

88 | 1962

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Som Deo Sharma

Über Dipolverteilungen für getauchte Rotationskörper geringsten Wellenwiderstandes

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Über Dipolverteilungen für getauchte Rotationskörper geringsten Wellenwiderstandes

Som Deo Sharma

Zur Vereinfachung werden an Stelle von Umströmungskörpern erzeugende linienförmige Dipolverteilungen untersucht. Die Ermittlung von Formen geringsten Widerstandes bei vorgegebener Verdrängung erfordert dann die Minimalisierung eines quadratischen Ausdrucks unter linearen Nebenbedingungen. Ein Ritzscher Ansatz liefert ein lineares Gleichungssystem. Für eine Klasse von Dipolverteilungen, die sich aus kontinuierlichen Polynomverteilungen und diskreten Dipolen zusammensetzen, wurden Rechnungen für verschiedene Froudesche Längen- und Tiefenzahlen durchgeführt. In manchen Fällen wurden auch Umströmungskörper berechnet. Typische Ergebnisse werden erörtert. Das Verfahren führt i. a. zu brauchbaren Formen, aber in einem interessanten Teilbereich versagt die numerische Gleichungslösung. Versucht man, optimale Formen als ungünstig bekannter Schärfegrade zu erreichen, indem man den stellvertretenden Verteilungen diese Schärfegrade vorschreibt, so erhält man Umströmungskörper mit abweichenden Schärfegraden. Weitere theoretische und experimentelle Untersuchungen werden vorgeschlagen.

1. Einleitung

Das Problem: „Rotationskörper geringsten Wellenwiderstandes“ wurde von Weinblum im Jahre 1936 [1, 2] aufgegriffen und später in einer Reihe bekannter Arbeiten weiter verfolgt. Die ausführlichste dieser Abhandlungen erschien 1951 [3] und die jüngste 1958 [4]. Inzwischen sind in der sowjetischen wissenschaftlichen Literatur auch einige Arbeiten unter dem gleichen Titel erschienen [5]. Eine nähere Untersuchung zeigte jedoch, daß es sich dabei um ein viel aktuelleres Problem, nämlich um den Stoßwellenwiderstand in Gasen bei Überschallströmung handelt. Im folgenden werde ich versuchen, über einige Ergebnisse zu berichten, die wir hier im Institut für Schiffbau im Laufe der letzten zwei Jahre als Folge unserer Bemühungen, diesen Fragenkomplex unter Einsatz der elektronischen Rechanlage IBM 650 der Universität Hamburg systematisch in großem Umfang zu untersuchen, erzielt haben. Da ich das Verfahren im wesentlichen von Weinblum übernommen habe, werde ich mich mit Literaturangaben begnügen, die theoretischen Grundlagen nicht erneut ableiten, sondern nur angeben und die dabei stillschweigend gemachten Voraussetzungen nicht im einzelnen zu begründen versuchen.

Es sei nur einleitend erwähnt, daß in dem Weinblumschen Verfahren aus heuristischen Erwägungen heraus Dipolverteilungen als stellvertretend für die zugehörigen Umströmungskörper behandelt werden. Ferner werden die Verteilungen aus einfachen Polynomverteilungen zusammengesetzt angenommen, womit sich die Variationsaufgabe der optimalen Verteilung in eine finite Minimalaufgabe nach dem Ritzschen Ansatz entartet [1]. Diese kann unter vorgeschriebenen Nebenbedingungen — wie feste Hauptabmessungen und Verdrängung — als ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Dann wird die Abhängigkeit der so ermittelten optimalen Verteilungen und minimalen Widerstände von äußeren Parametern wie Froudesche Zahl und Tiefenzahl und von inneren wie Breite und Schärfegrad der Verteilung untersucht. Erst zum Schluß wird die Anwendbarkeit auf Umströmungskörper geprüft.

Diesem Schema entsprechend beginnen wir unsere Betrachtungen damit, daß wir zunächst den Zusammenhang zwischen Dipolverteilung, Umströmungskörper und Wellenwiderstand rekapitulieren, um dann darauf das Minimalproblem aufbauen zu können.

2. Dipolverteilung

Betrachten wir eine Liniendipolverteilung $m(x)$ auf einer geraden Strecke $-\ell \leq x \leq \ell$. Das Dipolmoment $m(x) dx$ hat die Dimension vom Moment einer Ergiebigkeit $[m^4/s]$. Es ist jedoch zweckmäßig, die Verteilung als eine dimensionslose

Größe darzustellen. Dazu führen wir eine dimensionslose Koordinate $\xi = x/\ell$ und eine bezogene Liniendipolverteilung: $\eta(\xi) = m(x)/m(0)$ ein. Die Funktion $\eta(\xi)$ ist auf Grund dieser Definition im abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ gegeben und an der Stelle $\xi = 0$ (Hauptspant) so normiert, daß

$$\eta(0) = 1 \quad (2.1)$$

ist.

Außerhalb des Intervalls soll sie identisch Null sein. Diese Funktion wollen wir im folgenden kurz „Verteilung“ nennen.

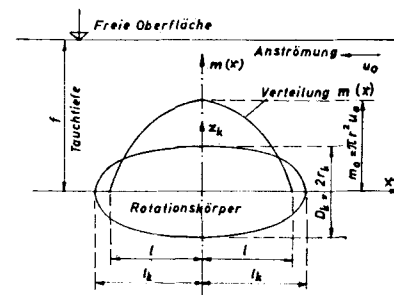


Bild 1 Koordinatensystem und Hauptgrößen der Verteilung und des Rotationskörpers

3. Umströmungskörper

Wenn die Funktion $\eta(\xi)$ gewisse Voraussetzungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, erfüllt, erzeugt die von ihr gekennzeichnete Verteilung bei paralleler Anströmung mit der Geschwindigkeit u_0 in Richtung der negativen x-Achse in allseitig unbeschränkter Flüssigkeit einen drehsymmetrischen Umströmungskörper von der Länge

$$L_k \approx L = 2\ell \quad (3.1)$$

und der Spantfläche

$$S_k \approx S = \frac{m(x)}{u_0} \quad (3.2)$$

Wir benutzen diese Näherungsrelationen, die an sich nur für sehr langgestreckte Körper gelten, um drei formale charakteristische Parameter der Verteilung einzuführen, und zwar erstens einen Hauptspantdurchmesser

