

Effiziente Kontaktberechnung in flexiblen Mehrkörpersystemen

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von
Stephan Tschigg
aus Schwäbisch Gmünd

2020

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Robert Seifried
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 01. 2020

MuM Notes in Mechanics and Dynamics

Editor: Prof. Dr.-Ing. Robert Seifried
Hamburg University of Technology
Institute of Mechanics and Ocean Engineering (MuM)
www.tuhh.de/mum

Volume 4
Stephan Tschigg
"Effiziente Kontaktberechnung in flexiblen Mehrkörpersystemen"
Hamburg, 2020
© Copyright Stephan Tschigg 2020.
DOI: 10.15480/882.2709

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Meerestechnik an der Technischen Universität Hamburg und wurde als Dissertation an dieser Universität angenommen.

Zuallererst möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bei Prof. Dr.-Ing. Robert Seifried bedanken, der mir zunächst an der Universität Siegen und anschließend an der Technischen Universität Hamburg die Möglichkeit gegeben hat, am Institut zu promovieren. Er hat mich während dieser Zeit kontinuierlich mit seiner Erfahrung und wertvollen Ratschlägen unterstützt und den Rückhalt zur Durchführung dieses Forschungsprojekts gegeben. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster für das Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken. Außerdem gilt mein Dank Junior-Prof. Dr.-Ing. Benedikt Kriegesmann, der den Vorsitz der Promotionsprüfung übernommen hat.

Zu danken habe ich weiterhin den Kolleginnen und Kollegen am Institut für Mechanik und Meerestechnik, die mich während meiner Zeit in Hamburg begleitet haben. Die Hilfsbereitschaft, Zusammenarbeit und die unzähligen Diskussionen von Ideen und Forschungsthemen haben dazu beigetragen, dass ich die schöne Zeit in Hamburg nicht vergessen werden.

Zum Schluss möchte ich mich bei meiner Familie für die vielseitige Unterstützung bedanken. Alle diese Menschen und Erfahrungen haben dazu beigetragen, dass ich mich über einen so langen Zeitraum auf eine Aufgabe konzentrieren konnte, und damit diese Forschungsarbeit zu einem erfolgreichen Abschluss geführt habe.

Heubach, im März 2020

Stephan Tschigg

Für meine Familie.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung und Aufbau dieser Arbeit	4
2	Flexible Mehrkörpersysteme	7
2.1	Kinematik und Kinetik von starren Mehrkörpersystemen	8
2.1.1	Kinematik	8
2.1.2	Impuls- und Drallsatz	10
2.1.3	Virtuelle Verschiebungen	10
2.1.4	Prinzip der virtuellen Leistung	12
2.2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	14
2.3	Finite-Elemente-Bewegungsgleichungen	21
2.4	Ansatz des mitbewegten Referenzsystems	24
2.4.1	Kinematik	24
2.4.2	Kinetik	29
2.4.3	Bewegungsgleichungen	33
2.5	Zusammenbau eines flexiblen Mehrkörpersystems	33
2.5.1	Mehrkörpersysteme in ODE-Form	34
2.5.2	Mehrkörpersysteme in DAE-Form	34
2.5.3	Projektion mit QR-Zerlegung	36
2.6	Modellreduktion	38
2.6.1	Modale Reduktion	40
2.6.2	Craig-Bampton Verfahren	41
2.6.3	Dämpfungsmodellierung	44
2.7	Definition der Referenzsysteme	45
2.7.1	Sekanten- und Tangentensystem	46
2.7.2	Buckens-System	47
2.8	Standard Input Daten	48
2.9	Spannungsberechnung über Spannungsmoden	51
2.10	Frequenzgangmatrix	51

3	Kontaktmodelle	53
3.1	Aktueller Stand	54
3.2	Kontaktmodellierung in flexiblen Mehrkörpersystemen	58
3.2.1	Grundlagen der Kontaktmodellierung in der FEM	58
3.2.2	Kontaktbeschreibung bei flexiblen Mehrkörpersystemen	63
3.2.3	Kontaktalgorithmus in der flexiblen Mehrkörpersimulation	67
3.3	Grundlagen der Kontaktsubmodelle	70
3.4	Partitionierung der Bewegungsgleichungen	80
3.4.1	Vereinfachung der Massenmatrix beim Buckens-System	80
3.4.2	Partitionierung der Bewegungsgleichungen	82
3.5	Gedämpftes Kontaktsubmodell	84
3.5.1	Wahl der Trennfrequenz beim gedämpften Kontaktsubmodell	86
3.6	Vernachlässigung der Trägheitskopplung	87
3.6.1	Trennfrequenz bei der statischen Kondensation	92
3.6.2	Aufteilung der Ortsintegrale	93
3.6.3	Vereinfachung der Bewegungsgleichungen	102
3.7	Quasi-statisches Kontaktsubmodell	106
3.7.1	Approximation der Jacobi-Matrix mit dem Broyden-Verfahren	111
3.7.2	Ablauf der Kontaktkraftberechnung mit dem Broyden-Verfahren	113
4	Modellierung	119
4.1	Testsysteme zur Stoßanalyse	120
4.2	Modellbildung in der FEM	121
4.2.1	Wahl der Diskretisierung	123
4.2.2	Penalty-Faktoren in der FE-Kontaktsimulation	125
4.3	Wahl der Ansatzfunktionen in reduzierten Modellen	126
4.3.1	Anzahl der Eigenmoden	127
4.3.2	Statische Ansatzfunktionen	129
4.4	Konvergenzverhalten der FMKS-Simulation	131
4.4.1	Konvergenzverhalten des Penalty-Faktors in der FMKS-Simulation	132
4.4.2	Einflussparameter beim quasi-statischen Kontaktsubmodell	134
5	Numerische Stoßanalysen	143
5.1	Stoß der Stahlkugel auf die Aluminiumstäbe	144
5.1.1	Bestimmung der Dämpfungsparameter	151
5.1.2	Rechenaufwand bei den FMKS-Simulationen mit CB-Modellen	154
5.1.3	Einfluss der Koppelterme	157
5.2	Stoß der Stahlkugel auf den Aluminiumbalken	158
5.3	Stoß der Stahlkugel auf das Doppelpendel	166

5.3.1	Einfluss der Bindungsgleichungen	174
5.3.2	Einfluss der Koppelterme	175
6	Experimentelle Untersuchungen	179
6.1	Laser-Vibrometer	179
6.2	Aufbau des Prüfstands	180
6.3	Reproduzierbarkeit der Messungen	181
6.4	Vergleich der FMKS-Simulationen mit den Messergebnissen . . .	182
6.4.1	Stoß der Stahlkugel auf den ebenen Aluminiumstab . . .	183
6.4.2	Stoß der Stahlkugel auf den Aluminiumstab mit Innenradius	184
6.4.3	Stoß der Stahlkugel auf den Aluminiumbalken	186
7	Zusammenfassung	189
	Literaturverzeichnis	193
	Abkürzungen	203

EINLEITUNG

In der heutigen Zeit ist die virtuelle Produktentwicklung fest in den Entstehungsprozess neuer Produkte integriert. Dabei werden Entwicklungsingenieure immer mehr von numerischen Simulationen unterstützt, um den steigenden Ansprüchen an die Entwicklungszeiten, an die Reduktion der Entwicklungskosten sowie den Ansprüchen nach steigender Produktqualität gerecht zu werden. Damit gehen zunehmende Forderungen an die Recheneffizienz und die Qualität der numerischen Simulationen zur präzisen Vorhersage des Systemverhaltens und den auftretenden Belastungen einher. Bei vielen Anwendungen in der Maschinendynamik treten Stöße auf, deren genaue und effiziente Analyse heute weiterhin eine interessante Herausforderung und ein aktives Forschungsgebiet darstellt.

1.1 Motivation

Zur Modellierung mechanischer Systeme, welche sowohl große nichtlineare Bewegungen durchführen als auch Verformungen erfahren, kann die Methode der flexiblen Mehrkörpersysteme verwendet werden. Die dabei am häufigsten verwendeten Formulierungen sind nichtlineare Finite-Elemente-Methoden, siehe [Shabana18], sowie der Ansatz des mitbewegten Referenzsystems, siehe [Schwertassek-Wallrapp99]. In den meisten maschinendynamischen Anwendungen treten kleine und elastische Deformationen auf, die oftmals jedoch nicht vernachlässigt werden dürfen. Beim Ansatz des mitbewegten Referenzsystems wird diese linear elastische Deformation des Körpers von der großen nichtlinearen Bewegung des Referenzsystems getrennt. Durch die Anwendung von linearen Modellreduktionsverfahren können zur Beschreibung dieser elastischen Deformation lineare Finite-Elemente-Körper effizient in das Mehrkörpersystem eingefügt werden. Treten dagegen beispielsweise große Deformationen auf, so sind nichtlineare Finite-Elemente-Methoden notwendig.

Zur numerischen Untersuchung von Kontaktproblemen kann die Finite-Elemente-Methode verwendet werden, siehe [Eberhard00, Wriggers06]. Damit können sowohl durch den Stoß angeregte, hochdynamische Strukturschwingungen als auch Deformationen und Spannungen in den Kontaktzonen genau dargestellt werden. Für die genaue Modellierung dieser Effekte ist jedoch eine sehr feine Vernetzung der Körper notwendig, was zu einer sehr großen Anzahl Knotenfreiheitsgraden führt. Die Einhaltung der Kontaktbedingung führt auch bei an-

sonsten linearen Finite-Elemente-Modellen stets auf ein nichtlineares Problem, siehe [Wriggers06]. In Kombination mit der großen Anzahl Knotenfreiheitsgrade führt dies oftmals zu sehr hohen Rechenzeiten, weshalb die Finite-Elemente-Methode zur dynamischen Kontaktanalyse, bei welcher neben dem Kontaktvorgang zusätzlich noch die nichtlineare Starrkörperbewegung vor und nach dem Stoß untersucht wird, nicht sinnvoll einsetzbar ist. Für eine effiziente Zeitsimulation kann eine Finite-Elemente-Kontaktbeschreibung in Kombination mit flexiblen Mehrkörpersystemen und der reduzierten elastischen Beschreibung der Körper über lineare Finite-Elemente-Modelle verwendet werden. Für eine genaue Berechnung der Kontaktkräfte ist eine dreidimensionale Beschreibung der Kontaktzone über Kontaktelemente erforderlich. Bei der Finite-Elemente-Kontaktbeschreibung werden Oberflächenelemente aus der Diskretisierung als Kontaktelemente verwendet, siehe [Ziegler12]. Mit diesen Elementen wird die Durchdringung der einzelnen Körper geprüft. Anschließend werden beispielsweise über das Penalty- oder Lagrange-Verfahren die Kontaktkräfte berechnet, welche dieser Durchdringung entgegen wirken, siehe [Eberhard00].

Stoßen einzelne Körper zusammen, so wird deren globale Bewegung unterbrochen. Je nach Körperform werden elastodynamische Effekte, wie zum Beispiel Welleneffekte, in den Körpern angeregt, siehe [Goldsmith60]. Diese Welleneffekte nehmen einen Teil der kinetischen Energie der Starrkörperbewegung auf. Aufgrund der Materialdämpfung dissipieren diese Wellen nach dem Stoß, weshalb ein kinetischer Energieverlust auftritt. Da in der Kontaktzone hohe Spannungen auftreten, können dort auch plastische Verformungen entstehen. Diese stellen einen weiteren Beitrag zum kinetischen Energieverlust der Starrkörperbewegung dar, siehe [Seifried05]. Aufgrund der Beschränkung auf linear elastisches Materialverhalten sind die plastischen Verformungen nicht Bestandteil dieser Arbeit, weshalb der kinetische Energieverlust der Starrkörperbewegung auf die Wellenausbreitung beschränkt ist. Der Kontaktvorgang ist ein nichtlinearer Vorgang, während es sich bei den elastodynamischen Effekten, bei Beschränkung auf linear elastisches Materialverhalten, um ein lineares Verhalten handelt. Zur effizienten Erfassung dieser hochdynamischen Welleneffekte ebenso wie der lokalen Verformungen, wird in flexiblen Mehrkörpersystemen die reduzierte elastische Beschreibung der linearen Finite-Elemente-Körper mit der Finite-Elemente-Kontaktbeschreibung kombiniert. Dabei spielt das verwendete Modellreduktionsverfahren eine elementare Rolle, denn nicht alle Verfahren können ohne weiteres auf allgemeine Kontaktprobleme angewandt werden. Häufig finden dabei lineare Modellreduktionsverfahren auf Basis von Projektionen Anwendung. Diese Verfahren approximieren den Zustandsvektor mit einer Projektionsmatrix mit reduzierter Dimension und projizieren somit die Systemgleichungen auf einen Unterraum mit niedriger Dimension, siehe [NowakowskiEtAl12].

Ein bei Kontaktproblemen in flexiblen Mehrkörpersystemen etabliertes Modellreduktionsverfahren ist die modale Reduktion. Dabei werden die Knotenfrei-

heitsgrade über eine Projektionsmatrix, bestehend aus dominanten Eigenmoden, auf einen reduzierten Unterraum projiziert. Mit diesen Modellen sind effiziente Untersuchungen des dynamischen Verhaltens bei Stößen möglich, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10, ZieglerEberhard08]. Für effiziente und genaue Kontaktsimulationen ist die modale Reduktion jedoch nur bedingt geeignet, da eine sehr hohe Anzahl Eigenmoden erforderlich ist, um die lokale Verformung ebenso wie die Spannungen in der Kontaktzone genau zu erfassen. Dafür bieten sich Verfahren der Component-Mode-Synthesis an, siehe [Craig87]. Der Unterschied zur modalen Reduktion besteht darin, dass in der Projektionsmatrix neben dynamischen Eigenmoden zusätzliche statische Ansatzfunktionen verwendet werden. Somit ist die Beschreibung der elastischen Deformation statisch komplett. Die verschiedenen Verfahren der Component-Mode-Synthesis unterscheiden sich durch die Berechnung der statischen Ansatzfunktionen. Mit diesen statischen Ansatzfunktionen kann die statische Lösung mit der Genauigkeit des zugrundeliegenden Finite-Elemente-Modells abgebildet werden. Aus diesem Grund ist dieses statisch vollständige Modellreduktionsverfahren zur Analyse von Kontaktproblemen gut geeignet, siehe zum Beispiel [TamarozziEtAl13b]. Um die Spannungsfelder in der Kontaktzone sowie die elastodynamischen Effekte in den Körpern genau erfassen zu können, sind bei Stoßsimulationen jedoch sehr fein vernetzte Finite-Elemente-Modelle notwendig. Für jeden Knotenfreiheitsgrad, welcher möglicherweise während des Kontaktvorgangs belastet werden kann, müssen bei Verfahren der Component-Mode-Synthesis zusätzliche statische Ansatzfunktionen berücksichtigt werden. Daher steigt die Anzahl der reduzierten elastischen Freiheitsgrade im Vergleich zur modalen Reduktion signifikant an.

Die statischen Ansatzfunktionen, welche die lokale Deformation an ausgewählten Knotenfreiheitsgraden repräsentieren, kompensieren den quasi-statischen Beitrag der höherfrequenten Eigenmoden, die in der Projektionsmatrix beim modal reduzierten Modell vernachlässigt werden, siehe [HeirmanTamarozziDesmet11]. Durch die Kompensation der vernachlässigten, hochfrequenten Eigenmoden zur Erfassung dieser lokalen Deformationen werden bei der Modellreduktion über Verfahren der Component-Mode-Synthesis sehr hohe Eigenfrequenzen künstlich in das reduzierte System eingebracht, siehe [SherifWitteveenMayrhofer12]. Bei der modalen Reduktion werden dagegen meist Eigenmoden im physikalisch relevanten Frequenzbereich der Wellenausbreitung, in der Maschinendynamik meist zwischen 50-100 kHz, berücksichtigt, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10]. Da beim Stoß alle im reduzierten System enthaltenen Eigenfrequenzen angeregt werden, ist das über Verfahren der Component-Mode-Synthesis reduzierte System oftmals ein Differentialgleichungssystem mit hoher numerischer Steifigkeit, siehe [Nikraves88]. Es enthält dabei sowohl größere Zeitkonstanten sowie numerisch eingeführte, sehr kleine Zeitkonstanten. Erstere resultieren aus den dynamischen Eigenmoden während letztere zur statisch korrekten Beschreibung eingeführt werden.

Sind bei Stoßanalysen neben der dynamischen Approximation ebenso Spannungen und Dehnung in der Kontaktzone von Interesse, so ist die statisch vollständige Beschreibung des reduzierten Systems unverzichtbar. Die zwei damit einhergehenden, zentralen Problemstellungen, nämlich die gewünschte hohe Genauigkeit in Kombination mit reduzierten Modelle und die verschlechterte numerische Effizienz, müssen zusammen betrachtet und gelöst werden. Diese Herausforderungen werden in der vorliegenden Arbeit im Detail untersucht und entsprechende Lösungsvorschläge gemacht.

1.2 Zielsetzung und Aufbau dieser Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die effiziente numerische Stoßanalyse in flexiblen Mehrkörpersystemen mit reduzierten linearen Finite-Elemente-Modellen. Der Fokus liegt dabei auf der numerisch effizienten und präzisen Analyse der beim Stoß auftretenden Effekte. Dazu zählen die lokale Verformung der Kontaktzone und die daraus resultierenden Spannungen, ebenso wie das globale, elastodynamische Verhalten der gestoßenen Körper. Diese Arbeit beschränkt sich dabei auf das reine Kontaktproblem, weshalb Reibung nicht berücksichtigt wird. Reibung tritt hauptsächlich bei exzentrischen und schiefen Stößen auf, die nicht Bestandteil dieser Arbeit sind. Zur Kontaktmodellierung in den flexiblen Mehrkörpersimulationen wird die Penalty-Formulierung verwendet.

Die in dieser Arbeit entwickelten Kontaktsubmodelle sind in der Lage, die Stoßprobleme in flexiblen Mehrkörpersystemen rechnerisch effizient zu lösen. Dabei wird der Einfluss der hochfrequenten Dynamik, künstlich über die statischen Ansatzfunktionen in das reduzierte System eingebracht, in der Zeitintegration reduziert oder vernachlässigt. Somit wird die numerische Steifigkeit verringert und die Rechenzeit im Vergleich zur dynamischen Finite-Elemente-Simulation erheblich reduziert. Zusätzlich kann eine Unabhängigkeit der Ergebnisse vom Penalty-Faktor beobachtet werden.

Zur Entwicklung und Verifikation der Kontaktsubmodelle werden in dieser Arbeit die Stöße auf geometrisch einfache Körper herangezogen. Es wird der Einfluss verschiedener Parameter auf die numerische Effizienz und Genauigkeit untersucht. Zunächst wird der Einfluss der Anzahl statischer Ansatzfunktionen, die gleichzeitig in Kontakt sind, geprüft. Dazu wird die Kontaktgeometrie der gestoßenen Körper verändert, um den Kontaktradius zu vergrößern. Anschließend werden die Untersuchungen von Mehrfachstößen mit den entwickelten Kontaktsubmodellen durchgeführt. Hierbei wirkt sich die Genauigkeit des ersten Stoßes auf das Bewegungsverhalten und damit auf die weiteren Stöße aus. Abhängig von der Genauigkeit des ersten Stoßes kann die Anzahl der weiteren Stöße variieren. Die Ergebnisse dieser numerischen Simulationen werden anschließend mit Experimenten verifiziert. Abschließend wird die Effizienz der flexiblen Mehrkörpersimulation in Kombination mit den entwickelten Kontaktsubmodellen bei größeren

Starrkörperbewegungen untersucht. Die Kontaktsubmodelle werden dazu in die Matlab-Toolbox DYNMANTO des Instituts für Mechanik und Meerestechnik der Technischen Universität Hamburg implementiert. Zur Verifizierung der Qualität und der numerischen Effizienz wird stets auf die Ergebnisse von detaillierten, dynamischen Finite-Elemente-Simulationen zurückgegriffen. Dabei werden die Verschiebung, Geschwindigkeit, Deformation und Spannungen verglichen. Außerdem wird der kinetische Energieverlust der Starrkörperbewegung betrachtet.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Zu Beginn werden in Kapitel 2 die Grundlagen zur Modellierung von flexiblen Mehrkörpersystemen zusammengefasst. Dazu werden zunächst die Grundlagen zur Beschreibung der Bewegungsgleichungen anhand starrer Mehrkörpersysteme vorgestellt. Anschließend wird die Beschreibung eines einzelnen elastischen Körpers, zunächst auf Basis der Kontinuumsmechanik, und anschließend über die lineare Finite-Elemente-Methode aufgeführt. Diese elastischen Körper werden unter Verwendung des Ansatzes des mitbewegten Referenzsystems zur Erweiterung der starren Mehrkörpersysteme auf flexible Mehrkörpersysteme verwendet. Dabei werden zunächst die Bewegungsgleichungen eines einzelnen freien Körpers hergeleitet, die anschließend auf mehrere Körper erweitert werden. Für eine effiziente Integration von gebundenen Mehrkörpersystemen mit Standardmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme wird die Projektion in die Zustandsraumdarstellung mit QR-Zerlegung erläutert. Zur effizienten Beschreibung der elastischen Körper werden anschließend die Grundlagen der Modellreduktion sowie die in dieser Arbeit verwendeten linearen Modellreduktionsverfahren vorgestellt. Abschließend wird die Berechnung der Ortsintegrale für eine effiziente Darstellung der Bewegungsgleichungen diskutiert.

In Kapitel 3 werden die Grundlagen der Kontaktmodellierung aufgeführt. Zunächst wird ein Überblick über den aktuellen Stand der Kontaktmodellierung in Mehrkörpersystemen gegeben. Danach werden die Grundlagen der Kontaktmodellierung in flexiblen Mehrkörpersystemen diskutiert. Dabei wird die Kontaktbeschreibung und Kontaktkraftberechnung über einen Finite-Elemente-Kontakt sowie die Umsetzung im verwendeten Kontaktalgorithmus präsentiert. Anhand eines Beispielsystems wird die Kontaktanalyse mit reduzierten elastischen Körpern durchgeführt und die auftretenden Herausforderungen diskutiert. Basierend darauf werden im Anschluss das gedämpfte und das quasi-statische Kontaktsubmodell entwickelt. Beiden Kontaktsubmodellen liegt die Aufteilung der elastischen Anteile der Bewegungsgleichungen in nieder- und hochfrequente Anteile zugrunde. Als Basis des quasi-statischen Kontaktsubmodells wird anhand des Beispielsystems die Vernachlässigung der Trägheitskopplung zwischen Starrkörperrotation und der elastischen Deformation sowie die daraus resultierenden Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen aufgezeigt. Damit werden nur die niederfrequenten Anteile dynamisch betrachtet, während die lokale Deformation statisch betrachtet wird. Abschließend wird der Ablauf der Kontaktkraftberech-

nung beim quasi-statischen Kontaktsubmodell diskutiert. Die Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der lokalen Deformation in Abhängigkeit der Kontaktkräfte wird effizient mit dem Broyden-Verfahren umgesetzt.

In Kapitel 4 werden die in dieser Arbeit verwendeten Stoßsysteme vorgestellt. Anschließend wird die Modellbildung in der Finiten-Elemente-Simulation mit der Wahl einer geeigneten Diskretisierung sowie der Wahl der Kontaktformulierung erläutert. Die Genauigkeit der Stoßsimulation mit reduzierten Körpern hängt von der Wahl der Ansatzfunktionen ab. Daher wird in diesem Abschnitt die Bestimmung geeigneter Ansatzfunktionen und die Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten des Penalty-Faktors in der flexiblen Mehrkörpersimulation aufgezeigt. Abschließend werden die Einflussparameter beim quasi-statischen Kontaktsubmodell und ihre Auswirkung auf das Konvergenzverhalten des quasi-statischen Kontaktsubmodells geprüft. Die Anwendung der Kontaktsubmodelle auf die Stoßsysteme sowie die Verifizierung anhand von Ergebnissen dynamischer Finite-Elemente-Simulationen erfolgt in Kapitel 5. Neben der numerischen Effizienz wird der Einfluss der Größe der Kontaktzone sowie das Verhalten bei Mehrfachstößen mit beiden Kontaktsubmodellen verglichen.

Die Verifizierung der numerischen Simulationen mit geometrisch einfachen Körpern anhand von Experimenten wird in Kapitel 6 im Detail beschrieben. Abgeschlossen wird diese Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung in Kapitel 7.

MODELLIERUNG VON FLEXIBLEN MEHRKÖRPERSYSTEMEN

Zur effizienten dynamischen Analyse von mechanischen Systemen mit flexiblen Körpern kann die Methode der flexiblen Mehrkörpersysteme (FMKS) verwendet werden. Wird die Deformation der Körper auf kleine linear elastische Verformungen beschränkt, so kann der Ansatz des mitbewegten Referenzsystems verwendet werden, um die elastischen Körper effizient in ein Mehrkörpersystem (MKS) zu integrieren, siehe [SchwertassekWallrapp99, Shabana05]. Beim Ansatz des mitbewegten Referenzsystems können die bestehenden Formalismen der starren MKS verwendet und um flexible Körper erweitert werden. Die Beschreibung der flexiblen Körper kann dabei über bestehende Modelle aus der Finite-Elemente-Methode (FEM) erfolgen. Bei linear elastischem Materialverhalten können dann lineare Modellreduktionsverfahren verwendet werden, um eine effiziente numerische Simulation zu ermöglichen.

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen starrer MKS werden zunächst in Abschnitt 2.1 die Newton-Euler-Gleichungen formuliert und die Prinzipie der Mechanik vorgestellt, womit die Reaktionskräfte eliminiert werden können. Anschließend werden die Bewegungsgleichungen starrer MKS in Zustandsform dargestellt. Zur Modellierung flexibler Körper werden in Abschnitt 2.2 die Grundlagen der Kontinuumsmechanik diskutiert und in Abschnitt 2.3 darauf aufbauend die linearen FE-Bewegungsgleichungen hergeleitet. In Abschnitt 2.4 werden im Zusammenhang mit dem Ansatz des mitbewegten Referenzsystems die Grundlagen der Kinematik und der Kinetik eines elastischen Körpers diskutiert. Anschließend werden in Abschnitt 2.5 die freien elastischen Körper aus Abschnitt 2.4 zu Mehrkörpersystemen zusammengebaut und deren Bewegungsgleichungen in Zustandsform transformiert. Dabei folgt die Darstellung überwiegend [Lehner07, SchwertassekWallrapp99] und [Seifried14].

Zur effizienten Beschreibung der elastischen Verformung werden in Abschnitt 2.6 die Grundlagen der linearen Modellreduktion sowie die verwendeten Modellreduktionsverfahren vorgestellt. Zusätzlich werden unterschiedliche Möglichkeiten zur Dämpfungsmodellierung erläutert. In Abschnitt 2.7 werden anschließend das Tangenten-, Sekanten- und das Buckens-System zur Festlegung der Referenzsystem bei der Beschreibung der elastischen Körper im Ansatz des mitbewegten Referenzsystems dargestellt. Um die Beschreibung der elastischen Körper abzuschließen, werden in Abschnitt 2.8 die Standard Input Daten eingeführt. In

den Abschnitten 2.9 und 2.10 wird die Spannungsberechnung über Spannungsmoden vorgestellt und die Frequenzgangmatrix zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens eines Systems diskutiert, die im weiteren Verlauf zum Vergleich der verwendeten Modellreduktionsverfahren herangezogen wird.

2.1 Kinematik und Kinetik von starren Mehrkörpersystemen

Für die Modellierung von starren MKS werden verschiedene Idealisierungen vorausgesetzt. Die Körper sind starr und massebehaftet und werden über die Masse und den Trägheitstensor beschrieben. Ihre Lage, einschließlich der Orientierung, wird über die Position des Schwerpunkts und die Drehmatrix beschrieben. Koppelemente zwischen den Körpern, wie beispielsweise Federn und Dämpfer, sind masselos und erzeugen eingeprägte Kräfte. Bindungselemente, wie Lagerungen oder Einspannungen, sind idealisiert masselos und reibungsfrei und erzeugen unbekannte Reaktionskräfte.

Die Lage, einschließlich der Orientierung, von freien Körpern in einem MKS können mit den kartesischen Koordinaten beschrieben werden. Zur Beschreibung der Lage, einschließlich der Orientierung, werden dabei drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade benötigt, siehe [Seifried14]. Werden q holonome Bindungen berücksichtigt können die Freiheitsgrade f eines MKS als $f = 6p - q$ angegeben werden, wobei p die Körperanzahl beschreibt. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen führt dabei auf $6p + q$ differential-algebraische Gleichungen. Diese Formulierung über kartesischen Koordinaten wird auch als redundant bezeichnet, da $6p$ Koordinaten für f Freiheitsgrade benötigt werden. Die Beschreibung der Bewegung in verallgemeinerten Koordinaten reduziert die Anzahl der notwendigen Koordinaten und ist daher effizienter. Die verallgemeinerten Koordinaten beschreiben dann die unabhängigen Bewegungsrichtungen, welche die Position und Verdrehung aller Körper im MKS eindeutig beschreiben. Damit kann ein System mit q holonomen Bindungen und $f = 6p - q$ Freiheitsgraden effizient mit $f \ll 6p$ verallgemeinerten Koordinaten beschrieben werden, falls keine kinematischen Schleifen vorliegen, siehe [Bestle94]. Damit ist die Beschreibung der Bewegungsgleichungen über gewöhnliche Differentialgleichungen möglich.

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen beschränkt sich hier auf holonome MKS, deren Bindungen die Freiheitsgrade der Lage und Geschwindigkeit reduzieren. Außerdem werden nur Systeme in Baumstruktur und skleronome Bindungen betrachtet.

2.1.1 Kinematik

Der Ortsvektor $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ beschreibt die Position des Schwerpunkts C_i eines Körpers i im Inertialsystem. Im Folgenden wird für starre MKS die Darstellung von Vektoren im Inertialsystem gewählt. Die Orientierung des Körpers gegenüber

dem Inertialsystem wird über die Drehmatrix $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ beschrieben. Mit den verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$, welche f unabhängige Teilbewegungen des Gesamtsystems beschreiben, lauten die Position und Orientierung

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t). \quad (2.1)$$

Die Drehmatrix $\mathbf{S}_i$ kann beispielsweise über Kardanwinkel oder Quaternionen berechnet werden und ist orthogonal weshalb $\mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i = \mathbf{E}$ gilt, siehe [SchiehlenEberhard17]. Die zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}_i$ liefert die absolute Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{T,i}(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t), \quad (2.2)$$

mit der Jacobi-Matrix der Translation $\mathbf{J}_{T,i} \in \mathbb{R}^{3 \times f}$ und den lokalen Geschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}_i \in \mathbb{R}^3$, die nur bei rheonomen Bindungen auftreten, siehe [Seifried14]. Aus der Drehmatrix $\mathbf{S}_i$ kann der Winkelgeschwindigkeitstensor $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ folgendermaßen bestimmt werden

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\mathbf{S}}_i \mathbf{S}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Aufgrund der Orthogonalität von $\mathbf{S}_i$ handelt es sich bei $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ um einen schiefsymmetrischen Tensor mit dem auch das Kreuzprodukt

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -\tilde{\mathbf{r}} \boldsymbol{\omega} \quad (2.4)$$

formuliert werden kann. Daraus wird die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$ bestimmt als

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T. \quad (2.5)$$

Analog zur translatorischen Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ kann somit die Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden als

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{R,i}(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t), \quad (2.6)$$

mit der Jacobi-Matrix der Rotation $\mathbf{J}_{R,i} \in \mathbb{R}^{3 \times f}$. Der Vektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \in \mathbb{R}^3$ tritt nur bei rheonomen Bindungen auf und fasst die lokalen Winkelgeschwindigkeiten zusammen, siehe [SchiehlenEberhard17]. Die zeitliche Ableitung von Gl. (2.6) ergibt die absolute Winkelbeschleunigung zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= \mathbf{J}_{R,i} \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{R,i} \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i \\ &= \mathbf{J}_{R,i}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

und aus der zeitlichen Ableitung von Gl. (2.2) folgt die absolute Beschleunigung

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{J}_{T,i} \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{T,i} \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i \\ &= \mathbf{J}_{T,i}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

In den Gleichungen (2.7) und (2.8) fassen die Vektoren $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3$ und $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$ die lokalen Beschleunigungen zusammen, die im Gegensatz zu den lokalen Geschwindigkeiten auch bei skleronomen Systemen auftreten, siehe [Bestle94].

2.1.2 Impuls- und Drallsatz

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen starrer MKS werden die einzelnen Körper freigeschnitten und die wirkenden Kräfte und Momente auf den Schwerpunkt C_i bezogen, siehe Abbildung 2.1. Dabei wird zwischen eingepägten Kräften und Momenten sowie Reaktionskräften und -momenten unterschieden. Zur Beschreibung der Kinetik starrer Körper werden die Newtonschen Gleichungen, auch als Impulssatz bezeichnet,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^r \quad (2.9)$$

und der Drallsatz, auch als Eulersche Gleichungen bezeichnet,

$$\mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\ell}_i^e + \boldsymbol{\ell}_i^r \quad (2.10)$$

verwendet, siehe [SchiehlenEberhard17]. In den Gleichungen (2.9) und (2.10) bezeichnen die Vektoren $\mathbf{f}_i^e \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{f}_i^r \in \mathbb{R}^3$ die eingepägten Kräfte und die Reaktionskräfte und $\boldsymbol{\ell}_i^e \in \mathbb{R}^3$ sowie $\boldsymbol{\ell}_i^r \in \mathbb{R}^3$ die entsprechenden Momente. Die Masse des i -ten Körpers wird mit m_i und der Trägheitstensor mit $\mathbf{I}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezeichnet. Die Gleichungen (2.9) und (2.10) sind im Inertialsystem gegeben und werden als Newton-Euler-Gleichungen bezeichnet. Sie sind ebenso im körperfesten Referenzsystem gültig, wenn $\mathbf{a}_i$ und $\boldsymbol{\alpha}_i$ die absoluten Beschleunigungen sind, siehe [Bestle94, Seifried14].

Mit den $6p$ kinetischen Grundgleichungen (2.9) und (2.10) für p Körper können in freien Systemen bei gegebenen Kräften die Bewegungen der $f = 6p$ Freiheitsgrade berechnet werden. Bei gebundenen Systemen treten jedoch q unbekannte Reaktionskräfte und -momente auf. Diese reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade, haben jedoch keinen direkten Einfluss auf die Bewegung in den freien Richtungen. Daher ist es sinnvoll, diese Reaktionskräfte und -momente in den Bewegungsgleichungen (2.9) und (2.10) zu eliminieren. Dazu werden die Prinzipie der Mechanik verwendet, die in Abschnitt 2.1.4 erläutert werden, siehe [Bestle94, SchiehlenEberhard17]. Diese basieren auf der Variationsrechnung, welche im folgenden Abschnitt kurz dargestellt wird.

2.1.3 Virtuelle Verschiebungen

Zur Elimination der Reaktionskräfte werden virtuelle Verschiebungen verwendet. Diese virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_i$ und Verdrehungen $\delta \mathbf{s}_i$,

$$\delta \mathbf{r}_i \neq \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{s}_i \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{v}_i = \delta \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

sind gedachte, infinitesimale Lageänderungen bei festgehaltener Zeit $\delta t = 0$, die mit den Bindungen eines MKS verträglich sind. Es wird die aktuelle Lage und Geschwindigkeit des Körpers eingefroren und eine infinitesimale Lageänderung

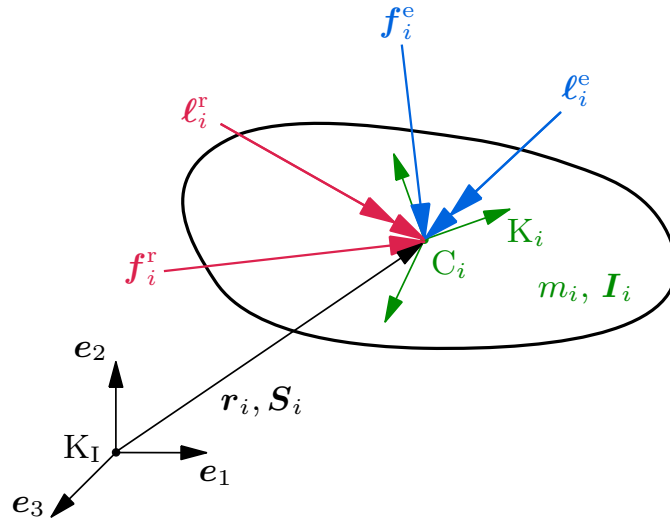


Abbildung 2.1: Freigeschnittener Körper eines MKS

betrachtet, die mit den Bindungen verträglich ist. Die virtuelle Verdrehung wird analog zu Gl. (2.3) ermittelt aus

$$\delta \tilde{\mathbf{s}}_i = \delta \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^T. \quad (2.12)$$

Bei der Variationsrechnung entsprechen die Rechenregeln denen der Differentialrechnung bei festgehaltener Zeit $\delta t = 0$, weshalb aus Gl. (2.2) dann beispielsweise

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} \quad (2.13)$$

folgt, siehe [Bestle94]. Zur Eliminierung der Reaktionskräfte und -momente aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) über die Prinzipie der Mechanik werden die Sätze der unabhängigen und abhängigen Variation angewendet.

Unabhängige Variation

Für die Vektoren $\mathbf{c}$ und $\delta \mathbf{y}$ im Raum $\mathbb{R}^n$ gilt nach dem Satz der unabhängigen Variation

$$\mathbf{c}^T \delta \mathbf{y} = 0, \quad (2.14)$$

für alle beliebigen Variationen $\delta \mathbf{y}$ nur dann, wenn der Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ein Nullvektor ist. Für $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ist Gl. (2.14) für alle $\delta \mathbf{y}$ direkt erfüllt. Weiterhin muss für alle denkbaren $\delta \mathbf{y}$, also auch für $\delta \mathbf{y} = [0 \dots \delta y_i \dots 0]^T$ mit $\delta y_i \neq 0$, Gl. (2.14) erfüllt sein. Dies ist nur der Fall, wenn $c_i = 0$ gilt. Wird dieser Gedanken für $i = 1 \dots n$ fortgesetzt, dann folgt insgesamt $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Damit Gl. (2.14) für alle $\delta \mathbf{y}$ gilt, müssen die Koordinaten δy_i voneinander unabhängig sein, siehe [Bestle94].

Abhängige Variation

Sind die Koordinaten $\delta \mathbf{y}$ nicht unabhängig voneinander, müssen diese durch Bindungen beschriebene Abhängigkeiten mit Lagrange-Multiplikatoren berücksichtigt werden, was zum Satz der abhängigen Variation führt. Die Vektoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\delta \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sowie die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ seien gegeben. Es gilt

$$\mathbf{c}^T \delta \mathbf{y} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{y} : \text{welche die Abhängigkeiten } \mathbf{A} \delta \mathbf{y} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \text{ erfüllen.} \quad (2.15)$$

Dann existiert ein Vektor $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ mit Lagrange-Multiplikatoren, so dass nach [Bestle94, Eberhard00]

$$(\mathbf{c}^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}) \delta \mathbf{y} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.16)$$

gilt. Die Variationen $\delta \mathbf{y}$ müssen in Gl. (2.15) m durch $\mathbf{A}$ festgelegte lineare Abhängigkeiten erfüllen. Durch die Bestimmung geeigneter Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ kann das Variationsproblem (2.15) in (2.16) überführt werden, in welchem die Variation $\delta \mathbf{y}$ keinen Einschränkungen mehr unterliegt. Der Beweis dieses Satzes ist beispielsweise [Bestle94] zu entnehmen.

Mit diesen beiden Sätzen können im nächsten Abschnitt die Reaktionskräfte und -momente über das Prinzip der virtuellen Leistung eliminiert werden.

2.1.4 Prinzip der virtuellen Leistung

Da lokal die Richtung der freien Bewegung und der Bindungen orthogonal sind, tragen die Reaktionskräfte und -momente nicht zur Bewegung bei. Die Projektion der Reaktionskräfte und -momente auf die freien Richtungen führt auf das Prinzip der verschwindenden virtuellen Leistung der Reaktionskräfte und -momente, siehe [Seifried14]. Dazu werden analog zu Gl. (2.11) die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta' \mathbf{v}_i$ und $\delta' \boldsymbol{\omega}_i$ als

$$\delta' t = 0, \quad \delta' \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}, \quad \delta' \boldsymbol{\omega}_i \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \delta' \mathbf{r}_i = \delta' \mathbf{s}_i = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

eingeführt, welche gedachte infinitesimale Änderungen der Geschwindigkeit bei festgehaltener Zeit und Lage darstellen. Damit folgt der Satz über das Verschwinden der virtuellen Leistung der Reaktionskräfte bei holonomen Bindungen nach [Bestle94] zu

$$\delta' P^r = \sum_{i=1}^p (\delta' \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}_i^r + \delta' \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{\ell}_i^r) = 0. \quad (2.18)$$

Die Aussage von Gl. (2.18) ist, dass die virtuelle Leistung der Reaktionskräfte und -momente für alle mit den Bindungen verträglichen virtuellen Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsänderungen verschwindet, siehe [Bestle94].

Werden die Gleichungen (2.9) und (2.10) nach den Reaktionskräften und -momenten umgestellt und in Gl. (2.18) eingesetzt, folgt das Prinzip der virtuellen Leistung, auch Jourdain'sches Prinzip genannt, zu

$$\sum_{i=1}^p \left(\delta' \mathbf{v}_i^T (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \delta' \boldsymbol{\omega}_i^T (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\ell}_i^e) \right) = 0. \quad (2.19)$$

Das Prinzip (2.19) ersetzt den Impuls- und Drallsatz sowie das Prinzip des Verschwindens der virtuellen Leistung (2.18) der Reaktionskräfte. Durch die Summation über alle p Körper ergeben sich die Bewegungsgleichungen für holonome MKS in Variationsform mit den virtuellen Geschwindigkeiten $\delta' \mathbf{v}_i$ und $\delta' \boldsymbol{\omega}_i$ die mit den Bindungen verträglich sein müssen.

Das Jourdain'sche Prinzip ist eng verwandt mit dem d'Alembertschen Prinzip, siehe [SchiehlenEberhard17]. Statt der virtuellen Geschwindigkeiten werden beim d'Alembertschen Prinzip die virtuellen Verschiebungen verwendet. In [Bestle94] wird gezeigt, dass bei holonomen Bindungen die virtuellen Geschwindigkeiten den gleichen Bedingungen gehorchen wie die virtuellen Verschiebungen. Daher können die virtuellen Verschiebungen im d'Alembertschen Prinzip gegen die virtuellen Geschwindigkeiten ausgetauscht werden.

Anschließend werden die Bewegungsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten formuliert. Die Jacobi-Matrizen der Translation und Rotation aus Gl. (2.2) und Gl. (2.6) beschreiben die Verbindung zwischen den virtuellen Verschiebungen sowie Verdrehungen und der Variation der verallgemeinerten Koordinaten bei skleronomen Bindungen über

$$\delta' \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{T,i} \delta' \dot{\mathbf{y}} \quad \text{und} \quad \delta' \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{R,i} \delta' \dot{\mathbf{y}}. \quad (2.20)$$

Somit beschreiben $\mathbf{J}_T$ und $\mathbf{J}_R$ die freien Bewegungsrichtungen. Damit können die Bewegungsgleichungen (2.19) in Variationsform nach dem Einarbeiten der kinematischen Beziehungen (2.7) und (2.8) formuliert werden als

$$\begin{aligned} \delta' \dot{\mathbf{y}}^T \sum_{i=1}^p \left(\mathbf{J}_{T,i}^T (m_i \mathbf{J}_{T,i} \ddot{\mathbf{y}} + m_i \bar{\mathbf{a}}_i - \mathbf{f}_i^e) \right. \\ \left. + \mathbf{J}_{R,i}^T (\mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R,i} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{I}_i \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\ell}_i^e) \right) = 0, \quad \forall \delta' \dot{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Da die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta' \dot{\mathbf{y}}$ unabhängig voneinander sind, können die Bewegungsgleichungen von holonomen MKS dann formuliert werden als

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\bar{\mathbf{k}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \bar{\bar{\mathbf{g}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad (2.22)$$

mit der verallgemeinerten Massenmatrix $\bar{\bar{\mathbf{M}}} \in \mathbb{R}^{f \times f}$, dem Vektor $\bar{\bar{\mathbf{k}}} \in \mathbb{R}^f$ der verallgemeinerten Coriolis-, Kreisel- und Zentrifugalkräfte und dem Vektor $\bar{\bar{\mathbf{g}}} \in \mathbb{R}^f$

der verallgemeinerten eingprägten Kräfte und Momente, siehe [Seifried14].

Zur numerischen Lösung kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.22) bei nicht singulärer Massenmatrix in Zustandsform überführt werden. Dazu wird der Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\mathbf{y}^T \quad \dot{\mathbf{y}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2f}$ eingeführt. Damit folgen die Bewegungsgleichungen als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung im Zustandsraum zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} (\bar{\bar{\mathbf{g}}} - \bar{\bar{\mathbf{k}}}) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.23)$$

welche mit Standardmethoden für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung gelöst werden können, siehe [Bestle94, Seifried14].

2.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Werden die starren MKS aus Abschnitt 2.1 um flexible Körper erweitert, so führt dies zu FMKS. In diesem Abschnitt werden zunächst die zur Beschreibung von FMKS benötigten kontinuumsmechanischen Grundlagen kurz erklärt, siehe [Bathe96, Shabana05, Shabana18] für genauere Ausführung. Die Bewegung eines Körpers wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte P beschrieben. Nach Abbildung 2.2 wird der materielle Punkt in der undeformierten Konfiguration Ω_0 zum Zeitpunkt t_0 mit dem Vektor $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t_0)$ beschrieben. In der aktuellen, deformierten Konfiguration Ω lautet die aktuelle Lage eines Punkts P

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, t), \quad (2.24)$$

mit dem Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$. Dieser Verschiebungsvektor enthält Anteile aus der Starrkörperbewegung und Anteile, die aus der Verformung des Körpers resultieren, siehe [Seifried14]. Diese Verformungsanteile können zum Beispiel mit dem symmetrischen Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^T = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{E}) \quad (2.25)$$

in der Referenzkonfiguration berechnet werden. Dabei ist $\mathbf{F}$ der Deformationsgradient

$$F_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial R_j} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3. \quad (2.26)$$

Die Elemente des Green-Lagrange-Verzerrungstensor können alternativ über den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ angegeben werden als

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} + \frac{\partial u_j}{\partial R_i} + \frac{\partial u_k}{\partial R_i} \frac{\partial u_k}{\partial R_j} \right) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

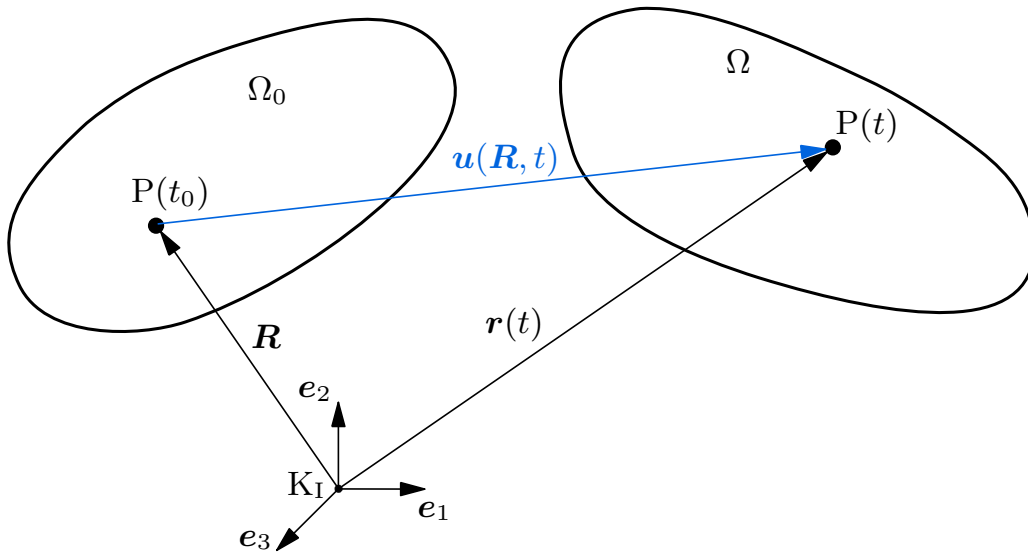


Abbildung 2.2: Bewegung eines deformierbaren Körpers

In vielen Anwendungsfällen können die Verschiebungen als klein angenommen werden, weshalb gilt

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right| \ll 1. \quad (2.28)$$

Mit dieser Annahme können die nichtlinearen Anteile in Gl. (2.27) vernachlässigt werden. Außerdem sind die Ableitungen bezüglich der Referenz- und der aktuellen Konfiguration äquivalent, siehe [Lehner07, Seifried14]. Daraus folgt der symmetrische lineare Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T$ mit den Komponenten

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right). \quad (2.29)$$

Diese Schritte werden als geometrische oder kinematische Linearisierung bezeichnet, siehe [Altenbach12, SchwertassekWallrapp99].

Zur Vereinfachung der Schreibweise können durch Umstellen des Green-Lagrange-Verzerrungstensors und des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ jeweils die unabhängigen Einträge in Vektoren zusammengefasst werden zu

$$\widehat{\mathbf{G}} = [G_{11} \quad G_{22} \quad G_{33} \quad 2G_{12} \quad 2G_{23} \quad 2G_{31}]^T, \quad (2.30)$$

und

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}]^T. \quad (2.31)$$

Diese Darstellung wird als Voigt-Notation bezeichnet, siehe [Altenbach18]. Mit den Differentialoperatoren, siehe [SchwertassekWallrapp99],

$$\mathbf{L}_L = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 \partial_1 & \partial_1 u_2 \partial_1 & \partial_1 u_3 \partial_1 \\ \partial_2 u_1 \partial_2 & \partial_2 u_2 \partial_2 & \partial_2 u_3 \partial_2 \\ \partial_3 u_1 \partial_3 & \partial_3 u_2 \partial_3 & \partial_3 u_3 \partial_3 \\ \partial_1 u_1 \partial_2 + \partial_2 u_1 \partial_1 & \partial_1 u_2 \partial_2 + \partial_2 u_2 \partial_1 & \partial_1 u_3 \partial_2 + \partial_2 u_3 \partial_1 \\ \partial_2 u_1 \partial_3 + \partial_3 u_1 \partial_2 & \partial_2 u_2 \partial_3 + \partial_3 u_2 \partial_2 & \partial_2 u_3 \partial_3 + \partial_3 u_3 \partial_2 \\ \partial_3 u_1 \partial_1 + \partial_1 u_1 \partial_3 & \partial_3 u_2 \partial_1 + \partial_1 u_2 \partial_3 & \partial_3 u_3 \partial_1 + \partial_1 u_3 \partial_3 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

wobei die Abkürzung ∂_i für $\partial_i/\partial R_i$ steht, kann die Beziehung zwischen Verzerrung und Verschiebung im nichtlinearen Fall ausgedrückt werden durch

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_L \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (2.33)$$

und im linearen Fall durch

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_L \mathbf{u}. \quad (2.34)$$

Die Differentiation von Gl. (2.33) liefert die Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\hat{\mathbf{G}}}$ zu

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{L}_L \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{L}}_N(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}_L \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.35)$$

wobei nach [SchwertassekWallrapp99] $\dot{\mathbf{L}}_N(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}}$ gilt. Für die linearen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ gilt analog

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{L}_L \dot{\mathbf{u}}. \quad (2.36)$$

Durch die äußere Krafteinwirkung wirken im Inneren eines Körpers Spannungen. Diese Spannungen werden ermittelt, indem ein beliebiger Schnitt durch den Körper gelegt wird. Der Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}$ entlang dieser Schnittebene ist in der aktuellen Konfiguration definiert über

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da}. \quad (2.37)$$

Auf ein kleines Flächenelement Δa wirkt der resultierende Kraftvektor $\Delta \mathbf{f}$. Der Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}$ hängt im Allgemeinen von Ort, Zeit und der Orientierung $\mathbf{n}$

der Schnittebene ab, siehe [Bathe96]. Aus der Gleichgewichtsbetrachtung folgt für den Spannungsvektor zusammen mit dem Cauchyschen Spannungstensor $\mathbf{T}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{nT} = \mathbf{Tn}. \quad (2.38)$$

Der Cauchysche Spannungstensor ist symmetrisch, wenn wie hier angenommen keine Momentenspannungen auftreten. Nach [Eberhard00] ist eine alternative Spannungsdefinition zur Formulierung von Materialgleichungen sinnvoll. Für die spätere Verwendung in der Impulsbilanz wird ein Flächenelement dA mit der Normalenrichtung $\mathbf{N}$ und dem wirkenden Kraftvektor $d\mathbf{f}$ in der Referenzkonfiguration betrachtet. Der Kraftvektor $d\mathbf{f} = \mathbf{Tn} da$ in der aktuellen Konfiguration wird durch die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ verursacht. Gleichsetzen mit dem Kraftvektor $d\mathbf{f} = \mathbf{P}_1 \mathbf{N} dA$, welcher für diese Verformung in der Referenzkonfiguration wirken müsste, liefert den Zusammenhang

$$\mathbf{Tn} da = \mathbf{T} \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = \mathbf{P}_1 \mathbf{N} dA. \quad (2.39)$$

Damit können die Kraftvektoren $d\mathbf{f}$ der aktuellen Konfiguration auf die Referenzkonfiguration bezogen werden. Dieser Zusammenhang kann mit dem Deformationsgradient $\mathbf{F}$ und dem infinitesimalen Flächenelement dA formuliert werden, siehe [Altenbach18]. In Gl. (2.39) wird mit dem Tensor $\mathbf{P}_1$ der 1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor als

$$\mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.40)$$

eingeführt. Dieser ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Die Eigenschaft der Symmetrie kann nach [Altenbach18] durch die symmetrische Modifikation von $\mathbf{P}_1$ hergestellt werden zu

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.41)$$

und führt zum 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\mathbf{P}_2$.

Der Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und Verformungszustand wird über die konstitutiven Gleichungen, auch als Materialmodell bezeichnet, hergestellt. Für homogenes elastisches Materialverhalten kann mit dem Green-Lagrange-Verzerrungstensor aus Gl. (2.25) und dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor aus Gl. (2.41) die allgemeine konstitutive Gleichung

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(\mathbf{G}) \quad (2.42)$$

formuliert werden. Im Weiteren wird angenommen, dass der Körper in der Referenzkonfiguration spannungsfrei ist und isotropes Materialverhaltens vorliegt. Mit der Beschränkung auf kleine Verformungen kann das Materialmodell mit dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor formuliert werden als

$$\mathbf{P}_2 = 2\mu \mathbf{G} + \lambda \text{Spur}(\mathbf{G}) \mathbf{E} = \mathbf{C} : \mathbf{G}, \quad (2.43)$$

2.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

mit der Elastizitätsmatrix $\mathbf{C}$ und den Lamé-Konstanten

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.44)$$

Dabei beschreibt E den Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl. Das linearisierte Materialmodell in Gl. (2.43) stellt die Verbindung zwischen den Spannungen und Verzerrungen eines elastischen Körpers her.

Analog zu Gl. (2.30) kann der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor formuliert werden als

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = [P_{211} \quad P_{222} \quad P_{233} \quad P_{212} \quad P_{223} \quad P_{231}]^T. \quad (2.45)$$

Damit kann die konstitutive Gleichung (2.43) mit der Elastizitätsmatrix oder Materialmatrix $\hat{\mathbf{C}}$ als

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{G}} \quad (2.46)$$

geschrieben werden, wobei sich $\hat{\mathbf{C}}$ folgendermaßen zusammensetzt

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Die Bewegungsgleichungen beschreiben die Änderung des Körpers aufgrund externer Kräfte. Unter Vernachlässigung von thermodynamischen Effekten kann diese Änderung beschrieben werden über drei Bilanzgleichungen: Die Massenbilanz, die Impulsbilanz und die Drehimpulsbilanz.

Für die Massenbilanz gilt, dass die Masse in der Referenzkonfiguration Ω_0 und der aktuellen Konfiguration Ω gleich ist. Mit den Dichten ρ_0 und ρ in der Referenzkonfiguration und in der aktuellen Konfiguration sowie dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ aus Gl. (2.26) kann die Massenbilanz formuliert werden als

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, dV = \int_{\Omega} \rho \, dv = \int_{\Omega_0} \rho \det(\mathbf{F}) \, dV. \quad (2.48)$$

Die Impulsbilanz besagt, dass im Inertialsystem die zeitliche Änderung des Gesamtimpuls gleich der Summe der wirkenden Volumen- und Oberflächenkräfte

ist. Formuliert in der Referenzkonfiguration lautet die differentielle Form der Impulsbilanz nach [Seifried14]

$$\rho_0 \mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{P}_1) + \rho_0 \mathbf{b}_0, \quad (2.49)$$

mit der absoluten Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$ bezüglich des Inertialsystems, dem Vektor $\mathbf{b}_0$ der Volumenkräfte und der Divergenz des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors $\operatorname{div}(\mathbf{P}_1) = (\partial P_{1,ji} / \partial R_i) \mathbf{e}_j$ mit $i, j = 1, 2, 3$. Die Drehimpulsbilanz, auch Drallbilanz genannt, sagt aus, dass die Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtdrehimpulses bezüglich des Inertialsystems dem gesamten Moment aller extern wirkenden Oberflächen- und Volumenkräften bezüglich des Inertialsystems entspricht, siehe [Altenbach18, Seifried14]. Daraus folgt die Symmetrie der Spannungstensoren

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2^T. \quad (2.50)$$

Gleichung (2.49) wird auch als starke Form der Bewegungsgleichungen bezeichnet, siehe [Eberhard00]. Die starke Form ist eine punktweise Beschreibung der Bewegung des elastischen Körpers. Neben den Bilanzgleichungen muss die konstitutive Gleichung (2.43) sowie die Anfangs- und Randbedingungen erfüllt sein, damit das Anfangs-Randwert-Problem vollständig definiert ist. Dazu müssen die Verschiebungsrandbedingungen, auch wesentliche Randbedingungen genannt,

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2.51)$$

und die Spannungsrandbedingungen, auch natürliche Randbedingungen genannt,

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{P}_1 \mathbf{N} \quad \text{auf } \Gamma_{q0}, \quad (2.52)$$

dargestellt in Abbildung 2.3, für alle Punkte auf der Oberfläche Γ des Kontinuums erfüllt sein. Zusätzlich müssen die Anfangsbedingungen der Lage und Geschwindigkeit für $t = 0$ mit

$$\mathbf{R} - \mathbf{r}(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(\mathbf{R}, 0) = \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

berücksichtigt werden.

Eine analytische Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen ist oftmals nicht möglich weshalb auf Näherungsverfahren zurückgegriffen wird. Zur näherungsweise numerischen Lösung des Problems wird oft die schwache Form verwendet, welche eine integrale Beschreibung des gesamten Körpers darstellt. Zur Herleitung der schwachen Form der Bewegungsgleichungen aus der starken Form wird Gl. (2.49), beschrieben in der Referenzkonfiguration Ω_0 verwendet, siehe [Eberhard00]. Skalares Multiplizieren der Impulsbilanz (2.49) mit einer vektoriellen Testfunktion $\mathbf{w}$ und anschließende Integration über Ω_0 liefert

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \mathbf{w}^T dV = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\mathbf{P}_1) \mathbf{w}^T dV. \quad (2.54)$$

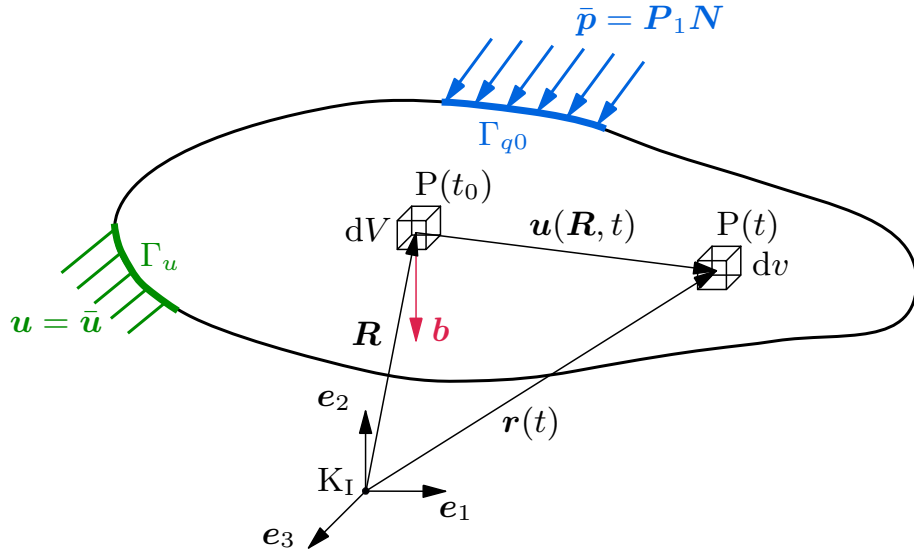


Abbildung 2.3: Beschreibung eines deformierbaren Körpers

Nach [Eberhard00, Wriggers01] folgt durch partielle Integration mit den Spannungsrandbedingungen $\bar{\mathbf{p}}$ aus Gl. (2.52) und der Testfunktion $\mathbf{w}$ aus Gl. (2.54) die Variationsgleichung

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \mathbf{w}^T dV = \int_{\Gamma_{q0}} \bar{\mathbf{p}} \mathbf{w}^T dA - \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_1 : \text{grad}(\mathbf{w})^T dV. \quad (2.55)$$

Für jede mit den Randbedingungen verträgliche Variation der Geschwindigkeit $\delta' \mathbf{v} = \delta' \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ als Testfunktion $\mathbf{w}$ kann die schwache Form aus Gl. (2.55) als Jourdain'sches Prinzip interpretiert werden, siehe Abschnitt 2.1.4. Dieses Prinzip wird oft im Zusammenhang mit der Methode der FMKS verwendet, da sich die virtuellen Geschwindigkeiten oftmals bequemer ermitteln lassen als die virtuellen Verschiebungen, siehe [SchwertassekWallrapp99].

Wird für die Testfunktion das virtuelle Geschwindigkeitsfeld $\delta' \mathbf{v}$ verwendet, kann der letzte Term in Gl. (2.55) geschrieben werden als

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_1 : \text{grad}(\delta' \mathbf{v})^T dV, \quad (2.56)$$

und anschließend mit der Beziehung $\text{grad}(\delta' \mathbf{v})^T = \delta' \dot{\mathbf{F}}$ umgeformt werden zu

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_1 : \delta' \dot{\mathbf{F}} dV, \quad (2.57)$$

siehe [Lehner07]. Wird anschließend Gl. (2.41) eingesetzt und das Skalarprodukt der Tensoren umgestellt, folgt

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{F} \mathbf{P}_2) : \delta' \dot{\mathbf{F}} \, dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_2 : (\mathbf{F}^T \delta' \dot{\mathbf{F}}) \, dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_2 : \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta' \dot{\mathbf{F}} + \delta' \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F})}_{\delta' \dot{\mathbf{G}}} \, dV, \quad (2.58)$$

oder in Matrixschreibweise nach Gl. (2.43) mit dem linearen Materialmodell aus Gl. (2.46) und der Verzerrungsgeschwindigkeit aus Gl. (2.35)

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_2 : \delta' \dot{\mathbf{G}} \, dV = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{P}}_2 \delta' \dot{\mathbf{G}}^T \, dV = \int_{\Omega_0} \delta' \dot{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{G}} \, dV, \quad (2.59)$$

wobei $\delta' \dot{\mathbf{G}}$ die virtuelle Verzerrungsgeschwindigkeit des Green-Lagrange-Verzerrungstensors ausdrückt. Nach dem Übergang auf die Matrixschreibweise kann das Jourdain'sche Prinzip nach [Bathe96] dann folgendermaßen formuliert werden

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \delta' \mathbf{v}^T \mathbf{a} \, dV}_{\delta' P_m} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta' \dot{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{G}} \, dV}_{\delta' P_e} = \underbrace{\int_{\Gamma_{q0}} \delta' \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{p}} \, dA}_{\delta' P_p} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \delta' \mathbf{v}^T \mathbf{b} \, dV}_{\delta' P_b}. \quad (2.60)$$

Dabei ist $\delta' P_m$ die virtuelle Leistung der Trägheitsterme, $\delta' P_e$ die virtuelle Leistung der Verzerrungen und $\delta' P_p$ bzw. $\delta' P_b$ die virtuelle Leistung der Oberflächen- und Volumenkräfte. Die Kernaussage des Jourdain'schen Prinzips in Gl. (2.60) ist, dass die virtuelle Leistung der Zwangskräfte für mit den Bindungen verträglichen Variationen der Geschwindigkeit verschwindet, da die Reaktionskräfte orthogonal zu den zulässigen Variationen sind, siehe [SchwertassekWallrapp99].

2.3 Finite-Elemente-Bewegungsgleichungen

Die Lösung von Gl. (2.60) ist der Verschiebungsverlauf $\mathbf{r}$ und der Geschwindigkeitsverlauf $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Sie muss für alle Variationen $\delta \mathbf{v}$ das Jourdain'sche Prinzip erfüllen. Eine exakte Lösung von Gl. (2.60) ist jedoch oftmals nicht möglich, weshalb mit Hilfe von Ansatzfunktionen eine Näherungslösung bestimmt wird. Zur Bestimmung dieser Ansatzfunktionen wird das Galerkin-Verfahren eingesetzt, siehe [Hughes87]. Dabei erfüllen die Ansatzfunktionen für Verschiebung $\mathbf{u}$ und virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ die wesentlichen Randbedingungen.

Da es bei kompliziert berandeten Gebieten schwierig ist globale Ansatzfunktionen zu finden, wird bei der FEM das gesamte Gebiet in kleine einfach berandete Gebiete unterteilt. Für diese geometrisch einfachen finiten Elemente können die

Ansatzfunktionen einfach bestimmt werden. Ein finites Element k besteht demnach aus den Ansatzfunktionen Φ_k und den unbekannten elastischen Knotenverschiebungen $\mathbf{q}_{e,k}$. Die Verschiebungen im k -ten Element

$$\mathbf{u}_k = \Phi_k \mathbf{q}_{e,k} \quad (2.61)$$

werden über einen Ritz-Ansatz als Linearkombination von bekannten Ansatzfunktionen Φ_k und den unbekannten Knotenverschiebungen $\mathbf{q}_{e,k}$ ermittelt. Dabei sind die Ritz-Funktionen in der Matrix der Ansatzfunktionen enthalten, während die Ritz-Parameter die unbekannten Knotenverschiebungen in $\mathbf{q}_{e,k}$ sind, siehe [Bathe96]. Für jedes finite Element ergibt sich eine lokale Bewegungsgleichung, die anschließend zum Gesamtsystem zusammengesetzt werden. Benachbarte Elemente besitzen gemeinsame Knoten und somit sind die Ansatzfunktionen an den Elementgrenzen gekoppelt. Damit ist die Stetigkeit des Verschiebungsfeldes beim Übergang zwischen den Elementgrenzen gewährleistet. Als Ansatzfunktionen, auch Formfunktionen genannt, eignen sich zum Beispiel Polynome mit verschieden hohem Polynomgrad, siehe [KnotheWessels17]. Je höher dieser Polynomgrad ist, desto höher ist die Genauigkeit, da mit höherem Polynomgrad die Anzahl der Knoten auf den Elementen zunimmt. Jedoch steigt mit dem Polynomgrad auch die Rechenzeit, siehe [KnotheWessels17]. Eine Übersicht über gängige Elementtypen ist [Bathe96, Eberhard00] zu entnehmen.

Die Verzerrungen eines Elements werden im linearen Fall unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme nach Gl. (2.34) und aus den Verschiebungen Gl. (2.61) bestimmt zu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{L}_L \Phi_k \mathbf{q}_{e,k}, \quad (2.62)$$

mit dem Differentialoperator $\mathbf{L}_L$ aus Gl. (2.32). Nach dem Bubnov-Galerkin-Verfahren sind die Ansätze für die Verschiebung und für die Variation der Verschiebung die gleichen, nämlich

$$\delta \mathbf{u}_k = \Phi_k \delta \mathbf{q}_{e,k} \quad (2.63)$$

siehe [Bathe96]. Für die Variation der Dehnungen gilt

$$\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_L \Phi_k \delta \mathbf{q}_{e,k}. \quad (2.64)$$

Werden die Gleichungen (2.61) bis (2.63) in das Jourdain'sche Prinzip in Gl. (2.60) unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \rho_0 (\Phi_k \delta' \dot{\mathbf{q}}_{e,k})^T \Phi_k \ddot{\mathbf{q}}_{e,k} dV + \int_{\Omega_0} \delta' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \\ &= \int_{\Gamma_{q0}} (\Phi_k \delta' \dot{\mathbf{q}}_{e,k})^T \bar{\mathbf{p}} dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 (\Phi_k \delta' \dot{\mathbf{q}}_{e,k})^T \mathbf{b} dV, \end{aligned} \quad (2.65)$$

bei Beschränkung auf kleine Verformungen. Da die virtuellen Größen $\delta' \dot{\mathbf{q}}_{e,k}$ voneinander unabhängig sind gilt für Gl. (2.65)

$$\delta' \dot{\mathbf{q}}_{e,k}^T \left(\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{\Phi}_k \ddot{\mathbf{q}}_{e,k} dV + \int_{\Omega_0} (\mathbf{L}_L \mathbf{\Phi}_k)^T \widehat{\mathbf{C}} (\mathbf{L}_L \mathbf{\Phi}_k \mathbf{q}_{e,k}) dV - \underbrace{\int_{\Gamma_{q0}} \mathbf{\Phi}_k^T \bar{\mathbf{p}} dA}_{=\mathbf{f}_{e,k}^p} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{b} dV}_{=\mathbf{f}_{e,k}^b} \right) = 0, \quad (2.66)$$

mit den Oberflächen- und Volumenkräften $\mathbf{f}_{e,k}^p$ bzw. $\mathbf{f}_{e,k}^b$. Sind die virtuellen Größen $\delta' \dot{\mathbf{q}}_{e,k}$ voneinander unabhängig, so ergeben sich die linearen FE-Bewegungsgleichungen eines freien Körpers schließlich indem alle Elemente zusammengefasst werden zu

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \underbrace{\mathbf{f}_e^p + \mathbf{f}_e^b}_{\mathbf{f}_e}, \quad (2.67)$$

mit der Massenmatrix $\mathbf{M}_e$ und der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_e$. Damit wird Gl. (2.66) für alle Elemente erfüllt. Sollen dissipative Effekte berücksichtigt werden, so kann Gl. (2.67) um die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}_e$ erweitert werden zu

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e, \quad (2.68)$$

wobei die Bestimmung der Einträge von $\mathbf{D}_e$ in Abschnitt 2.6.3 beschrieben wird.

Zur Herleitung der FE-Bewegungsgleichungen wird vorausgesetzt, dass die virtuellen Größen voneinander unabhängig sind. Sollen Zwangsbedingungen, wie zum Beispiel Verschiebungsrandbedingungen, berücksichtigt werden, so sind die virtuellen Größen nicht mehr unabhängig. Zur Einbringung dieser Zwangsbedingungen in Gl. (2.67) wird der Vektor der Knotenverschiebungen aufgeteilt in unbekannte Verschiebungen $\mathbf{q}_{e,u}$ und bekannte Verschiebungen $\mathbf{q}_{e,b}$ aus den Randbedingungen. Die Bewegungsgleichungen eines gebundenen FE-Systems ergeben sich nach dem Aufteilen von Gl. (2.67) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{e,uu} & \mathbf{M}_{e,ub} \\ \mathbf{M}_{e,bu} & \mathbf{M}_{e,bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{e,u} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{e,b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e,uu} & \mathbf{K}_{e,ub} \\ \mathbf{K}_{e,bu} & \mathbf{K}_{e,bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{e,u} \\ \mathbf{q}_{e,b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{e,u} \\ \mathbf{f}_{e,b} \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{M}_{e,uu} \ddot{\mathbf{q}}_{e,u} + \mathbf{K}_{e,uu} \mathbf{u}_{e,u} = \underbrace{\mathbf{f}_{e,u} - \mathbf{M}_{e,ub} \ddot{\mathbf{q}}_{e,b} - \mathbf{K}_{e,ub} \mathbf{q}_{e,b}}_{\bar{\mathbf{f}}_{e,u}}. \quad (2.70)$$

Die Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{e,b}$ können mit den Verschiebungen, welche aus Gl. (2.69) bestimmt werden, berechnet werden. Die Strukturen der Bewegungsgleichungen des freien Systems und des gebundenen Systems sind gleich, siehe [Bathe96].

Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_e$ eines freien Systems ist positiv semi-definit. Die Anzahl der Nulleigenwerte entspricht der Anzahl der Starrkörperfreiheitsgrade. Bei kinematisch bestimmt gelagerten Strukturen ist die Matrix $\mathbf{K}_e$ positiv definit.

2.4 Ansatz des mitbewegten Referenzsystems

In vielen Anwendungsgebieten der Maschinendynamik treten kleine und linear elastische Verformungen der Körper auf, welche nicht vernachlässigt werden dürfen. Mit dem Ansatz des mitbewegten Referenzsystems können diese elastischen Verformungen der Körper effizient in ein MKS aus Abschnitt 2.1 eingebaut werden. Im Folgenden werden die Grundlagen der Kinematik und der Kinetik eines flexiblen Körpers aufgezeigt. Eine detaillierte Herleitung kann [SchwertassekWallrapp99, Shabana05] entnommen werden.

2.4.1 Kinematik

Beim Ansatz des mitbewegten Referenzsystems werden zwei Koordinatensätze verwendet, um die Bewegung eines flexiblen Körpers zu beschreiben. Ein Koordinatensatz beschreibt die große translatorische und rotatorische Bewegung des körperbezogenen Referenzsystems K_R , während der andere Koordinatensatz die kleine Verformung des flexiblen Körpers relativ zu diesem Referenzsystem K_R beschreibt, siehe Abbildung 2.4. Der Vektor der absoluten Position eines Punktes P eines flexiblen Körpers kann dargestellt werden als

$$\mathbf{r}_{IP} = \mathbf{r}_{IR} + \mathbf{r}_{RP} = \mathbf{r}_{IR} + \mathbf{c}_{RP} + \mathbf{u}_P, \quad (2.71)$$

mit der großen nichtlinearen Bewegung $\mathbf{r}_{IR}$ des Referenzsystems und der Position $\mathbf{r}_{RP}$ von Punkt P im aktuellen Zustand relativ zum Referenzsystem. Die relative Position $\mathbf{r}_{RP}$ setzt sich wiederum zusammen aus der relativen Position $\mathbf{c}_{RP}$ in der undeformierten Konfiguration und der elastischen Deformation $\mathbf{u}_P$. Die Orientierung eines Koordinatensystems K_P , welches starr mit dem Punkt P verbunden ist, gegenüber dem Inertialsystem kann mit der Drehmatrix $\mathbf{S}_{IP}$ beschrieben werden. Diese kann dargestellt werden als

$$\mathbf{S}_{IP} = \mathbf{S}_{IR}\mathbf{S}_{RP}, \quad (2.72)$$

mit der Drehmatrix $\mathbf{S}_{IR}$, welche die Orientierung des Referenzsystems gegenüber dem Inertialsystem beschreibt und der Drehmatrix $\mathbf{S}_{RP}$, welche die relative Orientierung vom punktfesten Koordinatensystem K_P gegenüber dem Referenzsystem K_R beschreibt. Unter der Annahme von kleinen Rotationen, die im Gültigkeitsbereich der linearen Elastizitätstheorie liegen, kann nach [SchwertassekWallrapp99] die Drehmatrix $\mathbf{S}_{RP}$ dargestellt werden als

$$\mathbf{S}_{RP} = \mathbf{S}_{RP}^0 \left(\mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_P \right), \quad (2.73)$$

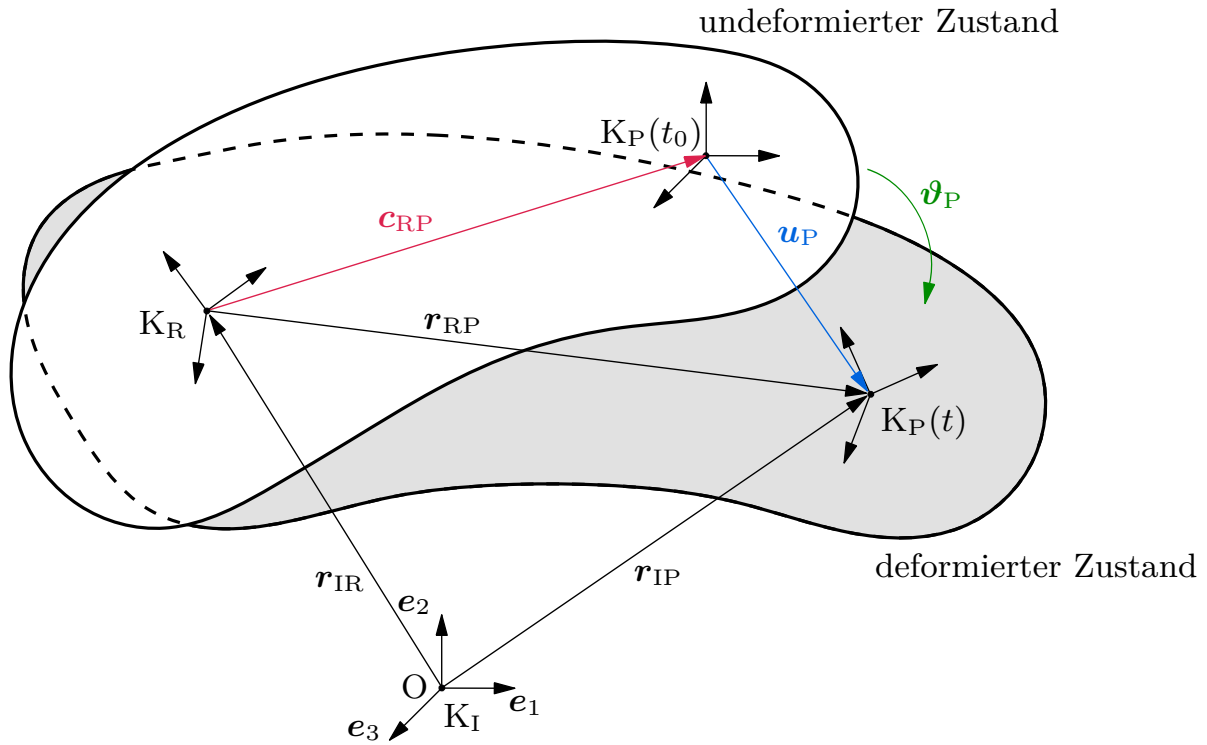


Abbildung 2.4: Kinematik eines flexiblen Körpers

mit dem konstanten Anteil $\mathbf{S}_{RP}^0$, der die Orientierung von K_P im undeformierten Zustand beschreibt, und dem Anteil ϑ_P aus der Deformation des Körpers.

Zur Beschreibung des elastischen Körpers wird sowohl die elastische Verformung $\mathbf{u}_P$ als auch die kleine elastische Rotation ϑ_P eines Punkts P mit Hilfe eines globalen Ritz-Ansatzes approximiert

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_P(\mathbf{c}_{RP}, t) &= \Phi_P(\mathbf{c}_{RP}) \mathbf{q}_e(t), \\ \vartheta_P(\mathbf{c}_{RP}, t) &= \Psi_P(\mathbf{c}_{RP}) \mathbf{q}_e(t).\end{aligned}\tag{2.74}$$

Der Vektor $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^{n_q}$ enthält die elastischen Koordinaten während die Matrizen Φ_P und Ψ_P die globalen Ansatzfunktionen der Verformung und Rotation, welche am Punkt P ausgewertet werden, enthalten. Mit Hilfe dieses Ansatzes werden die positions- und zeitabhängigen Anteile voneinander getrennt.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen eines freien elastischen Körpers mit dem Ansatz des mitbewegten Referenzsystems werden zum einen die Geschwindigkeit und Beschleunigung der absoluten Position $\mathbf{r}_{IP}$ und zum anderen die absolute Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung des Punkts P benötigt. Beim Ansatz des mitbewegten Referenzsystems werden die kinematischen Größen zur Beschreibung des elastischen Körpers bezüglich des Inertialsystems K_I , dargestellt im Referenzsystem K_R , benötigt. Daher können die zeitlichen Ableitungen nicht direkt durch reines Differenzieren der Koordinaten berechnet werden, sie-

2.4 Ansatz des mitbewegten Referenzsystems

he [Seifried14]. Im Weiteren werden Vektoren dargestellt im Inertialsystem K_I mit dem Index I bezeichnet, während Vektoren dargestellt im Referenzsystem K_R mit dem Index R bezeichnet werden.

Der Zusammenhang zwischen der Darstellung eines Vektors $\mathbf{x}$ im Inertial- und Referenzsystem wird über die Transformationsmatrix $\mathbf{S}_{IR}$ hergestellt, wobei

$${}^I\mathbf{x} = \mathbf{S}_{IR} {}^R\mathbf{x} \quad \text{und} \quad {}^R\mathbf{x} = \mathbf{S}_{IR}^T {}^I\mathbf{x}, \quad (2.75)$$

gilt. Die zeitliche Ableitung von ${}^I\mathbf{x}$ relativ zum Inertialsystem ist definiert als

$${}^I\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} {}^I\mathbf{x}, \quad (2.76)$$

während die zeitliche Ableitung ${}^R\dot{\mathbf{x}}$, aus dem Referenzsystem beobachtet, definiert ist als

$${}^R\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} {}^R\mathbf{x}. \quad (2.77)$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Ableitungen kann nach [MagnusMüller90] hergestellt werden über

$$\begin{aligned} {}^I\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} {}^I\mathbf{x} = \frac{d}{dt} (\mathbf{S}_{IR} {}^R\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \mathbf{S}_{IR} {}^R\mathbf{x} + \mathbf{S}_{IR} \frac{d}{dt} {}^R\mathbf{x}, \\ &\quad \text{mit } {}^R\mathbf{x} = \mathbf{S}_{IR}^T {}^I\mathbf{x} \text{ aus Gl. (2.75)} \\ &= \dot{\mathbf{S}}_{IR} \mathbf{S}_{IR}^T {}^I\mathbf{x} + \mathbf{S}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{x}} \\ &= {}^I\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^I\mathbf{x} + \mathbf{S}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dabei beschreibt ${}^I\boldsymbol{\omega}_{IR}$ die Winkelgeschwindigkeit des Referenzsystems gegenüber dem Inertialsystem, dargestellt im Inertialsystem. Der Zusammenhang aus Gl. (2.78) kann mit der Drehmatrix $\mathbf{S}_{IR}$ ins Referenzsystem transformiert werden und es folgt daraus die Ableitung von $\mathbf{x}$ bezüglich des Inertialsystems dargestellt im Referenzsystem zu

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{IR}^T {}^I\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} {}^R\mathbf{x} = \mathbf{S}_{IR}^T ({}^I\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^I\mathbf{x} + \mathbf{S}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \mathbf{S}_{IR}^T {}^I\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{S}_{IR} {}^R\mathbf{x} + \mathbf{S}_{IR}^T \mathbf{S}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{x}} \\ &= {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{x} + {}^R\dot{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Mit den Zusammenhängen aus den Gleichungen (2.75), (2.78) und (2.79) können im folgenden Abschnitt die kinematischen Größen zur Beschreibung eines elastischen Körpers formuliert werden.

Die Position eines Punktes P eines Körpers, dargestellt im Referenzsystem, kann mit Gl. (2.71) und Gl. (2.74) geschrieben werden als

$${}^R\mathbf{r}_{IP} = {}^R\mathbf{r}_{IR} + {}^R\mathbf{r}_{RP} = {}^R\mathbf{r}_{IR} + {}^R\mathbf{c}_{RP} + \boldsymbol{\Phi}_P \mathbf{q}_e. \quad (2.80)$$

Die absolute Geschwindigkeit von Punkt P, beschrieben im Referenzsystem, wird durch Ableiten von Gl. (2.80) im Inertialsystem berechnet. Aus dem Zusammenhang (2.79) folgt für ${}^R\mathbf{v}_{IP}$

$$\begin{aligned}
 {}^R\mathbf{v}_{IP} &= \frac{I_d}{dt} {}^R\mathbf{r}_{IP} = \frac{I_d}{dt} ({}^R\mathbf{r}_{IR} + {}^R\mathbf{r}_{RP}) = \frac{I_d}{dt} {}^R\mathbf{r}_{IR} + \frac{I_d}{dt} {}^R\mathbf{r}_{RP} \\
 &= \mathbf{S}_{IR}^T \frac{d}{dt} {}^I\mathbf{r}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP} + {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP} \\
 &= \underbrace{{}^R\mathbf{v}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP}}_{\mathbf{v}_f} + \underbrace{{}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP}}_{\mathbf{v}_r} \\
 &= {}^R\mathbf{v}_{IR} - {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{RP} {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} + {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP}.
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Die absolute Geschwindigkeit ${}^R\mathbf{v}_{IR}$ des Referenzsystems wird dabei aus Gl. (2.75) und Gl. (2.76) berechnet. Der Vektor der Führungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_f$ beschreibt die Geschwindigkeit eines Punkts P der fest mit dem Referenzsystem verbunden ist. Der Vektor $\mathbf{v}_r$ der Relativgeschwindigkeit dagegen beschreibt die Geschwindigkeit von Punkt P relativ zum Referenzsystem.

