wo Fehler ihre mögliche Ursache haben, wie die Tendenz ihrer Größe ist und wie sie qualitativ zueinander eingeordnet werden können.

1. Ein Fehler aus der Einstellung des mittleren Anstellwinkels δ_0 bewirkt eine Verschiebung der mittleren Kavitationsausdehnung. Die mittlere Kavitation liegt höher oder tiefer als der tatsächliche Wert, je nachdem ob δ_0 größer oder kleiner als der Sollwert ist.

Der Fehler wurde mit etwa 0.2° /41/ als Erfahrungswert angegeben.

2. Die Amplitude der Winkelauslenkung δ_1 steht in Relation zu der Schwankung der Kavitationsausdehnung während einer Schwingungsperiode. Je größer δ_1 , desto größer die Kavitationslänge. Umgekehrt verringert sich bei kleinerem δ_1 die Kavitationsamplitude. Ein Fehler in δ_1 verfälscht also entsprechend die Kavitationslänge.

Eine Fehleraussage über δ_1 ist sowohl für die Einstellung als auch für die Änderung beim Schwingvorgang für die Frequenzen der hier besprochenen Versuche nicht vorhanden. Insbesondere muß bei der Oszillation des Tragflügels die Massenträgheit des Profils bzw. der damit verbundenen Mechanik bedacht werden, die (verstärkt für größere reduzierte Frequenzen) ein Überspringen des Tragflügels und damit eine indirekte δ_1 -Vergrößerung hervorruft. Untersuchungen über diesen Aspekt des Fehleraussage an der benutzten Apparatur fehlen ebenso, inwieweit bei der Tragflügelschwingung auch bei hohen reduzierten Frequenzen noch eine Sinusform der Auslenkung gewahrt bleibt.

Eine quantitative Fehleraussage gibt es nicht, jedoch dürfte er vermutlich nicht größer als $\pm 0.5^\circ$ sein.

3. Ein gewisser Fehler folgt auch aus dem momentanen Strömungszustand, der um seinen Sollwert geringfügig schwankte. Dabei waren die Anströmgeschwindigkeiten u_∞ und der Unterdruck p_v im Kavitationstunnel während einer 30 Minuten dauernden Messung nicht konstant, und der momentane Kavitationsbeiwert weicht vom Sollwert ab. Der Mittelwert von σ_v war jedoch während einer Messung relativ konstant, so daß sich der Fehler zeitlich herausmitteln und diese Fehlerquelle somit gegenüber den anderen unbedeutend sein dürfte.
4. Fehler aus der Kavitationsbeobachtung. Zur Dokumentation der Kavitationsmessung wurde bzgl. der einzelnen Schwingungszustände neben dem Protokoll Fotoaufnahmen verwendet.

Das Protokoll entstand aus der visuellen Beobachtung der Kavitationsschicht, wobei das Auge zwar als Integrator dient, gleichzeitig aber wegen seiner Trägheit Feinheiten des Kavitationsvorganges nicht erkennen dürfte

Bei der Fotografie lassen sich Einzelheiten zwar durch entsprechende Vergrößerung hervorheben, jedoch ist nun die Zufälligkeit der Aufnahme insbesondere bei den Zuständen stark fluktuierender Kavitationsschichten bei dieser Dokumentationsmöglichkeit zu berücksichtigen. Aufgrund experimenteller Gegebenheiten war die

Anzahl der Aufnahmen auf drei bis maximal fünf pro Beobachtung begrenzt.

Im Rahmen der hier erfolgten groben Fehlerabschätzung scheint es ausreichend, die kleinste und größte Kavitationsausdehnung eines Schwingzustandes, die sich sowohl aus dem Protokoll als auch aus den Fotos ergaben, in Form eines Balkens in die entsprechenden weiter unten folgenden Diagramme einzutragen, um damit den Bereich der beobachteten Kavitation zu kennzeichnen.

5. Der Kavitationseinsatz wurde bei einer Beobachtung dann festgestellt, wenn Kavitation sichtbar wurde. Inwieweit die Kavitation zeitlich schon vor dem Sichtbarwerden einsetzt (z.B. durch Geräuschabstrahlung registrierbarer Einsatz /42/) ist nicht untersucht worden.

Bei den aufgeführten Fehlerquellen scheinen die durch den Anstellwinkel δ_0 und der durch die Winkelauslenkung δ_1 hervorgerufenen dominierend zu sein, wobei die Größenordnung beider Fehler als grober Anhaltspunkt $\pm 0.5^\circ$ sein dürfte. Der Einfluß des Fehlers ist bei kleinen Winkeleinstellungen sowohl für δ_0 als auch für δ_1 größer. Die Angaben über den Fehler sollen in der nachfolgenden Diskussion für eine sog. Parameterstudie der Theorie benutzt werden.

4.0 DISKUSSION VON THEORIE UND EXPERIMENT

Grundlage der instationären Rechnung bildet das stationäre Gleichungssystem mit seiner weitgehenden analytischen Auflösung. In einer Übersicht sollen deswegen zunächst die stationären Rechenergebnisse diskutiert und mit Experimenten verglichen werden, um so mögliche Einschränkungen bei den instationären Rechnungen zu erkennen. Außerdem soll der Vergleich der stationären mit den instationären Ergebnissen die Konsistenz des instationären Theorieansatzes mit seiner numerischen Lösung begründen.

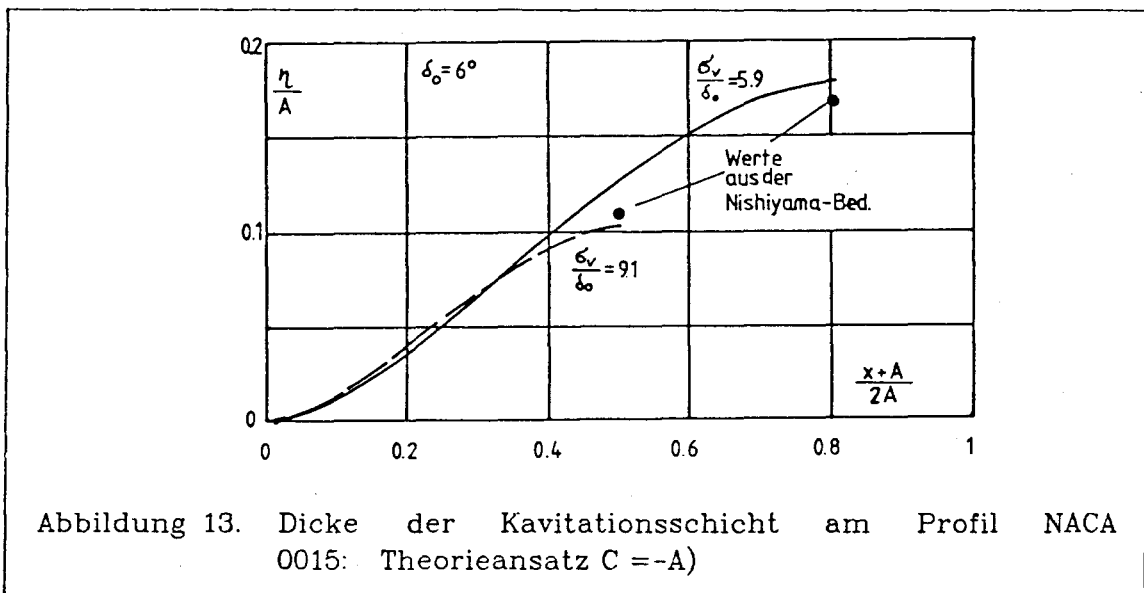
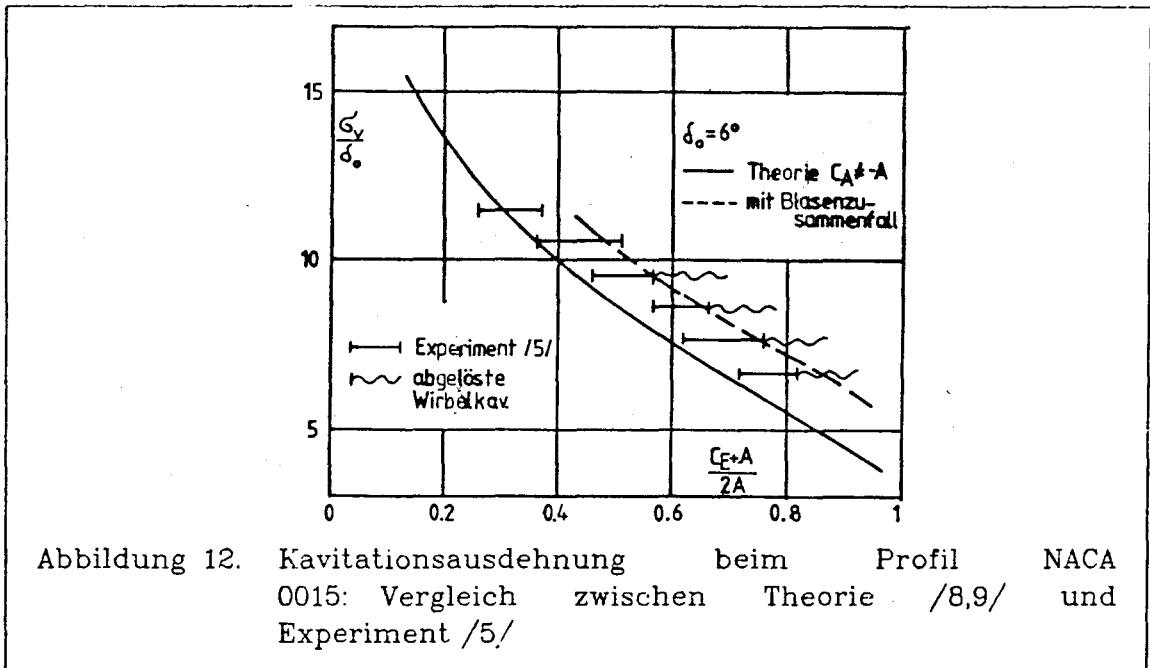
Die vorgestellten instationären Rechenergebnisse haben die Voraussetzung, daß der Kavitationsbeginn C_A mit der Lage des Druckminimums bei etwa 0.1% der Profiltiefe zusammenfällt. D.h. die Theorieversion $C_A \neq -A$, wie sie in Abschnitt 2. für den stationären bzw. instationären Fall dargestellt wurde, wird angewendet.

Bei steil angestellten Profilen oder auch bei sehr kleinem Nasenradius liegt das Druckminimum praktisch an der Vorderkante des Profils. Deswegen gilt für solche stationären Fälle der in /8/ (vgl. auch /1/) vorgestellte Theorieansatz mit Kavitationsbeginn an der Vorderkante ($C_A = -A$). Bei Profilen, deren Druckminimum weniger als 5% der Profiltiefe von der Vorderkante entfernt ist, liefern beide Theorieansätze gleichwertige Resultate. Um auf schon vorhandene Rechenergebnisse zurückzugreifen, wird deshalb bei der Diskussion der stationär angeströmten Flügelprofile zum Teil mit Ergebnissen aus den Theorieansatz mit $C_A = -A$ gearbeitet. Dabei wird die Allgemeinheit der Aussagen bzgl. dem alternativen Ansatz mit $C_A(t) \neq -A$ nicht eingeschränkt.

4.1 STATIONÄR BELASTETE FLÜGELPROFILE

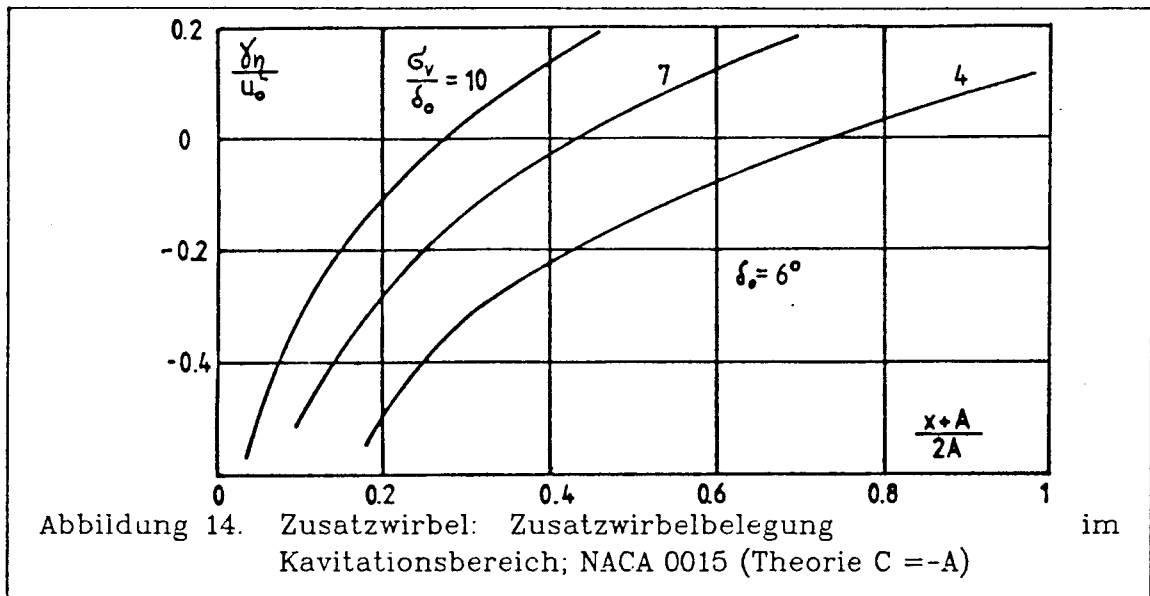
Die Abb.12 zeigt für das Flügelprofil NACA 0015 bei einem Anstellwinkel von $\delta_0 = 6^\circ$ die Kavitationsausdehnung C_E für verschiedene Strömungszustände. Die theoretischen Resultate sind aus /8/ (vgl. auch /9/), die experimentellen aus /5/ entnommen. Die ausgezogene Linie gibt die Theorie ohne, die gestrichelte mit Berücksichtigung des Blasenzusammenfalls nach Gleichung (107) an. Die Experimente mit ihren nur aus den photographischen Aufnahmen ermittelten Streuung sind durch Balken gekennzeichnet. Die Wellenlinie gibt dabei den Bereich abgelöster Wirbelkavitation an.

Die beobachtete Länge der Kavitationsschicht ist geringfügig größer als die nach der Profiltheorie (ausgezogene Linie) berechnete, wobei hier der Schließungsvorgang für die Kavitationsdicken wegen der Voraussetzung des



offenen Kavitationsmodells ausgeklammert wird. Der Zusammenfall der Kavitationsschicht wird jedoch erst durch den Druckanstieg über den Dampfdruck im Bereich $x > C_E$ ausgelöst. Wird dieser Zusammenfall gemäß Gl. (107) berücksichtigt (gestrichelte Linie), so liegen die experimentellen Werte zwischen den beiden theoretischen Kurven. Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist als gut zu bezeichnen.

In Abb.13 ist der Verlauf der Kavitationsdicke $\eta(x)$ über die Profiltiefe für zwei Strömungszustände aufgetragen. Die Punkte geben die entsprechenden sich aus der empirisch bewährten Nishiyama-Bedingung /7/ $\eta(C_E)=\delta_0 \cdot (C_E+A)$ ergebenden Werte an. Die Ergebnisse dieser Bedingung (entsprechen auch die des Theorieansatzes mit $C_A=-A$) stimmen mit denen der eigenen stationären Theorie gut überein. Die Nishiyama-Bedingung geht von der anschaulichen Vorstellung aus, daß die Mittellinie der Kavitationsschicht einer Stromlinie mit dem Anstellwinkel δ_0 folgt.



Die Abb.14 gibt einen Einblick in den typischen Verlauf der zusätzlichen Wirbelverteilung $\gamma_\eta(x)$ kavitierender Profile in Abhängigkeit von der Profiltiefe und bei verschiedenen Kavitationsbeiwerten. In Nähe der Vorderkante ist $\gamma_\eta(x)$ im Bereich $c_p > \sigma_v$ negativ. Dadurch werden die Unterdrücke, die sich aus der Theorie des von Kavitation freien Zustands ergeben, wieder auf Dampfdruck p_v angehoben. Im hinteren Profilbereich ist $\gamma_\eta(x)$ positiv und somit kann der Druckanstieg, der ohne Kavitation vorläge, durch den Einfluß vorhandener Kavitation stromabwärts verschoben werden.

Dieser Sachverhalt des nach stromabwärts verschobenen Druckanstiegs wird auch durch den Verlauf der Druckverteilung deutlich, die ja in der Theorie durch die Wirbelverteilung bestimmt wird. Die theoretische Druckverteilung ohne Kavitation c_p kann durch Gl.(42), die stationäre Druckverteilung mit Kavitation im Zusammenhang mit der zusätzliche Wirbelverteilung $\gamma_\eta(x)$ -so wie in /9/ durchgeführt- bestimmt werden. In Abb.15 sind die in /5/ gemessenen Druckverteilungen mit und ohne Kavitation über

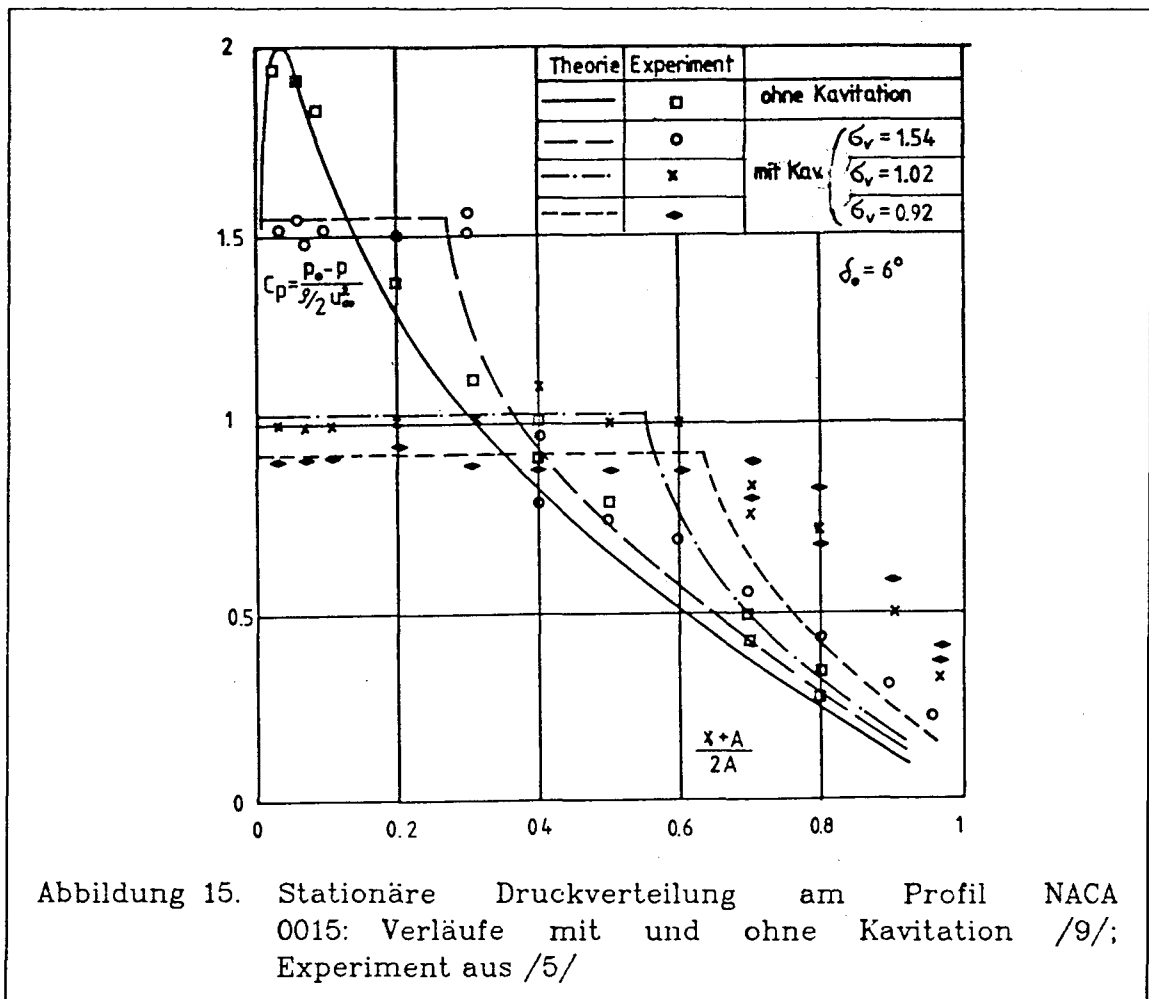


Abbildung 15. Stationäre Druckverteilung am Profil NACA 0015: Verläufe mit und ohne Kavitation /9/; Experiment aus /5/