$$r = \sqrt{\frac{m_0}{\pi u_0}} \quad (3.3)$$

bzw. einen Hauptspantdurchmesser

$$D = 2r, \quad (3.4)$$

zweitens einen Schärfegrad

$$\varphi = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{m(x)}{m(0)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \eta(\xi) d\xi \quad 3.(5)$$

und letztens eine Verdrängung

$$V = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{m(x)}{u_0} dx = \frac{m_0 \ell}{u_0} \int_{-1}^1 \eta(\xi) d\xi \quad 3.(6)$$

mit dem Vorbehalt, daß diese Größen von den entsprechenden Größen des exakten Umströmungskörpers unter Umständen erheblich abweichen können. Da die exakten Körperparameter r_k , φ_k , V_k in komplizierter Weise von der Art der Verteilung $\eta(\xi)$ abhängen, wollen wir vorläufig nur r , φ und V benutzen und überhaupt die Verteilung und ihre formalen Formparameter als stellvertretend für den von ihr erzeugten Rotationskörper untersuchen. Es muß jedoch betont werden, daß nicht jede Liniendipolverteilung unbedingt einen geschlossenen Körper erzeugt und umgekehrt kann auch nicht jeder Rotationskörper durch Achsverteilung dargestellt werden. Daher werden wir am Schluß die Übertragbarkeit der Ergebnisse von Verteilungen auf wirkliche Körper prüfen.

Es sei hier nur am Rande erwähnt, daß man die exakte Kontur $z_k(x)$ des Umströmungskörpers berechnen kann, indem man eine Stromfunktion einführt und sie an der Oberfläche wie üblich gleich Null setzt. Die Oberfläche wird dann durch die folgende implizite Integralrelation zwischen Körperkontur z_k und Längskoordinate x dargestellt [6]:

$$\frac{m_0}{2\pi u_0 \ell^2} \int_{-1}^1 \frac{\eta(\xi') d\xi'}{\sqrt{\left[\left(\frac{x}{\ell} - \xi'\right)^2 + \left(\frac{z_k}{\ell}\right)^2\right]^{3/2}} = 1. \quad 3.(7)$$

4. Wellenwiderstand

Wenn die oben definierte Verteilung in seitlich unbeschränkter, unendlich tiefer Flüssigkeit in einer Tauchtiefe f unter einer sonst ruhigen freien Oberfläche mit gleichförmiger Geschwindigkeit u_0 parallel zur negativen x -Achse angeströmt wird, so erleidet sie einen Wellenwiderstand [4]:

$$R = 4\pi \rho g \frac{r^4}{\ell} \int_{\gamma_0}^{\infty} (i^{*2} + j^{*2}) \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}} \exp\left(-2 \frac{f}{\ell} \frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right) d\gamma \quad 4.(1)$$

$$\text{mit } \left. \begin{matrix} i^* \\ j^* \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{d\xi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\gamma\xi) d\xi. \quad 4.(2)$$

Hierin bedeutet $\gamma_0 = \frac{g\ell}{u_0^2} = \frac{1}{2F_z^2}$ einen dimensionslosen Geschwindigkeitsparameter und γ eine Integrationsvariable.

Dieser im Rahmen der linearisierten Theorie exakte Wellenwiderstand der Verteilung kann nur näherungsweise als auch der Wellenwiderstand des beschriebenen rotationsymmetrischen Umströmungskörpers angesehen werden, da bei der Ermittlung der Form des Umströmungskörpers die freie Oberfläche nicht berücksichtigt wurde.

Um die Abhängigkeit des Wellenwiderstandes von der Verteilung hervorzuheben, können wir nach Weinblum [4] einen dimensionslosen Wellenwiderstandsbeiwert einführen:

$$R^* = \frac{R}{4\pi \rho g r^4/\ell} = \int_{\gamma_0}^{\infty} (i^{*2} + j^{*2}) \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}} \exp\left(-2 \frac{f}{\ell} \frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right) d\gamma \quad 4.(3)$$

5. Aufstellung des Minimalproblems

Als Minimalproblem bezeichnen wir hier die Aufgabe, Verteilungen geringsten Wellenwiderstands unter geeigneten Nebenbedingungen zu ermitteln. Als sinnvolle Nebenbedingungen kommen Festsetzungen über die Hauptabmessungen und die Verdrängung bzw. den Schärfegrad in Frage. Aus der Gleichung 4.(1) ist ersichtlich, daß die Abhängigkeit des Wellenwiderstandes R von den Hauptabmessungen ℓ und r im wesentlichen in dem Dimensionsfaktor $4\pi\rho g r^4/\ell$ enthalten ist. Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, die komplizierte Abhängigkeit des dimensionslosen Wellenwiderstandsbeiwertes R^* von der dimensionslosen, bezogenen Verteilung $\eta(\xi)$ zu untersuchen.

Die Aufgabe, eine Verteilung $\eta(\xi)$ zu finden, die für vorgeschriebene Werte des Geschwindigkeitsparameters γ_0 und der Tiefenzahl f/ℓ unter geeigneten Nebenbedingungen — in Form von vorgegebenem Schärfegrad φ — den Widerstandsbeiwert R^* nach Gleichung 4.(3) zum Minimum macht, ist eine Variationsaufgabe, deren exakte Lösung ähnliche Schwierigkeiten bereiten dürfte, wie sie bei dem entsprechenden Problem beim Michellschen Schiff festgestellt worden sind [1, 7]. Man kann jedoch diese Schwierigkeiten mit Hilfe des Ritzschen Ansatzes umgehen, indem man die Wahl der Verteilung $\eta(\xi)$ auf eine bestimmte Funktionsklasse beschränkt.

Die Variationsaufgabe entartet dann in eine finite Minimalaufgabe, deren exakte Lösung bekanntlich nur noch die Lösung eines linearen Gleichungssystems erfordert. Ob die so erhaltenen Lösungen an die eventuell existierende exakte Lösung der Variationsaufgabe genügend nahe herankommen bzw. praktisch brauchbar sind, wird davon abhängen, ob die zugrunde gelegte Funktionsklasse sachgemäß gewählt wurde. Selbst wenn keine exakte Lösung existiert, so gibt es doch sicher einen unteren Grenzwert für den Wellenwiderstand unter den hier betrachteten Nebenbedingungen. Bei richtiger Wahl der Funktionsklasse müßte man dann diesen Grenzwert annähern.