Die absolute Beschleunigung ${}^R\mathbf{a}_{IP}$ eines Punkts P, dargestellt im Referenzsystem, ergibt sich aus der Differentiation der Geschwindigkeit ${}^R\mathbf{v}_{IP}$ aus Gl. (2.81) zu

$$\begin{aligned}
 {}^R\mathbf{a}_{IP} &= \frac{I_d}{dt} ({}^R\mathbf{v}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP} + {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP}) \\
 &= \frac{I_d}{dt} {}^R\mathbf{v}_{IR} + \frac{I_d}{dt} {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \frac{I_d}{dt} {}^R\mathbf{r}_{RP} + \frac{I_d}{dt} {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP} \\
 &= {}^R\mathbf{a}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} ({}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP} + {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP}) + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP} + {}^R\ddot{\mathbf{r}}_{RP} \\
 &= \underbrace{{}^R\mathbf{a}_{IR} + ({}^R\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR}) {}^R\mathbf{r}_{RP}}_{\mathbf{a}_f} + \underbrace{2{}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP}}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{{}^R\ddot{\mathbf{r}}_{RP}}_{\mathbf{a}_r},
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

mit ${}^R\mathbf{a}_{IR} = {}^R\dot{\mathbf{v}}_{IR} + {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} \times {}^R\mathbf{v}_{IR}$. Analog zu Gl. (2.81) bezeichnet der erste Term $\mathbf{a}_f$ die Führungsbeschleunigung und der letzte Term $\mathbf{a}_r$ die relative Beschleunigung von Punkt P vom Referenzsystem aus beobachtet. Der verbleibende Term $\mathbf{a}_c$ beschreibt die Coriolisbeschleunigung, siehe [MagnusMüller90, SchwertassekWallrapp99].

Die Winkelgeschwindigkeit von Punkt P folgt analog zu Gl. (2.80) aus der Winkelgeschwindigkeit des Referenzsystems und der relativen Winkelgeschwindigkeit zu

$${}^R\boldsymbol{\omega}_{IP} = {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} + {}^R\boldsymbol{\omega}_{RP}. \tag{2.83}$$

2.4 Ansatz des mitbewegten Referenzsystems

Analog zu Gl. (2.81) folgt durch Differentiation der Winkelgeschwindigkeit ${}^R\boldsymbol{\omega}_{IP}$ die Winkelbeschleunigung

$$\begin{aligned} {}^R\boldsymbol{\alpha}_{IP} &= \frac{I}{dt} {}^R\boldsymbol{\omega}_{IP} = \frac{I}{dt} ({}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} + {}^R\boldsymbol{\omega}_{RP}) \\ &= \mathbf{S}_{IR}^T \frac{d}{dt} {}^I\boldsymbol{\omega}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\boldsymbol{\omega}_{RP} + {}^R\dot{\boldsymbol{\omega}}_{RP} \\ &= {}^R\boldsymbol{\alpha}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\boldsymbol{\omega}_{RP} + {}^R\dot{\boldsymbol{\omega}}_{RP}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

mit ${}^R\boldsymbol{\alpha}_{IR} = {}^R\dot{\boldsymbol{\omega}}_{IR} + {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} \times {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} = {}^R\dot{\boldsymbol{\omega}}_{IR}$. Mit den Gleichungen (2.81), (2.82), (2.83) und (2.84) sind alle im weiteren Verlauf benötigten zeitlichen Ableitungen bestimmt.

Damit lassen sich die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung zur Beschreibung der Kinematik eines elastischen Körpers in den Variablen

$$\mathbf{z}_I = \begin{bmatrix} {}^R\mathbf{r}_{IR}(t) \\ {}^R\boldsymbol{\beta}_{IR}(t) \\ \mathbf{q}_e(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{II} = \begin{bmatrix} {}^R\mathbf{v}_{IR}(t) \\ {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_e(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{z}}_{II} = \begin{bmatrix} {}^R\dot{\mathbf{v}}_{IR}(t) \\ {}^R\dot{\boldsymbol{\omega}}_{IR}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_e(t) \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

zusammenfassen, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Mit diesen Variablen können die Lage, Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes P mit den Gleichungen (2.80), (2.83) und (2.82) eindeutig dargestellt werden als

$$\begin{aligned} {}^R\mathbf{r}_{IP} &= {}^R\mathbf{r}_{IR} + {}^R\mathbf{r}_{RP} = {}^R\mathbf{r}_{IR} + {}^R\mathbf{c}_{RP} + \boldsymbol{\Phi}_P \mathbf{q}_e, \\ {}^R\mathbf{v}_{IP} &= \mathbf{T}_{RP}^t \mathbf{z}_{II} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_{RP}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -{}^R\tilde{\mathbf{r}}_{RP} & \boldsymbol{\Phi}_P \end{bmatrix}, \\ {}^R\mathbf{a}_{IP} &= \mathbf{T}_{RP}^t \dot{\mathbf{z}}_{II} + \boldsymbol{\zeta}_{RP}^t \\ \text{mit} \quad \boldsymbol{\zeta}_{RP}^t &= {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{v}_{IR} + {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\mathbf{r}_{RP} + 2{}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\dot{\mathbf{r}}_{RP}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nach [Seifried14] können die Orientierung, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung mit den Gleichungen (2.73), (2.81) und (2.84) dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{IP} &= \mathbf{S}_{IR} \mathbf{S}_{RP}^0 \left(\mathbf{E} + \left(\widetilde{\boldsymbol{\Psi}_P \mathbf{q}_e} \right) \right), \\ {}^R\boldsymbol{\omega}_{IR} &= \mathbf{T}_{RP}^r \mathbf{z}_{II} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_{RP}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} & \boldsymbol{\Psi}_P \end{bmatrix}, \\ {}^R\boldsymbol{\alpha}_{IP} &= \mathbf{T}_{RP}^r \dot{\mathbf{z}}_{II} + \boldsymbol{\zeta}_{RP}^r \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\zeta}_{RP}^r = {}^R\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} {}^R\boldsymbol{\omega}_{RP}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Ableitung des Lagevektors $\mathbf{z}_I$ im Referenzsystem und dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{z}_{II}$ kann über die kinematische Beziehung

$$\dot{\mathbf{z}}_I = \mathbf{Z}(\mathbf{z}_I) \mathbf{z}_{II} \quad (2.88)$$

hergestellt werden, mit der lageabhängigen Transformationsmatrix $\mathbf{Z}(\mathbf{z}_I)$. Diese setzt sich folgendermaßen zusammen

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \tilde{\mathbf{r}}_{IR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

siehe [SchwertassekWallrappShabana99]. Dabei ist $\mathbf{Z}_r$ die Koeffizientenmatrix, welche die Winkelgeschwindigkeit mit den zeitlichen Ableitungen der Koordinaten zur Beschreibung der Orientierung des Referenzsystems in Beziehung setzt. Sie hängt ab von der Wahl der Orientierungsparametrisierung, siehe [SchiehlenEberhard17]. Die kinematischen Größen werden im Folgenden im Referenzsystem K_R angegeben, weshalb auf die Indizes I und R verzichtet wird.

2.4.2 Kinetik

Die Bewegungsgleichungen eines freien elastischen Körpers werden im Referenzsystem des Körpers entwickelt, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Zur Herleitung dieser Bewegungsgleichungen wird in dieser Arbeit das in Abschnitt 2.2 vorgestellte Jourdain'sche Prinzip und die kinematische Beschreibung aus Abschnitt 2.4.1 verwendet.

Mit der kinematischen Beschreibung aus Abschnitt 2.4.1 und dem Jourdain'schen Prinzip aus Gl. (2.60) folgt unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme die schwache Form der Bewegungsgleichungen für einen Körper nach

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \delta' \mathbf{v}_{IP}^T \mathbf{a}_{IP} dm}_{\delta' P_m} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta' \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dV}_{\delta' P_e} - \underbrace{\int_{\Gamma_0} \delta' \mathbf{v}_{IP}^T \bar{\mathbf{p}} dA}_{\delta' P_p} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta' \mathbf{v}_{IP}^T \mathbf{b} dm}_{\delta' P_b} = 0, \quad (2.90)$$

mit $dm = \rho_0 dV$ in der Referenzkonfiguration. Dabei beschreibt $\delta' P_m$ analog zu Gl. (2.60) die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte und $\delta' P_e$ die virtuelle Leistung der inneren Kräfte. Die virtuelle Leistung der Oberflächen- und Volumenkräfte wird mit $\delta' P_p$ und $\delta' P_b$ beschrieben. Mit $\mathbf{z}_{II}$ aus Gl. (2.85) und $\mathbf{v}_{IP}$ aus Gl. (2.86) folgt analog zu Gl. (2.20) für die virtuelle Geschwindigkeit eines Punktes P

$$\delta' \mathbf{v}_{IP} = \mathbf{T}_{RP}^t \delta' \mathbf{z}_{II}. \quad (2.91)$$

Beim Jourdain'schen Prinzip können die Integrale aus Gl. (2.90) mit den kinematischen Zusammenhängen aus den Gleichungen (2.86) und (2.87), den virtuellen Geschwindigkeiten $\delta' \mathbf{z}_{II}$ sowie den Variablen $\mathbf{z}_{II}$ und $\dot{\mathbf{z}}_{II}$ berechnet werden.

Generalisierte Massen

Die virtuelle Geschwindigkeit $\delta' \mathbf{z}_{II}$ aus Gl. (2.91) und die Beschleunigung $\mathbf{a}_{IP}$ aus Gl. (2.86) in das erste Integral von Gl. (2.90) eingesetzt, ergeben die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte

$$\delta' \mathbf{z}_{II}^T \left(\int_{\Omega_0} (\mathbf{T}_{RP}^t)^T \mathbf{T}_{RP}^t dm \dot{\mathbf{z}}_{II} + \int_{\Omega_0} (\mathbf{T}_{RP}^t)^T \boldsymbol{\zeta}_{RP}^t dm \right) = \delta' \mathbf{z}_{II}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}_{II} + \mathbf{h}_\omega), \quad (2.92)$$

wobei das erste Integral die Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_e) = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T \\ \Phi_P^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} & \Phi_P \end{bmatrix} dm, \quad (2.93)$$

beschreibt. Die symmetrische und positiv definite Massenmatrix $\mathbf{M}$ ist eine Funktion der elastischen Koordinaten $\mathbf{q}_e$, da $\mathbf{r}_{\text{RP}}$ ebenfalls von $\mathbf{q}_e$ abhängig ist, siehe Gl. (2.86). Nach der Matrixmultiplikation und der Auswertung der einzelnen Integrale folgt nach [SchwertassekWallrapp99] die Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_e) = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\mathbf{c}}^T(\mathbf{q}_e) & \mathbf{C}_t^T \\ m\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{q}_e) & \mathbf{I}(\mathbf{q}_e) & \mathbf{C}_r^T(\mathbf{q}_e) \\ \mathbf{C}_t & \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_e) & \mathbf{M}_e \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Dabei werden die einzelnen Elemente der Massenmatrix wie folgt berechnet. Für die Masse gilt

$$m\mathbf{E} = \int_{\Omega_0} \mathbf{E} dm. \quad (2.95)$$

Die Verformung des Körpers, ausgedrückt durch die elastischen Koordinaten, wird in der Berechnung des Schwerpunkts

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}_e) = \frac{1}{m} \int_{\Omega_0} \mathbf{r}_{\text{RP}} dm \quad (2.96)$$

berücksichtigt, wobei der Schwerpunkt relativ zum Referenzsystem beschrieben wird. Der Trägheitstensor des Körpers lautet

$$\mathbf{I}(\mathbf{q}_e) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T dm, \quad (2.97)$$

und die elastische Massenmatrix $\mathbf{M}_e$ kann berechnet werden über

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_0} \Phi_P^T \Phi_P dm. \quad (2.98)$$

Die Kopplung zwischen der Bewegung des Referenzsystems und der elastischen Verformung wird über die Matrizen $\mathbf{C}_t$ und $\mathbf{C}_r$ beschrieben. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t &= \int_{\Omega_0} \Phi_P^T dm, \\ \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_e) &= \int_{\Omega_0} \Phi_P^T \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T dm. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Das zweite Integral in Gl. (2.92) beschreibt die virtuelle Leistung der Zentrifugal- und Corioliskräfte

$$\mathbf{h}_\omega = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \\ \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \end{bmatrix} (\tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + \tilde{\omega}_{\text{IR}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\omega}_{\text{IR}} \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}) dm = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega\text{t}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{r}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{e}} \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Auch hier ist es hilfreich, die elastischen Anteile von der Bewegung des Referenzsystems zu trennen. Dann folgt für den translatorischen Anteil

$$\mathbf{h}_{\omega\text{t}} = \int_{\Omega_0} (\tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + \tilde{\omega}_{\text{IR}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\omega}_{\text{IR}} \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}) dm \quad (2.101)$$

$$= m\tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + m\tilde{\omega}_{\text{IR}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{c}(\mathbf{q}_{\text{e}}) + 2m\tilde{\omega}_{\text{IR}} \dot{\mathbf{c}}(\dot{\mathbf{q}}_{\text{e}}), \quad (2.102)$$

mit der zeitlichen Ableitung $\dot{\mathbf{c}}$ der Koordinaten des Schwerpunkts $\mathbf{c}$. Der rotatorische Anteil wird berechnet über

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{r}} &= \int_{\Omega_0} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + \tilde{\omega}_{\text{IR}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \omega_{\text{IR}} + 2\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \omega_{\text{IR}} \right) dm \\ &= m\mathbf{c}(\mathbf{q}_{\text{e}}) \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{I}(\mathbf{q}_{\text{e}}) \omega_{\text{IR}} + \sum_{l=1}^{n_{\text{q}}} \mathbf{G}_{\text{r},l}(\mathbf{q}_{\text{e}}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{e},l} \omega_{\text{IR}}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

mit der Matrix der generalisierten Corioliskräfte $\mathbf{G}_{\text{r},l}$ mit $l = 1 \dots n_{\text{q}}$. Die Matrix $\mathbf{G}_{\text{r},l}$ wird folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{G}_{\text{r},l}(\mathbf{q}_{\text{e}}) = 2 \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}} \tilde{\Phi}_{\text{P}*l} dm. \quad (2.104)$$

Dabei beschreibt $\tilde{\Phi}_{\text{P}*l}$ die l -te Spalte von Φ_{P} und somit die l -te Ansatzfunktion ausgewertet an Punkt P.

Anschließend kann der elastische Anteil des Vektors $\mathbf{h}_\omega$ berechnet werden über

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{e}} &= \int_{\Omega_0} \left(\Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \right) dm \\ &= \mathbf{C}_{\text{t}} \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}} + \begin{bmatrix} \omega_{\text{IR}}^{\text{T}} \mathbf{O}_{\text{e},1}(\mathbf{q}_{\text{e}}) \omega_{\text{IR}} \\ \vdots \\ \omega_{\text{IR}}^{\text{T}} \mathbf{O}_{\text{e},n_{\text{q}}}(\mathbf{q}_{\text{e}}) \omega_{\text{IR}} \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{n_{\text{q}}} \mathbf{G}_{\text{e},l} \dot{\mathbf{q}}_{\text{e},l} \omega_{\text{IR}}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

mit der Matrix der generalisierten Corioliskräfte

$$\mathbf{G}_{\text{e},l} = 2 \int_{\Omega_0} \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \tilde{\Phi}_{\text{P}*l} dm \quad \text{mit } l = 1 \dots n_{\text{q}} \quad (2.106)$$

und der Matrix der generalisierten Zentrifugalkräfte

$$\mathbf{O}_{e,k}(\mathbf{q}_e) = \underbrace{\int_{\Omega_0} \tilde{\Phi}_{P*k} \tilde{\mathbf{c}}_{RP} dm}_{\mathbf{O}_{e0,k}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \tilde{\Phi}_{P*k} (\widetilde{\Phi_P \mathbf{q}_e}) dm}_{\mathbf{O}_{e1,k}(\mathbf{q}_e)} \quad \text{mit } k = 1 \dots n_q. \quad (2.107)$$

Die Matrix $\mathbf{O}_{e,k}$ setzt sich zusammen aus einem Teil $\mathbf{O}_{e0,k}$, welcher unabhängig von den elastischen Koordinaten ist, und einem Teil $\mathbf{O}_{e1,k}$ abhängig von den elastischen Koordinaten, siehe [SchwertassekWallrapp99].

Innere Kräfte

Die virtuelle Leistung der inneren Kräfte $\delta' P_e$ in Gl. (2.90) kann umgeformt werden nach

$$\int_{\Omega_0} \delta' \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \delta' \mathbf{z}_{\Pi}^T \mathbf{h}_e, \quad (2.108)$$

mit den generalisierten, inneren Kräften $\mathbf{h}_e$. Diese berechnen sich unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme zu

$$\mathbf{h}_e(\mathbf{q}_e, \dot{\mathbf{q}}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{q}}_e \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

mit der linearen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_e = (\mathbf{L}_L \Phi)^T \hat{\mathbf{C}} (\mathbf{L}_L \Phi)$, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Zur Berücksichtigung von dissipativen Effekten wird zusätzlich die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}_e$ eingeführt. Die Bestimmung der Einträge der Dämpfungsmatrix wird in Abschnitt 2.6.3 näher erläutert.

Oberflächenkräfte

Das dritte Integral in Gl. (2.90) beschreibt die virtuelle Leistung der Oberflächenkräfte. Sie kann mit Hilfe der virtuellen Geschwindigkeiten aus Gl. (2.91) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \delta' P_p &= \delta' \mathbf{z}_{\Pi}^T \left(\int_{\Gamma_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \\ \Phi_P^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} dA + \sum_{k=1}^{n_k} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP,k}^T \\ \Phi_{P,k}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_{P,k} + \sum_{k=1}^{n_k} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \Psi_{P,k}^T \end{bmatrix} \ell_{P,k} \right) \\ &= \delta' \mathbf{z}_{\Pi}^T (\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_d). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Hierbei werden neben dem Spannungsvektor $\bar{\mathbf{p}}$ noch $k = 1 \dots n_k$ diskrete Kräfte $\mathbf{f}_{P,k}$ und Momente $\ell_{P,k}$ berücksichtigt, welche an den Punkten P_k angreifen, siehe [Seifried14]. Der Vektor $\mathbf{h}_d$ enthält die diskreten Kräfte und Momente, während in $\mathbf{h}_e$ die generalisierten Kräfte des Spannungsvektors $\bar{\mathbf{p}}$ zusammengefasst

werden, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Es wird angenommen, dass der Bereich am Angriffspunkt der Kräfte und Momente starr ist. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wirken die Kontaktkräfte als Einzelkräfte $\mathbf{f}_{P,k}$ auf den jeweiligen Körper. Momente treten nicht auf, weshalb im Weiteren der letzte Term von Gl. (2.110) vernachlässigt werden kann.

Volumenkräfte

Die virtuelle Leistung der Volumenkräfte lautet mit Gl. (2.91)

$$\delta' P_b = \delta' \mathbf{z}_{II}^T \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \\ \Phi_P^T \end{bmatrix} \mathbf{b} dm = \delta' \mathbf{z}_{II}^T \mathbf{h}_b. \quad (2.111)$$

Wird angenommen, dass außer der Schwerkraft keine Volumenkräfte wirken, so kann mit dem Vektor der Schwerkraft $\mathbf{g}$, dargestellt im Referenzsystem K_R , die virtuelle Leistung der Volumenkräfte formuliert werden als

$$\delta' P_b = \delta' \mathbf{z}_{II}^T \begin{bmatrix} m\mathbf{E} \\ m\tilde{\mathbf{c}} \\ \mathbf{C}_t \end{bmatrix} \mathbf{g} dm = \delta' \mathbf{z}_{II}^T \mathbf{h}_b. \quad (2.112)$$

2.4.3 Bewegungsgleichungen

Werden die Gleichungen (2.92), (2.108), (2.110) und (2.111) bzw. (2.112) in das Jourdain'sche Prinzip (2.90) eingesetzt, so können die Bewegungsgleichungen für einen einzelnen elastischen Körper in Variationsform formuliert werden als

$$\delta' \mathbf{z}_{II}^T (\mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}_{II} + \mathbf{h}_\omega + \mathbf{h}_e - \mathbf{h}_p - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_b) = 0, \quad \forall \delta' \mathbf{z}_{II}. \quad (2.113)$$

Wird von einem freien Körper ausgegangen, so sind die Elemente von $\delta' \mathbf{z}_{II}$ voneinander unabhängig und beliebig wählbar. Daher kann Gl. (2.113) nach dem Satz der unabhängigen Variation nur erfüllt werden, wenn der Term in der Klammer verschwindet, siehe Abschnitt 2.1.3. Somit können die Bewegungsgleichungen eines einzelnen freien elastischen Körpers als

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}_{II} &= \mathbf{h}_p + \mathbf{h}_d + \mathbf{h}_b - \mathbf{h}_\omega - \mathbf{h}_e, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{z}}_{II} &= \mathbf{h}_a, \end{aligned} \quad (2.114)$$

formuliert werden, wobei im Vektor $\mathbf{h}_a$ alle generalisierten, eingepprägten Kräfte zusammengefasst werden. Diese Bewegungsgleichungen werden auch als verallgemeinerte Newton-Euler Gleichungen bezeichnet, siehe [Shabana05].

2.5 Zusammenbau eines flexiblen Mehrkörpersystems

Die Beschreibung eines einzelnen freigeschnittenen elastischen Körpers erfolgt über Gl. (2.114). Im nächsten Schritt werden die Bewegungsgleichungen des gesamten FMKS, bestehend aus mehreren Körpern formuliert.

2.5.1 Mehrkörpersysteme in ODE-Form

Zunächst wird ein System aus p freien elastischen Einzelkörpern betrachtet. Der Bewegungszustand eines räumlichen FMKS mit p Körpern lässt sich über f Freiheitsgrade beschreiben, wobei $f = f_s + \sum_{i=1}^p n_{q,i}$ gilt. Dabei beschreibt $f_s = 6p$ die Freiheitsgrade der Starrkörperbewegungen und $n_{q,i}$ die elastischen Koordinaten des i -ten Körpers mit $i = 1 \dots p$. Bindungen werden zunächst nicht berücksichtigt. Die Lagekoordinaten $\mathbf{z}_I^i$ und Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{\mathbf{z}}_{II}^i$ aus (2.85) der $i = 1 \dots p$ Einzelkörper des Mehrkörpersystems werden zusammengefasst zu

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_I &= \left[(\mathbf{z}_I^1)^T \quad (\mathbf{z}_I^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{z}_I^p)^T \right]^T, \\ \mathbf{z}_{II} &= \left[(\mathbf{z}_{II}^1)^T \quad (\mathbf{z}_{II}^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{z}_{II}^p)^T \right]^T. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Wird das Jourdain'sche Prinzip analog zu Gl. (2.113) auf dieses System mit p Einzelkörpern angewandt, so folgen mit den globalen Geschwindigkeitsvariationen

$$\delta' \mathbf{z}_{II} = \left[(\delta' \mathbf{z}_{II}^1)^T \quad (\delta' \mathbf{z}_{II}^2)^T \quad \dots \quad (\delta' \mathbf{z}_{II}^p)^T \right]^T \quad (2.116)$$

die Bewegungsgleichungen der p freien elastischen Körper in Variationsform als

$$\delta' \mathbf{z}_{II}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}_{II} - \mathbf{h}_a) = 0, \quad \forall \delta' \mathbf{z}_{II}. \quad (2.117)$$

Dabei werden in der globalen Massenmatrix $\mathbf{M}$ die $m = 1 \dots p$ Massenmatrizen $\mathbf{M}^m$ der p Einzelkörper in Blockdiagonalform zusammengefasst. Der globale Vektor $\mathbf{h}_a$ der eingepprägten und Trägheitskräfte enthält dementsprechend die einzelnen Vektoren $\mathbf{h}_a^m$ der Einzelkörper, die folgendermaßen sortiert sind

$$\mathbf{h}_a = \left[(\mathbf{h}_a^1)^T \quad (\mathbf{h}_a^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{h}_a^p)^T \right]^T. \quad (2.118)$$

Die f Bewegungsgleichungen des freien FMKS lassen sich dann in Zustandsform mit $2f$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen als

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_I &= \mathbf{Z} \mathbf{z}_{II} \\ \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}_{II} &= \mathbf{h}_a \end{aligned} \right\} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{II} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}_a \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{Z}$ beschreibt dabei die Erweiterung der kinematischen Beziehungen $\mathbf{Z}^m$ aus Gl. (2.89) auf alle p Einzelkörper als

$$\mathbf{Z} = \text{diag}(\mathbf{Z}^m). \quad (2.120)$$

2.5.2 Mehrkörpersysteme in DAE-Form

In realen MKS unterliegen die einzelnen elastischen Körper Einschränkungen, die aus Gelenken, Kraftelementen oder aus kinematischen Bindungen resultieren. Diese reduzieren die Freiheitsgrade des MKS, indem beispielsweise Körper untereinander gebunden werden oder Körper mit dem Inertialsystem verbunden

werden. Diese Bindungen schränken die kinematische Beschreibung der Position und der Geschwindigkeit des dynamischen Systems ein. Daraus resultieren Zwangskräfte, die zusätzlich berechnet werden müssen.

Bei gebundenen FMKS sind die Variationen der Geschwindigkeitskoordinaten in Gl. (2.116) nicht mehr unabhängig voneinander. Diese Abhängigkeit wird in Form von n_c algebraischen Bindungsgleichungen ausgedrückt, die auf Lageebene in impliziter Form als Vektorgleichung

$$\mathbf{c}(\mathbf{z}_I, t) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad (2.121)$$

formuliert werden können, siehe [Seifried14]. Aus Gl. (2.121) können die n_c Bindungsgleichungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene formuliert werden zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_{II}, t) &= \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{z}_I} \dot{\mathbf{z}}_I + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{z}_I} \mathbf{Z} \mathbf{z}_{II} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{z}_{II} + \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{c}}(\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_{II}, \dot{\mathbf{z}}_{II}, t) &= \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}}_{II} + \dot{\mathbf{C}} \mathbf{z}_{II} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \\ &= \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}}_{II} + \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

mit der Jacobi-Matrix $\mathbf{C}$ der Zwangsgleichungen $\mathbf{c}$ und der Transformationsmatrix $\mathbf{Z}$ aus Gl. (2.120). Die Variation der Bindungsgleichungen auf Geschwindigkeitsebene liefert

$$\delta' \dot{\mathbf{c}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{z}_I} \delta' \mathbf{z}_I + \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{z}_{II}} \delta' \mathbf{z}_{II} + \frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial t} \delta' t = \mathbf{0}. \quad (2.124)$$

Nach Gl. (2.17) entfallen die Variationen der Zeit und Lage, weshalb für die Variation der Bindungsgleichungen auf Geschwindigkeitsebene

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \mathbf{z}_{II}} \delta' \mathbf{z}_{II} = \mathbf{C} \delta' \mathbf{z}_{II} = \mathbf{0} \quad (2.125)$$

gilt. Das Jourdain'sche Prinzip (2.117) für gebundene FMKS kann mit Gl. (2.125) formuliert werden als

$$\delta' \mathbf{z}_{II}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}_{II} - \mathbf{h}_a) = 0, \quad \forall \delta' \mathbf{z}_{II} : \mathbf{C} \delta' \mathbf{z}_{II} = \mathbf{0}. \quad (2.126)$$

Die abhängige Variation $\dot{\mathbf{c}}^T \delta' \mathbf{z}_{II} = 0$, $\forall \delta' \mathbf{z}_{II} : \mathbf{C} \delta' \mathbf{z}_{II} = \mathbf{0}$ mit $\dot{\mathbf{c}}$, $\delta' \mathbf{z}_{II} \in \mathbb{R}^f$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_c \times f}$ kann nach Abschnitt 2.1.3 durch Einführen der Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_c}$ über

$$(\dot{\mathbf{c}}^T - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}) \delta' \mathbf{z}_{II} = 0, \quad \forall \delta' \mathbf{z}_{II}, \quad (2.127)$$

in eine unabhängige Variation überführt werden. Damit folgt aus den Bewegungsgleichungen (2.126) eines gebundenen FMKS in Variationsform

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}_{II} - \mathbf{h}_a - \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \quad (2.128)$$

Der Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^{n_c}$ beschreibt die generalisierten Reaktionskräfte und -momente, welche aus den Bindungen resultieren. Diese sind unbekannt und müssen während der numerischen Lösung bestimmt werden. Um die $2f + n_c$ Unbekannten $\dot{z}_I$, $\dot{z}_{II}$ und λ ermitteln zu können wird Gl. (2.119) um die algebraischen Bindungen (2.121) erweitert, was zu den differential-algebraischen Gleichungen (DAEs)

$$\begin{aligned}\dot{z}_I &= Z\dot{z}_{II}, \\ M\dot{z}_{II} &= h_a + C^T\lambda, \\ c &= 0\end{aligned}\tag{2.129}$$

führt. Die numerische Lösung von DAEs ist komplizierter als das Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs), siehe [HairerWanner96]. Eine Möglichkeit zur Lösung von DAEs ist die Reduktion des Differentiationsindex, siehe [Seifried14]. Dieser ist definiert als die minimale Anzahl Differentiationen des DAE-Systems (2.129), um ein System von ODEs für alle Variablen zu erhalten.

Das DAE-System (2.129) ist vom Index 3, da die Bindungsgleichungen (2.121) drei mal abgeleitet werden müssen, um es in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen. Zur Indexreduktion werden die Bindungsgleichungen c auf Lageebene durch die Bindungsgleichungen Gl. (2.123) auf Beschleunigungsebene ersetzt. Dieses DAE-System vom Index 1 kann mit Standardintegratoren für steife Differentialgleichungssysteme gelöst werden. Da die Bindungen nur auf Beschleunigungsebene eingehalten werden, tritt aufgrund von Integrationsfehlern ein Drift der Bindungen auf Positions- und Geschwindigkeitsebene auf. Die Bindungen werden dann nicht mehr vollständig eingehalten. Dieser Effekt kann mit Stabilisierungsverfahren reduziert werden, siehe [Seifried14]. Um numerische Ungenauigkeiten durch den dabei auftretenden Drift zu vermeiden können die DAEs über eine Koordinatenpartitionierung, siehe [WehageHaug81], oder über eine Projektion in einen ungebundenen Unterraum, siehe [KurzBurkhardtEberhard11, SeifriedBurkhardtHeld11], in ODEs überführt werden. Der letztere Ansatz wird im folgenden Abschnitt kurz erläutert.

2.5.3 Projektion mit QR-Zerlegung

Um aus dem DAE-System (2.129) eine Darstellung in Zustandsform zu erhalten wird in dieser Arbeit eine Projektion mit der QR-Zerlegung verwendet, siehe [KurzBurkhardtEberhard11, SeifriedBurkhardtHeld11]. Aus den Gleichungen (2.121), (2.122) und (2.123) ist ersichtlich, dass die redundanten Koordinaten auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene orthogonal zu den Bindungen sein müssen. Nach [KurzBurkhardtEberhard11] kann dann die Jacobi-Matrix C als der Bindungsraum, der die gesperrten Richtungen enthält, interpretiert werden. Für die Projektion wird für den Teilraum der möglichen Bewegungen und den Teilraum der Richtungen der Reaktionskräfte eine orthonormale Basis über

die QR-Zerlegung, siehe [DahmenReusken08], ermittelt.

Zunächst werden die Reaktionskräfte λ über eine Projektion eliminiert. Dazu wird eine QR-Zerlegung der transponierten Jacobi-Matrix der Bindungen C^T entsprechend

$$C^T = QR = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1 \quad (2.130)$$

durchgeführt. Die Matrix C^T wird dabei in die orthogonalen Matrizen $Q_1 \in \mathbb{R}^{f \times f}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{f \times f}$ sowie die obere Dreiecksmatrix $R_1 \in \mathbb{R}^{f \times n_c}$ aufgeteilt. Da die Spalten in Q orthogonal sind, ist automatisch die Submatrix Q_1 orthogonal zu Q_2 und somit gilt der Zusammenhang $Q_1^T Q_2 = 0$, siehe [SeifriedBurkhardtHeld11]. Die Spaltenvektoren in Q_1 stellen den Bindungsraum, also die gesperrten Richtungen, dar und spannen daher den selben Raum auf wie C^T . Analog dazu spannt Q_2 den Tangentialraum auf, weshalb die Spalten von Q_2 die freien Bewegungsrichtungen beschreiben. Mit diesen Eigenschaften von Q_1 und Q_2 werden die redundanten Beschleunigungen $\ddot{z}$ eingeführt und damit die originale Beschleunigung $\dot{z}_{II}$ ausgedrückt als Linearkombination

$$\dot{z}_{II} = Q_2 \ddot{z}_i + Q_1 \ddot{z}_d, \quad (2.131)$$

wobei die unabhängigen Beschleunigungen im Vektor $\ddot{z}_i \in \mathbb{R}^{f-n_c}$ zusammengefasst sind. Werden in Gl. (2.123) die originalen Beschleunigungen $\dot{z}_{II}$ ersetzt durch Gl. (2.131), so folgt nach [SeifriedBurkhardtHeld11]

$$\ddot{c} = C (Q_2 \ddot{z}_i + Q_1 \ddot{z}_d) + \kappa = R_1^T \underbrace{Q_1^T Q_2}_{=0} \ddot{z}_i + R_1^T \underbrace{Q_1^T Q_1}_{=E} \ddot{z}_d + \kappa = 0. \quad (2.132)$$

Daraus können die abhängigen Beschleunigungen als

$$\ddot{z}_d = -R_1^{-T} \kappa \quad (2.133)$$

formuliert werden und damit folgt schließlich aus Gl. (2.131)

$$\dot{z}_{II} = Q_2 \ddot{z}_i - Q_1 R_1^{-T} \kappa. \quad (2.134)$$

Ersetzen der Beschleunigungen $\dot{z}_{II}$ in Gl. (2.128) durch Gl. (2.134) und anschließendes Multiplizieren der Gleichung mit Q_2^T eliminiert die Reaktionskräfte λ , siehe [SeifriedBurkhardtHeld11]. Daraus folgen die Bewegungsgleichungen dargestellt in den unabhängigen Koordinaten zu

$$Q_2^T M (Q_2 \ddot{z}_i - Q_1 R_1^{-T} \kappa) = Q_2^T h_a + \underbrace{Q_2^T C^T \lambda}_{=0}. \quad (2.135)$$

Anschließend ist eine Transformation von den unabhängigen Koordinaten in die originalen Koordinaten $\ddot{z}_{II}$ erforderlich. Dazu wird Gl. (2.135) nach $\ddot{z}_i$ umgestellt

$$\ddot{z}_i = (Q_2^T M Q_2)^{-1} Q_2^T (h_a + M Q_1 R_1^{-T} \kappa) \quad (2.136)$$

und nach Einsetzen von Gl. (2.134) folgt die Beschleunigung in den originalen Koordinaten

$$\dot{z}_{\text{II}} = \mathbf{Q}_2 \left(\mathbf{Q}_2^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_2 \right)^{-1} \mathbf{Q}_2^T \left(\mathbf{h}_a + \mathbf{M} \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-T} \boldsymbol{\kappa} \right) - \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-T} \boldsymbol{\kappa}. \quad (2.137)$$

Für die Zustandsraumbeschreibung wird neben der Beschleunigung $\dot{z}_{\text{II}}$ noch die Geschwindigkeit $\dot{z}_{\text{I}}$ benötigt. Dazu werden analog zu Gl. (2.134) und mit $\boldsymbol{\mu}$ aus Gl. (2.123) die unabhängigen Geschwindigkeiten $\dot{z}_{\text{i}} \in \mathbb{R}^{f-n_c}$ eingeführt zu

$$\dot{z}_{\text{I}} = \mathbf{Q}_2 \dot{z}_{\text{i}} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-T} \boldsymbol{\mu}. \quad (2.138)$$

Linksmultiplizieren mit $\mathbf{Q}_2^T$ und anschließendes Umstellen nach $\dot{z}_{\text{i}}$ ergibt die unabhängigen Geschwindigkeiten

$$\dot{z}_{\text{i}} = \left(\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 \right)^{-1} \mathbf{Q}_2^T \left(\dot{z}_{\text{I}} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-T} \boldsymbol{\mu} \right). \quad (2.139)$$

Einsetzen von z_{i} in Gl. (2.138) und mit $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{E}$ liefert die Geschwindigkeit $\dot{z}_{\text{I}}$ in den originalen Koordinaten zu

$$\dot{z}_{\text{I}} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^T \left(\dot{z}_{\text{I}} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-T} \boldsymbol{\mu} \right) - \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1^{-T} \boldsymbol{\mu}. \quad (2.140)$$

Mit den Gleichungen (2.137) und (2.140) können die Bewegungsgleichungen des gebunden Systems aus Gl. (2.128) in Zustandsform überführt werden, wobei gleichzeitig die Reaktionskräfte eliminiert werden. Damit ist eine effiziente Zeitintegration mit Standardmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme erster Ordnung möglich.

2.6 Modellreduktion

Für eine hohe Genauigkeit bei der numerischen Analyse von technischen Systemen mit der FEM ist eine Vernetzung mit sehr vielen finiten Elementen notwendig. Insbesondere in Stoßsimulationen sind fein diskretisierte Körper zur Erfassung der lokalen und globalen Verformungseffekte erforderlich, siehe zum Beispiel [SeifriedSchiehlenEberhard10, Ziegler12]. Die in Abschnitt 2.3 eingeführten linearen FE-Modelle können direkt in den Ansatz des mitbewegten Referenzsystems aus Abschnitt 2.4 integriert werden. Dann entspricht die Anzahl elastischer Koordinaten n_q der Anzahl der Knotenfreiheitsgrade n_{fe} des FE-Modells. Dies führt jedoch aufgrund der sehr großen Anzahl an elastischen Freiheitsgraden $\mathbf{q}_{\text{e}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fe}}}$ zu Bewegungsgleichungen mit sehr großen Dimensionen.

In der Modellierung flexibler MKS unter der Verwendung des mitbewegten Referenzsystems ist die Wahl der globalen Ansatzfunktionen $\boldsymbol{\Phi}$ und $\boldsymbol{\Psi}$ ein notwendiger Schritt um die elastische Verformung und Rotation in Gl. (2.74) anzunähern. Die globalen Ansatzfunktionen werden oft aus dem linearen FE-Modell, bzw. aus den Bewegungsgleichungen Gl. (2.67) des elastischen Körpers bestimmt. Ziel der Modellreduktion ist es, die Anzahl der elastischen Freiheitsgrade $\mathbf{q}_{\text{e}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fe}}}$ auf

wenige Freiheitsgrade $\bar{\mathbf{q}}_e \in \mathbb{R}^{n_q}$ mit $n_q \ll n_{fe}$ zu reduzieren und dabei gleichzeitig wesentliche Eigenschaften des Systems bestmöglich zu erhalten. Daher ist die Modellreduktion für eine effiziente Simulation von MKSs mit elastischen Körpern von großer Bedeutung. Die in dieser Arbeit verwendeten Modellreduktionsverfahren basieren auf der Galerkin Projektion in einen niedrigdimensionalen Raum, siehe [Antoulas05, Saad03, Soppa11].

Bei der orthogonalen Projektion, auch Galerkin Projektion genannt, werden die elastischen Koordinaten $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^{n_{fe}}$ auf einen Unterraum $\mathcal{V}$ mit der Dimension $n_q \ll n_{fe}$ projiziert, siehe [Soppa11]. Der Unterraum $\mathcal{V} = \text{span}(\mathbf{V}) \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times n_q}$ kann durch die Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times n_q}$ bestehend aus den Basisvektoren $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{n_q}]$ dargestellt werden. Der Vektor der Knotenfreiheitsgrade $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^{n_{fe}}$ kann dann über die reduzierten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e \in \mathbb{R}^{n_q}$ ausgedrückt werden als

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{V} \bar{\mathbf{q}}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad (2.141)$$

mit der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ und dem bei der Projektion gemachten Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_e$. Daher gilt die Approximation

$$\mathbf{q}_e \approx \mathbf{V} \bar{\mathbf{q}}_e. \quad (2.142)$$

Einsetzen von Gl. (2.141) in die FE-Bewegungsgleichungen (2.68) liefert

$$\mathbf{M}_e \mathbf{V} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e + \mathbf{D}_e \mathbf{V} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{V} \bar{\mathbf{q}}_e = \mathbf{f}_e - \boldsymbol{\rho}, \quad (2.143)$$

mit dem Residuum $\boldsymbol{\rho}$, berechnet aus dem Approximationsfehler $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ zu

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{M}_e \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \mathbf{K}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e. \quad (2.144)$$

Mit den Petrov-Galerkin-Bedingungen, welche durch Linksmultiplikation von Gl. (2.143) mit $\mathbf{V}^T$ eingebracht werden, siehe [Antoulas05, Saad03], verschwindet das Residuum durch $\mathbf{V}^T \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ und die reduzierten Bewegungsgleichungen können formuliert werden als

$$\underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{M}_e \mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{M}}_e} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{D}_e \mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{D}}_e} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_e + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{K}}_e} \bar{\mathbf{q}}_e = \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{f}_e}_{\bar{\mathbf{f}}_e}. \quad (2.145)$$

In Gl. (2.145) beschreiben $\bar{\mathbf{M}}_e$, $\bar{\mathbf{D}}_e$ und $\bar{\mathbf{K}}_e \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ die reduzierte Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix und $\bar{\mathbf{f}}_e$ die reduzierten Kräfte und Momente.

Über verschiedene Modellreduktionsverfahren können die Basisvektoren $\mathbf{v}$ für die Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ bestimmt werden, welche entscheidend für die Qualität der reduzierten Modelle sind. In den folgenden Abschnitten werden zwei in Kombination mit FMKS häufig verwendete Modellreduktionsverfahren zur Bestimmung der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ vorgestellt.

2.6.1 Modale Reduktion

Bei der Modellreduktion über modales Abschneiden wird das Bewegungsverhalten dynamischer Systeme als Überlagerung der ersten n Eigenmoden beschrieben. Die Knotenfreiheitsgrade werden dabei auf einen Unterraum projiziert, der von einer reduzierten Anzahl Eigenvektoren aufgespannt wird. Dazu wird zunächst die homogene Systemgleichung mit $\mathbf{f}_e = \mathbf{0}$

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{0} \quad (2.146)$$

betrachtet. Wird der Ansatz

$$\mathbf{q}_e = e^{\lambda_i t} \boldsymbol{\phi}_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{C}^n \quad (2.147)$$

in die Systemgleichung (2.146) eingesetzt, so führt dies auf das quadratische Eigenwertproblem

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M}_e + \lambda_i \mathbf{D}_e + \mathbf{K}_e) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}, \quad (2.148)$$

siehe [GéradinRixen97, MüllerSchiehlen76]. Gelten für die Systemmatrizen die Eigenschaften

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_e^T > \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_e = \mathbf{D}_e^T \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^T \geq \mathbf{0}, \quad (2.149)$$

so besitzt Gl. (2.148) $2n$ reelle oder paarweise konjugiert komplexe Eigenwerte λ_i . Dabei ist jeder Rechtseigenvektor $\boldsymbol{\phi}_i$ zu $\lambda_i \in \mathbb{C}$ dann gleichzeitig ein Linkseigenvektor $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i$ des konjugiert komplexen Eigenwerts $\bar{\lambda}_i$, woraus das Eigenwertproblem

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_i (\bar{\lambda}_i^2 \mathbf{M}_e + \bar{\lambda}_i \mathbf{D}_e + \mathbf{K}_e) = \mathbf{0} \quad (2.150)$$

folgt, siehe [Soppa11, TisseurMeerbergen01]. Dabei sind die Eigenvektoren $\bar{\boldsymbol{\phi}}_i$ reell oder treten paarweise konjugiert komplex auf. Wird als Dämpfungsmodell eine proportionale Dämpfung verwendet, so kann das Eigenwertproblem eines konservativen Systems

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{0} \quad (2.151)$$

betrachtet werden, da die Eigenvektoren des gedämpften und ungedämpften Systems übereinstimmen, siehe [Adhikari00, Adhikari06, Lehner07, Soppa11]. Wird der Ansatz aus Gl. (2.147) in Gl. (2.151) eingesetzt, so folgt das Eigenwertproblem des konservativen Systems zu

$$(\lambda_i^2 \mathbf{M}_e + \mathbf{K}_e) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}. \quad (2.152)$$

Die Eigenwerte λ_i^2 beschreiben die nichttrivialen Lösungen dieses Eigenwertproblems. Bei symmetrischer und positiv definiter Massenmatrix $\mathbf{M}_e$ und symmetrischer Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_e$, siehe Gl. (2.149), sind die Eigenwerte λ_i^2 negativ und reell. Sie können auch als $\lambda_i^2 = -\omega_i^2$ geschrieben werden, wobei $\omega_i \in \mathbb{R}$ die i -te Eigenfrequenz darstellt. Durch Einsetzen der Lösungen λ_i^2 in Gl. (2.152) werden die entsprechenden Eigenvektoren $\boldsymbol{\phi}_i$, auch Eigenmoden genannt, berechnet,

die ebenfalls reell und massenorthogonal sind, siehe [Lehner07]. Bei geeigneter Normierung folgt dann mit

$$\phi_i^T M_e \phi_j = \delta_{ij}, \quad (2.153)$$

die Massenorthonormalität mit $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Werden n_q ausgewählte Eigenmoden spaltenweise zusammengefasst entsteht die reduzierte Modalmatrix $\Phi \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times n_q}$, die zur orthogonalen Projektion mit $V = \Phi$ verwendet wird. Die Modellreduktion gemäß Gl. (2.145)

$$\Phi^T M_e \Phi \ddot{\bar{q}}_e + \Phi^T D_e \Phi \dot{\bar{q}}_e + \Phi^T K_e \Phi \bar{q}_e = \Phi^T f_e \quad (2.154)$$

liefert nach [Soppa11] aufgrund der Massenorthonormalität die reduzierte Massen- und Steifigkeitsmatrix

$$\bar{M}_e = \Phi^T M_e \Phi = E \quad \text{und} \quad \bar{K}_e = \Phi^T K_e \Phi = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (2.155)$$

des entkoppelten Systems.

Die modale Reduktion kann als Transformation der Knotenkoordinaten des FE-Modells in ein System modaler Koordinaten gesehen werden. Somit kann der Vektor der Knotenverschiebungen q_e als Linearkombination von n_q Eigenvektoren und den reduzierten elastischen Koordinaten $\bar{q}_e$, hier auch modale Koordinaten genannt, dargestellt werden. Diese können dabei als Gewichtungsfaktoren der Linearkombination gesehen werden.

2.6.2 Craig-Bampton Verfahren

Weitere Modellreduktionsverfahren, die im Bereich der FMKS weit verbreitet sind, basieren auf der Component-Mode-Synthesis (CMS), siehe zum Beispiel [CraigBampton68, DietzKnothe97] und [Hurty65]. Der wesentliche Ansatz dieser Methode ist die Kombination von verschiedenen Ansatzfunktionen zur Beschreibung des Bewegungsverhaltens. Dabei wird unterschieden zwischen der Beschreibung der Substruktur und der Beschreibung ihres Randes. Dieser Ansatz kann als die Kombination einer approximierten homogenen Lösung und einer partikulären Lösung der Bewegungsgleichungen interpretiert werden, siehe [Dietz99, NowakowskiEtAl12]. Die homogene Lösung wird dabei über verschiedene Eigenformen, welche abhängig von den Randbedingungen des elastischen Körpers sind, approximiert. Dazu zählen die frei-freie, die fest-freie Eigenmode oder die Eigenmode eines komplett fixierten Körpers, siehe [Nowakowski15]. Die partikuläre Lösung wird über verschiedene Sätze von Korrekturmoden bestimmt. Dazu können zum Beispiel Statikmoden aus Einheitsverschiebung (engl. constraint modes), Statikmoden aus Einheitsbelastung (engl. attachment modes) oder Dynamikmoden (engl. frequency response modes) verwendet werden, siehe [Craig00, CraigKur-dila06, DietzKnothe97].

Ein Sonderfall der CMS ist das Craig-Bampton (CB) Verfahren, siehe zum Beispiel [Craig00, CraigBampton68, DietzKnothe97, Hurty65]. Es ist eine Kombination aus statischer Kondensation und modalem Abschneiden. Dabei enthält die Projektionsmatrix Statikmoden aus Einheitsverschiebungen und Eigenmoden (engl. fixed-interface normal modes), welche aus der komplett fixierten Struktur bestimmt werden.

Bei der statischen Kondensation, auch Guyan-Reduktion genannt [Guyan65], wird der Vektor der Knotenfreiheitsgrade $\mathbf{q}_e$ über eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ in interne $\mathbf{q}_e^i$ und in externe $\mathbf{q}_e^e$ Knotenfreiheitsgrade aufgeteilt. Die externen Freiheitsgrade beschreiben die fixierten Freiheitsgrade des FE-Modells. Für die partitionierten Knotenfreiheitsgrade gilt

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{P} \begin{bmatrix} (\mathbf{q}_e^i)^T & (\mathbf{q}_e^e)^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.156)$$

Anwendung der Permutation $\mathbf{P}$ auf die ungedämpften FE-Bewegungsgleichungen (2.67) führt zu den partitionierten Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e^{ii} & \mathbf{M}_e^{ie} \\ \mathbf{M}_e^{ei} & \mathbf{M}_e^{ee} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^T \mathbf{M}_e \mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_e^i \\ \ddot{\mathbf{q}}_e^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^T \ddot{\mathbf{q}}_e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{ii} & \mathbf{K}_e^{ie} \\ \mathbf{K}_e^{ei} & \mathbf{K}_e^{ee} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^T \mathbf{K}_e \mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^i \\ \mathbf{q}_e^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^T \mathbf{q}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^i \\ \mathbf{f}_e^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^T \mathbf{f}_e}. \quad (2.157)$$

Für die statische Kondensation werden die partitionierten Bewegungsgleichungen im statischen Zustand

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{ii} & \mathbf{K}_e^{ie} \\ \mathbf{K}_e^{ei} & \mathbf{K}_e^{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^i \\ \mathbf{q}_e^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^i \\ \mathbf{f}_e^e \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

berücksichtigt. Zur Berechnung der Statikmoden erhält jeweils ein externer Freiheitsgrad eine Einheitsverschiebung $\mathbf{E}^{ee}$ während die übrigen Freiheitsgrade keine Verschiebung erfahren und daher kraftfrei sind. Aus Gl. (2.158) folgt damit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{ii} & \mathbf{K}_e^{ie} \\ \mathbf{K}_e^{ei} & \mathbf{K}_e^{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{ie} \\ \mathbf{E}^{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}^{ee} \end{bmatrix}, \quad (2.159)$$

mit der Verformung $\boldsymbol{\Psi}^{ie}$ des Körpers aufgrund der Einheitsverschiebungen $\mathbf{E}^{ee}$. Die Matrix $\mathbf{R}^{ee}$ enthält die Kräfte, die aufgrund der Einheitsverschiebung auf die externen Knoten wirken. Da $\mathbf{K}_e^{ii}$ invertierbar ist, wenn die Fixierung der externen Freiheitsgrade eine statische Lagerung bewirken, siehe [DietzKnothe97], gilt $\boldsymbol{\Psi}^{ie} = -\mathbf{K}_e^{ii^{-1}} \mathbf{K}_e^{ie}$ und somit kann die Projektionsmatrix der statischen Kondensation als

$$\mathbf{V}_{\text{con}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{ie} \\ \mathbf{E}^{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_e^{ii^{-1}} \mathbf{K}_e^{ie} \\ \mathbf{E}^{ee} \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

formuliert werden, siehe [Craig00, CraigKurdila06].

Die inneren Moden der fixierten Struktur werden über das Eigenwertproblem

$$(\lambda_j^2 \mathbf{M}_e^{ii} + \mathbf{K}_e^{ii}) \phi_{i,j} = \mathbf{0} \quad (2.161)$$

des inneren Systems berechnet. Dabei erfahren die externen Freiheitsgrade keine Verschiebung womit die Eigenmoden der fixierten Struktur als $\phi_j = \phi_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times 1}$ formuliert werden können. Spaltenweises Anordnen von k inneren Eigenmoden liefert die Modalmatrix Φ_{intern} des inneren Systems.

Durch die Überlagerung von $\mathbf{V}_{\text{con}}$ aus Gl. (2.160) und Φ_{intern} ergibt sich die Projektionsmatrix des CB-Verfahrens zu

$$\mathbf{V}_{\text{CB}} = \mathbf{P}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_e^{ii^{-1}} \mathbf{K}_e^{ie} & \Phi_{\text{intern}} \\ \mathbf{E}^{ee} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.162)$$

wobei eine Rückpermutation mit $\mathbf{P}^T$ auf die ursprünglichen Freiheitsgrade erfolgen muss, siehe [NowakowskiEtAl12]. Beim CB-Verfahren kann die statische Lösung aufgrund der Statikmoden mit derselben Genauigkeit berechnet werden wie mit dem zugrunde liegenden FE-Modell. Ein Nachteil des Verfahrens ist die große Anzahl elastischer Freiheitsgrade des reduzierten Systems, die von der Anzahl der externen Freiheitsgrade bzw. Statikmoden abhängig ist.

Die reduzierten Bewegungsgleichungen können analog zu Gl. (2.145) mit der Projektionsmatrix $\mathbf{V}_{\text{CB}}$ formuliert werden als

$$\mathbf{V}_{\text{CB}}^T \mathbf{M}_e \mathbf{V}_{\text{CB}} \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{V}_{\text{CB}}^T \mathbf{D}_e \mathbf{V}_{\text{CB}} \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{V}_{\text{CB}}^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}_{\text{CB}} \mathbf{q}_e = \mathbf{V}_{\text{CB}}^T \mathbf{f}_e, \quad (2.163)$$

wobei die reduzierten Systemmatrizen beim CB-Verfahren nicht entkoppelt sind und nicht in Diagonalform vorliegen.

Für manche Problemstellungen ist ein entkoppeltes System mit einer Einheitsmatrix als reduzierte Massenmatrix und einer diagonalen Steifigkeitsmatrix von Vorteil. Während bei der modalen Reduktion bei geeigneter Normierung die Systemmatrizen bereits entkoppelt und massenorthonormal sind, siehe Gl. (2.155), ist beim CB-Verfahren eine zusätzliche Entkopplung der Projektionsmatrix $\mathbf{V}_{\text{CB}}$ bestehend aus Eigen- und Statikmoden erforderlich, siehe [Dietz99, Friberg91]. Die reduzierte Massen- und Steifigkeitsmatrix ergeben sich mit der Projektionsmatrix $\mathbf{V}_{\text{CB}}$ zu

$$\bar{\mathbf{M}}_e^{\text{CB}} = \mathbf{V}_{\text{CB}}^T \mathbf{M}_e \mathbf{V}_{\text{CB}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{K}}_e^{\text{CB}} = \mathbf{V}_{\text{CB}}^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}_{\text{CB}}. \quad (2.164)$$

Diese Systemmatrizen werden entkoppelt, indem das generalisierte Eigenwertproblem des reduzierten Systems

$$(\hat{\lambda}_i^2 \bar{\mathbf{M}}_e^{\text{CB}} + \bar{\mathbf{K}}_e^{\text{CB}}) \hat{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (2.165)$$

gelöst wird und die Eigenvektoren massenorthonormalisiert werden. Nach Multiplikation von links mit der Eigenvektormatrix $\hat{\Phi}$ folgt aufgrund der Massenorthonormalität (2.153)

$$\bar{M}_e = \hat{\Phi}^T \bar{M}_e^{CB} \hat{\Phi} = \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \bar{K}_e = \hat{\Phi}^T \bar{K}_e^{CB} \hat{\Phi} = \hat{\Lambda} = \text{diag}(\omega_i^2). \quad (2.166)$$

Dabei beschreiben $\bar{M}_e$ und $\bar{K}_e$ die orthonormalisierte Massen- und Steifigkeitsmatrix des entkoppelten reduzierten Systems. Die Diagonaleinträge der Matrix $\bar{K}_e$ enthalten im Gegensatz zu Gl. (2.155) dann neben den Eigenfrequenzen des Originalsystems noch künstliche Eigenfrequenzen aus den Statikmoden, siehe [Lehner07]. Die entsprechende Projektionsmatrix wird über $V = V_{CB} \hat{\Phi}$ berechnet. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit stellen $\bar{M}_e$, $\bar{K}_e$ und $\bar{D}_e$ immer die Systemmatrizen des entkoppelten Systems dar. Für eine Notation analog zu Abschnitt 2.4 beschreibt n_q im Weiteren die Anzahl der reduzierten elastischen Koordinaten.

2.6.3 Dämpfungsmodellierung

Bei der Modellierung von technischen Systemen darf für ein realistisches Schwingungsverhalten die innere Dämpfung oftmals nicht vernachlässigt werden. Effekte wie das Abklingen von freien Schwingungen und die begrenzte Amplitudenüberhöhung im Resonanzfall können nur mit Dämpfungsmodellen beschrieben werden. Auch bei numerischer Integration ist Dämpfung hilfreich, da hochfrequente unphysikalische Störungen abklingen können und die Schrittweite des Integrators größer gewählt werden kann. Zur Abbildung dieser dissipativen Effekte wird in dieser Arbeit die Modellvorstellung einer viskosen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung verwendet, siehe [Bathe96]. Auf die nicht-viskose Dämpfung wie Strukturdämpfung, siehe [Adhikari00], wird hier nicht näher eingegangen.

Einen speziellen Fall der viskosen Dämpfung stellt die proportionale Dämpfung dar, siehe [Adhikari00, Adhikari06]. Da die Massen- und Steifigkeitsmatrizen oft durch die FE-Modellierung vorliegen, ist die Bestimmung der Dämpfungsmatrix D_e durch M_e und K_e so, dass das gedämpfte System in den Eigenmoden schwingt, naheliegend. Daher kann die verallgemeinerte proportionale Dämpfungsmatrix D_e mit der Caughey-Reihe nach [Adhikari00, Nowakowski15] konstruiert werden durch

$$D_e = M_e \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j (M_e^{-1} K_e)^j. \quad (2.167)$$

Die Koeffizienten α_j der Caughey-Reihe können anhand von Messwerten bestimmt werden, siehe [Bathe96]. Um für unreduzierte FE-Systeme das Gleichungssystem (2.167) nicht lösen zu müssen, lässt sich für den Sonderfall $r = 2$ die Dämpfungsmatrix

$$D_e = \alpha_1 M_e + \alpha_2 K_e \quad (2.168)$$

als Linearkombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix mit den Dämpfungs-konstanten $\alpha_1, \alpha_2 < 1$ berechnen. Diese vereinfachte Variante von Gl. (2.167) wird auch als Rayleigh-Dämpfung bezeichnet, siehe [Adhikari06].

Ein Vorteil der proportionalen Dämpfung besteht darin, dass die Systemmatrizen über Eigenvektoren mit geeigneter Normierung in Diagonalform

$$\bar{M}_e = \phi_i^T M_e \phi_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}, \quad (2.169)$$

$$\bar{D}_e = \phi_i^T D_e \phi_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 2\omega_i \xi_i & \text{für } i = j \end{cases}, \quad (2.170)$$

$$\bar{K}_e = \phi_i^T K_e \phi_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \omega_i^2 & \text{für } i = j \end{cases}, \quad (2.171)$$

transformiert werden können. Darin beschreiben ξ_i das Lehrsche Dämpfungs-maß zu jeder i -ten ungedämpften Eigenfrequenz ω_i . Die Eigenvektoren ϕ_i zur Transformation werden aus der Lösung des Eigenwertproblems (2.152) bestimmt.

Liegt die Dämpfungsmatrix wie in Gl. (2.170) entkoppelt und in Diagonalform vor, so kann jede elastische Koordinate und damit jede Eigenfrequenz unterschiedlich gedämpft werden. Dabei kann nach [Soppa11] die durch die Dämpfung hervorgerufene Kopplung zwischen den Eigenfrequenzen vernachlässigt werden. Diese Dämpfung wird als modaler Dämpfungsansatz bezeichnet, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Die entsprechenden modalen Dämpfungsparameter ξ_i können über Experimente bestimmt oder über numerische Simulationen geschätzt werden, siehe [Adhikari06].

2.7 Definition der Referenzsysteme

Zur Beschreibung der Position und Orientierung des Koordinatensystems K_P eines Punkts P stehen zwölf Koordinaten zur Verfügung. Sechs Koordinaten werden zur Festlegung des Orts $\mathbf{r}_{IR}$ und der Orientierung $\mathbf{S}_{IR}$ des Referenzsystems benötigt. Die relativen Deformationen $\mathbf{u}_P$ und $\mathbf{v}_P$ werden durch weitere sechs Koordinaten festgelegt. Aufgrund dieser redundanten Formulierung müssen für eine eindeutige Beschreibung der Bewegung sechs Zwangsbedingungen formuliert werden. Bei Verwendung des Ansatzes des mitbewegten Referenzsystems werden die Zwangsbedingungen sinnvollerweise so gewählt, dass $\mathbf{u}_P$ und $\mathbf{v}_P$ keine Starrkörpermoden mehr enthalten. Diese Zwangsbedingungen werden durch die Wahl des Koordinatensystems K_R bestimmt, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Es wird dabei zwischen knotenbezogenen und schwerpunktsbezogenen Zwangsbedingungen unterschieden. Zu erstgenannten gehören das Sekanten- und Tangentensystem und zu letzteren das Buckens-System. Beide Methoden zur Formulierung der Zwangsbedingungen werden im nächsten Abschnitt erläutert.

2.7.1 Sekanten- und Tangentensystem

Beim Tangentensystem wird das Körperbezugssystem K_R , wie in Abbildung 2.5 dargestellt, mit kinematischen Gleichungen an einen materiellen Punkt P mit dem Koordinatensystem K_P gebunden. Die Starrkörperbewegung wird dann durch die Bewegung des körperfesten Punkts P mit $\mathbf{c}_{RP} = \mathbf{0}$ approximiert, siehe [Lehner07]. Nach [SchwertassekWallrappShabana99] folgen daraus die geometrischen Randbedingungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{\vartheta}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \quad (2.172)$$

die durch die Wahl der Ansatzfunktionen erfüllt sein müssen, damit gilt

$$\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (2.173)$$

Diese Bedingungen werden von den Ansatzfunktionen einer Struktur erfüllt, die bei $\mathbf{c}_{RP} = \mathbf{0}$ fest eingespannt ist, siehe [SchwertassekWallrappShabana99].

Liegen keine Ansatzfunktionen vor, welche Gl. (2.173) erfüllen, so müssen diese entweder transformiert werden oder das Referenzsystem wird über drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 und deren Materialkoordinaten $\mathbf{c}_{RP_1}$, $\mathbf{c}_{RP_2}$ und $\mathbf{c}_{RP_3}$ festgelegt. Nach [SchwertassekWallrapp99] ergeben sich damit sechs Randbedingungen aus

$$\mathbf{u}(\mathbf{c}_{RP_1}, t) = \mathbf{0}, \quad u_2(\mathbf{c}_{RP_2}, t) = 0, \quad u_3(\mathbf{c}_{RP_2}, t) = 0, \quad u_3(\mathbf{c}_{RP_3}, t) = 0, \quad (2.174)$$

was für die Ansatzfunktionen dann

$$\Phi(\mathbf{c}_{RP_1}) = \mathbf{0}, \quad \Phi_2(\mathbf{c}_{RP_2}) = \mathbf{0}, \quad \Phi_3(\mathbf{c}_{RP_2}) = \mathbf{0}, \quad \Phi_3(\mathbf{c}_{RP_3}) = \mathbf{0}, \quad (2.175)$$

bedeutet, siehe [SchwertassekWallrappShabana99]. Der Ursprung des Referenzsystems liegt dann knotenfest in P_1 während die Orientierung über die zwei Punkte P_2 und P_3 beschrieben wird. Dieses Referenzsystem wird als Sekantensystem bezeichnet.

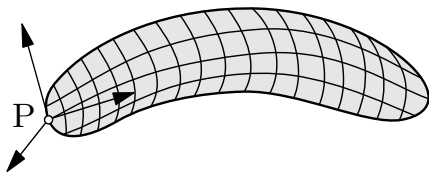


Abbildung 2.5: Tangentensystem

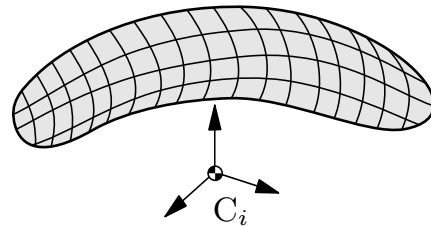


Abbildung 2.6: Buckensystem

2.7.2 Buckens-System

Neben der Verwendung der kinematischen Beziehungen wie beim Tangentensystem, kann das Referenzsystem auch unter dynamischen Gesichtspunkten definiert werden. Unter der Annahme, dass die Verformungen $\mathbf{q}_e$ und $\dot{\mathbf{q}}_e$ klein bleiben, werden beim Buckens-System nach [SchwertassekWallrapp99] der Ort und die Orientierung des Referenzsystems durch die Forderungen

$$\int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{c}_{RP}, t) dm = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{RP} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{c}_{RP}, t) dm = \mathbf{0} \quad (2.176)$$

festgelegt. Dabei verschwinden der Impuls und Drehimpuls resultierend aus der Verformung des Körpers und es folgt nach [SchwertassekWallrapp99]

$$\mathbf{C}_t^T \dot{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_{r0}^T \dot{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{0}. \quad (2.177)$$

Somit werden die Bewegung des Referenzsystems und die elastische Deformationen möglichst weit voneinander entkoppelt.

Beim Buckens-System liegt der Ursprung des Referenzsystems im Schwerpunkt des deformierten Körpers, siehe Abbildung 2.6. Deshalb handelt es sich um ein körperbezogenes bzw. schwerpunktbezogenes Referenzsystem, siehe [Seifried14]. Gleichung (2.177) impliziert $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, was die Massenmatrix vereinfacht, siehe [SchwertassekWallrappShabana99]. Unter der Annahme, dass die Deformationen klein bleiben, folgt das Referenzsystem dem Körper so, dass die elastische Deformation im Mittel minimiert wird, also

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{u}^T(\mathbf{c}_{RP}, t) \mathbf{u}(\mathbf{c}_{RP}, t) dm = \min \quad (2.178)$$

gilt, siehe [SchwertassekWallrappShabana99]. Um die Bedingungen (2.177) beim Lösen der Systemgleichungen zu berücksichtigen, können die Eigenmoden der ungelagerten elastischen Struktur als Ansatzfunktionen in Gl. (2.74) verwendet werden. Werden alle Starrkörperformen gestrichen und fällt der Ursprung des Referenzsystems mit dem Körperschwerpunkt im undeformierten Zustand zusammen, so sind die Zwangsgleichungen (2.177) nach [Veubeke76, SchwertassekWallrapp99] automatisch erfüllt. Nach [Wielenga84] kann Gl. (2.176) so interpretiert werden, dass die ersten drei Bedingungen das Referenzsystem im Schwerpunkt fixieren und die übrigen drei verhindern, dass die Deformation eine Rotation relativ zum Referenzsystem erzeugen kann.

Verglichen mit anderen Referenzsystemen ergibt das Buckens-System die kleinsten Verformungen. Zusätzlich verschwinden die Kopplungsmatrizen $\mathbf{C}_t$ und $\mathbf{C}_{r0}$, weshalb die Starrkörperbewegung und die elastische Deformation teilweise entkoppelt sind. Somit führt die Verwendung vom Buckens-System als Referenzsystem nahezu zu einer Massenmatrix $\mathbf{M}_e$ in Blockdiagonalform, siehe Gl. (2.94).

2.8 Standard Input Daten

Zur Berechnung der Massenmatrix (2.93) und der Zentrifugal- und Corioliskräfte (2.100), müssen die Volumenintegrale zu jedem Schritt der Zeitintegration ausgewertet werden, da sie zum Teil von den elastischen Koordinaten $\mathbf{q}_e$ abhängen. Für eine effiziente Berechnung können die Volumenintegrale als Reihe in den elastischen Koordinaten geschrieben werden, siehe [Wallrapp93, SchwertassekWallrapp99]. Wird eine lineare Beschreibung der Verformung angenommen, so können dabei die Terme zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Damit kann jedes Volumenintegral $\mathbf{X}(\mathbf{q}_e)$ über die Reihe

$$\mathbf{X}(\mathbf{q}_e) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1(\mathbf{q}_e) \quad (2.179)$$

dargestellt werden. Dabei beschreibt $\mathbf{X}_0$ den konstanten Anteil und $\mathbf{X}_1$ den in $\mathbf{q}_e$ linearen Anteil. Die zur Definition dieser Volumenintegrale $\mathbf{X}(\mathbf{q}_e)$ notwendigen Grundintegrale **C1** bis **C6**, auch Ortsintegrale genannt, werden in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Die detaillierte Herleitung der in Tabelle 2.1 aufgeführten Ortsintegrale ist beispielsweise [SchwertassekWallrapp99] zu entnehmen. Im Weiteren werden nur einzelne Ortsintegrale näher erläutert.

Die globalen Ansatzfunktionen zur Berechnung der Ortsintegrale in Tabelle 2.1 sind unbekannt, da aus dem FE-Programm lediglich die Massen- und die Steifigkeitsmatrix bereitgestellt werden. Aus der Modellreduktion kann zusätzlich die Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ bestimmt werden. Zur Berechnung der Ortsintegrale werden daher die translatorischen und rotatorischen Starrkörperbewegungen des unreduzierten Modells in der Referenzkonfiguration herangezogen. Die Matrix $\mathbf{S}_t$ enthält die translatorischen Starrkörperbewegungen des unreduzierten Modells, während die Matrix $\mathbf{S}_r$ die entsprechende rotatorische Starrkörperbewegung enthält. Mit diesen Matrizen sind diejenigen Bewegungen des FE-Körpers festgelegt, die keine Verzerrungen und Spannungen im elastischen Körper hervorrufen, siehe [Lehner07, SchwertassekWallrapp99]. Die Matrix $\mathbf{S}_e$, die beispielsweise zur Berechnung des Ortsintegrals **C1** benötigt wird, entspricht der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ aus der Modellreduktion. Mit diesen Matrizen können die Ortsintegrale über die dritte Spalte von Tabelle 2.1 berechnet werden.

Nach [SchwertassekWallrapp99] wird die Matrix **C3** aus Tabelle 2.1 komponentenweise zusammengesetzt aus

$$\mathbf{C3}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_0} \Phi_{\alpha*}^T \Phi_{\beta*} dm = [\mathbf{C3}_{\alpha\beta}]_{kl}, \quad (2.180)$$

wobei $\alpha*$ und $\beta*$ jeweils die Spalten der sortierten Matrix der Ansatzfunktionen $\Phi \in \mathbb{R}^{n_{fe}^k \times 3 \times n_q}$ darstellen, während $[\mathbf{C3}_{\alpha\beta}]_{kl}$ einen skalaren Eintrag der Matrix **C3** beschreibt. Die Matrizen $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$ werden aus den FE-Matrizen nach

Tabelle 2.1: Übersicht über die Ortsintegrale. Hierbei gilt $k, l = 1 \dots n_q$ und $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Der Index $\alpha*$ bezeichnet die α -te Zeile einer Matrix, während der Index $*k$ die k -te Spalte bezeichnet.

Bezeichnung	Integral	Berechnung aus FE-Matrizen	Dimension
C1	$\int_{\Omega_0} \Phi \, dm$	$\mathbf{S}_t^T \mathbf{M}_e \mathbf{S}_e$	$[3 \times n_q]$
C2	$\int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{RP} \Phi \, dm$	$\mathbf{S}_r^T \mathbf{M}_e \mathbf{S}_e$	$[3 \times n_q]$
C3	$\int_{\Omega_0} \Phi_{\alpha*}^T \Phi_{\beta*} \, dm$	$\mathbf{S}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{S}_e$	$[n_q \times n_q]$
C4_l	$\int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{RP} \tilde{\Phi}_{*l} \, dm$	$[\mathbf{C4}_l]_{*\alpha} = -\mathbf{S}_r^T \tilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} [\mathbf{S}_e]_{*l}$	$[3 \times 3]$
C5_l	$\int_{\Omega_0} \tilde{\Phi}_{*l} \Phi \, dm$	$[\mathbf{C5}_l]_{\alpha*} = [\mathbf{S}_e]_{*l}^T \tilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} \mathbf{S}_e$	$[3 \times n_q]$
C6_{kl}	$\int_{\Omega_0} \tilde{\Phi}_{*k} \tilde{\Phi}_{*l} \, dm$	$[\mathbf{C6}_{kl}]_{\alpha\beta} = [\mathbf{S}_e]_{*k}^T \tilde{\mathbf{M}}_{e\alpha\beta} [\mathbf{S}_e]_{*l}$	$[3 \times 3]$

Tabelle 2.1 berechnet, indem in den Matrizen $\mathbf{S}_e$ und $\mathbf{M}_e$ die Zeilen α bzw. Spalten β verwendet werden. Aus dem Ortsintegral **C3** bzw. aus Gl. (2.180) wird die reduzierte Massenmatrix über

$$\bar{\mathbf{M}}_e = \mathbf{C3} = \mathbf{C3}_{11} + \mathbf{C3}_{22} + \mathbf{C3}_{33} \quad (2.181)$$

ermittelt. Die l -te Komponente des Ortsintegrals **C4** ist definiert als

$$\mathbf{C4}_l = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{RP} \tilde{\Phi}_{*l} \, dm. \quad (2.182)$$

Zur Berechnung der schiefsymmetrischen Matrix $\tilde{\Phi}_{*l}$ in Gl. (2.182) aus FE-Matrizen wird nach [SchwertassekWallrapp99] die Matrix $\mathbf{K}_{Fr\alpha}$ eingeführt. Bei isoparametrischen Elementen kann sie mit der FE-Massenmatrix $\mathbf{M}_e$ ausgedrückt werden als

$$\mathbf{K}_{Fr\alpha} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{e}}_\alpha) \mathbf{M}_e = \tilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times n_{fe}}, \quad (2.183)$$

mit der schiefsymmetrischen Matrix $\tilde{\mathbf{e}}_\alpha$ bestehend aus den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha = 1, 2, 3$. Nach [SchwertassekWallrapp99] wird über

$$\mathbf{K}_{Fr\alpha} = \frac{1}{2} \left(\text{diag}(\tilde{\mathbf{e}}_\alpha) \mathbf{M}_e - (\text{diag}(\tilde{\mathbf{e}}_\alpha) \mathbf{M}_e)^T \right) \quad (2.184)$$

gewährleistet, dass $\mathbf{K}_{\text{Fr}\alpha}$ schiefsymmetrisch bleibt. Die α -te Spalte der l -ten Komponente der Matrix $\mathbf{C4} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times n_q}$ kann nach [Lehner07] aus den FE-Matrizen berechnet werden über

$$[\mathbf{C4}_l]_{*\alpha} = -\mathbf{S}_r^T \mathbf{K}_{\text{Fr}\alpha} [\mathbf{S}_e]_{*l} = -\mathbf{S}_r^T \widetilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} [\mathbf{S}_e]_{*l} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad (2.185)$$

mit $\alpha = 1, 2, 3$ und $l = 1 \dots n_q$ und der entsprechenden Matrix $\mathbf{K}_{\text{Fr}\alpha}$ aus Gl. (2.183). Das Ortsintegral $\mathbf{C5}$ wird komponentenweise über

$$\mathbf{C5}_l = \int_{\Omega_0} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} \boldsymbol{\Phi} \, dm \quad (2.186)$$

ermittelt, wobei der Index $*l$ die l -te Zeile darstellt. Diese wird aus den FE-Matrizen berechnet über

$$[\mathbf{C5}_l]_{\alpha*} = [\mathbf{S}_e]_{*l}^T \mathbf{K}_{\text{Fr}\alpha} \mathbf{S}_e = [\mathbf{S}_e]_{*l}^T \widetilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} \mathbf{S}_e \in \mathbb{R}^{1 \times n_q}, \quad (2.187)$$

mit $\alpha = 1, 2, 3$ und $l = 1 \dots n_q$. Der Index $\alpha*$ beschreibt die α -te Spalte der $n_q \times 3 \times n_q$ -Matrix $\mathbf{C5}$. Der Ausdruck $[\mathbf{S}_e]_{*l}$ beschreibt den l -ten Basisvektor der Projektionsmatrix $\mathbf{S}_e$. Zum Schluss wird das Ortsintegral $\mathbf{C6}$ betrachtet, welches nach [SchwertassekWallrapp99] definiert ist als

$$\mathbf{C6}_{kl} = \int_{\Omega_0} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*k} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} \, dm, \quad (2.188)$$

und aus den FE-Matrizen berechnet wird über

$$\mathbf{C6}_{kl} = [\mathbf{C6}_{kl}]_{\alpha\beta} = [\mathbf{S}_e]_{*k}^T \widetilde{\mathbf{M}}_{e\alpha\beta} [\mathbf{S}_e]_{*l} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \quad (2.189)$$

mit $\alpha = 1, 2, 3$ und $k, l = 1 \dots n_q$. Die Matrix $\widetilde{\mathbf{M}}_{e\alpha\beta}$ wird über die Beziehung $\text{diag}(\widetilde{\mathbf{e}}_\alpha) \mathbf{M}_e \text{diag}(\widetilde{\mathbf{e}}_\beta)$ ermittelt, wobei $\mathbf{e}_\alpha \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{e}_\beta \in \mathbb{R}^3$ die Einheitsvektoren mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ darstellen, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Die $n_q \times n_q$ -Matrix $\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}$ kann mit den skalaren Einträgen $[\mathbf{C6}_{kl}]_{\alpha\beta}$ der Matrix $\mathbf{C6}$ ausgedrückt werden als

$$\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta} = [\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}]_{kl} = [\mathbf{C6}_{kl}]_{\alpha\beta}, \quad (2.190)$$

oder in Abhängigkeit des Ortsintegrals $\mathbf{C3}$ zu

$$\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta} = \mathbf{C3}_{\alpha\beta} \quad \text{für } \alpha \neq \beta \quad \text{und} \quad (2.191)$$

$$\mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha} = -\mathbf{C3}_{\beta\beta} - \mathbf{C3}_{\gamma\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{zyklische Permutationen von } 1, 2, 3.$$

Anhand der Volumenintegrale (2.179) in Verbindung mit den Ortsintegralen aus Tabelle 2.1 können alle Einträge in der Massenmatrix und dem Vektor der Zentrifugal- und Corioliskräfte lediglich aus den Starrkörperdaten, bestehend aus der Masse m , dem Schwerpunkt $\mathbf{c}_0$ und dem Massenträgheitsmoment $\mathbf{I}_0$ im undeformierten Zustand dargestellt werden. Mit diesem Ansatz können alle notwendigen Terme vorab ausgewertet und zusammen mit den Informationen zur Diskretisierung des FE-Körpers in den sogenannten Standard Input Data (SID) Dateien zusammengefasst werden, siehe [Wallrapp94].

2.9 Spannungsberechnung über Spannungsmoden

Bei der Analyse von technischen Systemen ist neben der globalen Bewegung oftmals die im Inneren auftretenden Beanspruchung von Interesse. Mit der FEM können Verformung, Spannungen und Dehnungen zuverlässig bestimmt werden. Für die dynamische Untersuchung elastischer Körper, die nichtlineare Bewegungen über lange Simulationszeiten ausführen, bieten sich FMKS in Kombination mit reduzierten elastischen Körpern an. Die Berechnung der Spannungsverteilung in diesen reduzierten FMKS wird beispielsweise in [TobiasEberhard11, Tobias12] vorgestellt und wird in diesem Abschnitt kurz erläutert. Die Spannungen werden später zur Analyse der Kontaktvorgänge benötigt.

Unter Annahme eines linear elastischen Materialverhaltens werden die Spannungen σ_P am Punkt P eines FE-Körpers mit der Materialmatrix $\hat{C}$ aus Gl. (2.47) und dem Zusammenhang zwischen Dehnungen und Verschiebungen aus Gl. (2.62) berechnet als

$$\hat{\sigma}_P = \hat{C}_P \hat{\epsilon}_P = \underbrace{\hat{C}_P L_L \Phi_P}_{\Phi_{\sigma,P}} q_e, \quad (2.192)$$

siehe [Bathe96]. Nach dem Zusammenfassen von $\hat{C}_P L_L \Phi_P = \Phi_{\sigma,P}$ können die umsortierten Spannungen $\hat{\sigma}_P = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{31}]^T$ am Punkt P als Linearkombination der Spannungsmoden $\Phi_{\sigma,P}$ und der elastischen Koordinaten q_e dargestellt werden, siehe [TobiasEberhard11]. Alle Spannungsmoden $\Phi_{\sigma,Pi}$ mit $i = 1 \dots m$ können zur globalen Spannungsmodenmatrix Φ_σ zusammengefasst werden.

Für eine effiziente Spannungsberechnung, die auch während der FMKS-Simulation möglich ist, wird die reduzierte Matrix der Spannungsmoden über Modellreduktionsverfahren aus Abschnitt 2.6 berechnet, siehe [TobiasEberhard11, Tobias12]. Die Spannungen aller reduzierten elastischen Koordinaten werden dann mit der globalen Matrix der Spannungsmoden Φ_σ approximiert über

$$\hat{\sigma} \approx \Phi_\sigma V \bar{q}_e = \bar{\Phi}_\sigma \bar{q}_e, \quad (2.193)$$

mit der reduzierten Matrix der Spannungsmoden $\bar{\Phi}_\sigma$, welche die Spannungsverteilung resultierend aus der Auslenkung einer elastischen Koordinate $\bar{q}_e$ beschreibt. Die reduzierte Matrix der Spannungsmoden $\bar{\Phi}_\sigma$ wird vor der Zeitsimulation berechnet und in den SID Dateien gespeichert. Aufgrund der reduzierten Freiheitsgrade ist damit eine effiziente Spannungsberechnung in jedem Integrationsschritt möglich.

2.10 Frequenzgangmatrix

Zur Untersuchung des Übertragungsverhaltens eines Systems werden in der linearen FE-Bewegungsgleichung (2.68) mit n_{fe} Freiheitsgraden die wirkenden

Kräfte über den zeitabhängigen Eingangsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ und die Eingangsmatrix $\mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times p}$ beschrieben. Mit dem Ausgangsvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ und der Ausgangsmatrix $\mathbf{C}_e \in \mathbb{R}^{r \times n_{fe}}$ kann das Bewegungsverhalten eines elastischen FE-Körpers über ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung beschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{D}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e &= \mathbf{B}_e \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_e \mathbf{q}_e. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Systeme können sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich dargestellt werden. Im Zeitbereich sind die Differentialgleichungssysteme, wie zum Beispiel Gl. (2.194), abhängig von zeitvarianten Größen $\mathbf{q}_e(t)$ und $\mathbf{u}(t)$. Im Frequenzbereich ist der komplexe Parameter $s = \delta + i\omega$ mit dem Amplitudendämpfungsfaktor δ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ mit der Frequenz f die unabhängige Variable, siehe [Lunze08]. Werden homogene Anfangsbedingungen $\mathbf{q}_e(0) = \dot{\mathbf{q}}_e(0) = \mathbf{0}$ vorausgesetzt, kann Gl. (2.194) durch Anwendung der Laplace-Transformation, siehe [Lunze08], in die algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} s^2 \mathbf{M}_e \mathbf{Q}(s) + s \mathbf{D}_e \mathbf{Q}(s) + \mathbf{K}_e \mathbf{Q}(s) &= \mathbf{B}_e \mathbf{U}(s), \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}_e \mathbf{Q}(s) \end{aligned} \quad (2.195)$$

überführt werden, siehe [Lehner07, Lunze08]. Dabei stellen $\mathbf{Q}(s)$, $\mathbf{U}(s)$ und $\mathbf{Y}(s)$ die Laplace-Transformierten der Vektoren $\mathbf{q}_e$, $\mathbf{u}$ und $\mathbf{y}$ dar. Durch Umformen kann $\mathbf{Q}(s)$ in Gl. (2.195) eliminiert werden und es folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}_e \left(s^2 \mathbf{M}_e + s \mathbf{D}_e + \mathbf{K}_e \right)^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{U}(s) \\ &= \mathbf{H}(s) \mathbf{U}(s), \end{aligned} \quad (2.196)$$

mit der Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{C}^{r \times p}$, siehe [Lunze10]. Für den Fall von ungedämpften Signalen $s = i\omega$ wird die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(i\omega) \in \mathbb{C}^{r \times p}$ als Frequenzgangmatrix bezeichnet und kann zur Analyse harmonisch erregter Systeme verwendet werden. Die Frequenzgangmatrix beschreibt den Zusammenhang zwischen harmonischen Sinusanregungen der Eingänge und den harmonischen Schwingungen der Ausgänge. Der Betrag des Eintrags $|H_{ij}(s)|$ der Frequenzgangmatrix entspricht der Amplitudenverstärkung des j -ten Eingangssignals auf die i -te Ausgangsgröße und das Argument $\varphi(H_{ij}(s))$ stellt die Phasenverschiebung dar, siehe [Lunze08]. Um die Frequenzgangmatrix auf einen reellen, skalaren Wert zu reduzieren kann die Frobenius-Norm

$$\|\mathbf{H}(i\omega)\|_F = \sqrt{\text{Spur}(\mathbf{H}^H(i\omega) \mathbf{H}(i\omega))} \quad (2.197)$$

verwendet werden, wobei $\mathbf{H}^H(i\omega)$ die Adjungierte von $\mathbf{H}(i\omega)$ darstellt, siehe [Soppa11]. Diese normierte Frequenzgangmatrix wird im weiteren Verlauf zur Analyse der reduzierten Körper verwendet.