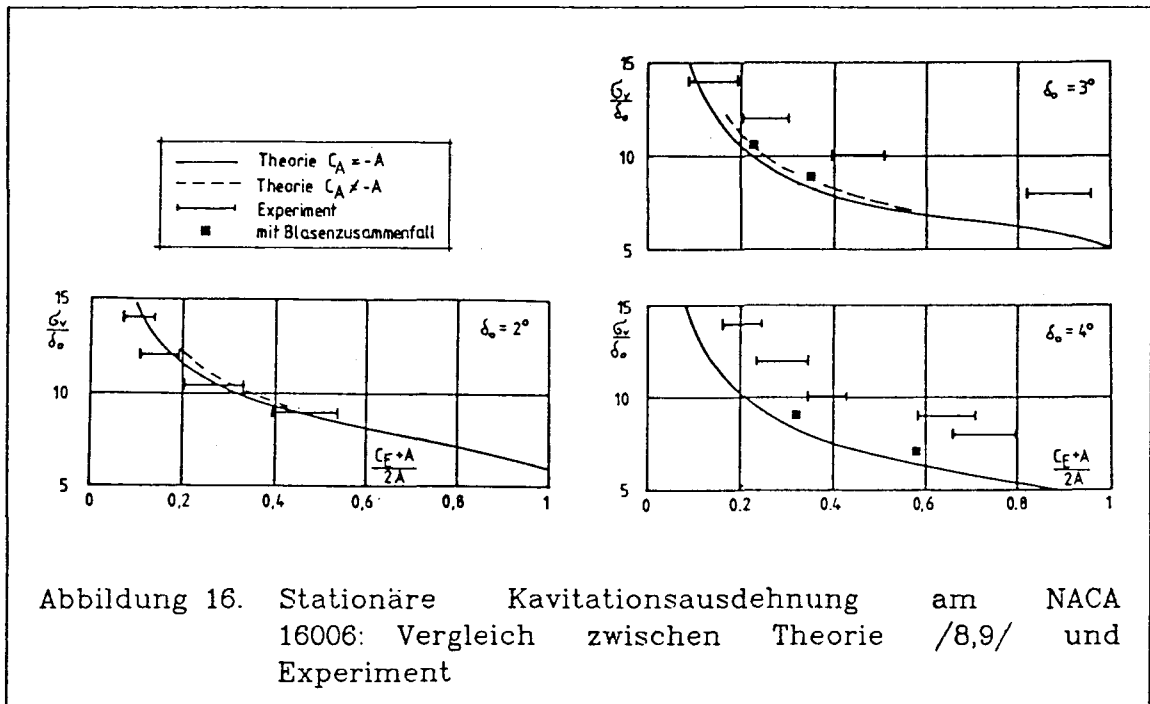
die Profiltiefe für verschiedene Kavitationsbeiwerte aufgetragen; die theoretischen Ergebnisse sind /9/ entnommen.

Deutlich wird, daß sowohl experimentell als auch theoretisch der Druck auch noch hinter der Kavitationsschicht unter dem Wert liegt, der im Zustand ohne Kavitation angenommen wird. Der experimentelle Verlauf wird durch die Theorie relativ gut beschrieben.

Ähnliche gute Übereinstimmungen zwischen Theorie und Experiment bzgl. der Kavitationsgrößen wie beim Profil NACA 0015 ergeben sich ebenfalls für das Profil NACA 4412 /8,9/.

Für das bei den instationären Messungen verwendete Profil NACA 16006 traten jedoch bei diesen stationären Vergleichen erhebliche Abweichungen auf. Die Abb.16 zeigt für den Anstellwinkel $\delta_0=2^\circ, 3^\circ$ und 4° den Verlauf der Kavitationsbeiwerte in Abhängigkeit von der Profiltiefe. Die Experimente

bei stationärer Zuströmung, die unter den in Abschnitt 3. erläuterten Versuchsbedingungen erfolgten, sind wieder als Balken (Streuung aus den photographischen Aufnahmen) dargestellt. Für $\delta_0=2^\circ$ ist eine recht gute Übereinstimmung festzustellen, während für $\delta_0=3^\circ$ und insbesondere für $\delta_0=4^\circ$ die experimentellen Kavitationswerte doppelt so groß als wie die aus der theoretischen stationären Rechnung.



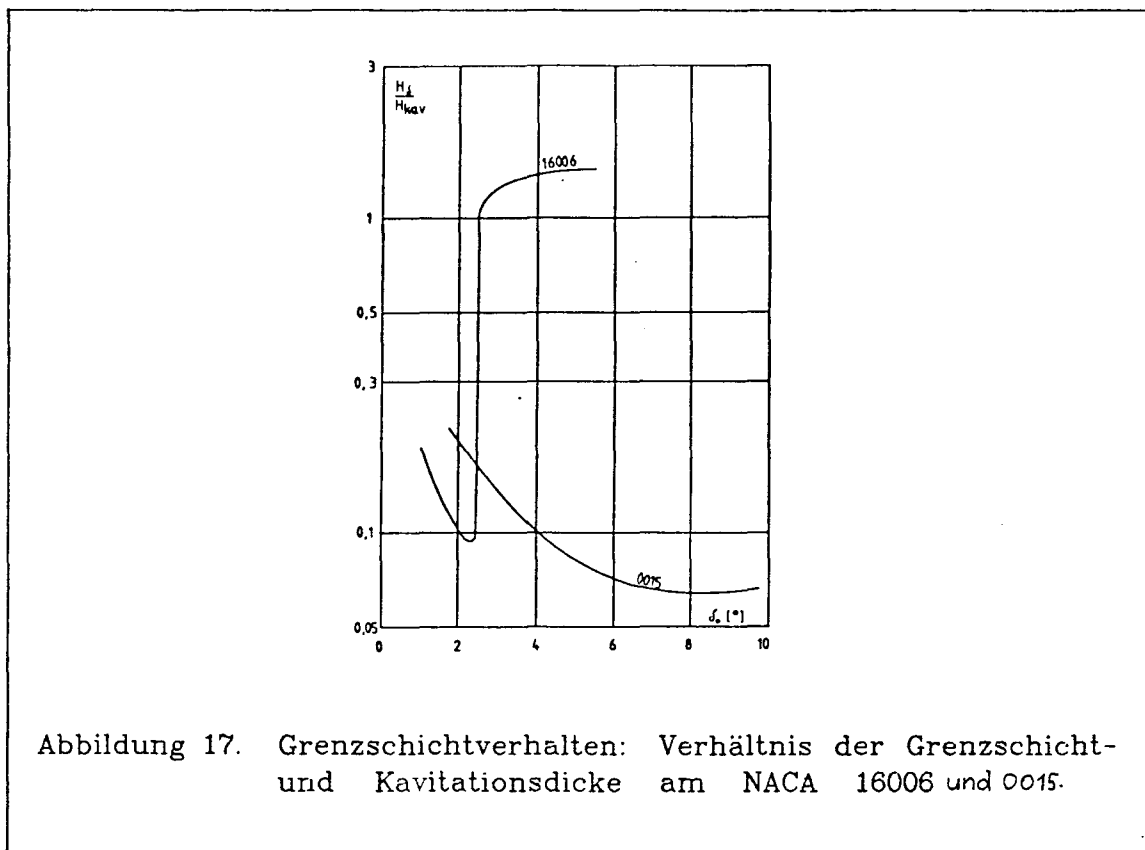
Die ausgezogenen Linien beschreiben die Theorie mit dem Ansatz $C_A = -A$, während die gestrichelten Linien die Ergebnisse mit dem Ansatz $C_A \neq -A$ beschreiben. Diese beiden Kurven zeigen keinen großen, vor allem keinen prinzipiellen Unterschied im Verlauf und somit auch nicht im Vergleich zum Experiment. Ebenso kann die Berücksichtigung des Blasen zusammenfalls (Quadrate) die Diskrepanz zum Experiment nicht überbrücken.

Die Klärung dieser schlechten Übereinstimmung bei diesem Profil NACA 16006 ist in /43/ durchgeführt und ergibt sich aus der Analyse des Charakters der Profilhenschicht. Innerhalb der Grenzschicht des Profils wird die aus der Potentialströmung berechnete Druckverteilung durch turbulente Druckschwankungen infolge von Zähigkeitseinflüssen modifiziert und zwar verstärkt beim Auftreten von Strömungsablösungen. Im Bereich voll anliegender turbulenter Grenzschicht sind solche Druckschwankungen relativ unbedeutend, anders jedoch für laminare Ablösungen oder beim turbulenten Wiederanlegen laminarer Ablösezone. Um zu beurteilen, ob und in welchem Maße die potentialtheoretische

Druckverteilung modifiziert werden muß, ist die Kenntnis einer Grenzschichtcharakteristik nötig.

Wie in /43/ für die Profile NACA 16006 und 0015 durchgeführt (für Einzelheiten muß auf /43/ verwiesen werden) ist, lassen sich die Bereiche der laminaren Ablösung, die des turbulenten Wiederanlegen einer kurzen Ablösezone oder die des natürlichen Übergangs zur Turbulenz längs der Profiltiefe für verschiedene Anstellwinkel δ_0 , bestimmen.

Ein Kriterium, ob noch die Potentialtheorie für die Berechnung der Kavitation vorausgesetzt werden kann oder nicht, ergibt sich aus dem Verhältnis der Grenzschichtdicke H_δ und der Kavitationsdicke, hier jetzt mit H_{Kav} bezeichnet, an der Stelle der laminaren Ablösung. Zur Erläuterung soll die aus /43/ entnommene Abb.17 dienen



Beim Profil 0015 ist an der Stelle der laminaren Ablösung die Dicke H_{Kav} der Kavitation (je nach Anstellwinkel) etwa 5 bis 15 mal größer als die Grenzschichtdicke H_δ . Bei diesem Profil reicht also die Kavitation bis weit in die Potentialströmung hinein; d.h. eine rein potentialtheoretische Rech-

nung der Kavitation führte zu mit dem Experiment übereinstimmenden Resultaten (vgl. Abb.12 und 15).

Demgegenüber zeigt das Profil 16006 in Abb.17 bei dem Anstellwinkel von etwa 2.4° eine sprunghafte Veränderung des Grenzschichtverhaltens. Für $\delta_0 < 2.4^\circ$ liegt natürlicher Übergang zur Turbulenz vor. In diesem Bereich ist die Kavitationsschicht etwa fünf mal so groß wie die Grenzschicht. Bei diesen kleinen Anstellwinkel läßt sich bei der Berechnung der Kavitation eine Potentialtheorie voraussetzen, wie die Übereinstimmung der theoretischen und experimentellen Werte in Abb.16 für $\delta_0 = 2^\circ$ zeigt.

Bei größeren Anstellwinkeln wird das Verhältnis H_δ/H_{Kav} größer als 1 und die Kavitationsschicht befindet sich innerhalb der Grenzschicht. In diesem Bereich beeinflußt das turbulente Druckfeld die Kavitationserscheinungen entscheidend, die nun mit einem potentialtheoretischen Modell nicht mehr erfaßt werden können. Diesen Sachverhalt zeigte auch das Ergebnis des Vergleiches zwischen Theorie und Experiment die Abb.16 für die Anstellwinkel $\delta_0 = 3^\circ$ und 4° . Eine Kavitationstheorie für solche turbulenten Druckfelder steht derzeit noch aus

Dieses Grenzschichtverhalten vom Profil 16006 muß bei der nachfolgenden instationären Diskussion bedacht werden. Ansonsten zeigte die Diskussion der stationären theoretischen Ergebnisse ein in sich konsistentes und physikalisch sinnvolles Verhalten und gute Übereinstimmung mit Experimenten, sofern eine Potentialtheorie vorausgesetzt werden kann. Die Grundlage der stationären Theorie für die instationären Betrachtungen ist dadurch gerechtfertigt.

4.2 DAS INSTATIONÄR BELASTETE FLÜGELPROFIL

Die Ergebnisse aus der im Abschnitt 2. dargestellten instationären Kavitationstheorie sollen mit experimentellen Daten des Profils NACA 16006, das um den 1/4-Punkt sinusförmige Drehschwingungen ausführt (vgl. Abschnitt 3.), verglichen werden. Die Schlußfolgerungen der Grenzschichtdiskussion müssen dabei berücksichtigt werden. Zu erwarten ist, daß das Ablöseverhalten von Grenzschichten bei instationärer Strömung günstiger als bei stationärer ist, so daß die potentialtheoretische Theorie noch bis zu etwa 3° als momentaner Maximal-Anstellwinkel die Kavitation des Profils noch vernünftig erfaßt.

Die Abb.18 zeigt für den mittleren Anstellwinkel $\delta_0 = 2^\circ$ und dem Kavitationsbeiwert $\sigma_v = 0.419$ die Kavitationsausdehnung $C_E(t)$ in Prozent der Profiltiefe in Abhängigkeit von der Zeit ωt bei verschiedenen

Winkelauslenkungen $\delta_1 = 0.5^\circ, 1^\circ$ und 2° und bei zwei reduzierten Frequenzen $k = 0.3$ und 0.5 .

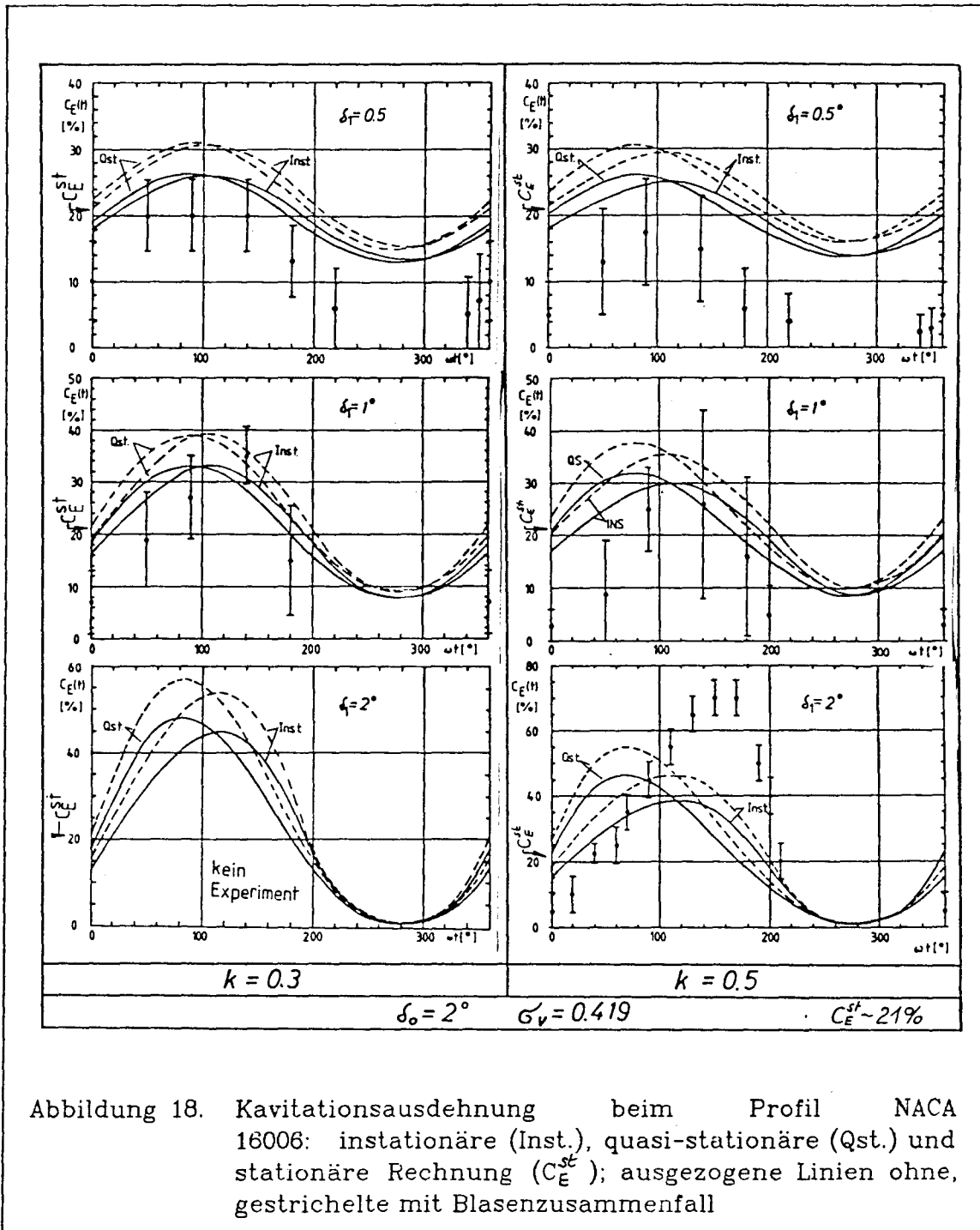


Abbildung 18. Kavitationsausdehnung beim Profil NACA 16006: instationäre (Inst.), quasi-stationäre (Qst.) und stationäre Rechnung (C_E^{st}); ausgezogene Linien ohne, gestrichelte mit Blasen zusammenfall

In den einzelnen Diagrammen sind jeweils die theoretischen Ergebnisse der quasi-stationären und der instationären Rechnung aufgetragen (ausgezogene Linien zusätzlich mit "Qst." und "Inst." gekennzeichnet). Entsprechend zeigen die getrichelten Kurven den $C_E(t)$ -Verlauf mit Berücksichtigung des Blasenzusammenfalls gemäß Gl.(107) an. Der rein stationäre Rechenwert C_E^{st} ist aus Abb. 16 übertragen. Die Experimente sind -wie in Abschnitt 3. beschrieben- mit ihrer Streuung als Balken in den Diagrammen dargestellt.

Erwartungsgemäß (vgl.2.3.) vergrößern sich die Maximalwerte der Kavitationsausdehnung mit zunehmender Profilauslenkung δ_1 . Ebenfalls nimmt die Phasenverschiebung zwischen den Maximalwerten der quasi-stationären und instationären Rechnung für größere reduzierte Frequenzen k zu.