6. Vereinfachung des Minimalproblems

Eine wichtige Einschränkung der Funktion $\eta(\xi)$ bietet sich fast von selbst. Setzt man die Verteilung $\eta(\xi)$ als eine Linearkombination von n zum Hauptspant symmetrischen Grundverteilungen $f_r^s(\xi)$ und m antimetrischen Grundverteilungen $f_a^a(\xi)$ an:

$$\eta(\xi) = \sum_1^n a_r^s f_r^s(\xi) + \sum_1^m a_a^a f_a^a(\xi) \quad 6.(1)$$

so erhält man aus Gleichung 2.(1) die Normierungsbedingung:

$$\sum_1^n a_r^s f_r^s(0) = 1 \quad 6.(2)$$

aus Gleichung 3.(5) den Schärfegrad:

$$\varphi = \sum_1^n a_r \int_0^1 f_r^s(\xi) d\xi \quad 6.(3)$$

und aus Gleichung 4.(3) den Wellenwiderstandsbeiwert:

$$R^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i^s a_k^s A_{ik}^s + \sum_{i'=1}^m \sum_{k'=1}^m a_{i'}^a a_{k'}^a A_{i'k'}^a \quad 6.(4)$$

wobei

$$A_{ik}^s = \int_{\gamma_0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{df_i^s(\xi)}{d\xi} \sin(\gamma\xi) d\xi \int_0^1 \frac{df_k^s(\xi')}{d\xi'} \sin(\gamma\xi') d\xi' \right\} \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{V(\gamma/\gamma_0)^2 - 1} \exp\left(-2 \frac{f}{\ell} \frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right) d\gamma \quad (6.5)$$

und

$$A_{ik}^{s,a} = \int_{\gamma_0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{df_i^{s,a}(\xi)}{d\xi} \cos(\gamma\xi) d\xi \int_0^1 \frac{df_k^{s,a}(\xi')}{d\xi'} \cos(\gamma\xi') d\xi' \right\} \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{V(\gamma/\gamma_0)^2 - 1} \exp\left(-2 \frac{f}{\ell} \frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right) d\gamma \quad (6.6)$$

Es fällt sofort auf, daß die antimetrischen Grundverteilungen zwar zum Widerstand, aber nicht zum Schärfegrad beitragen. Da wir den Schärfegrad als Nebenbedingung einsetzen wollen, kommen nur symmetrische Verteilungen als Optimalverteilungen in Frage. Wir können daher die Unterscheidung fortfallen lassen und die obigen Formeln einfacher umschreiben:

$$\eta = \sum_{i=1}^n a_n f_n(\xi) \quad (6.7)$$

$$1 = \sum_{i=1}^n a_n f_n(0) \quad (6.8)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_n \int_0^1 f_n(\xi) d\xi \quad (6.9)$$

$$R^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i a_k A_{ik} \quad (6.10)$$

wobei jetzt $f_n(\xi)$ symmetrische Grundverteilungen bedeuten.

7. Formale Lösung des Minimalproblems

Wenn einmal die Grundverteilungsfunktionen $f_n(\xi)$ feststehen, dann sind auch die Integrale $\int_0^1 f_n(\xi) d\xi$ bekannt und

die Hilfsfunktionen A_{ik} können in Abhängigkeit von den Parametern γ_0 und f/ℓ berechnet werden. Die Lösung des Minimalproblems läuft jetzt darauf hinaus, daß man unter Berücksichtigung der Bedingungen 6.(8) und 6.(9) den Ausdruck 6.(10) minimalisiert. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, als dessen Lösung die Koeffizienten a_n der optimalen Verteilung hervorgehen.

Besonders elegant läßt sich die Lösung im Matrixformalismus anschreiben und für elektronische Rechenanlagen programmieren. Zu diesem Zwecke führen wir eine Nebenbedingungs matrix

$$B = \begin{pmatrix} f_1(0), \dots, f_n(0) \\ \int_0^1 f_1(\xi) d\xi, \dots, \int_0^1 f_n(\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

ein und fassen die Bedingungen 6.(8) und 6.(9) in eine Matrixgleichung zusammen:

$$B a = C \quad (7.2)$$

wobei wir den Spaltenvektor

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

den Koeffizientenvektor und den Vektor

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

den Parametervektor nennen wollen.

Jede Verteilung $\eta(\xi)$ aus der gewählten Funktionsklasse ist nunmehr durch den Koeffizientenvektor a eindeutig gekennzeichnet. Um die Verteilung $\eta(\xi)$ graphisch-numerisch zu erfassen, führen wir eine Verteilungsmatrix V ein, die sich aus

den Ordinaten η_m an m repräsentativen Abszissenstellen zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ zusammensetzt:

$$V = (\eta(\xi_1), \dots, \eta(\xi_m)) \quad (7.5)$$

$$= (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} f_1(\xi_1), \dots, f_1(\xi_m) \\ \vdots \\ f_n(\xi_1), \dots, f_n(\xi_m) \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

$$= a^T H \quad (7.7)$$

Bei gegebenen Grundverteilungen $f_n(\xi)$ und festgesetzten Stellen ξ_1, \dots, ξ_m ist die rechteckige Ordinatenmatrix H natürlich auch bekannt.

Den Wellenwiderstandsbeiwert selbst kann man nach 6.(10) in Matrixform schreiben:

$$R^* = a^T A a \quad (7.8)$$

wobei die quadratisch-symmetrische Matrix A die Funktionen A_{ik} 6.(5) als Elemente enthält. Man erhält die Minimalisierungsbedingung, indem man R^* nach den Koeffizienten differenziert, also etwa

$$A X = O \quad (7.9)$$

wobei X der Lösungsvektor (Koeffizientenvektor der gesuchten Optimal-Verteilung) wäre.

Da jedoch die Nebenbedingung 7.(2) gleichzeitig eingehalten werden soll, muß man nach dem Verfahren von Lagrange [11] einen Multiplikator Y' einführen und den Ausdruck

$$R^* - Y' (B X - C) = X^T A X - Y' (B X - C) \quad (7.10)$$

bezüglich X und Y' minimalisieren. Man erhält schließlich das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{matrix} A X - B^T Y = O \\ B X = C \end{matrix} \right\} \quad (7.11)$$

mit $Y = \frac{1}{2} (Y')^T$.

Sind gleichzeitig Lösungen für mehrere Nebenbedingungen erwünscht, also etwa für $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots$ dann hat man mehrere Gleichungssysteme und die Vektoren X , Y , O und C sind eben als Matrizen umzudeuten. Der formale Ausdruck bleibt derselbe.