KONTAKTMODELLE

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der effizienten und präzisen numerischen Analyse von Stoßvorgängen mit reduzierten FMKS. Aufgrund der hohen Anzahl an Knotenfreiheitsgraden, die bei Stoßanalysen typischerweise erforderlich sind, ist die nichtlineare FE-Simulation bei der dynamischen Kontaktanalyse beschränkt auf sehr kurze Simulationszeiten. Die Untersuchung des nichtlinearen Bewegungsverhaltens der Körper vor und nach dem Kontaktvorgang ist damit nicht praktikabel. Für eine effiziente Kontaktsimulation im Zeitbereich werden in dieser Arbeit FMKS mit einem Kontaktmodell kombiniert. Durch die Verwendung des Ansatzes des mitbewegten Referenzsystems können die elastischen Körper effizient über reduzierte lineare FE-Körper, siehe Abschnitt 2.6, beschrieben werden. Damit können sowohl die nichtlineare Bewegung als auch die beim Stoß auftretende elastische Deformation effizient berechnet werden. Wird die Bewegung der Körper durch einen Kontaktvorgang unterbrochen, so werden die daraus resultierenden Kräfte über das Kontaktmodell anhand von Kontaktelementen ermittelt. Für präzise Ergebnisse ist dabei die genaue Abbildung der lokalen Deformation und Spannungen in der Kontaktzone der reduzierten Körper erforderlich. Außerdem ist die Erfassung der elastodynamischen Effekte in den Körpern sowie das globale Bewegungsverhalten nach dem Stoß von Interesse. Für eine effiziente und präzise Stoßanalyse mit reduzierten FMKS werden in diesem Kapitel Kontaktmodelle entwickelt.

In diesem Kapitel wird in Abschnitt 3.1 zunächst ein Überblick über verschiedene Kontaktformulierungen gegeben, die häufig im Rahmen der MKS- und FMKS-Simulation verwendet werden. Anschließend werden in Abschnitt 3.2 die Grundlagen der Kontaktmodellierung vorgestellt. Dabei wird in Abschnitt 3.2.1 als erstes die Kontaktmodellierung in der FEM diskutiert und anschließend in Abschnitt 3.2.2 die in der FMKS-Simulation verwendete Kontaktbeschreibung eingeführt. Dabei handelt es sich um eine knotenbasierte Kontaktkraftberechnung in Kombination mit reduzierten FMKS, die sich auf den reibungsfreien Normalkontakt beschränkt.

Anschließend wird in Abschnitt 3.3 anhand eines Beispiels der Einfluss der Modellreduktionsverfahren auf die Ergebnisse der Stoßanalyse dargestellt. Basierend auf diesen Ergebnissen werden in dieser Arbeit zwei Kontaktsubmodelle für FMKS mit dem Buckens-System als Referenzsystem vorgestellt. Dazu wird in

Abschnitt 3.4 zunächst auf Basis des Buckens-Systems die Massenmatrix vereinfacht und anschließend die Bewegungsgleichungen in nieder- und hochfrequente Anteile aufgeteilt. Basierend auf dieser Aufteilung wird in Abschnitt 3.5 ein gedämpftes Kontaktsubmodell vorgestellt. Als Grundlage für das zweite in dieser Arbeit entwickelte Kontaktsubmodell wird in Abschnitt 3.6 die statische Kondensation der hochfrequenten Ansatzfunktionen erläutert. Basierend darauf, wird in Abschnitt 3.7 das quasi-statische Kontaktsubmodell mit der iterativen Berechnung der lokalen Deformation abhängig von den Kontaktkräften mit dem Broyden-Verfahren zur effizienten Nullstellensuche vorgestellt.

3.1 Aktueller Stand

Kontakt- und Stoßsimulationen treten in vielen Anwendungen der Maschinendynamik auf und sind theoretisch und numerisch herausfordernde Probleme. In den letzten Jahrzehnten wurden daher eine Vielzahl von Kontaktformulierungen im Rahmen der FEM, MKS und FMKS veröffentlicht. Im folgenden Abschnitt werden häufig verwendete Ansätze mit Fokus auf FMKS ohne Anspruch auf Vollständigkeit zusammengefasst.

Bei der Stoßanalyse mit FE-Modellen können Effekte wie die globale Deformation der Körper, beispielsweise in Form von Wellenausbreitung, und die lokale Verformung in der Kontaktzone genau erfasst werden. Unter Vernachlässigung der dynamischen Effekte ist die statische FE-Analyse ein geeignetes Verfahren für statische Kontaktuntersuchungen. Damit können auch die in Kontaktanalysen typischerweise sehr fein diskretisierten Modelle effizient berechnet werden, siehe [BlockmansEtAl15, Seifried05]. Bei der dynamischen Kontaktanalyse in der FEM ist die Rechenzeit aufgrund der vielen Knotenfreiheitsgrade zur Erfassung aller Verformungseffekte und der Einhaltung der Ungleichungsnebenbedingungen des Normalenkontakts, die stets auf ein nichtlineares Problem führen, dagegen sehr hoch, siehe [Wriggers06]. Die oftmals verwendeten expliziten Verfahren benötigen sehr kleine Zeitschrittweiten, weshalb die Untersuchung des globalen nichtlinearen Bewegungsverhaltens vor und nach dem Stoß in der Regel mit der nichtlinearen FEM nicht praktikabel sind.

Für eine effiziente Stoßuntersuchung bietet sich die Methode der MKS in Kombination mit einem Kontaktmodell an. Zur Modellierung von Stößen in MKS werden häufig die unstetige oder die zeitkontinuierliche Stoßmodellierung verwendet, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10]. Die unstetige Stoßmodellierung basiert auf der klassischen Stoßtheorie für starre Körper. Die Kontaktdauer wird dabei als infinitesimal kurz angenommen und die Kontaktberechnung erfolgt auf Geschwindigkeitsebene, indem der benötigte Stoßimpuls beispielsweise über die Poissonschen Stoßhypothese berechnet wird, siehe [Eberhard00, PfeifferGlocker04]. Die zeitkontinuierliche Stoßmodellierung erfolgt dagegen auf Beschleunigungsebene, wobei der Stoß als kurzer andauernder Kontakt mit endlicher

Zeitdauer modelliert wird, siehe [LankaraniNikraves92, SeifriedSchiehlenEberhard10]. Daraus können die Kontaktkräfte über kontinuierliche Kraft-Eindringungs-Gesetze berechnet werden, siehe zum Beispiel [LankaraniNikraves90, LankaraniNikraves92]. Diese Stoßmodelle basieren auf dem Hertzschen Kontaktgesetz und werden als nichtlineare Potenzfunktion abhängig von den Materialparametern der gestoßenen Körper und der Stoßzahl beschrieben, siehe [Hertz82].

Vorteile dieser Methoden bei MKS liegen in der Einfachheit sowie der hohen numerischen Effizienz und der einfachen Implementierung. Sowohl die unstetige als auch die zeitkontinuierliche Stoßmodellierung basieren auf der Stoßzahl, die entweder über Experimente oder über numerische Simulationen bestimmt werden muss, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10]. Sie fasst unterschiedliche Effekte der Energiedissipation der kinetischen Energie während des Stoßes zusammen. Dazu zählen nichtlineare Materialabhängigkeiten und die Energiedissipation durch die elastische und plastische Verformung, siehe [Seifried05]. Die Stoßzahl hängt zum einen von der Form und den Materialparametern und zum anderen von den Bewegungszuständen der Körper ab. Da zur Definition der Stoßzahlen die Zustände vor und nach dem Stoß bekannt sein müssen, siehe [PfeifferGlocker04], ist eine Berechnung der Stoßzahl innerhalb des Ansatzes der MKS nicht möglich. Dies ist zum Beispiel mit einer Mehrskalensimulation mittels Kontaktberechnung, beispielsweise über die FEM, möglich, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10].

In einer Mehrskalensimulation, vorgestellt in [Seifried05, SeifriedSchiehlenEberhard10], wird die Starrkörpersimulation auf der langsamen Zeitskala durch einen Stoß unterbrochen. Die verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten vor dem Stoß werden dann von der langsamen an die schnelle Zeitskala übergeben und dort als Anfangsbedingungen für die detaillierte Stoßsimulation verwendet. Diese ist auf die Stoßdauer begrenzt und berücksichtigt für den Stoß auf verformbare Körper elastodynamische Welleneffekte und das elastisch-plastische Materialverhalten in der Kontaktzone. Aus der resultierenden Stoßkraft wird die kinematische Stoßzahl berechnet, welche an die Simulation auf der langsamen Zeitskala zurückgegeben wird. Diese Mehrskalensimulation wird zur Analyse von Stößen und den resultierenden Welleneffekte in [Seifried05] und [SeifriedSchiehlenEberhard10] verwendet. Bei Stößen auf schlanke Körper wird ein Teil der kinetischen Energie der Starrkörperbewegung in Deformationsenergie umgewandelt, die sich in Form von Wellen von der Kontaktzone in den Körpern ausbreitet. Zur Untersuchung dieser Effekte können Methoden der Elastodynamik verwendet werden, siehe zum Beispiel [HuSchiehlen03]. Der Kontakt stellt immer ein nichtlineares Problem dar, während die Wellenausbreitung ein lineares Problem darstellt. Daher können zur Modellierung der globalen linearen elastodynamischen Bewegung auf der langsamen Zeitskala auch modal reduzierte lineare FE-Modelle verwendet werden, siehe [Seifried05, SeifriedSchiehlenEberhard10]. Die Kontaktkräfte werden über einen FE-Kontakt, bestehend aus dem FE-Modell des Kontaktgebiets, auf der schnellen Zeitskala berechnet. Dabei wer-

den die Kontaktkräfte aus den Verschiebungen direkt berechnet oder es wird vorab ein Kraft-Verschiebungs-Diagramm über eine statische FE-Analyse ermittelt, siehe [Seifried05]. Für kugelförmige Körper mit rein elastischem Materialverhalten kann in der Mehrskalensimulation auch das Hertzsche Kontaktgesetz, siehe [Hertz82], mit seinen Erweiterungen auf verschiedene Kontaktgeometrien, siehe [Johnson87, TimoshenkoGoodier70], verwendet werden, siehe [Seifried-SchiehlenEberhard10].

Bei FMKS spielt die Kombination der Kontaktformulierung und der Modellierung der Flexibilität der Körper eine wichtige Rolle. Für eine genaue und effiziente Modellierung der hochdynamischen Effekte bei Stößen werden Modellreduktionsverfahren zur Reduktion der vollen FE-Modelle verwendet. Bei der Kombination von reduzierten FMKS mit Kontaktmodellen werden zur dreidimensionalen Kontaktbeschreibung oft Kontaktelemente verwendet. In [ZieglerEberhard08, ZieglerEberhard11] werden modal reduzierte Modelle, siehe Abschnitt 2.6.1, zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Stößen zwischen Zahnrädern verwendet. Dabei wird zur Beschreibung der elastischen Deformation eine relativ geringe Anzahl an Eigenmoden benutzt. Aufgrund der geringen Größe der Projektionsmatrizen ist eine sehr effiziente numerische Simulationen möglich. Während die globale Deformation mit wenigen Eigenmoden typischerweise sehr gut approximiert wird, siehe [SchiehlenSeifried04, TamarozziEtAl13b], sind jedoch zur genauen Erfassung der lokalen Verformung und Spannung in der Kontaktzone viele Eigenmoden erforderlich, wodurch sich die numerische Effizienz erheblich verschlechtert.

Zur gleichzeitigen Beschreibung der lokalen und der globalen Verformung bieten sich Modellreduktionsverfahren der CMS nach Abschnitt 2.6.2 an. Durch die statisch komplette Beschreibung über statische Ansatzfunktionen aus Einheitsverschiebungen oder Einheitslasten ist eine sehr genaue Erfassung der Deformation der Kontaktzonen möglich. In der Kontaktzone treten aufgrund der hohen Kontaktkräfte steile Spannungsgradienten in relativ kleinen Bereichen auf, siehe [BlockmansEtAl15]. Zur genauen Erfassung dieser Spannungsfelder wird bei Kontaktproblemen typischerweise eine sehr fein diskretisierte Kontaktzone benötigt. Für alle Knotenfreiheitsgrade in der Kontaktzone werden beim CMS-Verfahren statische Ansatzfunktionen berechnet. Aus der feinen Diskretisierung resultiert eine große Anzahl möglicher belasteter Knotenfreiheitsgrade, die jedoch nicht notwendigerweise gleichzeitig belastet werden müssen. Dies führt zu einer Projektionsmatrix mit relativ großer Dimension. Um diese Problematik zu umgehen wird in [TamarozziEtAl13b] das *Static Mode Switching*-Verfahren, vorgestellt in [HeirmanTamarozziDesmet11], zur Analyse dynamischer Kontakte verwendet. Da bei Kontakten zwischen Zahnrädern nur wenige statische Ansatzfunktionen gleichzeitig belastet werden, wird die Projektionsmatrix so angepasst, dass sie nur die Ansatzfunktionen enthält, die tatsächlich zur Lösung beitragen. Durch das Hinzufügen und Entfernen der Ansatzfunktionen in der Projektions-

matrix wird zusätzlicher Rechenaufwand benötigt und es entstehen künstliche Diskontinuitäten, die numerische Integratoren mit hochfrequenter numerischer Dämpfung, siehe [TamarozziEtAl13a], oder ein Anpassen der Umschaltstrategie, siehe [TamarozziEtAl13b], erfordern. Die Dämpfungsparameter der numerischen Integratoren müssen separat bestimmt werden und können einen negativen Einfluss auf das globale Deformationsverhalten haben. Die Effizienz des *Static Mode Switching*-Verfahrens hängt zudem von der Auflösung des FE-Netzes in der Kontaktzone ab und nimmt mit der Anzahl der gleichzeitig in Kontakt tretenden Knoten ab.

In Kontaktsimulationen sind Modellreduktionsverfahren wie die modale Reduktion und CMS aufgrund der physikalisch interpretierbaren Basisvektoren in der Projektionsmatrix verbreitet. Die bei Kontaktsimulationen übliche feine Vernetzung der Kontaktzone führt bei CMS zu einer sehr großen Anzahl Freiheitsgrade, die nicht immer gleichzeitig belastet sein müssen. Die Größe dieser reduzierten Modelle ist daher dann oft beschränkt auf mehrere hundert oder tausend reduzierte elastische Freiheitsgrade. Die große Anzahl an Systemeins- und -ausgängen kann sich zudem negativ auf die Berechnungszeit der Projektionsmatrix auswirken, siehe [Nowakowski15]. Verfahren auf der Basis von Krylov-Unterräumen versuchen das Eingangs- und Ausgangsverhalten des vollen Systems anzunähern, siehe [Lehner07, Nowakowski15], benötigen für eine gute Approximation von Feldvariablen wie Spannungen und Dehnungen jedoch eine sehr große Anzahl Eingangs- und Ausgangs-Beziehungen, siehe [BlockmansEtAl15]. Daher bietet sich bei Kontaktsimulationen, insbesondere bei Zahnradkontakten, die parametrische Modellreduktion an. Bei Zahnraduntersuchungen variiert die Lage und die Größe der Kontaktfläche aufgrund der Rotation der Zahnräder sehr stark, was typischerweise viele Ansatzfunktionen bzw. Systemeins- und -ausgänge erfordert, siehe [BlockmansEtAl15]. Hierfür bietet sich die parametrische Modellreduktion an, bei der die Positionen der Kontaktkräfte im vollen FE-Modell parametrisiert und diese Parameterabhängigkeit dann bei der Modellreduktion berücksichtigt wird, siehe [TamarozziHeirmanDesmet14]. Als Projektionsmatrix wird ein Satz Eigenvektoren verwendet, der um einen parameterabhängigen Satz statischer Ansatzfunktionen erweitert wird. Dieser wird aus einem Satz globaler Kontaktformen der interagierenden Körper über statische Kontaktanalysen vorab berechnet. Die Interpolation zwischen diesen globalen Ansatzfunktionen erfolgt über Parameter, welche in der Starrkörperkonfiguration des Mehrkörpersystems beschrieben werden. Daraus ergibt sich eine kontinuierlich variierende Projektionsmatrix relativ geringer Dimension, abhängig von den Zähnen die gerade in Kontakt sind.

Für Getriebesimulationen wird in [CappelliniEtAl18, TamarozziEtAl18] eine hybride Methode aus einer Kombination eines analytischen Ansatzes und einem numerischen Penalty-Verfahren vorgestellt. Dabei wird die Kontaktverformung aufgeteilt in zwei Komponenten: Zum einen in die lokale Deformation und zum

anderen in die globale lineare Verformung. Die lokale Deformation wird über analytische Formeln basierend auf dem Hertzschen Kontaktgesetz berechnet, während die globale Verformung mit FE-Modellen modelliert wird. Diese globale Verformung der Zahnräder wird durch eine reduzierte Steifigkeitsmatrix dargestellt. Die benötigte Projektionsmatrix wird aus einer Reihe statischer FE-Lösungen der potentiellen Kontaktknoten auf den verschiedenen Zähnen erstellt. Da zu einem bestimmten Zeitpunkt nur wenige Zähne am Kontakt beteiligt sind, wird die reduzierte Steifigkeitsmatrix während der Simulation dynamisch aufgebaut, ähnlich wie beim *Static Mode Switching*-Verfahren, siehe [HeirmanTamarozzi-Desmet11]. Damit sind quantitative Ergebnisse mit einer ähnlichen Genauigkeit wie mit FE-Modellen bei einem wesentlich geringeren Rechenaufwand möglich.

Der Beitrag dieser Arbeit sind Methoden für effiziente und präzise numerischen Stoßanalyse, die auf den klassischen Modellreduktionsverfahren, wie der modalen Reduktion oder dem CB-Verfahren basieren. Diese Methoden berücksichtigen dabei die verhältnismäßig große Dimension der Projektionsmatrix resultierend aus den vielen statischen Ansatzfunktionen in der Kontaktzone und deren hohe, künstlich in das reduzierte System eingebrachte, Eigenfrequenzen. Die numerische Effizienz der dynamischen Simulation wird mit den entwickelten Methoden verbessert, indem im physikalisch relevanten Frequenzbereich der Einfluss der hochfrequenten statischen Ansatzfunktionen verringert wird. Es wird dabei auf aufwändige pre-processing Schritte zusätzlich zur Modellreduktion verzichtet. Das Hauptaugenmerk liegt deshalb auf der einfachen Handhabung und Integration in die Prozesskette zur FMKS-Simulation. Die Grundlagen der dabei verwendeten Kontaktmodellierung werden im nächsten Abschnitt erläutert.

3.2 Kontaktmodellierung in flexiblen Mehrkörpersystemen

Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf dem reibungsfreien Normalenkontakt zwischen elastischen Körpern der über die Lagrange- und Penalty-Formulierung modelliert wird. In diesem Abschnitt werden zunächst die Grundlagen des reibungsfreien Normalenkontakts im Rahmen der FEM erläutert, deren Darstellung sich an [Eberhard00] orientiert. Anschließend wird die in dieser Arbeit verwendete Kontaktmodellierung mit einer FE-Kontaktbeschreibung in Kombination mit reduzierten FMKS und der dabei verwendete Kontaktalgorithmus vorgestellt.

3.2.1 Grundlagen der Kontaktmodellierung in der FEM

Es werden die zwei in Abbildung 3.1 dargestellten Körper $i = 1, 2$ mit den inneren Bereichen Ω^i und den Randbereichen Γ^i betrachtet. Der Randbereich Γ eines einzelnen Körpers setzt sich zu jedem Zeitpunkt aus den drei Teilbereichen

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c \quad (3.1)$$

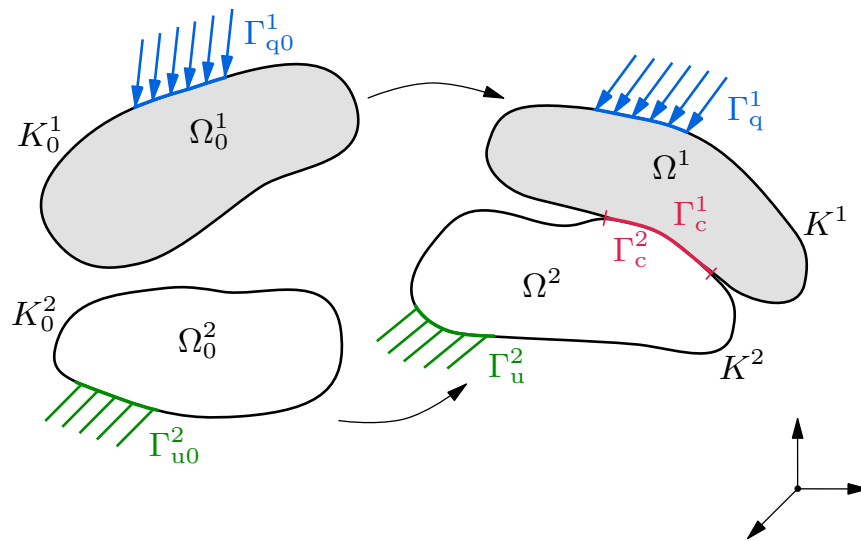


Abbildung 3.1: Kontakt zwischen zwei Körpern

zusammen, wobei Γ_u den Bereich mit vorgegebenen Verschiebungen, Γ_q den Bereich mit vorgegebenen Randspannungen und Γ_c den Kontaktbereich beschreibt. Zu jedem Zeitpunkt muss für die inneren Bereiche der beiden Körper

$$\Omega^1 \cap \Omega^2 = \{ \} \quad (3.2)$$

gelten. Diese Bedingung wird als Impenetrabilitätsbedingung bezeichnet. Sie sagt aus, dass zu keinem Zeitpunkt ein Punkt im Inneren eines Körpers zu einem anderen Körper gehören darf, siehe [Eberhard00]. Die Einhaltung dieser Impenetrabilitätsbedingung formuliert das Grundproblem bei Kontaktberechnungen und führt auf ein mathematisch schwieriges Ungleichungsproblem, welches durch die Transformation auf die Randbereiche Γ vereinfacht werden kann. Nach [Eberhard00] gilt für die Randkurven

$$\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \begin{cases} \{ \} & \text{falls kein Kontakt vorliegt,} \\ \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2 & \text{falls Kontakt vorliegt.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Die Kontaktbedingungen (3.3) führen stets zu einer Nichtlinearität. Diese resultiert daraus, dass die Verschiebung und Verformung des Körpers die Größe und Lage des Kontaktbereichs beeinflussen. Der Kontaktbereich selbst ist jedoch für eine korrekte Darstellung der Verschiebungen und Verformungen erforderlich, siehe [Eberhard00].

Mit dem skalaren Normalenabstand g_n , dargestellt in Abbildung 3.2, kann die Impenetrabilitätsbedingung (3.3) formuliert werden als $g_n \geq 0$. Diese Bedingung muss für alle Randpunkte der Körper in Kontakt eingehalten werden. Zur Berechnung dieser Eindringung g_n und zur Überprüfung der Impenetrabilitätsbedingung werden in der FEM Kontaktelemente verwendet, siehe [Eberhard00, Wriggers06]. Liegt eine Diskretisierung der Kontaktzone aus dem FE-

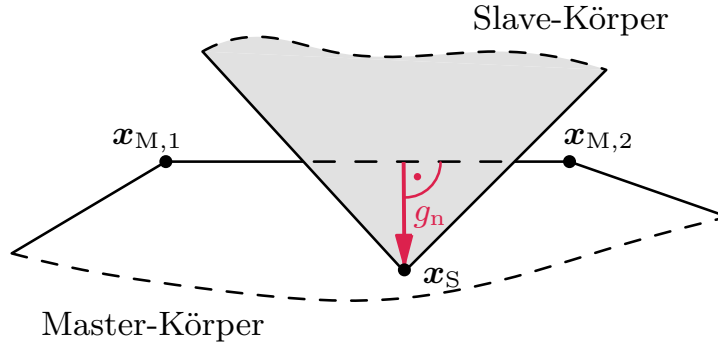


Abbildung 3.2: Normalenabstand beim zweidimensionalen Node-to-Surface Kontaktelement

Modell vor, so können die Oberflächenelemente als Kontaktelemente verwendet werden. Dazu kommen oftmals Node-to-Surface Kontaktelemente zum Einsatz, siehe [Seifried05]. Dabei werden die Körper in Kontakt zwischen Master- und Slave-Körper unterschieden, siehe Abbildung 3.2. Ein Kontaktelement besteht aus einem Master-Element und einem Slave-Knoten und verbindet damit die Körper in der Kontaktzone. Für jedes Kontaktelement wird die Eindringung des Slave-Knotens in das Master-Element geprüft, indem der skalare Abstand g_n berechnet wird und die Impenetrabilitätsbedingung $g_n \geq 0$ geprüft wird. Dabei ist g_n der Normalenabstand zwischen Slave-Knoten und dessen Auftreffpunkt auf der Master-Fläche.

Neben der Impenetrabilitätsbedingung müssen für den Normalenkontakt noch weitere Bedingungen für jeden Kontaktpunkt eingehalten werden: die Intensibilitätsbedingung $p_n \leq 0$ mit der Kontaktspannung p_n und die Komplementaritätsbedingung $g_n p_n = 0$. Die Intensibilitätsbedingung besagt, dass in der Kontaktzone nur Druckkräfte auftreten dürfen, siehe [Eberhard00]. Alle Bedingungen kombiniert ergeben das Komplementaritätsproblem des Normalenkontakts, das für alle Kontaktelemente formuliert werden kann, indem die Kontaktspannungen p_n und Abstände g_n in den Vektoren $\mathbf{p}_n$ und $\mathbf{g}_n$ zusammengefasst werden zu

$$\mathbf{g}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_n \leq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_n^T \mathbf{p}_n = 0. \quad (3.4)$$

Die letzte Bedingung im Komplementaritätsproblem des Normalenkontakts (3.4) besagt, dass nur an Punkten, die tatsächlich in Kontakt sind, Kontaktkräfte übertragen werden können. Da keine Zugkräfte übertragen werden dürfen, liegen einseitige Bindungen vor, was in jedem Fall zu einem nichtlinearen Problem führt, siehe [Eberhard00]. Die Bedingungen (3.4) werden oft auch als Hertz-Signorini-Moreau-Bedingungen für den reibungsfreien Kontakt bezeichnet, siehe [Wriggers06].

Die Kontaktbedingungen werden im Allgemeinen in die FE-Bewegungsgleichungen eingearbeitet, indem die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte an allen aktiven Kontaktelementen zum Prinzip der virtuellen Arbeit hinzugefügt wird,

siehe [Eberhard00]. Existiert ein Potential, so kann stattdessen als Ausgangspunkt zur Einarbeitung der Kontaktnebenbedingungen die Minimierung der potentiellen Energie der Körper in Kontakt herangezogen werden. Nach [Nour-OmidWriggers87, Wriggers06] kann die potentielle Energie der diskretisierten Körper formuliert werden als

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}, \quad (3.5)$$

mit dem Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ der Knotenverschiebungen und der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$, die sich jeweils aus beiden FE-Körpern zusammensetzen. Der Vektor $\mathbf{f}$ enthält die auf die Körper wirkenden Kräfte, wobei die Körper zu diesem Zeitpunkt noch nicht miteinander in Kontakt sind. Mit der potentiellen Energie (3.5) kann der Normalenkontakt nach [Eberhard00] ähnlich einem Optimierungsproblem mit Ungleichungsnebenbedingung formuliert werden als

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{P}} W(\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_c} \mid \mathbf{g}_n(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0}\}. \quad (3.6)$$

Aufgrund der Nebenbedingungen aus der Impenetrabilitätsbedingung sind die Variationen $\delta \mathbf{u}$ nicht mehr unabhängig, da sichergestellt werden muss, dass keine Eindringung auftritt. Zur Lösung des Kontaktproblems mit Ungleichungsnebenbedingungen (3.6) stehen verschiedene Formulierungen zur Verfügung, siehe [Eberhard00]. Im weiteren Verlauf werden das Lagrange- und das Penalty-Verfahren vorgestellt. Beide Kontaktberechnungsverfahren sind im proprietären FE-Programmpaket ABAQUS, siehe [Dassault Systèmes14b], enthalten. In dieser Arbeit wird das Lagrange-Verfahren zur Bestimmung der FE-Referenzlösung verwendet, während das Penalty-Verfahren in der FMKS-Simulation verwendet wird. Daher wird im Weiteren die Grundidee beider Verfahren kurz vorgestellt.

Lagrange-Verfahren

Beim Lagrange-Verfahren wird das Funktional aus der Energie W und den aktiven Nebenbedingungen gebildet als

$$L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = W(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_n, \quad (3.7)$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$, die für jeden Punkt des Kontaktbereichs Γ_c bestimmt werden müssen. Die Bedingung für ein Minimum von $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ lautet

$$\delta L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \delta W(\mathbf{u}) + \delta(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_n) = \delta W(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{g}_n + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_n = 0. \quad (3.8)$$

Die Variation $\delta \mathbf{g}_n$ kann für alle n_c aktiven Kontaktelemente ermittelt werden über

$$\delta \mathbf{g}_n = \sum_{i=1}^{n_c} \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{N}_i, \quad (3.9)$$

mit der Matrix $\mathbf{N}_i$ der Ansatzfunktionen der Kontaktelemente. Mit diesen Ansatzfunktionen werden die Kräfte des Slave-Körpers auf die Knoten des Master-Elements verteilt, siehe [Eberhard00]. Anschließendes Einsetzen in Gl. (3.8) liefert die Variation der potentiellen Energie des gesamten diskretisierten Systems zu

$$\delta L(\mathbf{u}) = \delta W(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_c} \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^{n_c} \delta \lambda_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{N}_i = 0, \quad (3.10)$$

mit den unabhängigen Variationen $\delta \mathbf{u}_i$ und $\delta \lambda_i$. Da die Anzahl der Kontaktelemente in Kontakt unbekannt ist, entstehen daraus $n_{fe} + n_c$ nichtlineare Gleichungen, da neben den unbekannten Knotenverschiebungen noch die unbekannten Lagrange-Multiplikatoren λ berechnet werden müssen. Diese haben hier die Bedeutung einer Kontaktkraft, welche das Eindringen des Slave-Körpers in den Master-Körper verhindert.

Penalty-Verfahren

Beim Penalty-Verfahren werden die Nebenbedingungen nicht exakt eingehalten, sondern durch den Strafterm

$$\lambda = \frac{1}{2} c_P \mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n, \quad (3.11)$$

ersetzt, der einer Näherung der Lagrange-Multiplikatoren in Gl. (3.7) entspricht, siehe [Eberhard00]. Dabei beschreibt $c_P \mathbf{g}_n$ eine Feder mit der Steifigkeit c_P , die der Eindringung der Körper entgegenwirkt. In Gl. (3.11) wird für alle Kontakte ein konstanter Penalty-Faktor c_P angenommen. Werden für unterschiedliche Kontakte verschiedene Penalty-Faktoren benötigt, werden die Skalare c_P in einer Diagonalmatrix angeordnet, siehe [Seifried05].

Das zu minimierende Potential kann mit dem Strafterm (3.11) folgendermaßen formuliert werden

$$L(\mathbf{u}) = W(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} c_P \mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n. \quad (3.12)$$

Durch Ersetzen der Lagrange-Multiplikatoren ist Gl. (3.12) nur von $\mathbf{u}$ abhängig, weshalb die notwendige Bedingung für ein Minimum von $L(\mathbf{u})$ nach [Eberhard00]

$$\delta L(\mathbf{u}) = \delta W(\mathbf{u}) + c_P \mathbf{g}_n^T \delta \mathbf{g}_n = 0 \quad (3.13)$$

lautet. Mit der Variation $\delta \mathbf{g}_n$ aus Gl. (3.9) folgt nach [Eberhard00] die Variation der potentiellen Energie für alle n_c aktiven Kontaktelemente als

$$\delta L(\mathbf{u}) = \delta W(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_c} c_P \mathbf{g}_{N,i}^T \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{N}_i = 0. \quad (3.14)$$

Es entstehen dabei n_{fe} nichtlineare Gleichungen für die unbekannten Knotenverschiebungen. Die Nebenbedingungen werden beim Penalty-Verfahren im Gegensatz zum Lagrange-Verfahren nicht exakt eingehalten und eine Eindringung

bleibt bestehen. Der Penalty-Faktor c_P gibt dabei an, wie stark die Eindringung bestraft wird. Die Kontaktkräfte $c_P \mathbf{g}_n$ koppeln die beiden Körper über die n_c aktiven Kontaktelemente.

Die Wahl des Penalty-Faktors c_P hat bei diesem Verfahren einen erheblichen Einfluss auf die Ergebnisse. Wird er zu klein gewählt, so werden die Nebenbedingungen stark verletzt und es treten unphysikalische Durchdringungen der Körper in der Kontaktzone auf. Mit steigendem Penalty-Faktor konvergiert das Penalty-Verfahren theoretisch gegen die physikalisch korrekte Lösung. Der Penalty-Faktor ist demnach ausreichend groß zu wählen, um die verfahrensbedingte Eindringung möglichst gering zu halten. Zu hohe Penalty-Faktoren wiederum können Konvergenzprobleme bei der numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen verursachen, siehe [Nour-OmidWriggers87, SeifriedHuEberhard03].

Die bei der Lösung des Kontaktproblems entstehenden nichtlinearen zeitabhängigen Gleichungen können mit expliziten oder impliziten Integrationsverfahren gelöst werden. Ein weit verbreitetes explizites Verfahren ist das zentrale Differenzen Verfahren. Dabei werden die bekannten Werte aus dem vorigen Zeitschritt zur Berechnung des nächsten Zeitschrittes verwendet, weshalb oft sehr kleine Zeitschrittweiten für eine genaue Integration gewählt werden müssen. Als implizites Verfahren wird oftmals das Newmark-Verfahren verwendet, wobei in jedem Schritt eine Nullstellensuche, beispielsweise mit dem Newton-Raphson-Verfahren, durchgeführt werden muss. In ABAQUS können sowohl implizite als auch explizite Verfahren bei der Kontaktsimulation verwendet werden, siehe [Dassault Systèmes14b]. Für weiterführende Erläuterungen zur numerischen Zeitintegration in FE-Systemen siehe [Eberhard00, Wriggers06].

3.2.2 Kontaktbeschreibung bei flexiblen Mehrkörpersystemen

Für eine präzise Erfassung der auftretenden Kontaktkräfte und der daraus resultierenden Deformationen ist eine dreidimensionale Beschreibung der Kontaktflächen erforderlich. Durch die Diskretisierung der Körper mit der FEM ist eine genaue Beschreibung durch Oberflächenelemente möglich. Daher bietet es sich an, auch in der FMKS-Kontaktsimulation die Oberflächenelemente aus der FE-Diskretisierung als Kontaktelemente zu verwenden. Deshalb wird in dieser Arbeit die reduzierte FMKS-Simulation um ein Kontaktmodell mit FE-Kontaktbeschreibung erweitert, das in jedem Zeitintegrationsschritt aufgerufen wird. In jedem Zeitschritt ist daher die Berechnung der aktuellen Knotenpositionen der Kontaktfläche aus den reduzierten elastischen Koordinaten erforderlich. Bei der Modellierung des Kontakts mit FE-Kontaktbeschreibung verbinden die Kontaktelemente die zwei reduzierten Körper die in Kontakt treten. In diesem Abschnitt werden Node-to-Node, Node-to-Edge und Node-to-Surface Kontaktelemente verwendet, siehe [Wriggers06]. Dabei werden die Kontaktpartner als Master- und Slave-Körper unterschieden, siehe Abschnitt 3.2.1. Für jeden Knoten auf dem

Slave-Körper wird eine Eindringung in alle Master-Elemente geprüft und anschließend die Kontaktkraft mit dem Penalty-Verfahren berechnet.

Häufig werden in der FEM zur Diskretisierung Hexaeder- oder Tetraeder-Elemente benutzt. In dieser Arbeit werden zur Diskretisierung der Körper ausschließlich lineare Hexaeder-Elemente verwendet. Daher wird im Weiteren die Bestimmung der Eindringung g_n und die Berechnung der Kontaktkraft anhand des Hexaeder-Elements aufgezeigt. Der dazu verwendete Kontaktalgorithmus wird in Abschnitt 3.2.3 erklärt. Neben Hexaeder-Elementen können im verwendeten Kontaktalgorithmus auch Tetraeder-Elemente als Kontaktelemente verwendet werden. Bei den verwendeten Elementen handelt es sich um isoparametrische Elemente, bei denen Knotenposition und Verschiebung durch die gleichen Ansatzfunktionen approximiert werden, siehe [Eberhard00, Wriggers06]. Bei linearen Hexaeder-Elementen besteht nach Abbildung 3.3 ein räumliches Node-to-Surface Kontaktelement aus einem isoparametrischen Oberflächenelement, gegeben durch die vier Knoten M1 bis M4, das mit dem Slave-Knoten S des Slave-Körpers in Kontakt kommt. Die Kontaktfläche $\mathbf{x}$ des Master-Elements wird mit den Ansatzfunktionen für die Oberfläche eines linearen Hexaeder-Elements

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \mathbf{x}_{M,i},$$

mit $\xi_i, \eta_i \in [\pm 1]$ und $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$, (3.15)

berechnet, wobei der Vektor $\mathbf{x}_{M,i}$ die Knotenkoordinaten des Master-Elements darstellt. Die Elementgrenzen werden über die Parameter ξ_i und η_i definiert, siehe [Ziegler12].

Kontaktsituation Node-to-Surface (NTS)

Damit sich die Körper während des Kontaktvorgangs nicht unphysikalisch durchdringen, wirkt eine Kraft auf den Slave-Knoten in Richtung des Normalenvektors $\mathbf{n}$, die folgendermaßen berechnet werden kann

$$\mathbf{f}_S = c_P g_n \mathbf{n}, \quad (3.16)$$

mit dem Penalty-Faktor c_P und der Eindringtiefe g_n , siehe [TamarozziEtAl13b, Ziegler12]. Als Reaktion auf die Slave-Kraft $\mathbf{f}_S$ wirken die Kräfte $\mathbf{f}_{M,i}$ auf die Knoten des Master-Elements, die je nach Lage des Eindringungspunkts über die Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_i(\xi_c, \eta_c)$ des Elements folgendermaßen verteilt werden

$$\mathbf{f}_{M,i} = -c_P g_n \mathbf{n} \mathbf{N}_i(\xi_c, \eta_c), \quad \text{mit } i = 1 \dots 4. \quad (3.17)$$

Die Ansatzfunktionen $\mathbf{N}_i$ für lineare Viereckselemente sind in Tabelle 3.1 dargestellt.

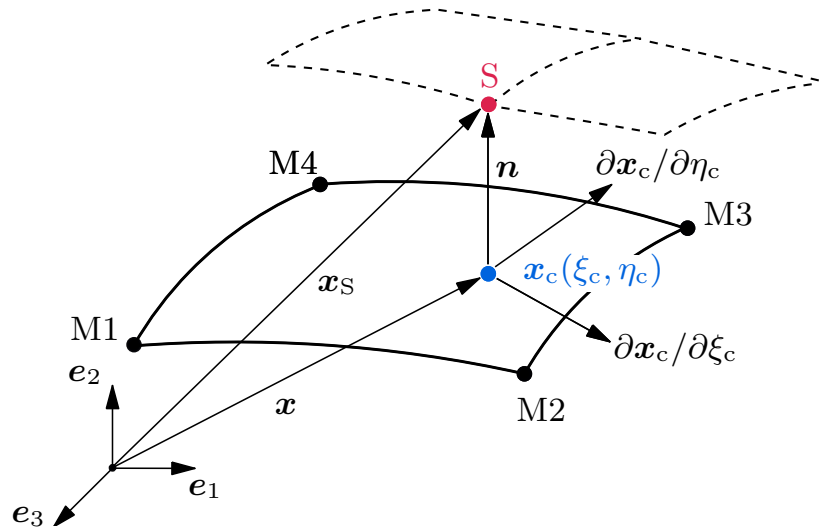


Abbildung 3.3: Oberfläche eines Hexaeder-Elements als Kontaktelement

Zur Berechnung der Kontaktkräfte in den Gleichungen (3.16) und (3.17) wird der Eindringungspunkt $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$ des Slave-Knotens sowie die Eindringtiefe g_n ermittelt, sobald ein Slave-Knoten S mit dem Master-Element in Kontakt tritt, siehe Abbildung 3.3. Wird vorausgesetzt, dass die Kontaktflächen beider Körper konvex sind, so entspricht die Bestimmung des Eindringungspunkts vom Slave-Knoten S in die Master-Fläche der Suche nach dem Punkt $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$ für den die Kontaktfläche $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ den kleinsten Abstand zum Slave-Knoten S hat, siehe [Wriggers06, Ziegler12]. Zur Bestimmung des projizierten Abstands vom Knoten S auf das Master-Element werden die beiden nichtlinearen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} [\mathbf{x}_S - \mathbf{x}(\xi, \eta)] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} [\mathbf{x}_S - \mathbf{x}(\xi, \eta)] = 0 \quad (3.18)$$

iterativ für ξ und η mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. In Gl. (3.18) beschreibt der Vektor $\mathbf{x}_S$ die Koordinaten des aktuellen Slave-Knotens während $\partial \mathbf{x} / \partial \xi$ und $\partial \mathbf{x} / \partial \eta$ die Tangentenvektoren auf der Kontaktfläche zur Berechnung des Eindringungspunktes beschreiben. Die Lösung der nichtlinearen Gleichungen (3.18) liefert ξ_c und η_c und damit den Eindringungspunkt $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$. Zur Berechnung des Normalenvektors $\mathbf{n}$ werden die Tangentenvektoren $\partial \mathbf{x}_c / \partial \xi_c$

Tabelle 3.1: Ansatzfunktionen eines linearen Viereckselements und ihre Ableitungen

i	N_i	$\partial N_i / \partial \xi$	$\partial N_i / \partial \eta$	$\partial^2 N_i / (\partial \xi \partial \eta)$
1	$(1 - \xi)(1 - \eta) / 4$	$-(1 - \eta) / 4$	$-(1 - \xi) / 4$	$1 / 4$
2	$(1 + \xi)(1 - \eta) / 4$	$(1 - \eta) / 4$	$-(1 + \xi) / 4$	$-1 / 4$
3	$(1 + \xi)(1 + \eta) / 4$	$(1 + \eta) / 4$	$(1 + \xi) / 4$	$1 / 4$
4	$(1 - \xi)(1 + \eta) / 4$	$-(1 + \eta) / 4$	$(1 - \xi) / 4$	$-1 / 4$

und $\partial \mathbf{x}_c / \partial \eta_c$ im Eindringungspunkt $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$ benötigt. Bei der Berechnung des Normalenvektors muss je nach Lage des Eindringungspunktes $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$ zwischen verschiedenen Kontaktsituationen unterschieden werden, da die Berechnung des Normalenvektors nicht mehr eindeutig ist, wenn der Slave-Knoten auf eine Kante oder einen Knoten des Master-Elements trifft, siehe [Wriggers06].

Trifft der Slave-Knoten in die Master-Fläche liegt die Kontaktsituation NTS vor und der Normaleneinheitsvektor kann mit den Tangentenvektoren $\partial \mathbf{x}_c / \partial \xi_c$ und $\partial \mathbf{x}_c / \partial \eta_c$ im Eindringungspunkt $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$ als

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{x}_c / \partial \xi_c \times \partial \mathbf{x}_c / \partial \eta_c}{\|\partial \mathbf{x}_c / \partial \xi_c \times \partial \mathbf{x}_c / \partial \eta_c\|}, \quad (3.19)$$

berechnet werden. Damit kann zur Kontakterkennung und Kontaktkraftberechnung die skalare Eindringtiefe g_n folgendermaßen bestimmt werden

$$g_n = \mathbf{n}^T (\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c) - \mathbf{x}_S). \quad (3.20)$$

Ist die Eindringung $g_n > 0$, so liegt kein Kontakt vor. Bei $g_n \leq 0$ durchdringt der Slave-Knoten das Master-Element und Kontakt tritt auf.

Kontaktsituation Node-to-Edge (NTE)

Während des Kontaktvorgangs kann es vorkommen, dass der Slave-Knoten mit dem Rand des Master-Elements in Kontakt tritt. In diesem Fall kann das Kreuzprodukt der Basisvektoren in Gl. (3.19) nicht zur Definition des Normalenvektors verwendet werden, da die Kante zwischen zwei Flächen liegt, die unterschiedliche Tangenten haben, siehe [Wriggers06]. Der Normaleneinheitsvektor, dargestellt in Abbildung 3.4, wird in dieser Kontaktsituation deshalb über

$$\mathbf{n} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_M - \mathbf{x}_S}{\|\bar{\mathbf{x}}_M - \mathbf{x}_S\|} \quad (3.21)$$

berechnet. Hierbei ist $\bar{\mathbf{x}}_M = (1 - \xi_c)\mathbf{x}_{M,1} + \xi_c\mathbf{x}_{M,2}$ bzw. $\bar{\mathbf{x}}_M = (1 - \eta_c)\mathbf{x}_{M,1} + \eta_c\mathbf{x}_{M,2}$, wobei ξ_c und η_c auch bei NTE nach Gl. (3.18) wie bei der Kontaktsituation NTS bestimmt werden. Die skalare Eindringtiefe wird in diesem Fall über

$$g_n = \|\bar{\mathbf{x}}_M - \mathbf{x}_S\| \quad (3.22)$$

bestimmt. Um einer unphysikalischen Eindringung der Körper entgegenzuwirken, wird die Knotenkraft auf den Slave-Knoten über Gl. (3.16) bestimmt. Die Kontaktkräfte werden abhängig von den linearen Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}_{1,2}(\xi_c) = \frac{1}{2} (1 \pm \xi_c) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{N}_{1,2}(\eta_c) = \frac{1}{2} (1 \pm \eta_c) \quad (3.23)$$

folgendermaßen auf die beiden zur Kante (Edge) gehörenden Master-Knoten verteilt

$$\mathbf{f}_{M,i} = -c_P \mathbf{n} \mathbf{N}_i(\xi_c, \eta_c), \quad \text{mit } i = 1, 2. \quad (3.24)$$

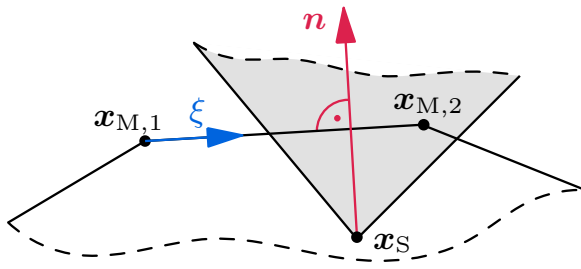


Abbildung 3.4: Node-to-Edge

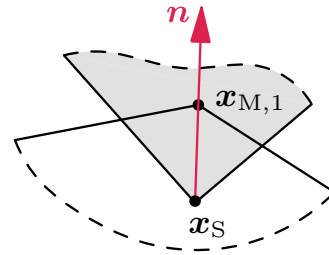


Abbildung 3.5: Node-to-Node

Kontaktsituation Node-to-Node (NTN)

Die einfachste Kontaktformulierung ist der Kontakt zwischen zwei Knoten, auch NTN-Kontakt genannt. Liegt der Slave-Knoten in der unmittelbaren Nähe oder auf einem Master-Knoten, wie in Abbildung 3.5 dargestellt, ist es numerisch sinnvoll, die Kontaktkraft über den NTN-Kontakt zu berechnen. In diesem Fall ist die Berechnung des Normalenvektors nach Gl. (3.19) nicht mehr eindeutig, siehe [Wriggers06]. Der Normaleneinheitsvektor wird in diesem Fall berechnet über

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{M,i}}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{M,i}\|}, \quad (3.25)$$

mit dem Master-Knoten i , welcher dem Auftreffpunkt $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$ am nächsten liegt, siehe [Wriggers06]. In dieser Kontaktsituation ergibt sich die skalare Eindringtiefe zu

$$g_n = \|\mathbf{x}_{M,i} - \mathbf{x}_S\|, \quad (3.26)$$

mit der die Kraft auf den Slave-Körper nach Gl. (3.16) berechnet werden kann. Für die Kraft auf den Master-Knoten folgt schließlich

$$\mathbf{f}_{M,i} = -\mathbf{f}_S. \quad (3.27)$$

Dieser Sonderfall tritt nur selten auf, da zum einen die Knoten direkt aufeinander liegen müssen und zum anderen die tangential Bewegung sehr klein bleiben muss, siehe [Eberhard00].

3.2.3 Kontaktalgorithmus in der flexiblen Mehrkörpersimulation

In diesem Abschnitt wird der in den FMKS-Simulationen verwendete Kontaktalgorithmus zur Erkennung und Kontaktkraftberechnung, angelehnt an [DoZieglerEberhard15, TamarozziEtAl13b, ZieglerEberhard11, Ziegler12], kurz vorgestellt. Eine ausführliche Darstellung der Umsetzung ist [Tschigg13] zu entnehmen. Aufgrund der einfachen Implementierung wird im Kontaktalgorithmus das Penalty-Verfahren zur Kontaktkraftberechnung verwendet.

Die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen (2.119) erfolgt in den reduzierten elastischen Koordinaten. Zur Kontakterkennung mit der FE-Kontaktbeschreibung, dargestellt in Abschnitt 3.2.2, ist die Berechnung der aktuellen absoluten Knotenpositionen der Kontaktflächen des Master- und des Slave-Körpers über Gl. (2.80) erforderlich. Zur Steigerung der numerischen Effizienz werden potentielle Kontaktflächen vorab definiert und die entsprechenden Ansatzfunktionen Φ für Gl. (2.80) in den SID Dateien gespeichert. Zur Kontakterkennung werden in den Kontaktalgorithmus die absoluten Knotenpositionen aller Master- und Slave-Knoten der beiden Körper in Kontakt übergeben. Zusätzlich wird die Nummerierung der einzelnen Oberflächenelemente zur eindeutigen Beschreibung des Normalenvektors aus der FE-Diskretisierung benötigt.

Kontaktsuche und Kontaktkraftberechnung

Unter der Annahme, dass das Master-Element aus vier Knoten besteht, wird in diesem Abschnitt das implementierte Verfahren zur Kontaktsuche und Kontaktkraftberechnung vorgestellt. Da eine Kontakterkennung zu jedem Zeitschritt während der numerischen Integration rechenzeitintensiv ist, wird zunächst mit Ersatzkörpern getestet, ob die Körper in Kontakt treten. Dazu werden die einzelnen Körper von Kugeln umschlossen und nur wenn sich diese überlappen wird ein Feintest und anschließende Kontaktkraftberechnung durchgeführt, siehe [Eberhard00]. Im Kontaktalgorithmus wird dann für alle $k = 1 \dots n_M$ Master-Elemente die Eindringung eines Slave-Knotens im Kontaktpunkt $\mathbf{x}_c$ mit der Eindringtiefe g_n bestimmt.

Als erstes wird mit den Eckknoten $\mathbf{x}_{M,i}^k$ mit $i = 1 \dots 4$ des aktuellen Master-Elements in einem Grobtest geprüft, welcher der $l = 1 \dots n_S$ Slave-Knoten $\mathbf{x}_{S,l}$ in der Nähe liegt und in das aktuelle Master-Element eindringt. Ist dieser Grobtest erfolgreich abgeschlossen erfolgt die iterative Berechnung des Eindringungspunktes $\mathbf{x}_c(\xi_c, \eta_c)$, an welchem der Slave-Knoten $\mathbf{x}_{S,l}$ den geringsten Abstand zur Master-Fläche $\mathbf{x}$, berechnet nach Gl. (3.15), hat. Der Kontaktpunkt wird durch die iterative Lösung der nichtlinearen Gleichungen (3.18) mit dem Newton-Raphson-Verfahren berechnet, siehe [WangChengYao01]. Zum Iterationsstart gilt dabei $\xi_{c,0} = \eta_{c,0} = 0$. Die Lösung der Nullstellensuche sind die lokalen Koordinaten $\xi_{c,1}$ und $\eta_{c,1}$ des Eindringungspunktes $\mathbf{x}_c(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$. In diesem Punkt ist der Abstand zwischen Slave-Knoten und Master-Element minimal. Da es sich bei dem Gleichungssystem zur Berechnung von $\mathbf{x}_c(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$ mit dem Startvektor $\mathbf{x}_c(\xi_{c,0}, \eta_{c,0}) = \mathbf{0}$ um ein lineares Gleichungssystem handelt, siehe [Wriggers06], reicht stets ein Iterationsschritt zur Lösung aus, siehe [Bärwolff16]. Mit den Koordinaten $\mathbf{x}_c(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$ des Eindringungspunktes wird geprüft, ob dieser innerhalb oder auf den Grenzen des Master-Elements liegt. Ist dies nicht der Fall, so wird der nächste Slave-Knoten getestet. Liegt der Eindringungspunkt im Master-Element, so wird mit $\mathbf{x}_c(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$ die auftretende Kontaktsituation geprüft. Bei der Kontaktsituation NTS wird der Normaleneinheitsvektor über

Gl. (3.19) aus den Tangentenvektoren $\mathbf{t}_\xi(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$ und $\mathbf{t}_\eta(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$ am Eindringungspunkt $\mathbf{x}_c(\xi_{c,1}, \eta_{c,1})$ berechnet, siehe [Wriggers06]. Dazu werden die iterativ berechneten lokalen Koordinaten $\xi_{c,1}$ und $\eta_{c,1}$ des Eindringungspunkts verwendet. Anschließend wird über Gl. (3.20) die skalare Eindringtiefe ermittelt. Die Kontaktsituation NTS tritt am häufigsten auf. Liegt der Slave-Knoten jedoch auf einer Kante oder einem Eckknoten, so wird der Normalenvektor mit $\xi_{c,1}$ und $\eta_{c,1}$ nach Gl. (3.21) respektive Gl. (3.25) berechnet. Die Eindringtiefe g_n folgt dann aus den Gleichungen (3.22) bzw. (3.26).

Nach der Unterscheidung der Kontaktsituation und der Bestimmung der Eindringtiefe g_n werden anschließend für das aktive Kontaktelement die wirkenden Kontaktkräfte $\mathbf{f}_{M,k}$ und $\mathbf{f}_{S,k}$ nach Abschnitt 3.2.2 ermittelt. Das beschriebene Vorgehen wird fortgesetzt, bis alle n_M Master-Elemente auf Kontakt mit allen Slave-Knoten geprüft wurden. Da bei den Kontaktsituationen NTE und NTN ein Slave-Knoten mit mehreren Master-Elementen gleichzeitig in Kontakt treten kann, ist anschließend eine Mittelung der mehrfach auftretenden Kontaktkräfte erforderlich. Abhängig von der Orientierung der Elemente kann sich der Slave-Knoten auch bei NTS zwischen zwei Elementen befinden, was ebenso eine Mittelung erforderlich macht, siehe [Tschigg13]. Um falsche Kontaktkräfte zu vermeiden, werden dazu zunächst alle einmalig vorkommenden Slave-Knotennummern ermittelt. Anschließend wird der Mittelwert der dazugehörenden Master- und Slave-Kräfte berechnet.

Die n_k FE-Kontaktkräfte, berechnet in Knotenkoordinaten im zuvor beschriebenen Kontaktalgorithmus, werden in den generalisierten diskreten Kräfte des FMKS nach Gl. (2.110) zusammengefasst zu

$$\mathbf{h}_d = \sum_{k=1}^{n_k} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP,k}^T \\ \Phi_{P,k}^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_{c,k}, \quad (3.28)$$

und wirken dadurch auf die Bewegungsgleichungen (2.119) der jeweiligen Körper. Der Vektor $\mathbf{r}_{RP,k}$ beschreibt die Angriffspunkte der Kontaktkräfte und $\Phi_{P,k}^T$ die entsprechenden Ansatzfunktionen ausgewertet am Kontaktknoten. Im Vektor $\mathbf{f}_{c,k}$ wirken je nach betrachtetem Körper die Master-Kräfte $\mathbf{f}_{M,k}$ oder Slave-Kräfte $\mathbf{f}_{S,k}$.

Two-Pass Algorithmus

Ein Kontaktelement besteht aus einem Master-Element, welches von einem Slave-Knoten durchdrungen wird. Dabei erfolgt die Aufteilung in Master- und Slave-Körper oftmals beliebig. Als Faustregel gilt, dass der steifere oder feiner diskretisierte Körper als Master-Körper verwendet werden soll. Wird während der Simulation nur die Eindringung der Slave-Knoten in die Master-Elemente geprüft, so liegt ein One-Pass Algorithmus vor, siehe [TaylorPapadopoulos91, Zhong93].

Da jedoch der Master-Körper die Informationen über die Kontaktgeometrie enthält, während die Slave-Fläche die Lage einzelner Knoten beschreibt, kann es bei falscher Wahl zu nicht feststellbaren Eindringungen kommen, siehe [Eberhard00].

Werden während der Kontaktberechnung die Master- und Slave-Körper zusätzlich vertauscht, so liegt nach [Eberhard00, Zhong93] ein Two-Pass Algorithmus vor. Über einen Gewichtungsfaktor $w_f \in [0, 1]$ wird zwischen One- und Two-Pass Algorithmus unterschieden. Ist $w_f = 0$ bzw. $w_f = 1$ liegt ein One-Pass Algorithmus vor, bei $0 < w_f < 1$ ein Two-Pass Algorithmus. Bei letzterem werden die Kontaktkräfte beider Körper berücksichtigt und es ist somit eine Mittelwertbildung nach der Kontaktkraftberechnung notwendig. Mit dem Gewichtungsfaktor w_f werden die Kontaktkräfte folgendermaßen skaliert

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_S &= w_f \mathbf{f}_S^{\text{MS}} + (1 - w_f) \mathbf{f}_S^{\text{SM}}, \\ \mathbf{f}_{M,i} &= w_f \mathbf{f}_{M,i}^{\text{MS}} + (1 - w_f) \mathbf{f}_{M,i}^{\text{SM}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit $i = 1 \dots 4$ bei linearen Hexaeder-Elementen, siehe [Ziegler12]. Ist der erste Körper der Master-Körper werden die Kontaktkräfte als $\mathbf{f}_{M,i}^{\text{MS}}$ bzw. $\mathbf{f}_S^{\text{MS}}$ gespeichert. Nach dem Vertauschen von Master- und Slave-Körper werden die Kräfte in $\mathbf{f}_S^{\text{SM}}$ bzw. $\mathbf{f}_{M,i}^{\text{SM}}$ gespeichert.

Der Two-Pass Algorithmus hat jedoch nicht nur Vorteile. Zum einen steigt die Rechenzeit an, da die Kontaktberechnung zwei Mal ausgeführt werden muss. Zum anderen können in Verbindung mit dem Lagrange-Verfahren Phänomene wie *surface locking* auftreten, siehe [Eberhard00]. Da es je nach Wahl des Master-Körpers beim One-Pass Algorithmus zu nicht feststellbaren Eindringungen kommen kann, können die Ergebnisse von dieser Wahl jedoch leicht beeinflusst werden. Daher wird trotz der geringfügig erhöhten Rechenzeit in dieser Arbeit für alle Kontaktsimulationen der Two-Pass Algorithmus mit einem Gewichtungsfaktor $w_f = 0.5$ verwendet.

3.3 Grundlagen der Kontaktsubmodelle

Anhand eines einfachen Beispiels wird in diesem Abschnitt der Einfluss der verwendeten Modellreduktionsverfahren auf die Ergebnisse der FMKS-Kontaktsimulation und auf die numerische Effizienz aufgezeigt. Ausgehend von diesem Beispiel werden in den folgenden Abschnitten die in dieser Arbeit entwickelten Kontaktsubmodelle für eine effiziente FMKS-Simulation vorgestellt. Hier wird nicht näher auf die Modellierung der zugrundeliegenden FE-Modelle eingegangen, da dies ausführlich in Abschnitt 4 erfolgt.

Das numerische Beispiel besteht wie in Abbildung 3.6 dargestellt, aus einem Aluminiumblock mit 40 mm Kantenlänge und einem 400 mm langen abgerundeten

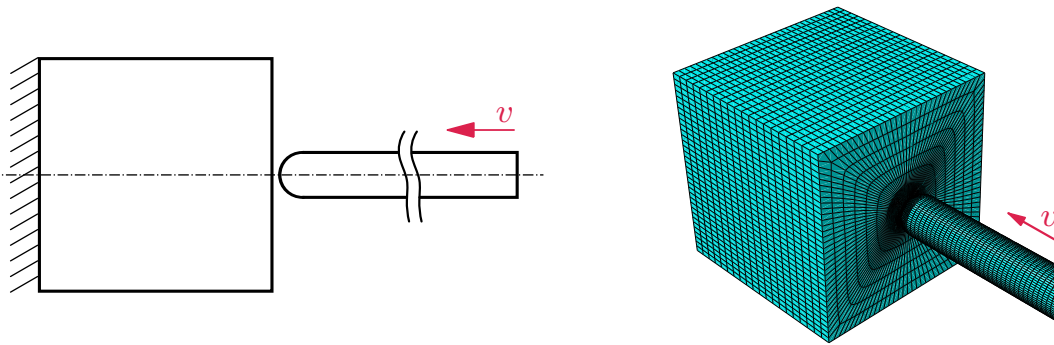


Abbildung 3.6: Skizze und FE-Modell des Modells Block-Stempel aus [Tschigg-Seifried17]

Stempel aus Stahl mit einem Radius von 4 mm. Die entsprechenden Materialdaten sind Tabelle 3.2 zu entnehmen. Der Block ist am Boden befestigt und der abgerundete Stempel trifft wie in Abbildung 3.6 dargestellt mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.2 \text{ m/s}$ auf dessen Oberfläche. Der Schwerpunkt dieser Untersuchung liegt auf der effizienten Bestimmung der Kontaktkraft, der lokalen Verformung in der Kontaktzone des Blocks sowie der Wellenausbreitung im Stempel. Erste Ergebnisse zu diesem Modell werden auch in [TschiggSeifried17] vorgestellt.

Die Länge des Stempels ist so gewählt, dass elastodynamisches Verhalten während des Kontaktvorgangs auftritt, siehe [Goldsmith60, SeifriedSchiehlenEberhard10]. Während des Aufpralls wird die kinetische Energie der Starrkörperbewegung in Deformationsenergie umgewandelt, die sich als Welle von der Stoßstelle im Stempel ausbreitet. Ein quasi-statisches Verhalten läge vor, wenn die Stoßdauer ein Vielfaches der Schwingungsdauer der niedrigsten Eigenfrequenz des Körpers ist. Dies ist bei kompakten Körpern der Fall. Beim quasi-statischen Verhalten werden während des Stoßes die Wellen mehrfach reflektiert und die Dehnungsenergie, die in Welleneffekte übertragen wird, ist vernachlässigbar gering. Der hier gewählte Stempel verhält sich jedoch nicht quasi-statisch. Seine niedrigste Eigenfrequenz ist 235.41 Hz und damit ist die Schwingungsdauer von 4.25 ms ein Vielfaches der Dauer des Kontaktvorgangs mit 0.32 ms. Daher trifft die am Ende des Stempels reflektierte Welle erst auf die Stoßstelle, wenn der Kontaktvorgang beendet ist und somit treten stark ausgeprägte elastodynamische Effekte auf.

Tabelle 3.2: Materialdaten von Block und Stempel

	E-Modul [GPa]	Poisson- Zahl	Dichte [kg/m ³]	Masse [g]
Block	70	0.33	2750	176
Stempel	210	0.3	7780	155.5

Die FMKS-Simulation mit reduzierten Modellen wird in MATLAB, siehe [Mathworks16], durchgeführt. Zur Verifizierung und Beurteilung der Ergebnisse dieser Simulation wird eine FE-Referenzlösung verwendet. In Tabelle 3.3 sind die entsprechenden Daten zur Beschreibung der einzelnen FE-Körper aufgeführt. Die Referenzlösung, siehe Abbildung 3.7, wird über eine dynamische FE-Simulation mit ABAQUS/Explicit, siehe [Dassault Systèmes14b], ermittelt. Die FE-Modelle werden mit linearen Hexaederelementen mit acht Knoten vernetzt. Zur Kontaktmodellierung wird das Lagrange-Verfahren verwendet, siehe Abschnitt 3.2.2, womit die Bestimmung eines geeigneten Penalty-Faktors in der FE-Simulation entfällt. Der Vergleich der Ergebnisse des Lagrange-Verfahrens mit dem Penalty-Verfahren ist zulässig, da die Lösung des Penalty-Verfahrens für große Penalty-Faktoren gegen die Lösung des Lagrange-Verfahrens konvergiert, wie in Abschnitt 4.2.2 gezeigt wird. Alle Simulationen werden auf einem Computer mit Intel Xeon E3-1270v5 Prozessor mit 4x3.6 GHz und 64 GB RAM ausgeführt.

Kontaktsimulation mit modal reduzierten Modellen

Bei Kontaktuntersuchungen mit modal reduzierten Modellen sind zunächst Voruntersuchungen zur Bestimmung einer geeigneten Anzahl Eigenmoden erforderlich, siehe [Goldsmith60]. Diese müssen im betrachteten Frequenzbereich physikalisch relevante Effekte wie die globale Deformation in Form von Welleneffekten genau erfassen können. Für die Untersuchungen des Stoßsystems Block-Stempel sind mindestens 50 Eigenmoden je Körper zur Beschreibung des relevanten Deformationsverhaltens notwendig, siehe Tabelle 3.3. Hier wird nicht näher auf die Bestimmung der passenden Anzahl Eigenmoden eingegangen, da dies ausführlich in Kapitel 4 erfolgt.

Abbildung 3.7 zeigt die Kontaktkraftverläufe der FE-Lösung und des modal reduzierten Modells. Mit letzterem ist eine akzeptable Annäherung der Referenzlösung zu erreichen.

Tabelle 3.3: Beschreibung des Stoßsystems Block-Stempel

	Modell	Block	Stempel
FE-Modell	Elemente	43 440	56 016
	Knoten	47 195	63 485
	Freiheitsgrade n_{fe}	138 120	190 455
	Dauer pre-processing [s]	–	–
Modales Modell	Freiheitsgrade n_q	50	50
	max. Eigenfrequenz [kHz]	106	34
	Dauer pre-processing [s]	174	95
CB-Modell	Freiheitsgrade n_q	50+417	50+822
	max. Eigenfrequenz [MHz]	7.4	23
	Dauer pre-processing [s]	335	575

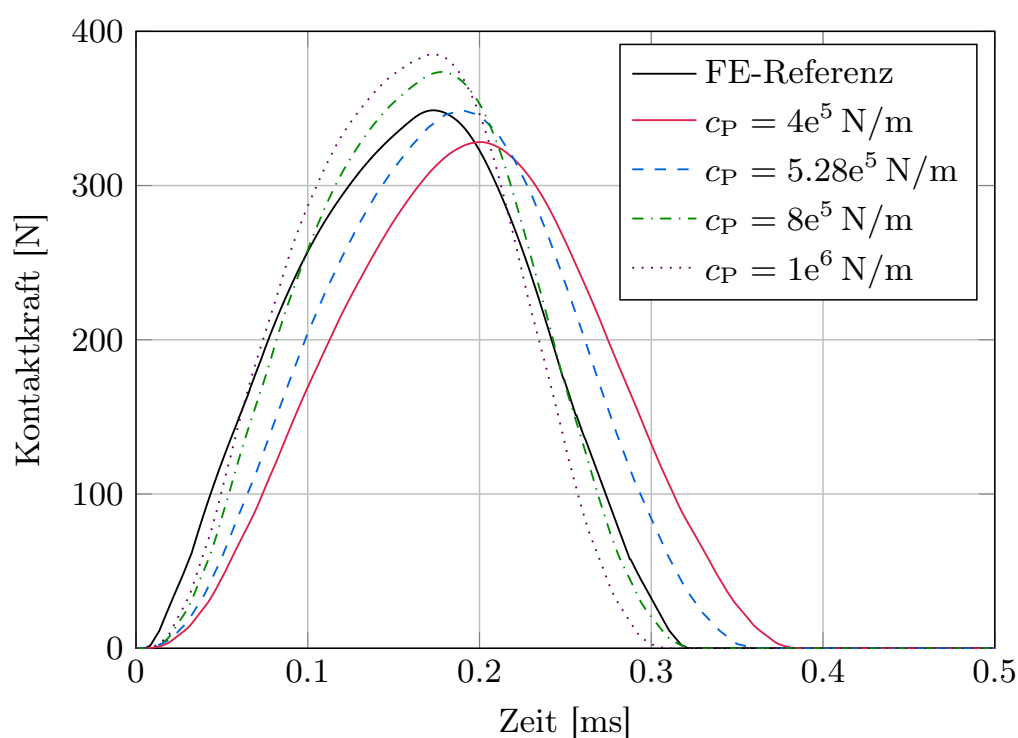


Abbildung 3.7: Konvergenzverhalten des Penalty-Faktors beim modalen Modell

renzlösung möglich. Außerdem kann mit dem modalen Modell die Wellenausbreitung als Überlagerung aller Eigenmoden gut approximiert werden, siehe [Tschigg-Seifried17]. Aufgrund der geringen Anzahl elastischer Freiheitsgrade kann die Rechenzeit in MATLAB trotz des einmalig notwendigen pre-processing Schritts zur Modellreduktion signifikant reduziert werden, siehe Tabelle 3.3 und Tabelle 3.4. Die Rechendauer der Zeitsimulation kann um 99.8 % von 230 min auf 33 s verringert werden. Wie in Abbildung 3.7 zu erkennen ist, reagiert das modale Modell sehr empfindlich auf Änderungen des Penalty-Faktors. Eine Erhöhung bewirkt höhere Kontaktkräfte und eine kürzere Kontaktdauer. Es ist kein Konvergenzverhalten des Kontaktkraftverlaufs zu erkennen. Der passende Penalty-Faktor muss heuristisch anhand von Vergleichen mit der FE-Lösung bestimmt werden, wobei hier mit $c_P = 5.28e^5 \text{ N/m}$ das FE-Ergebnis am besten angenähert werden kann.

Die Ursache für dieses sensible Verhalten liegt in der schlechten Approximation der lokalen Verformung in der Kontaktzone bei einem reinen modalen Ansatz kombiniert mit dem Penalty-Verfahren, siehe Abbildung 3.8. Die Ursache liegt im globalen Charakter der Eigenmoden, siehe [TamarozziEtAl13b], die keine Information über lokale Verformungen enthalten. Zur Erfassung der lokalen Verformung und der Spannungen in der Kontaktzone mittels modal reduzierten Modellen müssen sehr viele Eigenmoden berücksichtigt werden, was die numerische Effizienz aufgrund der großen Dimensionen der Projektionsmatrix erheblich verschlechtert. Aufgrund der fehlenden lokalen Verformung ist die Kontaktzone

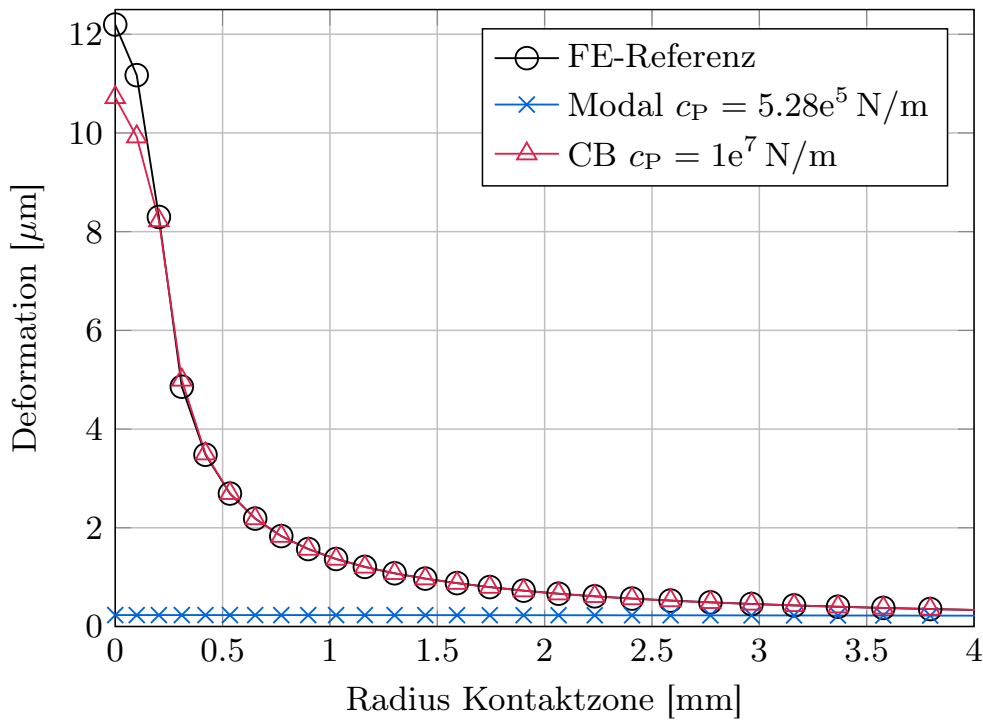


Abbildung 3.8: Deformation der Kontaktzone des Blocks

bei einer moderaten Anzahl Eigenmoden zu steif. Um diese hohe Steifigkeit zu kompensieren muss der Penalty-Faktor relativ klein gewählt werden. Aus diesem Grund hängt das Simulationsergebnis sehr stark vom Penalty-Faktor ab, siehe [TamarozziEtAl13b]. Höhere Werte führen zu größeren Kontaktkräften, siehe Abbildung 3.7, wobei keine Konvergenz des Penalty-Faktors erkennbar ist.

Kontaktsimulation mit CB-Modellen

Zur besseren Approximation der lokalen Deformation während des Kontakts bietet sich zur Modellreduktion das CB-Verfahren aus Abschnitt 2.6.2 an. Dabei besteht die Projektionsmatrix aus dynamischen Eigenmoden im Frequenzbereich von Interesse und statischen Ansatzfunktionen für alle Knotenfreiheitsgrade in der Kontaktzone. Wie beim rein modalen Modell werden auch beim CB-Verfahren 50 Eigenmoden zur Beschreibung der globalen Deformation verwendet. Die statischen Ansatzfunktionen kompensieren die beim modalen Abschneiden vernachlässigten, hochfrequenten Eigenmoden zur Approximation des lokalen Verhaltens, siehe [HeirmanTamarozziDesmet11]. Aufgrund der statisch vollständigen Beschreibung können sie das lokale Verhalten mit der Genauigkeit des zugrundeliegenden FE-Modells annähern. Gleichzeitig haben sie jedoch keine Auswirkungen auf das globale Deformationsverhalten. Für jeden Knotenfreiheitsgrad, der möglicherweise während des Kontaktvorgangs belastet werden kann, wird eine statische Ansatzfunktion berechnet, was bei den fein vernetzten Körpern zu relativ vielen reduzierten Freiheitsgraden führt, siehe Tabelle 3.3. Jedoch

ist die Anzahl immer noch deutlich geringer als beim FE-Modell.

Mit dem CB-Verfahren kann das lokale Verformungsfeld wesentlich verbessert werden, wie Abbildung 3.8 zeigt. Die FE-Lösung kann mit den statischen Ansatzfunktionen sehr gut approximiert werden. Die Abweichung in Abbildung 3.8 resultiert aus dem Fehler, der durch die Modellreduktion gemacht wird. Durch die Beschränkung auf 50 Eigenmoden verhält sich das reduzierte Modell insgesamt etwas steifer als das FE-Modell, weshalb die Deformation etwas geringer ausfällt. Durch die bessere Approximation der lokalen Verformung reduziert sich die Steifigkeit der Kontaktzone und die Penalty-Faktoren können im Vergleich zum modalen Modell signifikant erhöht werden, siehe Abbildung 3.8. Weiterhin ist ein Konvergenzverhalten des Penalty-Faktors erkennbar. Konvergenzverhalten bedeutet in diesem Fall, dass sich mit steigenden Penalty-Faktoren der Kontaktkraftverlauf des reduzierten Modells an den des FE-Modells annähert. Im Kontaktkraftverlauf des ungedämpften CB-Modells treten jedoch numerische Schwingungen auf, siehe Abbildung 3.9 und die Rechendauer übersteigt mit 401 min die der FE-Simulation, siehe Tabelle 3.4. Die Gründe für dieses Verhalten werden im Weiteren diskutiert.

Die Eigenfrequenzen des modalen Modells sind relativ gering, siehe Tabelle 3.3 und in Abbildung 3.10. Durch die Kompensation der bei der modalen Reduktion vernachlässigten hochfrequenten Eigenmoden zur Erfassung der lokalen Deformation über statische Ansatzfunktionen werden hohe Eigenfrequenzen künstlich in das reduzierte System eingebracht, siehe Abbildung 3.10. Diese haben oftmals keine physikalische Bedeutung und liegen außerhalb des Frequenzbereichs von Interesse. Im Frequenzgang in Abbildung 3.10 wird ersichtlich, dass das modale Modell den dynamischen Bereich in $\|\mathbf{H}(i\omega)\|_F$ sehr gut abbilden kann. Die stationäre Lösung bei $\|\mathbf{H}(0)\|_F$ kann damit jedoch nicht korrekt abgebildet werden. Wie zuvor erwähnt, kann diese statisch korrekte Beschreibung bei $\|\mathbf{H}(0)\|_F$ durch die statischen Ansatzfunktionen erzielt werden, siehe Abbildung 3.10.

Während des Stoßes werden in den reduzierten Körpern alle enthaltenen Schwingungsformen angeregt. Aufgrund der hochfrequenten, unphysikalischen Dynamik

Tabelle 3.4: Rechenaufwand beim Stoßsystem Block-Stempel

	FE	Modal	CB ungedämpft	CB gedämpft
CPU [s]	13 802	33	24 030	3994
J_{ode}	-	1	11	55
nsteps	-	1349	375 821	3569
nfailed	-	89	19 356	653
max. Schrittw. [s]	-	$2.295e^{-6}$	$1.417e^{-6}$	$2.727e^{-6}$
min. Schrittw. [s]	-	$2.295e^{-7}$	$9.255e^{-10}$	$2.727e^{-9}$

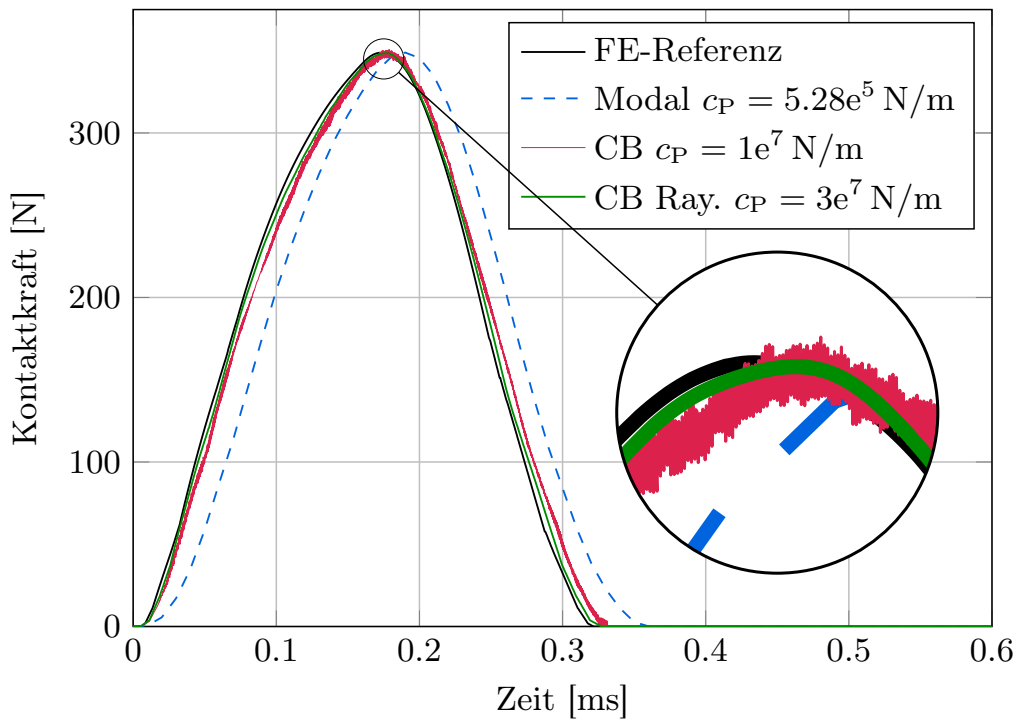


Abbildung 3.9: Kontaktkraftverläufe der reduzierten Modelle beim Stoßsystem Block-Stempel

im CB-Modell, siehe Abbildung 3.10, hat das reduzierte System eine sehr hohe numerische Steifigkeit. Ein System wird als numerisch steif bezeichnet, wenn es sowohl langsame als auch schnelle Zeitkonstanten enthält, was bedeutet, dass die Eigenwerte des Systems weit auseinander liegen, siehe [Nikraves88]. Um die hohe, unphysikalische Dynamik im CB-Modell mit kleinen numerischen Fehlern bei der Integration zu erfassen, ist eine relativ kleine Zeitschrittweite im Integrator erforderlich. Bei realen Systemen klingen die hohen Frequenzen nach dem Stoßvorgang aufgrund der Materialdämpfung schnell ab. In der ungedämpften FMKS-Simulation klingen diese Schwingungen jedoch nicht ab, weshalb über die gesamte Simulationsdauer kleine Zeitschrittweiten notwendig sind, um die hochfrequente Dynamik zu erfassen.

Solche numerisch steifen Systeme können mit den BDF-Verfahren (Backward Differentiation Formulas) effizient gelöst werden, siehe [HairerWanner96]. Dabei handelt es sich um implizite Methoden zur Berechnung der Zustände $\mathbf{y}(t_{n+1})$ für den nächsten Zeitschritt. In $\mathbf{y}(t_n)$ werden die Koordinaten $\mathbf{r}_{\text{IR}}$, β_{IR} und $\bar{\mathbf{q}}_e$ aller Körper zum aktuellen Zeitpunkt zusammengefasst. In MATLAB können solche numerisch steifen Systeme beispielsweise mit dem Löser ode15s für steife Differentialgleichungssysteme relativ effizient gelöst werden, siehe [Mathworks16, ShampineReichelt97]. Der ode15s ermöglicht relativ große Zeitschrittweiten bei Systemen mit hoher numerischer Steifigkeit, weshalb er in dieser Arbeit standardmäßig für alle Kontaktsimulationen mit reduzierten FMKS verwendet wird. Dabei

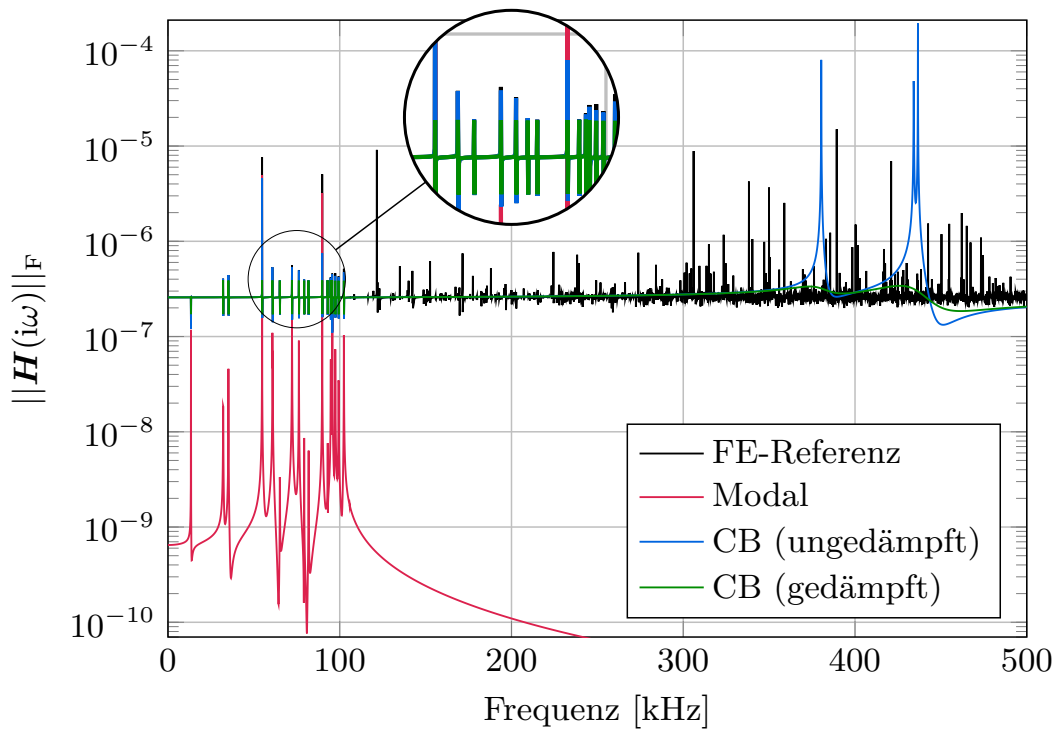


Abbildung 3.10: Frequenzgänge des FE-Modells und der reduzierten Modelle des Blocks

verwendet der ode15s das BDF-Verfahren und das NDF-Verfahrenen (Numerical Diffieration Formulas), siehe [ShampineReichelt97]. Für die Berechnung der Zustände $\mathbf{y}(t_{n+1})$ zum nächsten Zeitpunkt werden die impliziten BDF-/NDF-Formeln mit einem vereinfachten Newton-Verfahren iterativ gelöst. Dabei ist die maximale Anzahl Iterationen im ode15s auf vier Iterationen festgelegt, siehe [ShampineReichelt97]. In jedem Iterationsschritt wird der bei der iterativen Verbesserung der Näherungslösung gemachte Fehler abhängig von den vorgegebenen Fehlertoleranzen bestimmt. Ist dieser zwischen zwei Iterationsschritten nicht signifikant kleiner geworden, so ist die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens zu niedrig. In diesem Fall wird die zur Nullstellensuche benötigte Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ neu approximiert um die Konvergenz des Newton-Verfahrens zu beschleunigen. Dabei wird der aktuelle Zeitschritt verworfen und mit der neuen Jacobi-Matrix die Nullstellensuche wiederholt. Ist damit die Konvergenzrate auch zu niedrig, so wird die Zeitschrittweite bei konstanter Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ reduziert und das Newton-Verfahren neu gestartet um die Zustände $\mathbf{y}(t_{n+1})$ zum nächsten Zeitschritt zu berechnen, siehe [ShampineReichelt97]. Die Jacobi-Matrix bleibt beim ode15s daher so lange konstant, bis die Konvergenzrate der Nullstellensuche zu niedrig ist.