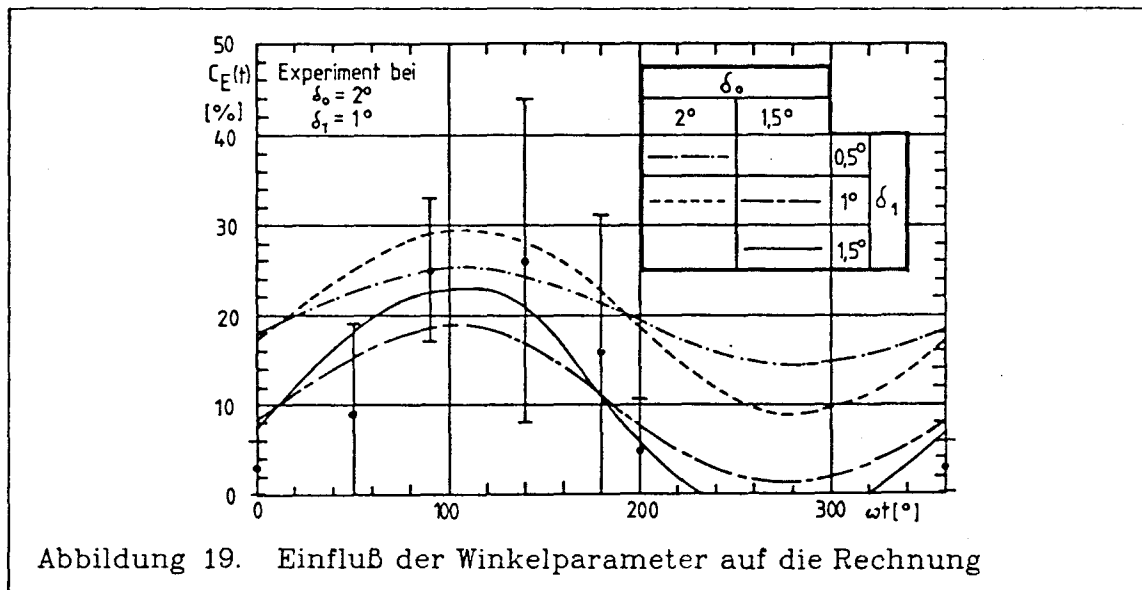
Grundsätzlich kann eine quasi-stationäre Rechnung nicht die Phasenverschiebung zwischen der Tragflügelauslenkung und Kavitationsmaximum beschreiben. Die Phase der maximalen Kavitation der quasi-stationären Theorie fällt etwa bei $\omega t=80^\circ$ mit dem Zeitpunkt der ausgeprägten Unterdrücke zusammen. Die Kavitationsschicht benötigt für Ihre Ausbildung eine gewisse Zeit, so daß zwischen den Zeitpunkten der maximalen Kavitationserscheinungen und denen der ausgeprägten Druckminima eine nachteilige Phase von etwa $\omega t=40^\circ$ bis 50° vorhanden ist, wie einmal die Beobachtungen und auch die instationären Kavitationsberechnungen zeigen.

Das Maximum der Kavitationsausdehnung der instationären Rechnung liegt bei $k=0.5$ etwa bei $\omega t=120^\circ$ bis 130° , bei $k=0.3$ etwa bei $\omega t=110^\circ$ bis 120° (siehe Abb.18). Die Änderungen der Minimalwerte der Ausdehnung der Kavitation sind nicht so drastisch. Bei $k=0.5$ liegt es etwa bei $\omega t=280^\circ$, bei $k=0.3$ bei etwa $\omega t=270^\circ$.

Die Maximalwerte von $C_E(t)$ stimmen für $\delta_1=0.5^\circ$ und 1° sowohl mit den experimentellen Ausdehnungen als auch mit der Phase relativ gut mit der Messung überein. Bei $k=0.5$ und $\delta_1=2^\circ$ wird das Maximum von $C_E(t)$ zu etwa 38% berechnet, während nach dem Experiment etwa 70% zu erwarten wären. Der Grund dieser drastischen Abweichung dürfte im Einfluß der Grenzschicht liegen; der momentane Maximal-Anstellwinkel beträgt in diesem letzten Fall bereits 4° , so daß die auf rein Potentialtheorie basierende Kavitationsrechnung die vorliegenden experimentellen Verhältnisse nicht mehr richtig erfassen kann. Die gleichen Gründe dürften für die unterschiedliche Lage der Maxima von $C_E(t)$ aus der Rechnung und Messung gelten. Nach der Theorie liegt das Maximum bei $\omega t=130^\circ$, nach der Messung wäre jedoch $\omega t=160^\circ$ zu erwarten gewesen.

Bei allen Diagrammen in Abb.18 ist der rein stationäre Rechenwert $C_E^{st} \sim 21\%$, der Abb.16 entnommen wurde, eingetragen. Dieser Wert stimmt bis auf eine durch Recheneffekte hervorgerufene Ungenauigkeit mit den Mittelwerten über eine Schwingungsperiode der instationären und quasi-stationären Rechnung überein; gemäß dem linearisierten Ansatz der Druckverteilungsberechnungen ergibt sich aus den mathematischen Formeln eine exakte Übereinstimmung.

Im Experiment ist im Bereich für $250^\circ \leq \omega t \leq 320^\circ$ keine Kavitation beobachtet worden, die Rechnungen hingegen ergaben im Minimum von $C_E(t)$ immer eine Restkavitation. Die Gründe dieser Abweichung könnte in der Beobachtung selbst liegen: Zum einen sind die eingetragenen Beobachtungen relativ unsicher (große Streuung insbesondere für $\delta_1=1^\circ$ in Abb.18) zum anderen können andere Fehlerursachen, die in Abschnitt 3. diskutiert aber quantitativ nicht erfaßt wurden, zum Tragen kommen. Werden zum Beispiel die beiden Parameter δ_0 und δ_1 innerhalb ihres möglichen Fehlers $\pm 0.5^\circ$ variiert, so ergeben sich folgende in Abb.19 dargestellten Verhältnisse bzgl. dem Experiment mit $\delta_0=2^\circ$, $\delta_1=1^\circ$ und $k=0.5$:



Insbesondere kommt die ausgezogene Linie mit $\delta_0=1.5^\circ$ und $\delta_1=1.5^\circ$ den experimentellen Verhältnissen im Minimum bei $\omega t=280^\circ$ nahe. Diese Parameterstudie sollte zeigen, daß bei Änderung der Parameter δ_0 und δ_1 im Rahmen ihres möglichen Fehlers die Theorie noch immer mit dem Experiment vergleichbare Ergebnisse liefert.

Ein weiterer Grund für die Diskrepanz zwischen instationärer Rechnung und Messung bzgl. der Minimums von $C_E(t)$ könnte in der mangelnden

Kenntnis des Druckfeldes einer instationären, sich periodisch bei bestimmten Winkelstellungen ablösende Grenzschicht liegen. Die erwähnten Grenzschichtuntersuchungen in /43/ bezogen sich nur auf stationäre Zustände.

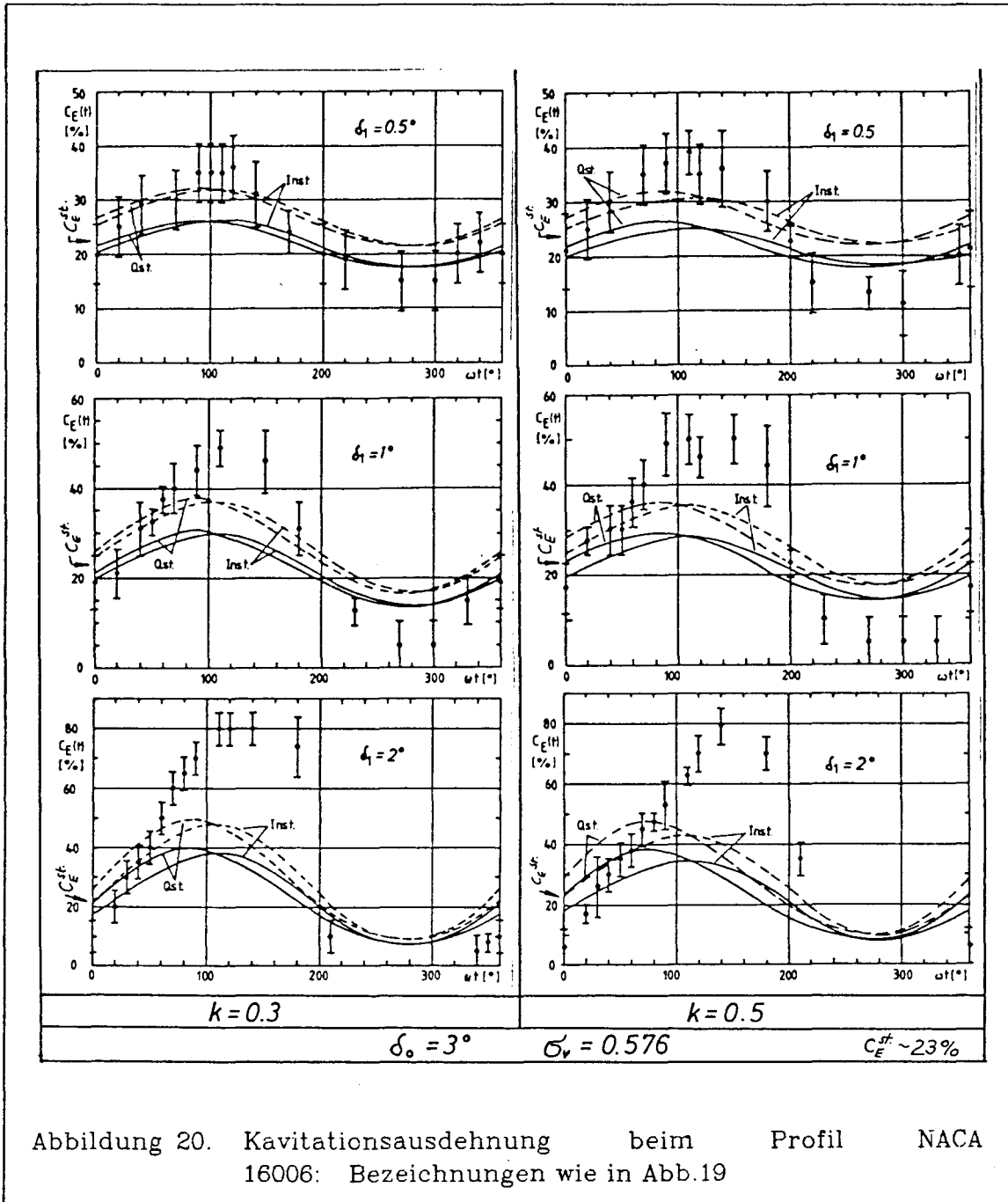


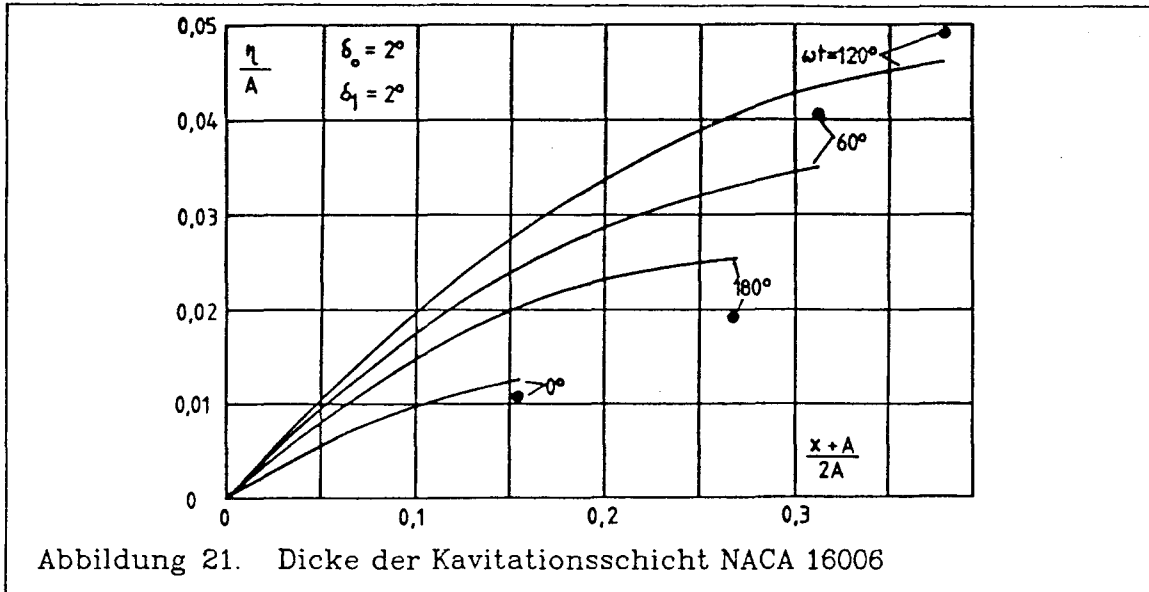
Abbildung 20. Kavitationsausdehnung beim Profil NACA 16006: Bezeichnungen wie in Abb.19

Die Abb.20 zeigt eine der Abb.19 analoge und in den Bezeichnungen identische Darstellung für den Fall mit dem mittleren Anstellwinkel $\delta_0=3^\circ$ und $\sigma_v=0.576$. Die Übereinstimmung zwischen den instationären Rechnungen und den Experimenten ist für $\delta_1=0.5^\circ$ noch recht gut. Jedoch schon bei $\delta_1=1^\circ$ und insbesondere bei $\delta_1=2^\circ$ kommen die Einflüsse aus dem Grenzschichtverhalten (der momentan größte Anstellwinkel beträgt in diesen Fällen bereits 4° und 5°) offenbar verstärkt zum Tragen.

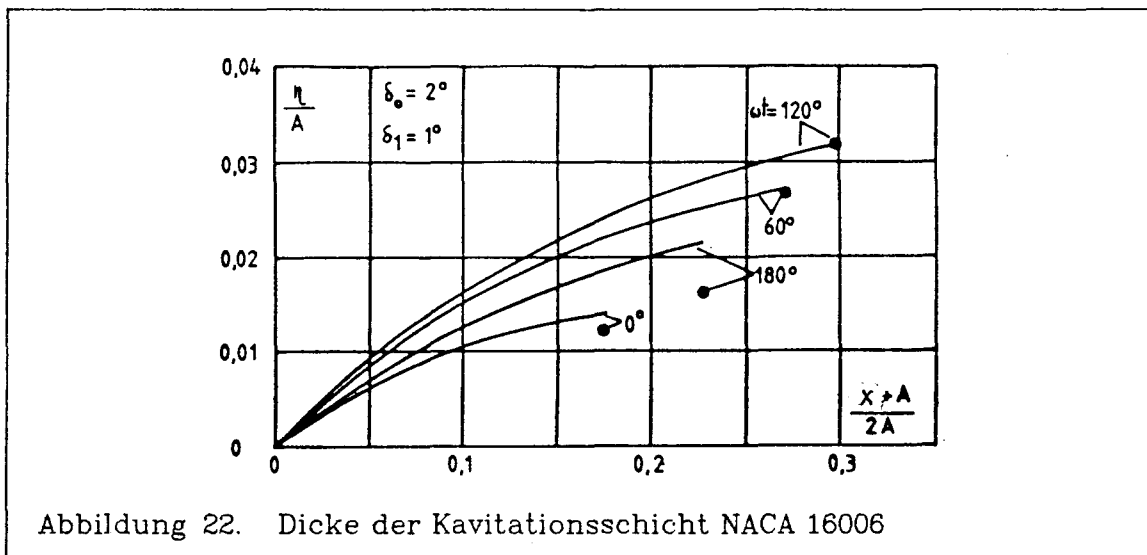
Die maximalen $C_E(t)$ -Werte der Rechnung betragen für $\delta_1=2^\circ$ ($k=0.5$) nur 33%, im Experiment sind jedoch 80% gemessen worden. Die Phasen zwischen den Maxima von $C_E(t)$ aus Rechnung und Experiment stimmen in der Tendenz überein; bei $\delta_1=1^\circ$ und 2° stellen sich die Maxima zeitlich später als die der Theorie ein. Ebenfalls ist eine Diskrepanz der Minima von $C_E(t)$ zwischen Vorhersage und Messung festzustellen. Die Erklärung hierfür dürfte die gleiche wie die bei der $\delta_0=2^\circ$ -Messung (Abb.19) sein.

Ebenfalls ist wie in Abb. 19 der entsprechende Wert $C_E^{st.} \sim 23\%$ aus Abb.16 eingetragen, der wieder mit den Mittelwerten der instationären bzw. quasi-stationären Rechnung gut übereinstimmt. Die Schallgeschwindigkeit a_0 ist nur bei reinem Wasser eindeutig definiert, das im Versuch nicht vorlag. Eine Variation von a_0 von 10 bis 20% zeigte, das dieser Parameter kaum Einfluß auf die Rechnung hat.

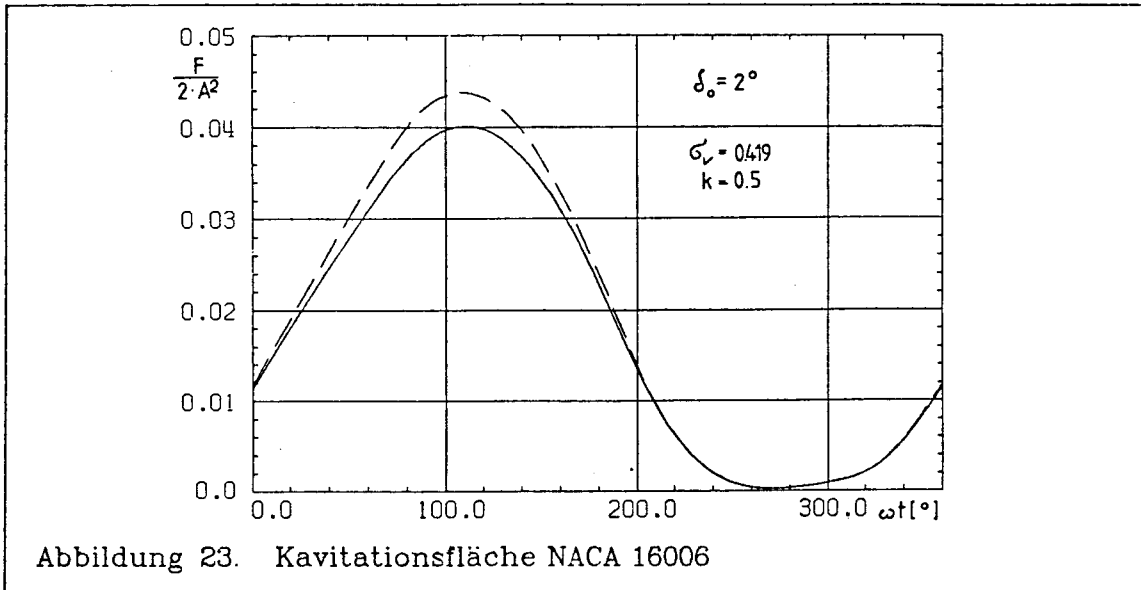
In den Abb.21 und 22 sind für $\delta_0=2^\circ$ und $\delta_1=1^\circ$ bzw. 2° die Kavitationsdicken $\eta(x)$ (Gl.(63)) längs der Profiltiefe für verschiedene Zeitpunkte ωt als ausgezogene Linien aufgetragen. Zum Vergleich sind in Abb.21 und 22 ebenfalls die Kavitationsausdehnungen eingetragen, wie sie sich aus der Nishiyama-Bedingung bei einer quasi-stationären Betrachtung für die Enddicken $\eta(C_E)$ gemäß $\eta(C_E)/A=(\delta_0+\delta_1 \cdot \sin \omega t) \cdot (C_E+A)/A$ ergeben. Die Übereinstimmung ist gut und spricht dafür, daß die instationäre Theorie keine unsinnigen Werte liefert.



Infolge der Phasenverschiebung, die beim Auf- und Abbau der Schicht bzgl. der Tragflügelauslenkung entsteht, ist die Dicke etwa im Bereich $\omega t \sim 90^\circ$ und mehr in der instationären Strömung kleiner als für den quasistationären Fall, analog umgekehrt für $\omega t \sim 180^\circ$. Diese wird insbesondere in Abb. 21 deutlich, weil hier im Vergleich zu 22 aufgrund der größeren Winkelauslenkung δ_1 die instationären Effekte größer sind.



Im übrigen ist festzustellen, daß die größte Kavitationsdicke bei der größten Auslenkung erreicht wird. Beobachtungen über die Kavitationsdicke liegen nicht vor.



In Abb.23 ist der charakteristische Verlauf (ausgezogene Linie) der Kavitationsfläche nach Gl.(64) in Abhängigkeit von der Schwingungsperiode aufgetragen. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf mit Berücksichtigung des Blasenzusammenfalls gemäß Gl. (107) wieder. Da sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ergab, daß die größte Dicke bei der größten Ausdehnung erreicht wird, ist verständlich, daß ebenfalls das Maximum der Kavitationsfläche etwa mit der zeitlichen Lage des Maximums von $C_E(t)$ übereinstimmt.

In Abb.24 ist die instationäre Druckverteilung $c_{vp}(x,t)$ mit (dick ausgezogene Linie) und ohne (dünn ausgezogene Linie) Berücksichtigung der Kavitationsschicht (Abschnitt 2.1.1.4. und 2.5) sowie dem stationären Anteil (gestrichelte Kurve) für $\delta_0=2^\circ$ und $\delta_1=2^\circ$ ($k=0.5$, $\sigma_v=0.419$) in Abhängigkeit der Profiltiefe und bei verschiedenen Zeitpunkten ωt aufgetragen.