Genau so einfach kann man auch die Lösung formal hinschreiben:

$$X = A^{-1} B^T P C \quad (7.12)$$

mit

$$P = K^{-1} = (B A^{-1} B^T)^{-1} \quad (7.13)$$

Die von der jeweiligen Nebenbedingung unabhängigen, quadratisch-symmetrischen Matrizen K und P wollen wir die Kern- und Einflußmatrix nennen. Der letzteren kommt in unserem Problem eine zentrale Bedeutung zu, weil sie Koeffizientenwerte liefert, um die Abhängigkeit des minimalen Wellenwiderstandes von den Formparametern der Verteilung auszudrücken. Es gilt nämlich

$$R^*_{\min} = X^T A X = C^T P C \quad (7.14)$$

oder

$$R^*_{\min} = P_{11} + (P_{12} + P_{21}) \varphi + P_{22} \varphi^2 \quad (7.15)$$

d. h. der minimale Wellenwiderstandsbeiwert R^*_{\min} ist eine quadratische Funktion des Schärfegrades φ . Die Matrix \mathbf{P} ist, abgesehen von den in der Praxis auftretenden numerischen Fehlern, positiv definit. Daher kann man aus der Gleichung 7.(15) die absoluten Minima der Größen R^* , R^*/φ bzw. R^*/φ^2 und die zugehörigen optimalen Schärfegrade φ bestimmen. Jedes Minimum hat eine klare physikalische Bedeutung; der folgende Vergleich dürfte interessieren:

Fall	Minimalisierte Größe	Zugehöriger optimaler Schärfegrad	Physikalische Bedeutung ¹⁾
(i)	R^*	$\varphi = -\frac{P_{12}}{P_{22}}$	Mindest-Wellenwiderstand für gegebene Länge, Durchmesser, Geschwindigkeit und Tauchtiefe
(ii)	R^*/φ	$\varphi = \sqrt{\frac{P_{11}}{P_{22}}}$	Mindest-Wellenwiderstand pro Volumeneinheit für gegebene Länge, Durchmesser, Geschwindigkeit u. Tauchtiefe
(iii)	R^*/φ^2	$\varphi = -\frac{P_{11}}{P_{12}}$	Mindest-Wellenwiderstand für gegebene Länge, Verdrängung, Geschwindigkeit und Tauchtiefe

Die Einflußmatrix \mathbf{P} enthält demnach die vollständige Information über die optimalen Widerstandsverhältnisse der betreffenden Verteilungsklasse.

3. Auswahl der Grundverteilungen

Es wurde vorhin erwähnt, daß die Wirksamkeit des Ritzschen Ansatzes zur Lösung der Minimalaufgabe davon abhängt, wie zweckmäßig man die zugrunde gelegte Funktionsklasse wählt. Für die vorliegende Untersuchung lag es nahe, die bewährten Weinblumschen Polynome als Grundverteilungen zu verwenden. In neuerer Zeit aber haben Karp, Kotik und Lurye [8] gezeigt, daß die Dipolbelegungen minimalen Wellenwiderstandes für unendlich tiefe, eingetauchte vertikale Zylinder integrierbare Unendlichkeitsstellen an dem vorderen und hinteren Intervallende besitzen müssen²⁾. Zu derartigen Verteilungen gelangt man nicht, wenn man — wie bisher — nur kontinuierliche Quellverteilungen zuläßt; diese sind Dipolverteilungen gleichwertig, die für $x = \pm \ell$ verschwinden. Man muß also zur Konkurrenz noch Verteilungen zulassen i) die an den Intervallenden $x = \pm \ell$ einen endlichen Wert behalten und

1) Zur weiteren Erläuterung der Fallunterscheidung seien noch folgende Anwendungsbeispiele aus der Schiffspraxis angeführt:

(i) Dieser Fall tritt auf, wenn bei einem Unterwasserkörper vorgegebener Hauptabmessungen weder Laderauminhalt noch Tragfähigkeit vorausgesetzt werden, d. h. das *Displacement* darf im Prinzip verschwindend klein sein. In anderen Worten ist etwa die optimale Verkleidung vorgegebener Länge für eine Kreisheibe von vorgegebenem Durchmesser gesucht. Interessanterweise führt es i. a. nicht zu der trivialen Lösung eines verdrängungslosen Körpers. Dieses Paradox erklärt sich dadurch, daß ein endlicher Hauptspanndurchmesser auch ohne Verdrängung zu einem endlichen Wellenwiderstand führt. Aus Gleichung 7.(15) ist ersichtlich, daß wegen P_{12} i. a. der Minimalwiderstand R^*_{\min} auch dann nicht verschwindet, wenn der Schärfegrad $\varphi = 0$ gesetzt wird. Dieses Ergebnis zeigt, daß eine geeignete Verkleidung einer in der Achsrichtung fortbewegten Scheibe nicht nur mit Rücksicht auf den Reibungs- und Wirbelwiderstand, sondern gegebenenfalls auch im Hinblick auf den Wellenwiderstand zweckmäßig ist. In der Praxis könnte dieser Fall dann vorkommen, wenn ein leichtes, scheibenförmiges Gerät, etwa eine Meßvorrichtung oder ein Torpedo, für den Transport in der Achsrichtung optimal verkleidet werden soll.

(ii) Dieser ist wohl der in der Praxis am häufigsten auftretende Fall. Wenn eine große unbestimmte Menge Fracht auf eine Anzahl gleicher Schiffe oder eine Reihe von Fahrten desselben Schiffes vorgegebener Hauptabmessungen optimal zu verteilen ist, dann ist diese die wirtschaftlichste Lösung. Denn das Verhältnis Widerstand zu *Displacement* liegt hier am günstigsten. Diese Lösung ist also für eine Flotte von Unterseebooten, deren Länge und Hauptspanndurchmesser durch bau-, haven- oder betriebstechnische Gründe bedingt sind, anwendbar. Zu beachten ist, daß sich diese Lösung nicht für eine einzelne Fahrt eines einzelnen Schiffes, sondern erst für den regelmäßigen Masseneinsatz lohnt.

(iii) Im Gegensatz zum vorhergehenden Fall ist hier ein bestimmtes *Displacement* für ein einzelnes Schiff festgesetzt. Bei vorgegebener Länge ergibt diese Lösung den optimalen Schärfegrad und Hauptspanndurchmesser. Es muß hervorgehoben werden, daß hier jedes Schiff als eine selbständige Einheit angesehen wird. In der Praxis trifft es für Schiffe mit besonderen Aufgaben, wie Fabrik-, Forschungs- und Kriegsschiffe, zu. Diese Lösung wäre also für Unterseeboote mit ähnlichen Aufgaben vorzuziehen.