Ist das System nur wenig steif, wie zum Beispiel das in diesem Abschnitt verwendete modal reduzierte System, und werden moderate Fehlertoleranzen im Löser verwendet, so wird die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ nur einmal zum Start der Inte-

gration approximiert und ist über die gesamte Simulationsdauer konstant, siehe Tabelle 3.4. Eine Anpassung der Zeitschrittweite im ode15s kann auch erfolgen, wenn das Newton-Verfahren konvergiert, jedoch der Fehler der aktuellen Lösung größer ist als die vorgegebene Fehlertoleranz. Dann wird dieser Zeitschritt verworfen, der Zähler n_{failed} aktualisiert, und mit einer neuen Zeitschrittweite nochmals berechnet, siehe [ShampineReichelt97]. Dieser Fall tritt auch bei numerisch wenig steifen Systemen auf. Beim modalen Modell werden aus diesem Grund 89 Zeitschritte verworfen, siehe Tabelle 3.4.

Bei numerisch steifen Systemen ist die Konvergenzrate des vereinfachten Newton-Verfahrens im ode15s oftmals niedrig, weshalb die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ für eine bessere Konvergenz öfter neu approximiert werden muss, vergleiche CB ungedämpft in Tabelle 3.4. Abhängig von der Anzahl der reduzierten elastischen Koordinaten steigt bei der Neuapproximation von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ die Rechenzeit signifikant an. Ist mit der neu berechneten Jacobi-Matrix wiederholt die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens zu gering, so wird anschließend die Zeitschrittweite bei konstanter Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ so weit reduziert, bis die Konvergenz der Nullstellensuche schnell genug erreicht werden kann, siehe [ShampineReichelt97]. Dabei wird jeweils der aktuelle Zeitschritt verworfen und der Zähler n_{failed} erhöht. Abhängig von der numerischen Steifigkeit sind daher oftmals sehr kleine Zeitschrittweiten notwendig und es müssen viele Zeitschritte verworfen werden, bis die Zustände $\mathbf{y}(t_{n+1})$ abhängig von den Fehlertoleranzen ermittelt werden können, siehe CB ungedämpft in Tabelle 3.4. Bei reduzierten Körpern hat daher der Maximalwert der Eigenfrequenzen einen Einfluss auf die Zeitschrittweite und damit auch auf die Genauigkeit der numerischen Integration. Durch die hohe numerische Steifigkeit des ungedämpften CB-Modells sind sehr kleine Zeitschrittweiten notwendig, welche in einer mit 401 min sehr hohen Rechenzeit resultieren, siehe Tabelle 3.4. Aufgrund der sehr kleinen Zeitschrittweite treten zusätzlich numerische Schwingungen im Kontaktkraftverlauf auf, siehe Abbildung 3.9. Somit hat neben der Größe der reduzierten Körper die maximal auftretende Eigenfrequenz einen signifikanten Einfluss auf den Rechenaufwand. Die bessere Approximation der lokalen Verformung wird aufgrund der hochfrequenten Dynamik daher mit einer erheblichen Verschlechterung der numerischen Effizienz erkaufte. Wie Abbildung 3.8 aufzeigt, können diese statischen Ansatzfunktionen jedoch nicht vernachlässigt werden.

Kontaktsimulation mit gedämpften CB-Modellen

Um die numerische Effizienz zu verbessern, indem der Einfluss dieser hochfrequenten Dynamik im Integrator über eine geeignete Wahl der Dämpfung reduziert wird, wird im nächsten Schritt die Dämpfungsmatrix über Rayleigh-Dämpfung nach Gl. (2.168) bestimmt. Die unbekannten Rayleigh-Koeffizienten

α_1 und α_2 werden über

$$\alpha_1 = 4\pi^2 f_1 f_2 \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{\xi}{\pi (f_1 + f_2)} \quad (3.30)$$

berechnet, siehe [StelzmannGrothMüller08]. Dabei wird ein Frequenzbereich zwischen f_1 und f_2 sowie der Dämpfungsgrad ξ vorgegeben. Nach [StelzmannGrothMüller08] wird in dem Frequenzbereich zwischen f_1 und f_2 eine nahezu konstante Dämpfung realisiert. Die hochfrequente Dynamik im CB-Modell ist zur statisch korrekten Beschreibung notwendig und hat somit keine physikalische Relevanz und keinen Einfluss auf die niederfrequente Dynamik. Daher wird der Frequenzbereich zwischen f_1 und f_2 so gewählt, dass die künstlichen Eigenfrequenzen, siehe Abbildung 3.10, gedämpft werden und das niederfrequente Deformationsverhalten nicht oder nur möglichst schwach gedämpft wird, siehe Abbildung 3.10. Dazu wird beim Stempel der Frequenzbereich von 230 Hz bis 35 kHz mit dem Dämpfungsgrad $\xi = 0.01$ zur Berechnung der Rayleigh-Koeffizienten nach Gl. (3.30) verwendet. Damit werden die 50 inneren Moden des CB-Modells nur sehr schwach gedämpft, während alle Frequenzen größer als 35 kHz stärker gedämpft werden. Die so berechneten Dämpfungsparameter beim Stempel sind $\alpha_1 = 28.71$ und $\alpha_2 = 9.04e^{-8}$. Beim Block wird dieser Frequenzbereich aufgrund der im reduzierten System enthaltenen Frequenzen mit 13.4 kHz bis 106 kHz festgelegt und ebenfalls ein Dämpfungsgrad von $\xi = 0.01$ gewählt. Auf diese Weise ergeben sich die Dämpfungsparameter $\alpha_1 = 1494.9$ und $\alpha_2 = 2.67e^{-8}$. Die verwendeten Frequenzbereiche f_1 bis f_2 stellen jeweils die niederfrequente Dynamik der 50 Eigenmoden im Block und Stempel dar.

Mit den so bestimmten Dämpfungsparametern kann die Rechenzeit der FMKS-Simulation im Vergleich zur dynamischen FE-Simulation um 71 % auf etwa 67 min reduziert werden, wie in Tabelle 3.4 dargestellt ist. Durch die Dämpfung wird folglich der Einfluss der hochfrequenten Dynamik und damit die numerische Steifigkeit reduziert. Die Konvergenzrate im ode15s erscheint aufgrund der vielen Neuapproximationen von der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ niedriger als im ungedämpften Fall, siehe Tabelle 3.4. Die viel geringere Anzahl fehlgeschlagener Zeitschritte nfailed zeigt, dass es beim gedämpften Fall im Gegensatz zum ungedämpften CB-Modell jedoch nicht notwendig ist die Zeitschrittweite nach der Neuapproximation von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ weiter zu reduzieren. Daher sind die Zeitschrittweiten größer, siehe Tabelle 3.4, und es lässt sich daraus eine höhere Konvergenzrate des ode15s ableiten. Somit kann mit Materialdämpfung, modelliert über Rayleigh-Dämpfung, die numerische Steifigkeit reduziert und die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens im ode15s verbessert werden. Die Rechenzeit kann trotz der häufigeren Neuapproximation der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ aufgrund der wenigen verworfenen und der daher viel geringeren Anzahl Zeitschritte nsteps im Vergleich zum ungedämpften Modell signifikant reduziert werden. Außerdem treten keine numerischen Schwingungen mehr auf, wie der Kontaktkraftverlauf des gedämpf-

ten CB-Modells in Abbildung 3.9 zeigt.

Da die Dämpfungsparameter α_1 und α_2 nach Gl. (3.30) so berechnet werden, dass im Bereich zwischen f_1 und f_2 nahezu konstante Dämpfung herrscht wird die niederfrequente Dynamik stets gedämpft. Die numerische Effizienz wird daher von der Wahl von ξ , f_1 und f_2 beeinflusst. Je nach Wahl dieser Dämpfungsparameter wird jedoch die Wellenausbreitung im Stempel negativ beeinflusst. Die Wellenausbreitung kann zum Beispiel im Verschiebungs- oder Geschwindigkeitsverlauf eines Punkts auf dem Stempel beobachtet werden, siehe [TschiggS-eifried17]. Daher muss bei der Verwendung der Rayleigh-Dämpfung ein Kompromiss zwischen numerischer Effizienz und Genauigkeit der Ergebnisse eingegangen werden. Basierend auf diesen Beobachtungen und mit dem Ziel die numerische Effizienz der Kontaktsimulation weiter zu steigern, werden in den folgenden Abschnitten die Grundlagen zweier Kontaktsubmodelle für eine effiziente und präzise Stoßanalyse kombiniert mit reduzierten FMKS vorgestellt.

3.4 Partitionierung der Bewegungsgleichungen beim Buckens-System

In diesem Abschnitt wird erst aufgezeigt, wie die Massenmatrix aus Gl. (2.94) bei der Verwendung des Buckens-Systems als Referenzsystem vereinfacht werden kann. Da der Frequenzbereich von Interesse oftmals vorab bekannt ist, wird anschließend die Aufteilung der Bewegungsgleichungen des elastischen Körpers in nieder- und hochfrequente Anteile dargestellt. Diese Aufteilung der Bewegungsgleichungen ist die Grundlage für die in diesem Kapitel vorgestellten Kontaktmodelle.

3.4.1 Vereinfachung der Massenmatrix beim Buckens-System

Die symmetrische Massenmatrix aus Gl. (2.94) eines einzelnen reduzierten elastischen Körpers stellt die Trägheitskopplung zwischen der translatorischen und rotatorischen Referenzbewegung mit den elastischen Deformationen dar. Sie hängt von den reduzierten elastischen Koordinaten $\bar{q}_e$ ab und muss daher in jedem Integrationsschritt neu berechnet werden. Mit einer geeigneten Wahl des Referenzsystems kann die Dynamik der Referenzbewegung möglichst weit von der elastischen Deformation entkoppelt und damit der Rechenaufwand in jedem Zeitschritt reduziert werden. Hierfür bietet sich das in Abschnitt 2.7.2 beschriebene Buckens-System an.

Nach [Lehner07, SchwertassekWallerapp99] werden die Bedingungen des Buckens-Systems in Gl. (2.177) automatisch erfüllt, wenn die Ansatzfunktionen massenorthogonal zu den Starrkörpermoden sind und das Referenzsystem im undeformierten Zustand mit dem Schwerpunkt übereinstimmt. Demnach erfüllen modal reduzierte Modelle freier Körper diese Bedingungen automatisch. Besteht die

Projektionsmatrix berechnet über das CB-Verfahren aus dynamischen Eigenmoden und statischen Ansatzfunktionen, so kann sie nach [Friberg91] so transformiert werden, dass die Bedingungen des Buckens-Systems erfüllt werden. Dazu wird das Eigenwertproblem des reduzierten Systems nach Gl. (2.165) gelöst und anschließend die Eigenvektoren massenorthonormalisiert. Damit werden die Bedingungen des Buckens-Systems erfüllt, die Systemmatrizen in Diagonalform gebracht und das System entkoppelt.

Zunächst wird die Berechnung der Koppelmatrizen $\mathbf{C}_t$ und $\mathbf{C}_r$ aus Gl. (2.99) erläutert, welche die Bewegung des Referenzsystems mit der relativen elastischen Deformation koppeln, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Die Matrix $\mathbf{C}_t$ wird folgendermaßen aus den Ansatzfunktionen berechnet

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{t0} = \int_{\Omega_0} \Phi^T dm = \mathbf{C1}^T, \quad (3.31)$$

wobei das Ortsintegral $\mathbf{C1}$ nach Tabelle 2.1 aus den FE-Matrizen ermittelt werden kann. Der von $\bar{\mathbf{q}}_e$ linear abhängige Term $\mathbf{C}_{t1}$ wird nur benötigt, wenn geometrische Steifigkeiten berücksichtigt werden sollen und kann in dieser Arbeit daher vernachlässigt werden. Die Kopplung $\mathbf{C}_r$ der Rotation mit der elastischen Deformation in Gl. (2.99) enthält nach [SchwertassekWallrapp99] einen von $\bar{\mathbf{q}}_e$ unabhängigen Term

$$\mathbf{C}_{r0} = \int_{\Omega_0} \Phi^T \tilde{\mathbf{c}}_{RP}^T dm = \mathbf{C2}^T, \quad (3.32)$$

und einen in $\bar{\mathbf{q}}_e$ linearen Term

$$\mathbf{C}_{r1}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \int_{\Omega_0} \Phi^T (\widetilde{\Phi \bar{\mathbf{q}}_e})^T dm = \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{C5}_l^T \bar{q}_{e,l}, \quad (3.33)$$

wobei n_q die Anzahl der reduzierten elastischen Koordinaten beschreibt. Die Berechnung der Ortsintegrale $\mathbf{C2}$ und $\mathbf{C5}$ aus den FE-Matrizen ist Tabelle 2.1 zu entnehmen. Beim verwendeten Buckens-System wird vorausgesetzt, dass das Quadrat der elastischen Deformation nach Gl. (2.178) minimiert wird, wenn das Referenzsystem dem Körper folgt. Dabei wird die Dynamik der Referenzbewegung möglichst weit von der elastischen Verformung entkoppelt, weshalb die Kopplungsmatrizen $\mathbf{C}_t$ in Gl. (3.31) und $\mathbf{C}_{r0}$ in Gl. (3.32) aufgrund Gl. (2.177) verschwinden, siehe [SchwertassekWallrappShabana99]. Daher gilt schließlich für die Ortsintegrale $\mathbf{C1}$ und $\mathbf{C2}$ aus Tabelle 2.1

$$\mathbf{C}_t^T = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{C1} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_{r0}^T = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{C2} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

3.4 Partitionierung der Bewegungsgleichungen

Die Koppelmatrix $\mathbf{C}_{r1}$ in Gl. (3.33) kann nach [SchwertassekWallrapp99] auch dargestellt werden über

$$\mathbf{C}_{r1}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{C5}_l^T \bar{\mathbf{q}}_{e,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r1} \bar{\mathbf{q}}_e & \mathbf{K}_{r2} \bar{\mathbf{q}}_e & \mathbf{K}_{r3} \bar{\mathbf{q}}_e \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

mit der l -ten Komponente des Ortsintegrals $\mathbf{C5}_l$ oder der $n_q \times n_q$ -Matrix $\mathbf{K}_{r\alpha}$. Diese Matrix kann durch die Einträge von $\mathbf{C5}$ ausgedrückt werden als

$$\mathbf{K}_{r\alpha} = [\mathbf{C5}_l]_{\alpha k}, \quad \text{mit } k, l = 1 \dots n_q \quad \text{und } \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.36)$$

ebenso wie durch das Ortsintegral $\mathbf{C3}$ aus Tabelle 2.1 als

$$\mathbf{K}_{r\alpha} = -\mathbf{C3}_{\beta\gamma} + \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^T, \quad (3.37)$$

wobei α, β, γ zyklische Permutationen von 1, 2, 3 sind. Da das Ortsintegral $\mathbf{C5}$ im Gegensatz zu $\mathbf{C1}$ und $\mathbf{C2}$ beim Buckens-System nicht verschwindet, bleibt in der Kopplungsmatrix der Rotation $\mathbf{C}_r$ nach Gl. (2.99) der in $\bar{\mathbf{q}}_e$ lineare Term enthalten, womit für die Koppelung der Rotation schließlich

$$\mathbf{C}_r(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{C}_{r1}(\bar{\mathbf{q}}_e) \quad (3.38)$$

gilt. Zur Definition des Buckens-Systems liegt das Referenzsystem im Schwerpunkt des deformierten Körpers. Daher gilt für die Lage $\mathbf{c}$ des Schwerpunkts in Gl. (2.96) aufgrund Gl. (2.177) mit den reduzierten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e$

$$\mathbf{c}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{0}, \quad \text{mit } \mathbf{c}_1(\bar{\mathbf{q}}_e) = \frac{1}{m} \mathbf{C1} \bar{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}, \quad (3.39)$$

siehe [SchwertassekWallrapp99]. Somit vereinfacht sich die Massenmatrix aus Gl. (2.94) beim Buckens-System zu

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e) & \mathbf{C}_{r1}^T(\bar{\mathbf{q}}_e) \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{r1}(\bar{\mathbf{q}}_e) & \bar{\mathbf{M}}_e \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Die Trägheitskopplung besteht damit lediglich noch zwischen der Verdrehung des Referenzsystems und der elastischen Verformung über die Matrix $\mathbf{C}_{r1}$.

3.4.2 Partitionierung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen eines entkoppelten reduzierten elastischen Körpers unter Vernachlässigung der Dämpfung lauten

$$\bar{\mathbf{M}}_e \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e + \bar{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{q}}_e = \mathbf{V}^T \mathbf{f}_e, \quad (3.41)$$

mit den nach Gl. (2.166) entkoppelten Systemmatrizen $\bar{\mathbf{M}}_e = \mathbf{E}$ und $\bar{\mathbf{K}}_e = \hat{\mathbf{\Lambda}}$. In Abschnitt 3.3 wird aufgezeigt, dass die Bewegungsgleichungen aufgrund der

statischen Ansatzfunktionen hochfrequente Anteile enthalten. In technischen Systemen wird oftmals jedoch nur in einem bestimmten vorab bekannten Frequenzbereich eine hohe Genauigkeit gefordert. Daher werden als Grundlage für die Kontaktsubmodelle in diesem Abschnitt die Bewegungsgleichungen partitioniert. Aufteilen des gesamten Frequenzbereichs entsprechend einer Trennfrequenz $0 < \Omega < \Omega^{\text{hf}}$ liefert aus Gl. (3.41) die partitionierten Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{\text{lf}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \\ \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}^{\text{lf}})^{\text{T}} \\ (\mathbf{V}^{\text{hf}})^{\text{T}} \end{bmatrix} \mathbf{f}_e. \quad (3.42)$$

Die Projektionsmatrix $\mathbf{V}^{\text{lf}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fe}} \times n_{\text{q}}^{\text{lf}}}$ enthält spaltenweise die ersten n_{q}^{lf} Ansatzfunktionen mit Eigenfrequenzen kleiner als die Trennfrequenz Ω^{hf} , während die Matrix $\mathbf{V}^{\text{hf}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fe}} \times n_{\text{q}}^{\text{hf}}}$ dagegen alle n_{q}^{hf} Ansatzfunktionen mit Eigenfrequenzen größer gleich Ω^{hf} enthält, siehe [SherifWitteveenMayrhofer12]. Die Diagonalmatrizen $\hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{lf}} = \bar{\mathbf{K}}_e^{\text{lf}}$ und $\hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{hf}} = \bar{\mathbf{K}}_e^{\text{hf}}$ sind nach Gl. (2.166) definiert als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{lf}} &= \text{diag}(\omega_{\text{lf},i}^2) \quad \text{mit} \quad \omega_{\text{lf},i} < \Omega^{\text{hf}}, \quad i = 1 \dots n_{\text{q}}^{\text{lf}}, \\ \hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{hf}} &= \text{diag}(\omega_{\text{hf},i}^2) \quad \text{mit} \quad \omega_{\text{hf},i} \geq \Omega^{\text{hf}}, \quad i = 1 \dots n_{\text{q}}^{\text{hf}}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit den n_{q}^{lf} niederfrequenten und den n_{q}^{hf} hochfrequenten Ansatzfunktionen, für die $n_{\text{q}}^{\text{lf}} + n_{\text{q}}^{\text{hf}} = n_{\text{q}}$ gilt. Basierend auf der Definition der nieder- und hochfrequenten Ansatzfunktionen in Gl. (3.42) gilt für die Approximation des Vektors der Knotenverschiebungen

$$\mathbf{q}_e \approx \mathbf{V} \bar{\mathbf{q}}_e \approx \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{\text{lf}} & \mathbf{V}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \\ \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Wird angenommen, dass außer der Schwerkraft keine weiteren Volumenkräfte wirken, so entfällt beim Buckens-System der elastische Anteil $\mathbf{h}_{\text{be}}$ in Gl. (2.112), da $\mathbf{C}_{\text{t}} = \mathbf{0}$ gilt. Treten zusätzliche Volumenkräfte auf, so wird der elastische Anteil in Gl. (2.111) aufgeteilt in $\mathbf{h}_{\text{be}}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{h}_{\text{be}}^{\text{hf}}$. Gleiches gilt für Oberflächenspannungen in Gl. (2.110), die in $\mathbf{h}_{\text{pe}}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{h}_{\text{pe}}^{\text{hf}}$ aufgeteilt werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird jedoch vorausgesetzt, dass keine Schwerkraft wirkt und dass keine Oberflächenspannungen wirken, weshalb die Kraftvektoren $\mathbf{h}_{\text{b}} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{h}_{\text{p}} = \mathbf{0}$ vernachlässigt werden können. Wird das ungedämpfte System in Gl. (3.42) betrachtet, so können mit diesen Annahmen die partitionierten, entkoppelten Bewegungsgleichungen eines reduzierten elastischen freien Körpers

nach Gl. (2.114) im Buckens-System formuliert werden als

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e) & (\mathbf{C}_{r1}^{lf}(\bar{\mathbf{q}}_e^{lf}))^T & (\mathbf{C}_{r1}^{hf}(\bar{\mathbf{q}}_e^{hf}))^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{r1}^{lf}(\bar{\mathbf{q}}_e^{lf}) & \mathbf{E}^{lf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{r1}^{hf}(\bar{\mathbf{q}}_e^{hf}) & \mathbf{0} & \mathbf{E}^{hf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{IR} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{lf} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{hf} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{lf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{hf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{IR} \\ \boldsymbol{\beta}_{IR} \\ \bar{\mathbf{q}}_e^{lf} \\ \bar{\mathbf{q}}_e^{hf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{dt} \\ h_{dr} \\ h_{de}^{lf} \\ h_{de}^{hf} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{\omega t} \\ h_{\omega r} \\ h_{\omega e}^{lf} \\ h_{\omega e}^{hf} \end{bmatrix}. \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Wie in diesem Abschnitt aufgezeigt, können bei der Verwendung des Buckens-Systems die Bewegungsgleichungen erheblich vereinfacht werden. Es sind jedoch weiterhin nicht konstante Komponenten wie $\mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e)$, $\mathbf{C}_{r1}^{lf}(\bar{\mathbf{q}}_e^{lf})$ oder $\mathbf{C}_{r1}^{hf}(\bar{\mathbf{q}}_e^{hf})$ in der Massenmatrix aus Gl. (3.45) enthalten, die in jedem Zeitschritt neu berechnet werden müssen.

3.5 Gedämpftes Kontaktsubmodell

In Abschnitt 3.3 wird aufgezeigt, dass bei Kontaktsimulationen mit CB-Modellen die Verwendung von Dämpfung für akzeptable Rechenzeiten unverzichtbar ist. Das CB-Modell ist zwangsläufig ein numerisch steifer Satz von Differentialgleichungen mit größeren Zeitkonstanten aus den dynamischen Eigenmoden und sehr kleinen Zeitkonstanten, die durch die statischen Ansatzfunktionen eingeführt werden, siehe [HeirmanTamarozziDesmet11]. Für die numerische Stabilität und zur Erfassung aller auftretenden Deformationseffekte sollte je nach Integrator die Zeitschrittweite kleiner als die kleinste Zeitkonstante im numerischen Modell sein. Zur Kompensation der vernachlässigten hochfrequenten Eigenmoden führen die statischen Ansatzfunktionen beim CB-Modell diese kleinen Zeitkonstanten künstlich ein und legen damit die Zeitschrittweite des Integrators fest, siehe Tabelle 3.4. Um den Einfluss der hochfrequenten Dynamik zu reduzieren, können Integratoren mit hochfrequenter numerischer Dämpfung verwendet werden. Diese verhindern, dass durch die hochfrequente Dynamik der Integrationsvorgang instabil wird, während die niederfrequente Dynamik nur minimal beeinflusst wird. Entsprechende Methoden wurden von [Newmark59] und mit dem generalized-alpha-Löser von [ChungHulbert93] vorgestellt.

Statt Integratoren mit numerischer Dämpfung kann auch Materialdämpfung, zum Beispiel in Kombination mit Lösern für steife Differentialgleichungen, verwendet werden. In dieser Arbeit wird zur Bestimmung der Dämpfungsparameter in der Dämpfungsmatrix $\bar{\mathbf{D}}_e$ das reduzierte System in Diagonalform nach Gl. (2.170), aufgeteilt in nieder- und hochfrequente Anteile nach Abschnitt 3.4.2, betrachtet. Bei realen Systemen kann nach [Adhikari06] die Dämpfungsmatrix

über eine Modalanalyse bestimmt werden. Die modalen Dämpfungsparameter ξ_i werden dabei numerisch für jede elastische Koordinate ermittelt. Durch den Stoß werden im reduzierten System sowohl die physikalisch relevanten als auch die künstlich eingefügten Eigenfrequenzen angeregt. Je nach Frequenzinhalt liegt ein numerisch steifes System vor, siehe Abschnitt 3.3. Die statischen Ansatzfunktionen stellen meist die lokale Verformung dar und haben keinen Einfluss auf die niederfrequente globale Verformung. Ihr dynamischer Beitrag zur Systemdynamik kann daher vernachlässigt werden. Durch eine passende Wahl der Dämpfungsparameter sollen die hochfrequenten, physikalisch nicht relevanten, Schwingungen der statischen Ansatzfunktionen, welche die numerische Effizienz verschlechtern, gedämpft werden ohne die niederfrequenten Anteile zu beeinflussen. Damit wird gewährleistet, dass das globale niederfrequente Bewegungsverhalten, zum Beispiel in Form von Wellenausbreitung, nicht gedämpft wird. Deshalb werden die Dämpfungsparameter ξ_i^{hf} nur für die hochfrequenten elastischen Koordinaten ermittelt. Bei der Bestimmung gilt es zu beachten, dass ξ_i^{hf} so klein gewählt werden sollte, dass kein negativer Einfluss auf den niederfrequenten Bereich auftritt. Die Dämpfungsparameter sollten jedoch so groß gewählt werden, dass die numerische Effizienz signifikant verbessert wird. Zur Verifizierung wird die Frequenzgangmatrix aus Abschnitt 2.10 verwendet.

Die Berechnung der Dämpfungsparameter ξ_i^{hf} erfolgt beim gedämpften Kontaktsubmodell mittels der Anpassung der gedämpften Schwingungsdauer $T_{\text{d},i}^{\text{hf}} = 2\pi/\omega_{\text{d},i}^{\text{hf}}$ über die gedämpfte Eigenfrequenz

$$\omega_{\text{d},i}^{\text{hf}} = \omega_i^{\text{hf}} \sqrt{1 - (\xi_i^{\text{hf}})^2}, \quad (3.46)$$

mit $i = 1 \dots n_q^{\text{hf}}$, siehe [GrossEtAl15]. Dabei handelt es sich um eine schwache Dämpfung, da immer $\xi_i^{\text{hf}} \leq 1$ gilt, womit unphysikalisch große Dämpfungsparameter ausgeschlossen werden. Der Dämpfungsparameter ξ_i^{hf} zur Berechnung der Dämpfungsmatrix $\bar{\mathbf{D}}_e$ nach Gl. (2.170) wird für eine vorgegebene gedämpfte Schwingungsdauer $T_{\text{d},i}^{\text{hf}}$ berechnet über

$$\xi_i^{\text{hf}} = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{(T_{\text{d},i}^{\text{hf}})^2 (\omega_i^{\text{hf}})^2}}. \quad (3.47)$$

Da die numerische Stabilität und Effizienz von der kleinsten Zeitkonstante abhängt, werden im gedämpften Kontaktsubmodell für die hochfrequenten elastischen Koordinaten anhand Gl. (3.47) die Dämpfungsparameter so bestimmt, dass die gedämpfte Schwingungsdauer bzw. die gedämpfte Eigenfrequenz $\omega_{\text{d},i}$ für alle hochfrequenten elastischen Koordinaten gleich groß ist. Dabei hängt das Dämpfungsmaß von der Eigenfrequenz ω_i ab, weshalb hohe Eigenfrequenzen stärker gedämpft werden als niedrige, siehe Abbildung 3.11. Über diesen Ansatz wird der Einfluss der hochfrequenten Dynamik auf das Schwingungsverhalten

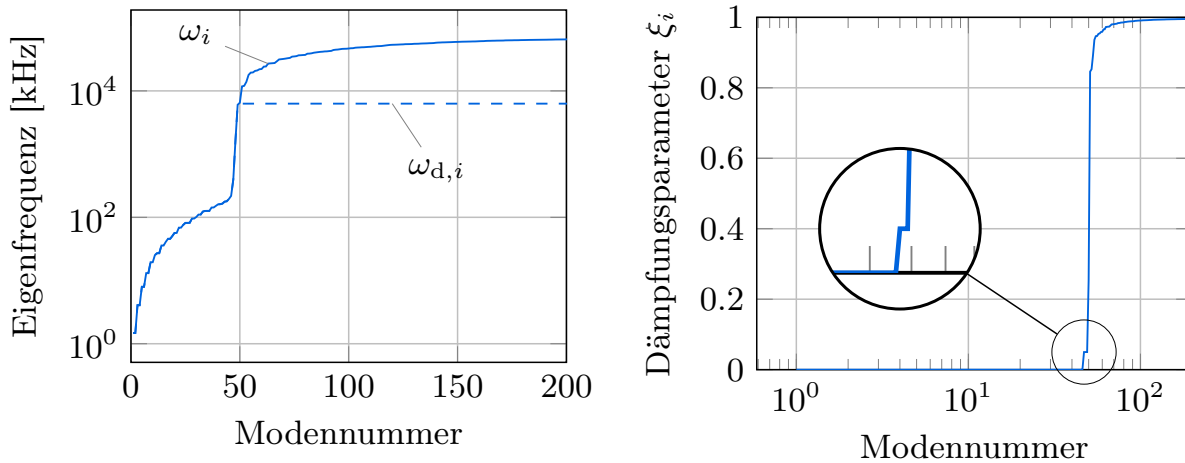


Abbildung 3.11: Eigenfrequenzen und Dämpfungsparameter des Beispielsystems

beim Stoß reduziert und damit die Zeitkonstanten vergrößert.

Abhängig von der Wahl der Schwingungsdauer $T_{d,i}^{\text{hf}}$ entsteht ein Übergangsbereich zwischen der letzten ungedämpften niederfrequenten elastischen Koordinate und der ersten hochfrequenten, auf welche die nach Gl. (3.47) berechnete Dämpfung wirkt. Numerische Experimente haben aufgezeigt, dass ein konstanter Dämpfungsparameter $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ im Übergangsbereich die numerische Effizienz steigern kann, siehe [TschiggSeifried17, TschiggSeifried18]. Sowohl bei der Wahl der gedämpften Schwingungsdauer $T_{d,i}^{\text{hf}}$ als auch bei der Wahl des Dämpfungsparameters im Übergangsbereich muss beachtet werden, dass die niederfrequenten elastischen Koordinaten möglichst ungedämpft oder nur schwach gedämpft bleiben, siehe Abbildung 3.11. Die korrekte Wahl von $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ und $T_{d,i}^{\text{hf}}$ wird anhand der Frequenzgangmatrix aus Abschnitt 2.10 geprüft. In Kapitel 5 wird die Ermittlung der entsprechenden Dämpfungsparameter ausführlich erläutert.

3.5.1 Wahl der Trennfrequenz beim gedämpften Kontaktsubmodell

Der Frequenzbereich von Interesse ist bei Kontaktsimulationen oftmals vorab bekannt und liegt typischerweise in der Maschinendynamik im Bereich von 50 – 100 kHz. Dieser relevante Frequenzbereich kann beispielsweise über Experimente oder FE-Simulationen ermittelt werden. Der Frequenzbereich umfasst alle für die Analyse relevanten globalen Deformationen, wie zum Beispiel die Wellenausbreitung in den gestoßenen Körpern. Für präzise Ergebnisse muss das reduzierte Modell daher mindestens alle Eigenmoden enthalten, die in diesem Frequenzbereich von Interesse dynamisch angeregt werden können. Zur Kompensation des quasi-statischen Beitrags der bei der modalen Reduktion vernachlässigten höherfrequenten Eigenmoden zur Beschreibung der lokalen Deformation wird die Projektionsmatrix um statische Ansatzfunktionen für jeden belasteten Knoten-

freiheitsgrad in der Kontaktzone erweitert.

Beim gedämpften Kontaktsubmodell erfolgt die Festlegung der Trennfrequenz anhand der Eigenfrequenzen der globalen Schwingungsmoden des reduzierten Systems. Zunächst wird eine ausreichend große Anzahl Eigenmoden definiert, um alle dynamischen Schwingungseffekte im Frequenzbereich von Interesse zu erfassen. Anschließend wird die um statische Ansatzfunktionen erweiterte Projektionsmatrix nach Gl. (2.165) entkoppelt. Die reduzierte Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}_e$ enthält nach dem Entkoppeln nicht nur Eigenfrequenzen des Originalsystems, sondern auch sehr hohe Frequenzen, eingeführt durch die statischen Ansatzfunktionen zur Erfassung der lokalen Deformation, siehe Abschnitt 3.3. Wird vorausgesetzt, dass diese künstlich in das reduzierte System eingebrachten Eigenfrequenzen alle größer sind als der physikalisch relevante Frequenzbereich, so wird als Trennfrequenz Ω^{hf} die höchste Eigenfrequenz der in der entkoppelten Projektionsmatrix enthaltenen globalen Eigenmoden verwendet. Die erste künstliche Eigenfrequenz der statischen Ansatzfunktionen liegt dann oberhalb dieser Trennfrequenz. Mit dieser Trennfrequenz wird die entkoppelte Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ folgendermaßen aufgeteilt: Die Eigenmoden des Systems, welche die dynamischen globalen Schwingungsmoden des elastischen Körpers beschreiben und bei Anregung dynamisch reagieren, werden spaltenweise in $\mathbf{V}^{\text{lf}}$ angeordnet. Die hochfrequenten statischen Ansatzfunktionen zur Beschreibung der lokalen Verformung in der Kontaktzone werden in $\mathbf{V}^{\text{hf}}$ zusammengefasst.

3.6 Vernachlässigung der Trägheitskopplung zwischen Starrkörperrotation und Deformation

Werden die partitionierten, entkoppelten Bewegungsgleichungen (3.45) betrachtet, so kann die hochfrequente Dynamik neben der externen Anregung auch durch die Trägheitskopplung der rotatorischen Starrkörperbewegung und der elastischen Deformation über $\mathbf{C}_{r1}^{\text{lf}}$ sowie $\mathbf{C}_{r1}^{\text{hf}}$ angeregt werden. In [Koppens89] wird vorgeschlagen, die Kopplung über $\mathbf{C}_r$ bei kleinen elastischen Verformungen komplett zu vernachlässigen. Bei Beschränkung auf kleine elastische Verformungen und mit der Annahme kleiner Amplituden der modalen (reduzierten) Koordinaten aufgrund der Massenorthonormalisierung wird in [Wielenga84] ebenfalls vorgeschlagen, die Kopplungsterme zu vernachlässigen. Diese Annahme trifft jedoch nicht in allen Anwendungsfällen zu und kann zum Beispiel bei hohen Rotationsgeschwindigkeiten zu Fehlern führen. In dieser Arbeit wird die Kopplung in Gl. (3.40) nicht komplett vernachlässigt, sondern es wird in diesem Abschnitt angelehnt an [SherifWitteveenMayrhofer12] gezeigt, dass die hochfrequente Trägheitskopplung $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ signifikant kleiner ist als die niederfrequente über $\mathbf{C}_r^{\text{lf}}$. Damit lassen sich die Bewegungsgleichungen (3.45) anschließend weiter vereinfachen.

Die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Koppelterme der Rotation $\mathbf{C}_r(\bar{\mathbf{q}}_e)$ kann mit Gl. (3.32) und Gl. (3.33) auch geschrieben werden als

$$\mathbf{C}_r(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{C}_{r0} + \mathbf{C}_{r1}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \int_{\Omega_0} \Phi^T \tilde{\mathbf{c}}_{RP}^T dm + \int_{\Omega_0} \Phi^T (\widetilde{\Phi \bar{\mathbf{q}}_e})^T dm. \quad (3.48)$$

Nach [SherifWitteveenMayrhofer12] können die Integrale aus der obigen Gleichung (3.48) mit der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ auch als Summe über alle n_{fe}^k FE-Knoten in der Form

$$(\mathbf{C}_r)^T = \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \tilde{\mathbf{c}}_{RP,l} \mathbf{V}_l + \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l (\widetilde{\mathbf{V}_l \bar{\mathbf{q}}_e}) \mathbf{V}_l, \quad (3.49)$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{V}_l \in \mathbb{R}^{3 \times n_q}$ die Ansatzfunktionen des l -ten FE-Knotens darstellt. Dabei beschreibt m_l den skalaren Eintrag der l -ten Zeile und der l -ten Spalte der Massenmatrix $\mathbf{M}_e$ und n_{fe}^k die Anzahl der Knoten des FE-Modells. Da in dieser Arbeit jeder Knoten des FE-Modells drei translatorische und keine rotatorischen Freiheitsgrade hat, folgt daraus die Systemdimension des freien Systems zu $n_{fe} = 3n_{fe}^k$. Ab einschließlich Gl. (3.49) wird die Projektionsmatrix $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_{fe} \times n_q}$ für den weiteren Verlauf umsortiert zu $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_{fe}^k \times 3 \times n_q}$. Die entsprechenden Dimensionen der Matrix $\mathbf{V}$ sind in Abbildung 3.12 veranschaulicht.

Erfüllen die Ansatzfunktionen in der Projektionsmatrix $\mathbf{V}$ die Bedingungen des Buckens-Systems, so entfällt nach Gl. (3.34) der erste Term in Gl. (3.48) bzw. Gl. (3.49), welcher die Matrix $\mathbf{C}_2$ bzw. $\mathbf{C}_{r0}^T$ repräsentiert. Mit $\mathbf{V}^{lf}$ und $\mathbf{V}^{hf}$ aus Gl. (3.44) folgt dann nach [SherifWitteveenMayrhofer12] aus Gl. (3.49)

$$(\mathbf{C}_r^{lf})^T = \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l (\widetilde{\mathbf{V}_l \bar{\mathbf{q}}_e}) \mathbf{V}_l^{lf} \quad \text{und} \quad (\mathbf{C}_r^{hf})^T = \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l (\widetilde{\mathbf{V}_l \bar{\mathbf{q}}_e}) \mathbf{V}_l^{hf}. \quad (3.50)$$

Im weiteren Verlauf wird zur übersichtlichen Schreibweise $\mathbf{C}_{r1}$ als $\mathbf{C}_r$ bezeichnet. Indem in Gl. (3.50) die Tilde-Operatoren durch Kreuzprodukte ersetzt werden, folgt nach [SherifWitteveenMayrhofer12] die Formulierung

$$(\mathbf{C}_r^{lf})^T = \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l (\mathbf{V}_l \bar{\mathbf{q}}_e) \times \mathbf{V}_l^{lf}, \quad (3.51)$$

$$(\mathbf{C}_r^{hf})^T = \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l (\mathbf{V}_l \bar{\mathbf{q}}_e) \times \mathbf{V}_l^{hf}. \quad (3.52)$$

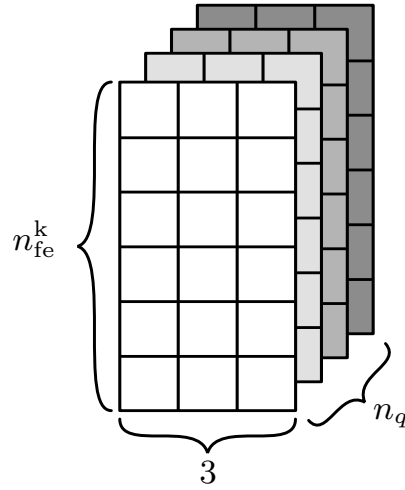


Abbildung 3.12: Darstellung der Matrix $\mathbf{V}$ bestehend aus n_{fe}^k Zeilen, drei Spalten und n_q Fenstern

Wird in Gl. (3.51) und Gl. (3.52) der Ausdruck $(\mathbf{V}_l \bar{\mathbf{q}}_e)$ durch Gl. (3.44) ersetzt, so folgt daraus nach [SherifWitteveenMayrhofer12] die u -te Spalte von $(\mathbf{C}_r^{lf})^T$ zu

$$(\mathbf{C}_{r*u}^{lf})^T = \sum_{s=1}^{n_q^{lf}} \bar{q}_{e,s}^{lf} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{lf} \times \mathbf{V}_{l*u}^{lf} + \sum_{n=1}^{n_q^{hf}} \bar{q}_{e,n}^{hf} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{hf} \times \mathbf{V}_{l*u}^{lf} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad (3.53)$$

wobei $u = 1 \dots n_q^{lf}$ gilt. Die Matrix $\mathbf{V}_{l*u}^{lf}$ stellt die u -te Spalte der $3 \times n_q^{lf}$ -Matrix $\mathbf{V}_l^{lf}$ des l -ten FE-Knotens und damit die Ansatzfunktionen ausgewertet am l -ten FE-Knoten dar. Die Zählvariablen $s = 1 \dots n_q^{lf}$ und $n = 1 \dots n_q^{hf}$ beschreiben die Anzahl der nieder- bzw. hochfrequenten Ansatzfunktionen. Der skalare Wert $\bar{q}_{e,s}^{lf}$ beschreibt den s -ten Eintrag des Vektors $\bar{\mathbf{q}}_e^{lf}$ der reduzierten elastischen Koordinaten. Analog zu Gl. (3.53) folgt die v -te Spalte von $(\mathbf{C}_r^{hf})^T$ als

$$(\mathbf{C}_{r*v}^{hf})^T = \sum_{s=1}^{n_q^{lf}} \bar{q}_{e,s}^{lf} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{lf} \times \mathbf{V}_{l*v}^{hf} + \sum_{n=1}^{n_q^{hf}} \bar{q}_{e,n}^{hf} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{hf} \times \mathbf{V}_{l*v}^{hf} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad (3.54)$$

mit $v = 1 \dots n_q^{hf}$. Mit den Gleichungen (3.53) und (3.54) werden die Matrizen $\mathbf{C}_r^{lf} \in \mathbb{R}^{n_q^{lf} \times 3}$ und $\mathbf{C}_r^{hf} \in \mathbb{R}^{n_q^{hf} \times 3}$ spaltenweise zusammengesetzt, wobei jede Spalte von den elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e$ abhängt.

Nach der Aufteilung der Kopplungsmatrix der Rotation in nieder- und hochfrequente Anteile wird nun gezeigt, dass der Einfluss der Trägheitskopplung resultierend aus $\mathbf{C}_r^{hf}$ viel kleiner ist als der Einfluss aus $\mathbf{C}_r^{lf}$ und $\mathbf{C}_r^{hf}$ somit vernachlässigt werden kann. Um dies zu zeigen, wird zunächst angenommen, dass

3.6 Vernachlässigung der Trägheitskopplung

die Größenordnung der Beschleunigungen $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{\text{lf}}$ und $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{\text{hf}}$ in den entkoppelten Bewegungsgleichungen ungefähr gleich sind, siehe [SherifWitteveenMayrhofer12]. Stellen die hochfrequenten Ansatzfunktionen lediglich die lokale Verformung in der Kontaktzone dar, so ist dies eine konservative Annahme, da die hochfrequenten Trägheitseffekte in mechanischen System oft kleiner sind als die niederfrequenten. Nach [SherifWitteveenMayrhofer12] wird die Matrixnorm

$$||\mathbf{A}|| = \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b |A_{kl}| \quad (3.55)$$

eingeführt, wobei $\mathbf{A}$ eine Matrix mit der Größe $a \times b$ darstellt. Die Norm in Gl. (3.55) berechnet mit den skalaren Einträgen A_{kl} aus der k -ten Zeile und l -ten Spalte die maximale absolute Summe aller Einträge der Matrix $\mathbf{A}$.

Mit der in Gl. (3.55) eingeführten Norm kann gezeigt werden, dass die Gleichung

$$||(\mathbf{C}_r^{\text{lf}})^T|| \gg ||(\mathbf{C}_r^{\text{hf}})^T||, \quad (3.56)$$

bzw. nach dem Einsetzen von den Gleichungen (3.53) und (3.54) dass

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{s=1}^{n_q^{\text{lf}}} \bar{q}_{e,s}^{\text{lf}} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} + \sum_{n=1}^{n_q^{\text{hf}}} \bar{q}_{e,n}^{\text{hf}} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} \right\| \\ & \gg \left\| \sum_{s=1}^{n_q^{\text{lf}}} \bar{q}_{e,s}^{\text{lf}} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} + \sum_{n=1}^{n_q^{\text{hf}}} \bar{q}_{e,n}^{\text{hf}} \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} \right\| \end{aligned} \quad (3.57)$$

gilt. Werden die Gleichungen (3.56) bzw. (3.57) erfüllt kann die Trägheitskopplung durch die hochfrequenten Ansatzfunktionen vernachlässigt werden. Somit gilt für die hochfrequente Kopplungsmatrix die Annahme

$$\mathbf{C}_r^{\text{hf}}(\bar{\mathbf{q}}_e) \approx \mathbf{0}. \quad (3.58)$$

Mit der konservativen Annahme, dass die Größenordnungen von $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ und $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ ungefähr gleich sind, wird die Bedingung aus Gl. (3.57) erfüllt, wenn gilt

$$\left\| \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} \right\| \gg \left\| \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} \right\| \quad (3.59)$$

und

$$\left\| \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} \right\| \gg \left\| \sum_{l=1}^{n_{fe}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} \right\|, \quad (3.60)$$

für alle $s, u = 1 \dots n_q^{\text{lf}}$ und $n, v = 1 \dots n_q^{\text{hf}}$, siehe [SherifWitteveenMayrhofer12]. Hierbei wird jeweils das Kreuzprodukt zweier Moden am Knoten l berechnet. Aus den Gleichungen (3.59) und (3.60) wird abgeleitet, dass die Kreuzprodukte $\mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}}$ zweier globaler Ansatzfunktionen entlang der Massenpunkte m_l viel größer sind als die Kreuzprodukte $\mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}}$ mit statischen Ansatzfunktionen. Daher ist der Einfluss der Beschleunigung der niederfrequenten Ansatzfunktionen auf die Kopplung der Rotationbeschleunigung mit der Beschleunigung der elastischen Verformung viel größer als der Einfluss der hochfrequenten lokalen Ansatzfunktionen. Deren Einfluss auf die Kopplung ist vernachlässigbar gering, weshalb die hochfrequente Kopplungsmatrix vernachlässigt werden kann, siehe [SherifWitteveenMayrhofer12]. Die Annahme aus Gl. (3.58) basiert demnach auf der Eigenschaft der hochfrequenten Ansatzfunktionen, welche die lokalen Verformungen darstellen, siehe [SherifWitteveen14]. Bei spaltenweiser Berechnung der Matrix $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ nach Gl. (3.54) kann die Annahme $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}(\bar{\mathbf{q}}_e) \approx \mathbf{0}$ aus Gl. (3.58) eingehalten werden, wenn jeweils der letzte Term in den Gleichungen (3.59) und (3.60) verschwindet, weshalb die Annahmen

$$\sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} \approx \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} \approx \mathbf{0}, \quad (3.61)$$

gelten müssen. Wird das Kreuzprodukt ausformuliert, folgen aus Gl. (3.61) dann

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} &= \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (V_{l2,n}^{\text{hf}} V_{l3u}^{\text{lf}} - V_{l3,n}^{\text{hf}} V_{l2u}^{\text{lf}}) \\ \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (V_{l3,n}^{\text{hf}} V_{l1u}^{\text{lf}} - V_{l1,n}^{\text{hf}} V_{l3u}^{\text{lf}}) \\ \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (V_{l1,n}^{\text{hf}} V_{l2u}^{\text{lf}} - V_{l2,n}^{\text{hf}} V_{l1u}^{\text{lf}}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} &= \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (V_{l2,n}^{\text{hf}} V_{l3v}^{\text{hf}} - V_{l3,n}^{\text{hf}} V_{l2v}^{\text{hf}}) \\ \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (V_{l3,n}^{\text{hf}} V_{l1v}^{\text{hf}} - V_{l1,n}^{\text{hf}} V_{l3v}^{\text{hf}}) \\ \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (V_{l1,n}^{\text{hf}} V_{l2v}^{\text{hf}} - V_{l2,n}^{\text{hf}} V_{l1v}^{\text{hf}}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

für $s, u = 1 \dots n_q^{\text{lf}}$ und $n, v = 1 \dots n_q^{\text{hf}}$. Dabei stellt beispielsweise $V_{l2,n}^{\text{hf}}$ den skalaren Eintrag der zweiten Zeile und der n -ten Spalte der $3 \times n_q^{\text{hf}}$ Submatrix $\mathbf{V}_l^{\text{hf}}$ dar.

Wie in diesem Abschnitt in den Gleichungen (3.59) bzw. (3.60) und (3.61) aufgezeigt, ist das Kriterium zur Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitskopplung $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ im Gegensatz zu [Wielenga84] unabhängig von der Größe der

elastischen Koordinaten. Dieses Kriterium wird bezüglich der niederfrequenten Kopplung $\mathbf{C}_r^{\text{lf}}$ formuliert und hängt somit von der Art der verwendeten Ansatzfunktionen ab, siehe [SherifWitteveenMayrhofer12].

3.6.1 Trennfrequenz bei der statischen Kondensation

In [SherifWitteveenMayrhofer12] wird ein Algorithmus vorgestellt, um die Trennfrequenz Ω^{hf} zwischen nieder- und hochfrequenten Anteilen so zu berechnen, dass die Bedingungen (3.58), (3.59) und (3.60) erfüllt werden. Zunächst wird ein Startwert der Trennfrequenz Ω^{hf} gewählt, woraus sich die Anzahl elastischer Koordinaten n_q^{lf} und n_q^{hf} ergeben. Abhängig von dieser Trennfrequenz werden die Projektionsmatrizen $\mathbf{V}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{V}^{\text{hf}}$ initialisiert. Mit den niederfrequenten Anteilen $\mathbf{V}^{\text{lf}}$ und der Matrix-Norm aus Gl. (3.55) wird die Abbruchbedingung

$$\varepsilon_{\text{freq}} = \xi_{\text{freq}} \sum_{s=1}^{n_q^{\text{lf}}} \sum_{u=1}^{n_q^{\text{lf}}} \left\| \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^{\text{k}}} m_l \mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \times \mathbf{V}_{l*u}^{\text{lf}} \right\| \quad (3.63)$$

definiert, wobei nach [SherifWitteveenMayrhofer12] zunächst $\xi_{\text{freq}} = 0.01$ gilt. Mit der Bedingung (3.63) wird nun für alle $s = 1 \dots n_q^{\text{lf}}$ und $n, v = 1 \dots n_q^{\text{hf}}$

$$\left\| \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^{\text{k}}} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*s}^{\text{lf}} \right\| \leq \varepsilon_{\text{freq}} \quad \text{und} \quad \left\| \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^{\text{k}}} m_l \mathbf{V}_{l*n}^{\text{hf}} \times \mathbf{V}_{l*v}^{\text{hf}} \right\| \leq \varepsilon_{\text{freq}} \quad (3.64)$$

geprüft. Werden die Bedingungen (3.64) nicht erfüllt, so wird die Anzahl der niederfrequenten elastischen Koordinaten n_q^{lf} erhöht und anschließend die Projektionsmatrizen $\mathbf{V}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{V}^{\text{hf}}$ angepasst. Damit wird nach Gl. (3.63) eine neue Abbruchbedingung $\varepsilon_{\text{freq}}$ berechnet und anschließend Gl. (3.64) erneut geprüft. Über dieses Vorgehen wird n_q^{lf} so lange erhöht, bis die Bedingungen (3.64) erfüllt sind und die beiden Matrixnormen kleiner oder gleich $\varepsilon_{\text{freq}}$ sind. Über die Anzahl elastischer Koordinaten n_q^{lf} und den Frequenzgehalt des reduzierten Modells ergibt sich daraus die Trennfrequenz Ω^{hf} . Die Unterscheidung in nieder- und hochfrequente Anteile hängt damit von dem Parameter ξ_{freq} ab, der nach [SherifWitteveenMayrhofer12] nicht zu klein gewählt werden darf.

In dieser Arbeit wird $\xi_{\text{freq}} = 0.1$ gewählt, womit sich über den dargestellten Algorithmus beim Beispielsystem aus Abschnitt 3.3 die gleiche Trennfrequenz Ω^{hf} ergibt wie bei der Bestimmung nach Abschnitt 3.5.1. Der Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitskopplung in Gl. (3.58) liegt die Annahme zugrunde, dass die hochfrequenten Ansatzfunktionen lediglich die lokalen Verformungen darstellen. Nach Gl. (3.59) und Gl. (3.60) ist das Kreuzprodukt zweier globaler Ansatzfunktionen viel größer als das Kreuzprodukt mit statischen Ansatzfunktionen. Diese Annahme wird in Gl. (3.64) zur Berechnung der Trennfrequenz herangezogen. Somit werden über den beschriebenen Algorithmus in diesem Fall

ausgehend von einer Startfrequenz alle Eigenmoden oder globalen Ansatzfunktionen in $\mathbf{V}^{\text{lf}}$ zusammengefasst und damit die Bedingungen (3.64) erfüllt. Dies entspricht in diesem Fall dem Vorgehen nach Abschnitt 3.5.1 weshalb sich die Trennfrequenzen nicht unterscheiden.

Mit dieser Trennfrequenzen Ω^{hf} wird die Einhaltung der Bedingungen (3.56), (3.59) und (3.60) für das Beispielsystem Block-Stempel aus Abschnitt 3.3 geprüft. Bei der Berechnung wird vorausgesetzt, dass die Größenordnung von $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ und $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ ungefähr gleich sind. Tabelle 3.5 belegt die Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitskopplung beim Beispielsystem Block-Stempel mit Zahlenwerten.

3.6.2 Aufteilung der Ortsintegrale

Mit der Annahme aus Gl. (3.58) bzw. Gl. (3.61) werden im Weiteren die Ortsintegrale aus Tabelle 2.1 aufgeteilt in nieder- und hochfrequente Anteile. Basierend auf der Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitskopplung wird gezeigt, dass der Einfluss der lokalen Verformungen auf die Änderung der Trägheitseffekte vernachlässigbar ist. Dadurch ist eine Vereinfachung der Ortsintegrale und damit eine weitere Vereinfachung der Bewegungsgleichungen (3.45) möglich.

Nach Gl. (3.34) verschwinden die Ortsintegrale $\mathbf{C1}$ und $\mathbf{C2}$, da die entkoppelten Ansatzfunktionen den Randbedingungen des Buckens-Systems genügen. Als nächstes wird das Ortsintegral $\mathbf{C3}$ betrachtet. Mit den Ortsintegralen $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$ aus Gl. (2.180) kann die Matrix $\mathbf{C}_r$ alternativ zu Gl. (3.49) dargestellt werden über

$$\mathbf{C}_r^T = \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{23} - \mathbf{C3}_{32} \\ \mathbf{C3}_{31} - \mathbf{C3}_{13} \\ \mathbf{C3}_{12} - \mathbf{C3}_{21} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{q}}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{q}}_e \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Tabelle 3.5: Vernachlässigung der hochfrequenten Kopplungsmatrix beim Beispielsystem Block-Stempel

	$\ \mathbf{C}_r^{\text{lf}}\ $	$\ \mathbf{C}_r^{\text{hf}}\ $	Gl. (3.59)	Gl. (3.60)
Stempel	249.064	5.004	$249.043 \gg 0.113$	$249.043 \gg 0.684$
Block	21.997	2.894	$21.997 \gg 0.015$	$21.997 \gg 0.594$

Analog dazu erfolgt die alternative Darstellung der Matrizen $\mathbf{C}_r^{\text{lf}}$ und $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ in Gl. (3.53) und Gl. (3.54) mit den Ortsintegralen $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$ über

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_r^{\text{lf}})^T &= (\mathbf{Q}^{\text{lf}})^T \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{23}^{\text{lf}} - \mathbf{C3}_{32}^{\text{lf}} \\ \mathbf{C3}_{31}^{\text{lf}} - \mathbf{C3}_{13}^{\text{lf}} \\ \mathbf{C3}_{12}^{\text{lf}} - \mathbf{C3}_{21}^{\text{lf}} \end{bmatrix} + (\mathbf{Q}^{\text{hf}})^T \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{23}^{\text{hf,lf}} - \mathbf{C3}_{32}^{\text{hf,lf}} \\ \mathbf{C3}_{31}^{\text{hf,lf}} - \mathbf{C3}_{13}^{\text{hf,lf}} \\ \mathbf{C3}_{12}^{\text{hf,lf}} - \mathbf{C3}_{21}^{\text{hf,lf}} \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{C}_r^{\text{hf}})^T &= (\mathbf{Q}^{\text{lf}})^T \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{23}^{\text{lf,hf}} - \mathbf{C3}_{32}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{31}^{\text{lf,hf}} - \mathbf{C3}_{13}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{12}^{\text{lf,hf}} - \mathbf{C3}_{21}^{\text{lf,hf}} \end{bmatrix} + (\mathbf{Q}^{\text{hf}})^T \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{23}^{\text{hf}} - \mathbf{C3}_{32}^{\text{hf}} \\ \mathbf{C3}_{31}^{\text{hf}} - \mathbf{C3}_{13}^{\text{hf}} \\ \mathbf{C3}_{12}^{\text{hf}} - \mathbf{C3}_{21}^{\text{hf}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{Q}^{\text{lf}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}^{\text{hf}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

In der Darstellung nach Gl. (3.66) werden die partitionierten Ortsintegrale $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$ verwendet. Die Aufteilung in nieder- und hochfrequente Anteile erfolgt über die Aufteilung der Ansatzfunktionen $\Phi = [\Phi^{\text{lf}} \quad \Phi^{\text{hf}}]$, woraus sich die Ortsintegrale

$$\begin{aligned} \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf}} &= \int_{\Omega_0} (\Phi_{\alpha*}^{\text{lf}})^T \Phi_{\beta*}^{\text{lf}} dm, & \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} &= \int_{\Omega_0} (\Phi_{\alpha*}^{\text{hf}})^T \Phi_{\beta*}^{\text{hf}} dm, \\ \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf,hf}} &= \int_{\Omega_0} (\Phi_{\alpha*}^{\text{lf}})^T \Phi_{\beta*}^{\text{hf}} dm, & \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{hf,lf}} &= \int_{\Omega_0} (\Phi_{\alpha*}^{\text{hf}})^T \Phi_{\beta*}^{\text{lf}} dm, \end{aligned} \quad (3.68)$$

ergeben. Werden die Integrale aus Gl. (3.68) als Summe über alle n_{fe}^k Knoten dargestellt, so können mit den Projektionsmatrizen $\mathbf{V}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{V}^{\text{hf}}$ aus Gl. (3.44) die einzelnen Komponenten von $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$, berechnet über die FE-Matrizen, zur Beschreibung der Trägheitseffekte aufgeteilt werden in

$$\begin{aligned} \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf}} &= (\mathbf{C3}_{\beta\alpha}^{\text{lf}})^T = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (\mathbf{V}_{l\alpha*}^{\text{lf}})^T \mathbf{V}_{l\beta*}^{\text{lf}} = (\mathbf{V}_{*\alpha}^{\text{lf}})^T \mathbf{M}_{e\gamma\delta} \mathbf{V}_{*\beta}^{\text{lf}}, \\ \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} &= (\mathbf{C3}_{\beta\alpha}^{\text{hf}})^T = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (\mathbf{V}_{l\alpha*}^{\text{hf}})^T \mathbf{V}_{l\beta*}^{\text{hf}} = (\mathbf{V}_{*\alpha}^{\text{hf}})^T \mathbf{M}_{e\gamma\delta} \mathbf{V}_{*\beta}^{\text{hf}}, \\ \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf,hf}} &= (\mathbf{C3}_{\beta\alpha}^{\text{hf,lf}})^T = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (\mathbf{V}_{l\alpha*}^{\text{lf}})^T \mathbf{V}_{l\beta*}^{\text{hf}} = (\mathbf{V}_{*\alpha}^{\text{hf}})^T \mathbf{M}_{e\gamma\delta} \mathbf{V}_{*\beta}^{\text{lf}}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ und den $\gamma = \alpha(3)n_{\text{fe}}$ Zeilen und $\delta = \beta(3)n_{\text{fe}}$ Spalten der FE-Massenmatrix $\mathbf{M}_e$. Dabei beschreibt $\mathbf{V}_{l\alpha*}^{\text{lf}}$ die α -te Zeile der $3 \times n_q^{\text{lf}}$ Submatrix $\mathbf{V}_l^{\text{lf}}$. Nach [SherifWitteveenMayrhofer12] führt die Vernachlässigung der

hochfrequenten Kopplung $\mathbf{C}_r^{\text{hf}} \approx \mathbf{0}$ und die daraus resultierenden Annahmen aus Gl. (3.62) zur folgenden Vereinfachung der Ortsintegrale $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$ aus Gl. (3.69)

$$\begin{aligned}\mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf,hf}} &= (\mathbf{C3}_{\beta\alpha}^{\text{hf,lf}})^T = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (\mathbf{V}_{l\alpha*}^{\text{lf}})^T \mathbf{V}_{l\beta*}^{\text{hf}} \approx \mathbf{0}, \\ \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} &= \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l (\mathbf{V}_{l\alpha*}^{\text{hf}})^T \mathbf{V}_{l\beta*}^{\text{hf}} \approx \mathbf{0},\end{aligned}\quad (3.70)$$

für $\alpha \neq \beta$ und $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, weshalb die zweite Zeile in Gl. (3.66) entfällt. Das Ortsintegral $\mathbf{C3}$ aus Gl. (2.181), berechnet über die Komponenten $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$, lässt sich aufteilen in

$$\mathbf{C3} = \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{11}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf}} \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

woraus anschließend die reduzierten partitionierten Massenmatrizen folgen als

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_e^{\text{lf}} &= \mathbf{C3}_{11}^{\text{lf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf}}, \\ \bar{\mathbf{M}}_e^{\text{hf}} &= \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf}}.\end{aligned}\quad (3.72)$$

Das Ortsintegral $\mathbf{C4} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times n_q}$ wird ebenso aufgeteilt in $\mathbf{C4} = [\mathbf{C4}^{\text{lf}} \ \mathbf{C4}^{\text{hf}}]$ über

$$\begin{aligned}\mathbf{C4}_l^{\text{lf}} &= \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}} \tilde{\Phi}_{*l}^{\text{lf}} dm \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times n_q^{\text{lf}}}, \\ \mathbf{C4}_l^{\text{hf}} &= \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}} \tilde{\Phi}_{*l}^{\text{hf}} dm \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times n_q^{\text{hf}}},\end{aligned}\quad (3.73)$$

und die Berechnung aus den FE-Daten erfolgt über

$$[\mathbf{C4}_l^{\text{lf}}]_{*\alpha} = -\mathbf{S}_r^T \tilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} [\mathbf{S}_e^{\text{lf}}]_{*l} \quad \text{und} \quad [\mathbf{C4}_l^{\text{hf}}]_{*\alpha} = -\mathbf{S}_r^T \tilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} [\mathbf{S}_e^{\text{hf}}]_{*l}, \quad (3.74)$$

mit den Ansatzfunktionen $\mathbf{S}_e^{\text{lf}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fe}} \times n_q^{\text{lf}}}$ und $\mathbf{S}_e^{\text{hf}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{fe}} \times n_q^{\text{hf}}}$. Da die hochfrequenten Ansatzfunktionen lediglich die lokale Verformung darstellen, ist ihr Einfluss auf das Massenträgheitsmoment im Vergleich zu den globalen Ansatzfunktionen vernachlässigbar. Nach [SherifWitteveenMayrhofer12] wird mit dieser Annahme nun anhand der Berechnung des in $\bar{\mathbf{q}}_e$ linearen Terms des Trägheitstensors $\mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e)$ gezeigt, dass diese hochfrequenten Anteile im Ortsintegral $\mathbf{C4}$ vernachlässigt werden können. Der Trägheitstensor in Gl. (2.97) wird nach

[SchwertassekWallrapp99] berechnet über

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e) &= \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e) \\
 &= \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}} \tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}}^T dm + \int_{\Omega_0} \left(\tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}} (\widetilde{\Phi \bar{\mathbf{q}}_e})^T + (\widetilde{\Phi \bar{\mathbf{q}}_e}) \tilde{\mathbf{c}}_{\text{RP}}^T \right) dm \\
 &= \mathbf{S}_r^T \mathbf{M}_e \mathbf{S}_r - \sum_{l=1}^{n_q} (\mathbf{C4}_l + (\mathbf{C4}_l)^T) \bar{q}_{e,l},
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

wobei der in $\bar{\mathbf{q}}_e$ lineare Teil ebenfalls formuliert werden kann als

$$\mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e) = \begin{bmatrix} -2\mathbf{C4}_{11} & -\mathbf{C4}_{12} - \mathbf{C4}_{21} & -\mathbf{C4}_{13} - \mathbf{C4}_{31} \\ -\mathbf{C4}_{12} - \mathbf{C4}_{21} & -2\mathbf{C4}_{22} & -\mathbf{C4}_{23} - \mathbf{C4}_{32} \\ -\mathbf{C4}_{13} - \mathbf{C4}_{31} & -\mathbf{C4}_{23} - \mathbf{C4}_{32} & -2\mathbf{C4}_{33} \end{bmatrix} \mathbf{Q}. \tag{3.76}$$

Um die Vernachlässigung der hochfrequenten Anteile in $\mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e)$ und somit auch in $\mathbf{C4}$ zu zeigen wird in [SherifWitteveenMayrhofer12] die alternative Darstellung von Gl. (3.76) nach [WitteveenPichler19] verwendet, die folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e) &= \mathbf{W}_1 \mathbf{Q}, \\
 &= \begin{bmatrix} 2(\bar{\mathbf{I}}_{22} + \bar{\mathbf{I}}_{33}) & -(\bar{\mathbf{I}}_{21} + \bar{\mathbf{I}}_{12}) & -(\bar{\mathbf{I}}_{31} + \bar{\mathbf{I}}_{13}) \\ -(\bar{\mathbf{I}}_{21} + \bar{\mathbf{I}}_{12}) & 2(\bar{\mathbf{I}}_{11} + \bar{\mathbf{I}}_{33}) & -(\bar{\mathbf{I}}_{32} + \bar{\mathbf{I}}_{23}) \\ -(\bar{\mathbf{I}}_{31} + \bar{\mathbf{I}}_{13}) & -(\bar{\mathbf{I}}_{32} + \bar{\mathbf{I}}_{23}) & 2(\bar{\mathbf{I}}_{11} + \bar{\mathbf{I}}_{22}) \end{bmatrix} \mathbf{Q}.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Nach [Shabana05] können die einzelnen Komponenten der Matrix $\mathbf{W}_1$ über

$$\bar{\mathbf{I}}_{\alpha\beta} = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l [\mathbf{c}_{\text{RP},l}]_{\alpha*} \mathbf{V}_{l*\beta} \tag{3.78}$$

berechnet werden. Aus den Gleichungen Gl. (3.76) und Gl. (3.77) folgt der Zusammenhang zwischen $\mathbf{C4}_{\alpha\beta}$ und $\bar{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}$ für $\alpha \neq \beta$ und $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ als

$$\mathbf{C4}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{I}}_{\beta\alpha}, \tag{3.79}$$

sowie für $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ als

$$\mathbf{C4}_{\alpha\alpha} = -(\bar{\mathbf{I}}_{\beta\beta} + \bar{\mathbf{I}}_{\gamma\gamma}), \tag{3.80}$$

wobei α, β, γ zyklische Permutationen von 1, 2 und 3 sind. Dabei bezeichnen α und β die Zeile und Spalte der $3 \times 3 \times n_q$ -Matrix $\mathbf{C4}$.

Anhand der Darstellung des Trägheitstensors $\mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e)$ über Gl. (3.77) wird angelehnt an [SherifWitteveenMayrhofer12] nun gezeigt, dass die hochfrequenten

Anteile von **C4** vernachlässigt werden können. Nach [WitteveenPichler19] erfolgt die Aufteilung von Gl. (3.77) über

$$\mathbf{I}_1(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{W}_1^{\text{lf}} \mathbf{Q}^{\text{lf}} + \mathbf{W}_1^{\text{hf}} \mathbf{Q}^{\text{hf}}, \quad (3.81)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1^{\text{lf}} &= \begin{bmatrix} 2 \left(\bar{\mathbf{I}}_{22}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{33}^{\text{lf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{21}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{12}^{\text{lf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{31}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{13}^{\text{lf}} \right) \\ - \left(\bar{\mathbf{I}}_{21}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{12}^{\text{lf}} \right) & 2 \left(\bar{\mathbf{I}}_{11}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{33}^{\text{lf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{32}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{23}^{\text{lf}} \right) \\ - \left(\bar{\mathbf{I}}_{31}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{13}^{\text{lf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{32}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{23}^{\text{lf}} \right) & 2 \left(\bar{\mathbf{I}}_{11}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{22}^{\text{lf}} \right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_1^{\text{hf}} &= \begin{bmatrix} 2 \left(\bar{\mathbf{I}}_{22}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{33}^{\text{hf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{21}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{12}^{\text{hf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{31}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{13}^{\text{hf}} \right) \\ - \left(\bar{\mathbf{I}}_{21}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{12}^{\text{hf}} \right) & 2 \left(\bar{\mathbf{I}}_{11}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{33}^{\text{hf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{32}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{23}^{\text{hf}} \right) \\ - \left(\bar{\mathbf{I}}_{31}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{13}^{\text{hf}} \right) & - \left(\bar{\mathbf{I}}_{32}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{23}^{\text{hf}} \right) & 2 \left(\bar{\mathbf{I}}_{11}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{22}^{\text{hf}} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Die einzelnen Komponenten in den Matrizen $\mathbf{W}_1^{\text{lf}}$ und $\mathbf{W}_1^{\text{hf}}$ können nach Gl. (3.78) berechnet werden aus

$$\bar{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^{\text{lf}} = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l [\mathbf{c}_{\text{RP},l}]_{\alpha*} \mathbf{V}_{l*\beta}^{\text{lf}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} = \sum_{l=1}^{n_{\text{fe}}^k} m_l [\mathbf{c}_{\text{RP},l}]_{\alpha*} \mathbf{V}_{l*\beta}^{\text{hf}}. \quad (3.83)$$

Mit den Gleichungen (3.83) können die einzelnen Komponenten des Ortsintegrals **C4** dargestellt werden als

$$\mathbf{C4}_{\alpha\beta}^{\text{lf}} = \bar{\mathbf{I}}_{\beta\alpha}^{\text{lf}} \quad \text{und} \quad \mathbf{C4}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} = \bar{\mathbf{I}}_{\beta\alpha}^{\text{hf}}, \quad (3.84)$$

für $\alpha \neq \beta$ und $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, sowie

$$\mathbf{C4}_{\alpha\alpha}^{\text{lf}} = - \left(\bar{\mathbf{I}}_{\beta\beta}^{\text{lf}} + \bar{\mathbf{I}}_{\gamma\gamma}^{\text{lf}} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{C4}_{\alpha\alpha}^{\text{hf}} = - \left(\bar{\mathbf{I}}_{\beta\beta}^{\text{hf}} + \bar{\mathbf{I}}_{\gamma\gamma}^{\text{hf}} \right), \quad (3.85)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, wobei α, β, γ zyklische Permutationen von 1, 2 und 3 sind. Nach [SherifWitteveenMayrhofer12] können die Anteile $\bar{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^{\text{hf}}$ der Ortsintegrale in Gl. (3.83) vernachlässigt werden, da sie die lokale Verformung repräsentieren. Für den hochfrequenten Anteil des Ortsintegrals **C4** gilt somit

$$\mathbf{C4}_{\alpha\alpha}^{\text{hf}} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{C4}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} = \mathbf{0}, \quad (3.86)$$

und damit folgt aus Gl. (3.75) für den vereinfachten Trägheitstensor

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1^{\text{lf}}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{S}_r^T \mathbf{M}_e \mathbf{S}_r - \sum_{l=1}^{n_q} \left(\mathbf{C4}_l^{\text{lf}} + (\mathbf{C4}_l^{\text{lf}})^T \right) \bar{\mathbf{q}}_{e,l}^{\text{lf}}, \quad (3.87)$$

der nur noch von den niederfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ abhängt. Tabelle 3.6 zeigt auf, dass beim Beispielsystem aus Abschnitt 3.3 die Spektralnorm der hochfrequenten Anteile jeweils signifikant kleiner sind als die niederfrequenten Anteile. Ebenso sind die maximalen absoluten Einträge der hochfrequenten Matrizen viel kleiner. Da der Trägheitstensor $\mathbf{I}_1$ nach Gl. (3.75) oder Gl. (3.77) aus $\mathbf{C4}$ respektive $\mathbf{W}_1$ berechnet wird, ist damit die Vernachlässigung von $\mathbf{I}_1^{\text{hf}}$ für das Beispielsystem verifiziert.

Die Matrix $\mathbf{K}_{r\alpha}$ zur Berechnung der Koppelmatrix $\mathbf{C}_{r1}$ in Gl. (3.35) wird aufgeteilt in nieder- und hochfrequente Anteile über

$$\mathbf{K}_{r\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r\alpha}^{\text{lf}} & \mathbf{K}_{r\alpha}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{K}_{r\alpha}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{K}_{r\alpha}^{\text{hf}} \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Wird die Matrix $\mathbf{K}_{r\alpha}$ nach Gl. (3.37) durch das Ortsintegral $\mathbf{C3}$ ausgedrückt, so folgt

$$\mathbf{K}_{r\alpha} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{hf}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{hf}} \end{bmatrix}^T, \quad (3.89)$$

wobei α, β, γ zyklische Permutationen von 1, 2 und 3 sind. Mit der in Gl. (3.70) definierten Vereinfachung von $\mathbf{C3}$ und $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ folgt dann für $\mathbf{K}_{r\alpha}$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{r\alpha} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T, \\ &= -\mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf}} + (\mathbf{C3}_{\beta\gamma}^{\text{lf}})^T = \mathbf{K}_{r\alpha}^{\text{lf}}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die Matrix $\mathbf{K}_{r\alpha}$ kann demnach aus den FE-Matrizen berechnet werden über

$$\mathbf{K}_{r\alpha}^{\text{lf}} = (\mathbf{S}_e^{\text{lf}})^T \widetilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} \mathbf{S}_e^{\text{lf}}, \quad (3.91)$$

Tabelle 3.6: Maximaler Eintrag und Spektralnorm von $\mathbf{W}_1^{\text{lf}}$, $\mathbf{W}_1^{\text{hf}}$, $\mathbf{C4}^{\text{lf}}$ und $\mathbf{C4}^{\text{hf}}$ beim Beispielsystem Block-Stempel

	maximaler absoluter Eintrag			
	$\mathbf{W}_1^{\text{lf}}$	$\mathbf{W}_1^{\text{hf}}$	$\mathbf{C4}^{\text{lf}}$	$\mathbf{C4}^{\text{hf}}$
Stempel	0.536	2.93e^{-4}	0.029	1.79e^{-4}
Block	0.003	1.18e^{-4}	0.002	3.35e^{-4}
	Spektralnorm			
	$\mathbf{W}_1^{\text{lf}}$	$\mathbf{W}_1^{\text{hf}}$	$\mathbf{C4}^{\text{lf}}$	$\mathbf{C4}^{\text{hf}}$
Stempel	0.540	4.79e^{-4}	0.270	2.39e^{-4}
Block	0.005	6.87e^{-4}	0.003	3.44e^{-4}

indem nur die niederfrequenten Ansatzfunktionen $\mathbf{S}_e^{\text{lf}}$ berücksichtigt werden.

Nach den Gleichungen (3.36) und (3.37) lässt sich die Matrix $\mathbf{K}_{r\alpha}$ sowohl durch das Ortsintegral **C5** als auch durch **C3** ausdrücken, woraus der Zusammenhang

$$\begin{aligned} [\mathbf{C5}_l]_{1k} &= [\mathbf{C3}_{32}]_{kl} - [\mathbf{C3}_{23}]_{kl}, \\ [\mathbf{C5}_l]_{2k} &= [\mathbf{C3}_{13}]_{kl} - [\mathbf{C3}_{31}]_{kl}, \\ [\mathbf{C5}_l]_{3k} &= [\mathbf{C3}_{21}]_{kl} - [\mathbf{C3}_{12}]_{kl}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

mit $k, l = 1 \dots n_q$ resultiert, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Eine Umformulierung in Matrixschreibweise und anschließende Aufteilung in nieder- und hochfrequente Ansatzfunktionen analog zu Gl. (3.89) liefert mit der Vereinfachung aus Gl. (3.70) den verbleibenden Teil des Ortsintegrals **C5** nach Gl. (2.187)

$$[\mathbf{C5}_k]_{\alpha*} = [\mathbf{C5}_s^{\text{lf}}]_{\alpha*} = -[\mathbf{S}_e^{\text{lf}}]_{*s}^T \widetilde{\mathbf{M}}_{e\alpha} \mathbf{S}_e^{\text{lf}} = [\mathbf{C5}_k^{\text{lf}}]_{\alpha*}, \quad (3.93)$$

mit $s = 1 \dots n_q^{\text{lf}}$.

Das Ortsintegral **C6** und die Matrix $\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}$ können nach Gl. (2.191) ebenfalls in Abhängigkeit des Ortsintegrals **C3** ausgedrückt werden. Analog zu Gl. (3.89) folgt nach Gl. (2.191)

$$\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \quad \text{für } \alpha \neq \beta, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\beta\beta}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{\beta\beta}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{\beta\beta}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{\beta\beta}^{\text{hf}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{\gamma\gamma}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{\gamma\gamma}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{C3}_{\gamma\gamma}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{C3}_{\gamma\gamma}^{\text{hf}} \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma = \text{zyklische Permutationen von } 1, 2, 3$. Nach Gl. (3.70) vereinfacht sich Gl. (3.94) zu $\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta} = \mathbf{C3}_{\alpha\beta}^{\text{lf}}$, während in Gl. (3.95) jedoch keine Terme vernachlässigt werden können.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die hochfrequenten Anteile der Matrix $\mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha}$ in Gl. (3.95) vernachlässigt werden können, wenn sie zur Beschreibung der Trägheitseffekte verwendet werden. Dazu wird der in $\bar{\mathbf{q}}_e$ quadratische Term $\mathbf{I}_2$ des Trägheitstensors

$$\mathbf{I}_2(\bar{\mathbf{q}}_e) = \int_{\Omega_0} \left(\widetilde{\Phi \bar{\mathbf{q}}_e} \right) \left(\widetilde{\Phi \bar{\mathbf{q}}_e} \right)^T dm, \quad (3.96)$$

der in dieser Arbeit jedoch vernachlässigt wird, verwendet. Nach [SchwertassekWallrapp99] wird dieser über das Ortsintegral **C6** oder die Matrix $\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}$ dargestellt als

$$[\mathbf{I}_2]_{\alpha\beta} = - \sum_{k=1}^{n_q} \sum_{l=1}^{n_q} [\mathbf{C6}_{kl}]_{\alpha\beta} \bar{q}_{e,l} \bar{q}_{e,k} = - \sum_{k=1}^{n_q} \sum_{l=1}^{n_q} [\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}]_{kl} \bar{q}_{e,l} \bar{q}_{e,k}, \quad (3.97)$$

3.6 Vernachlässigung der Trägheitskopplung

mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Die alternative Darstellung von $\mathbf{I}_2(\bar{\mathbf{q}}_e)$ nach [SherifWitteveenMayrhofer12, WitteveenPichler19] mit der Aufteilung der Ansatzfunktionen in nieder- und hochfrequente Ansatzfunktionen liefert

$$\mathbf{I}_2(\bar{\mathbf{q}}_e) = (\mathbf{Q}^{\text{lf}})^T \mathbf{W}_2^{\text{lf}} \mathbf{Q}^{\text{lf}} + (\mathbf{Q}^{\text{lf}})^T \mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}} \mathbf{Q}^{\text{hf}} + (\mathbf{Q}^{\text{hf}})^T \mathbf{W}_2^{\text{hf}} \mathbf{Q}^{\text{hf}}, \quad (3.98)$$

wobei die Matrizen $\mathbf{W}_2^{\text{lf}}$, $\mathbf{W}_2^{\text{hf}}$ und $\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}}$ mit den Ortsintegralen $\mathbf{C3}$ aus Gl. (3.69) ausgedrückt werden können als

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2^{\text{lf}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf}} & -\mathbf{C3}_{21}^{\text{lf}} & -\mathbf{C3}_{31}^{\text{lf}} \\ -\mathbf{C3}_{12}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{lf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf}} & -\mathbf{C3}_{32}^{\text{lf}} \\ -\mathbf{C3}_{13}^{\text{lf}} & -\mathbf{C3}_{23}^{\text{lf}} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{lf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_2^{\text{hf}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf}} & -\mathbf{C3}_{21}^{\text{hf}} & -\mathbf{C3}_{31}^{\text{hf}} \\ -\mathbf{C3}_{12}^{\text{hf}} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf}} & -\mathbf{C3}_{32}^{\text{hf}} \\ -\mathbf{C3}_{13}^{\text{hf}} & -\mathbf{C3}_{23}^{\text{hf}} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

und

$$\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}} = \begin{bmatrix} 2(\mathbf{C3}_{33}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf,hf}}) & -(\mathbf{C3}_{21}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{12}^{\text{lf,hf}}) & -(\mathbf{C3}_{31}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{13}^{\text{lf,hf}}) \\ -(\mathbf{C3}_{21}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{12}^{\text{lf,hf}}) & 2(\mathbf{C3}_{11}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf,hf}}) & -(\mathbf{C3}_{32}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{23}^{\text{lf,hf}}) \\ -(\mathbf{C3}_{31}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{13}^{\text{lf,hf}}) & -(\mathbf{C3}_{32}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{23}^{\text{lf,hf}}) & 2(\mathbf{C3}_{11}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf,hf}}) \end{bmatrix}. \quad (3.100)$$

Mit der in Gl. (3.70) definierten Vereinfachung der $\mathbf{C3}$ -Matrizen folgt für die Matrizen $\mathbf{W}_2^{\text{hf}}$ und $\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}}$ aus den Gleichungen (3.99) und (3.100)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2^{\text{hf}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{hf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C3}_{11}^{\text{hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{hf}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}} &= \begin{bmatrix} 2(\mathbf{C3}_{33}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf,hf}}) & \mathbf{0} & -\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2(\mathbf{C3}_{11}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{33}^{\text{lf,hf}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2(\mathbf{C3}_{11}^{\text{lf,hf}} + \mathbf{C3}_{22}^{\text{lf,hf}}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Die Terme, welche zu den hochfrequenten Ansatzfunktionen gehören, verschwinden aufgrund Gl. (3.70) in Gl. (3.98) nicht. In [SherifWitteveenMayrhofer12] wird jedoch vorgeschlagen, den Einfluss der Matrizen $\mathbf{W}_2^{\text{hf}}$ und $\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}}$ auf die Trägheitseigenschaften zu vernachlässigen. Begründet wird diese Annahme damit, dass der Einfluss der hochfrequenten Ansatzfunktionen auf die Änderung des Massenträgheitsmoments im Vergleich zu den niederfrequenten vernachlässigbar

gering ist. Tabelle 3.7 zeigt die maximalen absoluten Einträge und die Spektralnorm der Matrizen $\mathbf{W}_2^{\text{lf}}$, $\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}}$ und $\mathbf{W}_2^{\text{hf}}$ beim Beispielsystem Block-Stempel aus Abschnitt 3.3. Außerdem sind die entsprechenden Ergebnisse der Trägheitstensoren $\mathbf{I}_2^{\text{lf}}$, $\mathbf{I}_2^{\text{lf,hf}}$ und $\mathbf{I}_2^{\text{hf}}$ dargestellt. Während über $\mathbf{W}_2$ keine Aussagen zur Vernachlässigung der hochfrequenten Anteile gemacht werden kann, ist bei den Trägheitstensoren $\mathbf{I}_2$ deutlich erkennbar, dass die hochfrequenten Anteile einen viel geringeren Einfluss auf die Trägheitseigenschaften haben als die niederfrequenten und daher vernachlässigt werden können. Durch diese Vernachlässigung wird Gl. (3.98) vereinfacht zu

$$\mathbf{I}_2(\bar{\mathbf{q}}_e) = (\mathbf{Q}^{\text{lf}})^T \mathbf{W}_2^{\text{lf}} \mathbf{Q}^{\text{lf}}. \quad (3.102)$$

Wird in den Gleichungen (3.99) und (3.101) statt dem Ortsintegral $\mathbf{C3}$ die Matrix $\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}$ verwendet, so folgt die äquivalente Darstellung von Gl. (3.98) analog zu Gl. (3.97) als

$$[\mathbf{I}_2]_{\alpha\beta} = -(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}})^T \mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^{\text{lf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} - 2(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}})^T \mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^{\text{lf,hf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} - (\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})^T \mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^{\text{hf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}, \quad (3.103)$$

und nach der Vernachlässigung der hochfrequenten Terme

$$[\mathbf{I}_2]_{\alpha\beta} = -(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}})^T \mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^{\text{lf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}, \quad (3.104)$$

mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Damit ist gezeigt, dass die hochfrequenten Anteile der Matrizen $\mathbf{C6}$, $\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}$ und $\mathbf{C3}_{\alpha\beta}$ bei der Beschreibung der Trägheitseigenschaften vernachlässigt werden können. Diese Vernachlässigung ist legitim, da analog zur Betrachtung der Kopplungsmatrix der Einfluss der hochfrequenten Ansatzfunktionen auf das Massenträgheitsmoment vernachlässigbar ist. Dieses wird in diesem Fall von den niederfrequenten Ansatzfunktionen, welche die globale Deformation darstellen, dominiert.