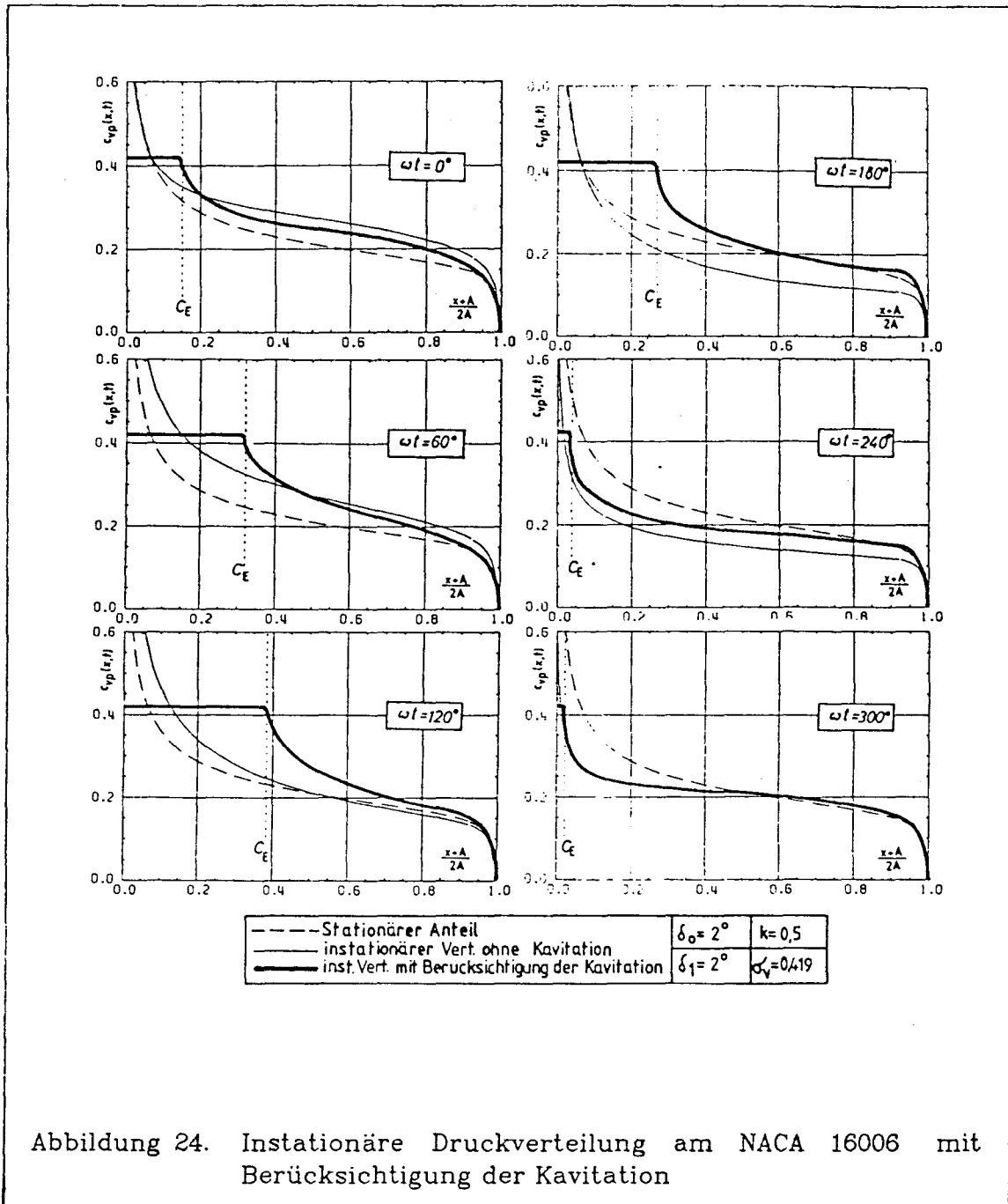
Gemäß dem Theorieansatz (31) ist im Bereich der Kavitation auf dem Profil Dampfdruck σ_v vorausgesetzt. Hinter dem Kavitationsende C_E fällt der Druckbeiwert $\sigma_{vp}(x,t)$ auf Null ab. Der Verlauf der Druckverteilung mit Berücksichtigung der Kavitation ähnelt dem in der stationären Strömung (Ab.15), bei der prinzipiell die berechneten Druckbeiwerte für den Profilbereich hinter der Kavitationsschicht höher als im Vergleich zu den von Kavitation freien Zuständen liegen.

Im Gegensatz dazu ergeben die Berechnungen der Druckverteilungen bei instationär belasteten Flügeln mit Berücksichtigung der Kavitationsschicht

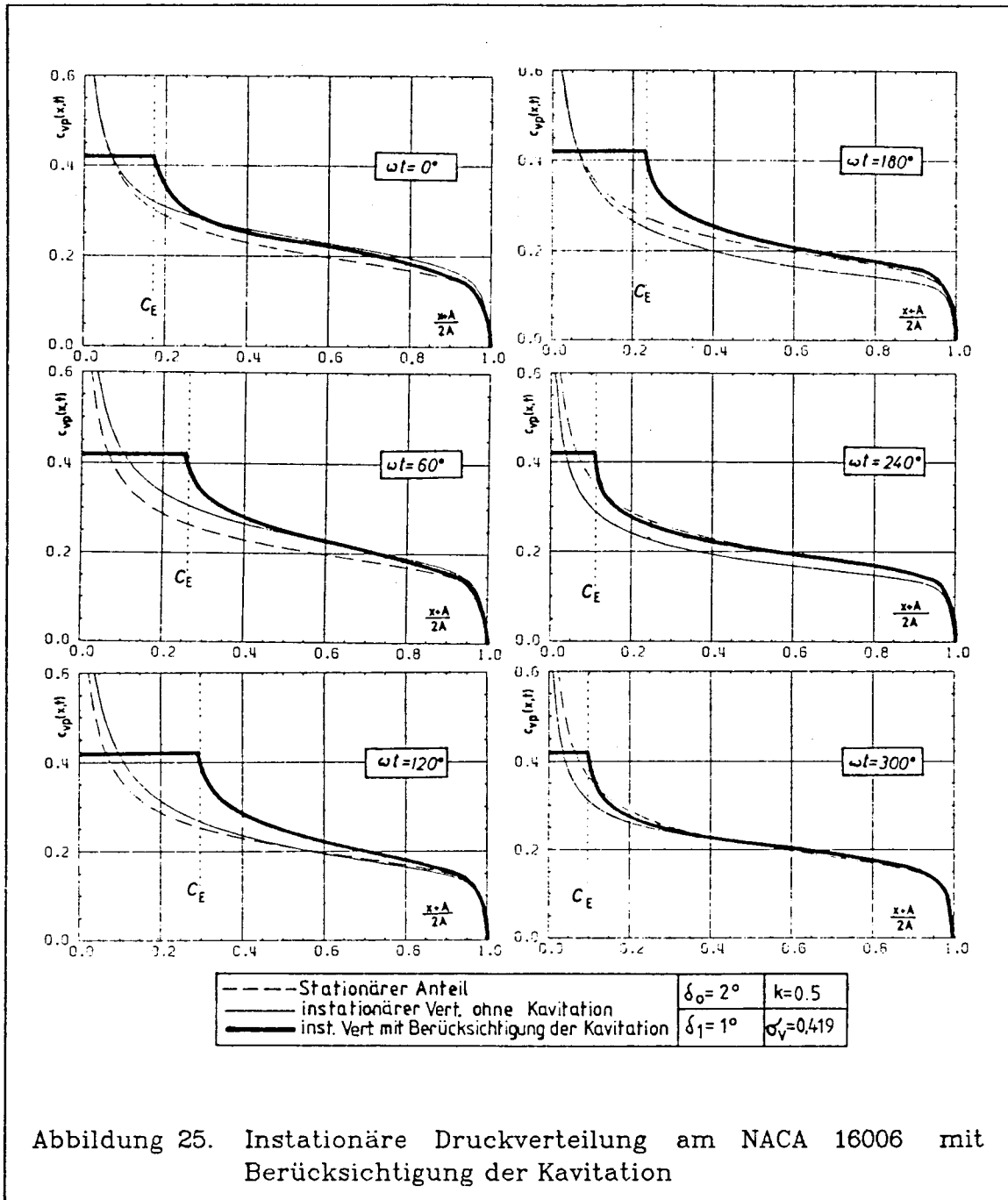
nur bei voll ausgebildeter Kavitation ($\omega t = 120^\circ, 180^\circ$ und 240° in Abb.24) Werte, die über den von Kavitation freien Zuständen sind. Bei anwachsender Kavitation (Zeitpunkte $\omega t = 0^\circ$ und 60°) liegen die Druckbeiwerte zum Teil deutlich unter denen, die sich aus Berechnungen ohne Einfluß der Kavitation ergeben.

Für den Fall instationärer Druckverteilung mit Kavitation liegen keine Meßdaten vor. Eine entgeltige Wertung ist deshalb z.Zt. nicht möglich; vergleicht man jedoch die aus Experimenten an kavitierenden Profilen in stationärer Strömung gewonnenen Daten mit den Ergebnissen der instationären Rechnung, so erscheinen letztere realistisch.

In Abb.25 sind die entsprechenden instationären Druckverteilungen (gleiche Bezeichnungen wie in Abb.24) für $\delta_0 = 2^\circ$ und $\delta_1 = 1^\circ$ eingetragen. Im Verlauf ist kein prinzipieller Unterschied festzustellen, nur sind aufgrund der geringeren Winkelauslenkung δ_1 die instationären Effekte gegenüber Abb.24 abgeschwächt.



Das Minimum der instationären Druckverteilung (ohne Kavitation) liegt für alle ωt -Werte ungefähr bei 0.1% der Profiltiefe. Laut Voraussetzung beginnt an dieser Stelle die Kavitation.



4.3 DISKUSSION VERGLEICHBARER ARBEITEN

Im vorigen Abschnitt wurden die Rechenergebnisse der eigenen instationären Kavitationstheorie mit Experimenten -so weit es möglich

war- verglichen und diskutiert. Bevor im nachfolgenden Abschnitt eine Wertung der eigenen Theorie bzw. Einordnung in die internationalen Arbeiten erfolgen soll, sollen zunächst vergleichbare Arbeiten über den behandelten Komplex erläutert werden. Für den Fall eines Tragflügels sind dieses die Arbeiten /15/ und /16/. Die Literatur die auf den Propeller bezogen ist, wird in dem entsprechenden Kapitel gesondert behandelt.

Die Arbeit /16/ baut auf der linearisierten Profiltheorie auf, wobei zur Beschreibung der Kavitationseffekte ebenfalls Wirbel- und Quellen- Senkenverteilungen herangezogen werden. Im Gegensatz zur eigenen Arbeit wird das Geschwindigkeitspotential als Störung beschrieben, die, hervorgerufen durch das Profil und durch die Kavitationsschicht, als klein angenommen wird. Diese Voraussetzung fordert für die durchgeführte Linearisierung, daß der Anstellwinkel und der Kavitationsbeiwert ebenfalls als klein angenommen wird.

Der Dicke des Profils wird kein Einfluß zugemessen, so daß von vornherein die Arbeit /16/ auf Tragflügelprofile der Dicke Null beschränkt wird. Mit der weiteren Voraussetzung eines großen aber endlichen Seiten-verhältniſes werden die entsprechenden Druck- und Strömungsrandbedingungen simultan wie folgt gelöst: man geht von einer drei-dimensionalen Strömung aus, deren Einfluß auf die Kavitation in zwei Anteile aufgespalten wird. Nämlich in dem inneren Problem für Bereiche unmittelbar am Profil (also zwei-dimensional) und dem äußeren Problem für Aufpunkte mit großem Abstand vom Profil (also drei-dimensionaler Zustand). Zu der zweidimensionalen Lösung des inneren Problems wird eine zeitabhängige Funktion mit den beiden Anteilen C und $p_i(t)$ ergänzt, die dann die exakte drei-dimensionale Lösung des äußeren Problems ergeben soll.

Im wesentlichen ersetzt C den Ansatz der Absteigemethode aus der kompressiblen drei-dimensionalen Lösung der eigenen Arbeit. Dieser Faktor C wird bei der Behandlung des inneren Problems durch asymptotische Entwicklung einer Strömung um Flügel mit großem Seitenverhältnis (als Parameter enthalten) bestimmt. Der zweite Anteil $p_i(t)$ wird iterativ durch Vergleich der Lösungen des inneren und äußeren Problems bestimmt.

Zusammenfassend gelten folgende Voraussetzungen in der Arbeit /16/: endliches Seitenverhältnis, kleine Anstellwinkel und Kavitationsbeiwerte, Profildicke Null und Erfüllung der Schließungsbedingung für das hintere Ende der Kavitationsschicht. Die Lösung wird in Bezug zum drei-dimensionalen Fall gesucht. Im Gegensatz dazu werden bei der eigenen Arbeit für die obigen Parameter keine Beschränkungen geltend gemacht, bzw. ein unendliches Seitenverhältnis und das offene Kavitationsmodell wird verwendet.

In /16/ wurden Rechnungen für ein Platte (Profil ohne Dicke) durchgeführt, wobei kein Vergleich mit Experimenten erfolgte. Durch den Umstand, daß eine ruhende Platte in einer wellenförmigen Anströmung betrachtet wird und damit faktisch ein über die Profiltiefe variabler Anstellwinkel vorhanden ist, lassen sich die eigenen Ergebnisse und die aus /16/ nicht unmittelbar vergleichen. Insbesondere fehlendadurch Aussagen bzgl. der Phasenverschiebung zwischen maximaler Flügelauslenkung und maximaler Kavitation. Ebenso lassen sich aufgrund unterschiedlicher Voraussetzungen keine Vergleiche über die konkret berechneten Kavitationslängen ziehen. Die Kavitationsausdehnung ähnelt vom Verlauf über eine Periode her dem des eigenen Ergebnis^{des}; zunächst erfolgt ein langsames Anwachsen der Kavitation bis zu einem plötzlichen Zusammenfall der Schicht.

Die Theorie /16/ gilt für Flügel mit endlichem Seitenverhältnis, wobei der Einfluß mit wachsenden Seitenverhältnis auf die Rechnung geringer werden sollte (Annäherung an die zwei-dimensionale Strömung). Das Resultat der Kavitationslänge mit dem Seitenverhältnis als Parameter von /16/ ist jedoch physikalisch zweifelhaft: Der Unterschied der Kavitationslängen mit dem Seitenverhältnis 1 und 10 hat die gleiche Größenordnung wie die Rechnungen mit dem Seitenverhältnis 100 und 1000. Zu vermuten ist, daß wegen der Anwendung von asymptotischen Näherungen beim inneren Problem die Theorie /16/ den Einfluß des Seitenverhältnisses nicht korrekt erfaßt.

Der in der Arbeit /15/ vorgestellte Theorieansatz für den Tragflügel baut auf rein stationäre Rechnungen mit einer veränderlichen Hinterkante der Kavitationsschicht als instationären Zusatzterm auf. Die zeitlich unabhängige Kavitationsausdehnung wird dabei vorgegeben und die Dicke des Kavitationsendes (ebenfalls unabhängig von der Zeit) als Unbekannte mit Hilfe der Variationsrechnung bestimmt. Dabei erfolgen gravierende Vernachlässigungen von dynamischen Effekten auf die Druckrandbedingung. So wird die Ableitung des Geschwindigkeitspotentials nach der Zeit Null gesetzt. Außerdem wird die Veränderung der freien Wirbel infolge der sich durch die Kavitation veränderten Druckverteilung nicht berücksichtigt. Ein offener Mangel dieser Theorie /15/ ist ein singuläres Verhalten für den Fall einer Kavitationsausdehnung bis zur Hinterkante. Dabei geht der Quotient aus dem Kavitationsbeiwert und dem Anstellwinkel gegen unendlich, sofern die Kavitationsdicke ungleich Null ist. Dieses physikalisch unsinnige Verhalten zwischen Teil- und Superkavitation wird in /15/ durch Interpolation überbrückt. Weiterhin werden experimentelle Parameter für die Berücksichtigung instationärer Effekte bei der Berechnung des Kavitationsvolumens benötigt.

Im Gegensatz zu /15/ berücksichtigt die eigene Theorie zum einen alle instationären Effekte, insbesondere die der Druckrandbedingung, zum anderen wird von zeitlich abhängenden Kavitationsgrenzen ausgegangen, ohne daß irgendwelche Größen der Kavitationserscheinung bekannt sein müssen.

Berechnungen wurden ebenfalls nur für ebene und gekrümmte Plattendurchgeführt, wobei in /15/ kein Bewegungsgesetz für den Tragflügel und auch keine Angabe über die Berechnung der Druckverteilung gefunden werden konnte, so daß schon aus diesem Grund kein Bezug zu den eigenen Untersuchungen hergestellt werden konnte.

In /15/ sind jedoch Ergebnisse z.B. der Kavitationsausdehnung für den quasi-stationären und instationären Fall angegeben. Dabei ergab sich eine Phasenverschiebung der instationären Rechnung (gekrümmte Platte mit $\delta_0=5^\circ$ und $k=0.5$) von etwa 40° nachteilig gegenüber dem quasi-stationären Ergebnis.

Andere quantitative bzw. qualitative Vergleiche lassen sich zwischen /15/ und den eigenen Ergebnissen aufgrund unterschiedlicher Voraussetzungen nicht treffen. Vergleiche mit Tragflügelexperimenten sind in /15/ nicht durchgeführt.

4.4 RESÜMEE DER TRAGFLÜGELDISKUSSION

Die in dieser Arbeit vorgestellte instationäre Kavitationstheorie für Tragflügel unendlicher Spannweite hat die stationäre Theorie /8/ als Grundlage. Diese stationäre Theorie ist in sich konsistent und durch experimentelle Ergebnisse abgesichert. Die Resultate der instationären Theorie liefern im Vergleich zur stationären qualitativ ähnliche Werte, wobei nun jedoch die charakteristischen instationären Effekte wie die zeitlich nachteilige Phasenverschiebung der Kavitationsausdehnung zur maximalen Flügelauslenkung (wie sich auch in /15/ ergab) und die Abnahme der Amplitude der Kavitationsausdehnung bzgl. der quasi-stationären Werte erfaßt werden.

Die Mittelwerte über eine Schwingungsperiode der quasi-stationären bzw. der instationären Kavitationsausdehnungen $C_E(t)$ stimmen mit den Ergebnissen der rein stationären Rechnung gut überein. Ist nun die Annahmen einer Potentialströmung bei den Messungen erfüllt ($\delta_0=2^\circ$; Abb.16), so stimmt die stationäre Rechnung ebenfalls mit der Messung überein.

Wird für die reduzierten Frequenzen k der Grenzübergang $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow \infty$ vollzogen, so geht das instationäre Gleichungssystem (59), (60) in das

quasi-stationäre bzw. in das rein stationäre über. Für große reduzierte Frequenzen schwingt das Profil so schnell, daß die Kavitation keine Zeit mehr hat, der Schwingung des Tragflügels zu folgen. Es bildet sich nur die mittlere, stationäre Kavitationsschicht aus.

Bei der Berechnung der Kavitationsdicke ergibt sich der sinnvolle Zusammenhang, daß die größte Dicke der Kavitationsschicht bei der größten Ausdehnung erreicht wird.

Ebenfalls zeigen die Berechnungen der instationären Druckverteilung bei Berücksichtigung der Kavitationsschicht sinnvolle Verläufe, auch in Vergleich mit den experimentell abgesicherten stationären Rechnungen /9/.

Eine analytische Lösung der instationären Theorie, auch nur für kleine reduzierte Frequenzen (Responz zur linearen Theorie), konnte nicht ermittelt werden, wobei offenbar der zur Verfügung stehende mathematische Apparat zur Lösung von Differentialgleichungen dieses Typs noch nicht ausreichend ist. Die verwendete iterative Lösungsmethode erwies sich von den untersuchten Möglichkeiten als einziger gangbarer Weg, eine Lösung zu finden.