2) Auf ein ähnliches Ergebnis von Dörr hatte auch Wehausen schon früher hingewiesen [7].

ii) die dort unendlich werden, aber integrierbar bleiben. Die ersten entsprechen diskreten Quellen und Senken und die letzten sind beispielsweise diskrete, punktförmige Dipole an den Steven. Als „kontinuierliche“ Liniendipolverteilungen können sie formal durch die Diracsche Deltafunktion dargestellt werden.

Die Aufnahme des diskreten Dipols in die Grundverteilungen schien auch deshalb angebracht, weil Inui, Takahei und Kumano [9, 10] kürzlich experimentell bestätigt haben, daß ein diskreter Dipol in Verbindung mit einer kontinuierlichen Verteilung, wie es Havelock und Wigley ihren theoretischen Untersuchungen zugrunde gelegt haben, das Wellenbild des Systems Wulst plus Schiffsrumpf recht gut wiedergibt. Aus den vorhergehenden Erwägungen heraus wurden schließlich die folgenden sechs Grundverteilungen gewählt:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= (1 - \xi^2) \\ f_2(\xi) &= (1 - \xi^4) \\ f_3(\xi) &= (1 - \xi^6) \\ f_4(\xi) &= (1 - \xi^8) \\ f_5(\xi) &= 1 \\ f_6(\xi) &= \delta(1 - \xi^2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{im Intervall } [-1, 1], \\ \text{außerhalb identisch Null.} \end{array} \quad (8.1)$$

$$\eta(\xi) = \sum_1^6 a_n f_n(\xi) \quad (8.2)$$

Die Funktion $f_5(\xi)$ entspricht also einer von Null verschiedenen Endordinate (diskrete Quelle) und die Funktion $f_6(\xi)$ ist die Diracsche Deltafunktion mit der bekannten Eigenschaft [12]:

$$f_6(\xi) = 0 \quad \text{für } 1 - \xi^2 \neq 0, \quad \text{d. h. } \xi \neq \pm 1 \quad (8.3)$$

$$\text{und } f_6(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{bei } 1 - \xi^2 = 0, \quad \text{d. h. } \xi = \pm 1 \quad (8.4)$$

$$\text{derart, daß } \int_0^{1,-1} f_6(\xi) d\xi = 1 \quad (8.5)$$

Sie entspricht damit je einem diskreten Dipol an jedem Intervallende.

Zur weiteren Veranschaulichung sei noch gesagt, daß die Verteilung $\eta(\xi) \equiv 1$ ein Ovoid und $\eta(\xi) = \delta(1 - \xi^2)$ zwei einzelne Kugeln an den Intervallenden, soweit sie sich nicht überschneiden, als Umströmungskörper in paralleler Anströmung erzeugt.

9. Praktische Durchführung der Minimalrechnung

Die anfangs erwähnte systematische Untersuchung wurde durch umfangreiche Minimalrechnungen für die sechs ausgewählten Grundverteilungen mittels der elektronischen Rechenanlage IBM 650 der Universität Hamburg begonnen.

Als erstes wurden die Hilfsfunktionen A_{jk} für die sechs Grundverteilungen für einen weiten Bereich des Geschwindigkeitsparameters $\gamma_0 = 0,5$ (0,5) 15,0 und jeweils drei Tauchtiefen $f/\ell = 0,25; 0,5$ und 1,0 errechnet und in Form von quadratisch-symmetrischen Matrizen \mathbf{A} auf Lochkarten für die Minimalrechnung bereitgestellt³⁾. Zur Auswertung der Integrale 6.(5) wurde die Hermiteische Quadraturformel mit 20 Stellen angewandt. Ein Vergleich mit den früher von Weinblum [4] veröffentlichten Integralen zeigte gute Übereinstimmung. Die neuen achtstelligen mit Gleitkomma berechneten Werte sind natürlich etwas genauer und sollen später eventuell veröffentlicht werden.

Die eigentliche Minimalrechnung, Odiro (= Optimale Dipolverteilungen für Rotationskörper) genannt, wurde unter Verwendung des Unterprogramms Maxi (= Matrixalgebra-Interpretationssystem) für die IBM 650 programmiert. Eine ausführliche Beschreibung der Programme Odiro und Wediro

3) Diese Berechnungen wurden von Herrn cand. nav. arch. Wittkopp nach den Angaben von Herrn Dr. Eggers vom Institut für Schiffbau für den Elektronenrechner IBM 650 programmiert und durchgeführt.

(= Wellenwiderstand von Dipolverteilungen zu Rotationskörpern) befindet sich in einem Bericht des Instituts für Schiffbau [13].

Zum leichteren Verständnis seien hier die Hauptmerkmale des Rechenprogramms Odiro wiedergegeben. In eine Minimalberechnung für bestimmte Werte von γ_0 und f/l gehen neben den zugehörigen Matrizen **A** noch die Matrizen **B**, **C** und **H** ein.

Die Nebenbedingungsmatrix **B** hat nach Gleichung 7.(1) für unsere Grundverteilungen stets die Gestalt:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 4/5 & 6/7 & 8/9 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 9.(1)$$

Die Parametermatrix enthält zwei Schärfegrade:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \quad 9.(2)$$

Da der Lösungsvektor **X** laut Gleichung 7.(12) eine lineare Funktion des Schärfegrades φ ist, schien es sinnvoll, die Minimalrechnung stets für zwei φ -Werte durchzuführen. Die entsprechenden Lösungen für alle anderen φ -Werte lassen sich daraus durch lineare Inter- bzw. Extrapolation gewinnen.

Die Ordinatenmatrix **H** wird für 14 Abszissenstellen $\xi = 0 (0,1) 0,7 (0,05) 1,0$ eingegeben:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_1(0), f_1(0,1), \dots, f_1(1,0) \\ \dots \\ f_6(0), \dots, f_6(1,0) \end{pmatrix} \quad 9.(3)$$

und ermöglicht die direkte Berechnung von η an diesen Stellen nach Formel 7.(7).