Tabelle 3.7: Maximaler Eintrag und Spektralnorm von $\mathbf{W}_2$ und $\mathbf{I}_2$ beim Beispielsystem Block-Stempel

	maximaler absoluter Eintrag			Spektralnorm		
	$\mathbf{W}_2^{\text{lf}}$	$\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}}$	$\mathbf{W}_2^{\text{hf}}$	$\mathbf{W}_2^{\text{lf}}$	$\mathbf{W}_2^{\text{lf,hf}}$	$\mathbf{W}_2^{\text{hf}}$
Stempel	1.000	0.035	0.994	2.009	0.230	0.999
Block	0.999	0.288	0.996	1.998	0.348	0.999
	maximaler absoluter Eintrag			Spektralnorm		
	$\mathbf{I}_2^{\text{lf}}$	$\mathbf{I}_2^{\text{lf,hf}}$	$\mathbf{I}_2^{\text{hf}}$	$\mathbf{I}_2^{\text{lf}}$	$\mathbf{I}_2^{\text{lf,hf}}$	$\mathbf{I}_2^{\text{hf}}$
Stempel	158.652	1.89e^{-4}	0.029	164.343	0.014	0.029
Block	13.862	0.004	0.025	14.021	0.005	0.025

3.6.3 Vereinfachung der Bewegungsgleichungen

Anschließend werden die Daten zur Beschreibung der Körper in Abhängigkeit der im vorigen Abschnitt getroffenen Annahmen zur Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitskopplung und der damit verbundenen Auswirkungen auf die Ortsintegrale erläutert.

Die Berechnung des von $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ abhängigen Teils des Trägheitstensors $\mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}})$ erfolgt nach Gl. (3.87) unter Vernachlässigung des hochfrequenten Anteils $\mathbf{C4}^{\text{hf}}$. Die Kopplung der translatorischen Starrkörperbewegung mit der elastischen Verformung über die Matrix $\mathbf{C}_t = \mathbf{C1}^T$ verschwindet beim Buckens-System nach Gl. (3.34), während die Kopplung der Rotationen mit der elastischen Deformation über $\mathbf{C}_r$ aus Gl. (3.35) beschrieben wird. Mit der Annahme, dass die Kopplungsmatrix $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ verschwindet und $\mathbf{K}_{r\alpha}$ nach Gl. (3.90) ermittelt werden kann, folgt für den niederfrequenten Teil der Kopplungsmatrix

$$\mathbf{C}_r^{\text{lf}}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}) = \sum_{l=1}^{n_q} (\mathbf{C5}_l^{\text{lf}})^T \bar{\mathbf{q}}_{e,l}^{\text{lf}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{r1}^{\text{lf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} & \mathbf{K}_{r2}^{\text{lf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} & \mathbf{K}_{r3}^{\text{lf}} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

Bei der Berechnung der generalisierten Trägheitskräfte $\mathbf{h}_\omega$ nach Gl. (2.100) werden die Ortsintegrale aus Abschnitt 3.6.2 benötigt. Im Vektor $\mathbf{h}_{\omega t}$ in Gl. (2.102) vereinfachen sich die Anteile aus der Translation beim Buckens-System mit den Beziehungen (3.34) und (3.39) zu

$$\mathbf{h}_{\omega t}^{\text{lf}} = m \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{v}_{\text{IR}}, \quad (3.106)$$

wobei keine Unterscheidung in nieder- und hochfrequente Koordinaten notwendig ist. In den rotatorischen Anteilen von $\mathbf{h}_{\omega r}$ nach Gl. (2.103) wird zuerst die Matrix $\mathbf{G}_{r,l}$ in Gl. (2.104) betrachtet, die berechnet wird über

$$\mathbf{G}_{r,l}(\bar{\mathbf{q}}_e) = -2\mathbf{C4}_l - 2 \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{C6}_{j,l} \bar{\mathbf{q}}_{e,j}. \quad (3.107)$$

Erfolgt eine Linearisierung in den Verformungskoodinaten, so entfällt der zweite Term zur Berechnung von $\mathbf{G}_{r,l}$, siehe [SchwertassekWallrapp99]. Werden nach Gl. (3.86) die hochfrequenten Anteile in $\mathbf{C4}$ vernachlässigt, so folgt

$$\mathbf{G}_{r,l}^{\text{lf}}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}) = -2\mathbf{C4}_l^{\text{lf}}, \quad (3.108)$$

die anschließend mit der Vereinfachung in Gl. (3.39) zusammen mit dem Trägheitstensor aus Gl. (3.87) umformuliert werden als

$$\mathbf{h}_{\omega r}^{\text{lf}} = \tilde{\omega}_{\text{IR}} \mathbf{I}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}) \omega_{\text{IR}} + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{G}_{r,l}^{\text{lf}}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{e,l}^{\text{lf}} \omega_{\text{IR}}, \quad (3.109)$$

womit im Vektor $\mathbf{h}_{\omega_T}$ ebenfalls keine hochfrequenten Anteile mehr auftreten.

Zur Berechnung der generalisierten Trägheitskräfte $\mathbf{h}_{\omega_e}$ aus den elastischen Verformungen in Gl. (2.105) wird die Matrix $\mathbf{G}_e$ aus Gl. (2.106) benötigt. Diese kann mit dem Ortsintegral **C5** dargestellt werden und nach Gl. (3.93) folgt unter Vernachlässigung des hochfrequenten Anteils

$$\mathbf{G}_{e,l}^{\text{lf}} = 2 \left(\mathbf{C5}^{\text{lf}} \right)^T. \quad (3.110)$$

Schließlich wird noch die Matrix der generalisierten Zentrifugalkräfte $\mathbf{O}_e$ aus Gl. (2.107) benötigt. Diese wird nach [SchwertassekWallrapp99] über die Ortsintegrale **C4** und **C6** berechnet als

$$\mathbf{O}_{e,k}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{O}_{e0} + \mathbf{O}_{e1}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbf{C4}_k^T + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{C6}_{k,l} \bar{\mathbf{q}}_{e,l}. \quad (3.111)$$

Für die $6 \times n_q$ -Matrix $\mathbf{O}_{e0}$ gilt nach [SchwertassekWallrapp99]

$$\mathbf{O}_{e0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C4}_{k11} & \mathbf{C4}_{k22} & \mathbf{C4}_{k33} & \mathbf{C4}_{k12} + \mathbf{C4}_{k21} & \mathbf{C4}_{k23} + \mathbf{C4}_{k32} & \mathbf{C4}_{k31} + \mathbf{C4}_{k13} \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

mit $k = 1 \dots n_q$. Der in $\bar{\mathbf{q}}_e$ lineare Teil $\mathbf{O}_{e1}$ kann über die $n_q \times 6$ -Matrix

$$\mathbf{O}_{e1}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{e1*1} & \mathbf{O}_{e1*2} & \mathbf{O}_{e1*3} & \mathbf{O}_{e1*4} & \mathbf{O}_{e1*5} & \mathbf{O}_{e1*6} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

dargestellt werden, wobei für die Spalten $m = 1, 2, 3$ gilt

$$\mathbf{O}_{e1*m} = \mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha} \bar{\mathbf{q}}_e, \quad \text{mit } \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.114)$$

während für die Spalten $m = 4, 5, 6$

$$\mathbf{O}_{e1*m} = \left(\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta} + \mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^T \right) \bar{\mathbf{q}}_e \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha = 1, \beta = 2 & \text{für } m = 4, \\ \alpha = 2, \beta = 3 & \text{für } m = 5, \\ \alpha = 3, \beta = 1 & \text{für } m = 6, \end{cases} \quad (3.115)$$

gilt, siehe [SchwertassekWallrapp99].

Wird die Matrix $\mathbf{O}_{e0}$ in nieder- und hochfrequente Anteile aufgeteilt und werden, wie in Gl. (3.86) vorgeschlagen, die hochfrequenten Anteile in **C4** vernachlässigt, so kann die Matrix $\mathbf{O}_{e0}$ in Gl. (3.112) analog zu Gl. (3.108) vereinfacht werden. Wird die Matrix $\mathbf{O}_{e1}$ aufgeteilt, so können nach Gl. (3.94) die hochfrequenten Anteile in Gl. (3.115) vernachlässigt werden und es folgt für $m = 4, 5, 6$

$$\mathbf{O}_{e1*m}^{\text{lf}} = \left(\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^{\text{lf}} + \left(\mathbf{K}_{\omega\alpha\beta}^{\text{lf}} \right)^T \right) \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \alpha = 1, \beta = 2 & \text{für } m = 4, \\ \alpha = 2, \beta = 3 & \text{für } m = 5, \\ \alpha = 3, \beta = 1 & \text{für } m = 6. \end{cases} \quad (3.116)$$

Nach Gl. (3.114) wird die Matrix $\mathbf{O}_{e1*m}$ mit $m = 1, 2, 3$ dargestellt über

$$\mathbf{O}_{e1*m} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha}^{\text{lf}} & \mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha}^{\text{lf,hf}} \\ \mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha}^{\text{hf,lf}} & \mathbf{K}_{\omega\alpha\alpha}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \\ \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.117)$$

welche nach Gl. (3.95) nicht weiter vereinfacht werden kann. Nach [SherifWitteveenMayrhofer12] können die hochfrequenten Anteile in Gl. (3.117) analog zu Gl. (3.101) vernachlässigt werden. Dies wird damit begründet, dass die hochfrequenten Ansatzfunktionen die lokale Verformung abbilden und somit deren Einfluss auf die Trägheitskräfte vernachlässigbar ist. Mit dieser Vereinfachung von Gl. (3.117) und der Vernachlässigung der hochfrequenten Teile in **C4** folgt

$$\mathbf{O}_{e,k}^{\text{lf}} = (\mathbf{C4}_k^{\text{lf}})^T + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{C6}_{kl}^{\text{lf}} \bar{\mathbf{q}}_{e,l}^{\text{lf}} \quad \text{und} \quad \mathbf{O}_{e,k}^{\text{hf}} = \mathbf{0}. \quad (3.118)$$

Mit den Gleichungen (2.105) und (3.34) folgt der niederfrequente Teil von $\mathbf{h}_{\omega_e}$ als

$$\mathbf{h}_{\omega_e}^{\text{lf}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^T \mathbf{O}_{e,1}^{\text{lf}} (\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}) \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^T \mathbf{O}_{e,n_q}^{\text{lf}} (\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}) \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{G}_{e,l}^{\text{lf}} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{e,l}^{\text{lf}} \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}, \quad (3.119)$$

und der hochfrequente Teil wird vernachlässigt, da $\mathbf{h}_{\omega_e}^{\text{hf}} = \mathbf{0}$ gilt. Wie bei der Berechnung des Massenträgheitsmoments gilt auch hier, dass der Einfluss der hochfrequenten Ansatzfunktionen auf die Änderung der Trägheitskräfte im Vergleich zu den niederfrequenten Ansatzfunktionen vernachlässigbar gering ist.

Die Vernachlässigung der Trägheitseffekte der hochfrequenten Ansatzfunktionen in den Gleichungen (3.104) und (3.117) gilt nur für die Berechnung des Trägheitstensors $\mathbf{I}_2(\bar{\mathbf{q}}_e)$ und der generalisierten Trägheitskräfte $\mathbf{h}_{\omega}$, da deren Einfluss auf die Trägheitseffekte vernachlässigbar ist. Dies kann damit begründet werden, dass die hochfrequenten Ansatzfunktionen die lokale Verformung darstellen. Ihr Einfluss auf das Massenträgheitsmoment ist im Vergleich zu den globalen Ansatzfunktionen daher vernachlässigbar.

Die Steifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{K}}_e$ und die Dämpfungsmatrix $\bar{\mathbf{D}}_e$ des reduzierten Systems lassen sich schließlich mit Gl. (3.44) berechnen über

$$\bar{\mathbf{K}}_e^{\text{lf}} = (\mathbf{V}^{\text{lf}})^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}^{\text{lf}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{lf}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{K}}_e^{\text{hf}} = (\mathbf{V}^{\text{hf}})^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}^{\text{hf}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{hf}}, \quad (3.120)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_e^{\text{lf}} = (\mathbf{V}^{\text{lf}})^T \mathbf{D}_e \mathbf{V}^{\text{lf}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{D}}_e^{\text{hf}} = (\mathbf{V}^{\text{hf}})^T \mathbf{D}_e \mathbf{V}^{\text{hf}}. \quad (3.121)$$

Statische Kondensation der hochfrequenten Ansatzfunktionen

Nach [HeirmanTamarozziDesmet11] können die hochfrequenten Kopplungsterme zwischen der Bewegung des Referenzsystems und der elastischen Verformung im Vergleich zur Anregung über die äußeren Kräfte vernachlässigt werden. Die Annahmen aus den vorigen Abschnitten zeigen ebenfalls, dass die hochfrequenten Kopplungseffekte $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ sowie der Einfluss der hochfrequenten Trägheitskräfte $\mathbf{h}_\omega^{\text{hf}}$ vernachlässigt werden können, weshalb die Bewegungsgleichungen (3.45) weiter vereinfacht werden können zu

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & (\mathbf{C}_r^{\text{lf}})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_r^{\text{lf}} & \mathbf{E}^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{\text{IR}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\text{lf}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\text{hf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{IR}} \\ \boldsymbol{\beta}_{\text{IR}} \\ \mathbf{q}_e^{\text{lf}} \\ \mathbf{q}_e^{\text{hf}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\text{dt}} \\ \mathbf{h}_{\text{dr}} \\ \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{lf}} \\ \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{hf}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega\text{t}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{r}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{e}}^{\text{lf}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.122)$$

Werden Volumenkräfte oder Oberflächenspannungen berücksichtigt, so wird die rechte Seite von Gl. (3.122) erweitert um die partitionierten Kraftvektoren $\mathbf{h}_b$ und $\mathbf{h}_p$. Gilt, wie hier dargestellt, $\mathbf{h}_b = \mathbf{0}$ und $\mathbf{h}_p = \mathbf{0}$, so können in diesen Gleichungen die hochfrequenten Ansatzfunktionen in der letzten Zeile im Gegensatz zu Gl. (3.45) nur durch die externen Kräfte $\mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{hf}}$ angeregt werden. Die letzte Zeile aus Gl. (3.122) stellt n_q^{hf} entkoppelte Schwinger mit einem Freiheitsgrad dar, deren Eigenfrequenz höher als die Aufteilungsfrequenz Ω^{hf} ist. Wird der Frequenzbereich von Interesse betrachtet, welcher unterhalb der Frequenz Ω^{hf} liegt, so werden die Schwinger in der letzten Zeile von Gl. (3.122) nicht angeregt. Diese reagieren somit quasi-statisch, weshalb die reduzierte Massenmatrix $\mathbf{E}^{\text{hf}}$ ebenfalls vernachlässigt werden kann, siehe [SherifEtAl11].

Der quasi-statische Einfluss des lokalen Deformationsfeldes, beschrieben durch die hochfrequenten Moden, darf bei Kontaktberechnungen nicht vernachlässigt werden. Dieses lokale Deformationsfeld hat einen großen Einfluss auf den zustandsabhängigen Kraftvektor $\mathbf{h}_d$ und damit auf die Genauigkeit der Ergebnisse, wie in Abschnitt 3.3 dargestellt ist. Der Vektor $\mathbf{h}_d$ enthält in dieser Arbeit lediglich die Kontaktkräfte. Die letzte Zeile in Gl. (3.122) liefert dieses quasi-statische Deformationsfeld zu

$$\mathbf{q}_e^{\text{hf}} = (\hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\text{hf}})^{-1} \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{hf}}, \quad (3.123)$$

wobei die lokale Deformation $\mathbf{q}_e^{\text{hf}}$ von den Kontaktkräften abhängt und umgekehrt. Aufgrund der Diagonalstruktur existiert immer die Inverse von $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\text{hf}}$. Für die Zeitintegration wird der dynamische Teil anschließend beschrieben über die

Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & (\mathbf{C}_r^{\text{lf}})^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_r^{\text{lf}} & \mathbf{E}^{\text{lf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{\text{IR}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_e^{\text{lf}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\text{lf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{IR}} \\ \boldsymbol{\beta}_{\text{IR}} \\ \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\text{dt}} \\ \mathbf{h}_{\text{dr}} \\ \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{lf}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega t} \\ \mathbf{h}_{\omega r} \\ \mathbf{h}_{\omega e}^{\text{lf}} \end{bmatrix}, \quad (3.124)$$

während der quasi-statische Teil nach der statischen Kondensation über

$$\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} - (\hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{\text{hf}})^{-1} \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{hf}} = \mathbf{0} \quad (3.125)$$

berücksichtigt wird. Bei Kontaktuntersuchungen erfolgt die Kopplung der beiden Gleichungen (3.124) und (3.125) über den zustandsabhängigen Kraftvektor $\mathbf{h}_d(\mathbf{r}_{\text{IR}}, \boldsymbol{\beta}_{\text{IR}}, \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}, \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$, welcher die Kontaktkräfte $\mathbf{f}_c$ enthält. In der Zeitintegration werden durch die statische Kondensation lediglich die niederfrequenten Anteile verwendet, weshalb die Dimensionen des dynamischen Systems reduziert werden. Es muss jedoch ein zusätzliches nichtlineares Gleichungssystem (3.125) in jedem Integrationsschritt gelöst werden, dessen effiziente Lösung im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

3.7 Quasi-statisches Kontaktsubmodell

In diesem Abschnitt wird das quasi-statische Kontaktsubmodell, zuerst vorgestellt in [TschiggSeifried17], erklärt. Es basiert auf der Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitseffekte nach Abschnitt 3.6 und der anschließenden statischen Kondensation der hochfrequenten Ansatzfunktionen nach den Gleichungen (3.124) und (3.125). Während der Zeitintegration von Gl. (3.124) in Verbindung mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell ist in jedem Zeitschritt die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3.125) erforderlich, um die Kontaktkräfte abhängig von der lokalen Verformung zu berechnen. Die Kontaktkräfte $\mathbf{f}_c$ werden nach Gl. (3.28) folgendermaßen in den generalisierten diskreten Kräften

$$\mathbf{h}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\text{dt}} \\ \mathbf{h}_{\text{dr}} \\ \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{lf}} \\ \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{hf}} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_k} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP},k}^T \\ (\mathbf{V}_{\text{P},k}^{\text{lf}})^T \\ (\mathbf{V}_{\text{P},k}^{\text{hf}})^T \end{bmatrix} \mathbf{f}_{c,k} \quad (3.126)$$

zusammengefasst. Sowohl die Eindringtiefe g_n als auch der Normalenvektor $\mathbf{n}$ hängen von der Bewegung $\mathbf{r}_{\text{IR}}$ und $\boldsymbol{\beta}_{\text{IR}}$ des Referenzsystems und den niederfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ ab, die aus der Zeitintegration bekannt sind. Ebenso hängen sie von den unbekannten hochfrequenten Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ ab. Die Berechnung der Kontaktkräfte $\mathbf{f}_c$ bzw. des zustandsabhängigen Kraftvektors $\mathbf{h}_d(\mathbf{r}_{\text{IR}}, \boldsymbol{\beta}_{\text{IR}}, \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}, \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ nach Gl. (3.126) sowie der unbekannten elastischen

Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ führt daher nach Gl. (3.125) zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} - (\hat{\mathbf{\Lambda}}^{\text{hf}})^{-1} \mathbf{h}_{\text{de}}^{\text{hf}}(\mathbf{r}_{\text{IR}}, \beta_{\text{IR}}, \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}, \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = \mathbf{0}, \quad (3.127)$$

welches während der Zeitintegration in jedem Zeitschritt zusätzlich gelöst werden muss.

Nichtlineare Gleichungssysteme werden oftmals mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Wird dazu eine Gleichung mit einer Variablen betrachtet, so wird bei diesem Verfahren die Tangente an einem Startwert der Funktion angelegt. Die Nullstelle dieser Tangente wird als verbesserte Näherung der Nullstelle der Funktion verwendet. Im Funktionswert der verbesserten Näherung wird anschließend erneut die Tangente angelegt. Diese Iteration wird so lange fortgesetzt, bis sich die Näherungslösung der gesuchten Nullstelle hinreichend angenähert hat, siehe [Hermann11]. Mit dieser Tangente erfolgt eine lokale Linearisierung der nichtlinearen Funktion. Diese geometrische Interpretation kann auf Gleichungssysteme übertragen werden. Betrachtet wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = [\mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}), \dots, \mathbf{f}_{n_q^{\text{hf}}}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})]^T, \quad (3.128)$$

wobei $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ stetig differenzierbare Funktionen $\mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ enthält. Zunächst wird die Taylor-Reihenentwicklung der Funktionen

$$\mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} + \Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) + \sum_{j=1}^{n_q^{\text{hf}}} \frac{\partial \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,j}^{\text{hf}}} \Delta \bar{\mathbf{q}}_{e,j}^{\text{hf}} + \mathcal{O}(\|\Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}\|^2), \quad (3.129)$$

mit $i = 1 \dots n_q^{\text{hf}}$ durchgeführt. Dabei stellt $\mathcal{O}(\|\Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}\|^2)$ den Approximationsfehler oder Verfahrensfehler dar, siehe [DahmenReusken08]. Indem die partiellen Ableitungen $\mathbf{f}'_i(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ zusammengefasst werden, kann die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = \mathbf{f}'(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,j}^{\text{hf}}} \right)_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,1}^{\text{hf}}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,n_q^{\text{hf}}}^{\text{hf}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{n_q^{\text{hf}}}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,1}^{\text{hf}}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_{n_q^{\text{hf}}}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,n_q^{\text{hf}}}^{\text{hf}}} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

mit $i, j = 1 \dots n_q^{\text{hf}}$ formuliert werden. Damit kann anschließend Gl. (3.129) mit $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}, \Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \in \mathbb{R}^{n_q^{\text{hf}}}$ ausgedrückt werden zu

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} + \Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) + \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) \Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} + \mathcal{O}(\|\Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}\|^2), \quad (3.131)$$

siehe [DahmenReusken08]. Anstatt die Nullstelle der nichtlinearen Funktion zu suchen, wird die Nullstelle des Taylor-Polynom ersten Grades, also die Nullstelle der linearen Näherung von $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ im Punkt $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$, über

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) + \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}) \Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} \quad (3.132)$$

ermittelt. Mit $\Delta \bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} = \bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ folgt daraus das Newton-Raphson-Verfahren im Mehrdimensionalen als

$$\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} = \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} - \underbrace{\left(\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) \right)^{-1} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})}_{\Delta \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}}, \quad (3.133)$$

zur iterativen Bestimmung der Nullstellen von $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$, siehe [DahmenReusken08]. Dabei beschreibt k den aktuellen Iterationsschritt. In Gl. (3.133) muss zu jedem Iterationsschritt die $n_q^{\text{hf}} \times n_q^{\text{hf}}$ -Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ neu berechnet und anschließend invertiert werden, was numerisch aufwändig ist. Daher wird zur Reduktion des Rechenaufwandes stattdessen die Korrektur $\Delta \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ zur Verbesserung der Näherungslösung in Gl. (3.133) aus der Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) \Delta \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} = -\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) \quad (3.134)$$

ermittelt. Damit kann, ausgehend von einem Startvektor $\bar{\mathbf{q}}_{e,0}^{\text{hf}}$, das nichtlineare Gleichungssystem gelöst werden und die unbekannten hochfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ abhängig von den Zuständen aus der Zeitintegration sowie den Kontaktkräften ermittelt werden. Nach [Hermann11] kann gezeigt werden, dass im Mehrdimensionalen eine quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens vorliegt.

Im mehrdimensionalen Fall setzt sich der numerische Aufwand pro Iterationsschritt zusammen aus n_q^{hf} Berechnungen der Funktionswerte $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$, der Bestimmung der $(n_q^{\text{hf}})^2$ partiellen Ableitungen in Gl. (3.130), sowie dem Rechenaufwand zur numerischen Lösung des linearen Gleichungssystems (3.134). Diese erfolgt mittels LR-Zerlegung mit anschließendem Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wozu $2n_q^{\text{hf}}/3$ arithmetische Operationen notwendig sind, siehe [Hermann11]. Die in Gl. (3.130) benötigten partiellen Ableitungen lassen sich im vorgestellten quasi-statischen Kontaktsubmodell nicht analytisch berechnen, da die Größe der Kontaktfläche vorab nicht bekannt ist und für alle n_q^{hf} Einträge der Kontaktalgorithmus aus Abschnitt 3.2.3 aufgerufen werden muss. Deshalb wird $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ in dieser Arbeit mittels Differenzenquotienten numerisch approximiert. Dazu werden die Ableitungen durch den Vorwärtsdifferenzenquotient

$$\frac{\partial f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})}{\partial \bar{q}_{e,j}^{\text{hf}}} \approx \frac{f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} + h_j \mathbf{e}^j) - f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})}{h_j} + \mathcal{O}(h_j) \quad (3.135)$$

oder durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{e,j}^{\text{hf}}} \approx \frac{f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} + h_j \mathbf{e}^j) - f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} - h_j \mathbf{e}^j)}{2h_j} + \mathcal{O}(h_j^2) \quad (3.136)$$

ersetzt, siehe [Hanke-Bourgeois06]. Dabei ist $\mathbf{e}^j = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$ der j -te Einheitsvektor und h_j der j -te skalare Eintrag im Vektor $\mathbf{h}$ der Schrittweiten. Bei der numerischen Differentiation kann der Differenzenquotient einer differenzierbaren Funktion als Näherung der lokalen Ableitung benutzt werden. Die Approximation über den Differenzenquotienten muss für alle $(n_q^{\text{hf}})^2$ Elemente der Jacobi-Matrix durchgeführt werden. Daraus ergibt sich ein Rechenaufwand von $(n_q^{\text{hf}})^2 + n_q^{\text{hf}}$ bzw. $2(n_q^{\text{hf}})^2 + n_q^{\text{hf}}$ Funktionsauswertungen zusätzlich zu den $2n_q^{\text{hf}}/3$ arithmetischer Operationen zur numerischen Lösung des linearen Gleichungssystems (3.134). Da die Ableitungen nicht mehr exakt berechnet werden, geht die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens verloren, siehe [ReinhardtHoffmannGerlach13].

Der Vorwärtsdifferenzenquotient nähert die Ableitung der Funktion $f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ numerisch durch die Sekantensteigung zwischen den Punkten $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ und $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} + h_j \mathbf{e}^j$ an, während der zentrale Differenzenquotient geometrisch als Anstieg der Sekante vom Punkt $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} - h_j \mathbf{e}^j$ bis zum Punkt $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}} + h_j \mathbf{e}^j$ interpretiert werden kann. Für $h_j \rightarrow 0$ wird aus der Sekante eine Tangente am Punkt $f_i(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$. Der Approximationsfehler oder Verfahrensfehler entsteht durch die numerische Approximation, indem die Ableitung der Tangentensteigung durch Sekantensteigung mit $h_j > 0$ ersetzt wird. Der Approximationsfehler, in den Gleichungen (3.135) und (3.136) mit $\mathcal{O}(h_j)$ respektive $\mathcal{O}(h_j^2)$ bezeichnet, beschreibt die Differenz zwischen exakter und approximierter Lösung. Die Exponenten beschreiben die Ordnung des Differenzenquotienten. Unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern ist für $h_j \rightarrow 0$ der Approximationsfehler beim Vorwärtsdifferenzenquotienten proportional zu h_j , während er beim zentralen Differenzenquotienten proportional zu h_j^2 ist, siehe [MunzWestermann19]. Damit ist der zentrale Differenzenquotient theoretisch eine Ordnung genauer.

Der Gesamtfehler des Verfahrens setzt sich zusammen aus dem Approximationsfehler und dem Rundungsfehler. Rundungsfehler entstehen, da auf Rechnern Gleitkommazahlen nur mit endlicher Genauigkeit dargestellt und daher Ergebnisse nur mit endlicher Genauigkeit erzeugt werden können. Dabei entstehen Rundungsfehler sowohl durch Grenzen in der Darstellbarkeit von Zahlen als auch durch Rechenoperationen, die empfindlich gegenüber Rundungsfehlern sind, siehe [Hermann11]. Die Maschinengenauigkeit ε ist dabei ein Maß für Rundungsfehler bei Rechnungen mit Gleitkommazahlen. Die Schrittweite h_j im Differenzenquotienten hat großen Einfluss auf den Gesamtfehler. Wird die Schrittweite h_j zu groß gewählt, so nimmt die Genauigkeit der Approximation von $\mathbf{f}'(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ ab und verschlechtert die Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens. Für $h_j \rightarrow 0$ ge-

hen die Approximationsfehler gegen Null, der Rundungsfehler wächst jedoch für kleine Schrittweiten h_j an, so dass bei zu kleinen Werten für h_j der Gesamtfehler von den Rundungsfehlern dominiert wird. Es können aufgrund der Gleitkomma-darstellung Auslöschungen auftreten, siehe [Hermann11]. Die Schrittweiten zur Approximation von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ müssen in dieser Arbeit sehr klein gewählt werden, da die hochfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ beim Buckens-System relativ klein sind. Daher hat der Approximationsfehler einen geringeren Einfluss auf den Gesamtfehler als der Rundungsfehler. Aus diesem Grund liegt kein Unterschied im Konvergenzverhalten und den Ergebnissen zwischen dem zentralen Differenzenquotienten und dem Vorwärtsdifferenzenquotienten vor. In dieser Arbeit wird daher letztgenannter zur numerischen Approximation von Gl. (3.130) verwendet, da weniger Funktionsauswertungen und damit weniger Aufrufe des Kontaktalgorithmus notwendig sind. Um eine Verschlechterung der Konvergenz der Iteration abhängig von der Schrittweite zu verhindern und um die Jacobi-Matrix möglichst effizient zu approximieren, wird eine Schrittweitenberechnung im quasi-statischen Kontaktsubmodell verwendet.

Die Bestimmung der Jacobi-Matrix in Gl. (3.130) ist mit großem Rechenaufwand verbunden, weshalb es wichtig ist, die Anzahl der Funktionsauswertungen zur Approximation gering zu halten. Außerdem ist es wichtig, dass die Ableitungen bzw. deren Approximationen nicht durch Rundungs- und Approximationsfehler dominiert werden. Um dies zu verhindern, wird in [Salane86] eine Anpassung der Schrittweiten vorgestellt, um diese Fehler zu steuern. Diese Anpassung wird in der MATLAB-Funktion *odenumjac.m* verwendet, um eine Jacobi-Matrix bei der Nullstellensuche numerisch zu approximieren, siehe [Mathworks16]. Die Schrittweitensteuerung im quasi-statischen Kontaktsubmodell wird angelehnt an [Salane86] implementiert. In dem Verfahren nach [Salane86] wird ausgenutzt, dass die Jacobi-Matrix der gleichen Funktion wiederholt für benachbarte Argumente ausgewertet wird. Um den Rechenaufwand bei der Schrittweitensteuerung gering zu halten, wird nach der Anpassung der Schrittweite nur die Spalte von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ neu approximiert, in der ein übermäßiger Rundungs- oder Approximationsfehler auftritt. Die Entscheidung welche Schrittweite h_j , und damit auch welche Spalte der Jacobi-Matrix, neu approximiert werden muss, wird nach [Salane86] folgendermaßen getroffen. Zunächst wird für alle j Spalten von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ ein Skalierungsfaktor berechnet über

$$scale_j = \max(|f_j(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} + h_j \mathbf{e}^j)|, |f_j(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})|). \quad (3.137)$$

Anschließend wird für alle j Spalten der Jacobi-Matrix die Bedingung

$$\max(|f_j(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}} + h_j \mathbf{e}^j) - f_j(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})|) \leq scale_j B^r, \quad (3.138)$$

mit $B^r = \varepsilon^{0.875}$ geprüft, siehe [Salane86]. Ist diese Bedingung für eine Spalte j erfüllt, so können Rundungs- oder Approximationsfehler auftreten, die durch eine Anpassung der Schrittweite minimiert werden können. Anschließend wird die

angepasste Schrittweite für die Approximation von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ im nächsten Iterationsschritt gespeichert. Dabei wird für jede hochfrequente elastische Koordinate eine Schrittweite h_j zur Approximation der j -ten Spalte der Jacobi-Matrix berechnet. Initialisiert werden die Schrittweiten $\mathbf{h}$ beim quasi-statischen Kontaktsmodell in dieser Arbeit mit $1e^{-8}$. Mit diesen gegebenen Schrittweiten $\mathbf{h}$ wird zunächst die erste Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ approximiert. Treten in einer Spalte von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ Rundungs- oder Approximationsfehler auf, so wird die Schrittweite und die entsprechende Spalte von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ für die nachfolgenden Funktionsaufrufe angepasst. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Auswertungen der Jacobi-Matrix für nah beieinanderliegenden Argumente stattfindet. Somit kann für jede hochfrequente elastische Koordinate abhängig von ihrer Größe eine passende Schrittweite ermittelt werden.

3.7.1 Approximation der Jacobi-Matrix mit dem Broyden-Verfahren

Das Newton-Raphson-Verfahren approximiert die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ zur Nullstellensuche in jeder Iteration komplett neu. Abhängig von der Anzahl n_q^{hf} der hochfrequenten elastischen Koordinaten ist die Approximation von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ ein numerisch aufwändiger Vorgang, da für jeden Eintrag der Kontaktalgorithmus aus Abschnitt 3.2.3 aufgerufen werden muss. Da bei der Zeitintegration relativ kleine Schrittweiten erforderlich sind, nimmt aufgrund der vielen Funktionsauswertungen die numerische Effizienz erheblich ab. Zur Reduktion dieses numerischen Aufwands wird in diesem Abschnitt das Broyden-Verfahren, beschrieben von [Broyden65], erläutert.

Das Broyden-Verfahren ist ein Quasi-Newton-Verfahren, welches zur Nullstellensuche eingesetzt werden kann. Quasi-Newton-Verfahren werden in der Optimierung zur Berechnung von Gradienten eingesetzt. Dabei soll bei mehrdimensionalen Problemen die symmetrische Jacobi-Matrix des Gradienten, auch Hesse-Matrix genannt, möglichst effizient approximiert werden, siehe [ReinhardtHoffmannGerlach13]. In der Hesse-Matrix werden die zweiten partiellen Ableitungen der zu minimierenden Funktion zusammengefasst. Verbreitete Verfahren sind neben dem Broyden-Verfahren zum Beispiel das Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Verfahren, siehe zum Beispiel [Broyden70, Fletcher70], oder Symmetric Rank 1 (SR1) Verfahren, siehe [ByrdKhalfanSchnabel96]. Diese Verfahren stellen eine Verallgemeinerung des skalaren Sekanten-Verfahrens zur Nullstellensuche der ersten Ableitung bei mehrdimensionalen Problemen dar. Im Mehrdimensionalen ist die Sekantengleichung jedoch unterbestimmt, siehe [Hermann11]. Die verschiedenen Quasi-Newton-Verfahren unterscheiden sich darin, wie sie die Lösung dieser Sekantengleichung einschränken. Das Broyden-Verfahren kann zusätzlich zur Suche nach Extremwerten auch zur Berechnung der Nullstellen in nichtlinearen Gleichungssystemen eingesetzt werden, da die zu aktualisierende Matrix nicht symmetrisch sein muss. Zur Nullstellensuche wird dabei statt der

symmetrischen Hesse-Matrix die Jacobi-Matrix aktualisiert.

Die Idee hinter dem Broyden-Verfahren ist, die Jacobi-Matrix nur zum Start der Iteration zu approximieren. Danach wird eine Rang 1 Modifikation durchgeführt, siehe [ReinhardtHoffmannGerlach13]. Im ersten Iterationsschritt $k = 1$ wird die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,1}^{\text{hf}})$ mit dem Vorwärtsdifferenzenquotienten berechnet, da zu diesem Zeitpunkt noch nicht genügend Informationen vorhanden sind, um das Broyden-Verfahren anwenden zu können. Das Broyden-Verfahren ist im Mehrdimensionalen eine Verallgemeinerung des skalaren Sekanten-Verfahrens

$$\mathbf{f}'(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) \approx \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})}{\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}} \quad (3.139)$$

auf n_q^{hf} Dimensionen. Da die Division durch den Vektor $\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ nicht definiert ist, wird Gl. (3.139) mit $\mathbf{f}'(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ umgeformt zu

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) (\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}), \quad (3.140)$$

wobei im Weiteren $\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ gilt. Durch diese Gleichung ist die Matrix $\mathbf{J}_{k+1}$ für $k > 1$ jedoch nicht eindeutig definiert, siehe [Hermann11], da für die Vektoren $\ell, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_q^{\text{hf}}}$ mit $\mathbf{p}^T (\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) = 0$ ebenfalls die Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_{k+1} (\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) &= (\mathbf{J}_{k+1} + \ell \mathbf{p}^T) (\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) \\ &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) \end{aligned} \quad (3.141)$$

gelten. Aus diesem Grund muss die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{k+1}$ nach [Broyden65] noch die Bedingungen

$$\mathbf{J}_{k+1} \mathbf{p} = \mathbf{J}_k \mathbf{p}, \quad \text{falls} \quad \mathbf{p}^T (\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) = 0 \quad (3.142)$$

erfüllen. In [Hermann11] wird gezeigt, dass die Gleichungen (3.141) und (3.142) die Matrix $\mathbf{J}_{k+1}$ eindeutig definieren. Mit $\Delta \mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ und $\Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}} = \bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ folgt dann zur Berechnung von $\mathbf{J}_{k+1}$ bzw. $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}) = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) + \frac{\Delta \mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}) \Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}}}{\|\Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}}\|^2} (\Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}})^T. \quad (3.143)$$

Diese Gleichung kann so interpretiert werden, dass die aktuelle Approximation der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ verbessert wird, indem deren Lösung in die Sekantengleichung zur Berechnung von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ aufgenommen wird, welche somit eine minimale Modifikation von $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ darstellt.

Zur iterativen Bestimmung der verbesserten Näherung über Gl. (3.133) wird für $k \geq 2$ dann die über Gl. (3.143) aktualisierte Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ verwendet. Somit wird die Anzahl der Funktionsauswertungen von $(n_q^{\text{hf}})^2 + n_q^{\text{hf}}$

ab dem zweiten Iterationsschritt reduziert auf n_q^{hf} . Zur Lösung des linearen Gleichungssystems (3.134) mittels LR-Zerlegung und anschließendem Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen sind wie beim Newton-Raphson-Verfahren $2n_q^{\text{hf}}/3$ arithmetischer Operationen erforderlich. Durch die Approximation der Jacobi-Matrix konvergiert das Verfahren nicht mehr quadratisch sondern superlinear, siehe [Hermann11]. Da die Jacobi-Matrix effizient aktualisiert werden kann, kann die schlechtere Konvergenz jedoch akzeptiert werden.

Durch die direkte Approximation der Inversen der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})^{-1}$ kann der Rechenaufwand in Gl. (3.134) weiter reduziert werden. Mit der Formel von Sherman und Morrison, siehe [Hermann11], kann die Inverse der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ direkt über

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})^{-1} = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})^{-1} + \frac{\Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}} - \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})^{-1} \Delta \mathbf{f}_{k+1}}{(\Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}})^{\text{T}} \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})^{-1} \Delta \mathbf{f}_{k+1}} (\Delta \bar{\mathbf{q}}_{k+1}^{\text{hf}})^{\text{T}} \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})^{-1} \quad (3.144)$$

aktualisiert werden. Damit kann der Rechenaufwand auf n_q^{hf} Funktionsauswertungen und $(n_q^{\text{hf}})^2$ arithmetische Operationen zur Berechnung der inversen Jacobi-Matrix reduziert werden.

3.7.2 Ablauf der Kontaktkraftberechnung mit dem Broyden-Verfahren

Im folgenden Abschnitt wird der Ablauf der Kontaktkraftberechnung im quasi-statischen Kontaktsubmodell erläutert. Darin wird das lokale Deformationsfeld $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ statisch betrachtet und in Abhängigkeit der niederfrequenten Zustände aus der Zeitsimulation sowie den unbekannten, von der lokalen Verformung abhängenden, Kontaktkräften mit dem Newton-Raphson-Verfahren über Gl. (3.133) iterativ bestimmt. Anschließend werden mit der konvergierten Lösung $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ die Kontaktkräfte berechnet, deren niederfrequente Anteile auf die Bewegungsgleichungen (3.124) wirken. Das quasi-statische Kontaktsubmodell mit dem Broyden-Verfahren wird erstmals in [TschiggSeifried18] vorgestellt. In Abbildung 3.13 ist der Ablauf der Kontaktkraftberechnung schematisch dargestellt. Aus der Zeitintegration der niederfrequenten Bewegungsgleichungen (3.124) des FMKS werden die Koordinaten $\mathbf{r}_{\text{IR}}$, β_{IR} und $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ aller Körper zum aktuellen Zeitpunkt t_n , zusammengefasst in $\mathbf{y}(t_n)$, an das quasi-statische Kontaktsubmodell übergeben. Die Kontaktkraftberechnung während der Approximation der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ und zur Auswertung der Funktionen $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ erfolgt über den Kontaktalgorithmus nach Abschnitt 3.2.3. Da die Kontaktkräfte vom lokalen Deformationsfeld abhängen wird anschließend über das nichtlineare Gleichungssystem (3.127) die lokale Deformation aus den unbekannten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ berechnet. Dazu wird während der Iteration nach Gl. (3.133) eine verbesserte Näherungslösung berechnet, wobei $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ mit dem Broyden-Verfahren aktualisiert wird. Zum Iterationsstart wird die konvergierte Lösung $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}(t_{n-1})$ aus

dem vorherigen Zeitschritt verwendet. Nach der iterativen Bestimmung von $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ zum aktuellen Zeitpunkt erfolgt die Berechnung der Kontaktkräfte mit $\mathbf{r}_{\text{IR}}$, β_{IR} und $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{lf}}$ und der konvergierten Lösung des lokalen Deformationsfeldes $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}$ über den Kontaktalgorithmus nach Abschnitt 3.2.3. Anschließend werden die Kontaktkräfte nach Gl. (3.28) in den generalisierten diskreten Kräften $\mathbf{h}_d$ zusammengefasst. Die niederfrequenten Anteile $\mathbf{h}_d^{\text{lf}}$ werden an die Zeitintegration zur Berechnung der Koordinaten $\mathbf{y}(t_{n+1})$ des nächsten Zeitschritts übergeben. Die Lösung der Bewegungsgleichungen in Kombination mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell kann mit den MATLAB-Programmen zur Lösung von steifen Differentialgleichungssystemen erfolgen. In dieser Arbeit wird der Löser ode15s verwendet, weshalb die Beschreibung des Lösungsverhaltens des quasi-statischen Kontaktsubmodells exemplarisch am ode15s erfolgt.

Im Folgenden wird die Verwendung des quasi-statischen Kontaktsubmodells in der dynamischen Simulation im Detail beschrieben. Während der Zeitintegration wird in jedem Zeitschritt geprüft, ob eine Kontaktkraftberechnung über das quasi-statische Kontaktsubmodell erfolgen muss. Dazu wird mit den Kontaktkräften $\mathbf{f}_c$ mit der Norm $\|\mathbf{f}_c(t_n) - \mathbf{f}_c(t_{n-1})\| > \varepsilon_{\text{qs}}$ eine Überprüfung durchgeführt, ob die iterative Kontaktkraftberechnung aktiviert werden soll. Dabei stellt ε_{qs} eine Genauigkeitsschranke dar, die bei der Nullstellensuche in Abbildung 3.13 ebenfalls verwendet wird. Ihre Größe wird zunächst als gegeben angenommen und im weiteren Verlauf der Arbeit näher erläutert. Bei der eigentlichen Kontaktkraftberechnung wird zunächst geprüft, ob eine Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ aus dem vorigen Zeitschritt im Speicher vorliegt. Ist dies nicht der Fall, so wird über den blauen Pfad in Abbildung 3.13 die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,1}^{\text{hf}})$ zum Iterationsstart $k = 1$ über Differenzenquotienten einmal komplett approximiert. Um die numerische Effizienz zu steigern, werden bei den Funktionsauswertungen $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ die im Kontaktalgorithmus benötigten Kontaktelemente gespeichert, damit bei den nachfolgenden Funktionsaufrufen $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}})$ nicht die komplette Kontaktzone erneut geprüft werden muss. Anschließend werden gegebenenfalls die Schrittweiten $\mathbf{h}$ und die entsprechenden Spalten der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ angepasst. Die approximierte Jacobi-Matrix wird während der Nullstellensuche über das Broyden-Verfahren nach Gl. (3.143) aktualisiert. Hat die gesuchte Näherungslösung $\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}$ die gewünschte Genauigkeit $\|\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}} - \bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}\| < \varepsilon_{\text{qs}}$ erreicht, so werden abschließend die Kontaktkräfte $\mathbf{f}_c$ mit der konvergierten lokalen Deformation $\bar{\mathbf{q}}_{e,k+1}^{\text{hf}}$ berechnet. Diese werden nach Gl. (3.28) zu den generalisierten diskreten Kräften $\mathbf{h}_d$ zusammengefasst, deren niederfrequente Anteile auf die Bewegungsgleichungen wirken. Die Jacobi-Matrix der konvergierten Lösung $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}})$ wird abgespeichert. Um die numerische Effizienz weiter zu verbessern, wird die gespeicherte Jacobi-Matrix beim nächsten Zeitschritt für die erste Iteration wieder verwendet anstatt neu approximiert. Anschließend wird sie mit dem Broyden-Verfahren aktualisiert, in Abbildung 3.13 grün dargestellt. Bei der Wiederverwendung der Jacobi-Matrix erfolgt keine Anpassung der Schrittweiten $\mathbf{h}$. Diese erfolgt lediglich bei der Approximation einer neuen Jacobi-Matrix über den blau-

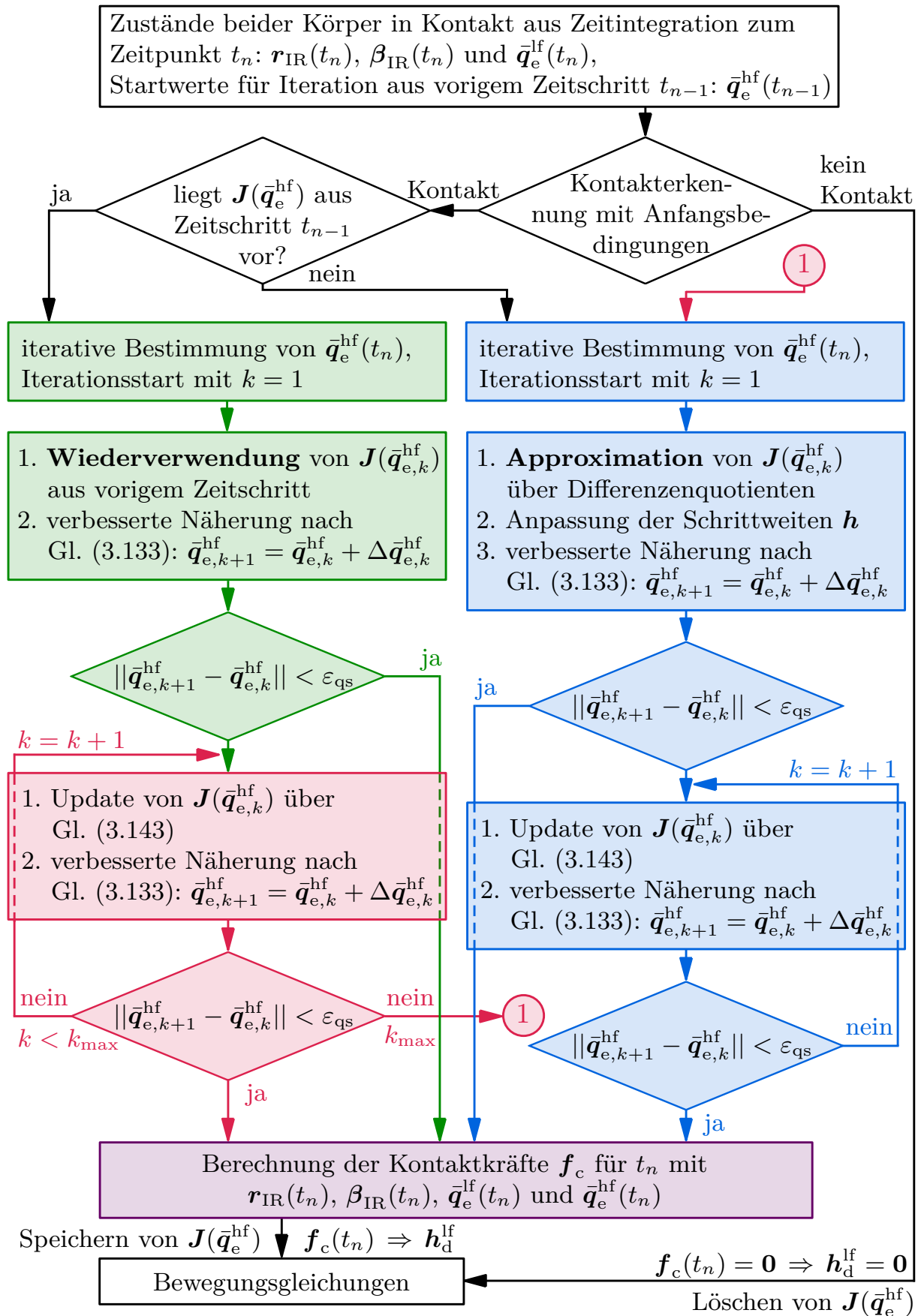


Abbildung 3.13: Schematische Darstellung des quasi-statischen Kontaktsubmodells mit Nullstellensuche über Broyden-Verfahren

en Pfad in Abbildung 3.13. Bis zur Konvergenz der Nullstellensuche für $k > 1$ wird die wiederverwendete Jacobi-Matrix dann über das Broyden-Verfahren aktualisiert, dargestellt in Abbildung 3.13 in rot. Konvergiert die Nullstellensuche mit der aktualisierten, wiederverwendeten Jacobi-Matrix nicht bis die maximale Anzahl Iterationen $k_{\max}$ erreicht ist, so wird die verbesserte Näherung verworfen und mit den niederfrequenten Zuständen zum aktuellen Zeitpunkt und der konvergierten Lösung aus dem vorigen Zeitschritt die Jacobi-Matrix über den blauen Pfad neu approximiert und anschließend aktualisiert.

Wird mit einer neu approximierten Jacobi-Matrix, also über den blauen Pfad in Abbildung 3.13, während der Iteration die maximale Anzahl Iterationen $k_{\max}$ erreicht, so wird mit der nicht konvergierten Näherungslösung $\bar{\mathbf{q}}_{e,k_{\max}}^{\text{hf}}$ die entsprechende Kontaktkraft berechnet, deren niederfrequente Anteile an den Integrator zur Berechnung des nächsten Zeitschritts übergeben werden. Je nachdem, wie weit die Näherungslösung $\bar{\mathbf{q}}_{e,k_{\max}}^{\text{hf}}$ von der gesuchten Nullstelle abweicht, kann sich die Konvergenzrate der Newton-Iteration im ode15s verschlechtern. Dann wird der aktuelle Zeitschritt verworfen und eine neue Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im ode15s approximiert. Bei der Neuapproximation von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ wird das quasi-statische Kontaktsubmodell nicht verwendet, sondern die Kontaktkräfte mit den niederfrequenten Zuständen aus dem Integrator und der Lösung $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ aus dem Funktionsaufruf, der die Konvergenz verschlechtert hat, direkt berechnet. Zur Approximation der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ werden daher nur die niederfrequenten Anteile bei gegebener lokaler Verformung variiert. Damit kann sichergestellt werden, dass die Konvergenz der Newton-Iteration im ode15s zur vorgegebenen statischen Verformung $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ beim nächsten Funktionsaufruf verbessert wird. Bleibt die lokale Verformung $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}$ während der Approximation von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ konstant, so haben die hochfrequenten Anteile keinen Einfluss auf die niederfrequente Zeitintegration. Wird das Kontaktsubmodell während der Approximation von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ aktiviert, so entsteht über $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ die Kopplung zwischen nieder- und hochfrequentem Teil und somit ein hochfrequenter Einfluss auf die Bewegungsgleichungen. Dieser sollte aufgrund der daraus resultierenden kleinen Zeitschritte vermieden werden. Die Zeitschrittweite des niederfrequenten dynamischen Anteils in der Zeitintegration passt in diesem Fall nicht zu der erforderlichen hochfrequenten Zeitschrittweite, was das Konvergenzverhalten des ode15s verschlechtern kann. Für den nächsten Zeitschritt mit der neu approximierten Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im Integrator wird im quasi-statischen Kontaktsubmodell die vorliegende Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}})$ aktualisiert, oder wenn wieder keine Konvergenz der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell auftritt, neu approximiert, siehe Abbildung 3.13.

Zur Prüfung des Konvergenzverhaltens wird während der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell die absolute Knotenposition der Kontaktflächen verglichen. Ändert sich diese zu stark, so ist davon auszugehen, dass die Nullstellensuche nicht konvergiert oder die Zustände aus dem Integrator zu weit

von dem vorigen Zeitschritt abweichen. In diesem Fall bricht die Simulation ab. Das Konvergenzverhalten des Kontaktsubmodells hängt von der Diskretisierung der Kontaktzone und dem Penalty-Faktor ab. Außerdem hat die Wahl der Genauigkeitsschranke ε_{qs} , der maximalen Iterationen k_{max} sowie der passenden Fehlertoleranzen Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten, das Ergebnis sowie die numerische Effizienz. Diese Zusammenhänge werden in Abschnitt 4 an einem Beispiel näher erläutert.

Aufgrund der kleinen Zeitschrittweiten im Integrator und der damit verbundenen kleinen Änderungen in den Zuständen während des Kontaktvorgangs kann die Jacobi-Matrix im quasi-statischen Kontaktsubmodell oft wiederverwendet werden. Lediglich zu Kontaktbeginn und Kontaktende wird die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}_{\text{e}}^{\text{hf}})$ aufgrund der großen Gradienten in den Zuständen öfters neu approximiert. Dies reduziert den Rechenaufwand weiter, da nur bei schlechter Konvergenz der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell die Jacobi-Matrix komplett neu approximiert werden muss. Mit diesem Verfahren kann die numerische Effizienz im Vergleich zum Quasi-Newton-Verfahren in [TschiggSeifried17] erheblich gesteigert werden.

VORGEHENSWEISE BEI DER KONTAKTMODELLIERUNG IN FLEXIBLEN MEHRKÖRPERSYSTEMEN

In diesem Kapitel wird das praktische Vorgehen bei der Kontaktmodellierung in reduzierten FMKS erläutert. Begonnen wird in dieser Arbeit mit der Modellierung der zur Stoßanalyse verwendeten FE-Körper mit dem kommerziellen Programmpaket ABAQUS, siehe [Dassault Systèmes14b]. Die verwendeten Modelle werden in Abschnitt 4.1 vorgestellt. Bei der Modellierung der einzelnen Körper wird die Diskretisierung so gewählt, dass sowohl die lokalen Verformungen und Spannungen in der Kontaktzone als auch die globale Deformation in Form von Welleneffekten präzise erfasst werden können. Für die anschließende dynamische FE-Simulation wird die Kontaktformulierung zwischen den Körpern definiert und die Zeitsimulation mit ABAQUS/Explicit durchgeführt. Zur Modellierung des Kontakts können die Lagrange- oder die Penalty-Formulierung verwendet werden. Die Ergebnisse dieser dynamischen FE-Simulation werden anschließend als Referenzergebnisse herangezogen, um die Qualität der FMKS-Simulationen zu beurteilen. Die Wahl der Kontaktformulierung sowie die Wahl der Diskretisierung wird in Abschnitt 4.2 diskutiert. Außerdem wird der Einfluss des Penalty-Faktors im FE-Modell bei der Kontaktmodellierung über das Penalty-Verfahren aufgezeigt.

Anschließend folgt die Modellierung des reduzierten FMKS. Hierzu werden die einzelnen linearen FE-Körper aus der Referenzsimulation zunächst in MATLAB importiert. Dazu werden in dieser Arbeit sowohl das am Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart entwickelte Softwarepaket MATMOREMBS, siehe [Nowakowski15], als auch die MATLAB-Toolbox RED des Instituts für Mechanik und Meerestechnik der Technischen Universität Hamburg verwendet. Mit beiden können die eingelesenen FE-Daten über Modellreduktionsverfahren reduziert werden. Bei der Modellreduktion über das modale Abschneiden oder das CB-Verfahren sind Voruntersuchungen zur richtigen Wahl der Ansatzfunktionen erforderlich, auf welche in Abschnitt 4.3 näher eingegangen wird. Anschließend werden daraus mit MATMOREMBS oder RED die SID Dateien, siehe Abschnitt 2.8, generiert. Diese SID Dateien werden dann zur FMKS-Simulation in MATLAB verwendet. Die in dieser Arbeit entwickelten Kontaktsubmodelle können in der MATLAB-Toolbox DYNAMANTO, siehe [MuM], des Instituts für Mechanik und Meerestechnik der Technischen Universität Hamburg zur Stoßanalyse mit reduzierten FMKS verwendet werden.

In Abschnitt 4.4 wird die Bestimmung der passenden Penalty-Faktoren in der reduzierten FMKS-Simulation in Kombination mit den vorgestellten Kontaktsubmodellen erläutert. Anschließend wird exemplarisch das Konvergenzverhalten und die Wahl der Einflussparameter, siehe Abschnitt 3.7, des quasi-statischen Kontaktsubmodells diskutiert. Dabei werden alle Simulationen auf einem Computer mit Intel Xeon E3-1270v5 Prozessor mit 4x3.6 GHz und 64 GB RAM ausgeführt.

4.1 Testsysteme zur Stoßanalyse

In diesem Abschnitt werden die in dieser Arbeit verwendeten Modelle vorgestellt. Zunächst wird der zentrale gerade Stoß einer freien Stahlkugel auf freie Aluminiumkörper untersucht. Der Fokus der Stoßanalysen liegt dabei zum einen auf der lokalen Verformung und den auftretenden Spannung in der Kontaktzone und zum anderen auf der globalen Deformation in Form der Wellenausbreitung in den gestoßenen Aluminiumkörpern. Die dabei untersuchten Konfigurationen, angelehnt an [Seifried05, SeifriedSchiehlenEberhard10], sind der Stoß auf einen schlanken Stab und der Stoß auf einen Balken, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Geometrie- und Materialdaten dieser Modelle nach [Seifried05] sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Die Kugel ist dabei aus gehärtetem Stahl und die Stoßgeschwindigkeit wird so gewählt, dass sich die Aluminiumkörper stets elastisch verhalten. Beim Stab wird zwischen ebener Kontaktfläche und einer Kontaktfläche mit Innenradius unterschieden. Beim Stoß der Kugel auf den Balken treten Biegeschwingungen auf, woraus ein Mehrfachstoß innerhalb einer sehr kurzer Zeitdauer resultiert. Dabei wirkt sich die Genauigkeit der Erfassung des ersten Stoßes auf die weiteren Stöße aus. Erste numerische und experimentelle Ergebnisse von Stoßuntersuchungen mit diesen Körpern werden zum Beispiel in [SchiehlenSeifried04, Seifried05, SchiehlenSeifried07] vorgestellt. In dieser Arbeit steht die Untersuchung der Wellenausbreitung und lokalen Verformung in Kombination mit reduzierten elastischen FE-Körpern im Vordergrund.

Bei den Stoßuntersuchungen mit den geometrisch einfachen Körpern aus Tabelle 4.1 ist die globale Bewegung vor und nach dem Stoß sehr gering. Daher wird zur Verifizierung der Kontaktsubmodelle für größere Bewegungen der Stoß einer Kugel auf ein Doppelpendel mit quadratischem Querschnitt untersucht, wie in Abbildung 4.1 rechts dargestellt. Die entsprechenden Geometrie- und Materialdaten sind Tabelle 4.2 zu entnehmen. Die Kugel trifft den ruhenden Pendelkörper zentral in einer Höhe von 6 mm. Die Lagerungen zwischen den Pendelkörpern und der Umgebung sind ideal und erlauben lediglich eine Rotation um die z -Achse, wie Abbildung 4.1 zu entnehmen ist. Eine Kontaktberechnung findet lediglich zwischen der Kugel und dem unteren Pendelkörper statt und nicht zwischen den Pendelkörpern selbst. Auch in diesem Modell ist die Stoßgeschwindigkeit so gewählt, dass es zu keinen plastischen Verformungen im Aluminiumpendel kommt. Aufgrund der ausgeprägten Rotationsbewegung der Pendelkörper wird damit die

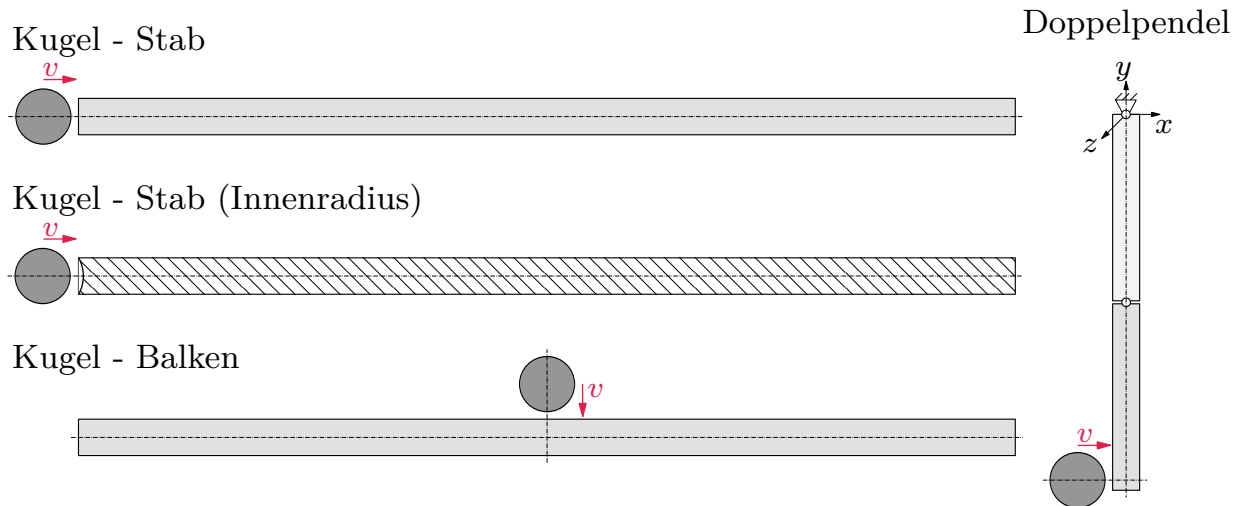


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der verwendeten Modelle

Vernachlässigung der Koppelterme in Verbindung mit dem Buckens-System nach Abschnitt 3.6 verifiziert.

4.2 Modellbildung in der FEM

Zur präzisen Analyse von Stoßvorgängen ist die Modellierung des Kontaktvorgangs ebenso wichtig wie die Modellierung der Deformation des Körpers. Um die lokale Verformung in der Kontaktzone und die daraus resultierenden Spannungen und Dehnungen zu ermitteln, ist eine sehr feine Vernetzung notwendig, siehe [Seifried05, Ziegler12]. Ruft der Stoß hochfrequente Effekte wie die Wellenausbreitung im Körper hervor, so ist zusätzlich eine feine Vernetzung des restlichen Körpers erforderlich. Die Stoßbetrachtung umfasst damit den nicht-linearen Kontaktvorgang und die daraus resultierende Wellenausbreitung sowie

Tabelle 4.1: Geometrie- und Materialdaten von Kugel und Aluminiumkörper

	Stahl- kugel	Stab	Stab (Innenradius)	Balken
Länge [mm]	-	1000	1000	1000
Radius [mm]	15	10	10	10
Innenradius [mm]	-	-	20	-
E-Modul [GPa]	210	72.8	72.8	72.8
Poisson-Zahl	0.3	0.33	0.33	0.33
Dichte [kg/m ³]	7780	2789	2789	2789
Masse [kg]	0.110	0.876	0.875	0.876

die lokale Deformation der Kontaktzone.

Zur Beurteilung der Qualität der FMKS-Simulationen werden mit ABAQUS Referenzlösungen erzeugt. Das nichtlineare FE-Modell besteht aus linearen FE-Körpern und aus dem nichtlinearen Kontaktvorgang. Die Modellierung beschränkt sich dabei auf rein elastisches Materialverhalten, weshalb es sich bei der Wellenausbreitung in den Körpern um ein lineares Problem handelt. Weiterhin werden geometrische Nichtlinearitäten in ABAQUS berücksichtigt. Zur Integration wird der Gleichungslöser ABAQUS/Explicit verwendet, der sich gut für dynamische Prozesse wie Stöße eignet, siehe [Dassault Systèmes14b]. Die Kontaktbeschreibung erfolgt in ABAQUS über den *kinematic contact* oder den *penalty contact* zwischen einer Master- und einer Slave-Fläche. In dieser Arbeit wird der reibungsfreie Normalenkontakt untersucht, weshalb das tangentielle Verhalten als reibungsfrei definiert wird. Beim *kinematic contact* wird in jedem Zeitinkrement zunächst ein Prädiktor-Schritt ausgeführt, in welchem der kinematische Zustand der Konfiguration ohne Berücksichtigung der Kontaktbedingung vorhergesagt wird. Im anschließenden Korrektorschritt werden Beschleunigungskorrekturen auf die Kontaktknoten aufgebracht um die korrigierte Konfiguration zu berechnen, siehe [Dassault Systèmes14a]. Dabei wird die Kontaktkraft so groß gewählt, dass sich die Slave-Knoten und Master-Fläche genau berühren. Dies entspricht dem Lagrange-Kontakt aus Abschnitt 3.2.1. Dieses Verfahren ist impulserhaltend, jedoch nicht energieerhaltend. Der auftretende Energieverlust bei kleinen Zeitinkrementen und ausreichend feiner Diskretisierung ist jedoch vernachlässigbar, siehe [Dassault Systèmes14b]. In ABAQUS kann die Kontaktbeschreibung ebenfalls über den *penalty contact* erfolgen. Diese eignet sich gut für den Kontakt zwischen Flächen, die auch anderen Arten von Einschränkungen, zum Beispiel multi-point constraints, unterliegen, siehe [Dassault Systèmes14b]. Der Strafterm führt dabei eine zusätzliche Steifigkeit in das Modell ein, siehe Abschnitt 3.2.1,

Tabelle 4.2: Geometrie- und Materialdaten von Stahlkugel und Doppelpendel aus Aluminium

	Stahl- kugel	Pendelkörper oben	Pendelkörper unten
Länge [mm]	-	200	200
Breite [mm]	-	15	15
Höhe [mm]	-	15	15
Radius [mm]	15	-	-
E-Modul [GPa]	210	72.8	72.8
Poisson-Zahl	0.3	0.33	0.33
Dichte [kg/m ³]	7780	2789	2789
Masse [kg]	0.110	0.126	0.126

welche das stabile Zeitinkrement negativ beeinflussen kann. Damit wird das kritische Zeitinkrement beeinflusst, was beim *kinematic contact* nicht der Fall ist. In ABAQUS/Explicit wird diese zusätzliche Steifigkeit bei der automatischen Schrittweitensteuerung berücksichtigt.

Zur Diskretisierung der Körper stehen für Kontaktsimulationen in Kombination mit ABAQUS/Explicit verschiedene linear interpolierende Elemente erster Ordnung zur Verfügung. In dieser Arbeit werden zur Vernetzung ausschließlich lineare Hexaeder-Elemente mit acht Knoten verwendet. Lineare Tetraeder-Elemente sollten nicht verwendet werden, da sie in der Regel zu steif sind und für genaue Ergebnisse eine sehr feine Vernetzung notwendig ist, siehe [Dassault Systèmes14b]. Für die Untersuchung der Stöße auf die Stäbe werden diese linearen Hexaeder-Elemente mit voller Integration zur Diskretisierung verwendet. Neben den linearen Hexaeder-Elementen mit voller Integration werden bei auftretender Biegebelastung in den Körpern Elemente mit reduzierter Integration verwendet, siehe [Dassault Systèmes14a]. Damit können Locking-Effekte, wie shear locking, die zur künstlichen Versteifung des Systems führen, verhindert werden, siehe [KnotheWessels17]. Eine Biegebelastung tritt beim Stoß der Kugel auf den Balken und auf das Doppelpendel auf. Abhängig von der Diskretisierung können jedoch Null-Energie-Moden, sogenannte hourglass Moden, auftreten. Dabei treten nicht feststellbare Deformationen auf, die keinen Energiebeitrag zum System liefern. Hourglassing kann durch eine feine Diskretisierung verhindert werden. Außerdem gibt es in ABAQUS verschiedene Stabilisierungstechniken, die hourglassing verhindern, wobei in dieser Arbeit die Voreinstellungen verwendet werden, siehe [Dassault Systèmes14b].

4.2.1 Wahl der Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung der Modelle hat einen großen Einfluss auf die Genauigkeit der Ergebnisse und auf die Rechenzeit der FE-Simulation. Da bei der FE-Kontaktbeschreibung in der FMKS-Simulation ebenfalls die Oberflächenvernetzung zur Kontaktsuche und Kontaktkraftberechnung verwendet wird, hat die Diskretisierung einen direkten Einfluss auf die Genauigkeit der Kontaktmodellierung in der reduzierten FMKS-Simulation. Für eine präzise Erfassung der lokalen Verformung in der Kontaktzone und der resultierenden Spannungen muss die Kontaktzone sehr fein aufgelöst werden. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Stößen wird nach [Seifried05] von einem maximalen Kontaktradius von 1 mm ausgegangen, welcher von der Geometrie und der Stoßgeschwindigkeit abhängt. In [Seifried05] wird die Elementlänge bezogen auf den Kontaktradius angegeben. Für die Kontaktzone des Stabs werden dabei angelehnt an [Seifried05] bis zu 25 Elemente verwendet, bei der Kugel bis zu 12 Elemente. Dies entspricht bei einem Kontaktradius von 1 mm einer Elementlänge von etwa 0.05 mm beim Stab und etwa 0.1 mm bei der Kugel. Da die meisten Verformungen im Aluminiumkörper

auftreten, ist hier eine feinere Vernetzung der Kontaktzone erforderlich.

Zusätzlich zur Kontaktzone ist eine ausreichend feine Diskretisierung des übrigen Teils der Aluminiumkörper notwendig, um die Wellenausbreitung präzise zu erfassen. Diese hängt von der höchsten Frequenz $f_{\max}$ von Interesse und der Wellengeschwindigkeit c ab. Nach [SeifriedSchiehlenEberhard10] treten bei Stößen zwischen den hier untersuchten, geometrisch einfachen, Körpern in der FE-Simulation Frequenzen bis maximal $f_{\max} = 50$ kHz auf. Die minimale Wellenlänge wird damit berechnet über

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}}, \quad (4.1)$$

wobei die Wellengeschwindigkeit c aus dem Elastizitätsmodul und der Dichte ρ ermittelt wird als

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.2)$$

Für den Stab ergibt sich damit eine Wellengeschwindigkeit von $c = 5110$ m/s und daraus eine minimale Wellenlänge von $\lambda_{\min} = 102$ mm. Um Welleneffekte aus Stoßbelastungen genau abbilden zu können, ist eine Diskretisierung mit mindestens zehn Elementen pro Wellenlänge notwendig, siehe [Dassault Systèmes14b]. Daraus ergibt sich eine maximale Elementlänge $\ell_{\max} = 10$ mm im restlichen Teil der Aluminiumkörper. Aufgrund der kompakten Abmessungen treten in der Stahlkugel keine signifikanten elastodynamischen Effekte auf, weshalb die Elementlänge außerhalb der Kontaktzone keinen Einschränkungen unterliegt.

Mit diesen Vorüberlegungen werden die einzelnen FE-Körper vernetzt. Tabelle 4.3 zeigt die Elementlänge in der Kontaktzone sowie die maximale Elementlänge im restlichen Körper zur Erfassung der Wellenausbreitung. Die Anzahl der

Tabelle 4.3: Elementlängen in den FE-Modellen

System	Elementlänge Kontaktzone [mm]	maximale Elementlänge Rest [mm]
Kugel	0.063	1.12
Stab	0.05	10
Kugel	0.077	1.12
Stab (Innenradius)	0.06	10
Kugel	0.06	1.12
Balken	0.05	10
Kugel	0.05	1.18
Pendelkörper oben	-	2
Pendelkörper unten	0.04	2

Elemente und Knoten der FE-Körper resultierend aus dieser Vernetzung sind Tabelle 4.4 zu entnehmen. Die Elementlängen zur Diskretisierung des Doppelpendels sind ebenfalls in Tabelle 4.3 dargestellt. Das obere Pendel ist nur grob vernetzt, da hier nur eine globale Deformation abhängig von dem gestoßenen unteren Pendel auftritt. Das untere Pendel ist dagegen fein vernetzt, um den Stoßvorgang präzise zu erfassen. Die entsprechende Element- und Knotenanzahl sind in Tabelle 4.4 dargestellt. Die Diskretisierung der FE-Körper wirkt sich auf das Konvergenzverhalten des quasi-statischen Kontaktsubmodells in der FMKS-Simulation aus, auf welches in Abschnitt 4.4.2 ausführlich eingegangen wird.

4.2.2 Penalty-Faktoren in der FE-Kontaktsimulation

In Abschnitt 3.3 wird die Referenzlösung, ermittelt mit dem Lagrange-Verfahren mit den Ergebnissen der FMKS-Simulation in Kombination mit dem Penalty-Verfahren verglichen. Als nächstes wird exemplarisch am Stoß der Kugel auf den ebenen Stab gezeigt, dass die FE-Lösung ermittelt mit dem Penalty-Verfahren für ausreichend hohe Penalty-Faktoren gegen die Lösung des Lagrange-Verfahrens konvergiert. Abbildung 4.2 zeigt einen Ausschnitt der Kontaktkraftverläufe aus ABAQUS, ermittelt mit dem *kinematic contact* und dem *penalty contact*. Die Stoßgeschwindigkeit beträgt dabei $v = 0.3 \text{ m/s}$. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit steigenden Penalty-Faktoren die Kontaktkraft gegen den Verlauf des Lagrange-Verfahrens konvergiert. Eine Erhöhung des Penalty-Faktors von $c_P = 1e^{17} \text{ N/m}$ auf $c_P = 1e^{18} \text{ N/m}$ verändert das Ergebnis nicht mehr signifikant. Durch die Erhöhung des Penalty-Faktors wird das stabile Zeitinkrement verringert, was bei $c_P = 1e^{19} \text{ N/m}$ zu numerischen Schwierigkeiten, erkennbar an den Schwingungen im Kontaktkraftverlauf, bis zum Simulationsabbruch führen kann, siehe [Dassault Systèmes14b]. Aus diesem Grund kann das Ergebnis mit $c_P = 1e^{18} \text{ N/m}$ als konvergierte Lösung betrachtet werden.

Tabelle 4.4: Element- und Knotenanzahl der FE-Modelle

System	Elemente	Knoten	Freiheitsgrade n_{FE}
Kugel	19 260	21 362	64 086
Stab	108 396	114 328	342 984
Kugel	17 472	19 512	58 536
Stab (Innenradius)	89 664	93 732	281 196
Kugel	16 192	18 100	54 300
Balken	71 104	78 183	234 549
Kugel	24 320	26 772	80 316
Pendelkörper oben	6400	8181	24 543
Pendelkörper unten	78 516	89 050	267 150

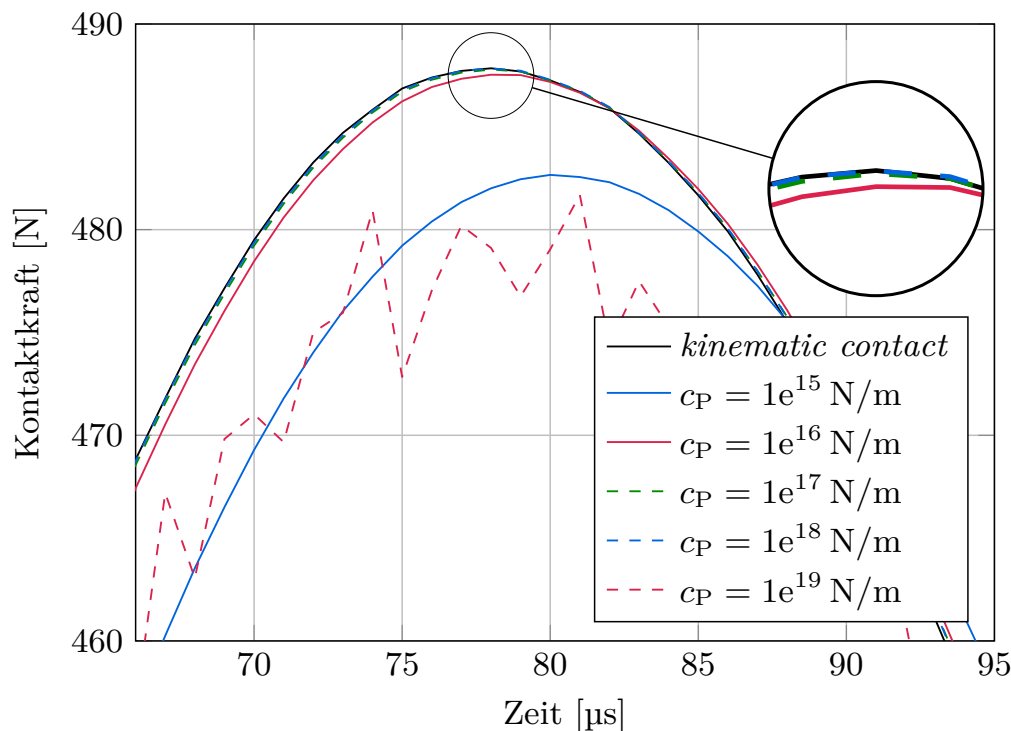


Abbildung 4.2: Konvergenzuntersuchung des Penalty-Faktors der FE-Kontaktsimulation des Stoßsystems Kugel-Stab

Die Rechenzeit beträgt beim *kinematic contact* etwa 12 h. Beim Penalty-Verfahren mit $c_P = 1e^{15} \text{ N/m}$ beträgt sie ebenfalls etwa 12 h und bei $c_P = 1e^{18} \text{ N/m}$ etwa 40 h. Mit $c_P = 1e^{18} \text{ N/m}$ ist das Ergebnis gegen das Lagrange-Verfahren konvergiert, jedoch ist die Rechendauer beim Penalty-Verfahren mit 40 h mehr als drei mal so hoch wie beim Lagrange-Verfahren. Aufgrund der erheblich kürzeren Rechendauer bei nahezu identischen Ergebnissen werden im weiteren Verlauf die FE-Referenzlösungen mit dem Lagrange-Verfahren bestimmt, womit die Bestimmung eines geeigneten Penalty-Faktors entfällt.

4.3 Wahl der Ansatzfunktionen in reduzierten Modellen

Bei modal reduzierten Modellen beeinflusst die Auswahl der Eigenmoden, welche in der Projektionsmatrix berücksichtigt werden, die Qualität der Ergebnisse entscheidend. Beim CB-Verfahren hat die passende Wahl der statischen Ansatzfunktionen einen zusätzlichen Einfluss auf die Ergebnisse. Im folgenden Abschnitt wird daher die Bestimmung der entsprechenden Ansatzfunktionen exemplarisch für den Stoß der Kugel auf den ebenen Stab erläutert. Dieses Vorgehen ist auf alle Stoßuntersuchungen dieser Arbeit übertragbar.

4.3.1 Anzahl der Eigenmoden

Nach [Goldsmith60, Seifried05] sind Voruntersuchungen erforderlich, um festzustellen, welche hochfrequenten Eigenmoden bei der Simulation der globalen Deformation, zum Beispiel bei der Wellenausbreitung, vernachlässigt werden dürfen. Die Wellenausbreitung wird aus der Überlagerung der Schwingungsformen, die im reduzierten Modell enthalten sind, erfasst. Beim Stoß der Kugel auf den Stab und der Beschränkung auf rein elastisches Materialverhalten wird die kinetische Energie der Starrkörperbewegung in Dehnungsenergie umgewandelt. Diese bewegt sich in Form von Wellen von der Kontaktzone weg in Stablängsrichtung und wird am freien Ende des Stabs reflektiert, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10]. Anhand dieser Wellenausbreitung wird die erforderliche Anzahl Eigenmoden, die in dieser Arbeit ebenso der Anzahl der inneren Moden beim CB-Verfahren nach Abschnitt 2.6.2 entspricht, ermittelt.

Die FE-Modelle sind über ihre Elementgröße bis zu einer maximalen Frequenz von etwa 50 kHz ausgelegt. Dennoch sind höhere Eigenfrequenzen in den Modellen enthalten, die zwar angeregt werden, jedoch für die präzise Erfassung der Wellenausbreitung keine Rolle spielen, siehe [Seifried05]. Durch die Erhöhung der Anzahl Eigenmoden zur Beschreibung des modalen Modells wird ermittelt, ab welchem Frequenzinhalt alle elastodynamischen Effekte im reduzierten System präzise erfasst werden können. Dazu trifft die Kugel mit einer Stoßgeschwindigkeit von $v = 0.3 \text{ m/s}$ auf den Stab. Die Kontaktkraft der modalen Modelle muss dabei abhängig von der Anzahl Eigenmoden mit dem Penalty-Faktor an die FE-Lösung angepasst werden, siehe Abschnitt 3.3. Besteht die Reduktionsbasis nur aus wenigen Eigenmoden, so kann die lokale Verformung aufgrund des globalen Charakters dieser Ansatzfunktionen nicht erfasst werden. Durch die fehlende lokale Verformung ist die Kontaktzone zu steif. Diese hohe Steifigkeit muss mit relativ kleinen Penalty-Faktoren kompensiert werden. Mit zunehmender Anzahl Eigenmoden muss der Penalty-Faktor aufgrund der zunehmenden Elastizität der Körper erhöht werden. Die Penalty-Faktoren müssen für gute Ergebnisse heuristisch bestimmt werden und haben nicht mehr die Funktion eines Bestrafungsterms.

Zur Beurteilung der Ergebnisse wird die Stabgeschwindigkeit in Längsrichtung am Stabende und die Stoßzahl nach der Newtonschen Stoßhypothese verwendet. Diese wird aus den Geschwindigkeiten der Körper vor und nach dem Stoß berechnet über

$$e_N = -\frac{v_{\text{Kugel},n} - v_{\text{Stab},n}}{v_{\text{Kugel},v} - v_{\text{Stab},v}}, \quad (4.3)$$

und fasst die verschiedenen Ursachen des kinetischen Energieverlusts während des Stoßes, wie zum Beispiel die Energiedissipation durch die elastische und plastische Verformung, zusammen, siehe [Seifried05].

Zur Bestimmung des Frequenzinhalts wird die Anzahl Eigenmoden des Stabs ausgehend von 25 Eigenmoden erhöht. Die Anzahl Eigenmoden bei der Kugel bleibt dabei konstant. Der Penalty-Faktor wird dabei jeweils so angepasst, dass die maximale Kontaktkraft des modalen Modells mit der FE-Lösung übereinstimmt. In Abbildung 4.3 sind deutliche Schwingungen für niedrige Geschwindigkeiten mit nur 25 und 50 Eigenmoden erkennbar, während ab 50 Moden die Maximalwerte gut übereinstimmen. Je mehr Eigenmoden verwendet werden, desto glatter wird der Geschwindigkeitsverlauf und nähert sich der Referenzlösung an. Durch eine Erhöhung auf 100 Moden lassen sich die Abweichung zur FE-Lösung erheblich verringern. Mit 150 und 200 Moden hingegen verbessern sich die Lösungen nicht mehr signifikant. In Tabelle 4.5 sind die Stoßzahlen abhängig von den Moden aufgelistet. Mit mehr Eigenmoden zur Beschreibung des reduzierten Körpers nimmt die Abweichung in den Stoßzahlen ab. Ab 100 Moden ist auch hier keine signifikante Verbesserung mehr erkennbar. Somit kann zusammengefasst werden, dass zur präzisen Erfassung der globalen Deformation mindestens 100 Moden bzw. mindestens Eigenfrequenzen bis 34 kHz berücksichtigt werden müssen. Bei dieser hier aufgezeigten Untersuchung haben die Eigenmoden in Längsrichtung den größten Einfluss auf die Ergebnisse. Die Biegeeigenmoden werden in diesem Fall nicht angeregt. Da zur Modellreduktion jedoch die dreidimensionalen Modelle der freien Körper verwendet werden, werden diese Biegemoden ebenfalls im reduzierten Körper berücksichtigt. Aus diesem Grund sind relativ viele Eigenmoden für hohe Frequenzen notwendig. Wird in diesem Fall die Biegeschwingung des Stabs durch Randbedingungen verhindert, so reichen die ersten 15 Eigenmoden aus, um alle relevanten Effekte bis 34 kHz zu erfassen.