Der Vergleich zum Experiment ist nur bedingt möglich, da genaue Fehlerbetrachtungen über die experimentellen Daten nicht vorhanden sind und das Profil außerdem -wie Grenzschichtuntersuchungen /43/ zeigten- nur bis zu einem momentanen Maximal-Winkel von 3° zu verwenden ist, sofern Potentialströmung vorausgesetzt werden soll. Bei in Zukunft zu erfolgenden Kavitationsuntersuchungen ist die Erstellung einer Grenzschichtcharakteristik mit den in /43/ erläuterten Methoden unerlässlich, um die Gültigkeit der potentialtheoretischen Voraussetzung zu prüfen.

Die theoretischen Betrachtungen und Rechnungen der vergleichbaren Arbeiten /15/ und /16/ erfolgten nicht an realen Profilen, sondern an ebenen und gekrümmten Platten (Profil ohne Dicke), zu denen außerdem keine Experimente vorlagen. Die Theorie in /15/ und /16/ beinhaltet (vgl.4.3.) Näherungen und numerische Lösungen, die teilweise zu Widersprüchen in den Ergebnissen führten. Die eigene Theorie geht nur von der linearisierten Profiltheorie aus und verwendet keine weiteren Näherungen oder Vereinfachungen bzgl. der instationären Terme; die numerische Lösung führt ebenfalls zu keinen Widersprüchen bei den Ergebnissen, die zudem -zumindestens für kleine Anstellwinkel δ_0 und Auslenkamplituden δ_1 - in der Tendenz durch das Experiment unter Vorbehalt der Fehlerbetrachtungen bestätigt wurden.

Die eigenen Ergebnisse können zumindestens als gleichwertig gegenüber den konkurrierenden Arbeiten /15/ und /16/ bezeichnet werden. Eine abschließende Wertung aller Theorieansätze einschließlich dem eigenen kann nur durch den Vergleich mit neuen genaueren Fehlerbetrachtungen beinhaltende Experimenten erfolgen, an der dann eine kritische Diskussion anknüpfen muß.

5.0 ANWENDUNGEN AUF DEN PROPELLER

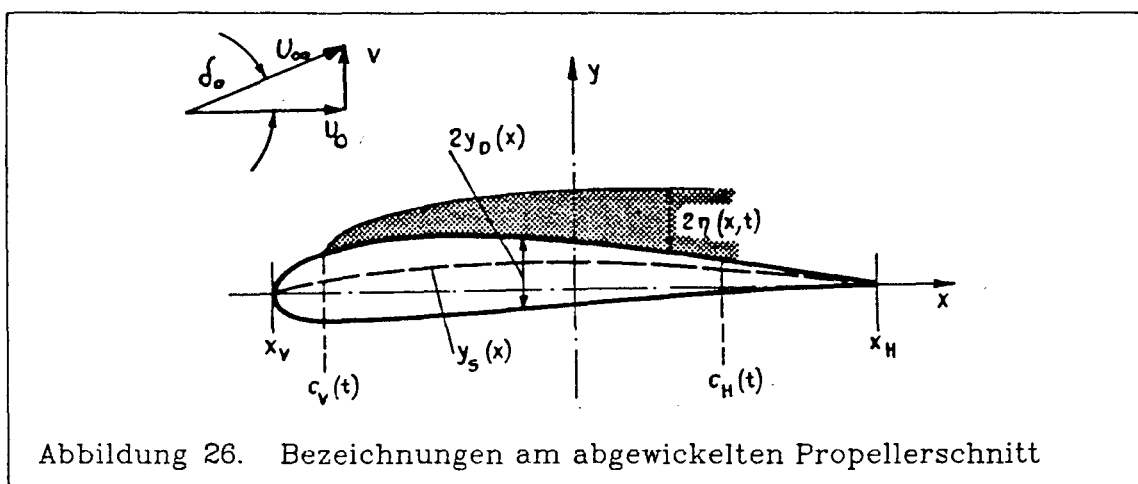
Bei der theoretischen Behandlung der instationären Kavitationerscheinungen am Propeller muß von einer dreidimensionalen Betrachtung des Problems ausgegangen werden, wie sie von /44/ durchgeführt wurde. In dieser Arbeit /44/ findet man die grundlegenden aus der dreidimensionalen Propellertragflächentheorie basierenden Formeln für die zusätzlichen Wirbelbelegungen und Quellenverteilungen. Praktisch durchführbare Rechnungen sind jedoch mit dieser Theorie wegen ihrer mathematischen Kompliziertheit ohne Näherungen oder Vereinfachungen derzeit aussichtslos.

Deshalb soll die Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten ebenen Kavitationstheorie auf einen Propeller (vgl. /45/) als pragmatischer Versuch verstanden sein, um zu sehen, was mit einer solchen Vorgehensweise möglich ist und um anhand der zu erwartenden Diskrepanz zum Experiment für noch zu erfolgende Studien Hinweise für die Entwicklung und Verbesserung des Theorieansatzes zu erhalten.

5.1 MODIFIZIERUNG DER THEORIE

Der Übergang von der zwei- zur dreidimensionalen Theorie erfolgt gemäß der sog. Streifenmethode in abgewickelten Zylinderschnitten, analog des bei einer zweidimensionalen Druckverteilungsberechnung (vgl. z.B. /45/) verwendeten Verfahrens. Der Einfluß der endlichen Spannweite wird mit einem Korrekturfaktor berücksichtigt.

Um ein zum Tragflügel fall analoges Integralgleichungssystem aufzustellen,



müssen zunächst einige Bezeichnungen auf den Propeller übertragen werden (Abb.26) Man betrachtet zunächst wieder ein mäßig dickes und gewölbtes Flügelprofil, dessen Sehne mit der x-Achse nun im Intervall $x_v \leq x \leq x_H$ zusammenfällt. Die Kavitationsschicht beginnt bei $C_v(t)$ und endet bei $C_H(t)$, so wie es in Abb. 26 bezeichnet ist. Die übrigen Bezeichnungen sind mit denen in Abb. 1 identisch. In der Abb.27 werden die bei dem Propeller vorliegenden Verhältnisse deutlich. Der Propeller rotiert um die Achse x' , wobei die physikalischen Größen in einem Aufpunkt auf dem Propellerblatt sowohl vom Radius r als auch vom Winkel φ der jeweiligen Propellerstellung

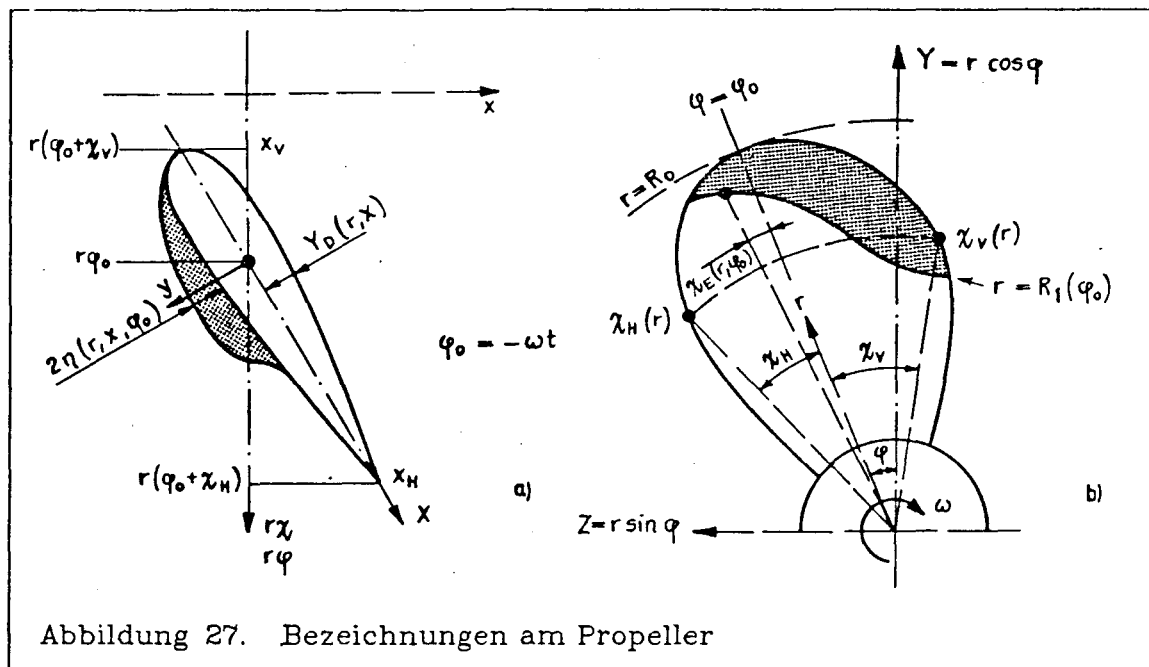


Abbildung 27. Bezeichnungen am Propeller

abhängig sind. $\chi_H(r)$ und $\chi_v(r)$ sind die Winkelkoordinaten an der Hinter- und Vorderkante des Propellers. Wesentlich in Abb. 27 ist nur, daß man sich den Zylinderschnitt zwischen den Punkten PA und PB in Abb. 27b bei der Propellerdraufsicht abgewickelt vorstellt und dann die für den Theorieansatz zugrundeliegende Abb. 26 erhält. Mit den Bezeichnungen des Propellers lautet analog zu (59), (60) das Integralgleichungssystem

$$(110) \quad -f_H(x, t) + R_L(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\chi_v}^{\chi_H} \delta_H(\xi, t) \frac{d\xi}{x - \xi}$$

$$(111) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) - Q_L(x,t) = \frac{\gamma_4(x,t)}{\mu_\infty} + \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{C_V(t)}^{C_H(t)} q_4(\xi,t) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

mit

$$(111a) \quad R_L(x,t) = \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{x_V}^{x_H} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_4(\xi,t - \frac{x-\xi}{\mu_\infty}) \frac{dx'}{x-x'}$$

$$Q_L(x,t) = \frac{1}{\pi \mu_\infty} \sum_{\mu=-M}^M e^{i\mu\omega t} \frac{i\mu\omega}{\mu_\infty} \int_{x_V}^{x_H} q_4(\xi) \cdot \left\{ \ln \frac{\mu\omega(x-\xi)}{2a_0} + 0.577 + i\frac{\pi}{2} \right\} \cdot \exp(i\mu\omega t) d\xi$$

Ebenfalls wird wieder bei der Lösung von (110), (111) von der iterativen Methode Gebrauch gemacht, wobei $C_V(t)$ als zeitlich konstant angenommen wird und mit dem Druckminimum ebenfalls bei etwa 0.1 % der Profiltiefe zusammenfällt. Die blasendynamische Abschätzung in 2.4. für die zusätzliche Zusammenfallstrecke (107) kann ebenfalls direkt aus der Betrachtung der ebenen Theorie übernommen werden.

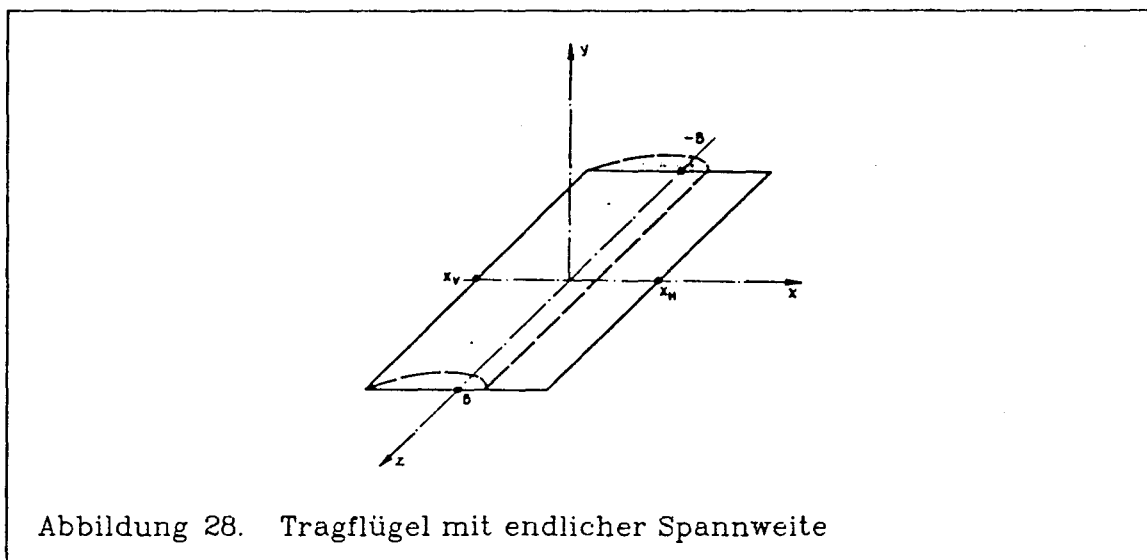


Abbildung 28. Tragflügel mit endlicher Spannweite

Die Annahme einer unendlichen Spannweite ist beim Propeller nicht möglich; mit einer einfachen Näherungsbetrachtung soll nun der Einfluß des endlichen Seitenverhältnisses auf die nach der ebenen Profiltheorie erhaltenen Ergebnisse der Kavitationsgeometrie berücksichtigt werden.

Dieser quasistationären Abschätzung gilt für ein Tragflügel mit rechteckigem Grundriß ($x_V \leq x \leq x_H$, $-B \leq z \leq B$) in der Ebene $y=0$ und wird auf die Mittellinie $z=0$ des Flügelgrundrisses beschränkt (siehe Abb.28). Die Wirbel-

belegung $\gamma_\eta = \gamma_\eta(x)$ soll nicht von der Spannweite abhängig sein, d.h. diesen Untersuchungen wird ein Hufeisenwirbelmodell zugrunde gelegt.

Die von den gebundenen und freien Wirbeln induzierte y-Komponente der Geschwindigkeit ist bei $y=0$ und $z=0$ gegeben durch

$$(112) \quad v_{\gamma_4} = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \gamma_4(\xi) \left\{ \frac{B}{\sqrt{B^2 + (x-\xi)^2}} \frac{1}{x-\xi} + \frac{(x-\xi)/B}{\sqrt{B^2 + (x-\xi)^2}} + \frac{1}{B} \right\} d\xi =$$

$$= -\frac{\Gamma_4}{2\pi B} - \frac{1}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \gamma_4(\xi) \sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{B}\right)^2} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Γ_η ist der durch den Kavitationseinfluß bedingter Zusatz zur Gesamtzirkulation. Er ist in der Regel klein und kann deshalb vernachlässigt werden. Die induzierte x-Komponente ist bei endlichem Seitenverhältnis ebenfalls bekannt

$$(113) \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} u_{\gamma_4} = \pm \gamma_4(x) \cdot \frac{1}{2}$$

Analog lauten die von der Quellenbelegung q_η bei $y=0$ und $z=0$ induzierten Geschwindigkeitskomponenten für die y-Richtung

$$(114) \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} v_{q_4} = \pm q_4(x) \cdot \frac{1}{2}$$

und für die x-Richtung

$$(115) \quad u_{q_4} = \frac{1}{2\pi} \int_{c_v}^{c_H} q_4(\xi) \frac{B}{\sqrt{B^2 + (x-\xi)^2}} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Das Seitenverhältnis ist definiert durch

$$(116) \quad \lambda = \frac{2B}{x_H - x_v}$$

Bedenkt man nun, daß die Wurzel stets größer als eins ist, so kann man in der Wurzel den Term $(x-\xi)$ durch $(x_H - x_v)/2$ näherungsweise ersetzen und man erhält mit (116)

$$(117) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{B}\right)^2} \approx \sqrt{1 + 1/\lambda^2}$$

Damit lautet die der Gl.(65) entsprechende Stromlinienbedingung für den kavitierenden Flügel bei stationärer Strömung

$$(118) \quad -q_{\gamma_\lambda}(x) \left\{1 + 1/\lambda^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_{x_v}^{x_H} \gamma_{\gamma_\lambda}(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Analog zu (66) folgt für die entsprechende Druckbedingung

$$(119) \quad \sigma_v - c_p(x) = \frac{1}{\mu_\infty} \gamma_{\eta\Lambda}(x) + \frac{1}{\pi \mu_\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\Lambda^2}} \int_{c_v}^{c_H} q_{\eta\Lambda}(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi}$$

Formel (118) wird nun nach den bekannten Regeln /37/ invertiert und in (119) eingesetzt. Man erhält eine Integralgleichung zur Bestimmung der zusätzlichen Quellenbelegung $q_{\eta\Lambda}$ bei Berücksichtigung eines endlichen Seitenverhältnisses Λ :

$$(120) \quad \mu_\infty \{ \sigma_v - c_p(x) \} \sqrt{1 + 1/\Lambda^2} = \frac{1}{\pi} \int_{c_v}^{c_H} q_{\eta\Lambda}(\xi) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{x_H - x}{x - x_v} \frac{\xi - x_v}{x_H - \xi}} \right\} \frac{d\xi}{x - \xi}$$

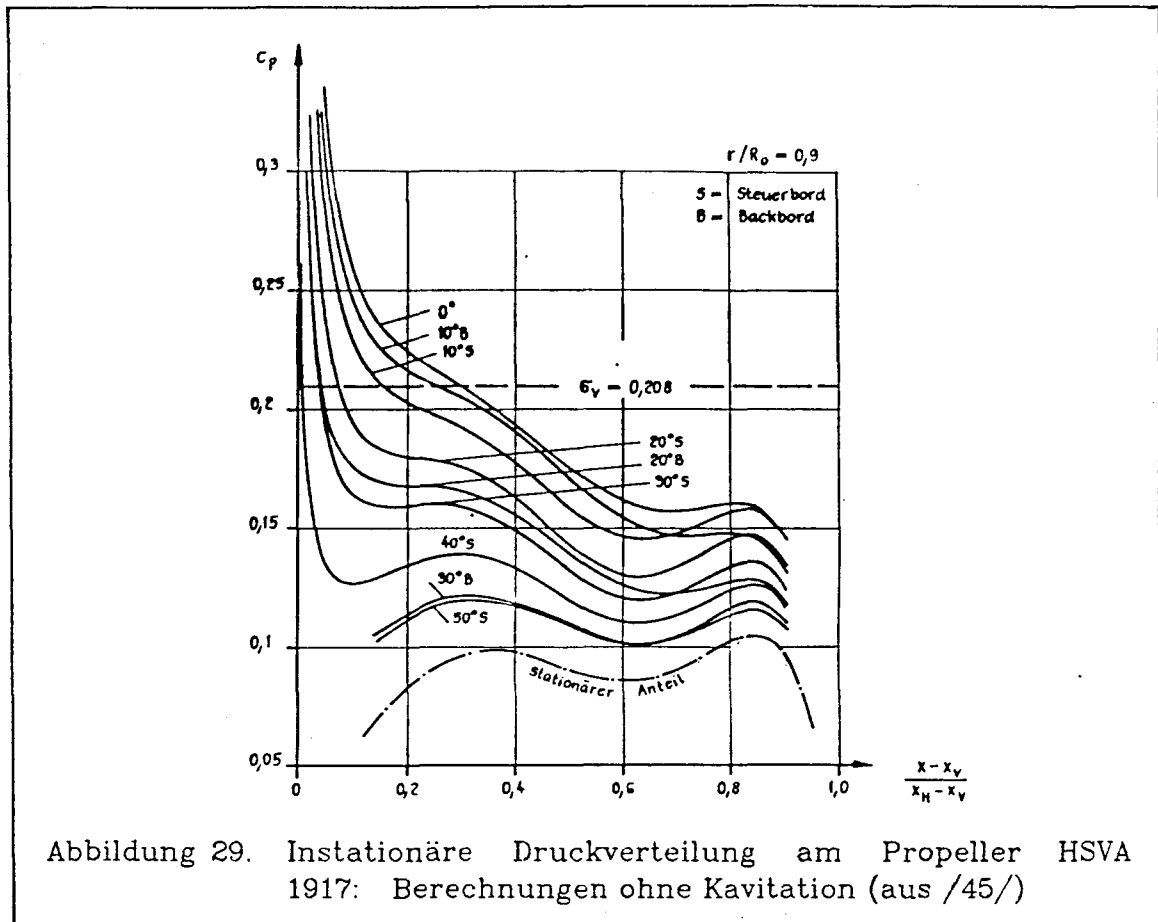
Die Gleichung (120) unterscheidet sich von der für das unendliche Seitenverhältnis gültigen Formel (71) nur durch den Faktor (117). Also ergibt sich bei bekannter Druckverteilung $c_p(x)$ des nicht kavitierenden Zustandes die Quellenbelegung $q_{\eta\Lambda}$ bei endlichen Seitenverhältnis aus der Belegung q_η der ebenen Theorie durch die Näherung

$$(121) \quad q_{\eta\Lambda}(x) = \sqrt{1 + 1/\Lambda^2} q_\eta(x)$$

Die berechneten $C_H(t)$ -Werte bleiben gemäß (73) von dem Faktor (117) unberührt. Die Kavitationsdicke nach (63) wird hingegen durch (121) linear um den Faktor $\sqrt{1 + 1/\Lambda^2}$ vergrößert. Bei den nachfolgenden Rechnungen wird für das Seitenverhältnis Λ das aus /46/ zu entnehmende effektive Seitenverhältnis des Propellerflügels verwendet.