Als Ergebnis liefert das Programm außer der Lösungsmatrix

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad 9.(4)$$

und dem minimalisierten Wellenwiderstandsbeiwert

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{R}_{\min}^* \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\min 11}^* & \mathbf{R}_{\min 12}^* \\ \mathbf{R}_{\min 21}^* & \mathbf{R}_{\min 22}^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 9.(5)$$

noch die folgenden Größen:

Verteilungsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T \mathbf{H} &= \mathbf{V} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 9.(6)$$

Restmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{B}^T \mathbf{Y} &= \tilde{\mathbf{O}} \\ &= (\tilde{\mathbf{O}}_1, \tilde{\mathbf{O}}_2). \end{aligned} \quad 9.(7)$$

Parametermatrix für die errechneten Koeffizienten:

$$\mathbf{B} \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{C}} = (\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{C}}_2) \quad 9.(8)$$

Lagrangesche Multiplikatoren:

$$(\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \quad 9.(9)$$

Kernmatrix:

$$(\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T) = \mathbf{K} \quad 9.(10)$$

Einflußmatrix:

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{P} \quad 9.(11)$$

und den indirekt berechneten Wellenwiderstandsbeiwert:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{R}}_{\min}^* \quad 9.(12)$$

Hiervon dient die Matrix **V** der Veranschaulichung und graphischen Auftragung der Verteilung η . Die Matrizen $\tilde{\mathbf{O}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{R}}_{\min}^*$ sind zur Kontrolle und zum Vergleich mit den Matrizen **O**, **C** und \mathbf{R}_{\min}^* geeignet und verschaffen damit eine Übersicht über Abrundungsfehler und Rechenungenauigkeiten.

Die Matrizen **Y**, **K** und **P** werden schließlich für grundsätzliche Untersuchungen über die Güte der Verteilungsklasse, von der ausgegangen wurde, benötigt.

10. Umrechnung der Odiro-Ergebnisse auf andere Werte des Schärfegrades

Es geht aus der Gleichung 7.(12) hervor, daß der Lösungskoeffizientenvektor **X** von dem Parametervektor **C** linear abhängt. Daraus ergibt sich, daß eine Odiro-Rechnung mit zwei Schärfegraden die Umrechnung der Ergebnisse auf jeden beliebigen Schärfegrad gestattet. Die zugehörigen Formeln seien hier kurz zusammengefaßt.

φ_1 und φ_2 seien die Werte der Schärfegrade, für welche die Ergebnisse vorliegen. Es sollen nun die Ergebnisse für einen dritten Wert φ_3 errechnet werden. Dazu muß man φ_3 als eine Linearkombination aus φ_1 und φ_2 darstellen, also etwa:

$$\varphi_3 = \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) \varphi_2. \quad 10.(1)$$

Auf diese Weise ist λ eindeutig bestimmt.

Es gilt nun:

$$\mathbf{X}_3 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{X}_2 \quad 10.(2)$$

$$\mathbf{V}_3 = \lambda \mathbf{V}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{V}_2 \quad 10.(3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\min 3}^* &= \lambda \mathbf{R}_{\min 11}^* + \lambda (1 - \lambda) (\mathbf{R}_{\min 12}^* + \mathbf{R}_{\min 21}^*) \\ &\quad + \lambda^2 \mathbf{R}_{\min 22}^* \end{aligned} \quad 10.(4)$$

alternativ:

$$\mathbf{R}_{\min 3}^* = \mathbf{P}_{11} + (\mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{21}) \varphi_3 + \mathbf{P}_{22} \varphi_3^2 \quad 10.(5)$$

und weiter:

$$\tilde{\mathbf{O}}_3 = \lambda \tilde{\mathbf{O}}_1 + (1 - \lambda) \tilde{\mathbf{O}}_2 \quad 10.(6)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_3 = \lambda \tilde{\mathbf{C}}_1 + (1 - \lambda) \tilde{\mathbf{C}}_2 \quad 10.(7)$$

$$\mathbf{Y}_3 = \lambda \mathbf{Y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{Y}_2 \quad 10.(8)$$

alternativ:

$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}}_3. \quad 10.(9)$$

11. Bildung verschiedener Funktionsklassen aus den Grundverteilungen

Um die widerstands-minimalisierende Wirkung jeder einzelnen Grundverteilung — insbesondere der diskreten Quelle und des diskreten Dipols — gesondert feststellen zu können, wurde es im Rechenprogramm vorgesehen, entweder alle sechs Grundverteilungen zu einer Funktionsklasse zusammenzusetzen oder beliebige Grundverteilungen aus der Konkurrenz auszuschalten. Auf diese Weise könnte festgestellt werden, welche Grundverteilungen oder besondere Kombinationen für bestimmte Geschwindigkeitsbereiche, Tauchtiefen und Schärfegrade besonders günstig seien.

Aus sechs Grundverteilungen ergeben sich theoretisch

$$\sum_{\alpha=0}^6 \binom{6}{\alpha} = 2^6 = 64 \text{ verschiedene Funktionsklassen } (\alpha \leq 6)$$

ist die Anzahl der zugelassenen Grundverteilungen, d. h. der von Null verschiedenen Koeffizienten a_n). Es ist aber offensichtlich, daß man mindestens zwei Grundverteilungen heranziehen muß, um allein die Nebenbedingung 7.(2) zu erfüllen und mindestens drei, um eine Optimalverteilung zu erhalten.

Daher gibt es praktisch nur $\sum_{\alpha=2}^6 \binom{6}{\alpha} = 57$ Klassen, die die Neben-

bedingung erfüllen und nur $\sum_{\alpha=3}^6 \binom{6}{\alpha} = 42$, die eine Lösung

des Minimalproblems liefern können. Wir haben allerdings bisher nur etwa zehn verschiedene Kombinationen ausprobiert, da aus den meisten Klassen mit zu wenigen Grundverteilungen kaum besonders interessante Ergebnisse zu erwarten sind.

Es sei hier ein einfaches Rezept angedeutet, nach dem die Minimalrechnung für die verschiedenen Funktionsklassen gesteuert wurde. Man braucht nur die allgemeinen Matrizen **A** (6 · 6), **B** (2 · 6) und **H** (6 · m) für die vollständige Klasse vor Beginn der eigentlichen Minimalrechnung durch Fortfallenlassen von bestimmten Zeilen und Spalten in spezielle Ma-

trizen A_s ($\alpha \cdot \alpha$), B_s ($2 \cdot \alpha$) und H_s ($\alpha \cdot m$) umzuwandeln. (Hier ist α wieder die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten in der betreffenden Klasse). Gerade wenn man die Rechnung im Matrixkalkül programmiert, kann man es mit Hilfe einer transformierenden Matrix T ($6 \cdot \alpha$) einheitlich und elegant durchführen. Die Matrix T wird vorher auf Grund eines Klassenkennwortes gebildet. Ihre Elemente nehmen nur die Werte 0 oder 1 an, und zwar enthält die v -te Zeile entweder lauter Nullen oder genau eine Eins in μ -ter Spalte und sonst lauter Nullen, je nachdem ob der v -te Koeffizient ausgeschaltet oder als μ -ter von Null verschiedener Koeffizient berücksichtigt werden soll. Die Umrechnung geschieht nach den folgenden Formeln:

$$B_s = B \cdot T \quad 11.(1)$$

(2 · α) (2 · 6) (6 · α)

$$H_s = T^T \cdot H \quad 11.(2)$$

(α · m) (α · 6) (6 · m)

$$A_s = T^T \cdot A \cdot T \quad 11.(3)$$

(α · α) (α · 6) (6 · 6) (6 · α)