Für präzise Ergebnisse muss das reduzierte Modell mindestens alle Eigenmoden enthalten, die im Frequenzbereich von Interesse dynamisch angeregt werden können. In [HeirmanTamarozziDesmet11] wird vorgeschlagen, Eigenmoden bis zur zweifachen Anregungsfrequenz zu verwenden, weshalb in diesem Fall die weiteren Simulationen mit 200 Moden bzw. Eigenfrequenzen bis 72 kHz durchgeführt werden. Aufgrund der weiterhin sehr geringen Anzahl reduzierter elastischer Koordinaten erhöht sich die Rechenzeit zwischen 100 und 200 Moden nicht signifikant. Damit können können alle wesentlichen Effekte im Frequenzbereich von

Tabelle 4.5: Modenzahl und Eigenfrequenzen des Stabs und deren Einfluss auf die Stoßzahl

Moden	max. Eigenfrequenz [kHz]	Stoßzahl e_N	absolute Abweichung
25	5.1	0.6725	-
50	13.9	0.6524	0.0201
100	33.6	0.6499	0.0025
150	54.3	0.6507	0.0008
200	72.2	0.6502	0.0005

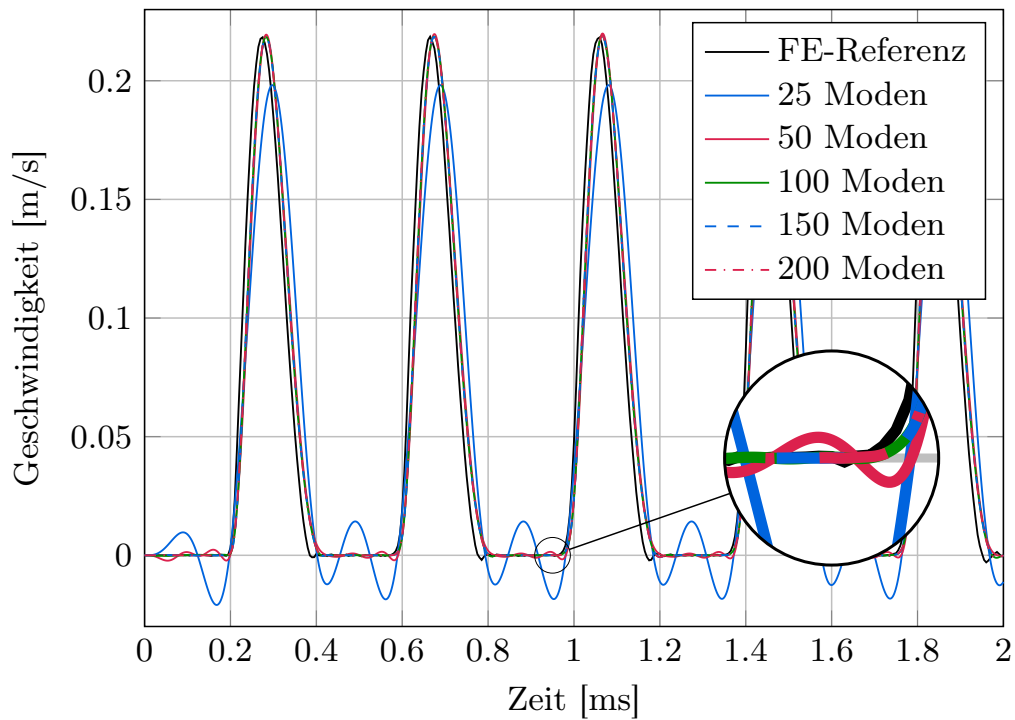


Abbildung 4.3: Einfluss der Modenzahl auf die Geschwindigkeit am Stabende bei rein modal reduzierten Modellen

Interesse effizient abgebildet werden. Die Anzahl Eigenmoden, die auf diese Weise bestimmt wird, legt damit die Trennfrequenz Ω^{hf} aus Abschnitt 3.5.1 bzw. Abschnitt 3.6.1 fest. Aufgrund der kompakten Abmessungen treten in der Stahlkugel keine signifikanten elastodynamischen Effekte auf und sie verhält sich fast wie ein Starrkörper. Daher macht es keinen Unterschied ob 10 oder 25 Eigenmoden berücksichtigt werden. In dieser Arbeit werden für die Kugel aufgrund des vernachlässigbaren Unterschieds in der Rechenzeit daher immer 25 Eigenmoden mit bis zu 134 kHz verwendet.

4.3.2 Statische Ansatzfunktionen

Wie in Abschnitt 3.3 erwähnt, sind für eine präzise Analyse der Kontaktvorgänge neben der richtigen Anzahl Eigenmoden statische Ansatzfunktionen in der Kontaktzone erforderlich. Beim CB-Verfahren werden diese an den externen Knotenfreiheitsgraden über Einheitsverschiebungen berechnet, siehe Abschnitt 2.6.2. Dabei werden zunächst alle Knotenfreiheitsgrade innerhalb des Kontaktradius herangezogen. Um die Rechenzeit zu reduzieren kann nach der Bestimmung eines geeigneten Penalty-Faktors in der reduzierten FMKS-Simulation die Anzahl der externen Knotenfreiheitsgrade reduziert werden auf die Knoten, welche während des Kontaktvorgangs tatsächlich einen Einfluss auf die Lösung haben. Beim Stoß der Kugel auf den Stab besteht die Kontaktzone der Kugel aus 261 und des Stabs aus 297 Knoten. Mit drei Freiheitsgraden pro Knoten werden damit

für 783 respektive 891 Knotenfreiheitsgrade statische Ansatzfunktionen berechnet. Hier wird ein Nachteil des CB-Verfahrens bei Stoßuntersuchungen deutlich: Durch die feine Diskretisierung der Kontaktzone werden viele statische Ansatzfunktionen benötigt, weshalb die Dimension des reduzierten Systems relativ groß ist. Abbildung 4.4 stellt die erste Ansatzfunktion des entkoppelten Systems dar. Diese ist eine Überlagerung aller Einheitsverschiebungen in Stoßrichtung.

Die Stoßuntersuchungen mit den Körpern aus Tabelle 4.1 beschränken sich in dieser Arbeit auf den reibungsfreien, zentralen geraden Stoß. Im Weiteren wird gezeigt, dass in diesem Fall ohne Genauigkeitsverlust zur Berechnung der statischen Ansatzfunktionen lediglich die Knotenfreiheitsgrade in Stoßrichtung berücksichtigt werden können. Dazu wird das Stoßsystem bestehend aus Kugel und Stab mit einer Stoßgeschwindigkeit von $v = 0.3 \text{ m/s}$ betrachtet. Beim Stab werden nach Abschnitt 4.3.1 200 innere Moden berücksichtigt und an 297 Kontaktknoten für jeweils drei Knotenfreiheitsgrade statische Ansatzfunktionen berechnet, woraus 1085 reduzierte elastische Freiheitsgrade resultieren. Die elastische Verformung der Kugel wird über 25 innere Moden und den statischen Ansatzfunktionen an 261 Kontaktknoten beschrieben. Daraus ergeben sich 802 reduzierte elastische Freiheitsgrade. Dieses System wird im Weiteren als CB 1085-802 bezeichnet. Werden dagegen nur die statischen Ansatzfunktionen der Knotenfreiheitsgrade in Stoßrichtung berücksichtigt, reduzieren sich die Systemdimensionen auf 491 und 280, im weiteren Verlauf als CB 491-280 bezeichnet. Abbildung 4.5 stellt die relative Abweichung der Deformation beider CB-Modelle von der FE-Lösung dar. Es ist nur eine geringfügige Verschlechterung der Ergebnisse von CB 1085-802 zu CB 491-280 erkennbar. Diese Ergebnisse werden über das quasi-statische Kontaktsubmodell aus Abschnitt 3.7 ermittelt. Da die Dimension der Projektionsmatrix verringert wird, kann die Rechenzeit jedoch signifikant von etwa 212 min auf etwa 35 min reduziert werden. In Abbildung 4.6 ist die Flächenpressung in der Kontaktzone der FE-Lösung und der FMKS-Simulati-

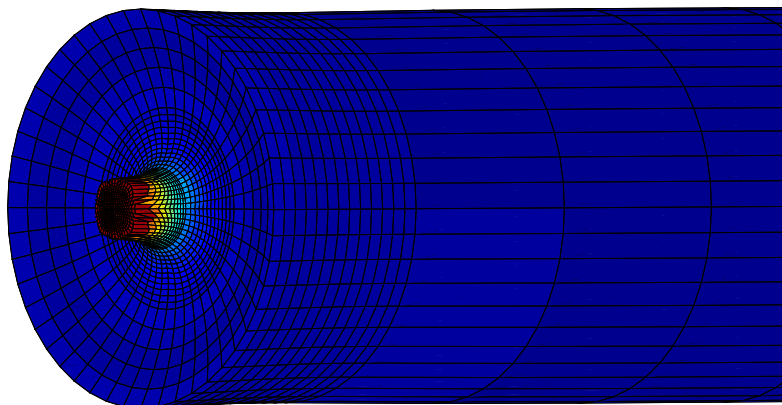


Abbildung 4.4: Erste skalierte statische Ansatzfunktion des entkoppelten reduzierten Stabs mit Innenradius

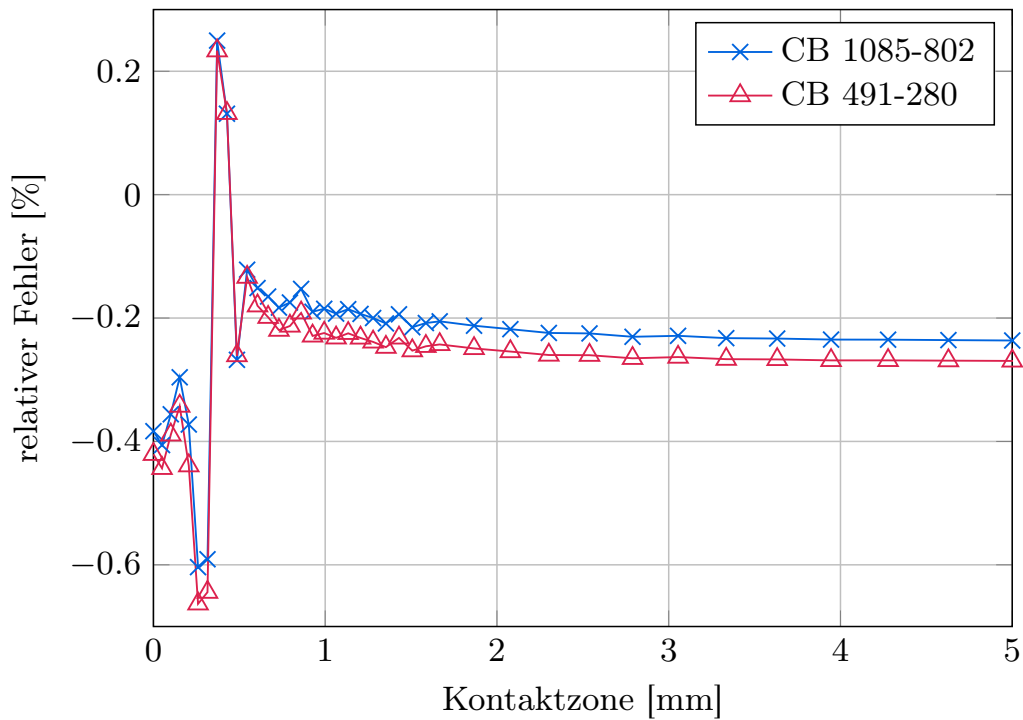


Abbildung 4.5: Relative Abweichung der Deformation der Kontaktzone zwischen FMKS- und FE-Lösung

on dargestellt. Auch hier ist keine signifikante Verschlechterung des Ergebnisses erkennbar, wenn lediglich statische Ansatzfunktionen in Stoßrichtung berücksichtigt werden. Aufgrund der erheblichen Reduktion der Rechenzeit bei nahezu gleicher Genauigkeit werden daher in dieser Arbeit beim geraden zentralen Stoß nur die statischen Ansatzfunktionen der Knotenfreiheitsgrade in Stoßrichtung verwendet.

4.4 Konvergenzverhalten der FMKS-Simulation

Die Kontaktmodellierung in der FMKS-Simulation erfolgt über das Penalty-Verfahren. Wie in Abschnitt 3.3 bereits aufgeführt, ist bei Kontaktsimulationen mit modal reduzierten Modellen keine Konvergenz des Penalty-Faktors zu beobachten. In diesem Abschnitt wird deshalb zunächst die Konvergenz des Penalty-Faktors im Zusammenhang mit statischen Ansatzfunktionen untersucht. Anschließend wird der Einfluss des Penalty-Faktors und der in Abschnitt 3.7.2 und Abbildung 3.13 eingeführten Parameter ε_{qs} und k_{max} auf das Konvergenzverhalten des quasi-statischen Kontaktsubmodells diskutiert. Die numerisch steifen Differentialgleichungen in der FMKS-Simulation werden in dieser Arbeit standardmäßig mit dem MATLAB-Löser ode15s gelöst, siehe Abschnitt 3.3. Die verwendeten Kontaktsubmodelle können für numerisch weniger steife Systeme ebenso in Kombination mit den MATLAB-Lösern für gewöhnliche Differentialgleichungen, siehe [Mathworks16], gelöst werden.

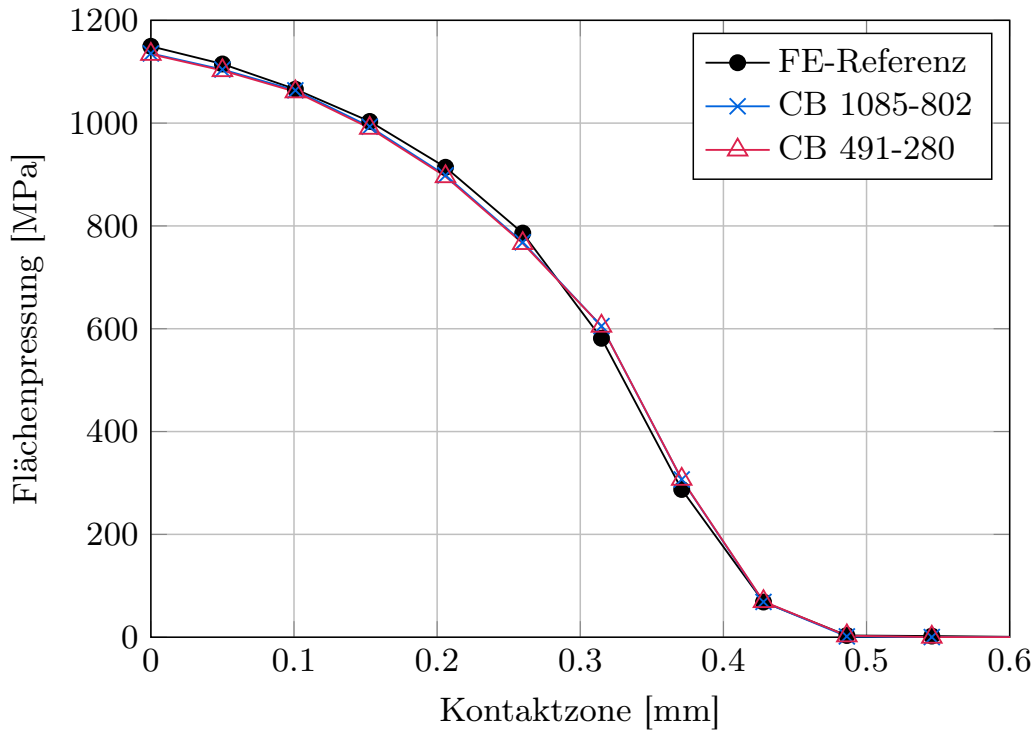


Abbildung 4.6: Vergleich der Flächenpressung in der Kontaktzone des Stabs

4.4.1 Konvergenzverhalten des Penalty-Faktors in der FMKS-Simulation

Zunächst wird eine Konvergenzanalyse des Penalty-Faktors mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell aus Abschnitt 3.7 durchgeführt. Hierunter wird die Annäherung der FMKS-Ergebnisse an die Referenzlösung verstanden. Diese wird exemplarisch am Stoß der Kugel auf den ebenen Stab mit $v = 0.3 \text{ m/s}$ untersucht. Dabei wird das System CB 491-280 aus Abschnitt 4.3.2 verwendet. Für die Ergebnisse in Tabelle 4.6 wird im Kontaktsubmodell die Genauigkeitsschranke ε_{qs} während der Nullstellensuche als $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ festgelegt, wobei $\varepsilon = 2.2204e^{-16}$ der Maschinengenauigkeit entspricht. Die maximale Anzahl Iterationen wird als $k_{\text{max}} = 20$ definiert. Mit dem Grenzwert ε_{qs} wird die Genauigkeit der Nullstellensuche, also des lokalen Deformationsfeldes, im quasi-statischen Kontaktsubmodell beeinflusst. Diese einstellbaren Parameter werden hier als gegeben angenommen. Deren Wahl und deren Einfluss auf das Konvergenzverhalten wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Tabelle 4.6 und Abbildung 4.7 stellen die Ergebnisse der Konvergenzuntersuchung dar. Zur Beurteilung des Konvergenzverhalten wird die relative Abweichung

$$\Delta f_c = \left(\frac{\max(f_{c,\text{FMKS}})}{\max(f_{c,\text{FE}})} - 1 \right) \cdot 100 \% \quad (4.4)$$

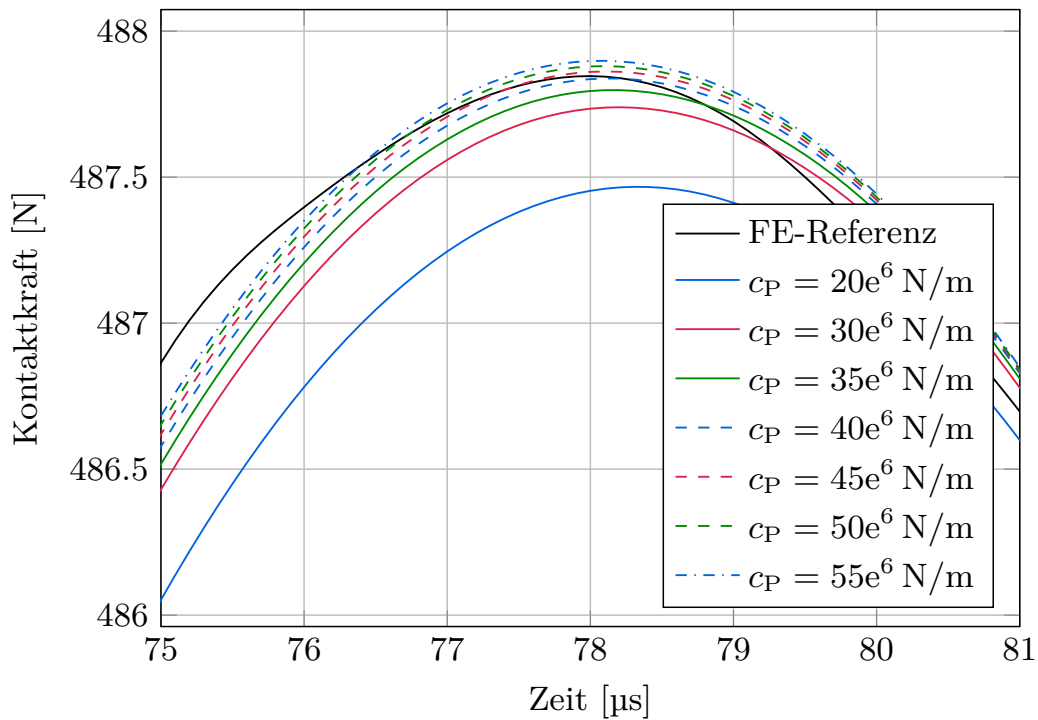


Abbildung 4.7: Ausschnitt des Kontaktkraftverlaufs beim Stoß der Kugel auf den ebenen Stab mit unterschiedlichen Penalty-Faktoren beim quasi-statischen Kontaktsubmodell

der maximalen Kontaktkraft zwischen den FMKS- und den FE-Ergebnissen ebenso wie die Rechenzeit herangezogen. In Abbildung 4.7 ist zu erkennen, dass sich die Kontaktkraft der FMKS-Simulation mit steigenden Penalty-Faktoren der FE-Lösung annähert. Gleichzeitig steigt die Rechenzeit mit höheren Penalty-Faktoren an, wie Tabelle 4.6 zu entnehmen ist. Bei $c_P = 55e^6 \text{ N/m}$ bricht die Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell ab, da sie nicht mehr konvergiert. Damit ist der maximal mögliche Penalty-Faktor für dieses System mit den gewählten Parametern ε_{qs} und $k_{\max}$ $c_P = 50e^6 \text{ N/m}$. Bereits mit $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ ist die maximale Kontaktkraft nur noch 0.078 % kleiner als die FE-Lösung. Diese Abweichung kann zwar weiter verringert werden, jedoch steigt die Rechenzeit dabei weiter an. Mit statischen Ansatzfunktionen in Kombination mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell ist nach Abbildung 4.7 und Tabelle 4.6 somit ein

Tabelle 4.6: Konvergenzuntersuchung des Penalty-Faktors beim Stoß der Kugel auf den Stab in der FMKS-Simulation beim quasi-statischen Kontaktsubmodell

c_P [N/m]	$20e^6$	$30e^6$	$35e^6$	$40e^6$	$45e^6$	$50e^6$	$55e^6$
CPU [min]	18.27	21.75	25.29	34.41	39.29	55.38	-
Δf_c [%]	-0.078	-0.022	-0.009	-0.002	0.003	0.007	0.011

Konvergenzverhalten des Penalty-Faktors erkennbar. Jedoch bietet es sich aufgrund der hohen Rechenzeit an, nicht die Lösung mit dem kleinsten Fehler zu verwenden, sondern diejenige, die den besten Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit darstellt. Diese Anforderungen erfüllt in diesem Fall die Lösung mit $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$. Zu beachten ist, dass zu klein gewählte Penalty-Faktoren ebenso zu Konvergenzproblemen im quasi-statischen Kontaktsubmodell führen können, da die Durchdringung der Kontaktflächen so groß sein kann, dass die Nullstellensuche keine Lösung findet.

Die Kontaktkraft konvergiert beim gedämpften Kontaktsubmodell, siehe Abschnitt 3.5, für ausreichend hohe Penalty-Faktoren ebenfalls gegen die FE-Lösung, wie in Abbildung 4.8 dargestellt ist. Beim quasi-statischen Kontaktsubmodell werden nur die niederfrequenten elastischen Koordinaten in der dynamischen Simulation berücksichtigt. Beim gedämpften Kontaktsubmodell werden alle elastischen Koordinaten zur dynamischen Simulation verwendet, weshalb sich aufgrund der großen Systemdimensionen die Rechenzeiten erhöhen. Zusätzlich ist die numerische Steifigkeit höher als beim quasi-statischen Kontaktsubmodell, bei welchem die hochfrequente Dynamik vernachlässigt wird. Die Dämpfungsparameter im Übergangsbereich werden für das Stoßsystem Kugel-Stab exemplarisch als $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ gewählt, während die übrigen nach Gl. (3.47) für $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001 \text{ ms}$ berechnet werden. Damit beträgt die Rechenzeit etwa 225 min bei $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$. Die Abweichung der maximalen Kontaktkraft nach Gl. (4.4) beträgt dabei $\Delta f_c = -0.2531 \%$. Mit $c_P = 50e^6 \text{ N/m}$ wird die Abweichung auf $\Delta f_c = -0.1845 \%$ reduziert, jedoch steigt die Rechenzeit auf etwa 361 min an. Eine weitere Erhöhung auf $c_P = 100e^6 \text{ N/m}$ bringt in Kombination mit den gewählten Dämpfungsparametern keine Verbesserung der Kontaktkraft sondern nur noch eine Erhöhung der Rechenzeit auf etwa 487 min. Aufgrund der hohen Kontaktsteifigkeit steigt in diesem Fall die numerische Steifigkeit an, weshalb aufgrund der daraus resultierenden kleinen Zeitschrittweiten numerische Schwingungen in der Lösung auftreten, wie Abbildung 4.8 zu entnehmen ist. Daher ist es auch im gedämpften Kontaktsubmodell sinnvoll, einen Penalty-Faktor zu wählen, der einen Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit darstellt. Diese Untersuchung des Konvergenzverhaltens muss bei allen Kontaktsimulationen in Abschnitt 5 durchgeführt werden. Zum Vergleich der Ergebnisse mit den Referenzergebnissen wird dabei stets der Penalty-Faktor gewählt, welcher den besten Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit darstellt.

4.4.2 Einflussparameter beim quasi-statischen Kontaktsubmodell

Das Konvergenzverhalten des quasi-statischen Kontaktsubmodells hängt wegen der verwendeten FE-Kontaktbeschreibung maßgeblich von der Diskretisierung der Körper in der Kontaktzone ab. Bei einer groben Vernetzung wird die lokale Verformung und die Kontaktkraft nicht präzise genug erfasst, weshalb im quasi-statischen Kontaktsubmodell die Nullstellensuche dann oftmals zu keiner

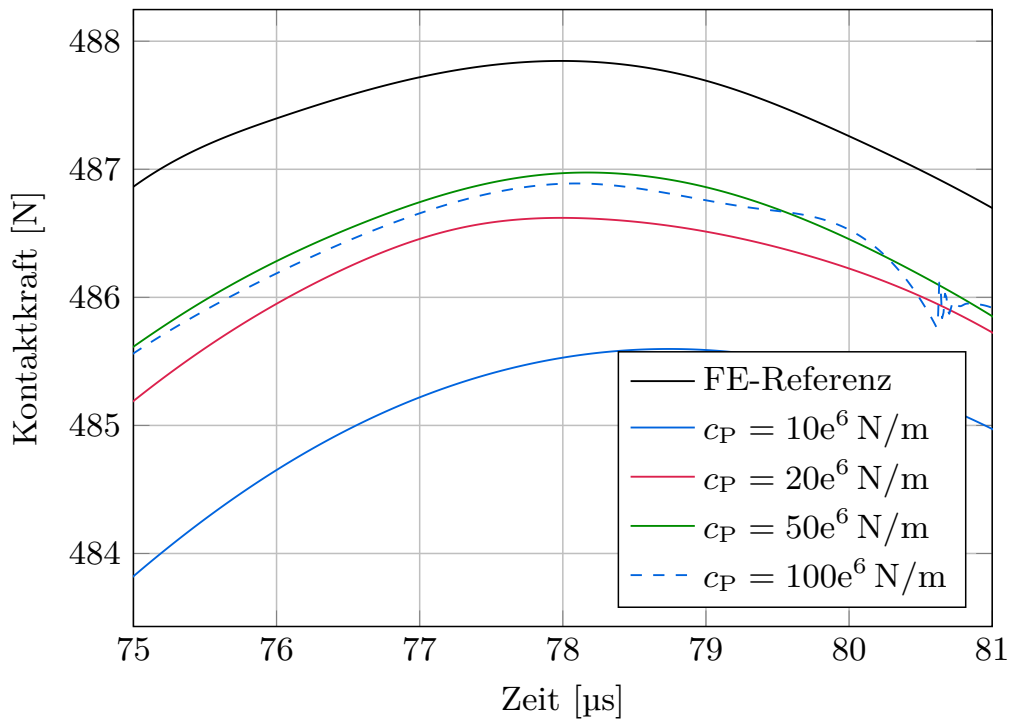


Abbildung 4.8: Ausschnitt des Kontaktkraftverlaufs beim Stoß der Kugel auf den ebenen Stab mit unterschiedlichen Penalty-Faktoren beim gedämpften Kontaktsubmodell

Lösung konvergiert. Beim quasi-statischen Kontaktsubmodell kann das Konvergenzverhalten zusätzlich verbessert werden, wenn der Two-Pass Algorithmus aus Abschnitt 3.2.3 verwendet wird da nicht feststellbare Eindringungen vermieden werden.

Bevor das Konvergenzverhalten des quasi-statischen Kontaktsubmodells abhängig von den Parametern c_P , ε_{qs} und k_{max} diskutiert wird, wird zunächst der Zusammenhang zwischen dem MATLAB-Löser ode15s und der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell erläutert. Das Kontaktsubmodell wird mit den aktuellen Zuständen $\mathbf{y}(t_n)$ aus dem ode15s aufgerufen, die abhängig von den gewählten Fehlertoleranzen berechnet werden, siehe Abschnitt 3.7. Dabei werden in $\mathbf{y}(t_n)$ die Koordinaten $\mathbf{r}_{IR}$, β_{IR} und $\bar{\mathbf{q}}_e^{lf}$ aller Körper zusammengefasst. Damit wird die lokale Verformung und die Kontaktkräfte, wie in Abbildung 3.13 schematisch dargestellt, berechnet. Für den aktuellen Zustand wird dementsprechend die lokale Deformation abhängig von den Kontaktkräften iterativ bestimmt. Der niederfrequente Anteil dieser Kontaktkräfte wird an den ode15s zurückgegeben, um die Zustände $\mathbf{y}(t_{n+1})$ im nächsten Zeitschritt zu berechnen. Weichen die berechneten Kontaktkräfte zu weit von der im ode15s erwarteten Lösung ab und wird daher die Konvergenz nicht nach vier Iterationen erreicht, so wird eine neue Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{ode}$ approximiert. Ist die Konvergenzrate weiterhin zu niedrig wird die Zeitschrittweite reduziert, siehe [ShampineReichelt97]. Dabei wird

die Zeitschrittweite so bestimmt, dass die Konvergenzrate abhängig von den Fehlertoleranzen im ode15s mit dem aktuellen Zustand $\mathbf{y}(t_n)$ erreicht werden kann. Im quasi-statischen Kontaktsubmodell werden die konvergierten hochfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_e^{\text{hf}}(t_n)$ des letzten Zeitschritts als Startwert für die Iteration im aktuellen Zeitschritt verwendet. Weicht aufgrund der angepassten Zeitschrittweite im ode15s der aktuelle Zustand $\mathbf{y}(t_n)$ weit vom letzten Zustand $\mathbf{y}(t_{n-1})$ ab, so passen die Startwerte $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}(t_{n-1}) = \bar{\mathbf{q}}_{e,0}^{\text{hf}}(t_n)$ aus $\mathbf{y}(t_{n-1})$ möglicherweise nicht zum aktuellen Zustand. Aufgrund dieser Abweichung und der damit verbundenen unphysikalischen Durchdringung der Kontaktflächen, kann der Fall eintreten, dass die Nullstellensuche im Kontaktsubmodell bis k_{max} nicht die gewünschte Genauigkeit erreicht. Liegt der Fall vor, dass zur Nullstellensuche die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ aus dem vorigen Funktionsaufruf verwendet wurde, so wird zunächst $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ zur Nullstellensuche neu approximiert, siehe Abbildung 3.13. Ist anschließend keine Konvergenz bis k_{max} erreicht, so werden die Kontaktkräfte nach der Iteration mit dem nicht konvergierten Deformationsfeld berechnet. Diese niederfrequenten Anteile weichen wiederum von der im ode15s erwarteten Lösung ab, weshalb keine Konvergenz im ode15s zu erwarten ist und die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ bzw. die Zeitschrittweite angepasst wird. Abhängig vom untersuchten System und den Parametern c_P , ε_{qs} und k_{max} können sich diese Konvergenzprobleme fortpflanzen bis der Fehler so groß ist, dass im quasi-statischen Kontaktsubmodell die Kontaktflächen zwischen zwei Iterationen so weit voneinander abweichen, dass die Simulation abgebrochen wird. Zur Steigerung der numerischen Effizienz wird im ode15s nach akzeptierten Zeitschritten geprüft, ob die Zeitschrittweite angepasst werden muss, siehe [ShampineReichelt97]. Dabei können beim quasi-statischen Kontaktsubmodell ebenfalls diese beschriebenen Konvergenzprobleme auftreten.

Abbildung 4.9 zeigt die Durchdringung der Kugel und des ebenen Stabs während des Kontaktvorgangs mit unterschiedlichen Penalty-Faktoren über die Funktionsaufrufe. Die gestrichelten Linien stellen jeweils die Durchdringung zu Beginn der Iteration im quasi-statischen Kontaktsubmodell dar, während die durchgezogenen Linien das konvergierte Ergebnis darstellen. Bei den ersten Funktionsaufrufen ist die Durchdringung unphysikalisch groß. Da sich beide Körper zu Beginn nicht in Kontakt befinden, wählt der MATLAB-Löser eine relativ große initiale Zeitschrittweite. Daher durchdringen sich die Körper zunächst unphysikalisch, bis die Zeitschrittweite im ode15s nach der Kontakterkennung angepasst wird und die bisher gemachten Zeitschritte verworfen werden. In Abbildung 4.9 ist die maximale Durchdringung zum Iterationsstart immer größer als die der konvergierten Lösung. Der Grund hierfür ist die Vorwärtsbewegung der Kugel in Stoßrichtung. Nach dem Erreichen der maximalen Durchdringung, ändert sich die Bewegungsrichtung der Kugel und die Durchdringung zum Iterationsstart ist kleiner, da sich die Körper voneinander entfernen. In dieser Expansionsphase kann es ebenfalls zu Konvergenzproblemen kommen, wie in Abbildung 4.9 in rot dargestellt ist. An den Spitzen der rot gestrichelten Linie, die oberhalb

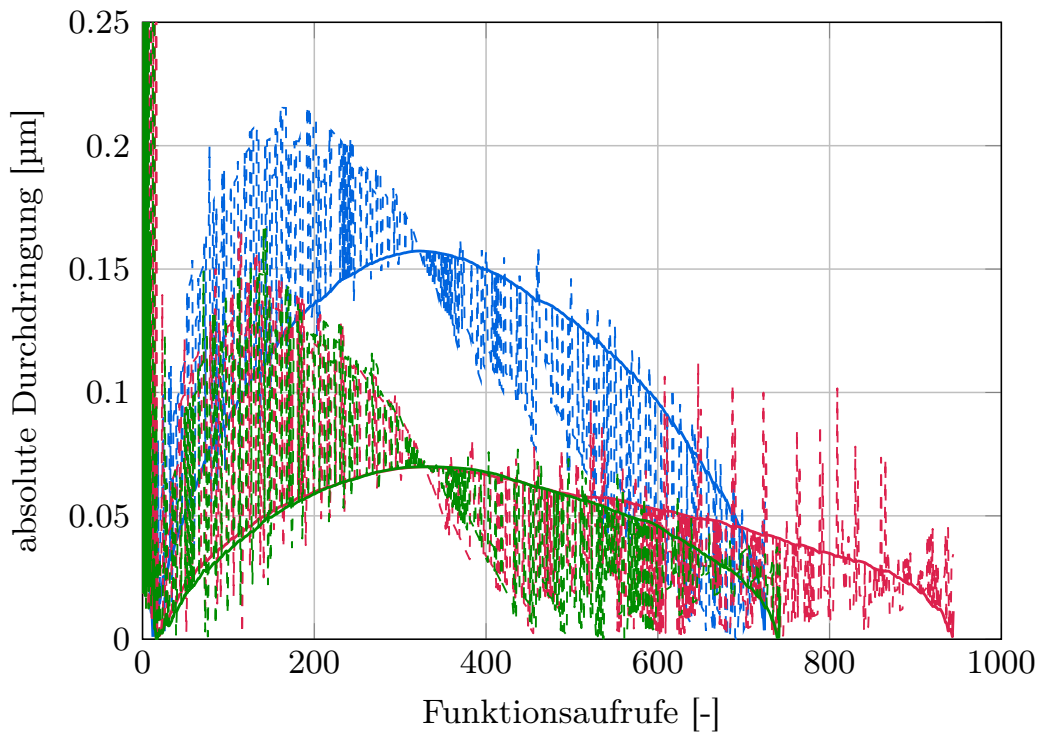


Abbildung 4.9: Durchdringung der Kontaktzonen während des Stoßvorgangs beim quasi-statischen Kontaktsubmodell für unterschiedliche Penalty-Faktoren (gestrichelt: vor Iteration, durchgezogen: nach Iteration; blau: $c_P = 20e^6$, $k_{\max} = 20$; rot: $c_P = 45e^6$, $k_{\max} = 20$; grün: $c_P = 45e^6$, $k_{\max} = 50$)

der konvergierten Durchdringung liegen, ist zu erkennen, dass in diesem Fall die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im ode15s und die Zeitschrittweite neu berechnet wird. Aus diesen neuen Zuständen und den weit abweichenden Startwerten $\bar{\mathbf{q}}_{e,0}^{\text{hf}}$ ergeben sich Anfangswerte für die Iteration, die bei der Expansionsphase oberhalb der konvergierten Durchdringung liegen.

Mit zunehmenden Penalty-Faktoren wird die Ungleichungsnebenbedingung besser eingehalten und damit wird die Durchdringung der Körper weiter verringert. Im hier untersuchten System bestehend aus Stab und Kugel beträgt die maximale Durchdringung nach Abbildung 4.9 bei $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ ungefähr $0.16 \mu\text{m}$, während sie bei $c_P = 45e^6 \text{ N/m}$ etwa $0.07 \mu\text{m}$ beträgt. Diese Durchdringung beeinflusst die Nullstellensuche im Kontaktsubmodell maßgeblich. Reichen bei niedrigen Penalty-Faktoren wie $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ wenige Iterationen aus, um die lokale Verformung abhängig von der Kontaktkraft zu ermitteln, sind bei höheren Penalty-Faktoren mehr Iterationsschritte notwendig, siehe Tabelle 4.7. Dies resultiert daraus, dass durch die geringere verbleibende Durchdringung das Ergebnis der Nullstellensuche präziser sein muss bis die Genauigkeitsschranke ε_{qs} unterschritten ist. Bei dem untersuchten System sind die Zeitschrittweiten des

ode15s bei der Zeitintegration bei unterschiedlichen Penalty-Faktoren relativ ähnlich. Bei $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ ist die minimale Zeitschrittweite $4.5066e^{-8} \text{ s}$ und bei $c_P = 45e^6 \text{ N/m}$ etwa $4.4894e^{-8} \text{ s}$. Daher ist der Unterschied zwischen den Zuständen $\mathbf{y}(t_{n-1})$ und $\mathbf{y}(t_n)$, die an das Kontaktsubmodell übergeben werden, bei beiden Penalty-Faktoren relativ ähnlich. Aus diesem Grund hängt die Konvergenzgeschwindigkeit des Kontaktsubmodells vom gewählten Startwert, also den konvergierten hochfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{\mathbf{q}}_{e,k}^{\text{hf}}(t_{n-1}) = \bar{\mathbf{q}}_{e,0}^{\text{hf}}(t_n)$ des vorigen Zeitschritts ab. Liegt aufgrund der geänderten Zeitschrittweite im ode15s eine größere Abweichung zwischen $\mathbf{y}(t_n)$ und $\mathbf{y}(t_{n-1})$ vor, so sind mit $\bar{\mathbf{q}}_{e,0}^{\text{hf}}(t_n)$ mehr Iterationsschritte bis zur konvergierten Lösung notwendig. Die Wahrscheinlichkeit nimmt zu, dass die eingangs beschriebenen Konvergenzprobleme auftreten. In Abbildung 4.9 ist in grün dargestellt, wie dieses Verhalten mit der Anpassung von $k_{\max}$ reduziert werden kann. Darauf wird in den nächsten Abschnitten eingegangen.

Einfluss der Genauigkeitsschranke ε_{qs}

Der Einfluss der Genauigkeitsschranke ε_{qs} der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell und der maximalen Anzahl Iterationen $k_{\max}$ wird nun exemplarisch an den Penalty-Faktoren $20e^6 \text{ N/m}$, $45e^6 \text{ N/m}$ und $55e^6 \text{ N/m}$ aus Tabelle 4.6 aufgezeigt. Wie in Tabelle 4.7 dargestellt, kann die Rechenzeit bei $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ verringert werden, wenn die Genauigkeitsschranke auf $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ erhöht wird. Dies resultiert aus der schnelleren Konvergenz der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell aufgrund der reduzierten Genauigkeit der approximierten Lösung. Bei $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ wird die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ zur Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell seltener neu approximiert und öfter über das Broyden-Update aktualisiert. Gleichzeitig wird die definierte maximale Anzahl Iterationen $k_{\max}$ nicht erreicht. Daraus ist ersichtlich, dass die Nullstellensuche aufgrund der geringeren geforderten Genauigkeit schneller kon-

Tabelle 4.7: Einfluss von ε_{qs} bei $k_{\max} = 20$ im quasi-statischen Kontaktsubmodell

c_P [N/m]	$20e^6$			$45e^6$		
ε_{qs}	ε	10ε	100ε	ε	10ε	100ε
CPU [min]	18.27	15.74	21.05	39.29	39.58	46.81
$\mathbf{J}_{\text{ode}}$	1	1	17	14	20	52
$\mathbf{J}_{\text{qs}}$	51	40	46	196	168	141
Update $\mathbf{J}_{\text{qs}}$	674	818	1038	748	1001	1231
$\sum$ Iterationen	6856	6593	6887	9099	9448	8855
$k_{\max}$ erreicht	3	0	0	77	53	28
max. Iterationen	20	19	19	20	20	20
Δf_c [%]	-0.0777	-0.0791	-0.0787	0.0032	0.0032	0.0024

vergiert, und in jedem Funktionsaufruf die konvergierten Kontaktkräfte an den ode15s übergeben werden.

Eine weitere Lockerung der Genauigkeitsschranke auf $\varepsilon_{qs} = 100\varepsilon$ erhöht die Rechenzeit bei $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$, siehe Tabelle 4.7. Mit $\varepsilon_{qs} = 100\varepsilon$ wird die approximierte Näherung des lokalen Deformationsfeldes im quasi-statischen Kontaktsubmodell ungenauer im Vergleich zu $\varepsilon_{qs} = \varepsilon$ oder $\varepsilon_{qs} = 10\varepsilon$. Mit der dabei berechneten Kontaktkraft können die vorgegeben Fehlertoleranzen im MATLAB-Löser ode15s nicht eingehalten werden, da sie von der im ode15s erwarteten Kontaktkraft zu weit abweicht. Aus diesem Grund ist die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens im ode15s zu niedrig und die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{ode}$ muss 17 mal neu approximiert werden, während bei $\varepsilon_{qs} = \varepsilon$ nur eine Approximation von $\mathbf{J}_{ode}$ zum Start der Zeitintegration erfolgt. Die Ergebnisse mit unterschiedlichen Genauigkeitsschranken ε_{qs} unterscheiden sich für $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ nicht signifikant, wie die letzte Zeile in Tabelle 4.7 darstellt.

Als nächstes wird der Einfluss von ε_{qs} bei höheren Penalty-Faktoren geprüft. Mit der Erhöhung auf $c_P = 45e^6 \text{ N/m}$ wird die verbleibende Durchdringung der Körper weiter reduziert. Sie ist für diesen Fall in Abbildung 4.9 in rot dargestellt. Aufgrund der kleineren verbleibenden Durchdringung im Vergleich zu $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ konvergiert die Nullstellensuche zur Berechnung der lokalen Verformung langsamer. Ist dabei die Anzahl Iterationen auf $k_{max} = 20$ beschränkt, wie in Tabelle 4.7 dargestellt, wird die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{qs}$ 196 mal neu approximiert, da die maximale Anzahl Iterationen k_{max} 77 mal erreicht wird. Daraus ist abzuleiten, dass für eine ausreichend genaue Approximation der lokalen Deformation mehr Iterationen notwendig sind. In diesen Fällen ist die Nullstellensuche nicht vollständig konvergiert und die Kontaktkraft weicht von der erwarteten Lösung ab. Das führt wiederum dazu, dass im ode15s aufgrund der langsamen Konvergenz die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{ode}$ 14 mal neu approximiert werden muss.

In diesem Fall kann mit der Lockerung der Genauigkeitsschranke auf $\varepsilon_{qs} = 10\varepsilon$ oder $\varepsilon_{qs} = 100\varepsilon$ die Konvergenz verbessert werden. Daher wird k_{max} mit $\varepsilon_{qs} = 10\varepsilon$ zwar weniger oft erreicht als bei $\varepsilon_{qs} = \varepsilon$, jedoch verschlechtert sich das Konvergenzverhalten des ode15s. Außerdem sind insgesamt mehr Iterationen erforderlich. Diese Verschlechterung resultiert aus der reduzierten Genauigkeit in der Approximation der lokalen Verformung durch die größere Genauigkeitsschranke. Mit $\varepsilon_{qs} = 100\varepsilon$ werden die Ergebnisse der Nullstellensuche so ungenau, dass $\mathbf{J}_{ode}$ 52 mal neu approximiert werden muss, was die Rechenzeit negativ beeinflusst, siehe Tabelle 4.7.

Einfluss der maximalen Iterationen k_{max}

Diese Beobachtung aus dem vorigen Abschnitt führt zum nächsten wichtigen Parameter für das Konvergenzverhalten des quasi-statischen Kontaktsubmodells:

4.4 Konvergenzverhalten der FMKS-Simulation

Die maximale Anzahl Iterationen $k_{\max}$. Tabelle 4.8 zeigt die Ergebnisse für $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ und $c_P = 45e^6 \text{ N/m}$ mit $k_{\max} = 50$. Bei $c_P = 20e^6 \text{ N/m}$ ist in Tabelle 4.8 für alle ε_{qs} höhere Rechenzeit im Vergleich zu Tabelle 4.7 erkennbar. Es wird $k_{\max} = 50$ unabhängig von ε_{qs} nicht erreicht. Jedoch verdoppelt sich bei $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ und $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ die Summe der Iterationen im Vergleich zu $k_{\max} = 20$, weshalb sich trotz weniger Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ die Rechenzeit erhöht. Bei $\varepsilon_{\text{qs}} = 100\varepsilon$ ist auch bei $k_{\max} = 50$ die schlechte Konvergenz des ode15s zu erkennen, die aus der Ungenauigkeit in der Näherung der lokalen Verformung im quasi-statischen Kontaktsubmodell resultiert.

In Tabelle 4.7 wird bei $c_P = 45e^6 \text{ N/m}$ und $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ deutlich, dass die Nullstellensuche mehr Iterationen als $k_{\max} = 20$ zur Konvergenz benötigt. Mit $k_{\max} = 50$ sind weniger Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ erforderlich, wie Tabelle 4.8 zu entnehmen ist. Dies resultiert aus der auskonvergierten lokalen Deformation aufgrund der größeren Anzahl möglicher Iterationen. Für $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ und $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ ist eine bessere Konvergenz des quasi-statischen Kontaktsubmodells erkennbar, da die Anzahl der Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ von 196 auf 38, bzw. von 168 auf 41 reduziert werden kann. Dies wirkt sich gleichzeitig positiv auf die Konvergenzrate des ode15s aus, da die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ seltener neu approximiert werden muss. Die Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell wird mit $k_{\max} = 50$ seltener mit einer nicht konvergierten Lösung beendet, für welche die niederfrequente Kontaktkraft zu weit von der im ode15s erwarteten Lösung abweicht. Daher wird die Konvergenz des ode15s nicht verschlechtert und es sind weniger Anpassungen der Zeitschrittweite notwendig. Die Rechenzeit kann aufgrund der vielen benötigten Iterationen jedoch nicht reduziert werden. Bei $\varepsilon_{\text{qs}} = 100\varepsilon$ kann das Konvergenzverhalten des Kontaktsubmodells zwar verbessert werden, jedoch verschlechtern die ungenauen Ergebnisse des lokalen Deformationsfeldes nach wie vor die Konvergenzrate des ode15s.

Tabelle 4.8: Einfluss von ε_{qs} bei $k_{\max} = 50$ im quasi-statischen Kontaktsubmodell

c_P [N/m]	$20e^6$			$45e^6$		
ε_{qs}	ε	10ε	100ε	ε	10ε	100ε
CPU [min]	41.89	31.99	23.21	47.86	44.68	48.19
$\mathbf{J}_{\text{ode}}$	1	3	31	2	7	55
$\mathbf{J}_{\text{qs}}$	12	17	36	38	41	73
Update $\mathbf{J}_{\text{qs}}$	728	996	1110	704	1004	1591
$\sum$ Iterationen	12 526	13 154	6974	14 322	13 974	12 407
$k_{\max}$ erreicht	0	0	0	2	2	1
max. Iterationen	48	49	40	50	50	50
Δf_c [%]	-0.0786	-0.0782	-0.0778	0.0029	0.0025	0.0027

Zum Schluss wird $c_P = 55e^6 \text{ N/m}$ betrachtet, da die Simulation mit $\varepsilon_{qs} = \varepsilon$ und $k_{\max} = 20$ in Tabelle 4.6 aufgrund numerischer Schwierigkeiten abbricht. Wie Tabelle 4.9 aufzeigt, kann mit Variation von ε_{qs} und $k_{\max}$ die Simulation schließlich durchgeführt werden. Dabei ist erkennbar, dass bei verhältnismäßig hohen Penalty-Faktoren $k_{\max}$ für eine gute Konvergenz des Kontaktsubmodells erhöht werden muss. Mit $k_{\max} = 20$ und $\varepsilon_{qs} = 10\varepsilon$ sind 281 und mit $\varepsilon_{qs} = 100\varepsilon$ sind 217 neue Approximationen von $\mathbf{J}_{qs}$ erforderlich, während mit $k_{\max} = 50$ die Anzahl in Kombination mit $\varepsilon_{qs} = \varepsilon$ und $\varepsilon_{qs} = 10\varepsilon$ auf 70 bzw. 60 verringert werden kann. Dann sind mit $k_{\max} = 50$ sowohl mit $\varepsilon_{qs} = \varepsilon$ als auch mit $\varepsilon_{qs} = 10\varepsilon$ numerisch effizientere Simulationen möglich als mit $k_{\max} = 20$.

Zusammenfassung

Durch die aufgezeigte Variation der Parameter ε_{qs} und $k_{\max}$ wird lediglich das Konvergenzverhalten und die numerische Effizienz beeinflusst. Die Ergebnisse sind bis auf vernachlässigbare Abweichungen durch unterschiedliche Zeitschrittweiten in der dynamischen Simulation nahezu identisch. Zusammengefasst werden kann die Wahl von ε_{qs} und $k_{\max}$ für das Stoßsystem Kugel-Stab folgendermaßen: Für relativ niedrige Penalty-Faktoren reichen $k_{\max} = 20$ Iterationen zur Nullstellensuche aus, wobei höhere Werte für $k_{\max}$ die numerische Effizienz verschlechtern. Dabei stellt $k_{\max} = 20$ einen guten Kompromiss aus neuen Approximationen der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{qs}$ und der Anzahl Iterationen dar. Bei $k_{\max} = 50$ wird $\mathbf{J}_{qs}$ zwar nicht so oft neu approximiert, jedoch werden insgesamt doppelt so viele Iterationen benötigt. Die Genauigkeitsschranke ε_{qs} kann als 10ε gewählt werden, um die Rechenzeit zu reduzieren. Für Konvergenzuntersuchungen mit hohen Penalty-Faktoren ist es sinnvoll $k_{\max}$ zu erhöhen, damit die Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell zur korrekten Lösung konvergiert und nicht vorher die maximale Anzahl Iterationen erreicht. Auch bei hohen Penalty-Faktoren kann die Genauigkeitsschranke als 10ε gesetzt werden. Eine Erhöhung

Tabelle 4.9: Einfluss von ε_{qs} bei $c_P = 55e^6 \text{ N/m}$ im quasi-statischen Kontaktsubmodell

$k_{\max}$	20			50		
ε_{qs}	ε	10ε	100ε	ε	10ε	100ε
CPU [min]	-	57.87	64.09	41.59	35.45	66.52
$\mathbf{J}_{ode}$	-	39	81	5	13	78
$\mathbf{J}_{qs}$	170	281	217	70	60	107
Update $\mathbf{J}_{qs}$	665	1097	1607	786	1079	1914
$\sum$ Iterationen	6514	12 064	12 357	14 409	14 120	14 951
$k_{\max}$ erreicht	55	109	52	20	7	2
max. Iterationen	20	20	20	50	50	50
Δf_c [%]	0.0107	0.0106	0.0097	0.0106	0.0106	0.0107

auf $\varepsilon_{\text{qs}} = 100\varepsilon$ ist generell aufgrund der reduzierten Genauigkeit in der Approximation der lokalen Deformation nicht sinnvoll. Zusammenfassend gilt, dass für eine effiziente Simulation jeweils ein Kompromiss zwischen der maximalen Anzahl Iterationen und der Neuapproximation von $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ notwendig ist.

Zur Bestimmung der passenden Parameter wird in dieser Arbeit basierend auf den aufgeführten Beobachtungen folgendermaßen vorgegangen. Zunächst wird mit $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 20$ der Penalty-Faktor erhöht, bis die Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell nicht mehr konvergiert. Dann wird die Anzahl k_{max} mit $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ oder $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ erhöht, bis der Kontaktkraftverlauf das Referenzergebnis präzise abbildet. Mit dem nach Abschnitt 4.4.1 als konvergiert definierten Ergebnis wird schließlich geprüft, ob mit der Variation von ε_{qs} und/oder k_{max} eine Verbesserung der numerischen Effizienz möglich ist. Untersuchungen mit den Modellen aus Abschnitt 4.1 haben gezeigt, dass bei Systemen mit relativ geringen Penalty-Faktoren und daher schnell konvergierender Nullstellensuche bei $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 20$ die optimale Rechenzeit erreicht werden kann. Verschlechtert sich die Konvergenz aufgrund hoher Penalty-Faktoren ist die Kombination $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 50$ numerisch effizienter. Für eine optimale numerische Effizienz ist die Bestimmung dieser Parameter für alle Kontaktsimulationen in Kapitel 5 durchzuführen.

NUMERISCHE STOSSANALYSEN

Statische Ansatzfunktionen zur Beschreibung der lokalen Verformung und der daraus resultierenden Spannungen sind neben Eigenmoden für präzise Stoßanalysen mit reduzierten Modellen unverzichtbar. Wie in Abschnitt 3.3 aufgezeigt, bringen diese statischen Ansatzfunktionen jedoch sehr hohe, künstliche Eigenfrequenzen in das reduzierte System ein, die beim Stoß mit angeregt werden. Aufgrund dieser hochfrequenten Dynamik, die außerhalb des physikalisch relevanten Frequenzbereichs liegt, verschlechtert sich die numerische Effizienz der FMKS-Simulation erheblich, siehe Abschnitt 3.3. In diesem Abschnitt wird anhand verschiedener Stoßsysteme aufgezeigt, wie der Einfluss der hochfrequenten Dynamik mit den Kontaktsubmodellen, vorgestellt in den Abschnitten 3.5 und 3.7, verringert und die numerische Effizienz der dynamischen Simulation damit verbessert werden kann. Zur Bewertung der Qualität der Ergebnisse, erzielt mit den entwickelten Kontaktsubmodellen, werden sowohl die lokalen Effekte in der Kontaktzone als auch die elastodynamischen Effekte in Form von Wellenausbreitung in den Körpern untersucht. Weiterhin wird der Einfluss der Anzahl statischer Ansatzfunktionen in der Kontaktzone auf die numerische Effizienz geprüft. Anschließend werden die Ergebnisse der Stoßanalyse von Mehrfachstößen in Kombination mit den Kontaktsubmodellen untersucht und bewertet.

Für die aufgeführten Untersuchungen werden die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Stoßsysteme herangezogen. Die Stoßanalyse beschränkt sich dabei auf den reibungsfreien Normalenkontakt zwischen Körpern mit linear elastischem Materialverhalten. Zur Beurteilung der Qualität der reduzierten FMKS-Simulationen werden die Referenzergebnisse der in Abschnitt 4.2 vorgestellten dynamischen FE-Simulation verwendet. Zunächst werden die Ergebnisse der Kontaktsimulationen mit geometrisch einfachen, reduzierten FMKS analysiert, wobei der Fokus auf der präzisen Erfassung der lokalen und globalen Deformationen in den Körpern liegt. Dazu wird in Abschnitt 5.1 der Stoß einer Stahlkugel in Längsrichtung auf unterschiedliche freie Aluminiumstäbe untersucht. Hier findet der kinetische Energieverlust hauptsächlich durch elastodynamische Effekte wie die Wellenausbreitung im Körper statt. Um den Einfluss der Anzahl statischer Ansatzfunktionen auf die numerische Effizienz zu untersuchen wird die Kontaktgeometrie und somit der Kontaktradius variiert um damit die Anzahl gleichzeitig belasteter statischer Ansatzfunktionen zu verändern. Damit können schließlich Aussagen über die Effizienz und den Einsatzbereich der beiden Kontaktsubmo-

delle gemacht werden. Zur Analyse von Mehrfachstößen innerhalb eines sehr kurzen Zeitraums wird in Abschnitt 5.2 der Querstoß einer Stahlkugel auf einen freien Aluminiumbalken untersucht. Abhängig von der Stoßgeschwindigkeit treten starke Biegeschwingungen im Balken auf, die mehrere Stöße innerhalb eines kurzen Zeitraums hervorrufen. Anschließend werden in Abschnitt 5.3 die Ergebnisse des Stoßes der Stahlkugel auf ein Doppelpendel aus Aluminium vorgestellt. Neben der präzisen Erfassung des Kontaktvorgangs wird hier die anschließende große Starrkörperbewegung der einzelnen Pendelkörper untersucht. Außerdem wird gezeigt, dass in dem untersuchten Fall die hochfrequenten Anteile in den Bindungsgleichungen vernachlässigt werden können.

Durch die hohe numerische Steifigkeit der ungedämpften CB-Modelle und der damit einhergehenden hohen Rechenzeit, siehe Abschnitt 3.3, wird in diesem Abschnitt auf Simulationen mit den ungedämpften CB-Modellen verzichtet. Zur Untersuchung der aufgeführten Einflüsse auf die Ergebnisse und die numerische Effizienz in Kombination mit den entwickelten Kontaktsubmodellen erfolgt ein Wechsel des Stoßsystems. Statt dem Beispielsystem aus Abschnitt 3.3 werden die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Stoßsysteme verwendet. Für diese liegen teilweise zusätzlich experimentelle Ergebnisse zur Verifizierung der numerischen Simulationen vor. Die Ergebnisse der Kontaktsubmodelle in Verbindung mit dem Beispielsystem Block-Stempel sind [TschiggSeifried17] zu entnehmen.

5.1 Stoß der Stahlkugel auf die Aluminiumstäbe

Zur Verifizierung der Effizienz und Genauigkeit der vorgestellten Kontaktsubmodelle wird zunächst der Stoß der Kugel auf den ebenen Stab und den Stab mit einem Innenradius von $r_i = 20$ mm untersucht, siehe Abbildung 4.1. Die Geometrie- und Materialdaten sind in Tabelle 4.1 dargestellt und die Beschreibung der FE-Modelle ist Tabelle 4.4 zu entnehmen. Erste Ergebnisse dieser Stoßsysteme in Kombination mit den Kontaktsubmodellen aus den Abschnitten 3.5 und 3.7 werden in [TschiggSeifried18] vorgestellt.

Zunächst wird der zentrale gerade Stoß der Kugel auf den ebenen Stab in Längsrichtung mit $v = 0.3$ m/s untersucht. Um die Kontaktsubmodelle mit einer größeren Anzahl gleichzeitig belasteter statischer Ansatzfunktionen zu verifizieren, wird anschließend ein Stab mit einem Innenradius von $r_i = 20$ mm verwendet. Durch den Innenradius vergrößert sich der Kontaktradius und damit die Anzahl der statischen Ansatzfunktionen die gleichzeitig in Kontakt sind. Die Simulationsdauer ist in beiden Stoßsystemen 2 ms. Während des Aufpralls wird die kinetische Energie der Starrkörperbewegung in Dehnungsenergie umgewandelt. Diese breitet sich in Form einer eindimensionalen, linearen Welle von der Stoßstelle im Körper aus. Nach dem Stoß verschwinden diese Wellen aufgrund der Materialdämpfung. Bei Beschränkung auf rein elastisches Materialverhalten sind diese elastodynamischen Effekte die einzige Ursache für den kinetischen Energie-

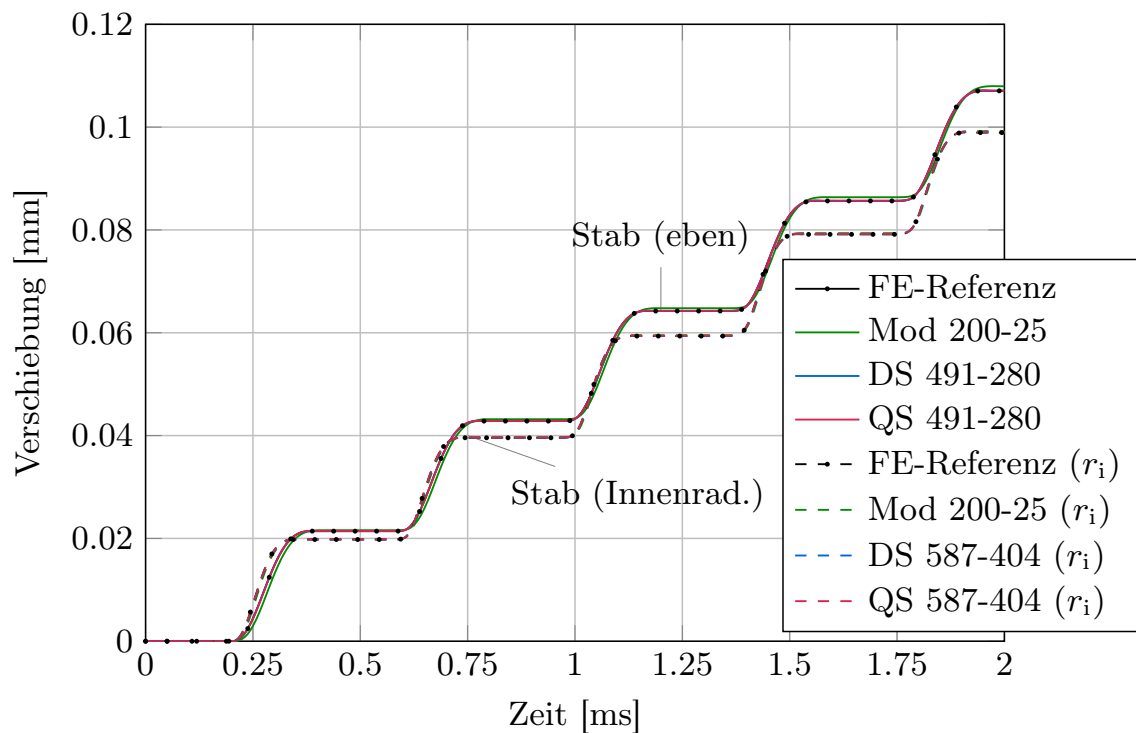


Abbildung 5.1: Verschiebung am Stabende bei den Stößen auf die Stäbe

verlust. Diese Welle wird am freien Stabende reflektiert. Beide hier untersuchten Stäbe sind so lang gewählt, dass der Kontaktvorgang abgeschlossen ist bevor die reflektierte Welle erneut auf die Stoßstelle trifft. Es tritt daher kein quasi-statisches Verhalten der Körper auf, siehe Abschnitt 3.3 und [Seifried05, Seifried-SchiehlenEberhard10]. Durch die Wellenausbreitung in den Stäben ergibt sich ein treppenförmiger Verschiebungsverlauf. Ein Punkt des Stabes, in Abbildung 5.1 beispielsweise das freie Ende der Stäbe, bleibt in Ruhe, bis die Welle wieder diesen Punkt durchläuft.

FE-Referenzergebnisse

Als erstes werden die Ergebnisse der dynamischen FE-Simulation diskutiert. Abbildung 5.2 zeigt die Kontaktkraftverläufe der Stöße auf den ebenen Stab und den Stab mit Innenradius. Beim Stoß auf den Stab mit Innenradius treten bei gleicher Stoßgeschwindigkeit höhere Kontaktkräfte auf und gleichzeitig ist die Stoßdauer kürzer. Durch den Innenradius vergrößert sich der Kontaktradius von etwa 0,55 mm auf etwa 0,92 mm und im Vergleich zum ebenen Stab tritt eine stärkere Anregung von Welleneffekten auf, wie Abbildung 5.3 zu entnehmen ist. Durch die stärkeren Welleneffekte ist die Geschwindigkeit am Stabende beim Stab mit Innenradius größer. Aufgrund der stärkeren Welleneffekte erfährt daher das freie Stabende früher eine Verschiebung als beim ebenen Stab, siehe Abbildung 5.1. Gleichzeitig fällt diese Verschiebung geringer aus. Beim Stoß auf

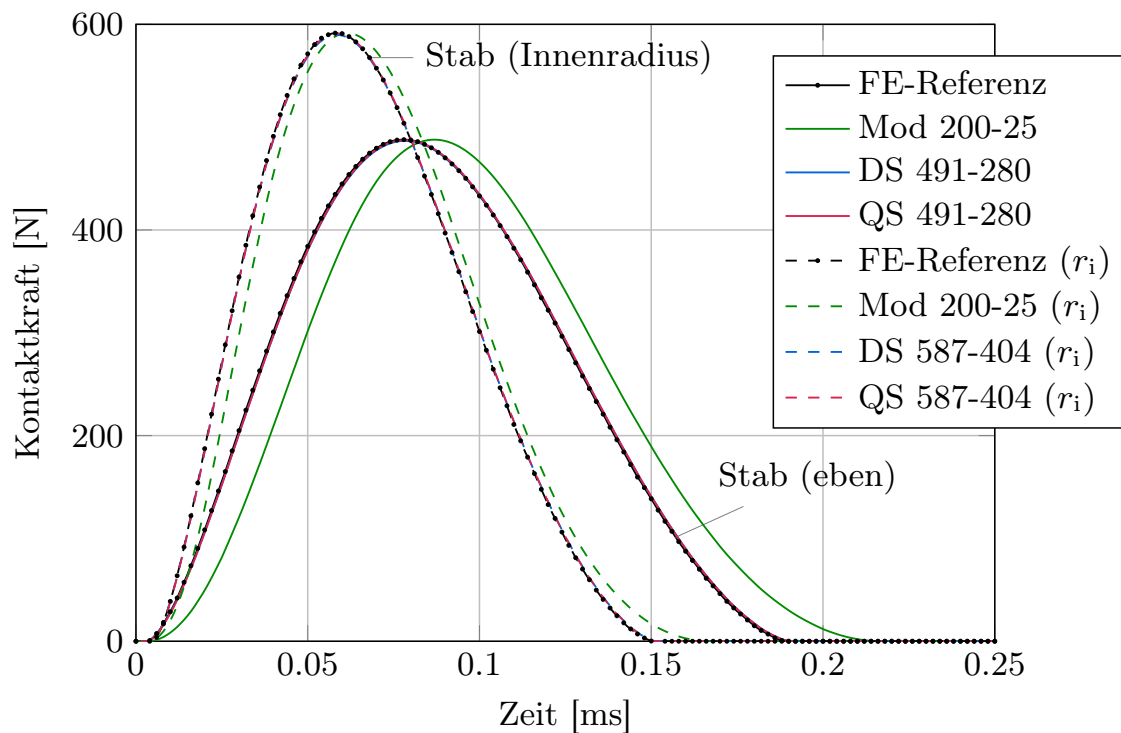


Abbildung 5.2: Kontaktkraft der Stöße auf die Stäbe

den Stab mit konkaver Oberfläche ist der Impuls mit 0.0442 N s im Vergleich zum ebenen Stab mit 0.0478 N s geringer. Aufgrund des niedrigeren Impulses fällt die Kugelgeschwindigkeit in Abbildung 5.4 nach dem Stoß geringer aus als beim Stoß auf den ebenen Stab. In den Referenzergebnissen beträgt die Rückprallgeschwindigkeit der Kugel beim Stoß auf den ebenen Stab -0.136 m/s während sie beim Stab mit Innenradius -0.102 m/s beträgt. Da in diesen Beispielen rein elastisches Materialverhalten vorliegt, geht die kinetische Energie lediglich in Dehnungsenergie in Form von Welleneffekten über. Der kinetische Energieverlust in den Referenzergebnissen beträgt beim ebenen Stab etwa 52% , während er beim Stab mit Innenradius etwa 65% beträgt. Dieser Energieverlust wird in den Stoßzahlen, berechnet nach Gl. (4.3), von $e_N = 0.64$ respektive $e_N = 0.51$ zusammengefasst. In der kleineren Stoßzahl wird der höhere Energieverlust aufgrund der stärkeren Wellenausbreitung beim Stab mit Innenradius deutlich.

Kontaktsimulation mit reduzierten FMKS

Nach den FE-Ergebnissen werden die Ergebnisse der reduzierten FMKS-Simulation diskutiert. Die Daten der reduzierten Modelle mit Ansatzfunktionen, ermittelt nach Abschnitt 4.3, sind in Tabelle 5.1 dargestellt. In Abbildung 5.2 sind die Kontaktkraftverläufe des modalen Modells für beide Stäbe dargestellt. Für beide Stoßsysteme werden nach Abschnitt 4.3 Eigenfrequenzen bis zu 72 kHz im Stab und 134 kHz in der Kugel berücksichtigt. Damit ist eine akzeptable und

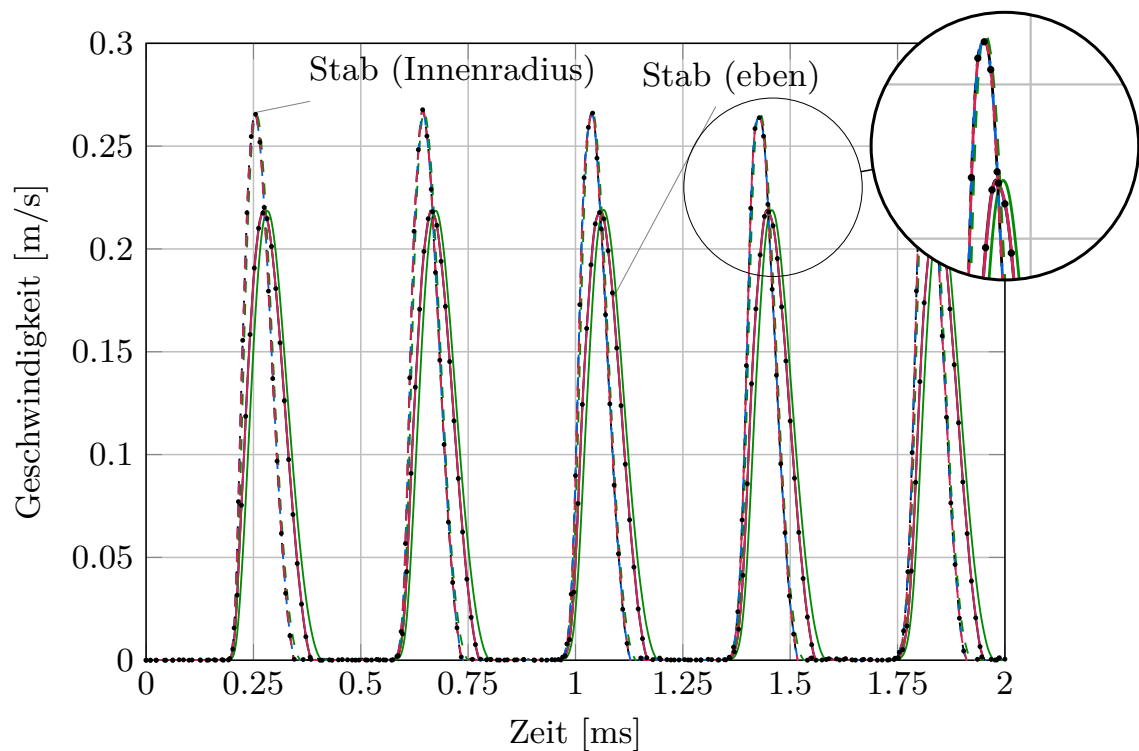


Abbildung 5.3: Geschwindigkeit am freien Stabende bei den Stößen auf die Stäbe (Legende siehe Abbildung 5.2)

numerisch sehr effiziente Approximation der Referenzergebnisse möglich. Die Rechenzeiten betragen etwa 5 min beim ebenen Stab und etwa 3 min beim Stab mit Innenradius, siehe Tabelle 5.2. Der Kontaktbereich beim Stab mit Innenradius ist gröber vernetzt als beim ebenen Stab, siehe Tabelle 4.3. Aus der Art der Modellierung ergeben sich daher weniger Freiheitsgrade, siehe Tabelle 4.4, weshalb die Rechenzeit in der dynamischen FE-Simulation kürzer ist als beim ebenen Stab.

Tabelle 5.1: Reduzierte Modelle von der Kugel und den Stäben

	Stab	Kugel	Stab (Innenrad.)	Kugel
Modales Modell				
Eigenmoden	200	25	200	25
max. Eigenfrequenz [kHz]	72.2	134.1	72.3	134.1
Dauer pre-processing [min]	38	0.7	24	0.5
CB-Modell				
Innere Moden	200	25	200	25
Trennfrequenz Ω^{hf} [kHz]	69.7	131.5	69.8	131.4
stat. Ansatzfunktionen	297	261	393	385
max. Eigenfrequenz [MHz]	21.1	17.6	21.9	29.9
Dauer pre-processing [min]	93	3	59	3.5

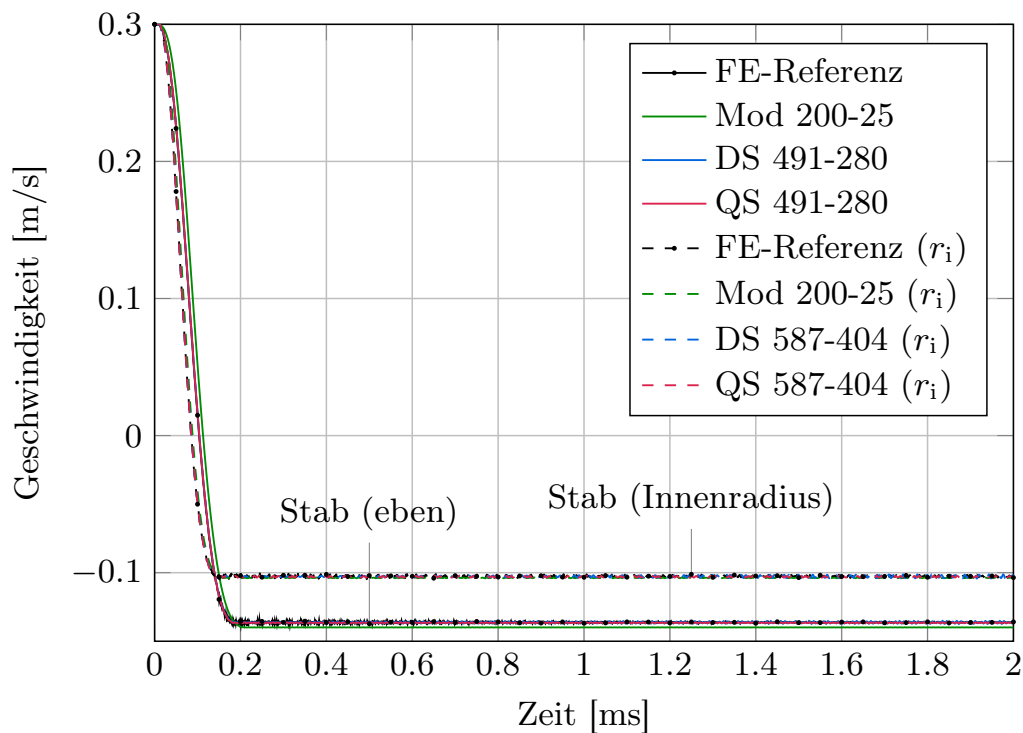


Abbildung 5.4: Kugelgeschwindigkeit bei den Stößen auf die Stäbe

Aufgrund der gröber vernetzten Kontaktzone müssen im Kontaktalgorithmus weniger Kontaktelemente geprüft werden, weshalb die Rechenzeit des modalen Modells vom Stab mit Innenradius im Vergleich zum ebenen Stab kürzer ist. Außerdem sind größere Zeitschrittweiten im MATLAB-Löser `ode15s` möglich, siehe Tabelle 5.2. Aufgrund der geringen numerischen Steifigkeit ist in beiden modalen Stoßsystemen die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im `ode15s` über die gesamte Simulationsdauer konstant. Im Vergleich zur FE-Lösung ist der Gradient der Kontaktkraft in beiden Fällen flacher, weshalb die Kontaktdauer etwas länger ist, siehe Abbildung 5.2. Beim Stoß auf den ebenen Stab ist der Impuls mit $0,0483 \text{ N s}$ etwas größer als im Referenzergebnis, weshalb die Kugelgeschwindigkeit mit $-0,1399 \text{ m/s}$ nach dem Stoß auch betragsmäßig größer ist, siehe Abbildung 5.4. Aufgrund des flacheren Gradienten im Kontaktkraftverlauf wird die maximale Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß später erreicht als in der FE-Lösung. Beim Stab mit Innenradius unterscheidet sich dagegen der Impuls mit $0,0443 \text{ N s}$ nur geringfügig von der FE-Lösung. Daher weicht die Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß nicht signifikant ab. Die Wellenausbreitung in den Stäben, dargestellt in Abbildung 5.3, kann bei beiden Stoßsystemen mit jeweils 200 Eigenmoden bis zu 72 kHz im Stab sehr gut abgebildet werden, wobei beim ebenen Stab die maximale Geschwindigkeit jeweils verzögert erreicht wird. Die lokale Deformation kann mit dem modalen Modell nicht genau approximiert werden, da die geringe Anzahl Eigenmoden keine Information über die lokalen Verformungen enthalten, siehe Abbildung 5.5. Insgesamt können mit dem modalen Modell bei

beiden Stoßsystemen numerisch effizient, qualitative Aussagen getroffen werden, wenn nur das globale Deformationsverhalten von Interesse ist.

Mit dem gedämpften (DS) und dem quasi-statischen (QS) Kontaktsubmodell können die Ergebnisse im Vergleich zum modalen Modell erheblich verbessert werden, wie zum Beispiel in den Abbildungen 5.1 oder 5.2 dargestellt ist. Die Ergebnisse beider Kontaktsubmodelle sind nahezu identisch und es liegt eine sehr gute Übereinstimmung mit den FE-Ergebnissen vor. Der Impuls ist jeweils bei beiden Kontaktsubmodellen beim ebenen Stab 0.0479 Ns und beim Stab mit Innenradius 0.0442 Ns. Bei beiden Stoßsystemen ist kein signifikanter Unterschied der Verschiebung und Geschwindigkeit zur Referenzlösung erkennbar. Somit stimmen jeweils die Stoßzahlen und der Energieverlust in der FMKS-Simulation mit der FE-Lösung überein. Diese Verbesserung mit dem CB-Modell resultiert aus der besseren Erfassung des lokalen Deformationsfeldes, wenn die Reduktionsbasis um statische Ansatzfunktionen für alle potentiellen Kontaktknoten zur Kompensation der vernachlässigten hochfrequenten Eigenmoden erweitert wird, siehe Abschnitt 3.3. Wie Abbildung 5.5 aufzeigt, kann damit sowohl beim ebenen Stab als auch beim Stab mit Innenradius das lokale Deformationsfeld mit nahezu der Genauigkeit des zugrundeliegenden FE-Modells abgebildet werden. Ein Unterschied in der Darstellung des Deformationsfeldes zwischen dem gedämpften und dem quasi-statischen Kontaktsubmodell ist nicht erkennbar, da bei beiden die gleichen statischen Ansatzfunktionen im CB-Modell verwendet werden. Aufgrund des größeren Kontaktradius beim Stoß auf den Stab

Tabelle 5.2: Rechenaufwand beim Stoß auf die Stäbe

System	Kugel-Stab			
	FE	Modal 200-25	DS 491-280	QS 491-280
CPU [min]	720	5	225	15
J_{ode}	-	1	222	1
nsteps	-	8816	6457	4135
nfailed	-	1177	1307	219
max. Schrittw. [s]	-	$9.978e^{-6}$	$1.686e^{-6}$	$4.507e^{-6}$
min. Schrittw. [s]	-	$9.013e^{-9}$	$2.289e^{-9}$	$4.507e^{-8}$
System	Kugel-Stab (Innenradius)			
	FE	Modal 200-25	DS 587-404	QS 587-404
CPU [min]	457	3	575	43
J_{ode}	-	1	315	3
nsteps	-	5059	6289	4652
nfailed	-	304	1416	227
max. Schrittw. [s]	-	$6.907e^{-6}$	$1.377e^{-6}$	$3.177e^{-6}$
min. Schrittw. [s]	-	$1.105e^{-8}$	$5.832e^{-12}$	$1.295e^{-8}$

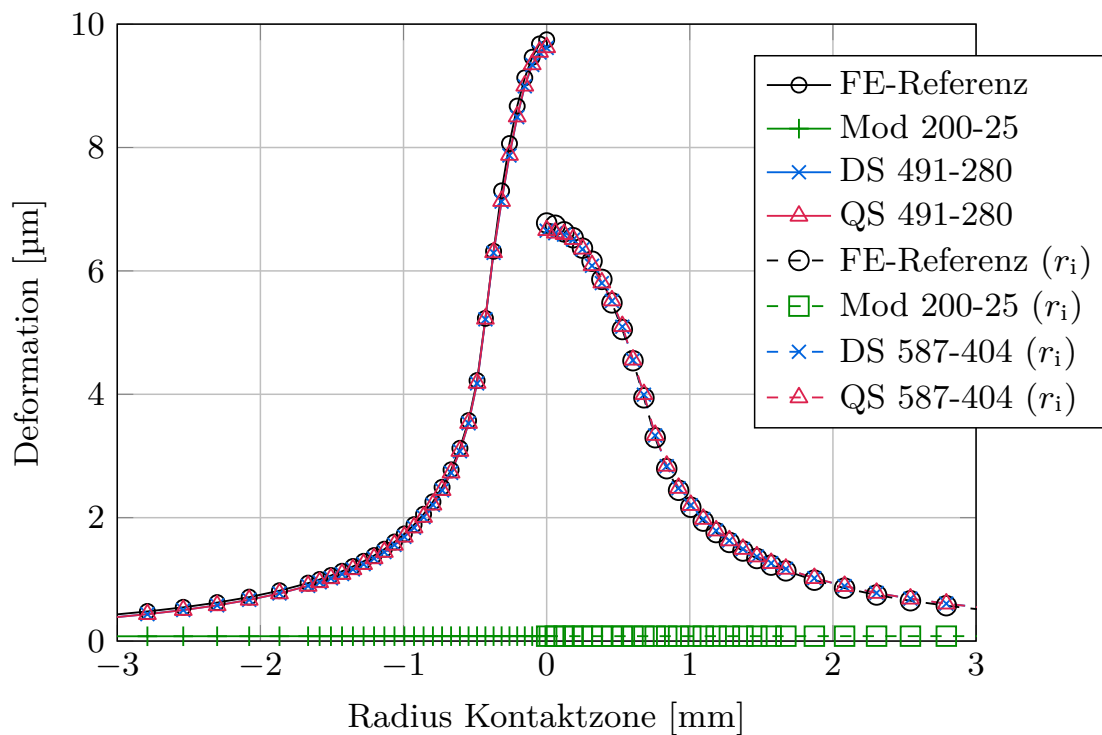


Abbildung 5.5: Deformation der Kontaktflächen beim Stoß auf den ebenen Stab (links) und auf den Stab mit Innenradius (r_i , rechts)

mit Innenradius fallen die Deformationen kleiner aus, da sich die Kontaktkräfte auf eine größere Kontaktfläche verteilen. Aus diesem Grund fällt die Flächenpressung, dargestellt in Abbildung 5.6, ebenfalls kleiner aus als beim Stoß auf den ebenen Stab. Die Abweichungen zwischen den FMKS- und FE-Ergebnissen resultieren aus minimalen Unterschieden im Deformationsfeld. Diese sind auf die reduzierte Beschreibung der Modelle und dem daraus resultierenden, etwas steiferen Verhalten zurückzuführen, denn sie treten sowohl beim gedämpften als auch beim quasi-statischen Kontaktsubmodell auf. In Abbildung 5.7 sind schließlich die Vergleichsspannungen zum Zeitpunkt der maximalen Kontaktkraft entlang der Symmetrieachse der Stäbe aufgezeigt. Auch hier wird deutlich, dass beim Stoß auf den Stab mit Innenradius geringere Spannungen auftreten. Beim ebenen Stab tritt die maximale Spannung etwa bei 0.22 mm unterhalb der Kontaktstelle auf. Dies entspricht nach [Johnson87, Seifried05] ungefähr dem Ort der maximalen Spannung beim Hertzschen Kontaktgesetz, siehe [Hertz82]. Die Spannungen in Abbildung 5.6 und Abbildung 5.7 werden über die Spannungsmoden nach Abschnitt 2.9 nach der Zeitsimulation berechnet. Mit beiden Kontaktsubmodellen in Kombination mit der Spannungsberechnung über Spannungsmoden ist in beiden vorgestellten Stoßsystemen eine sehr gute Erfassung der Vergleichsspannungen möglich. Aufgrund der schlechten Approximation der lokalen Deformation mit den modalen Modellen, siehe Abbildung 5.5, wird auf die Darstellung der Spannungen verzichtet. Diese werden aus dem Deformati-

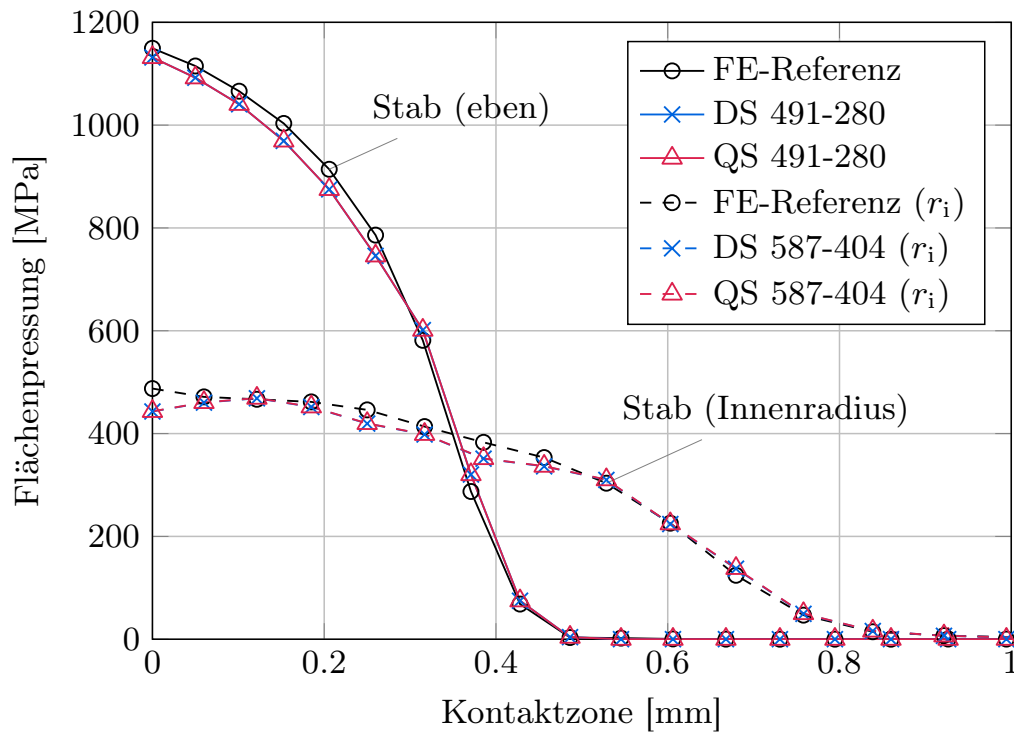


Abbildung 5.6: Flächenpressung in der Kontaktzone der Stäbe

onsfeld berechnet und weichen deshalb ebenfalls signifikant von der FE-Lösung ab, weshalb ein Vergleich nicht sinnvoll ist. Da der Großteil der Deformationen im Stab auftreten wird auf die Betrachtung der Deformation und Spannungen in der Kugel verzichtet.