5.2 DISKUSSION DER ERGEBNISSE BEIM PROPELLER

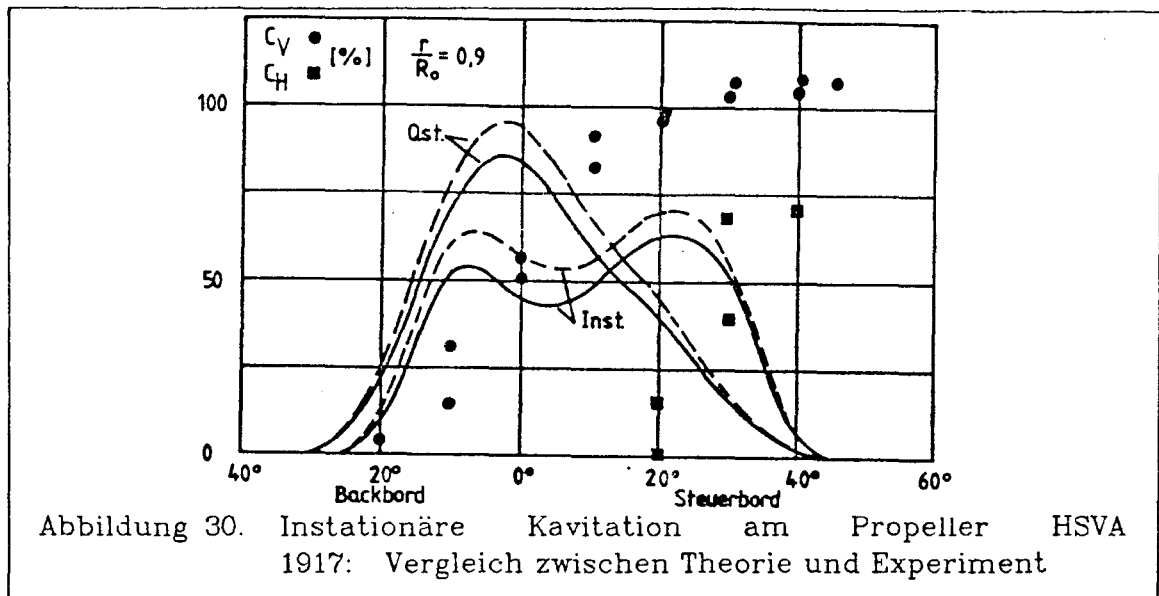
Die in 5.1. modifizierte Theorie setzt für die Rechnungen die instationäre Druckverteilung (ohne Berücksichtigung der Kavitation) voraus. Für solche Druckverteilungsberechnungen am Propellerflügel gibt es eine Anzahl von Arbeiten, die sich mit den Grundlagen, der analytischen Formulierung sowie deren numerischen Auswertung befassen /47, 48 oder 49/. Die Druckverteilungen, die am Tragflügel relativ einfach zu messen sind, können am Propeller wegen der komplizierten Geometrie der rotierenden Flügelblätter nur schwer bestimmt werden. Es mangelt deshalb an genauen Druckverteilungsmessungen an Propellerflügeln, so daß eine Wertung der verschiedenen Verfahren nicht möglich ist (vgl. /50/); das Problem der Druckverteilungsbestimmung am Propeller ist letztlich noch ungelöst.



Wählt man unter diesem negativen Aspekt trotzdem eine instationäre Druckverteilung, die über eine Tragflügelkorrekturrechnung in /45/ ermittelt wurde, aus (siehe Abb.29), so ergeben sich recht unbefriedigende Ergebnisse in der Kavitationsbestimmung.

Die Abb.30 zeigt am Beispiel des HSVA-Modell Propellers 1917 für den Radius $r/R_0=0.9$ die Kavitationsausdehnung $C_H(t)$ in Prozent der Flügeltiefe ohne (ausgezogene Linie) und mit (gestrichelte Linie) Blasen zusammenfall im axialen Nachstrom des mittleren Kavitationstunnels der HSVA. Für Einzelheiten des Versuchsaufbaus muß auf /51/ verwiesen werden. Die Beobachtungen sind als Punkte eingetragen und ebenfalls /51/ entnommen.

Typisch ist die Beobachtung, daß der Beginn der Kavitationsschicht beim Übergang des Flügels von Backbord nach Steuerbord sich von der Flügelvorderkante bis weit zur Profilmittle hin verschiebt. Dieser Effekt kann durch eine ebene Profilströmung nicht beschrieben werden und wurde dort ebenso nicht beobachtet, solange das Druckminimum in der Nähe der Vorderkante liegt. Gemäß der Voraussetzung des Theorieansatzes beginnt die theoretische Kavitation grundsätzlich bei etwa 0.1% der Profiltiefe.



Ebenso wie der Kavitationsbeginn konnte das Ende der Kavitation durch die Theorie nicht wiedergegeben werden. Es ist zwar ein gewisser instationärer Effekt in den Ergebnissen der Rechnung enthalten (Maximum der Kavitation etwa bei 320° Steuerbord, Minimum der Druckverteilung etwa bei der Propellerstellung $\varphi_0 = 0^\circ$ Backbord), jedoch ist die beobachtete Kavitation im Maximum etwa doppelt so groß wie die berechnete.

Die Abb.31 zeigt die Kavitationsdicke der instationären Rechnung in Abhängigkeit von der Profiltiefe. Die maximal berechnete Dicke $2\cdot\eta$ beträgt etwa 3.8 mm auf dem Radius 0.9. Die Größenordnung stimmt relativ gut mit Dickenmessungen, die am gleichen Modellpropeller /33/ und zum anderen an Modellpropellen ähnlicher Größe /53/ erfolgten, überein. Diese Übereinstimmung sollte jedoch nicht überbewertet werden. In der Abb.31 fällt auf, daß die größte Dicke der Kavitation bei der Flügelstellung $\varphi_0 = 0^\circ$, die größte Länge hingegen bei $\varphi_0 = 20^\circ$ Backbord erreicht wird. Rechnungen mit anderen Druckverteilungen, z.B. für andere Radien, brachten demgegenüber das vom Tragflügel und dort immer aufgetretene Verhalten, daß die größte Ausdehnung immer mit der größten Dicke zusammenfällt.

Die aus Abb.31 enthaltenen Ergebnisse deuten darauf hin, daß die instationäre Druckverteilung einen wesentlichen Einfluß auf die Rechnung hat. Untersuchungen darüber sind hingegen erst dann sinnvoll, wenn theoretisch und experimentell verlässliche Druckverteilungen vorliegen.

Die Diskrepanz in der Kavitationslänge zwischen Theorie und Experiment dürfte auch darin liegen, daß beim Propeller ähnliche Verhältnisse wie bei

dünnen Profilen mit steilem Druckgradient bei einem maximalen Anstellwinkel $\delta < 3^\circ$ vorliegen. Die Rechnungen am Tragflügel NACA 16006 zeigten vermutlich wegen Grenzschichteffekte ebenfalls zu geringe Kavitation im Vergleich zur Beobachtung.

Bei allen diesen Betrachtungen ist die Unsicherheit in der Kenntnis der Druckverteilung an den Propellerflügeln im Nachstrom zu bedenken. Wird alternativ die Druckverteilung aus /50/ verwendet, so verschlechtern sich die Ergebnisse der Kavitationsberechnung im Vergleich zur Messung. Die Druckverteilung aus /50/ unterscheidet sich nur geringfügig von der aus Abb.29, in dem die Druckverteilung von Druckminimum her etwa 5% von der Profiltiefe eher den Kavitationsbeiwert σ_v erreicht.

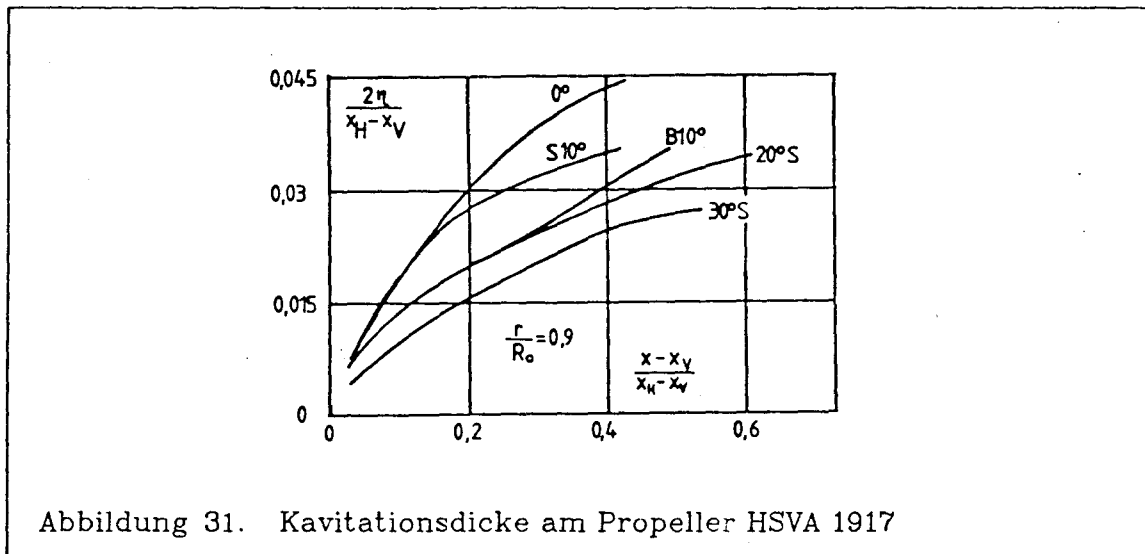


Abbildung 31. Kavitationsdicke am Propeller HSVA 1917

Ähnliche unbefriedigende Ergebnisse liefert auch die Theorie /15/ bei der Anwendung auf Propeller. Im Vergleich zu den Experimenten sind die Berechnungen weitaus überbewertet und es wird für manche Flügelstellungen auch für kleine Radien Kavitation vorhergesagt, die jedoch von der Beobachtung und auch von der physikalischen Vorstellung her nicht erwartet ist. Der Arbeit /17/ liegen für die Kavitationsberechnungen am Propeller der Theorieansatz /16/ für den Tragflügel zu-grunde. Der Vorteil der Theorie /17/ ist dadurch seine drei-dimensionale Anwendung, wobei wieder die Potentialtheorie vorausgesetzt wird. Die berechnete Druckverteilung ist nicht mit Experimenten verglichen worden, so daß die Unsicherheit bzgl. dieses Punktes ebenfalls bestehen bleibt.

Eine Beurteilung der Theorie /17/ ist ohne weiteres nicht möglich, da die theoretischen Ansätze an real beobachtete Verhältnisse angepaßt wurde. Rechenbeispiele für Propeller mit beobachteter Kavitation ohne eine empirische Modifizierung des Theorieansatzes liegen nicht vor.

5.3 RESÜMEE DER BETRACHTUNGEN AM PROPELLER

Die hier dargelegten Berechnungsverfahren von Kavitationserscheinungen am Propeller sind mangelhaft. Die Theorieansätze /15/ und /17/ sowie der eigene setzen die Ergebnisse der Betrachtungen an einem Tragflügel voraus. Bevor jedoch die Ansätze auf den Propeller übertragen werden, sollten diese zunächst experimentell durch Tragflügelmessungen abgesichert werden; d.h. die instationäre Kavitationstheorie muß zunächst für den Fall des Tragflügels abgesichert sein.

Ein ebenso ungeklärtes Problem ist die Bestimmung der instationären Druckverteilung für Propeller im Nachstrom, da diese einen relativ großen Einfluß auf die Kavitationsberechnungen haben. Diese Unsicherheit bleibt solange bestehen, bis nicht Vergleiche der verschiedenen Theorieansätze mit verlässlichen experimentellen Daten vorliegen.

Als weiteres zu überarbeitendes Problem muß geklärt werden, inwieweit die bisherigen Voraussetzungen einer Potentialströmung bei Propellern gelten. Es scheint nötig, ein direkt auf die Propellerströmung zugeschnittenes Berechnungsverfahren zu erstellen. Denkbar wäre dabei, das Integralgleichungssystem (110), (111) mit solchen Termen zu ergänzen, die den Unterschied zwischen Profil- und Propellerströmung darstellen und iterativ den Lösungsweg zu suchen.

6.0 ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit legt ein Berechnungsverfahren vor, mit dem für instationär belastete Tragflügel die Kavitationsgeometrie und die instationäre Druckverteilung bei Berücksichtigung der Kavitation bestimmt werden können.

Die Grundlage dieses instationären Verfahrens bildet die stationäre Kavitationstheorie aus /8/, die auf der linearisierten Profiltheorie mit unendlicher Spannweite basiert und mit Hilfe der Singularitätenmethode weitgehend analytisch gelöst wurde. Bei Anwendung dieser stationären Theorie, die recht gut durch Experimente an verschiedenen Profilen abgesichert ist, wird iterativ die instationäre Lösung bei gutem Konvergenzverhalten gefunden. Das hierzu benötigte zeitabhängige Geschwindigkeitspotential wird aus der drei-dimensionalen Wellengleichung für kompressible Unterschallströmung im Grenzübergang zur unendlichen Spannweite gewonnen. Eine analytische Lösung der instationären Kavitationstheorie, auch bei Entwicklung zu kleinen reduzierten Frequenzen, konnte nicht gefunden werden.

Vom Experiment liegen Beobachtungen der Kavitationslänge vom Profil NACA 16006 vor, das in einem Kavitationstunnel Drehschwingungen um den 1/4-Punkt ausführt; eine quantitative Fehleranalyse fehlt zu diesem Experiment.

Bei der Untersuchung wurde die Bedeutung der Grenzschicht für das Kavitationsverhalten unterstrichen. Wie in /43/ dargelegt, ist die Annahme einer Potentialströmung nur solange gerechtfertigt, wie die Dicke der Kavitationsschicht größer als die Grenzschichtdicke ist. Dieses ist beim betrachteten Profil NACA 16006 im stationären Fall nur bis zu einem maximalen Anstellwinkel von etwa 2.4° gegeben. Insofern ist für die instationären Behandlung der Vergleich zwischen Theorie und Experiment nur bedingt möglich; der jedoch für kleine Anstellwinkel zumindestens in der Tendenz und unter Vorbehalt der Fehlerbetrachtungen eine Übereinstimmung bzgl. der Phase zwischen maximaler Kavitationslänge und maximaler Flügelauslenkung und bzgl. der Kavitationsausdehnung zeigt.

Die Resultate der instationären Theorie liefern im Vergleich zur stationären ähnliche Werte, wobei nun jedoch die charakteristischen instationären Effekte wie die nacheilende Phasenverschiebung (siehe oben) oder die Abnahme der Kavitationslänge bzgl. der quasi-stationären Werte erfaßt. Die numerischen also sinnvoll und in sich konsistent. Ebenfalls geben die Berechnungen der instationären Druckverteilung am Profil bei Berücksichtigung der Kavitation vernünftige Verläufe, auch im Vergleich mit den entsprechenden experimentell abgesicherten stationären Rech-

nungen. Instationäre Messungen der Druckverteilung bei kavitierendem Profil liegen nicht vor.

Vergleichbare Arbeiten /15,16/ berechnen Kavitationserscheinungen nur an ebenen und gekrümmten Platten (experimentelle Daten liegen dazu nicht vor). Diese Ergebnisse sind mit den eigenen aufgrund unterschiedlicher Voraussetzungen nicht unmittelbar vergleichbar. Die eigenen Ergebnisse können zumindestens als gleichwertig -insbesondere wie die Diskussion bzgl. der Näherungen und numerischen Lösungen zeigt- gegenüber /15,16/ bezeichnet werden.

Die Anwendungen der eigenen Kavitationstheorie auf den Propeller HSVA 1917 sind mangelhaft. Dieses trifft ebenfalls für entsprechende Versuche bei den Arbeiten /15,17/ zu. Die Gründe hierfür sind in der unsicheren Kenntnis der instationären Druckverteilung beim Propeller und in der möglicherweise falschen Voraussetzung einer Potentialströmung zu sehen.

In der Zukunft sind verlässliche experimentelle Untersuchungen am Tragflügel notwendig, um daran die instationäre Kavitationstheorie zu prüfen. Erst dann sollte eine Anwendung auf den Propeller bei experimentell gesicherter Kenntnis seiner instationären Druckverteilung mit modifiziertem, auf die Propellerströmung ausgelegten Theorieansatz gedacht werden.