Bezeichnen wir die vollständige Klasse nach Weinblum [1] mit $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D \rangle$, wobei 2, 4, 6 und 8 die Polynomgrade der ersten vier Grundverteilungen und Q, D die diskrete Quelle bzw. den diskreten Dipol bedeuten, so ist die zugehörige Matrix T einfach die $(6 \cdot 6)$ Einheitsmatrix. Für die Klasse $\langle 2, 4, 6, 8, D \rangle$ beispielsweise hat die Matrix T jedoch die Gestalt:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 11.(4)$$

Eine weitere Unterscheidung der Funktionsklassen ist dadurch möglich, daß wir den diskreten Dipol wahlweise aus dem Schärfegrad herauschalten können. Sein Beitrag zum Schärfegrad wird dann bei der Berücksichtigung der Nebenbedingung nicht mitgezählt. Es wird erreicht, indem das letzte Element der Matrix B in Gleichung 9.(1) gleich Null gesetzt wird. Die modifizierte Matrix hat die Form:

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 4/5 & 6/7 & 8/9 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 11.(5)$$

Auf diese Weise ist es möglich, die Wirkung des diskreten Dipols unter einem anderen Aspekt zu studieren. Als Wulst gedeutet, ist der diskrete Dipol nun kein Teil der vorgeschriebenen Verdrängung mehr, sondern ein Zusatz dazu. Man sucht also etwa das beste System: Rumpf gegebener Völligkeit mit beliebigem Wulst und nicht die beste Kombination Rumpf plus Wulst gegebener Gesamtverdrängung. Man könnte auf diese Weise die Wirksamkeit des Wulstes in Abhängigkeit vom Schärfegrad des Rumpfes untersuchen. Solche Funktionsklassen werden wir mit D^* an Stelle von D kennzeichnen, also etwa $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D^* \rangle$.

Erörterung der Ergebnisse

Mit Hilfe des Rechenprogramms Odiro wurde an der elektronischen Rechanlage IBM 650 der Universität Hamburg eine große Anzahl von Optimalverteilungen errechnet. Es wurden dabei vor allem die folgenden Funktionsklassen untersucht: $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D \rangle$, $\langle 2, 4, 6, 8, Q \rangle$, $\langle 2, 4, 6, 8, D \rangle$, $\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$, $\langle 2, 4, 6, Q \rangle$, $\langle 2, 4, 6, D \rangle$ sowie $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D^* \rangle$, $\langle 2, 4, 6, 8, D^* \rangle$ und $\langle 2, 4, 6, D^* \rangle$. Für die meisten Klassen liegen Ergebnisse für etwa 20 ganz- und halbzahlige Werte des Geschwindigkeitsparameters γ_0 im Bereich $1 (1/2) 6 (1) 15$, und zwar jeweils für drei Tauchtiefen: $t/\ell = 1,00; 0,50$ und

0,25 vor. Wie bereits erwähnt, wurden alle Rechnungen für zwei Schärfegrade (meist $\varphi = 0,6$ und $0,8$) ausgeführt; für jeden anderen Schärfegrad lassen sich die Ergebnisse daraus ableiten.

Die zugehörigen Rotationskörper konnten nur in relativ wenigen Fällen ermittelt werden, weil ihre Berechnung nach Gleichung 3.(7) wegen unzureichender Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit der IBM 650 nicht vollprogrammiert werden konnte. Diese Arbeit wurde jedoch durch die von Kirsch [10] tabellierten Integrale für Polynomverteilungen wesentlich erleichtert. Für den diskreten Dipol mußten allerdings entsprechende Integrale zusätzlich errechnet werden. Die meisten Körper wurden für ein Längendurchmesser-Verhältnis $\ell/r = 8$ ermittelt.

Aus Zeitgründen war es leider bisher nicht möglich, das umfangreiche Zahlenmaterial so weit auszuwerten, daß hier ein genauer Überblick über sämtliche Ergebnisse vermittelt oder gar ein handfestes Rezept für die Ermittlung widerstandsgünstiger Rotationskörper angegeben werden könnte. Wir können vorläufig nur typische Ergebnisse herausgreifen und müssen uns auf allgemeine Aussagen beschränken. Entsprechend der einleitend genannten Zielsetzung werden zuerst die errechneten Optimalverteilungen und anschließend die zugehörigen Umströmungskörper diskutiert.

12. Errechnete Optimalverteilungen

In erster Linie interessiert die Abhängigkeit der berechneten Optimalverteilung von äußeren Parametern wie γ_0 und t/ℓ und von inneren wie r/ℓ und φ , ferner von der gewählten Funktionsklasse. Aufschlußreich ist auch der Vergleich der erreichbaren Minimalwiderstände von verschiedenen Funktionsklassen. Denn er ist ein Maß für die Eignung der jeweiligen Klasse für den betreffenden Parameterbereich.

Zunächst haben wir also Bild 2, das die Abhängigkeit der Optimalverteilung der Klasse $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D \rangle$ von dem Geschwindigkeitsparameter γ_0 zeigt, wenn alle anderen Parameter konstant gehalten werden. Der diskrete Dipol, der ja eine höhere Dimension besitzt als die kontinuierliche Verteilung, ist auf diesen Bildern mit einem Kreis angedeutet, deren