5.1.1 Bestimmung der Dämpfungsparameter

Bevor der Rechenaufwand des gedämpften Kontaktsmodells diskutiert werden kann, wird die Bestimmung geeigneter Dämpfungsparameter erläutert. Dies wird exemplarisch am Stoßsystem Kugel-Stab durchgeführt und ist auf alle anderen Stoßsysteme in dieser Arbeit übertragbar. Für eine numerisch effiziente Simulation mit dem gedämpften Kontaktsmodell wird die Berechnung der Dämpfung nach Abschnitt 3.5 durchgeführt. Dazu werden abhängig von der Trennfrequenz Ω^{hf} die Dämpfungsparameter $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ im Übergangsbereich und die gedämpfte Schwingungsdauer $T_{d,i}^{\text{hf}}$ gewählt. Bei der Wahl dieser Parameter zur Berechnung der Dämpfungsparameter ξ_i^{hf} für die hochfrequenten elastischen Koordinaten ist wichtig, dass die niederfrequente Dynamik und damit die Wellenausbreitung nicht beeinflusst wird. Werden die Dämpfungsparameter zu hoch gewählt, so werden die niederfrequenten Anteile mit gedämpft. Dies kann zum Beispiel in der Frequenzgangmatrix nach Abschnitt 2.10 geprüft werden.

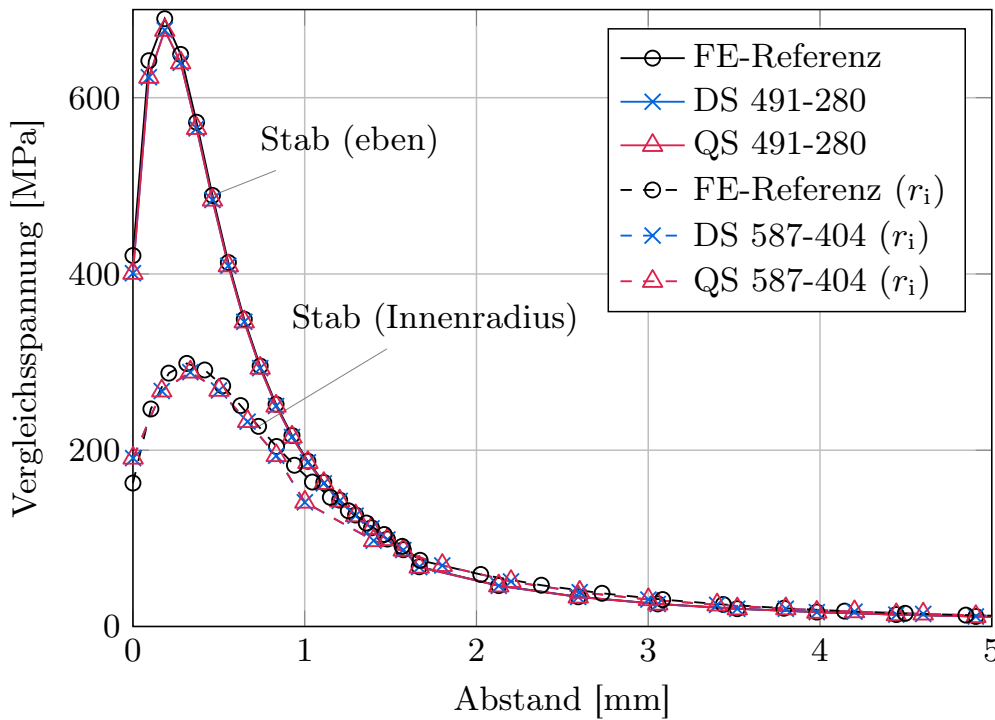


Abbildung 5.7: Vergleichsspannung entlang der Symmetrieachse der Stäbe

Zur Bestimmung der Parameter $T_{d,i}^{\text{hf}}$ und $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ wird folgendermaßen vorgegangen: Zunächst wird abhängig vom Frequenzinhalt der verwendeten reduzierten Systeme die maximal mögliche gedämpfte Schwingungsdauer $T_{d,i}^{\text{hf}}$ festgelegt, für welche die niederfrequenten Anteile noch nicht gedämpft werden. Diese ist bei den in diesem Abschnitt untersuchten Stoßsystemen $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms. Bei größeren Werten werden die Dämpfungsparameter nach Gl. (3.47) so groß, dass die niederfrequente Dynamik gedämpft wird. Idealerweise wird $T_{d,i}^{\text{hf}}$ für alle Körper gleich groß gewählt damit die schnellen Zeitkonstanten, eingeführt durch die hohen Eigenfrequenzen, in allen Körpern die gleiche Größenordnung haben, siehe Abbildung 5.8 links, und damit die numerische Steifigkeit möglichst weit reduziert wird. Der Übergangsbereich zwischen nieder- und hochfrequenten elastischen Koordinaten reduziert sich im gezeigten Fall auf eine elastische Koordinate, siehe Abbildung 5.8 rechts. Abhängig von der Wahl der Schwingungsdauer wird anschließend die Dämpfung des Übergangsbereichs festgelegt. Auch hierbei muss beachtet werden, dass die niederfrequente Dynamik nicht gedämpft wird. In Abbildung 5.8 sind die gedämpften Eigenfrequenzen und die Dämpfungsparameter für $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms und $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms mit jeweils $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ im Übergangsbereich dargestellt. Aufgrund der hohen Eigenfrequenzen im System steigen die Dämpfungsparameter ξ_i^{hf} für beide $T_{d,i}^{\text{hf}}$ sehr schnell an und nähern sich mit höheren Eigenfrequenzen dem Wert $\xi_i^{\text{hf}} = 1$ an, siehe Abbildung 5.8 rechts. Da dem Kontaktsubmodell schwache Dämpfung zugrunde liegt sind keine höheren Dämpfungsparameter zur Berechnung der reduzierten Dämpfungsmatrix $\bar{\mathbf{D}}_e$ nach Gl. (2.170) möglich. Da sich das System mit höheren Dämpfungsparamete-

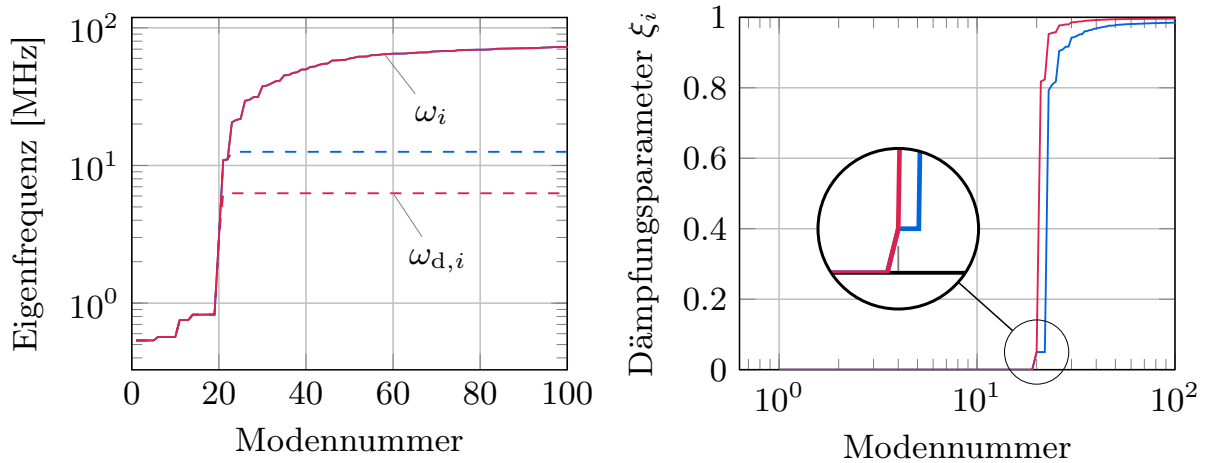


Abbildung 5.8: Eigenfrequenzen sowie die Dämpfungsparameter der Kugel, berechnet mit jeweils $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ und $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms (blau) bzw. $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms (rot)

tern unphysikalisch verhält sind hohe Dämpfungsfaktoren darüber hinaus nicht sinnvoll. Wird von beiden in Abbildung 5.8 gezeigten Systemen der numerische Aufwand ausgewertet, so ist festzustellen, dass bei gleichen Penalty-Faktoren mit $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms im Vergleich zu $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms die numerische Effizienz aufgrund der größeren Dämpfung besser ist, siehe Tabelle 5.3. Es sind weniger Neuapproximationen der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im ode15s notwendig und die Zeitschrittweite ist etwas größer, was auf eine reduzierte numerische Steifigkeit und eine bessere Konvergenzrate des Newton-Verfahrens im ode15s zurückzuführen ist. Die Rechenzeit im Vergleich zu $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms kann um etwa 7 % reduziert werden.

Eine Vergrößerung von $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ im Übergangsbereich auf $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.1$ kann die numerische Effizienz bei $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms im Vergleich zu $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ ebenfalls steigern,

Tabelle 5.3: Numerischer Aufwand zur exemplarischen Bestimmung der Dämpfungsparameter beim Stoßsystem Kugel-Stab

$T_{d,i}^{\text{hf}}$ [ms]	0.0005	0.0005	0.0005	0.001	0.001
$\xi_{t,i}^{\text{hf}}$	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1
CPU [min]	242	235	254	225	258
$\mathbf{J}_{\text{ode}}$	235	233	247	222	246
nsteps	6384	6315	5283	6457	5661
nfailed	1319	1107	902	1307	1015
max. Schrittw. [s]	1.497e^{-6}	1.699e^{-6}	1.591e^{-6}	1.686e^{-6}	1.471e^{-6}
min. Schrittw. [s]	1.823e^{-9}	1.899e^{-9}	2.289e^{-9}	2.289e^{-9}	2.289e^{-9}

wie Tabelle 5.3 zu entnehmen ist. Wird bei $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms der Übergangsbereich mit $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.1$ stärker gedämpft, so wird das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens im ode15s etwas verschlechtert, siehe Tabelle 5.3. Es werden zwar weniger Zeitschritte verworfen, aber die Rechenzeit kann aufgrund der größeren Anzahl Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ nicht reduziert werden. Durch die höheren Dämpfungsparameter wird mehr kinetische Energie durch die Materialdämpfung dissipiert, weshalb höhere Penalty-Faktoren notwendig sind um die gleiche maximale Kontaktkraft wie bei $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ und $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms zu erreichen. Damit erhöht sich jedoch die numerische Steifigkeit weiter und die numerische Effizienz verschlechtert sich erneut. Gleiches Verhalten ist zu beobachten wenn $T_{d,i}^{\text{hf}}$ weiter erhöht wird. Mit $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms nehmen die Dämpfungsparameter schneller zu als bei $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms, siehe Abbildung 5.8. Wird gleichzeitig noch der Übergangsbereich zum Beispiel mit $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.2$ stärker gedämpft, so ist das System überdämpft was sich aufgrund des geänderten Schwingungsverhaltens bereits bei $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms negativ auf das Konvergenzverhalten des ode15s auswirkt, siehe Tabelle 5.3. Wird $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ verkleinert, zum Beispiel auf $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.01$ oder kleiner, so ist der Übergangsbereich zu schwach gedämpft. Die numerische Steifigkeit kann dann nicht signifikant reduziert werden, weshalb erheblich mehr Zeitschritte im ode15s notwendig sind als bei $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$.

Aus diesem Zusammenhang ist ersichtlich, dass beide Parameter $\xi_{t,i}^{\text{hf}}$ und $T_{d,i}^{\text{hf}}$ nicht unabhängig voneinander gewählt werden können. Die beste numerische Effizienz beim Stoßsystem Kugel-Stab ist ausgehend von diesen Beobachtungen möglich, wenn die Dämpfungsparameter über $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ und $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms nach Abschnitt 3.5 berechnet werden. Beim Stab mit Innenradius erfolgt die Berechnung der Dämpfungsparameter über $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ und $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms. Wird in diesem System $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ ms wie beim ebenen Stab verwendet, so sind mehr Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im ode15s notwendig als bei $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005$ ms. Die Dämpfungsparameter sind für diesen Fall mit den stark ausgeprägten Welleneffekten zu hoch gewählt weshalb die Konvergenz des Newton-Verfahrens im ode15s damit schlechter ist. Wird im Übergangsbereich $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.1$ gewählt, so nimmt die numerische Effizienz ebenfalls ab. In diesem Fall ist das System überdämpft, was sich bei der starken Wellenausbreitung negativ bemerkbar macht. Mit der Wahl der Trennfrequenz Ω^{hf} nach Tabelle 5.1 und den so berechneten Dämpfungsparametern bleibt die niederfrequente Dynamik ungedämpft. Somit kann in beiden Stoßsystemen die Wellenausbreitung in Abbildung 5.3 genau erfasst werden.

5.1.2 Rechenaufwand bei den FMKS-Simulationen mit CB-Modellen

Die Rechenzeiten beim Stoß der Kugel auf den ebenen Stab sind in Tabelle 5.2 dargestellt. Mit dem modalen Modell sind in beiden Stoßsystemen effiziente Simulationen möglich, wenn lediglich das globale Deformationsverhalten von Interesse ist. Sollen neben der Wellenausbreitung noch die lokale Deformation der

Kontaktzone und die auftretenden Spannungen untersucht werden, so kann mit beiden Kontaktsubmodellen der Einfluss der hochfrequenten Dynamik der CB-Modelle reduziert werden und es sind numerisch effiziente Simulationen möglich. Mit dem gedämpften Kontaktsubmodell kann beim ebenen Stab die Rechenzeit im Vergleich zur FE-Lösung etwa um 68 % auf 225 min reduziert werden. Die numerische Steifigkeit des Systems nimmt durch die hohen, zur statische korrekten Beschreibung in das reduzierte System eingebrachten, Eigenfrequenzen zu, siehe Tabelle 5.1. Diese sind für das globale Schwingungsverhalten nicht relevant, werden jedoch beim Stoß mit angeregt. Um die Wellenausbreitung nicht negativ zu beeinflussen können die Dämpfungsparameter nicht hoch genug gewählt werden um den Einfluss der hochfrequenten Dynamik noch weiter zu reduzieren. Daher kann die numerische Steifigkeit nur moderat reduziert und die Rechen-dauer nicht weiter verringert werden. Aus diesem Grund ist die Konvergenz des Newton-Verfahrens im MATLAB-Löser ode15s verhältnismäßig schlecht, weshalb die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ 222 mal approximiert werden muss. Aufgrund der relativ großen Systemdimensionen dauert diese Neuapproximation von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ dementsprechend lange. Aufgrund der langsamen Konvergenz der Nullstellensuche im ode15s durch die relativ hohe numerische Steifigkeit werden zur Berechnung der neuen Zustände die Zeitschritte zusätzlich oft verworfen und mit reduzierter Zeitschrittweite neu berechnet. Daraus resultieren die vergleichsweise kleinen Zeitschrittweiten, siehe Tabelle 5.2. Mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell dagegen kann die Rechenzeit um fast 98 % auf 15 min reduziert werden. Die nach Abschnitt 4.4 gewählten Einstellungen ε_{qs} und k_{max} , siehe Abschnitt 3.7, sind dabei $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 20$. Durch die statische Kondensation der hochfrequenten Ansatzfunktionen und der anschließenden Vernachlässigung in der dynamischen Simulation kann die numerische Steifigkeit dieser erheblich reduziert werden. Zum einen bleibt $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ über die gesamte Simulationsdauer konstant und zum anderen sind größere Zeitschrittweiten möglich. Somit kann aufgrund der reduzierten Dimensionen in der dynamischen Simulation und der reduzierten numerischen Steifigkeit aufgrund der Vernachlässigung der hochfrequenten Dynamik die numerische Effizienz erheblich gesteigert werden. Durch das gute Konvergenzverhalten der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell zur Berechnung der lokalen Deformation verschlechtert sich die numerische Effizienz durch Lösen des zusätzlichen nichtlinearen Gleichungssystems (3.127) nur minimal. Wie Abbildung 5.3 aufzeigt, kann mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell mit der Trennfrequenz Ω^{hf} nach Tabelle 5.1 die Wellenausbreitung präzise erfasst werden. Die rein statischen Betrachtung der hochfrequenten Ansatzfunktionen hat keinen negativen Einfluss auf die niederfrequente Dynamik.

Um die Kontaktsubmodelle mit einer größeren Anzahl gleichzeitig belasteter statischen Ansatzfunktionen zu verifizieren wird zusätzlich die numerische Effizienz des Stoßes auf den Stab mit Innenradius untersucht. Die Vernetzung in der Kontaktzone fällt beim Stab mit Innenradius etwas gröber aus, siehe Tabelle 4.3. Da aufgrund des größeren Kontaktradius mehr Kontaktelemente gleichzeitig in Kon-

takt sind, ist beim quasi-statischen Kontaktsubmodell auch mit einer größeren Vernetzung ein gutes Konvergenzverhalten der iterativen Berechnung des lokalen Deformationsfeldes möglich. Durch die größere Vernetzung reduziert sich insgesamt die Anzahl der Knotenfreiheitsgrade des Systems und damit die Rechenzeit der dynamischen FE-Simulation im Vergleich zum ebenen Stab bei gleicher Simulationsdauer von 2 ms, siehe Tabelle 5.2 unten. Aufgrund des größeren Kontaktradius werden trotz der größeren Diskretisierung im Vergleich zum ebenen Stab jedoch mehr statische Ansatzfunktionen in der Kontaktzone benötigt und gleichzeitig belastet, siehe Tabelle 5.1. Da die Trennfrequenzen Ω^{hf} und damit die Anzahl niederfrequenter elastischer Koordinaten im Vergleich zum ebenen Stab nahezu gleich bleiben steigt die Anzahl der hochfrequenten elastischen Koordinaten $\bar{q}_e^{\text{hf}}$ an. Aufgrund der vielen statischen Ansatzfunktionen steigt die maximale Eigenfrequenz im reduzierten Modell der Kugel auf knapp 30 MHz. Die Eigenfrequenzen beim Stab steigen im Vergleich zum ebenen Stab nicht mehr signifikant an. Da beim Stoß alle Frequenzen angeregt werden, nimmt die numerische Steifigkeit im Vergleich zum ebenen Stab zu. Durch die größere Anzahl hochfrequenten elastischer Koordinaten nimmt die Rechenzeit der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell zu und daher steigt die Gesamtrechenzeit im Vergleich zum ebenen Stab deutlich an, siehe Tabelle 5.2. Beim Stoß auf den Stab mit Innenradius werden stärkere Welleneffekte angeregt, weshalb auch mit dem quasi-statischen Kontaktmodell drei Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ notwendig sind und die Zeitschrittweite kleiner ist als beim ebenen Stab. Mit den Einstellungen $\varepsilon_{\text{qs}} = 10\varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 20$ ist dabei die geringste Rechenzeit möglich. Trotz der größeren Dimension in der Nullstellensuche des quasi-statischen Kontaktsubmodells kann die Rechenzeit im Vergleich zur FE-Lösung um etwa 90 % auf 43 min reduziert werden. Damit ist verifiziert, dass auch mit vielen gleichzeitig belasteten hochfrequenten elastischen Koordinaten die numerische Effizienz des quasi-statischen Kontaktsubmodells gewährleistet ist.

Beim gedämpften Kontaktsubmodell ist aufgrund der Wahl der Dämpfungsparameter nach Abschnitt 5.1.1 keine Verbesserung der numerischen Effizienz im Vergleich zur FE-Simulation möglich, siehe Tabelle 5.2. Dies liegt an der hohen numerischen Steifigkeit aufgrund der hohen Eigenfrequenzen der Kugel resultierend aus der großen Anzahl statischer Ansatzfunktionen. Zusätzlich treten stärkere Welleneffekte als beim ebenen Stab auf. Mit dem gedämpften Kontaktsubmodell ist es nicht möglich passende Dämpfungsparameter zu ermitteln, die einerseits die numerische Steifigkeit reduzieren und andererseits die Wellenausbreitung nicht beeinflussen. Aufgrund der hohen numerischen Steifigkeit ist die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens im ode15s oft zu niedrig und 315 Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ ebenso wie sehr kleine Zeitschritte sind zur Berechnung der neuen Zustände erforderlich. In diesem Fall ist die Grenze des gedämpften Kontaktsubmodells erreicht. Es ist auf Systeme mit weniger hochfrequenten elastischen Freiheitsgraden beschränkt. Da mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell nahezu identische Ergebnisse möglich sind, ist dieses bei bei-

den hier untersuchten Stoßsystemen vorzuziehen.

Zur Vernetzung der in diesem Abschnitt verwendeten FE-Modelle werden lineare Hexaeder-Elemente mit voller Integration verwendet. Werden stattdessen Elemente mit reduzierter Integration verwendet, so können die Rechenzeiten der dynamischen FE-Simulationen in Tabelle 5.2 von 720 min auf etwa 160 min und von 457 min auf etwa 100 min verringert werden. Werden diese Modelle zur Modellreduktion und anschließenden FMKS-Simulation verwendet, so ändern sich die Rechenzeiten der FMKS-Simulation nicht signifikant. Die Eigenfrequenzen und -formen der Modelle mit voller und reduzierter Integration unterscheiden sich bei den gezeigten Modellen nur minimal. Da diese bei der Modellreduktion verwendet werden, ist die Beschreibung der reduzierten Körper nahezu identisch und somit treten keine Unterschiede in den FMKS-Simulationen auf. In diesem Fall hat das quasi-statische Kontaksubmodell aufgrund der hohen numerischen Effizienz deutliche Vorteile gegenüber dem gedämpften.

Die Diskretisierung des ebenen Stabs, siehe Tabelle 4.4, beschreibt die obere Grenze der möglichen Knotenfreiheitsgrade bei der Modellreduktion mit dem verwendeten Computer. Die Berechnung der Eigenmoden beim CB-Verfahren in MATLAB benötigt über 64 GB RAM. Da zusätzlich die Auslagerungsdatei verwendet werden muss, ist die pre-processing Dauer mit 93 min sehr viel höher als beim Stab mit Innenradius. Feiner vernetzte FE-Modelle können daher mit dem verwendeten Computer nicht reduziert werden.

5.1.3 Einfluss der Koppelterme

In Abschnitt 3.6 wird gezeigt, dass die Trägheitskopplung zwischen der elastischen Deformation und dem Referenzsystem durch die Koppelterme $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ vernachlässigt werden kann. Zur Verifizierung wird die Simulation mit dem gedämpften Kontaksubmodell DS 491-280 mit und ohne Vernachlässigung der Trägheitskopplung durch $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ durchgeführt. Die Trägheitskopplung der translatorischen Bewegung über $\mathbf{C}_t$ entfällt nach Gl. (3.34) jeweils beim verwendeten Buckens-System. Die Unterschiede zwischen dem vereinfachten Modell mit $\mathbf{C}_r^{\text{hf}} = \mathbf{0}$ und dem Modell ohne diese Annahme ist vernachlässigbar klein. Ebenso liegt kein Unterschied im Rechenaufwand der FMKS-Simulation vor. Die Kontaktkraft weicht maximal um 0.3 N ab, während die Verschiebung am Stabende um maximal $2.5 \cdot 10^{-6}$ mm abweicht. Demnach sind zwar Unterschiede durch die Vernachlässigung der Kopplung vorhanden, diese sind wie zu erwarten jedoch vernachlässigbar klein, da bei diesem Stoßsystem keine Rotationsbewegung auftritt. Für die translatorische Bewegung ist damit die Vernachlässigung von $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ verifiziert. Die Vernachlässigung von $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ bei Rotationsbewegungen wird in Abschnitt 5.3 erneut geprüft.

5.2 Stoß der Stahlkugel auf den Aluminiumbalken

Mit dem Stoßsystem Kugel-Balken wird der Mehrfachstoß mit den vorgestellten Kontaktsubmodellen untersucht. Der Stoß der Kugel auf den Balken regt abhängig von der Stoßgeschwindigkeit starke Schwingungen in einem breiten Frequenzband an. Aufgrund dieser beim ersten Stoß angeregten Welleneffekte treten im Balken starke Biegeschwingungen auf, die mehrere Stöße innerhalb weniger Millisekunden verursachen. Im Vergleich zu den Stößen auf die Stäbe aus Abschnitt 5.1 sind die relevanten Eigenfrequenzen viel geringer. Die erste Biegeeigenfrequenz mit etwa 91 Hz ist im Gegensatz zu den Frequenzen, die beim Stoß auf die Stäbe angeregt werden vergleichsweise niedrig. Die dabei relevanten Eigenmoden haben Frequenzen mit mindestens 2.55 kHz.

FE-Referenzergebnisse

Zunächst werden die FE-Ergebnisse für eine Stoßgeschwindigkeit von 0.303 m/s betrachtet. Mit dieser Geschwindigkeit sind nach [SeifriedSchiehlenEberhard10] drei Stöße innerhalb von 6 ms zu erwarten, weshalb die Simulationsdauer auf 8 ms festgelegt wird. In Abbildung 5.9 ist zu erkennen, dass bei der FE-Lösung alle drei Stöße innerhalb von 6 ms auftreten. In Abbildung 5.10 sind die Verschiebung der Kugel und des Balkens dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass sich die Kugel nach dem ersten Stoß weiter in Stoßrichtung bewegt. Aus Abbildung 5.11 ist zu entnehmen, dass sich die Geschwindigkeit der Kugel nach dem ersten Stoß von 0.303 m/s auf 0.038 m/s verringert. Da die Schwerpunktgeschwindigkeit des Balkens nach dem ersten Stoß etwa 0.033 m/s beträgt, ist ein zweiter Stoß zu erwarten. Gleichzeitig schwingt der Balken in Stoßrichtung und zurück, wie aus den Balkenschwingungen aus Abbildung 5.10 zu entnehmen ist. Der zweite Stoß folgt bei 4.87 ms, wenn der Balken zurück schwingt. Die Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel beträgt nach dem zweiten Stoß -0.0172 m/s. Dabei hat sich die Bewegungsrichtung der Kugel umgekehrt, wie Abbildung 5.10 zu entnehmen ist. Die Starrkörpergeschwindigkeit des Balkens nimmt nach dem zweiten Stoß zu auf 0.039 m/s. Aufgrund der Schwingungen des Balkens tritt trotz der sich voneinander entfernenden Körper nach 5.35 ms ein dritter Stoß auf. Die Starrkörpergeschwindigkeit des Balkens nimmt danach weiter zu auf 0.052 m/s, während die Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel sich auf -0.1195 m/s erhöht. Deshalb entfernen sich beide Körper voneinander, weshalb keine weiteren Stöße mehr auftreten, siehe Abbildung 5.10. Durch den Stoß wird die kinetische Energie der Starrkörperbewegung der Kugel in Balkenschwingungen umgewandelt. Beim ersten Stoß werden in der Referenzlösung 89.6 % der kinetischen Energie in Schwingungen übertragen. Beim zweiten Stoß werden etwa 2.5 % der Energie, die sich in den Balkenschwingungen befindet, zurückgewonnen, weshalb sich dann 87.1 % der ursprünglichen kinetischen Energie in den Schwingungen befindet. Beim dritten Stoß werden 26.6 % der kinetischen Energie zurückgewonnen, weshalb nach allen Stoßvorgängen 60.5 % der ursprünglichen kinetischen Energie in

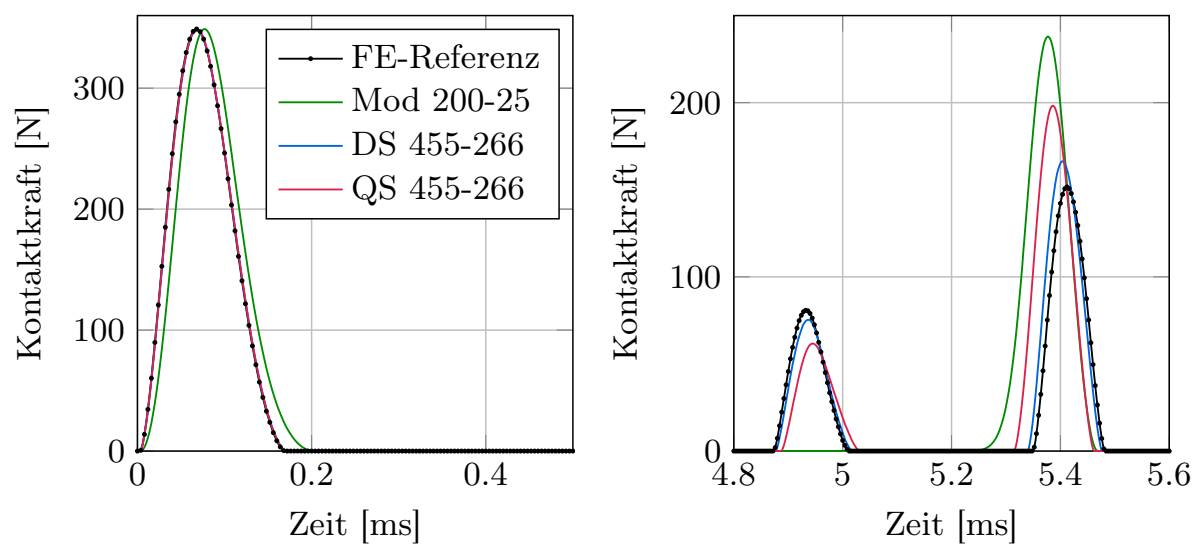


Abbildung 5.9: Kontaktkraft der Stöße auf den Balken

den Balkenschwingungen verbleiben. Der gesamte kinetische Energieverlust der Starrkörperbewegung kann in der Stoßzahl $e_N = 0.57$ zusammengefasst werden.

Kontaktsimulation mit modal reduzierten Modellen

Für die reduzierten Modelle werden nach Abschnitt 4.3 die Anzahl der benötigten Eigenmoden bestimmt. Im Balken werden 200 Eigenmoden bis 62 kHz verwendet, während bei der Kugel 25 Eigenmoden bis 134 kHz verwendet werden, siehe Tabelle 5.4. Werden die FMKS-Ergebnisse des modal reduzierten Modells mit Eigenfrequenzen bis 62 kHz im Balken mit den Referenzergebnissen verglichen, so ist in Abbildung 5.9 eine erhebliche Abweichung in der Kontaktkraft erkennbar, welche wiederum in einer Abweichung in der Verschiebung und der Geschwindig-

Tabelle 5.4: Reduzierte Modelle von der Kugel und dem Balken

	Balken	Kugel
Modales Modell		
Eigenmoden	200	25
max. Eigenfrequenz [kHz]	61.7	134.2
Dauer pre-processing [min]	9	0.4
CB-Modell		
Innere Moden	200	25
Trennfrequenz Ω^{hf} [kHz]	61.3	131.3
stat. Ansatzfunktionen	261	247
max. Eigenfrequenz [MHz]	20.1	18.9
Dauer pre-processing [min]	13	2

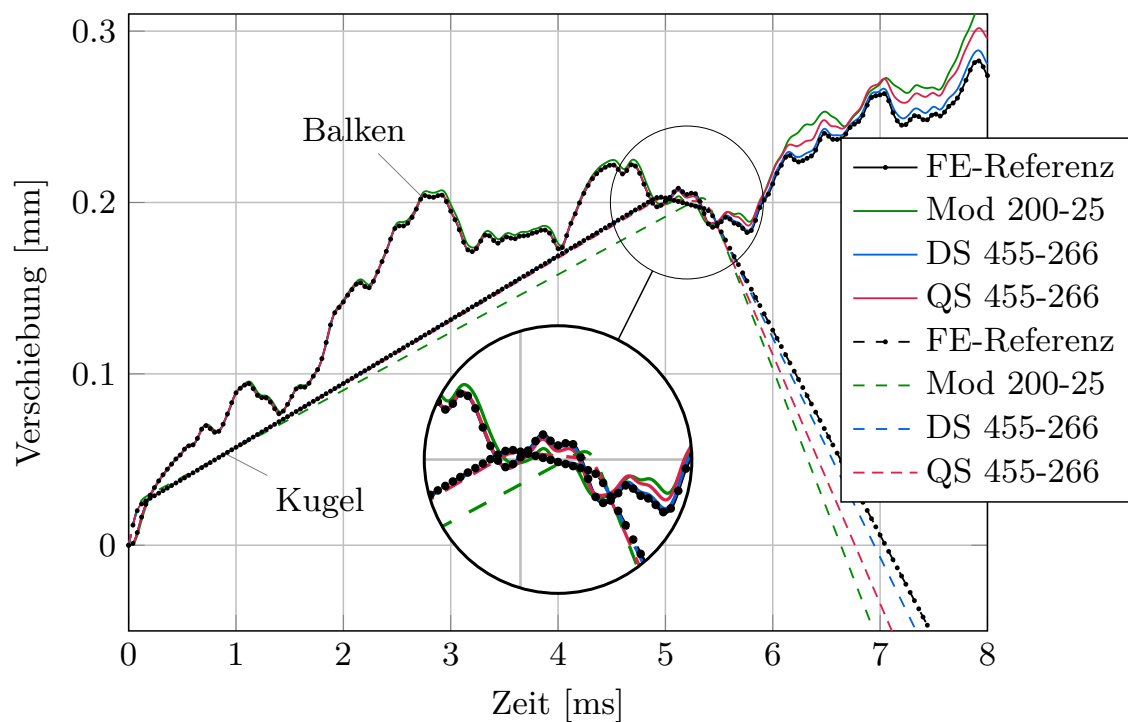


Abbildung 5.10: Verschiebung der Kugel und des Balkens, gemessen gegenüber der Stoßstelle

keit der Kugel resultiert. Der Gradient im Kontaktkraftverlauf ist flacher als im FE-Ergebnis, weshalb die maximale Kontaktkraft etwas später erreicht wird, siehe Abbildung 5.9 links. Der Impuls beim ersten Stoß ist mit 0.0295 N s größer als bei der FE-Lösung mit 0.0291 N s , weshalb die Kugelgeschwindigkeit nach dem ersten Stoß größer ausfällt, siehe Abbildung 5.11. Daraus resultiert eine große Abweichung in der Verschiebung der Kugel, wie in Abbildung 5.10 dargestellt ist. Zudem unterscheidet sich das Schwingungsverhalten des Balkens nach dem Stoß, wie den Abbildungen 5.10 und 5.12 zu entnehmen ist. Aus diesem Grund trifft die Kugel den zurückschwingenden Balken nach 5.23 ms ein zweites Mal. Nach dem ersten Stoß haben die Kugel und der Balken die gleiche Starrkörpergeschwindigkeit von 0.034 m/s , weshalb der zweite Stoß nur auftritt, da sich der Balken aufgrund der beim ersten Stoß angeregten Wellenausbreitung zurückbiegt. Nach dem zweiten Stoß wird die Bewegungsrichtung der Kugel umgekehrt. Die Starrkörpergeschwindigkeit des Balkens nimmt weiter zu auf 0.058 m/s , während die Geschwindigkeit der Kugel -0.162 m/s beträgt. Die kinetische Energie wird beim ersten Stoß zu 89.5% in Dehnungsenergie übertragen. Nach dem zweiten Stoß kann davon 47.5% zurückgewonnen werden. Der Energieverlust durch die im Balken verbleibende Dehnungsenergie kann in der Stoßzahl $e_N = 0.73$ zusammengefasst werden. Beim modal reduzierten Modell wird deutlich, wie sich die Genauigkeit des ersten Stoßes auf das Deformationsverhalten und damit die weiteren Stöße auswirkt.

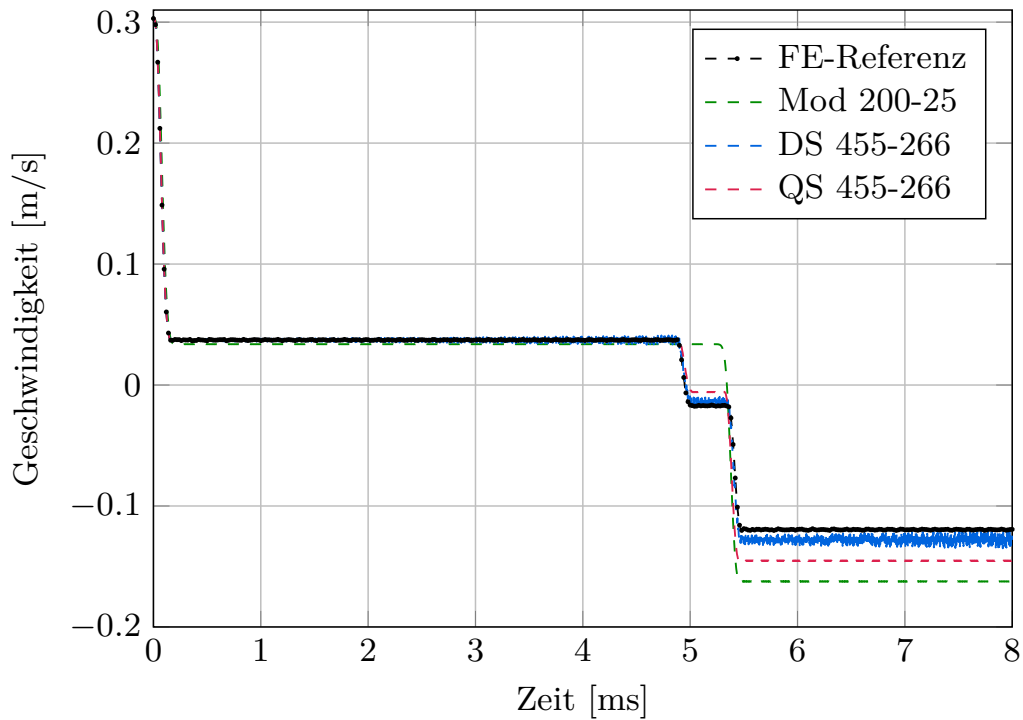


Abbildung 5.11: Geschwindigkeit der Kugel beim Stoß auf den Balken

Mit dem modalen Modell weicht der erste Stoß aufgrund der fehlenden Erfassung der lokalen Deformation stark von der Referenzlösung ab. Diese Abweichung wirkt sich auf das globale Schwingungsverhalten und damit auf die weiteren Stöße aus. Insbesondere das Schwingungsverhalten nach dem zweiten Stoß weicht erheblich von der Referenzlösung ab. Es ist keine sinnvolle Approximation der FE-Ergebnisse möglich. Im Gegensatz zu den Stößen auf die Stäbe in Abschnitt 5.1, sind in diesem Fall keine genaueren qualitativen Aussagen möglich.

Kontaktsimulation mit gedämpftem Kontaktsubmodell (DS)

Zur besseren Erfassung der lokalen Verformung werden beim Balken an 261 Knoten und bei der Kugel an 247 Knoten statische Ansatzfunktionen berücksichtigt. Zusätzlich werden wie beim modalen Modell 200 bzw. 25 innere Moden zur Beschreibung des globalen Deformationsverhaltens verwendet, siehe Tabelle 5.4. Im gedämpften Kontaktsubmodell werden zur Berechnung der Dämpfungsparameter ξ_i^{hf} im Übergangsbereich $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ und als gedämpfte Schwingungsdauer $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001$ s verwendet. Bei höheren Werten für $T_{d,i}^{\text{hf}}$ wird die niederfrequente Dynamik gedämpft. Mit niedrigeren Werten für $T_{d,i}^{\text{hf}}$ kann die numerische Steifigkeit nicht signifikant reduziert werden, weshalb sich die Konvergenzrate im ode15s verschlechtert und $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ oft neu approximiert werden muss. Das wiederum erhöht die Rechenzeit der FMKS-Simulation. Die maximalen Eigenfrequenzen und Systemdimensionen sind relativ ähnlich zum Stoß auf den ebenen Stab.

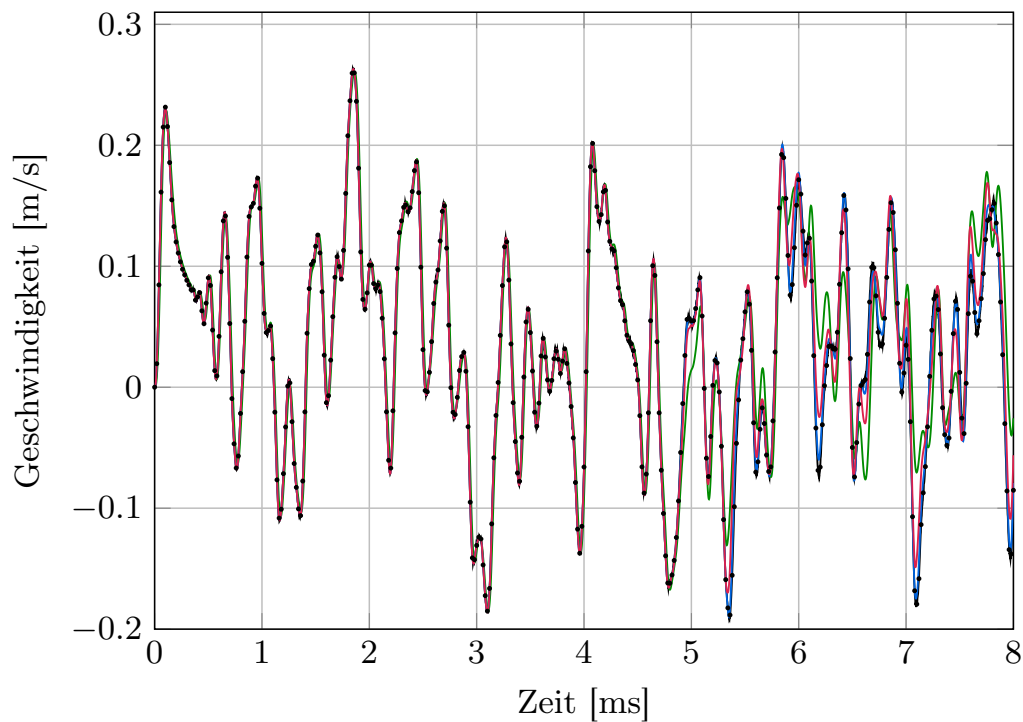


Abbildung 5.12: Geschwindigkeit des Balkens, gemessen gegenüber der Stoßstelle (Legende siehe Abbildung 5.10)

Aufgrund der niedrigen Eigenfrequenzen von 91 Hz, die beim Balken angeregt werden, liegen die Eigenfrequenzen sehr weit auseinander und daher erhöht sich die numerische Steifigkeit. Zur Erfassung der ausgeprägten Balkenschwingungen sind insgesamt relativ kleine Zeitschrittweiten notwendig. Dies wird beim Vergleich der Zeitschrittweite der numerisch weniger steifen modalen Modelle beim Stoß auf den Stab in Tabelle 5.2 und beim Stoß auf den Balken in Tabelle 5.5 ersichtlich. Da die Materialdämpfung relativ gering ist, werden die überlagerten hochfrequenten Schwingungen, die beim Stoß angeregt werden, nur wenig gedämpft. Deshalb bleiben die Zeitschrittweiten auch während der Freiflugphase zwischen den Stößen sehr klein. Zusätzlich nimmt die Anzahl der Approximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im Vergleich zum Stoß auf den Stab zu, da zur Erfassung des zweiten und dritten Stoßes sich die Konvergenzrate im ode15s aufgrund der großen Änderung in den Zuständen verschlechtert und somit $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ neu approximiert werden muss. Aufgrund der Mehrfachstöße und der hohen numerischen Steifigkeit treten im Geschwindigkeitsverlauf der Kugel Schwingungen auf, siehe Abbildung 5.11. Durch die Mehrfachstöße und der längeren Simulationsdauer von 8 ms nimmt die Rechenzeit jedoch signifikant zu, siehe Tabelle 5.5. Die Rechenzeit ist in diesem Fall mit 402 min nur 9 % geringer als bei der dynamischen FE-Simulation.

Durch die bessere Erfassung der lokalen Verformung im Vergleich zum modalen Modell, siehe Abbildung 5.13, stimmt der erste Stoß nahezu mit dem FE-

Ergebnis überein. Resultierend daraus liegt eine gute Übereinstimmung der Verschiebungen und der Geschwindigkeiten beider Körper vor. Der zweite Stoß tritt beim gedämpften Kontaktsubmodell nach 4.88 ms jedoch geringfügig später auf als in der Referenzlösung. Dies ist auf geringfügige Unterschiede im Impuls des ersten Stoßes von 0.0291 N s und dem damit einhergehenden veränderten Schwingungsverhalten des reduzierten Balkenmodells zurückzuführen. Durch den geringeren Impuls ist die Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel mit 0.037 m/s etwas geringer als bei den FE-Ergebnissen. Wie in Abbildung 5.10 dargestellt, ist die Verschiebung der Kugel im Vergleich zur Referenzlösung geringer, weshalb der zweite Stoß beim Zurückschwingen des Balkens dann schwächer ausfällt. Die Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel nach dem zweiten Stoß ist mit -0.014 m/s betragsmäßig kleiner als bei der FE-Lösung. Die Balkengeschwindigkeit beträgt dabei 0.039 m/s. Da die Kugel weniger stark gestoßen wird und sich langsamer vom Balken entfernt, trifft diese früher auf den zurückschwingenden Balken, weshalb der dritte Stoß bereits nach 5.34 ms auftritt. Da sich die Kugel weniger vom Balken entfernt hat als in der FE-Lösung entsteht beim dritten Stoß eine größere Kontaktkraft. Aus diesem Grund ist die Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel nach dem dritten Stoß mit -0.127 m/s betragsmäßig größer als in der Referenzlösung. Der kinetische Energieverlust beim ersten Stoß beträgt 89.5 %, während beim zweiten Stoß 2.8 % und beim dritten Stoß 29.5 % der Energie zurückgewonnen werden. Dieser kinetische Energieverlust der Starrkörperbewegung kann in der Stoßzahl $e_N = 0.6$ zusammengefasst werden. Durch die Wahl der Trennfrequenz Ω^{hf} und der gewählten Dämpfungsparameter sind in Abbildung 5.12 keine Auswirkungen der Dämpfung auf das globale Deformationsverhalten erkennbar. Erst ab dem zweiten Stoß unterscheiden sich die Balkengeschwindigkeiten aufgrund des abweichenden Schwingungsverhaltens von der Referenzlösung.

Kontaktsimulation mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell (QS)

Als nächstes werden die Ergebnisse des quasi-statischen Kontaktsubmodells diskutiert. Mit den Einstellungen $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 20$ kann damit die numerische

Tabelle 5.5: Rechenaufwand beim Stoß auf den Balken

System	Kugel-Balken			
	FE	Modal 200-25	DS 455-266	QS 455-266
CPU [min]	442	16	402	36
J_{ode}	-	1	502	5
nsteps	-	29 629	31 720	16 057
nfailed	-	3764	4768	896
max. Schrittw. [s]	-	1.213e^{-6}	1.777e^{-6}	5.088e^{-6}
min. Schrittw. [s]	-	3.901e^{-9}	7.615e^{-10}	2.065e^{-8}

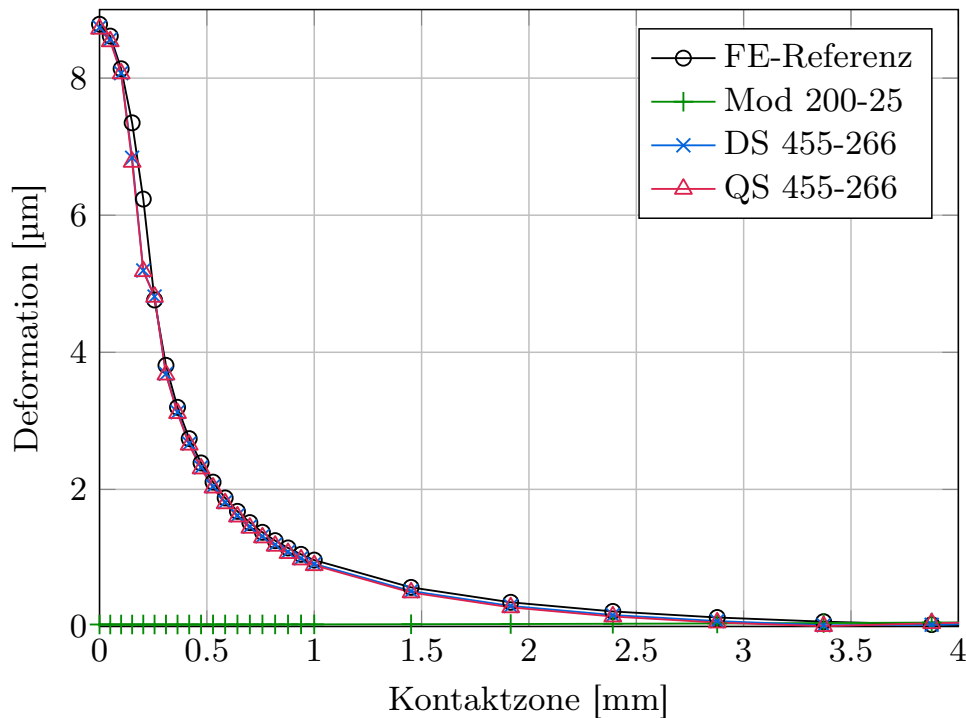


Abbildung 5.13: Deformation der Kontaktfläche beim Stoß auf den Balken

Effizienz im Vergleich zum gedämpften Kontaktsmodell erheblich verbessert werden, siehe Tabelle 5.5. Abbildung 5.12 zeigt, dass mit der gewählten Trennfrequenz Ω^{hf} zusammen mit dem quasi-statischen Kontaktsmodell die Welleneffekte im Balken sehr gut erfasst werden. Aufgrund der Vernachlässigung der hochfrequenten Dynamik in der Zeitintegration wird die numerische Steifigkeit reduziert und das Konvergenzverhalten des ode15s verbessert, wie an der Anzahl der Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ und der Anzahl der fehlgeschlagenen Schritte in Tabelle 5.5 zu erkennen ist. Außerdem sind im Vergleich zum gedämpften Kontaktsmodell größere Zeitschrittweiten möglich. Mit dem quasi-statischen Kontaktmodell sind von allen FMKS-Simulationen am wenigsten Zeitschritte für die Simulationsdauer von 8 ms notwendig. Die Rechendauer kann um 92 % auf 36 min reduziert werden. Im Vergleich zu dem Stoß auf die Stäbe fällt auf, dass die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ vergleichsweise oft neu approximiert werden muss. Der Grund dafür ist jeweils die langsame Konvergenz des Newton-Verfahrens im ode15s beim zweiten und dritten Stoß. Nachdem die Körper sich voneinander entfernt haben werden die Zeitschrittweiten im ode15s aufgrund der langsamen Zeitskalen in der dynamischen Simulation vergrößert. Aufgrund der großen Zeitschrittweiten ist die Konvergenzrate im ode15s bei der Kontakterkennung beim zweiten und dritten Stoß wegen der großen Änderung in den Zuständen zu niedrig und $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ muss neu approximiert werden. Beim zweiten und dritten Stoß müssen im quasi-statischen Kontaktsmodell jeweils zusätzlich die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{qs}}$ neu approximiert werden, da keine Jacobi-Matrix für das Broyden-Verfahren im Speicher vorliegt. Diese beiden Faktoren reduzieren die numerische Effizienz im

Vergleich zu den Stoßsystemen mit nur einem auftretenden Stoß.

Der Kontaktkraftverlauf des ersten Stoßes in Abbildung 5.9 unterscheidet sich nicht signifikant zwischen dem quasi-statischen und dem gedämpften Kontaktsubmodell oder der Referenzlösung. Der Impuls unterscheidet sich minimal von der FE-Lösung, weshalb die Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel mit 0.0369 m/s ebenfalls abweicht. Der zweite Stoß tritt deshalb erst bei 4.89 ms auf und fällt schwächer aus, da aufgrund der kleineren Kugelgeschwindigkeit die Verschiebung geringer ist als beim gedämpften Kontaktsubmodell und der FE-Lösung. Aus diesem Grund wird die Kugel nicht so stark abgebremst sondern bewegt sich mit nur -0.0058 m/s entgegen der Stoßrichtung. Die Starrkörpergeschwindigkeit des Balkens beträgt dabei 0.0387 m/s . Der dritte Stoß, resultierend aus der Schwingung des Balkens, tritt nach 5.31 ms etwas früher auf und fällt dann stärker aus als bei der Referenzlösung und dem gedämpften Kontaktsubmodell, siehe Abbildung 5.9. Die Kugel hat sich nach dem zweiten Stoß nicht weit genug vom zurück schwingenden Balken entfernt, dessen Schwingungsverhalten beim gedämpften Kontaktsubmodell nur wenig von der FE-Lösung abweicht. Deshalb sind die Kontaktkräfte größer. Daraus resultiert eine betragsmäßig größere Starrkörpergeschwindigkeit der Kugel mit -0.145 m/s und des Balkens mit 0.056 m/s im Vergleich zur FE-Lösung. Der kinetische Energieverlust beim ersten Stoß beträgt 87.6% und beim zweiten Stoß werden 1.9% zurückgewonnen. Mit der zurückgewonnenen kinetischen Energie von 37.7% beim dritten Stoß ergibt sich ein gesamter Energieverlust von etwa 49.9% und eine Stoßzahl von $e_N = 0.66$.

Fazit

Mit beiden Kontaktsubmodellen kann die Rechenzeit im Vergleich zur dynamischen FE-Simulation reduziert werden. Das gedämpfte Kontaktsubmodell ist dabei nur um 9% schneller, während das quasi-statische Kontaktsubmodell um etwa 92% schneller ist. Auch hier ist ein klarer Vorteil des quasi-statischen Kontaktsubmodells erkennbar. Durch die Vernachlässigung der hochfrequenten Dynamik in der Zeitsimulation kann die numerische Steifigkeit weiter reduziert werden als mit dem gedämpften Kontaktsubmodell, siehe Tabelle 5.5. Zusätzlich kann das dabei entstehende nichtlineare Gleichungssystem mit dem Broyden-Verfahren effizient gelöst werden. Aufgrund der guten Erfassung der lokalen Deformationen kann die Vergleichsspannung entlang der Symmetrieachse des Balkens mit den Kontaktsubmodellen in Kombination mit der Berechnung über Spannungsmoden sehr gut erfasst werden, wie Abbildung 5.14 zu entnehmen ist. Die Modelle werden mit Elementen mit reduzierte Integration vernetzt um shear locking bei der Biegung zu vermeiden. Daher ist die Rechenzeit der dynamischen FE-Simulation trotz der von 2 ms auf 8 ms erhöhten Simulationsdauer vergleichbar mit dem Stoßsystem Kugel-Stab mit Innenradius, siehe Tabelle 5.2.

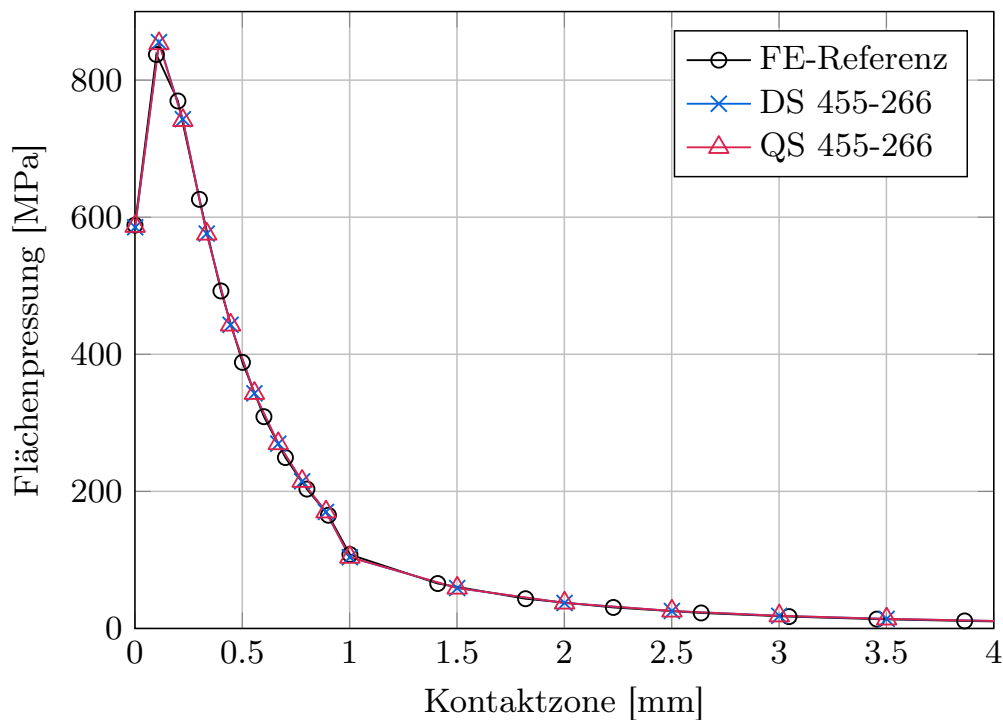


Abbildung 5.14: Flächenpressung in der Kontaktzone des Balkens

Dieses Beispiel zeigt deutlich den Einfluss der Genauigkeit der Modellierung des ersten Stoßes auf das Schwingungsverhalten und die weiteren auftretenden Stöße. Mit dem modalen Modell tritt aufgrund der Abweichungen im ersten Stoß nur ein zweiter Stoß auf. Bei beiden Kontaktsubmodellen werden zwar alle drei Stöße erfasst, jedoch sind auch hier geringfügige Unterschiede erkennbar, die sich auf das Bewegungsverhalten beider Körper auswirken, wie in den Abbildungen 5.10 bis 5.12 dargestellt ist. Die auftretenden Unterschiede zwischen beiden Kontaktsubmodellen resultieren aus den geringfügigen Abweichungen im Impuls des ersten Stoßes. Kleine Unterschiede im Bewegungsverhalten wirken sich demnach stark auf die nachfolgenden Stöße aus, was die numerische Simulation erschwert. Es tritt ein chaotisches Verhalten aufgrund der angeregten Balkenschwingungen auf.

5.3 Stoß der Stahlkugel auf das Doppelpendel

Die in Abschnitt 5.1 und 5.2 vorgestellten Ergebnisse beschränken sich jeweils auf den Stoß von zwei freien Körpern. Als nächstes werden die entwickelten Kontaktsubmodelle mit dem Stoß der Kugel auf ein gebundenes Mehrkörpersystem verifiziert. Als Mehrkörpersystem wird das Doppelpendel aus Abbildung 4.1 bzw. Tabelle 4.2 verwendet. Die Lagerung im Inertialsystem und zwischen den Pendelkörpern wird als ideal angenommen. Die Stoßgeschwindigkeit der Kugel auf das Pendel von $v = 0.5 \text{ m/s}$ ist so gewählt, dass keine plastische Verformung in der Kontaktzone des unteren Pendelkörpers auftritt. Die Simulationsdauer

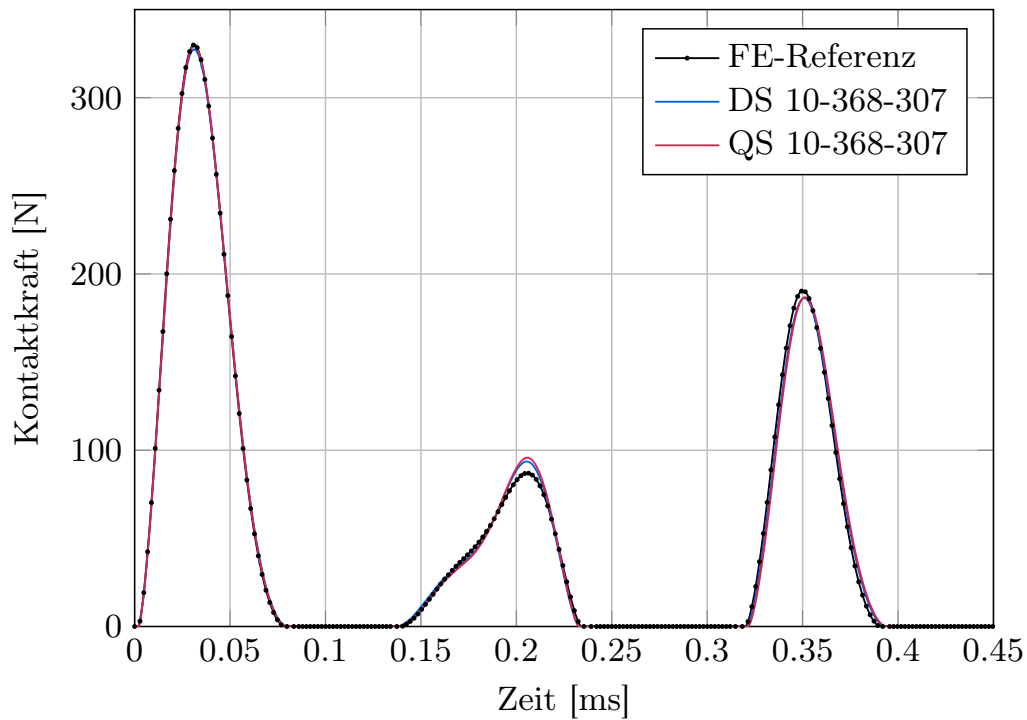


Abbildung 5.15: Kontaktkraft beim Stoß auf das Doppelpendel

beträgt hier 5 ms. Abbildung 5.15 zeigt, dass mehrere Stöße innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne auftreten. Dabei werden zum einen Schwingungen in den Pendelkörpern angeregt. Zum anderen entsteht aufgrund der Lagerung zwischen den Pendelkörpern und dem Inertialsystem eine Rotationsbewegung beider Pendelkörper um die z -Achse. Der Fokus in dieser Stoßanalyse liegt auf der effizienten Erfassung des Kontaktvorgangs und der daraus resultierenden großen Bewegung der gestoßenen Pendelkörper. Außerdem wird der Einfluss der Vernachlässigung der Koppelterme $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ beim gedämpften Kontaktsubmodell sowie der Einfluss der Bindungsgleichungen auf die Ergebnisse der Stoßanalyse und die numerische Effizienz untersucht.

Als erstes werden die Referenzergebnisse der dynamischen FE-Simulation diskutiert. In Abbildung 5.16 ist ein Ausschnitt der Verschiebung der Kugel und des unteren Pendelkörpers dargestellt. Bei Kugel und Pendel wird die Verschiebung gegenüber der Stoßstelle gemessen. Zur Diskussion der Ergebnisse wird die Geschwindigkeit beider Körper an diesem Punkt direkt gegenüber der Stoßstelle gewählt. Aufgrund der Lagerung tritt nach dem Stoß eine überlagerte Bewegung beider Pendelkörper in x - und y -Richtung auf, siehe Abbildung 5.17. In Abbildung 5.18 ist die Geschwindigkeit der Kugel abgebildet. Nach dem ersten Stoß bewegt sich die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 0.389 m/s weiterhin in Stoßrichtung. Durch die relativ hohe Stoßgeschwindigkeit werden in der Kugel Strukturschwingungen angeregt, wie in Abbildung 5.18 gemessen gegenüber der Stoßstelle zu erkennen ist. Die Geschwindigkeit des Pendels, dargestellt in

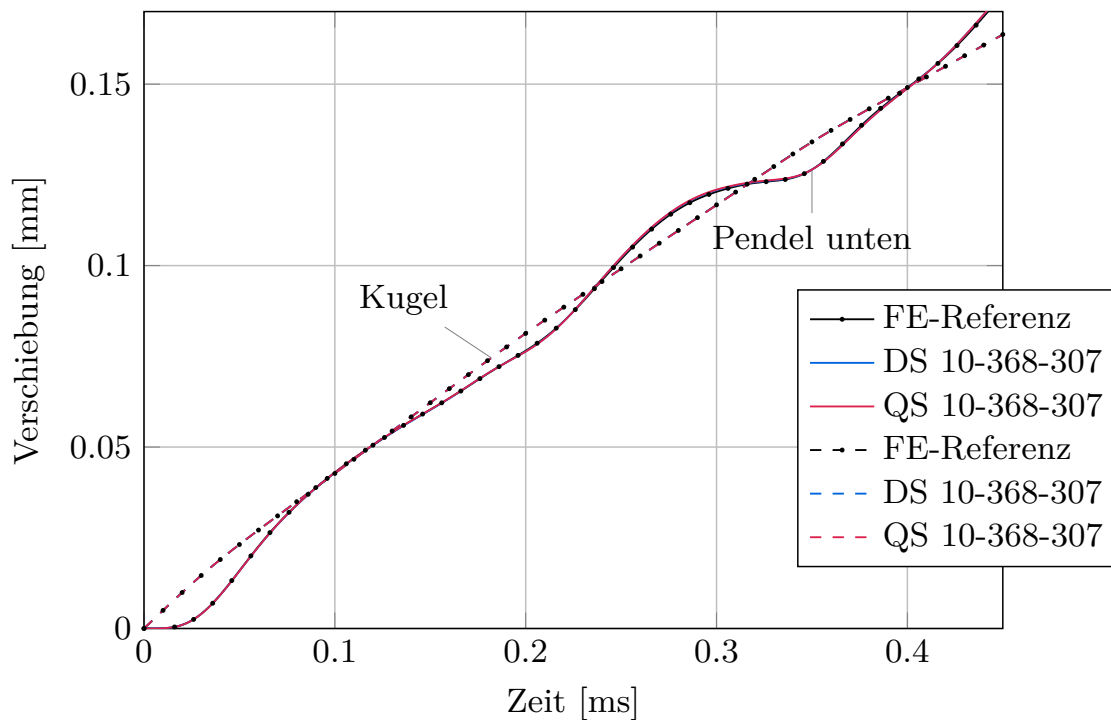


Abbildung 5.16: Ausschnitt der Verschiebung der Kugel und des unteren Pendelkörpers, gemessen gegenüber der Stoßstelle

Abbildung 5.19, beträgt nach dem ersten Stoß 0.484 m/s . Der erste Stoß endet nach 0.08 ms . Aufgrund der im Pendel angeregten Schwingungen, erkennbar im Verschiebungsverlauf des Pendels in den Abbildungen 5.16 und 5.17, schwingt dieses zurück und nach 0.138 ms tritt ein zweiter Stoß auf, der nach 0.234 ms vorüber ist. Die Geschwindigkeit des Pendels beträgt zum Zeitpunkt des zweiten Stoßes 0.362 m/s . Nach dem zweiten Stoß hat sich die Kugelgeschwindigkeit auf 0.352 m/s verringert, mit der sie sich weiter in Stoßrichtung bewegt. Nach 0.32 ms tritt ein dritter Stoß auf. Die Geschwindigkeit des unteren Pendels ist zu diesem Zeitpunkt -0.0841 m/s , siehe Abbildung 5.19. Das untere Pendel bewegt sich aufgrund der durch den Stoß angeregten Schwingungen der Kugel entgegen, weshalb ein dritter Stoß auftritt. Nach dem dritten Stoß, der nach 0.392 ms endet, nimmt die Kugelgeschwindigkeit auf 0.292 m/s ab. Die Geschwindigkeit des unteren Pendelkörpers beträgt zu diesem Zeitpunkt 0.390 m/s . Im weiteren Simulationsverlauf bleibt die Kugelgeschwindigkeit konstant, während die Geschwindigkeit des unteren Pendels aufgrund der beim Stoß angeregten Strukturschwingungen zwischen 0.2 m/s und 1 m/s oszilliert, wie Abbildung 5.19 aufzeigt. Der untere Pendelkörper bewegt sich nach den Stößen in die positiven x - und y -Richtungen während sich der obere Pendelkörper in die negative x -Richtung bewegt, wie in Abbildung 5.17 dargestellt ist. Beim dritten Stoß wird die Kugel so weit abgebremst, dass sich das Pendel von der Kugel weg bewegt und keine weiteren Stöße mehr auftreten. Der Abstand der Kontaktzonen zwischen den einzelnen Stößen ist im Vergleich zum Stoß auf den Balken sehr gering, wie Abbildung 5.16

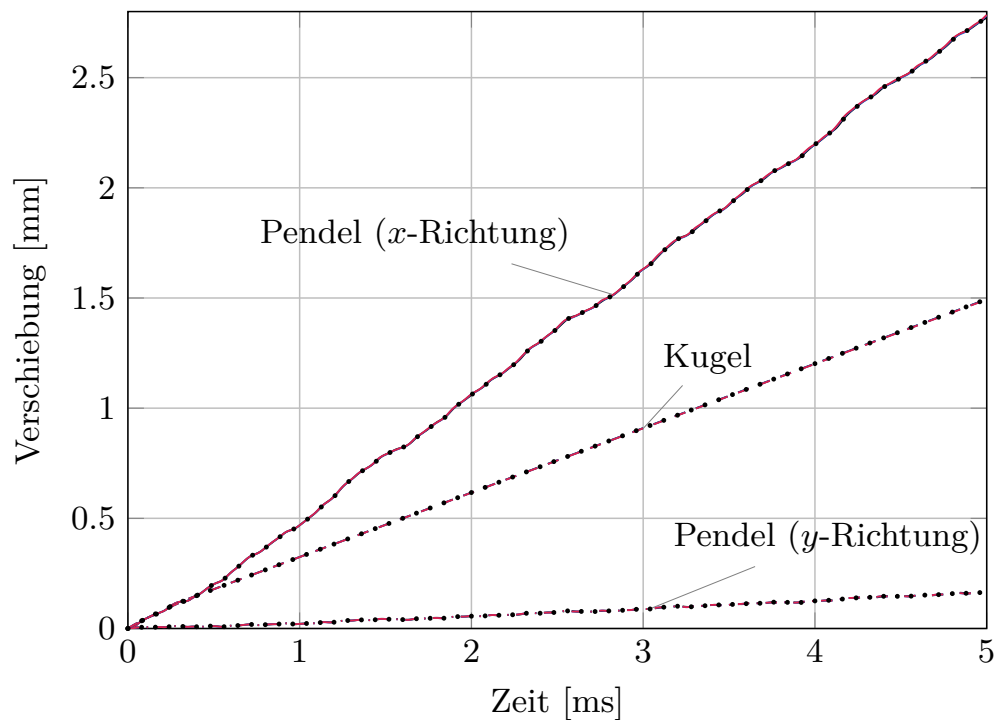


Abbildung 5.17: Verschiebung der Kugel und des unteren Pendelkörpers (x - und y -Richtung), gemessen gegenüber der Stoßstelle (Legende siehe Abbildung 5.16)

entnommen werden kann. Da dieser Abstand sehr klein ist, treten die drei Stöße innerhalb von 0.4 ms auf. Während sich die Kugel in Stoßrichtung bewegt tritt der Mehrfachstoß resultierend aus dem Schwingungsverhalten des unteren Pendelkörpers auf. Aufgrund der höheren Stoßgeschwindigkeit und der Anordnung der Pendel ist die Verschiebung des unteren Pendelkörpers im Vergleich zu den bisher untersuchten Stoßsystemen viel größer.

Kontaktsimulation mit dem gedämpften Kontaktsubmodell (DS)

Wie in Abschnitt 5.2 aufgezeigt, können mit dem modalen Modell die Mehrfachstöße nicht genau erfasst werden, weshalb bei diesem Stoßsystem in der FMKS-Simulation nur die CB-Modelle verwendet werden. Die passende Anzahl an inneren Moden wird nach Abschnitt 4.3 bestimmt. Zur Beschreibung der globalen Deformation reichen im unteren, gestoßenen Pendelkörper 25 Eigenmoden bis etwa 35 kHz aus, während im oberen Pendelkörper zehn Eigenmoden bis 15.1 kHz verwendet werden, siehe Tabelle 5.6. Die niedrigste Eigenfrequenz des unteren Pendelkörpers ist 1.93 kHz und die höchste aufgrund der statischen Ansatzfunktionen 1.68 MHz. Für die Kugel werden wie in den vorigen Abschnitten 25 Eigenmoden bis zu 131 kHz verwendet. Bei den bisher untersuchten Systemen haben die maximalen Eigenfrequenzen beider Körper etwa die gleiche Größenordnung.

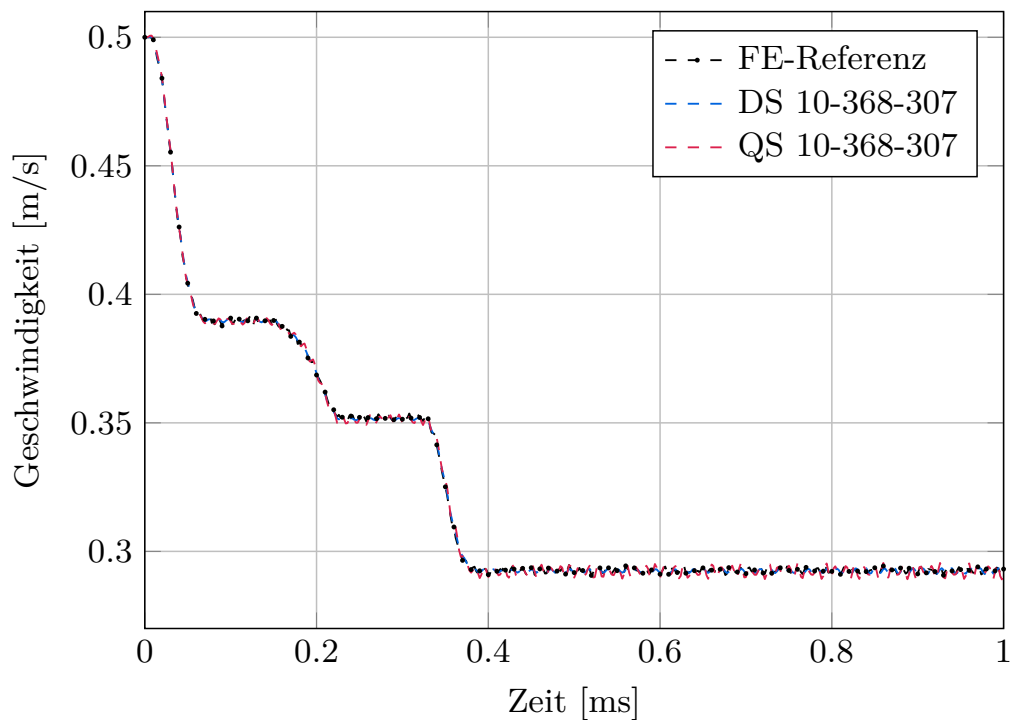


Abbildung 5.18: Geschwindigkeit der Kugel beim Stoß auf das Doppelpendel

Tabelle 5.6 ist zu entnehmen, dass der Unterschied in der maximalen Eigenfrequenz von Kugel und Pendel größer ist als bei den bisher untersuchten Systemen. Der Grund liegt in der Geometrie des Pendelkörpers und die Lage der verwendeten statischen Ansatzfunktionen auf diesem Pendel. Da die maximalen Eigenfrequenzen von Kugel und Pendel sehr weit auseinander liegen und beim Stoß alle hohen Frequenzen in den Körpern angeregt werden erhöht sich die numerische Steifigkeit bei diesem Stoßsystem. Da das gedämpfte Kontaktsmodell lediglich für numerisch weniger steife Systeme verwendet werden kann, siehe Abschnitt 5.1, kann in diesem Fall die numerische Effizienz nicht verbessert werden, wie Tabelle 5.7 zeigt. Aufgrund der niedrigen Eigenfrequenzen des reduzierten unteren Pendelkörpers, siehe Tabelle 5.6, ist die kleinste Schwingungsdauer viel größer als bei der Kugel. Zur Berechnung der Dämpfungsparameter sind daher große Werte für $T_{d,i}^{\text{hf}}$ erforderlich. Die kleinste sinnvolle gedämpfte Schwingungsdauer zur Berechnung der Dämpfung beim Pendel ist daher $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001 \text{ ms}$, wobei damit erst die letzten 92 Eigenfrequenzen größer als 1 MHz gedämpft werden. Die vorigen 254 künstlichen Eigenfrequenzen bleiben ungedämpft. Da bei der Kugel mit $T_{d,i}^{\text{hf}} > 0.001 \text{ ms}$ bereits die niederfrequente Dynamik gedämpft wird, werden hier zur Berechnung der Dämpfungsparameter für beide Körper unterschiedliche Werte für $T_{d,i}^{\text{hf}}$ verwendet. Eine gute numerische Effizienz kann mit $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.001 \text{ ms}$ für beide Körper oder mit $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0025 \text{ ms}$ für das Pendel und $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005 \text{ ms}$ für die Kugel erzielt werden. Letztgenannte Kombination wird mit $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ zum Vergleich mit der FE-Lösung und dem quasi-statischen

Kontaktsubmodell verwendet. Aufgrund der niedrigen Eigenfrequenzen im oberen Pendelkörper wird hier auf Dämpfung verzichtet.

Beim gedämpften Kontaktsubmodell stimmt der Impuls von 0.0121 N s beim ersten Stoß mit der Referenzlösung überein, weshalb die Kugelgeschwindigkeit nach dem ersten Stoß wie beim Referenzsystem 0.389 m/s beträgt. Damit stimmt die Starrkörperbewegung der Kugel nach dem Stoß sehr gut mit der FE-Lösung überein. Der zweite Stoß erfolgt nach 0.136 ms jedoch etwas früher als bei der Referenzlösung und endet nach 0.233 ms minimal früher. Aufgrund geringfügiger Abweichungen im Schwingungsverhalten des reduzierten vom originalen Modell schwingt der untere Pendelkörper in der FMKS-Simulation beim ersten Stoß nicht so weit in Stoßrichtung wie in der Referenzlösung. Daher schwingt er früher und weiter zurück als im FE-Modell. Da sich die Bewegung der Kugel nicht von der Referenzlösung unterscheidet trifft sie früher auf das zurück schwingende Pendel und der zweite Stoß fällt stärker aus als im FE-Ergebnis. Daher fällt der Impuls beim zweiten Stoß mit 0.0042 N s größer aus als in der Referenzlösung mit 0.0041 N s. Die Kugel wird dabei stärker gebremst, weshalb ihre Geschwindigkeit nach dem zweiten Stoß noch 0.351 m/s beträgt. Daher tritt der dritte Stoß nach 0.321 ms etwas später als in der FE-Simulation auf und ist nach 0.393 ms beendet. Dieser lenkt den Pendelkörper weiter in Stoßrichtung aus und weil die Kugel beim zweiten Stoß stärker abgebremst wird, fällt der dritte Stoß geringfügig schwächer aus als in der FE-Lösung. Dies ist auf die Abweichung im Schwingungsverhalten des Pendels zurückzuführen. Die Kugelgeschwindigkeit ist nach dem dritten Stoß etwas größer als in der Referenzlösung, siehe Abbildung 5.19. Wie den Abbildungen 5.17 bis 5.19 zu entnehmen ist, kann das globale Bewegungsverhalten dennoch sehr gut approximiert werden, da die Abweichung der Stöße und des Schwingungsverhaltens zur FE-Lösung minimal sind. Da im Vergleich zum Stoß auf den Balken die drei Stöße in kürzerer Zeit stattfinden, ist ein chaotisches Verhalten aufgrund der im Pendel angeregten Schwingungen nicht so stark ausgeprägt. Die Rechenzeit kann mit dem gedämpften Kontaktsubmodell im Vergleich zur dynamischen FE-Simulation jedoch nicht reduziert werden, siehe Tabelle 5.7. Mit den möglichen Dämpfungsparametern kann die numerische Steifigkeit in diesem Fall nicht weit genug verringert werden. Deshalb sind 418 Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ sowie sehr kleine Zeitschrittweiten erforderlich

Tabelle 5.6: Reduzierte Modelle von der Kugel und dem Doppelpendel

	Pendel (oben)	Pendel (unten)	Kugel
Innere Moden	10	25	25
Trennfrequenz Ω^{hf} [kHz]	-	35	131.5
stat. Ansatzfunktionen	-	349	288
max. Eigenfrequenz [MHz]	0.015	1.68	21.1
Dauer pre-processing [min]	0.1	24	1.5

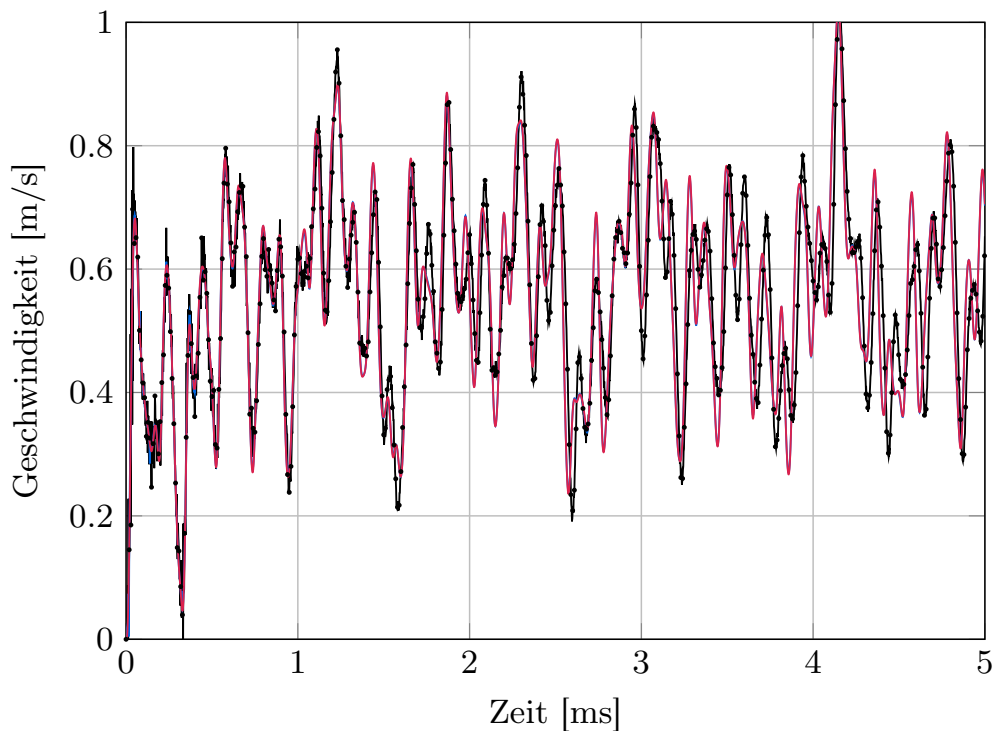


Abbildung 5.19: Geschwindigkeit des unteren Pendelkörpers, gemessen gegenüber der Stoßstelle (Legende siehe Abbildung 5.16)

um die Konvergenz des Newton-Verfahrens im ode15s zu gewährleisten. Dieses Verhalten ist vergleichbar mit dem Stoß auf den Stab mit Innenradius. Durch die schwache Dämpfung werden die beim Stoß angeregten Schwingungen im Pendel wenig gedämpft, weshalb auch nach drei Stößen weiterhin sehr kleine Zeitschritte gewählt werden müssen. Die in der FE-Lösung auftretenden Schwingungen im Geschwindigkeitsverlauf der Kugel werden durch die Dämpfung nicht signifikant gedämpft, siehe Abbildung 5.18.