7.0 LITERATUR

1. Isay, W.H.: Kavitation, Schiffahrts-Verlag "Hansa", C.Schroedter & Co. Hamburg (1981)
2. Chao, K.Y.: Beiträge zur Berechnung von Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern, Schiffstechnik 26 (1979)
3. Kodama, Y., Tamiay, S., Take, N., Kato, H.: The Effect of Nuclei on the Inception of Bubble and Sheet Cavitation on Axisymmetric Bodies, Proc. ASME Int. Symp. on Cavitation Inception, New York, 12 (1979)
4. Cahine, G.L.: Cloud Cavitation Theory, Proc. of the 14th Symp. on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor (1982)
5. Westphal, N.: Keimverteilungsmessungen mit dem Laserstreulichtverfahren bei Tragflügel und Propellerströmungen, Bericht Nr. 408, Inst. für Schiffbau (1981)
6. Hanaoka, T.: Linearizes Theory of Cavity Flow past a Hydrofoil of Arbitrary Shape, Selected Paper from the Journ. of the Society of Nav. Arch. of Japan, Vol. 3 (1969)
7. Nishiyama, T., Ito, J.: Linearized Theory of partially cavitated hydrofoils by singularity method, Techn. Rep. of the Tokoku University, Vol. 42 (1977)
8. Alwardt, P. und Isay, W.H.: Zur Behandlung der Teilkavitation an Flügeln mit Methoden der Profiltheorie. Bericht Nr.399, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1980); Zeitschr. Angew. Mathem. und Mechanik, Bd. 62 (1982)
9. Gasau, H.: Zur Behandlung der stationären Teil- und Superkavitation an Tragflügelprofilen, Bericht Nr.416, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1982)
10. Alwardt, P., Gasau, H.: A Treatment of Steady Cavitation on Hydrofoil Using the Airfoil Theory, Second Int. Conf. on Cavitation, Edinburgh (1983)
11. Steinberg, H.; Karp, S.: Unsteady Flow Past Partially Cavitated Hydrofoils, Proc. 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington (1962)

12. Laschka, B.: Zur Theorie der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschallströmung, Zeitschr. f. Flugwissenschaft, Bd. 11 (1963)
13. Peters, , Godman, , Breslin, : A Partially Cavitating Hydrofoil in a Gust, Rep. SIT-DL-2118, Stevens Inst. of Technologie (1980)
14. Nishiyame, T: Analytic Modell of Unsteady Cavity for Two Dimensional Super-cavitating Hydrofoils in Oscillation, Trans. Jap. Soc. Mech. Engin. , 4b (1980)
15. Isshiki, H, Murakami, M.: Theoretical Treatment of Unsteady Cavitation on Shippopeller Foils, 14th Symp. on Nav. Hydrodynamics, Ann Arbor (1982)
16. Van Houten, R.J.: The numerical Prediction of Unsteady Sheet Cavitation on High Aspect Ratio Hydrofoils, 14th Symp. on Nav. Hydrodynamics, Ann Arbor (1982)
17. Breslin, J.P., Van Houten, R.J., Kerwin, J.E., Johnsson, C.-A.: Theoretical and Experimental Propeller-Induced Hull Pressures Arising from Intermittent Blade Cavitation, Loading and Thickness, Soc. of Nav. Arch. and Marin. Engineers, New York (1982)
18. Schlichting, H. und Truckenbrodt, E.: Aerodynamik des Flugzeuges Bd.1, Aerodynamik des Tragflügels, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2. Auflage (1967)
19. Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: Theoretische Physik, VI, Hydrodynamik, Akademie Verlag Berlin (1981)
20. Isay, W.H. und Roestel, Th.: Die niederfrequent instationäre Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung, Z. angew. Math. Mech, 55 (1975)
21. Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik Bd.I und II, Springer Verlag Berlin (1924 und 1937)
22. Försching, H: Aeroelastisität, Springer Verlag 1974
23. Laschka, B: Die instationären Luftkräfte an harmonisch schwingenden Tragflügeln endlicher Spannweite bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit, Jahrbuch der Wiss. Gesellschaft für Luftfahrt e.V. (1961)

24. Jahnke, Emde, Lösch: Tafeln höherer Funktionen, Teubner Stuttgart (1960)
25. Ryshik, I.M. und Gradstein, I.S.: Tafeln, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft Berlin (1957)
26. Isay, W.H.: Propellertheorie, Hydrodynamische Probleme, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (1964)
27. Küssner, H.G.: Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln, Luftfahrtforschung 13 (1936)
28. Küssner, H.G.: Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Bewegungen der Flüssigkeit, Luftfahrtforschung 17 (1940)
29. Gleine, W.: Berechnung von Kavitationserscheinungen an Flügeln bei instationärer Strömung, Schrift Nr. 2328, Inst. für Schiffbau (1982)
30. Riegels, F.: Die Umströmungsprobleme bei inkompressiblen Potentialströmungen, Ing. Arch. Bd. 16 (1948)
31. Abbott, I.H. and von Doenhoff, A.F.: Theory of Wing Sections, Dover Publications Inc. New York (1945)
32. Shen, Y.T. and Peterson, F.B.: Unsteady Cavitation on a Oscillating Hydrofoil; Proc. 12th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington (1978)
33. Zimmerman, B.: Berechnung des durch die Kavitationsgebiete auf den Propellerflügeln an einer Platte induzierten instationären Drücke, Bericht Nr. 362, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1977)
34. Alwardt, P., Gleine, W.: Kavitation an instationär belasteten Flügelprofilen, 16. Kolloquium des SFB 98, Hamburg (1982)
35. Nishiyama, T.: Analytic Modell of Unsteady Cavity for Two Dimensional Super-cavitating Hydrofoils in Oscillation, Trans. Jap. Soc. Mech. Engin. 46 (1980)
36. Dimakos, D.: Berechnungen von Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern, Bericht Nr. 398, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1980)

37. Schmeidler, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig (1950)
38. Alwardt, P.: Programmbeschreibung für die Berechnung von instationärer Kavitation an Tragflügeln und Schiffspropellern, Schrift in Vorbereitung, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1983)
39. Kruppa, C.F.L. and Sasse, G.R.: Cavitation Erosion Tests with Oscillating Foil Sections, 14th Symp on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor (1982)
40. Sasse, G.R.: Experimentelle Kavitationsuntersuchungen an einem schwingenden Tragflügelprofil, Dissertation D83, TU Berlin (1982)
41. Sasse, G.R.: persönliche Mitteilung
42. Radhi, M.H.: Theoretische und Experimentelle Untersuchungen über den Kavitationseinsatz an schwingenden Tragflügelprofilen, Dissertation D83, TU Berlin (1975)
43. Gasau, H.: Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen, Bericht Nr.428, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1983)
44. Hoshino, T.: A Method to Predict Fluctuating Pressures induced by a Cavitating Propeller, Mitsubishi Technical Bulletin No.150 (1982)
45. Alwardt, P., Chao, K.Y., Jsay, W.H. und Westphal, N.: Berechnungen der Druckverteilung, der Kavitationserscheinungen sowie der induzierten Druckschwankungen an der Außenhaut für Propeller im Nachstrom, Jahrbuch der Schiffbautechn. Ges. 76 (1982)
46. Lerbs, H. und Rader, H.P.: Über den Auftriebsgradienten von Profilen im Propellerverband, Schiffstechnik 9 (1962)
47. Isay, W.H.: Moderne Probleme der Propellertheorie, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970)
48. Hanaoka, T.: Fundamental Theory of a Screw Propeller, Report of Ship Research Institut, Vol.5, No.6 (1968)
49. Kerwin, J.E. and Lee, C.S.: Prediction of Steady and Unsteady Marine Propeller Performance by Numerical Lifting-Surface Theory, Trans. SNAME, Vol.86 (1978)
50. Alwardt, P., Dimakos, D.: Zur numerischen Berechnung der Druckverteilung an Propellerflügeln und Vergleiche mit Experimenten und

Kavitationsbeobachtungen, Bericht 392, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg (1980)

51. Weitendorf, E.A. et al.: Untersuchungen über den Einfluß des freien Gasgehaltes auf die Kavitation und von Propeller erregten Druckschwankungen, HSVA Bericht 1520/81 (1981)
52. Ukon, Y; Kurobe, Y.; Kukakugawa, A. and Makino, M: Pressure Fluctuations Induced by Cavity Volum on Highly Skewed Propellers for a Ro/Ro Ship, Report of Ship Research Institut, Tokyo, Vol 19, No. 3 (57 No 5) (1982)

A.0 INTEGRALE UND MATHEMATISCHE UMFORMUNGEN

a) Betrachtung von $R_L(x,t)$

Zu berechnen ist nach (97)

$$(A1) \quad IR(x,t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A R_L(x',t) \sqrt{\frac{A-x'}{A+x'}} \frac{dx'}{x-x'}$$

Dabei ist $R_L(x,t)$ nur für diskrete Punkte bekannt, d.h. die Integration kann nicht analytisch sondern nur numerisch erfolgen. Dazu wird $R_L(x,t)$ durch

$$(A2) \quad R_L(x,t)(1 - \cos\varphi) = \sum_{\lambda=0}^Z b_\lambda \cos\varphi$$

mit $x' = -A \cos\varphi$ bzw. $x = -A \cos\Phi$ approximiert und für (A1) erhält man

$$(A3) \quad IR(\Phi, t) = \cotg \frac{\Phi}{2} \sum_{\lambda=1}^Z b_\lambda \frac{\sin\lambda\Phi}{\sin\Phi}$$

Zur numerischen Berechnung der Fourier-Entwicklung (A2) muß nun $R_L(x,t)$ umgeformt werden: Analog zu (5) wird ebenfalls die zusätzliche Wirbelverteilung $\gamma_n(x,t)$ in eine Reihe entwickelt:

$$(A4) \quad \delta\eta(\xi, t) = \sum_{\mu=-M}^M \delta\eta_\mu(\xi) \exp\{i\mu\omega t\}$$

und außerdem

$$(A5) \quad \frac{\chi}{\omega\mu} = \frac{\mu_\infty}{\omega\mu} \chi + x - \xi$$

gesetzt. Damit folgt aus (61)

$$(A6) \quad R_L(x,t) = \frac{-1}{\pi} \sum_{\mu=-M-A}^M \int_{-A}^A \delta\eta_\mu(\xi) e^{-i\mu \frac{\omega(x-\xi)}{\mu_\infty}} \cdot \frac{i\mu\omega}{\mu_\infty} \int_{-\frac{\mu\omega}{\mu_\infty}(x-\xi)}^{\infty} \frac{e^{-i\chi}}{\chi} d\chi e^{i\mu\omega t} d\xi$$

Weiter gilt

$$(A7) \quad \int_{-\frac{\mu\omega}{\mu_\infty}(x-\xi)}^{\infty} e^{-i\chi} \frac{d\chi}{\chi} = -Ci\left(\mu\omega \frac{x-\xi}{\mu_\infty}\right) - i\frac{\pi}{2} - iSi\left(\mu\omega \frac{x-\xi}{\mu_\infty}\right)$$

wobei Ci und Si die Cosinus- und Sinusintegrale sind. Für die Gleichung (A6) folgt daraus der interessierende Realteil

$$(A8) \quad R_L(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^M \frac{\mu \omega}{\mu \omega_\infty} \int_{-A}^A \delta_\eta(\xi) \left\{ i \operatorname{Ci}(\mu \omega \frac{x-\xi}{\mu \omega_\infty}) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(\mu \omega \frac{x-\xi}{\mu \omega_\infty}) \right\} \cdot \exp \left\{ i \mu \left(\omega t - \frac{\omega x}{\omega_\infty} + \frac{\omega \xi}{\omega_\infty} \right) \right\} d\xi \right\}$$

wobei die Integration über ξ numerisch durchgeführt werden muß; für konkrete Rechnungen muß (A8) noch in geeignete Form gebracht werden. Die Formel der Fourieranalyse von $\gamma_\eta(x,t)$ (A1) läßt sich mit den Koeffizienten der cos- und sin-Terme der Fourierentwicklung γ_μ' und γ_μ'' in Real- und Imaginärteil aufspalten.

$$(A9) \quad \delta_\eta = \frac{\gamma_0'}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_\mu' \cos \omega t \mu + \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta_\mu'' \sin \omega t \mu$$

Daraus folgt die komplexe Fourierreihe

$$(A10) \quad \delta_\eta = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta_{\eta\mu} \exp \{ i \mu \omega t \} \quad \text{mit} \quad \delta_{\eta\mu} = \frac{1}{2} (\delta_\mu' - i \delta_\mu'') \quad \text{für} \quad \mu > 0$$

Also folgt aus (A8) für $R_L(x,t)$:

$$(A11) \quad R_L(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^M \mu^k \int_{-A}^A (\delta_\mu' - \delta_\mu'') i \left\{ i \operatorname{Ci}(\mu k(x-\xi)) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(\mu k(x-\xi)) \right\} \cdot \exp \{ i \mu (\omega t - k(x-\xi)) \} d\xi \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^M \mu^k \int_{-A}^A \left[\left\{ \delta_\mu' \left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(\mu k(x-\xi)) \right) + \delta_\mu'' \cdot \operatorname{Ci}(\mu k(x-\xi)) \right\} \cdot \cos(\mu(\omega t - k(x-\xi))) - \left\{ \delta_\mu' \operatorname{Ci}(\mu k(x-\xi)) - \delta_\mu'' \left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(\mu k(x-\xi)) \right) \right\} \cdot \sin(\mu(\omega t - k(x-\xi))) \right] d\xi$$

Darin ist k die in (14) eingeführte reduzierte Frequenz. Das Cosinusintegral kann in der Form

$$(A12) \quad \operatorname{Ci}(z) = \gamma_E + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n)!}$$

mit $z = \mu k(x-\xi)$

dargestellt werden. Die Eulersche Konstante ist darin mit $\gamma_E=0.577$ bezeichnet. Infolge des Logarithmusgliedes hat (A12) für $x=\xi$ eine Singularität. Deshalb kann nur $(C_1(z)-\ln(z))$ exakt numerisch berechnet werden und das Integral muß aufgespalten werden.

$$(A13) \quad R_L(x,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^M \mu k \{ IR1 + IR2 + IR3 + IR4 + IR5 + IR6 \}$$

mit den im folgenden definierten Abkürzungen

$$(A14) \quad \begin{aligned} IR1 &= \int \delta'_\mu(\xi) \left(-\frac{\pi}{2} - S_i(z) \cos t\right) d\xi \\ IR2 &= \int \delta''_\mu(\xi) [C_i(z) - \ln|z|] \cdot \cos t d\xi \\ IR3 &= \int \delta''_\mu(\xi) \ln|z| \cos t d\xi \\ IR4 &= \int \delta''_\mu(\xi) \left(-\frac{\pi}{2} - S_i(z)\right) \sin t d\xi \\ IR5 &= -\int \delta'_\mu(\xi) [C_i(z) - \ln|z|] \cdot \sin t d\xi \\ IR6 &= -\int \delta'_\mu(\xi) \ln|z| \sin t d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & z = \mu k(x - \xi) \\ \text{und} \quad & t = \mu(\omega t - k(x - \xi)) \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen sind in jedem der Fälle von $-A$ bis $+A$ zu nehmen. Die Integrale IR1, IR2, IR4, und IR5 lassen sich ohne Probleme mit irgendwelchen Singularitäten numerisch bestimmen. Im Gegensatz dazu, bedürfen die Integrale IR3 und IR6 einer gesonderten Betrachtung.

Mit der Verwendung von /37/

$$(A15) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\varphi \ln|\cos \lambda - \cos \varphi| d\varphi = \begin{cases} -\ln 2 & \text{für } n=0 \\ -\frac{1}{n} \cos n\lambda & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

folgt nach einigen Umformungen für IR3, wobei nur noch die Singularität in IRB und IRD enthalten sind:

$$(A16) \quad IR3 = \int_{-A}^A \gamma_{\mu}''(\xi) \ln|z| \cos z d\xi = IRA + IRB + IRC + IRD$$

mit den Teilintegralen

$$\begin{aligned} IRA &= \frac{\cos \mu \omega t}{2} \int [\gamma_{\mu}''(\xi) - \gamma_{\mu}''(x)] \ln z^2 \cos z d\xi \\ IRB &= -\gamma_{\mu}''(x) \cos \mu \omega t \int \frac{\sin z}{z} d\xi \\ IRC &= -\gamma_{\mu}''(x) \frac{\cos \mu \omega t}{2\mu k} \{ \sin s \ln s^2 - \sin r \cdot \ln r^2 \} \\ (A17) \quad IRD &= \frac{\sin \mu \omega t}{2} \int \gamma_{\mu}''(\xi) \ln z^2 \sin z d\xi \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} s &= \mu k(x-A) \\ r &= \mu k(x+A) \end{aligned}$$

Das Teilintegrale IA ist für $x=\xi$ Null durch die Differenz der beiden γ -Terme. IC ergibt sich aus der Anwendung von (A15). Für die Teilintegrale IRB und IRD gilt an der Stelle der Singularität

$$(A18) \quad \begin{aligned} IRA &= 1 && \text{für } x=\xi \\ IRB &= 0 && \text{für } x=\xi \end{aligned}$$

Als nächstes soll das Integral IR3 betrachtet werden. Es läßt sich nach entsprechenden Umformungen in die folgende Darstellung bringen

$$(A19) \quad IR2 = \int_{-A}^A \gamma_{\mu}' \ln|z| \sin t = IRE + IRB + IRF + IRG$$

mit den Teilintegralen IRE, IRB, IRF und IRG

$$\begin{aligned}
 IRE &= -\frac{\sin \mu \omega t}{2} \int \{ \delta'_\mu(\xi) - \delta'_\mu(x) \} \ln z^2 \cos z \, d\xi \\
 IRB &= + \sin \mu \omega t \delta'_\mu(x) \int \frac{\sin z}{z} \, d\xi \\
 (A20) \quad IRF &= + \sin \mu \omega t \delta'_\mu(x) \frac{1}{2\mu k} \{ \sin s \cdot \ln s^2 - \sin r \cdot \ln r^2 \} \\
 IRG &= \frac{\cos \mu \omega t}{2} \int \delta'_\mu(\xi) \ln z^2 \sin z \, d\xi
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 s &= \mu k(x-A) \\
 r &= \mu k(x+A)
 \end{aligned}$$

wobei die Singularitäten wieder in IRB und IRG enthalten sind. Für IRB gilt wieder (A18) und für IRG

$$(A21) \quad IRG=1 \quad \text{für } x=\xi$$

Damit ist $R_L(x,t)$ berechenbar. Die Singularitäten werden durch Fallunterscheidungen gemäß (A18) und (A21) vom Rechenprogramm direkt berücksichtigt.

b) Betrachtung von $Q(x,t)$

Analog zu (A9) wird q_n in eine komplexe Fourierreihe entwickelt und mit $q_{n\mu}'$ und $q_{n\mu}''$ in Real- und Imaginärteil aufgespalten.

$$(A22) \quad q_n(x,t) = \sum_{\mu=-M}^M q_{n\mu}(x) \exp\{i\mu\omega t\} \quad \text{mit } q_{n\mu} = \frac{1}{2}(q_{n\mu}' - i q_{n\mu}''), \mu > 0.$$

Für (41) folgt daraus nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
Q_L(x,t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=-M}^M \frac{\mu k}{2} \int_{-A}^A (\varphi_{\mu}'' + \varphi_{\mu}') \ln g + 0.577 + \frac{i\pi}{2} \cdot \exp\{i\mu\omega t\} d\xi \\
\text{(A23)} \quad &= \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^M \frac{\mu k}{2} \int_{-A}^A [\varphi_{\mu}''(\xi) \cdot \{\ln g^2 + 2 \cdot 0.577\} - \varphi_{\mu}'(\xi) \pi] \cos \mu\omega t - \\
&\quad - \{\varphi_{\mu}' \{\ln g^2 + 2 \cdot 0.577\} + \varphi_{\mu}'' \pi\} \cdot \sin \mu\omega t] d\xi
\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$g = \frac{\mu k \mu_0}{2a_0} |x - \xi|$$

Dieses Integral wird nun in Teilintegrale aufgespalten, um die Singularitäten bei $x=\xi$ analog zum vorhergehenden Abschnitt exakt zu erfassen

$$\begin{aligned}
Q_L(x,t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=-M}^M \frac{\mu k}{2} \left\{ \cos \mu\omega t [-\pi IQ1 + F \cdot IQ2 + IQ3 + \varphi_{\mu}''(x) IQ4] - \right. \\
\text{(A24)} \quad &\quad \left. - \sin \mu\omega t [\pi IQ2 + F \cdot IQ1 + IQ5 + \varphi_{\mu}'(x) IQ4] \right\}
\end{aligned}$$

mit den Teilintegralen IQ1 bis IQ4

$$\begin{aligned}
IQ1 &= \int \varphi_{\mu}'(\xi) d\xi \\
IQ2 &= \int \varphi_{\mu}''(\xi) d\xi \\
\text{(A25)} \quad IQ3 &= \int \{\varphi_{\mu}''(\xi) - \varphi_{\mu}''(x)\} \cdot \ln(x-\xi)^2 d\xi \\
IQ4 &= \int \ln|x-\xi|^2 d\xi \\
IQ5 &= \int \{\varphi_{\mu}'(\xi) - \varphi_{\mu}'(x)\} \cdot \ln(x-\xi)^2 d\xi
\end{aligned}$$

mit dem Faktor

$$F = 2 \cdot 0.577 + \ln\left(\frac{\mu k \mu_0}{2a_0}\right)^2$$

Die Teilintegrale IQ1, IQ2, IQ4 lassen sich ohne Schwierigkeiten numerisch bestimmen. IQ3 und IQ5 sind für $x=\xi$ Null. Mit dem bekannten Integral

$$\text{(A26)} \quad \int_{-A}^A \ln|x-\xi| d\xi = \left[\frac{\xi-x}{A} \ln \frac{|\xi-x|}{A} - \frac{\xi}{A} \right]_{-A}^A$$

läßt sich IQ4 problemlos bestimmen.

Damit erhält man mit (A25) eine Formel, mit der $q_\eta(x,t)$ numerisch integriert werden kann. Die Fallunterscheidungen $x=\xi$ und $x\neq\xi$ werden wieder direkt im Rechenprogrammablauf berücksichtigt.

c) Beweis von Integralformeln

Die hier behandelten Integrale werden mit der Residuenmethode berechnet, wobei mit Hilfe der Substitution $z=e^{i\tau}$ die Integration über den Einheitskreis der komplexen z -Ebene erfolgt. Die Integrale (83), (89) und (93) sind analog zu lösen. Dieser Lösungsweg soll am Beispiel des Integrals (83) gezeigt werden.