Kontaktsimulation mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell (QS)

Der Impuls des ersten Stoßes stimmt beim quasi-statischen Kontaktsubmodell sehr gut mit der FE-Lösung überein. Daher beträgt die Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß wie beim Referenzsystem 0.389 m/s. Der zweite Stoß tritt zum gleichen Zeitpunkt auf wie in der FE-Lösung. Er endet nach 0.233 ms jedoch geringfügig früher. Die Stoßkraft ist wie beim gedämpften Kontaktsubmodell auch hier höher als in der FE-Simulation. Das Schwingungsverhalten des unteren reduzierten Pendels weicht auch hier bereits nach dem ersten Stoß minimal vom Referenzergebnis ab, siehe Abbildung 5.16. Während die Bewegung der Kugel mit der Referenzlösung überein stimmt, schwingt das Pendel vor dem zweiten Stoß weiter zurück, was in einer größeren Kontaktkraft als in der FE-Lösung resultiert, siehe Abbildung 5.15. Wie beim gedämpften Kontaktsubmodell fällt der Impuls des zweiten Stoßes mit 0.0042 N s ebenfalls größer aus. Nach dem

zweiten Stoß bewegt sich die Kugel geringfügig langsamer als in der Referenzlösung. Daher weicht der Zeitpunkt des dritten Stoßes mit 0.322 ms minimal von der FE-Lösung ab. Aufgrund der stärkeren Pendelschwingungen, hervorgerufen durch den zweiten stärkeren Stoß, sind die Kontaktkräfte beim dritten Stoß ähnlich wie beim gedämpften Kontaktsubmodell kleiner als in den FE-Ergebnissen. Der dritte Stoß endet nach 0.394 ms deshalb etwas später als in der FE-Lösung. Das globale Bewegungsverhalten nach den Stößen unterscheidet sich auch beim quasi-statischen Kontaktsubmodell nicht signifikant von der Referenzlösung oder dem gedämpften Kontaktsubmodell, wie in den Abbildungen 5.17 bis 5.19 dargestellt ist. Aufgrund der erhöhten Stoßgeschwindigkeit von $v = 0.5 \text{ m/s}$ treten sowohl in der Referenzlösung als auch in den FMKS-Simulationen hochfrequente Schwingungen in der Kugelgeschwindigkeit auf, siehe Abbildung 5.18. Die Kugelgeschwindigkeit wird gegenüber der Stoßstelle gemessen. Diese Strukturschwingungen resultieren aus der globalen Deformation der Kugel, die in diesem Fall stärker angeregt wird. Beim quasi-statischen Kontaktsubmodell sind diese aufgrund der fehlenden Dämpfung stärker ausgeprägt als beim gedämpften Kontaktsubmodell oder der FE-Lösung. Einen negativen Einfluss auf die numerische Effizienz haben diese Schwingungen nicht, wie Tabelle 5.7 zu entnehmen ist. Die Zeitschrittweiten sind beim quasi-statischen Kontaktsubmodell relativ groß. Durch die Vernachlässigung der hochfrequenten Dynamik kann die numerische Steifigkeit so weit reduziert werden, dass die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ im ode15s über die gesamte Simulationsdauer konstant ist. Da die Körper sich zwischen den einzelnen Stößen nicht weit voneinander entfernen wird die Zeitschrittweite im Gegensatz zum Stoß auf den Balken zwischen den Stößen nicht signifikant vergrößert, weshalb sich die Konvergenzrate beim zweiten und dritten Stoß nicht verschlechtert. Die Konvergenz der Nullstellensuche im quasi-statischen Kontaktsubmodell ist sehr gut und hat in diesem Fall mit den Einstellungen $\varepsilon_{\text{qs}} = \varepsilon$ und $k_{\text{max}} = 50$ keine negativen Auswirkungen auf die Konvergenzrate des MATLAB-Lösers ode15s. Da erheblich größere Zeitschritte möglich sind, werden insgesamt weniger Zeitschritte benötigt und die Rechenzeit kann im Vergleich zur dynamischen FE-Simulation um 85 % auf 60 min reduziert werden. Aufgrund der erheblich besseren numerischen Effizienz mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell

Tabelle 5.7: Rechenaufwand beim Stoß auf das Doppelpendel

System	Kugel-Doppelpendel		
	FE	DS 10-368-307	QS 10-368-307
CPU [min]	412	891	60
$\mathbf{J}_{\text{ode}}$	-	418	1
nsteps	-	20 811	9896
nfailed	-	3586	1185
max. Schrittw. [s]	-	$1e^{-6}$	$1e^{-6}$
min. Schrittw. [s]	-	$7.773e^{-12}$	$3.532e^{-8}$

ist es auch in diesem Fall dem gedämpften Kontaktsubmodell vorzuziehen, da die Ergebnisse nahezu identisch sind. Kleine Abweichungen im Kontaktkraftverlauf zwischen den Kontaktsubmodellen in Abbildung 5.15 resultierend aus minimalen Abweichungen durch den Penalty-Faktor.

5.3.1 Einfluss der Bindungsgleichungen

In der Herleitung der Grundlagen des quasi-statischen Kontaktsubmodells nach Abschnitt 3.7 wird ein System aus freien Einzelkörpern betrachtet und die Bindungsgleichungen vernachlässigt. In diesem Abschnitt wird anhand des Stoßsystems Kugel-Doppelpendel gezeigt, dass die hochfrequenten elastischen Koordinaten in diesem Fall keinen Einfluss auf die Bindungsgleichungen haben und daher vernachlässigt werden können. Die Lagerung zwischen den Pendelkörpern sowie dem oberen Pendelkörper und der Umgebung schränken die Starrkörperfreiheitsgrade soweit ein, dass jeweils lediglich eine Rotation um die z -Achse, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, möglich ist. Aus diesen Lagerungen resultieren zehn algebraische Bindungsgleichungen, siehe Abschnitt 2.5.2, was zu dem durch Gl. (2.129) dargestellten DAE-System führt. Dieses DAE-System besteht beim gedämpften Kontaktsubmodell aus 1476 Gleichungen und beim quasi-statischen Kontaktsubmodell durch die Vernachlässigung der Dynamik der hochfrequenten elastischen Koordinaten aus 134 Gleichungen. Somit werden bei letzterem in den Bindungsgleichungen nur niederfrequenten elastischen Koordinaten berücksichtigt, während die hochfrequenten vernachlässigt werden. Die Vernachlässigung wird hier damit begründet, dass die hochfrequenten elastischen Koordinaten lediglich die lokale Verformung beschreiben. Diese hat in diesem Fall keinen Einfluss auf die Bindungen. Das DAE-System wird in jedem Integrationsschritt über die QR-Zerlegung nach Abschnitt 2.5.3 in Zustandsform überführt. Anschließend kann dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit dem MATLAB-Löser `ode15s` integriert werden. Dabei ist in jedem Schritt ein zusätzlicher Rechenaufwand für die QR-Zerlegung nötig. Dieser ist im Vergleich zur Kontaktsuche und Kontaktkraftberechnung über den Kontaktalgorithmus jedoch zu vernachlässigen. Wird das quasi-statische Kontaktsubmodell verwendet, so ist dieser Rechenaufwand ebenfalls gegenüber der zusätzlichen numerisch aufwendigen Nullstellensuche zur Berechnung des lokalen Deformationsfelds vernachlässigbar. Bei dem hier untersuchten Stoßsystem wird die numerische Effizienz durch die QR-Zerlegung demnach nicht negativ beeinflusst. Bei der Projektion mit der QR-Zerlegung werden die Bindungsgleichungen $\mathbf{c}$ in Gl. (2.129) auf Positionsebene eingehalten. Die maximale absolute Abweichung der Bindungsgleichungen von $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ des in diesem Abschnitt untersuchten Systems beträgt über die gesamte Simulationsdauer beim gedämpften Kontaktsubmodell $2.196\text{e}^{-12}\text{m}$ und beim quasi-statischen $4.469\text{e}^{-14}\text{m}$, weshalb davon ausgegangen wird, dass die Bindungsgleichungen zu jedem Zeitpunkt eingehalten werden. Anhand dieser Werte wird deutlich, dass die Vernachlässigung der hochfrequenten elastischen Koordinaten bei der Berechnung der Bindungsgleichungen in diesem Fall erlaubt ist.

5.3.2 Einfluss der Koppelterme

Die Grundlage des quasi-statischen Kontaktsubmodells ist die Vernachlässigung der Trägheitskopplung durch $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$. Da beim gedämpften Kontaktsubmodell diese Koppelterme noch auftreten, wird in der folgenden Untersuchung die Trägheitskopplung $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ im gedämpften Kontaktsubmodell ebenfalls vernachlässigt. Über einen anschließenden Vergleich mit den Ergebnissen ohne Vernachlässigung von $\mathbf{C}_r^{\text{hf}}$ kann gezeigt werden, dass der Einfluss der hochfrequenten Koppelterme auch bei den hier untersuchten größeren Rotationsbewegungen vernachlässigt werden kann. Beim gedämpften Kontaktsubmodell werden für das Pendel $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0025 \text{ ms}$ und für die Kugel $T_{d,i}^{\text{hf}} = 0.0005 \text{ ms}$ mit jeweils $\xi_{t,i}^{\text{hf}} = 0.05$ zur Berechnung der Dämpfungsparameter verwendet. In Abbildung 5.20 sind die Kontaktkraftverläufe beim Stoß der Kugel mit $v = 0.5 \text{ m/s}$ auf das Doppelpendel mit und ohne Trägheitskopplung dargestellt. Das globale Verhalten der Kontaktkräfte ist identisch, es sind jedoch hochfrequente Schwingungen beim ersten Stoß ohne Trägheitskopplung zu erkennen. In Abbildung 5.21 ist der relative Fehler der Verschiebungen an den Knoten 55 und 58 des unteren Pendelkörpers in x - und y -Richtung dargestellt. Knoten 55 befindet sich gegenüber der Stoßstelle und Knoten 58 ist der Verbindungsknoten zwischen dem unteren und dem oberen Pendelkörper. Es sind zwar Unterschiede zwischen den Simulationen mit und ohne Trägheitskopplung erkennbar, jedoch sind diese vernachlässigbar klein. Der maximale relative Fehler in der Verschiebung beträgt nach dem Kontaktvorgang etwa -0.04% , siehe Abbildung 5.21. Durch die Vernachlässigung der

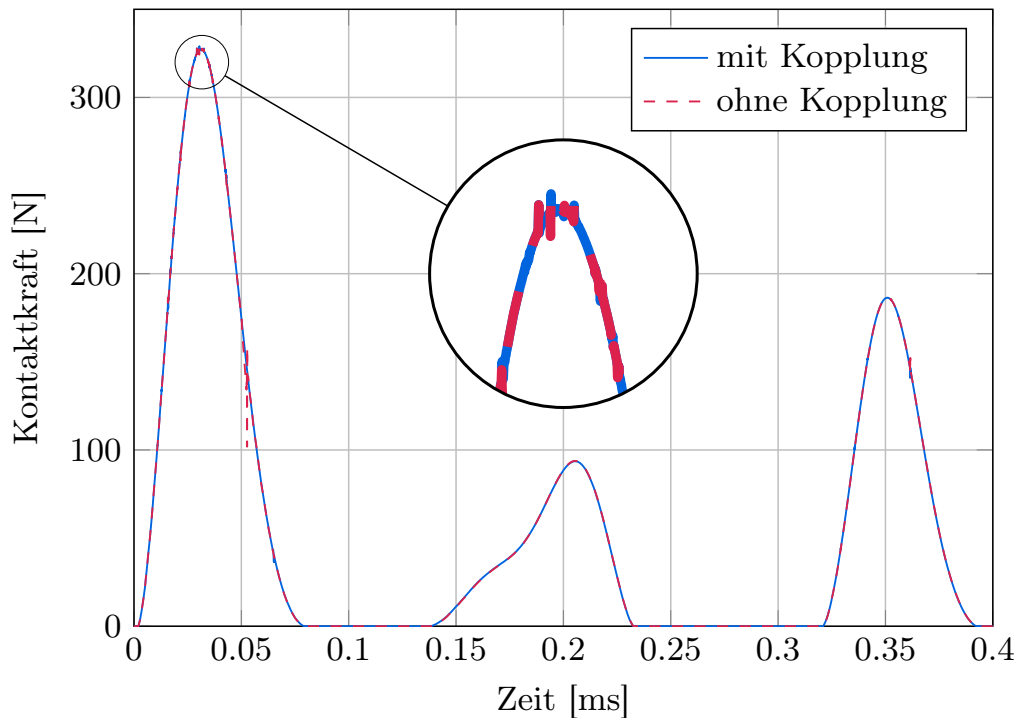


Abbildung 5.20: Kontaktkraftverlauf mit und ohne Trägheitskopplung

Trägheitskopplung verschlechtert sich jedoch die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens im MATLAB-Löser ode15s. Die Anzahl der Neuapproximationen von $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ steigt von 418 auf 531 und damit die Rechenzeit von 891 min auf 1073 min. Die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\text{ode}}$ wird zur Verbesserung der Konvergenzrate sehr oft neu approximiert und die Zeitschrittweiten mit $9.27\text{e}^{-16}\text{s}$ sehr klein gewählt um im Rahmen der Fehlertoleranzen die neuen Zustände über das Newton-Verfahren im ode15s zu berechnen. Die häufige Anpassungen der Zeitschrittweiten rufen die in Abbildung 5.20 dargestellten numerischen Schwingungen im Kontaktkraftverlauf hervor. Aufgrund dieser Schwingungen ist der relative Fehler der Verschiebung während des Kontaktvorgangs größer als danach und soll hier nicht betrachtet werden. Der maximale absolute Fehler im Kontaktkraftverlauf ist aufgrund der Schwingungen mit 12 N jedoch relativ gering. Die maximale Abweichung der Bindungsgleichungen von $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ beträgt bei der Vernachlässigung der Trägheitskopplung $1.515\text{e}^{-12}\text{m}$ im Vergleich zu $2.196\text{e}^{-12}\text{m}$ ohne Vernachlässigung. Daher wird auch hier davon ausgegangen, dass die Bindungsgleichungen zu jedem Zeitpunkt eingehalten werden. Zusammenfassend gilt in diesem Fall, dass die Vernachlässigung der Trägheitskopplung keine signifikanten Auswirkungen auf das Bewegungsverhalten hat.

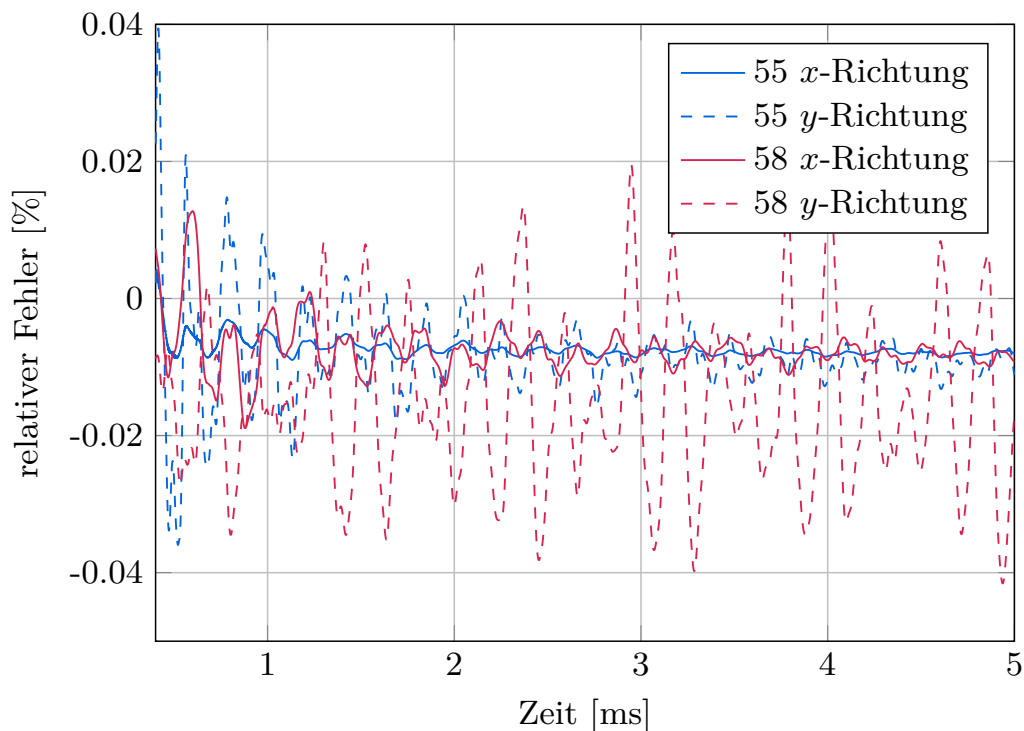


Abbildung 5.21: Ausschnitt des relativen Fehlers in der Verschiebung an Knoten 55 (blau) und 58 (rot) in x - und y -Richtung

Es kann zusammengefasst werden, dass die Trägheitskopplung beim untersuchten Stoßsystem vernachlässigt werden darf, jedoch im gezeigten Fall die numerische Effizienz des gedämpften Kontaktsubmodells verschlechtert. Dabei gilt es zu erwähnen, dass die numerische Effizienz auch mit der Trägheitskopplung verhältnismäßig schlecht ist, siehe Tabelle 5.7. Diese Vernachlässigung von C_r^{hf} ist die Grundlage des quasi-statischen Kontaktsubmodells nach Abschnitt 3.6. Da sich die Ergebnisse nicht signifikant unterscheiden, darf das quasi-statische Kontaktsubmodell auch bei der hier gezeigten Bewegung verwendet werden und ist gleichzeitig deutlich effizienter als das gedämpfte Kontaktsubmodell. Die hochfrequente Kopplung in Kombination mit dem Buckens-System hat keinen relevanten Einfluss auf das physikalisch relevante niederfrequente Bewegungsverhalten. Bei numerisch steifen Systemen, wie dem hier verwendeten gedämpften Kontaktsubmodell, kann jedoch durch die Vernachlässigung der Trägheitskopplung das Konvergenzverhalten des MATLAB-Lösers für steife Differentialgleichungssysteme negativ beeinflusst werden. Dies tritt beim quasi-statischen Kontaktsubmodell aufgrund der reduzierten numerischen Steifigkeit durch die Vernachlässigung der hochfrequenten Dynamik nicht auf. Somit ist das quasi-statische Kontaktsubmodell deutlich effizienter und immer dem gedämpften vorzuziehen.

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN

In diesem Abschnitt werden experimentelle Untersuchungen zur Verifizierung der in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Stoßanalysen durchgeführt. Diese experimentellen Untersuchungen werden an einem Prüfstand, der in den Arbeiten von [Li17] und [Müller18] aufgebaut und verwendet wurde, vorgenommen. Dieser Prüfstand ist an [HuEberhard04, HuSchiehlenEberhard03, Seifried05] angelehnt und kann zur berührungsfreien Messung der Verschiebung und Geschwindigkeiten mit Laser-Vibrometer (LV) verwendet werden. Die Messung erfolgt mit dem LV kontaktfrei, weshalb das Messergebnis nicht durch das Gewicht der angebrachten Sensoren verfälscht wird. Damit ist der experimentelle Nachweis der beim Stoß auftretenden, hochfrequenten Welleneffekte und dem damit verbundenen Energieverlust ebenso wie die experimentelle Verifizierung des Bewegungsverhaltens nach dem Stoß möglich. Aus den gemessenen Geschwindigkeiten kann anschließend die Stoßzahl zur Zusammenfassung des kinetischen Energieverlusts berechnet werden. Für die Stöße auf die Aluminiumstäbe kann nach [SeifriedSchiehlenEberhard10] die Stoßkraft aus der gemessenen Geschwindigkeit der gestoßenen Körper berechnet werden. Damit ist keine Kraftmessung über piezo-elektrische Sensoren oder Dehnmessstreifen notwendig, weshalb in dieser Arbeit keine separate Stoßkraftmessung erfolgt.

6.1 Laser-Vibrometer

In dieser Arbeit wird zur Messung ein Laser-Scanning-Vibrometer (LSV) verwendet. Dabei handelt es sich um das PSV-500 der Firma Polytec, bestehend aus dem PSV-I-500 Scankopf und dem PSV-F-500 Front-End. LSV sind scannende LV, mit denen die Oberfläche eines Messobjekts abgescannt und anschließend deren Schwingungsformen dargestellt werden können, siehe [Polytec15a]. Wird nur ein Messpunkt definiert, so kann das LSV als Einpunkt-Vibrometer verwendet werden, siehe [Polytec15b].

Das vom PSV-I-500 Scankopf ausgestrahlte Laserlicht wird mit einer Linse auf die Oberfläche des Messobjekts fokussiert. Durch die Schwingungen der Oberfläche erfährt das zurückgestreute Laserlicht eine Dopplereffektverschiebung, die proportional zur Geschwindigkeit des Messobjekts ist, siehe [Polytec15b]. Diese Frequenzverschiebung wird anschließend im LSV mittels eines Interferometers ausgewertet. Die Basis der Verschiebungs- und Geschwindigkeitsmessung im LSV

ist daher das Prinzip der optischen Interferenz, also die Überlagerung von Wellen, siehe [Polytec15b]. Nach dem Prinzip der optischen Interferenz variiert bei der Überlagerung von zwei zeitlich kohärenten Lichtwellen die Gesamtintensität bei der Wellen periodisch mit der Wegdifferenz, welche beim LSV die Wegdifferenz zwischen einem Messstrahl und einem Referenzstrahl ist. Das Interferenzmuster aus dieser Überlagerung erzeugt auf einem Photodetektor ein Hell-Dunkel-Muster, welches zur Wegmessung verwendet wird. Bei der Geschwindigkeitsmessung wird die Modulationsfrequenz des Interferenzmusters bestimmt, welche der Dopplereffektverschiebung entspricht und daher direkt proportional zur Geschwindigkeit des Messobjektes ist, siehe [Polytec15b].

Der Scankopf wird mit dem Vibrometer Front-End PSV-F-500 verbunden. Im Front-End befinden sich der Decoder und der Signalprozessor. Das Front-End wird mit einem Laptop verbunden, auf dem das Programm PSV 9.2 Datenerfassung zur Erfassung und Auswertung der Messdaten ausgeführt wird, siehe [Polytec15a]. Vom Laptop aus werden ebenfalls die Messeinstellungen vorgenommen. Der Decoder hat mehrere Messbereiche zur Geschwindigkeitsmessung, die sich in der Genauigkeit unterscheiden. Abhängig von den zu messenden Geschwindigkeiten kann der Messbereich angepasst werden. In dieser Arbeit wird der Messbereich aufgrund der untersuchten Stoßgeschwindigkeiten auf 500 mm/s festgelegt. Die Abtastfrequenz des Decoders wird auf den maximal möglichen Wert von 250 kHz festgelegt, um alle relevanten hochfrequenten Welleneffekte in den gestoßenen Körpern zu erfassen. Dies entspricht einer Auflösung von 4 μ s. Da das Messrauschen der Signale sehr gering ist, wird auf eine Filterung des Vibrometer-Signals verzichtet. Außerdem wird ein Trigger definiert, der die Aufzeichnung der Messdaten auslöst, sobald das Vibrometer-Signal einen Schwellenwert von 5 % überschritten hat.

6.2 Aufbau des Prüfstands

Der in dieser Arbeit verwendete Prüfstand ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Er besteht von links nach rechts aus dem LSV, dem Vibrometer Front-End und einem Laptop zur Messeinstellung und der Auswertung der Ergebnisse. Die Stahlkugel und die Aluminiumkörper werden pendelartig an Kevlar-Fäden aufgehängt, wie in Abbildung 6.1 für die Kugel und den Stab und in Abbildung 6.2 für die Kugel und den Balken dargestellt ist. Die Aufhängung erfolgt so, dass sich die Körper im Gleichgewichtszustand an den Kontaktflächen berühren ohne Kräfte zu übertragen. Die Stahlkugel wird mit einem Elektromagneten in einer vorab definierten Höhe gehalten, siehe Abbildung 6.2. Zu Beginn der Messung wird die Stahlkugel losgelassen und trifft mit der über die Höhe eingestellten Anfangsgeschwindigkeit auf den ruhenden Aluminiumkörper. Die Pendellänge der Aufhängung muss dabei so gewählt werden, dass die daraus resultierende Schwingungsdauer nicht im Bereich der im Experiment untersuchten Zeitspanne ist, siehe [HuEberhard04, Seifried05]. Damit kann für diese Zeitspanne von

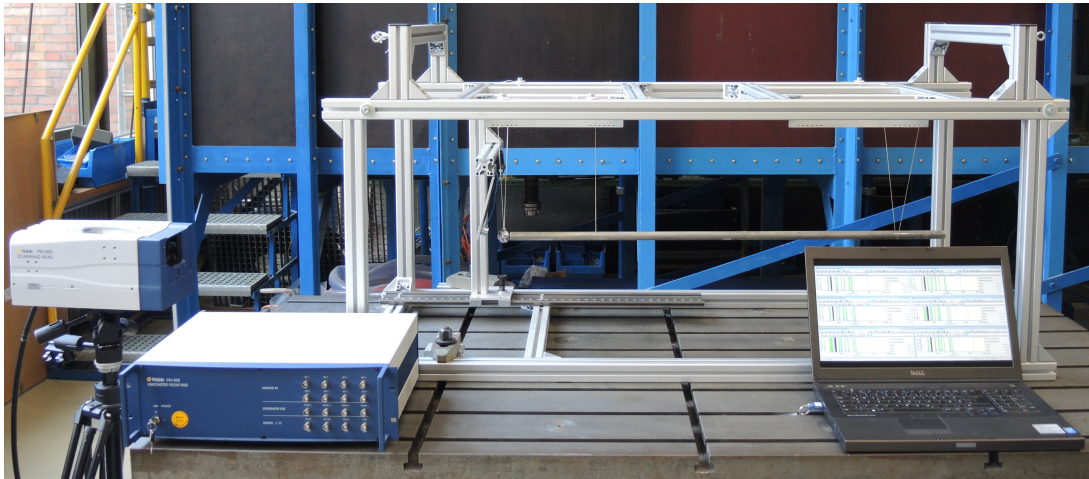


Abbildung 6.1: Prüfstand für experimentelle Stoßuntersuchungen

wenigen Millisekunden die Bewegung der aufgehängten Körper als eine freie horizontale Bewegung betrachtet werden. In [HuEberhard04, Seifried05] werden jeweils zwei Laser-Doppler-Vibrometer (LDV) verwendet, damit die Geschwindigkeit der Stahlkugel und die des Aluminiumkörpers gleichzeitig bestimmt werden können. In dieser Arbeit steht nur ein LSV zur Verfügung. Daher wird zunächst die Kugel platziert und die Stoßgeschwindigkeit eingestellt. Anschließend wird der Stoß auf den Aluminiumkörper mehrmals durchgeführt und die Kugelgeschwindigkeit gemessen. Liegt nur eine minimale Abweichung der Messergebnisse vor, so wird das LSV zur Messung der Geschwindigkeit des Aluminiumkörpers positioniert. Zur Verbesserung der Reflexion des Laser-Lichts können Reflexionsfolien an den Körpern angebracht werden, wie in Abbildung 6.2 auf dem Balken erkennbar ist.

6.3 Reproduzierbarkeit der Messungen

Um Aussagen über die Qualität der Messungen machen zu können wird deren Reproduzierbarkeit geprüft. Dazu wird zum einen der Mittelwert der Messung und zum anderen die Standardabweichung verwendet. Die Standardabweichung ist die mittlere quadratische Abweichung der einzelnen Messwerte vom empirischen Mittelwert und wird berechnet über

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}, \quad (6.1)$$

wobei n die Anzahl der Messungen und $\bar{x}$ den Mittelwert der Messung beschreibt. Dieser wird folgendermaßen aus den Messdaten x_k berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (6.2)$$

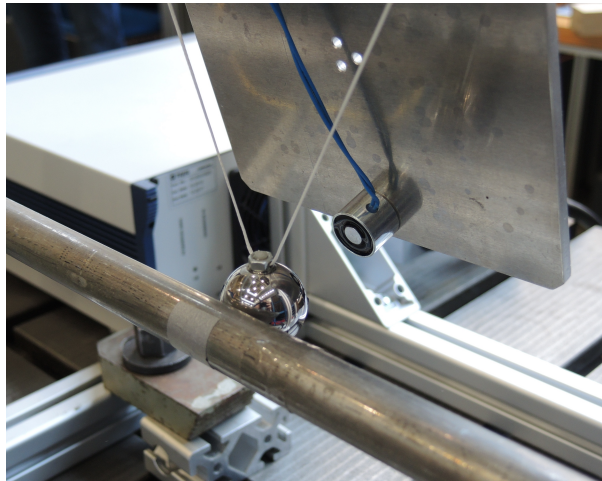


Abbildung 6.2: Aufhängung der Stahlkugel und Fixierung über Elektromagnet

Außerdem wird der Quotient aus Standardabweichung und dem empirischem Mittelwert

$$s_{\text{rel}} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \%, \quad (6.3)$$

auch relative Standardabweichung genannt, verwendet. Dabei wird die Standardabweichung in Prozent des Mittelwerts $\bar{x}$ ausgedrückt.

Da während des Stoßvorgangs entweder die Geschwindigkeit des Aluminiumkörpers oder die Kugelgeschwindigkeit gemessen werden kann, wird zunächst das LSV platziert und die gewünschte Kugelgeschwindigkeit eingestellt. Anschließend wird die Reproduzierbarkeit der Kugelgeschwindigkeit beim Stoß auf den Aluminiumkörper mit 20 Messungen geprüft. Bei geringer Streuung der Messwerte wird das LSV zur Messung der Geschwindigkeit des Aluminiumkörpers umpositioniert. Danach erst erfolgt die Messung der Geschwindigkeit des gestoßenen Aluminiumkörpers. Diese Untersuchung ist für den Stoß auf den ebenen Stab in Tabelle 6.1 dargestellt. Aufgrund der Fixierung durch den Elektromagnet wird die Kugel immer aus der gleichen Position losgelassen. Der Mittelwert der Kugelgeschwindigkeit aus 20 Messungen bei einer eingestellten Geschwindigkeit von $v = 0.3 \text{ m/s}$ ist $\bar{x} = 0.2971 \text{ m/s}$. Die Reproduzierbarkeit der Kugelgeschwindigkeit vor dem Stoß ist daher sehr gut, wie Tabelle 6.1 aufzeigt. Da nur eine geringe Streuung der Messwerte vorliegt ist die Standardabweichung sehr gering. Nach dem Stoß ist die Streuung der Ergebnisse etwas größer, jedoch immer noch sehr gering und die Reproduzierbarkeit der Kugelgeschwindigkeit damit sehr gut, siehe Tabelle 6.1.

6.4 Vergleich der FMKS-Simulationen mit den Messergebnissen

Zum Vergleich der Messungen mit den numerischen Simulationen werden die geraden zentralen Stöße der Stahlkugel auf die Aluminiumstäbe und den Alumi-

niumbalken aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 herangezogen. Da mit dem quasi-statischen Kontaktsbmodell die numerische Effizienz in allen untersuchten Fällen am besten ist und die FE-Referenzlösung sehr gut approximiert werden kann, werden diese Ergebnisse im weiteren Verlauf verwendet. Zum Vergleich mit den Simulationen werden aus den gemessenen Geschwindigkeiten die Kontaktkraft und Stoßzahl berechnet. Beim Stoß auf den Stab kann der Kraftverlauf aus der Geschwindigkeit v_{Se} des freien Stabendes über

$$f_{cm} = \frac{AEv_{Se}}{2c} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.4)$$

berechnet werden, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10]. Dabei ist A die Querschnittsfläche des Stabs und E der Elastizitätsmodul. Zur Berechnung der Wellengeschwindigkeit c wird zusätzlich die Dichte ρ des Stabs benötigt. Um den kinetischen Energieverlust beim Stoß zwischen den Messungen und der numerischen Simulation vergleichen zu können, wird die kinetische Stoßzahl aus der gemessenen Geschwindigkeit ermittelt. Nach [SeifriedSchiehlen04, SeifriedSchiehlenEberhard10] kann die kinetische Stoßzahl für den geraden zentralen Stoß über

$$e = \frac{(m_K + m_S)m_K \Delta v_K}{m_K m_S v_{K0}} - 1 \quad (6.5)$$

berechnet werden, wenn der Stab beim Stoßbeginn in Ruhe ist. Dabei beschreiben m_K die Masse der Stahlkugel und m_S die Masse des gestoßenen Stabs. Mit Δv_K wird die Änderung der gemessenen Kugelgeschwindigkeit bezeichnet, während v_{K0} die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoß beschreibt. Die Geometrie- und Materialdaten der verwendeten Körper sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

6.4.1 Stoß der Stahlkugel auf den ebenen Aluminiumstab

In Abbildung 6.3 sind die Geschwindigkeiten der Kugel und des ebenen Stabs für den Stoß mit $v = 0.3 \text{ m/s}$ dargestellt. Die dazu gehörenden Mittelwerte und Standardabweichungen sind Tabelle 6.1 zu entnehmen. Die Simulation und Messung stimmen sehr gut überein, wobei die gemessene Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß mit -0.136 m/s betragsmäßig geringer ausfällt als bei der Simulation mit -0.137 m/s . Die Stoßzahl aus der Messung ist $e = 0.636$ und bei der Simulation $e = 0.638$. Daraus ist ersichtlich, dass der kinetische Energieverlust

Tabelle 6.1: Mittelwerte und Abweichungen der Kugelgeschwindigkeit bei 20 Stößen der Kugel auf den Stab

	Mittelwert [m/s]	Standard- abweichung [m/s]	relative Standard- abweichung [%]
Start	0.2971	0.0009	0.29
Ende	-0.1330	0.0014	-1.04

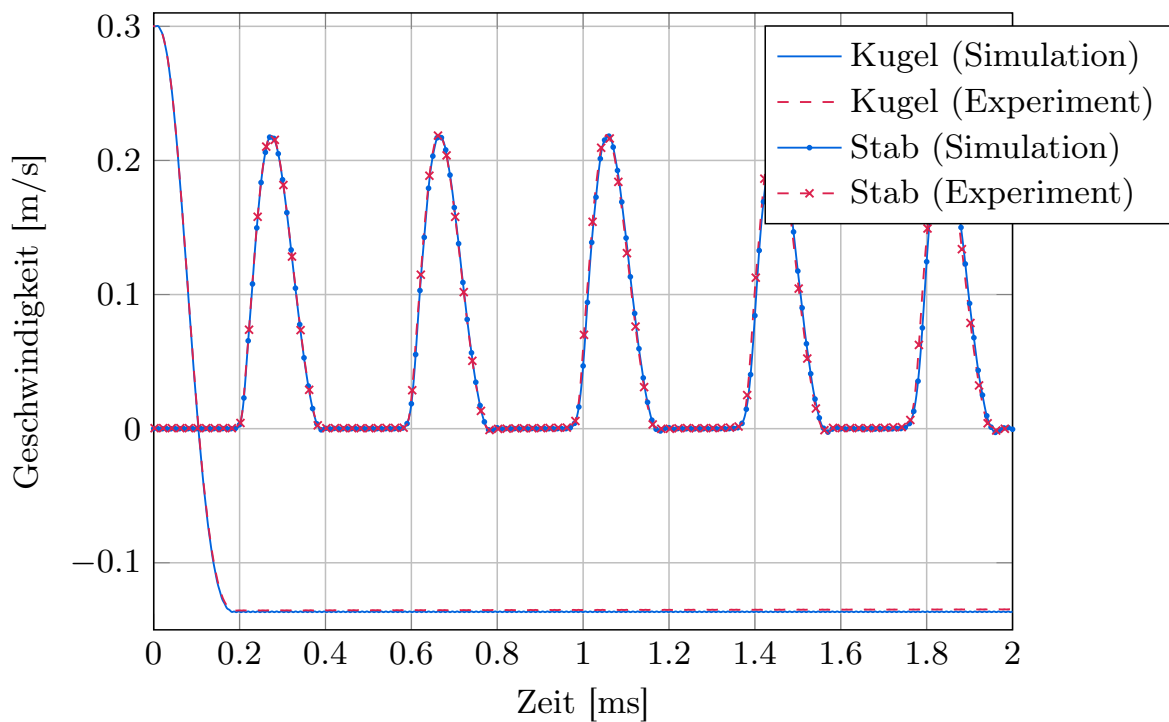


Abbildung 6.3: Geschwindigkeit beim Stoß auf den ebenen Stab

in der numerischen Simulation unwesentlich kleiner ist als im Experiment. Die Kontaktkraft wird nach Gl. (6.4) aus der gemessenen Geschwindigkeit v_{Se} des Stabendes berechnet. Da die gemessene Geschwindigkeit gut mit der Simulation übereinstimmt, ist die Abweichung beim Kontaktkraftverlauf zwischen der Simulation und der Messung sehr gering, wie Abbildung 6.4 aufzeigt.

6.4.2 Stoß der Stahlkugel auf den Aluminiumstab mit Innenradius

Abbildung 6.5 zeigt die Geschwindigkeitsmessungen beim Stoß auf den Aluminiumstab mit einem Innenradius von 20 mm. Die Stoßgeschwindigkeit für diese Untersuchung ist wie beim Stoß auf den ebenen Stab $v = 0.3 \text{ m/s}$. Die gemessene Geschwindigkeit am Stabende stimmt gut mit der Simulation überein. Daher liegt auch eine gute Übereinstimmung der Kontaktkraftverläufe vor, siehe Abbildung 6.4. In Abbildung 6.5 sind die im Vergleich zum Stoß auf den ebenen Stab, stärker ausgeprägten Welleneffekte erkennbar, die aufgrund des Innenradius und des daher vergrößerten Kontaktradius auftreten. Daher ist die Geschwindigkeit am Stabende im Vergleich zu Abbildung 6.3 etwas größer. Die Kontaktkräfte sind etwas höher als beim ebenen Stab und die Stoßdauer ist kürzer, siehe Abbildung 6.4. Der Stoßimpuls fällt etwas geringer aus, weshalb die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß etwas kleiner als beim ebenen Stab ist. Tabelle 6.2 zeigt eine geringe Abweichung der Messungen der Kugelgeschwindigkeit vor dem Stoß. Es sind demnach für die Kugelgeschwindigkeit die richtigen Startbedingungen gewählt. Die Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß

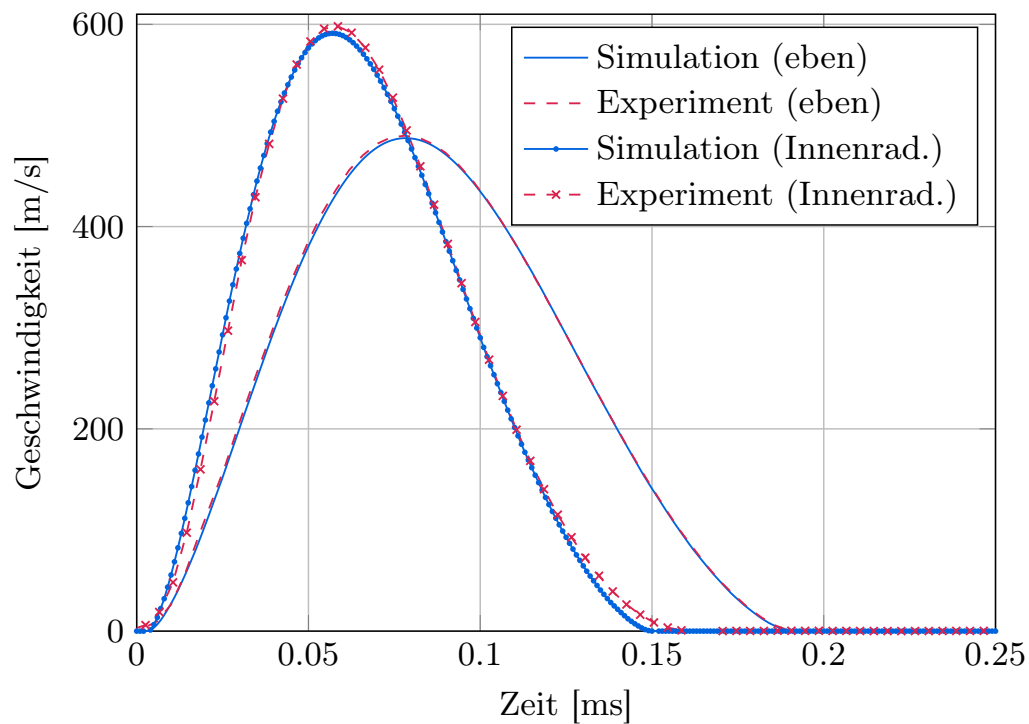


Abbildung 6.4: Kontaktkräfte beim Stoß auf die Aluminiumstäbe

weicht jedoch minimal von der Simulation ab. Die simulierte Kugelgeschwindigkeit beträgt -0.104 m/s während die gemessene Geschwindigkeit -0.0957 m/s betragsmäßig etwas kleiner ist. Daher weicht auch die gemessene Stoßzahl mit $e = 0.48$ von der simulierten Stoßzahl $e = 0.51$ ab. Tabelle 6.2 ist zu entnehmen, dass die relative Standardabweichung der Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß größer ist als beim Stoß auf den ebenen Stab. Aufgrund des Innenradius ist ein wiederholter, exakt zentrischer Stoß schwieriger zu realisieren als beim ebenen Stab. Aus diesem Grund ist die Streuung der Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß größer und daher weicht die Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß geringfügig von den Simulationsergebnissen ab, siehe Abbildung 6.5.

Tabelle 6.2: Mittelwerte und Abweichungen der Kugelgeschwindigkeit bei 20 Stößen der Kugel auf den Stab mit Innenradius

	Mittelwert [m/s]	Standard- abweichung [m/s]	relative Standard- abweichung [%]
Start	0.2984	0.0002	0.18
Ende	-0.1013	0.0016	-1.62

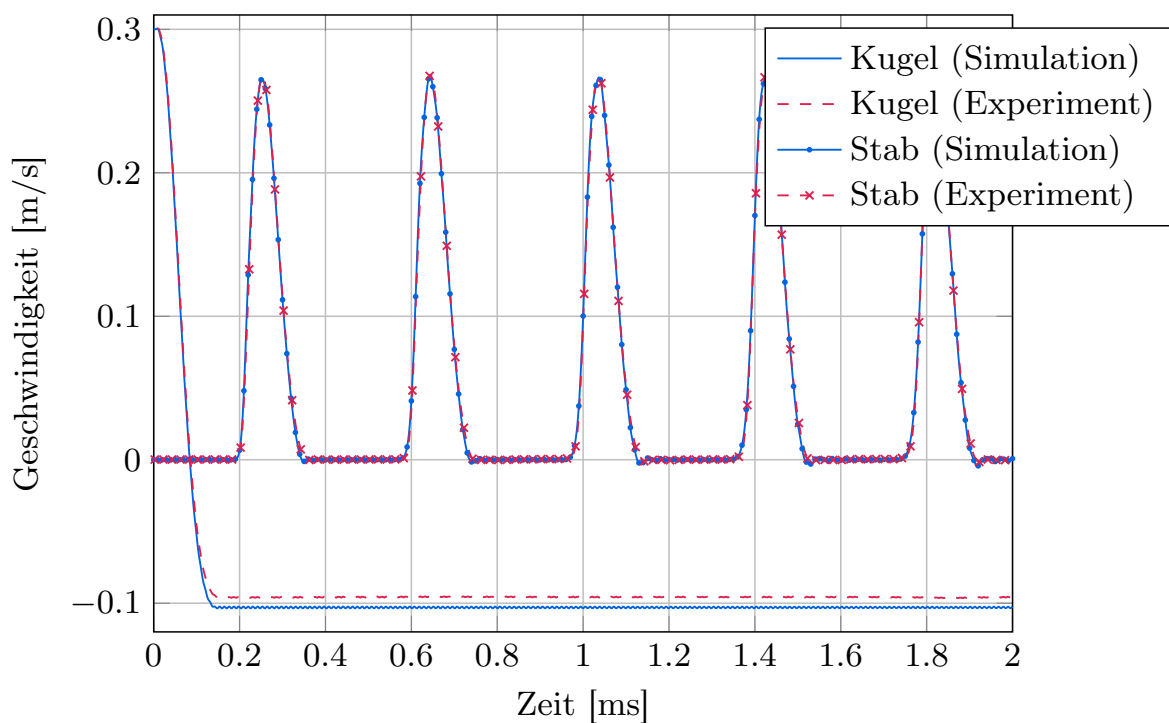


Abbildung 6.5: Geschwindigkeit beim Stoß auf den Stab mit Innenradius

6.4.3 Stoß der Stahlkugel auf den Aluminiumbalken

Als nächstes werden die Mehrfachstöße entlang der Symmetrieachse des Balkens mit unterschiedlichen Stoßgeschwindigkeiten untersucht. Abbildung 6.2 zeigt die dafür gewählte Aufhängung der Kugel und des Balkens. Die Anzahl der auftretenden Stöße ist stark abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit, siehe [Seifried05]. Daher liegt beim Stoß auf den Balken eine starke Streuung in den Stoßzahlen abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit vor. Dabei führen kleine Änderungen zu stark unterschiedlichem Bewegungsverhalten des Balkens und es tritt ein chaotisches Verhalten der Stoßzahlen auf, siehe [SeifriedSchiehlenEberhard10]. Kleine Unterschiede beim Bewegungsverhalten während des ersten Stoßes können zu großen Unterschieden bei den nachfolgenden Stößen führen, weshalb hier auch die genaue Simulation sehr herausfordern ist.

Bei kleinen Geschwindigkeiten bis 0.2 m/s liegen nach [Seifried05] zwei Stöße vor und die Stoßzahlen schwanken wenig. In Abbildung 6.6 sind die entsprechenden Ergebnisse mit $v = 0.2 \text{ m/s}$ dargestellt. Abbildung 6.6 zeigt eine gute Übereinstimmung des ersten Stoßes zwischen Messung und Simulation. Die Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß ist mit 0.019 m/s identisch. Nach 5.4 ms tritt in der Simulation ein zweiter Stoß auf. Dieser tritt ebenfalls in der Messung auf, jedoch ist die Rückprallgeschwindigkeit der Kugel bei der Messung mit -0.076 m/s betragsmäßig größer als in der Simulation mit -0.056 m/s . Diese Abweichung ist in den Stoßzahlen erkennbar. Die gemessene Stoßzahl ist $e = 0.55$ und in der

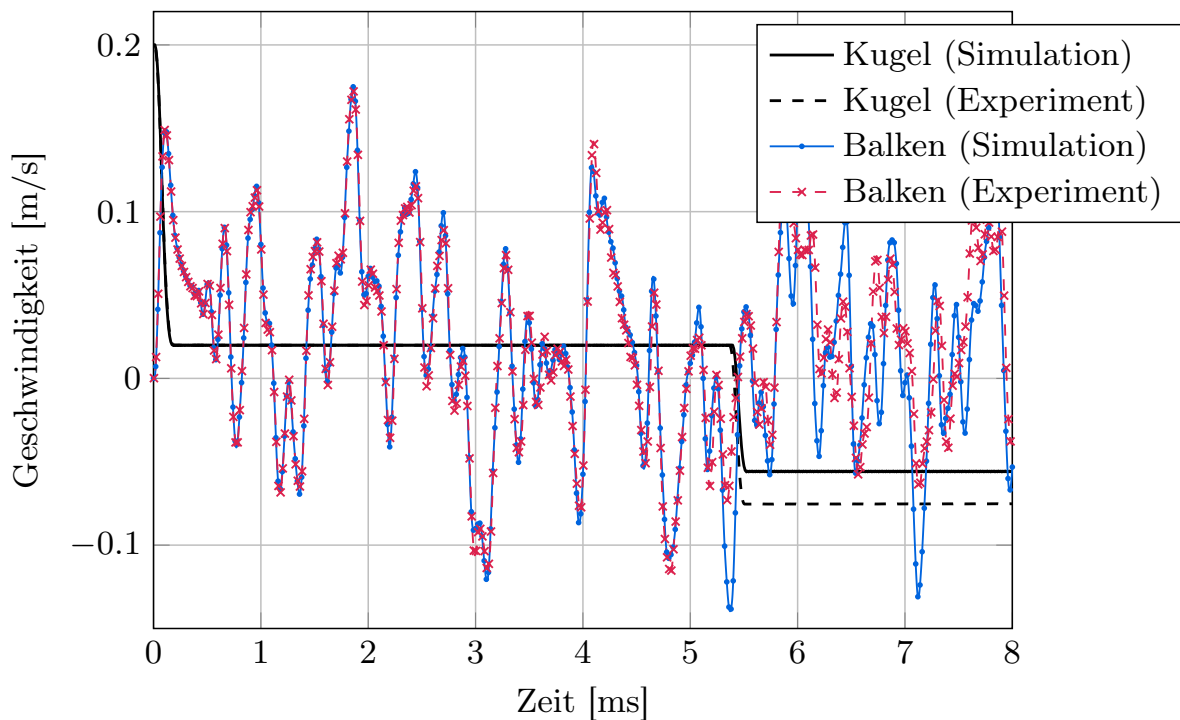


Abbildung 6.6: Geschwindigkeit beim Stoß auf den Balken mit $v = 0.2 \text{ m/s}$

Simulation $e = 0.44$. Der kinetische Energieverlust ist demnach in der Simulation höher als im Experiment. Abbildung 6.6 zeigt bereits bei $v = 0.2 \text{ m/s}$ starke Strukturschwingungen im Balken, die im Vergleich zu den im vorigen Abschnitt untersuchten Aluminiumstäben stärker ausgeprägt sind. In Tabelle 6.3 sind die Mittelwerte und die Standardabweichungen dargestellt. Im Vergleich zu den Stößen auf die Aluminiumstäbe ist erkennbar, dass die Standardabweichung der Kugelgeschwindigkeit nach dem Stoß größer ausfällt. Dies kann mit dem chaotischen Verhalten beim Stoß auf den Balken erklärt werden. Es ist im Experiment schwierig einen exakt zentrischen Stoß wiederholt durchzuführen. Abhängig vom Auftreffpunkt der Kugel ändert sich das globale Schwingungsver-

Tabelle 6.3: Mittelwerte und Abweichungen der Kugelgeschwindigkeit bei 20 Stößen der Kugel auf den Balken

	Mittelwert [m/s]	Standard- abweichung [m/s]	relative Standard- abweichung [%]
Stoßgeschwindigkeit $v = 0.2 \text{ m/s}$			
Start	0.2003	0.0002	0.08
Ende	-0.1004	0.0101	-10.04
Stoßgeschwindigkeit $v = 0.276 \text{ m/s}$			
Start	0.2759	0.0002	0.06
Ende	-0.1211	0.0328	-27.07

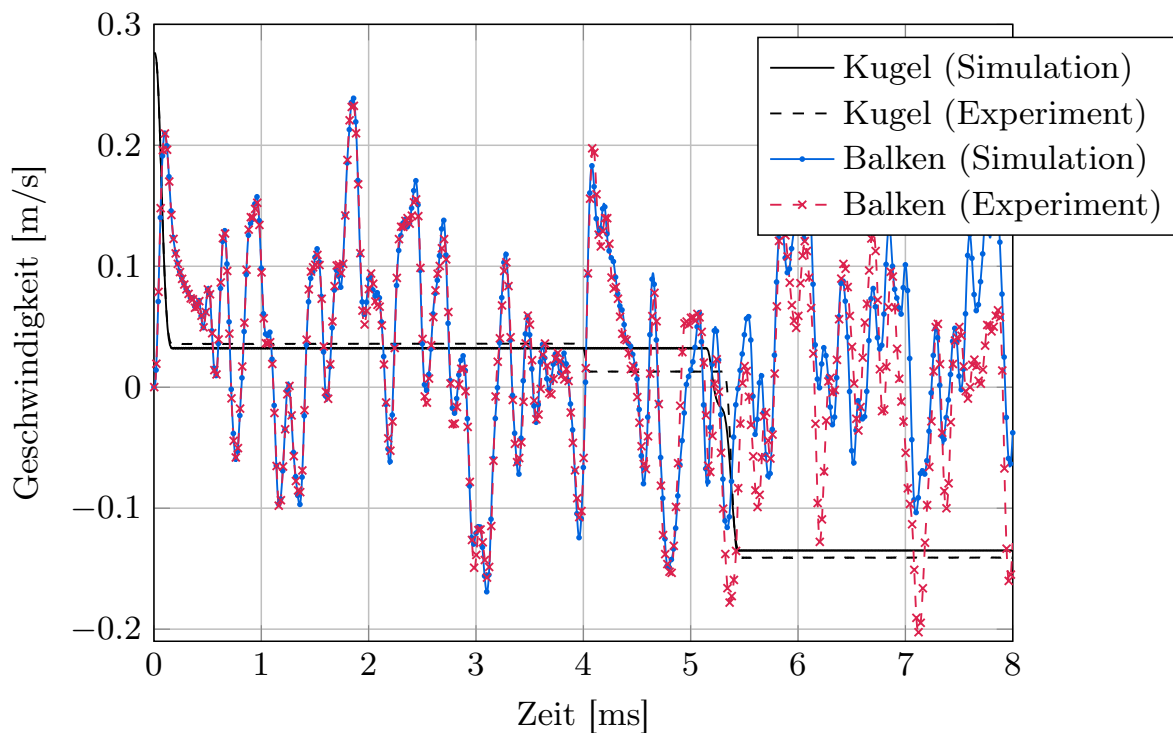


Abbildung 6.7: Geschwindigkeit beim Stoß auf den Balken mit $v = 0.276 \text{ m/s}$

halten des Balkens und damit die Kugelgeschwindigkeit nach den Stößen.

In Abbildung 6.7 sind die Geschwindigkeiten beim Stoß mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.276 \text{ m/s}$ dargestellt. Bereits nach dem ersten Stoß liegt eine Abweichung der Kugelgeschwindigkeiten zwischen Messung und Simulation vor. Die Kugelgeschwindigkeit aus der Simulation ist mit 0.033 m/s etwas kleiner als die gemessene mit 0.036 m/s . In der Simulation tritt ein zweiter Stoß nach 5.15 ms auf. Bevor der Stoß komplett beendet ist folgt ein dritter Stoß nach 5.28 ms , da die Kugel nach dem zweiten Stoß nur wenig abgebremst wird und sich weiter in Stoßrichtung bewegt. In der Messung tritt der zweite Stoß abweichend nach 3.99 ms auf und der dritte nach 5.3 ms . Hier wird deutlich, dass je nach Anfangsbedingungen große Abweichungen zwischen Experiment und Simulation auftreten können. Aufgrund dieser Unterschiede beim ersten und zweiten Stoß weicht die Kugelgeschwindigkeit nach dem dritten Stoß ebenfalls ab und die gemessene Stoßzahl mit $e = 0.55$ unterscheidet sich erheblich von der simulierten Stoßzahl mit $e = 0.68$. Wegen des chaotischen Verhaltens beim Stoß auf den Aluminiumbalken weisen die Kugelgeschwindigkeiten bereits beim zweiten Stoß eine große Streuung auf. Nach dem dritten Stoß ist die Streuung der Messungen noch größer was in einer sehr großen relativen Standardabweichung von 27.07% und damit in einer schlechten Reproduzierbarkeit resultiert, siehe Tabelle 6.3. Aufgrund des chaotischen Verhaltens und der schlechten Reproduzierbarkeit ist ein Vergleich zwischen Simulation und Messung nicht mehr sinnvoll.

ZUSAMMENFASSUNG

Die numerische Simulation ist in vielen technischen Entwicklungsprozessen fest integriert. Ziel dabei ist die Verkürzung der Entwicklungszeiten und die Verringerung der Entwicklungskosten durch Reduktion von kostspieligen Experimenten und Prototypen. Durch die steigende Komplexität der Bauteile steigt der Bedarf an schnellen und zuverlässigen numerischen Simulationen. In der Maschinendynamik wird zur Analyse der Systemdynamik oftmals die Methode der Mehrkörpersysteme verwendet. Wird dabei die untersuchte Bewegung von Stößen unterbrochen, so treten oftmals hohe Kontaktkräfte und Spannungen, ebenso wie elastodynamische Effekte in den gestoßenen Körpern auf. Aufgrund dieser nicht zu vernachlässigenden Elastizitäten ist für eine präzise Beschreibung des Kontaktvorgangs eine elastische Beschreibung der Körper notwendig. Die Methode der Mehrkörpersysteme, erweitert um reduzierte elastische Körper, ist bei Kontaktanalysen im Zeitbereich der Stand der Technik. Für eine effiziente Simulation spielt daher neben der Kontaktformulierung auch das Modellreduktionsverfahren zur Beschreibung der elastischen Körper eine signifikante Rolle.

Diese Arbeit liefert einen Beitrag zur numerischen Stoßanalyse in flexiblen Mehrkörpersystemen, beschrieben mit dem Ansatz des mitbewegten Referenzsystems. Der Fokus liegt dabei auf der präzisen und effizienten Stoßanalyse mit reduzierten Finite-Elemente-Modellen. Mit dynamischen Finite-Elemente-Simulationen ist eine genaue Modellierung aller beim Stoß auftretenden Effekte möglich. Aufgrund der bei Stoßanalysen üblichen sehr feinen Vernetzung der Körper zur Erfassung aller globalen und lokalen Deformationseffekte und der Einhaltung der Kontaktbedingung sind Zeitbereichssimulationen aufgrund der hohen Rechenzeit nicht praktikabel. Für effiziente Kontaktsimulationen mit flexiblen Mehrkörpersystemen werden diese um eine Kontaktformulierung erweitert und mit Modellreduktionsverfahren gekoppelt, was zu zusätzlichen Herausforderungen führt.

Ein in Stoßanalysen bewährtes Modellreduktionsverfahren ist die modale Reduktion. Damit lassen sich Kontaktkräfte und die hochdynamischen elastodynamischen Effekte, wie zum Beispiel die Wellenausbreitung, effizient erfassen. Der Nachteil dieses Verfahrens besteht jedoch darin, dass das modale Modell nicht in der Lage ist, die lokalen Effekte in der Kontaktzone genau zu erfassen. Sollen nicht nur die dynamischen Komponenten sondern auch diese lokalen Verformungseffekte erfasst werden, bietet sich das Craig-Bampton Verfahren an.

Darin wird die Projektionsmatrix, bestehend aus den Eigenmoden, um zusätzliche statische Ansatzfunktionen erweitert. Diese kompensieren die hochfrequenten Eigenmoden, die zur Erfassung der lokalen Effekte notwendig sind. Resultierend aus der feinen Vernetzung der Körper, die bei Stoßanalysen üblich ist, werden in der Kontaktzone viele statische Ansatzfunktionen für alle Knotenfreiheitsgrade berechnet. Aus diesem Grund hat das reduzierte Modell oftmals mehrere hundert Freiheitsgrade. Die für die lokale Verformung benötigte statisch korrekte Beschreibung bringt künstliche, sehr hohe, Eigenfrequenzen in das reduzierte System ein. Wegen diesen hohen Frequenzen steigt die numerische Steifigkeit erheblich an. Daher sind spezielle Löser und sehr kleine Zeitschrittweiten während der Zeitsimulation notwendig. Diese aufgeführten Effekte verschlechtern die numerische Effizienz der Stoßsimulation signifikant.

Für eine effiziente und genaue numerische Stoßanalyse werden in dieser Arbeit zwei Ansätze in Kombination mit dem Craig-Bampton Verfahren vorgestellt. Die Basis beider Ansätze ist die Partitionierung der elastischen Anteile der entkoppelten Bewegungsgleichungen, beschrieben mit dem Ansatz des mitbewegten Referenzsystems. Diese werden in nieder- und hochfrequente Anteile aufgeteilt. Erstere beschreiben die globalen, elastodynamischen Effekte, wie zum Beispiel die Wellenausbreitung in den Körpern und sind daher physikalisch relevant. Letztere stellen die künstlich in das reduzierte System eingebrachten, hohen Eigenfrequenzen dar, die zur Erfassung der lokalen Verformung notwendig sind. Diese hochfrequenten Anteile haben dabei keinen Einfluss auf die niederfrequente Dynamik. Die Stoßanalysen in dieser Arbeit konzentrieren sich auf die Erfassung des Stoßvorgangs sowie das Bewegungsverhalten der Körper nach dem Stoß. Aufgrund der effizienten Modellierung über den Ansatz des mitbewegten Referenzsystems kann jedoch auch die nichtlineare Starrkörperbewegung vor und nach dem Stoß effizient erfasst werden. Zur Entwicklung und Verifizierung der in dieser Arbeit vorgestellten Ansätze werden freie und gebundenen Stoßsysteme mit geometrisch einfachen Körpern verwendet. Dabei erfolgt jeweils der Stoß einer Stahlkugel auf einen Stab und Balken aus Aluminium sowie auf ein Doppelpendel. Mit diesen Stoßsystemen werden zum einen der Einfluss der Größe der Kontaktzone untersucht und zum anderen das Lösungsverhalten beim Mehrfachstoß. Mit dem Doppelpendel wird der Einfluss der Bindungsgleichungen in Kombination mit den Kontaktsubmodellen verifiziert. Zur Beurteilung der Genauigkeit und der Effizienz der in dieser Arbeit vorgestellten Ansätze werden die Ergebnisse dynamischer nichtlinearer Finite-Elemente-Simulation verwendet.

Beim ersten Ansatz, dem gedämpften Kontaktsubmodell, wird die Eigenschaft ausgenutzt, dass bei geeigneter Aufteilung die niederfrequente Dynamik nicht von den hochfrequenten Anteilen beeinflusst wird. Daher können die Anteile der hochfrequenten, physikalisch nicht relevanten Dynamik in der Bewegungsgleichung gedämpft werden. Somit wird der Einfluss der hohen Eigenfrequenzen auf das Schwingungsverhalten bei der Stoßanregung reduziert. Zur numerischen Be-

rechnung der Dämpfungsparameter wird die gedämpfte Schwingungsdauer der hochfrequenten Anteile herangezogen. Eine Beschränkung auf schwache Dämpfung verhindert dabei unphysikalisch große Dämpfungsparameter. Zudem ist ihre Größe beschränkt, da sehr große Dämpfungsparameter die niederfrequenten Anteile, die zur präzisen Erfassung der Wellenausbreitung notwendig sind, dämpfen. Durch diese Beschränkung kann der Einfluss der hochfrequenten Dynamik und damit die numerische Steifigkeit nur bedingt reduziert werden. Die Auswertung des Rechenaufwands der dynamischen Finite-Elemente-Simulation und der Simulation mit dem gedämpften Kontaktsubmodell bei den Stoßsystemen Kugel-Stab mit Innenradius und Kugel-Balken zeigt auf, dass mit letzterem die numerische Effizienz nur bedingt verbessern werden kann. Dieser Ansatz ist daher auf Stoßsysteme mit geringer numerischer Steifigkeit beschränkt. Dennoch können im Vergleich zu den Finite-Elemente-Ergebnissen sowohl die Starrkörperverschiebung und Starrkörpergeschwindigkeiten ebenso wie die lokale Deformation und die Spannungen sehr gut abgebildet werden.

Der zweite in dieser Arbeit entwickelte Ansatz basiert auf der Vernachlässigung der hochfrequenten Trägheitskopplung zwischen der Starrkörperrotation und der elastischen Verformung und der anschließenden statischen Kondensation der hochfrequenten Anteile der Bewegungsgleichungen. Dieser Ansatz basiert auf der Verwendung des Buckens-Systems als Referenzsystem. Es wird anhand eines Beispielsystems gezeigt, dass beim Buckens-System die Trägheitskopplung der hochfrequenten Anteile im Vergleich zu den niederfrequenten Anteilen vernachlässigt werden kann. Diese Annahme wird damit begründet, dass die hochfrequenten Anteile die lokale Verformung der Körper darstellen. Somit können jeweils die hochfrequenten Anteile des Trägheitstensors und des elastischen Anteils der generalisierten Trägheitskräfte vernachlässigt werden. Aus dieser Vernachlässigung folgen Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen. Da nur der physikalisch relevante Frequenzbereich betrachtet wird, wird die Dynamik der hochfrequenten elastischen Koordinaten vernachlässigt, was einer statischen Kondensation entspricht. Damit können die Bewegungsgleichungen für die Zeitsimulation weiter vereinfacht werden. Die hochfrequenten Anteile, welche die lokale Deformation darstellen, werden jedoch zur Kontaktkraftberechnung benötigt und dürfen daher nicht komplett vernachlässigt werden. Die statische Kondensation der hochfrequenten Anteile erfordert in jedem Zeitschritt der dynamischen Simulation die Lösung eines zusätzlichen nichtlinearen Gleichungssystems, welches durch die Abhängigkeit der Kontaktkraft vom lokalen Deformationsfeld entsteht. Im quasi-statischen Kontaktsubmodell erfolgt die Lösung numerisch effizient mit dem Broyden-Verfahren. Für die Nullstellensuche wird dabei die benötigte Jacobi-Matrix möglichst oft aktualisiert anstatt in jeder Iteration neu berechnet zu werden. Durch die Vernachlässigung der hochfrequenten Dynamik in der Zeitintegration kann die numerische Steifigkeit signifikant reduziert werden. Daher sind mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell sehr effiziente Stoßsimulationen möglich. In allen untersuchten Stoßsystemen ist die Rechendauer bedeutend

geringer als beim gedämpften Kontaktsubmodell und der dynamischen Finite-Elemente-Simulation. Da den beiden Kontaktsubmodellen dieselben reduzierten Finite-Elemente-Modelle zugrunde liegen, können auch mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell die Finite-Elemente-Ergebnisse sehr gut abgebildet werden. Beide Kontaktsubmodelle sind in der Matlab-Toolbox DYNMANTO des Instituts für Mechanik und Meerestechnik der Technischen Universität Hamburg implementiert und können in Kombination mit der Matlab-Toolbox RED für Stoßanalysen verwendet werden.

Mit beiden in dieser Arbeit entwickelten Kontaktsubmodellen sind präzise Analysen des lokalen und globalen Deformationsverhaltens im Vergleich zu den Finite-Elemente-Ergebnissen möglich. Zur Verifizierung der numerischen Stoßanalyse werden abschließend experimentelle Untersuchungen mit geometrisch einfachen Körpern durchgeführt. Die Messergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerischen Simulationen. Damit ist das Bewegungsverhalten nach dem Stoß, die hochdynamischen Welleneffekte und der damit verbundene Verlust der kinetischen Energie verifiziert.

Mit dem quasi-statischen Kontaktsubmodell steht ein effizientes Verfahren zur Zeitsimulation von Stoßsystemen mit statischen Ansatzfunktionen zur Verfügung. Die Ergebnisse dabei erreichen nahezu die Qualität der dynamischen Finite-Elemente-Simulation bei erheblich reduzierter Rechenzeit. Damit ist es als Analysewerkzeug für große Bewegungen und wiederholt auftretende Stöße besonders geeignet und kann beispielsweise als Grundlage zur Erweiterung für mehrere gleichzeitige Kontakte pro Körper verwendet werden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Adhikari00] Adhikari, S.: Damping Models for Structural Vibration. Doktorarbeit, University of Cambridge, 2000.
- [Adhikari06] Adhikari, S.: Damping modelling using generalized proportional damping. *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 293, Nr. 1–2, S. 156–170, 2006.
- [Altenbach12] Altenbach, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die material-unabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer Vieweg, 2. Aufl., 2012.
- [Altenbach18] Altenbach, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die material-unabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 4. Aufl., 2018.
- [Antoulas05] Antoulas, A.: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Philadelphia: SIAM, 2005.
- [Bathe96] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.
- [Bestle94] Bestle, D.: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Berlin: Springer, 1994.
- [BlockmansEtAl15] Blockmans, B.; Tamarozzi, T.; Naets, F.; Desmet, W.: A nonlinear parametric model reduction method for efficient gear contact simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 102, Nr. 5, S. 1162–1191, 2015.
- [Broyden65] Broyden, C.G.: A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of Computation*, Bd. 19, Nr. 92, S. 577–593, 1965.
- [Broyden70] Broyden, C.G.: The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms: 2. The New Algorithm. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Bd. 6, Nr. 3, S. 222–231, 1970.

- [ByrdKhalfanSchnabel96] Byrd, R.H.; Khalfan, H.F.; Schnabel, R.B.: Analysis of a Symmetric Rank-One Trust Region Method. *SIAM Journal on Optimization*, Bd. 6, 1996.
- [Bärwolff16] Bärwolff, G.: *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2. Aufl., 2016.
- [CappelliniEtAl18] Cappellini, N.; Tamarozzi, T.; Blockmans, B.; Fiszer, J.; Cosco, F.; Desmet, W.: Semi-analytic contact technique in a non-linear parametric model order reduction method for gear simulations. *Meccanica*, Bd. 53, Nr. 1, S. 49–75, 2018.
- [ChungHulbert93] Chung, J.; Hulbert, G.M.: A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 60, Nr. 2, S. 371–375, 1993.
- [Craig87] Craig, R.R.: A Review of Time-Domain And Frequency-Domain Component-Mode Synthesis Methods. *Journal of Modal Analysis*, Bd. 59, S. 59–72, 1987.
- [Craig00] Craig, R.R.: Coupling of Substructures for Dynamic Analyses: An Overview. In *Proceedings of the AIAA Dynamics Specialists Conference*, Paper-ID 2000-1573, Atlanta, April 5. 2000.
- [CraigBampton68] Craig, R.R.; Bampton, M.: Coupling of Substructures for Dynamic Analyses. *AIAA Journal*, Bd. 6, Nr. 7, S. 1313–1319, 1968.
- [CraigKurdila06] Craig, R.R.; Kurdila, A.J.: *Fundamentals of Structural Dynamics*. Kap. 17. Component-Mode Synthesis, S. 531–575. New York: John Wiley & Sons, 2006.
- [DahmenReusken08] Dahmen, W.; Reusken, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2. Aufl., 2008.
- [Dassault Systèmes14a] Dassault Systèmes: *Abaqus Theory Manual*. Dassault Systèmes, 2014.
- [Dassault Systèmes14b] Dassault Systèmes: *Abaqus/CAE User's Guide - Abaqus 6.14*. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, 2014.
- [Dietz99] Dietz, S.: *Vibration and Fatigue Analysis of Vehicle Systems Using Component Modes*. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 12, Nr. 401. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1999.
- [DietzKnothe97] Dietz, S.; Knothe, K.: *Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade in Finite-Elemente-Substrukturen*. ILR Mitteilung 315, Institut für Luft- und Raumfahrt, Technischen Universität Berlin, 1997.

- [DoZieglerEberhard15] Do, T.P.; Ziegler, P.; Eberhard, P.: Review on contact simulation of beveloid and cycloid gears and application of a modern approach to treat deformations. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Bd. 21, Nr. 4, S. 359–388, 2015.
- [Eberhard00] Eberhard, P.: Kontaktuntersuchungen durch hybride Mehrkörpersystem/ Finite Elemente Simulationen. Habilitationsschrift. Shaker Verlag, 2000.
- [Fletcher70] Fletcher, R.: A new approach to variable metric algorithms. *The Computer Journal*, Bd. 13, Nr. 3, S. 317–322, 1970.
- [Friberg91] Friberg, O.: A method for selecting deformation modes in flexible multibody dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 32, Nr. 8, S. 1637–1655, 1991.
- [GéradinRixen97] Géradin, M.; Rixen, D.: *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*. Chichester: John Wiley & Sons, 2. Aufl., 1997.
- [Goldsmith60] Goldsmith, W.: *Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. London: Edward Arnold, 1960.
- [GrossEtAl15] Gross, D.; Hauger, W.; Schröder, J.; Wall, W.A.: *Technische Mechanik 3 Kinetik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 13., überarb. Aufl., 2015.
- [Guyan65] Guyan, R.J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal*, Bd. 3, Nr. 2, S. 380, 1965.
- [HairerWanner96] Hairer, E.; Wanner, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Berlin: Springer, 2. Aufl., 1996.
- [Hanke-Bourgeois06] Hanke-Bourgeois, M.: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens. Mathematische Leitfäden*. Vieweg+Teubner Verlag, 2006.
- [HeirmanTamarozziDesmet11] Heirman, G.H.K.; Tamarozzi, T.; Desmet, W.: Static modes switching for more efficient flexible multibody simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 87, Nr. 11, S. 1025–1045, 2011.
- [Hermann11] Hermann, M.: *Numerische Mathematik*, Bd. 3., überarb. und erw. Aufl. München: Oldenbourg Verlag, 2011.
- [Hertz82] Hertz, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92, S. 156–171, 1882.

- [HuEberhard04] Hu, B.; Eberhard, P.: Simulation of Longitudinal Impact Waves Using Time Delayed Systems. J. Dyn. Sys., Meas., Control, Bd. 126, S. 644–649, 2004.
- [Hughes87] Hughes, T.J.R.: The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall International, 1987.
- [Hurty65] Hurty, W.C.: Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes. AIAA Journal, Bd. 3, S. 678–685, 1965.
- [HuSchiehlen03] Hu, B.; Schiehlen, W.: Multi-time scale simulation for impact systems: from wave propagation to rigid-body motion. Archive of Applied Mechanics, Bd. 72, Nr. 11-12, S. 885–898, 2003.
- [HuSchiehlenEberhard03] Hu, B.; Schiehlen, W.; Eberhard, P.: Comparison of Analytical and Experimental Results for Longitudinal Impacts on Elastic Rods. Journal of Vibration and Control, Bd. 9, Nr. 1-2, S. 157–174, 2003.
- [Johnson87] Johnson, K.L.: Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1987.
- [KnotheWessels17] Knothe, K.; Wessels, H.: Finite Elemente: Eine Einführung für Ingenieure. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2017.
- [Koppens89] Koppens, W.P.: The dynamics of systems of deformable bodies. Doktorarbeit, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 1989.
- [KurzBurkhardtEberhard11] Kurz, T.; Burkhardt, M.; Eberhard, P.: Systems with Constraint Equations in the Symbolic Multibody Simulation Software Neweul-M². In J.C. Samin; P. Fiset (Hrsg.) Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2011. Brussels, Belgium, 2011.
- [LankaraniNikravesh90] Lankarani, H.M.; Nikravesh, P.E.: A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems. Journal of Mechanical Design, Bd. 112, S. 369–376, 1990.
- [LankaraniNikravesh92] Lankarani, H.M.; Nikravesh, P.E.: Continuous Contact Force Models for Impact Analysis in Multibody Systems. Nonlinear Dynamics, Bd. 5, S. 193–207, 1992.
- [Lehner07] Lehner, M.: Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 10. Aachen: Shaker Verlag, 2007.

- [Li17] Li, Z.: Aufbau eines Prüfstands für experimentelle Stoßanalysen. Bachelorarbeit BSC-060, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Technische Universität Hamburg, 2017.
- [Lunze08] Lunze, J.: Regelungstechnik 1, Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen. Berlin: Springer, 2008.
- [Lunze10] Lunze, J.: Regelungstechnik 2, Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung. Berlin: Springer, 2010.
- [MagnusMüller90] Magnus, K.; Müller, H.: Grundlagen der Technischen Mechanik, Bd. 6. Teubner, 1990.
- [Mathworks16] Mathworks: Matlab, Product Help, Matlab Release 2016b. Mathworks Inc., 2016.
- [MüllerSchiehlen76] Müller, P.C.; Schiehlen, W.: Lineare Schwingungen. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1976.
- [MuM] Institut für Mechanik und Meerestechnik, Technische Universität Hamburg: Dynamic Modeling and Analysis Toolbox: Dynmanto. <https://www.tuhh.de/mum/forschung/forschungsgebiete-und-projekte.html>, abgerufen am 22. März 2019.
- [MunzWestermann19] Munz, C.D.; Westermann, T.: Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen: Ein interaktives Lehrbuch für Ingenieure. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 4. Aufl., 2019.
- [Müller18] Müller, N.: Experimentelle Stoßuntersuchungen. Bachelorarbeit BSC-086, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Technische Universität Hamburg, 2018.
- [Newmark59] Newmark, N.: A method of computation for structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division of ASCE, Bd. 85, S. 67–94, 1959.
- [Nikraves88] Nikraves, P.E.: Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1988.
- [Nour-OmidWriggers87] Nour-Omid, B.; Wriggers, P.: A note on the optimum choice for penalty parameters. Communications in Applied Numerical Methods, Bd. 3, S. 581–585, 1987.
- [Nowakowski15] Nowakowski, C.: Zur Modellierung und Reduktion elastischer Bauteile unter verteilten Lasten für die Mehrkörpersimulation. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 34. Aachen: Shaker Verlag, 2015.

- [NowakowskiEtAl12] Nowakowski, C.; Kürschner, P.; Eberhard, P.; Benner, P.: Model Reduction of an Elastic Crankshaft for Elastic Multibody Simulations. ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 93, S. 198–216, 2012.
- [PfeifferGlocker04] Pfeiffer, F.; Glocker, C.: Multibody Dynamics With Unilateral Contacts. WILEY-VCH, 2004.
- [Polytec15a] Polytec: Polytec Scanning Vibrometer Software-Handbuch. Polytec GmbH, 2015.
- [Polytec15b] Polytec: Polytec Scanning Vibrometer Theory Manual. Polytec GmbH, 2015.
- [ReinhardtHoffmannGerlach13] Reinhardt, R.; Hoffmann, A.; Gerlach, T.: Nichtlineare Optimierung - Theorie, Numerik und Experimente. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [Saad03] Saad, Y.: Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Philadelphia: SIAM, 2. Aufl., 2003.
- [Salane86] Salane, D.E.: Adaptive Routines for Forming Jacobians Numerically. Sandia National Laboratories, 1986.
- [SchiehlenEberhard17] Schiehlen, W.; Eberhard, P.: Technische Dynamik. Springer, 5., aktualisierte und erweiterte Aufl., 2017.
- [SchiehlenSeifried04] Schiehlen, W.; Seifried, R.: Three Approaches for Elastodynamic Contact in Multibody Systems. Multibody System Dynamics, Bd. 12, Nr. 1, S. 1–16, 2004.
- [SchiehlenSeifried07] Schiehlen, W.; Seifried, R.: Impact Systems with Uncertainty. In H. Hu; E. Kreuzer (Hrsg.) Iutam Symposium on Dynamics and Control of Nonlinear Systems with Uncertainty, Bd. 2 von IUTAM Book Series, S. 33–44. Springer Netherlands, 2007.
- [SchwertassekWallrapp99] Schwertassek, R.; Wallrapp, O.: Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme: Methoden der Mechanik zum rechnergestützten Entwurf und zur Analyse mechatronischer Systeme. Braunschweig: Vieweg, 1999.
- [SchwertassekWallrappShabana99] Schwertassek, R.; Wallrapp, O.; Shabana, A.A.: Flexible Multibody Simulation and Choice of Shape Functions. Nonlinear Dynamics, Bd. 20, Nr. 4, S. 361–380, 1999.
- [Seifried05] Seifried, R.: Numerische und Experimentelle Stoßanalyse für Mehrkörpersysteme. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 2. Aachen: Shaker Verlag, 2005.

- [Seifried14] Seifried, R.: Dynamics of Underactuated Multibody Systems - Modeling, Control and Optimal Design, Bd. 205 von Solid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing, 2014.
- [SeifriedBurkhardtHeld11] Seifried, R.; Burkhardt, M.; Held, A.: Trajectory Control of Flexible Manipulators Using Model Inversion. In J.C. Samin; P. Fisette (Hrsg.) Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2011. Brussels, Belgium, 2011.
- [SeifriedHuEberhard03] Seifried, R.; Hu, B.; Eberhard, P.: Numerical and Experimental Investigation of Radial Impacts on a Half-Circular Plate. Multibody System Dynamics, Bd. 9, S. 265–281, 2003.
- [SeifriedSchiehlen04] Seifried, R.; Schiehlen, W.: Plastic deformation by impacts in multibody systems. CD-ROM Proc. 21th Int. Congr. Theor. Appl. Mech., Warsaw, Poland, S. 15–21, 2004.
- [SeifriedSchiehlenEberhard10] Seifried, R.; Schiehlen, W.; Eberhard, P.: The Role of the Coefficient of Restitution on Impact Problems in Multibody Dynamics. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, Bd. 224, Nr. 3, S. 279–306, 2010.
- [Shabana05] Shabana, A.A.: Dynamics of Multibody Systems. Cambridge University Press, 3. Aufl., 2005. Cambridge Books Online.
- [Shabana18] Shabana, A.A.: Computational Continuum Mechanics. John Wiley & Sons, Ltd, 3. Aufl., 2018.
- [ShampineReichelt97] Shampine, L.F.; Reichelt, M.W.: The MATLAB ODE Suite. SIAM Journal on Scientific Computing, Bd. 18, Nr. 1, S. 1–22, 1997.
- [SherifEtAl11] Sherif, K.; Witteveen, W.; Irschik, H.; Holl, H.; Mayrhofer, K.: On the extension of global vibration modes with Ritz-vectors needed for local effects. In T. Proulx (Hrsg.) Linking Models and Experiments, Volume 2, S. 37–46. New York, NY: Springer New York, 2011.
- [SherifWitteveen14] Sherif, K.; Witteveen, W.: Deformation Mode Selection and Orthonormalization for an Efficient Simulation of the Rolling Contact Problem. In M. Allen; R. Mayes; D. Rixen (Hrsg.) Dynamics of Coupled Structures, Volume 1, S. 125–134. Cham: Springer International Publishing, 2014.
- [SherifWitteveenMayrhofer12] Sherif, K.; Witteveen, W.; Mayrhofer, K.: Quasi-static consideration of high-frequency modes for more efficient flexible multibody simulations. Acta Mechanica, Bd. 223, Nr. 6, S. 1285–1305, 2012.

- [Soppa11] Soppa, A.: Krylov-Unterraum basierte Modellreduktion zur Simulation von Werkzeugmaschinen. Dissertation, Schriften von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Braunschweig: Institut Computational Mathematics, 2011.
- [StelzmannGrothMüller08] Stelzmann, U.; Groth, C.; Müller, G.: FEM für Praktiker 2. Strukturodynamik: Basiswissen und Arbeitsbeispiele zu FEM-Anwendungen der Strukturodynamik - Lösungen mit dem Programm ANSYS. Expert-Verlag, 2008.
- [TamarozziEtAl13a] Tamarozzi, T.; Ziegler, P.; Eberhard, P.; Desmet, W.: On the applicability of static modes switching in gear contact applications. *Multibody System Dynamics*, Bd. 30, Nr. 2, S. 209–219, 2013.
- [TamarozziEtAl13b] Tamarozzi, T.; Ziegler, P.; Eberhard, P.; Desmet, W.: Static modes switching in gear contact simulation. *Mechanism and Machine Theory*, Bd. 63, S. 89 – 106, 2013.
- [TamarozziEtAl18] Tamarozzi, T.; Jiranek, P.; Rezayat, A.; Shweiki, S.: An efficient hybrid approach to gear contact simulation in multibody systems leveraging reduced order models. In *Proceedings of the 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6)*. 2018.
- [TamarozziHeirmanDesmet14] Tamarozzi, T.; Heirman, G.; Desmet, W.: An on-line time dependent parametric model order reduction scheme with focus on dynamic stress recovery. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 268, S. 336 – 358, 2014.
- [TaylorPapadopoulos91] Taylor, R.L.; Papadopoulos, P.: On a patch test for contact problems in two dimensions. *Computational methods in nonlinear mechanics*, S. 690–702, 1991.
- [TimoshenkoGoodier70] Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N.: *Theory of Elasticity*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 3. Aufl., 1970.
- [TisseurMeerbergen01] Tisseur, F.; Meerbergen, K.: The Quadratic Eigenvalue Problem. *SIAM Review*, Bd. 43, Nr. 2, S. 235–286, 2001.
- [Tobias12] Tobias, C.: Schädigungsberechnung in elastischen Mehrkörpersystemen. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 24. Aachen: Shaker Verlag, 2012.
- [TobiasEberhard11] Tobias, C.; Eberhard, P.: Stress recovery with Krylov-subspaces in reduced elastic multibody systems. *Multibody System Dynamics*, Bd. 25, Nr. 4, S. 377–393, 2011.

- [Tschigg13] Tschigg, S.: Implementierung und Analyse von trockenen Kontaktvorgängen auf Basis von reduzierten elastischen Körpern. Masterarbeit DIPL-MSC-207, Institut für Technische und Numerische Mechanik, Universität Stuttgart, 2013.
- [TschiggSeifried17] Tschigg, S.; Seifried, R.: Efficient Evaluation of Local and Global Deformations in Impact Simulations in Reduced Flexible Multibody Systems based on a Quasi-Static Contact Submodel. In Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics, S. 315–325. 2017.
- [TschiggSeifried18] Tschigg, S.; Seifried, R.: Efficient Impact Analysis Using Reduced Flexible Multibody Systems And Contact Submodels. In Proceedings of the 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6). 2018.
- [Veubeke76] de Veubeke, B.: The Dynamics of Flexible Bodies. International Journal of Engineering Science, Bd. 14, S. 895–913, 1976.
- [Wallrapp93] Wallrapp, O.: Standard Input Data of Flexible Bodies for Multibody System Codes. Report IB 515-93-04, DLR, German Aerospace Establishment, Institute for Robotics and System Dynamics, Oberpfaffenhofen, 1993.
- [Wallrapp94] Wallrapp, O.: Standardization of Flexible Body Modeling in Multibody System Codes, Part I: Definition of Standard Input Data. Journal of Structural Mechanics, Bd. 22, Nr. 3, S. 283–304, 1994.
- [WangChengYao01] Wang, F.; Cheng, J.; Yao, Z.: FFS contact searching algorithm for dynamic finite element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Bd. 52, Nr. 7, S. 655–672, 2001.
- [WehageHaug81] Wehage, R.A.; Haug, E.J.: Generalized Coordinate Partitioning in Dynamic Analysis of Mechanical Systems. Techn. bericht., College of Engineering, University of Iowa, 1981.
- [Wielenga84] Wielenga, T.J.: Simplifications in the simulation of mechanisms containing flexible members. Doktorarbeit, The University of Michigan, Michigan, 1984.
- [WitteveenPichler19] Witteveen, W.; Pichler, F.: On the relevance of inertia related terms in the equations of motion of a flexible body in the floating frame of reference formulation. Multibody System Dynamics, Bd. 46, Nr. 1, S. 77–105, 2019.
- [Wriggers01] Wriggers, P.: Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Berlin: Springer, 2001.

- [Wriggers06] Wriggers, P.: Computational Contact Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [Zhong93] Zhong, Z.H.: Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems. Oxford University Press, 1993.
- [Ziegler12] Ziegler, P.: Dynamische Simulation von Zahnradkontakten mit elastischen Modellen. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 23. Aachen: Shaker Verlag, 2012.
- [ZieglerEberhard08] Ziegler, P.; Eberhard, P.: Simulative and Experimental Investigation of Impacts on Gear Wheels. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Bd. 197, Nr. 51–52, S. 4653–4662, 2008.
- [ZieglerEberhard11] Ziegler, P.; Eberhard, P.: Investigation of Gears Using an Elastic Multibody Model with Contact. In K. Arczewski; W. Blajer; J. Fraczek; M. Wojtyra (Hrsg.) Multibody Dynamics, Bd. 23 von Computational Methods in Applied Sciences, S. 309–327. Springer Netherlands, 2011.

ABKÜRZUNGEN

CB	Craig-Bampton.
CMS	Component-Mode-Synthesis.
DAE	differential-algebraische Gleichung.
DS	gedämpftes Kontaktsubmodell.
FEM	Finite-Elemente-Methode.
FMKS	flexibles Mehrkörpersystem.
LDV	Laser-Doppler-Vibrometer.
LSV	Laser-Scanning-Vibrometer.
LV	Laser-Vibrometer.
MKS	Mehrkörpersystem.
NTE	Node-to-Edge.
NTN	Node-to-Node.
NTS	Node-to-Surface.
ODE	gewöhnliche Differentialgleichung.
QS	quasi-statisches Kontaktsubmodell.
SID	Standard Input Data.