Die Integration kann deshalb über den gesamten Einheitskreis erfolgen, da in (83) nur symmetrische Funktionen enthalten sind. Darüber hinaus kann eine schiefsymmetrische Funktion $i\sin\lambda\tau$ zugefügt werden, ohne daß sich der Wert des Integrals ändert. Zu integrieren ist nun also

$$(a1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\lambda\tau + i\sin\lambda\tau}{\cos\tau + \cos\lambda - 2\beta^4/\beta_3} \frac{d\tau}{\cos\tau - \cos\lambda}$$

Zur Bestimmung der Residuen im Nenner der Integranden gilt

$$(a2) \quad \cos\tau + \cos\lambda - 2\beta^4/\beta_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{z} (z + e^\phi)(z + e^{-\phi})$$

$$\text{mit} \quad \cos\lambda\phi = \cos\lambda - 2\beta^4/\beta_3 \quad \text{und} \quad \phi > 0$$

Damit ergibt sich

$$(a3) \quad I_{83} = \frac{2}{\pi i} \oint_{EK} \frac{z^{\lambda+1} dz}{(z - e^{i\lambda})(z - e^{-i\lambda})(z + e^\phi)(z + e^{-\phi})}$$

Eine konventionelle Rechnung nach der Residuenmethode liefert dann das in Formel (83) angegebene Resultat

B.0 ANALYTISCHER LÖSUNGSVERSUCH

Ausgangspunkt ist die Integralgleichung (59). Die Zusatzbelegungen $q_\eta(x,t)$ und $\gamma_\eta(x,t)$ werden in Form von komplexen Reihen verwendet. Wird außerdem der instationäre Term $R_L(x,t)$ Gl.(61) in (59) eingesetzt, so erhält man

$$(B1) \quad -\frac{1}{2} \sum_{\mu=-M}^M q_{\eta\mu}(x) e^{i\mu\omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=-M}^M \int_{-A}^A \delta_{\eta\mu}(\xi) \left\{ \frac{1}{x-\xi} + i \frac{\mu\omega}{\mu_\infty} e^{\frac{i\mu\omega}{\mu_\infty}(\xi-x)} \int_{\frac{\mu\omega}{\mu_\infty}(\xi-x)}^{\infty} e^{-ix \frac{dX}{x}} \right\} d\xi e^{i\mu\omega t}$$

Die Zeit $\exp\{i\mu\omega t\}$ läßt sich in (B1) separieren; damit kann (B1) gemäß /37/ zu folgender Gleichung exakt invertiert werden:

$$(B2) \quad \frac{\delta_{\eta\mu}(x)}{\mu_\infty} = \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{-A}^A q_{\eta\mu}(\xi) \left\{ \sqrt{\frac{A^2-x^2}{A^2-\xi^2}} \frac{1}{x-\xi} + \frac{i}{A} \mu k \ln \frac{A|x-\xi|}{A^2-x\xi - \sqrt{A^2-x^2} \sqrt{A^2-\xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{A^2-\xi^2}} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \frac{A H_1^{(2)}(\mu k) - i \xi H_0^{(2)}(\mu k)}{H_1^{(2)}(\mu k) + i H_0^{(2)}(\mu k)} \right\} d\xi$$

Ebenso wird die Gleichung (60) bei Anwendung komplexer Reihen für $q_\eta(x,t)$ und $\gamma_\eta(x,t)$ in folgender Form geschrieben:

$$(B3) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) = \frac{1}{\mu_\infty} \sum_{\mu=-M}^M \delta_{\eta\mu}(x) e^{i\mu\omega t} + \frac{1}{\mu_\infty} \sum_{\mu=-M}^M \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A q_{\eta\mu}(\xi) \cdot \left\{ \frac{1}{x-\xi} + \frac{i\mu\omega}{\mu_\infty} \left(\ln \frac{\mu\omega(x-\xi)}{2a_0} + 0.577 + \frac{i\pi}{2} \right) \right\} d\xi e^{i\mu\omega t}$$

Zur weiteren Umformung von (B3) wird nun eine Abschneidefunktion der Art

$$(B4) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(x,t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sin \lambda (C_E(t) - x) + \sin \lambda (x - C_A(t)) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } C_A(t) < x < C_E(t) \\ 0 & \text{für } x < C_A(t), x > C_E(t) \end{cases} \end{aligned}$$

eingeführt, womit sich die linke Seite der Gleichung (B3) schreiben läßt:

$$(B5) \quad c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) = \mathcal{H}(x,t) \{ \mathcal{G}_v - c_p(x,t) \} + (1 - \mathcal{H}(x,t)) \{ c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) \}$$

Innerhalb der Kavitationsschicht ergibt sich dadurch $c_{vp}(x,t) = \sigma_v$. Für den Bereich hinter der Kavitationsschicht muß in Anpassung an das Experiment eine andere Festlegung für c_{vp} getroffen werden (siehe weiter unten).

Mit (B2) und (B5) geht (B3) in die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \Psi(x,t) \{ \sigma_v - c_p(x,t) \} + (1 - \Psi(x,t)) \{ c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) \} = \\
 & = \sum_{\mu=-M}^M e^{i\mu\omega t} \frac{1}{\pi\mu\omega} \int_{-A}^A \varphi_{\mu}(\xi) \cdot \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{A^2-x^2}{A^2-\xi^2}} \frac{1}{x-\xi} + 2i\mu \frac{b}{A} \ln \frac{|x-\xi|}{A} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - i\mu \frac{b}{A} \ln \left(1 - \frac{\xi x}{A^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\xi^2}{A^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)} \right) + i\mu \frac{b}{A} \left(\ln \frac{\mu k \mu \omega}{2a_0} + 0.577 + \frac{i\pi}{2} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{A^{-1}}{\sqrt{A^2-\xi^2}} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \frac{A H_1^{(2)}(\mu k) - i\xi H_0^{(2)}(\mu k)}{H_1^{(2)}(\mu k) + i\xi H_0^{(2)}(\mu k)} \right\} d\xi \quad \text{über.}
 \end{aligned}
 \tag{B6}$$

Die Größen $C_A(t)$ und $C_E(t)$, die in der linken Seite von Gl.(B6) implizit enthalten sind, sollen bestimmt werden. Dazu gilt der Ansatz

$$\begin{aligned}
 C_E(t) &= C_E^{(0)} + \sum_{j=1}^J C_E^{(j)} \cos(j\omega t + \varphi_E^{(j)}) \\
 C_A(t) &= C_A^{(0)} + \sum_{j=1}^J C_A^{(j)} \cos(j\omega t + \varphi_A^{(j)})
 \end{aligned}
 \tag{B7}$$

in der $C_A^{(j)}$ sowie $C_E^{(j)}$ die Amplituden und $\varphi_A^{(j)}$ sowie $\varphi_E^{(j)}$ die Phasen sind. Damit läßt sich die linke Seite von (B6) folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu=-M}^M \equiv_{\mu} (x, C_E^{(j)}, C_A^{(j)}, \varphi_E^{(j)}, \varphi_A^{(j)}) e^{i\mu\omega t} \\
 & \text{mit} \quad \equiv_{\mu} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Psi(x,t) \{ \sigma_v - c_p(x,t) \} e^{i\mu\omega t} dt + \\
 & \quad + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (1 - \Psi(x,t)) \{ c_{vp}(x,t) - c_p(x,t) \} e^{i\mu\omega t} dt.
 \end{aligned}
 \tag{B8}$$

Separiert man die Zeit, so nimmt Gl.(B6) bei Verwendung der Transformation

$$\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} = \frac{1+z}{1-z}, \quad z = -\cos \vartheta
 \tag{B9}$$

die Form

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{1+z}{1+z^2} &\equiv \mu(z, C_E^{(j)}, C_A^{(j)}, \varphi_E^{(j)}, \varphi_A^{(j)}) = \\
&= \frac{1}{\pi \mu_\infty} \int_{-A}^A \varphi_{\mu}(z') \frac{1+z'}{1+z'^2} \left\{ \frac{1}{z-z'} + i \mu k \frac{1+z}{1+z^2} \frac{1+z'}{1+z'^2} \right. \\
\text{(B10)} \quad &\cdot \left(2 \ln |z-z'| + \ln \frac{\mu k \mu_\infty}{\alpha_0} + 0.577 + \frac{i\pi}{2} - \ln((1+z^2)(1+z'^2)) \right) + \\
&\left. + \frac{1-z}{1+z^2} \frac{1+z'}{1+z'^2} \frac{i H_0^{(2)}(\mu k)}{H_1^{(2)}(\mu k) + i H_0^{(2)}(\mu k)} \right\} dz'
\end{aligned}$$

an. Zur Abkürzung werden die beiden stetigen Funktionen

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu}(\vartheta) &= \frac{1}{2} \sin \vartheta \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \equiv \mu(\vartheta) \\
\text{(B11)} \quad Q_{\mu}(\tau) &= \frac{1}{\mu_\infty} \sin \tau \frac{1 - \cos \tau}{1 + \cos^2 \tau} \varphi_{\mu}(\tau)
\end{aligned}$$

eingeführt. Wird für den stetigen Kernanteil mit seinen beiden Variablen ϑ und τ die Abkürzung $K_{\mu}(\vartheta, \tau)$ so nimmt die Integralgleichung folgenden Ausdruck an:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mu}(\vartheta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Q_{\mu}(\tau) \left\{ \frac{\sin \vartheta}{\cos \tau - \cos \vartheta} + \right. \\
\text{(B12)} \quad &+ 2 i \mu k \sin \vartheta \frac{1 - \cos \tau}{1 + \cos^2 \tau} \frac{1 + \cos \tau}{1 + \cos^2 \tau} \ln |\cos \tau - \cos \vartheta| + \\
&\left. + K_{\mu}(\vartheta, \tau) \right\} d\tau
\end{aligned}$$

Die Lösungstheorie von (B12) ist bekannt /37,54/ und die Lösung ergibt sich zu

$$\text{(B13)} \quad \frac{1}{\mu_\infty} \varphi_{\mu}(\tau) = \frac{1 + \cos^2 \tau}{\sin \tau (1 - \cos \tau)} \sum_{n=1}^N Q_{\mu n} \{ \cos n \tau - (-1)^n \}$$

Um die Kavitation auch sachgerecht zu erfassen, wenn sie bis zur Hinterkante geht, müssen die in der Lösung enthaltenen freien Konstanten so bestimmt werden, daß für $\tau = \pi$ bzw. $\xi = A$ $q_{\mu} = 0$ gilt.

Die Idee, nun eine Lösung der Kavitationsrechnung mit Hilfe der Bedingung (80) zu finden, war nun folgende:

Man verschafft sich durch eine quasistationäre Rechnung einen Überblick der zu erwartenden $C_A(t)$ - und $C_E(t)$ -Verläufe und kann anhand dieser Erkenntnis die Anzahl und den Wertebereich der im Ansatz (B7) enthaltenen Parameter abschätzen.

Ebenso müßte die instationäre Druckverteilung für den kavitierenden Fall durch eine Anzahl von Parametern beschrieben werden. Es muß durch eine Funktion mit einigen Parametern eine Festlegung für $c_{vp}(x,t)$ für den Profilbereich hinter der Kavitationsschicht getroffen werden.

Die Funktionen $\gamma_\eta(x,t)$ und $q_\eta(x,t)$ lassen sich bestimmen. Dazu dient die Bedingung, daß $q_\eta(x,t)$ außerhalb des Kavitationsbereiches Null sein muß. Aus einem Raster der in diesem Bereich liegenden Amplituden- und Phasenwerte sowie der Parameter der Druckverteilung muß dann eine bestmögliche Lösung durch die sog. Minimums-Bedingung

$$(B14) \quad \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{C_E(t)}^A q_\eta^2(\xi, t, C_E, C_A, C_{vp}) d\xi dt = \text{MINIMUM}$$

gefunden werden, da $q_\eta(x,t)=0$ hinter der Kavitationsschicht numerisch nicht exakt erfüllbar ist.

Der Einfachheit halber orientiert man sich bei der Bestimmung der Parameter an die experimentellen Größen und versucht einen Ansatz mit möglichst wenigen Parametern. Wird ein Parameter variiert, während die anderen fest bleiben, so sollte sich nach der Idee dieses Lösungsweges die Bedingung (B14) einen kleinsten Wert liefern, für die der zugehörige variierte Parameter als Lösung genommen wird.

Leider stellte sich heraus, daß (B14) -auch bei der Variation der anderen Parameter- keine eindeutigen Minima lieferte. Ebenso zeigte die Bestimmung der Kavitationsdicke bei der hypothetischen Verwendung der Parameter, die nach dem Experiment zu erwarten wären, einen um den Faktor zwei zu großen Wert gegenüber denjenigen aus der Nishiyama-Bedingung. Außerdem ergab sich eine falsche Phase der größten Kavitationsausdehnung zur größten Kavitationsdicke.

Der Grund für das Scheitern liegt vermutlich in der großen Anzahl der im Ansatz notwendigerweise verwendeten Parameter. Die numerischen Ungenauigkeiten (z.B. durch die Fourier-Reihen) führen zu keinem eindeutigen, konvergenten Verhalten der Bedingung (B14).

Ein alternativer Lösungsversuch für eine Entwicklung der Integralgleichung (B2) und (B3) nach kleinen reduzierten Frequenzen brachte keinen Erfolg. Das mag auch daran liegen, daß ein linearer Ansatz die hinsichtlich der

Zeitabhängigkeit stark nicht-lineare Theorie (große Anzahl von Oberfrequenzen $\mu\omega$) auch für kleine reduzierte Frequenzen nicht zu beschreiben vermag.

C.0 PROGRAMMÜBERSICHT

Die Abb.32 gibt eine in einer Übersicht den Programmablauf der insta-

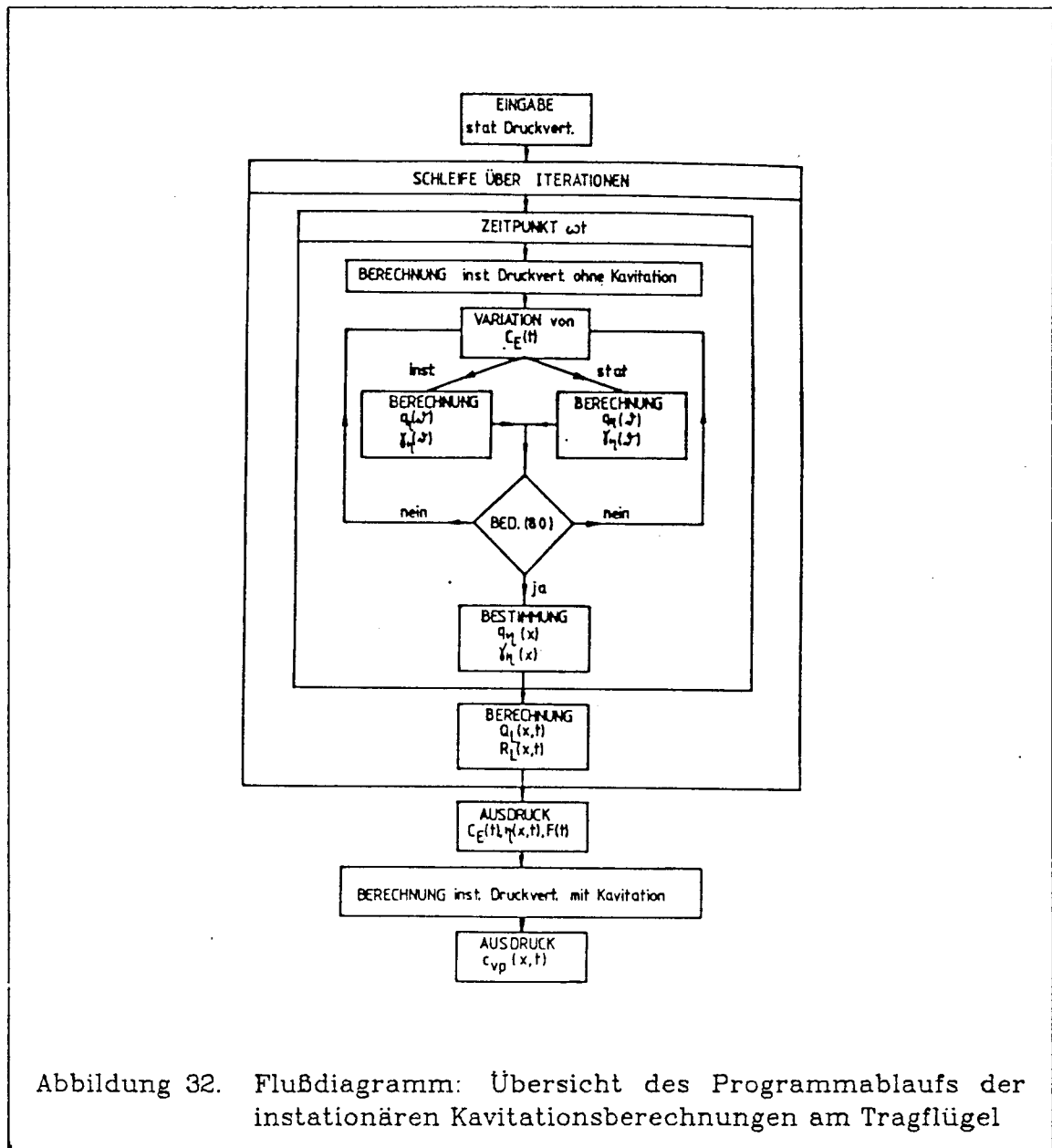


Abbildung 32. Flußdiagramm: Übersicht des Programmablaufs der instationären Kavitationsberechnungen am Tragflügel

tionären Kavitationsrechnungen wieder; für Einzelheiten muß auf /38/ verwiesen werden. Dort findet man auch das für die Propellerrechnungen modifizierte Programm.

Als für den Tragflügel spezifische Eingabedaten wird nur neben den Größen des Strömungszustandes die stationäre Druckverteilung benötigt. Die Anzahl n der diskreten und äquidistanten Aufpunkte bzgl. der Zeitskala ωt und der Profiltiefe x ($-A \leq x \leq A$) ist vorgebar; je größer n ist, um so genauer werden die in der Theorie enthaltenen Fourierapproximationen. Bei zu großer Anzahl n steigt die benötigte Rechenzeit über ein verträgliches Maß hinaus. Die Rechnungen zeigten, daß sowohl eine genügende Rechengenauigkeit als auch verträgliche Rechenzeit bei etwa 25 Aufpunkten für ωt und für x vorhanden war.

Die nullte Iteration stellt die quasi-stationäre Rechnung dar. Die innere Schleife über die Zeit ωt wird zuerst ausgeführt, wobei jeweils die Kavitationslänge $C_E(t)$ solange variiert wird, bis die Bedingung Gl.(80) erfüllt ist. Dann können die zu diesem $C_E(t)$ -Wert gehörende Zusatzbelegungen $\gamma_\eta(x)$ und $q_\eta(x)$ bestimmt werden, die im folgenden zur Bestimmung von $Q_L(x,t)$ und $R_L(x,t)$ benötigt werden. Im Anschluß daran setzt eine neue Iteration ein, wobei nun die Zusatzbelegungen $\gamma_\eta(x)$ und $q_\eta(x)$ für verschiedene ωt -Werte bei Berücksichtigung der instationären Terme $R_L(x,t)$ und $Q_L(x,t)$ bestimmt werden. Ist eine ausreichende Konvergenz gegeben, wird die Iterationsschleife abgebrochen und die Kavitationsgrößen $C_E(t)$, $2\eta(x,t)$ und $F(t)$ können ausgedruckt werden. Als letzter Programmschritt wird die instationäre Druckverteilung bei Berücksichtigung der Kavitation berechnet.

Aus Rechenzeitgründen lassen sich die einzelnen Iterationsschritte einzeln durchführen; die berechneten Zwischenergebnisse müssen dabei nur abgespeichert werden. Ebenfalls kann die instationäre Druckverteilung gesondert bestimmt werden, da die hierfür benötigten Größen im letzten Iterationsschritt auf Datei ausgeschrieben werden.