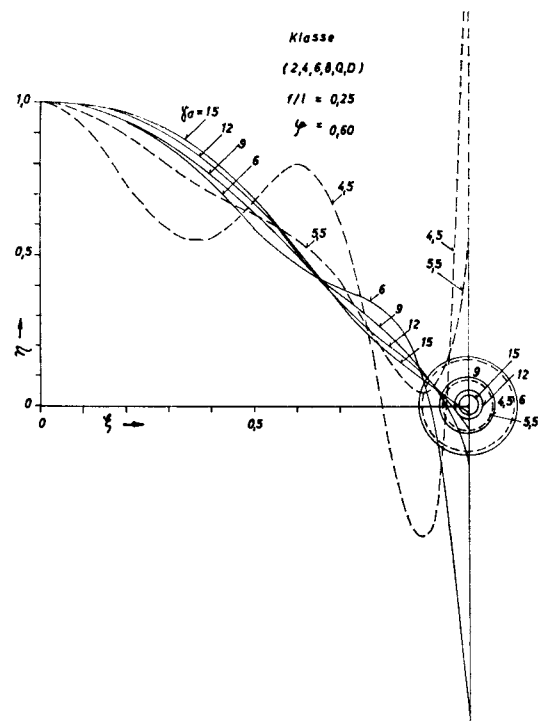


Bild 2 Abhängigkeit der Optimalverteilung von dem Geschwindigkeitsparameter γ_0

Fläche relativ zur η - ξ -Ebene maßstabgerecht ist. Die Veränderung von $\gamma_0 = 15$ bis 6 ist recht systematisch. Die diskrete Senke am Vorsteven wird mit steigender Froudescher Zahl immer stärker und wird durch den ebenfalls zunehmenden diskreten Dipol kompensiert. Die Verteilungen für $\gamma_0 = 5,5$ und 4,5 fallen aber ganz aus der Reihe. Die Ergebnisse für noch höhere Geschwindigkeiten sind unübersichtlich und unbrauchbar. Meist gibt es vorne eine starke Senke mit einem sehr starken Dipol. Außerdem schwankt die kontinuierliche Verteilung zwischen Plus und Minus. Wahrscheinlich ist die Rechnung durch das Auftreten fast singulärer Matrizen gestört.

In Bild 3 sind die Optimalverteilungen verschiedener Klassen für gleiche Parameterwerte gegenübergestellt. Es ist ersichtlich, daß die Wirkung der diskreten Quelle bzw. des Dipols im wesentlichen darin besteht, die Verdrängung an den Steven zu konzentrieren. Der kontinuierliche Teil wird da-

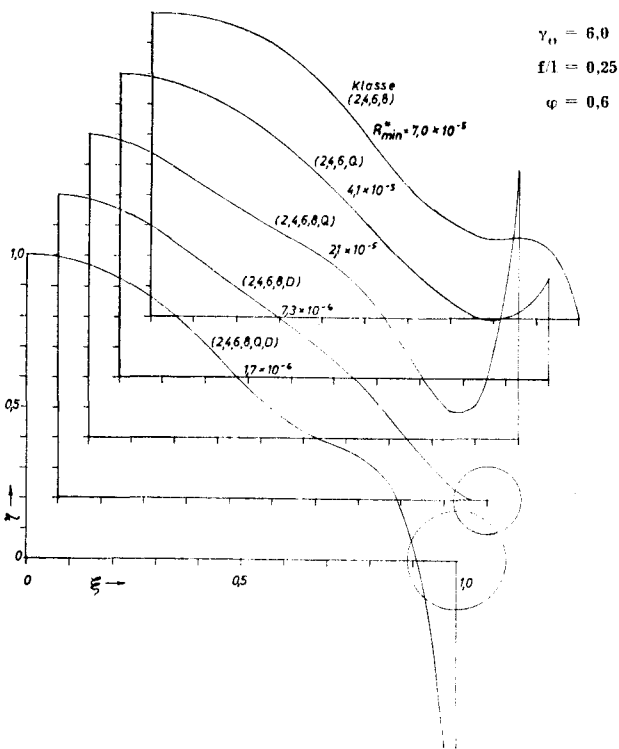


Bild 3 Abhängigkeit der Optimalverteilung und des zugehörigen Minimalwellenwiderstandes von der Funktionsklasse

durch etwas glatter gegenüber dem reinen Polynom $\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$. Gleichzeitig wird der minimale Wellenwiderstand erheblich reduziert. Bei gleichzeitiger Anwesenheit von Quelle und Dipol wird zwar der Widerstand noch weiter herabgesetzt, aber die Kurve wird meist etwas labil, insbesondere für kleinere γ_0 . Am besten hat sich die Klasse $\langle 2, 4, 6, 8, D \rangle$ bewährt.

Aus Bild 4 ersehen wir den Einfluß der Tauchtiefe auf die Verteilung. Dieser schwankt erheblich. Oft ist er geringer als in Bild 4 oben, manchmal aber noch viel krasser als in Bild 4 unten. Es ist nicht klar, ob die Rechnung ab und zu rein numerisch instabil wird oder ob es kritische Tauchtiefen gibt für bestimmte Geschwindigkeitsbereiche usw., die nur mit besonderen Verteilungsklassen behandelt werden können.

Bild 5 zeigt die früher theoretisch begründete lineare Abhängigkeit der Optimalverteilung vom Schärfegrad φ . Es ist offensichtlich, daß bei genügend hohem und niedrigem φ , die Ordinaten η stellenweise den Wert 1 über-, bzw. den Wert 0 unterschreiten müssen. Beide Erscheinungen sind im Hinblick auf die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf Um-

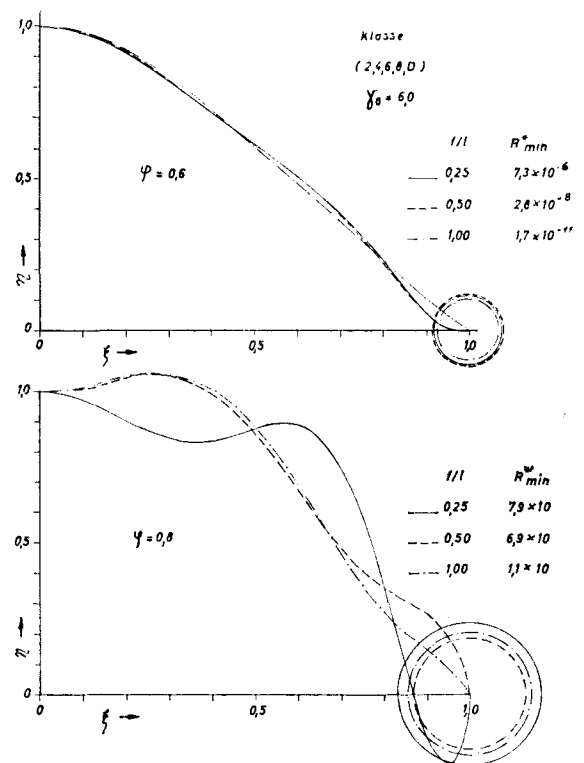


Bild 4 Abhängigkeit der Optimalverteilung und des zugehörigen Minimalwellenwiderstandes von der Tauchtiefe f/l

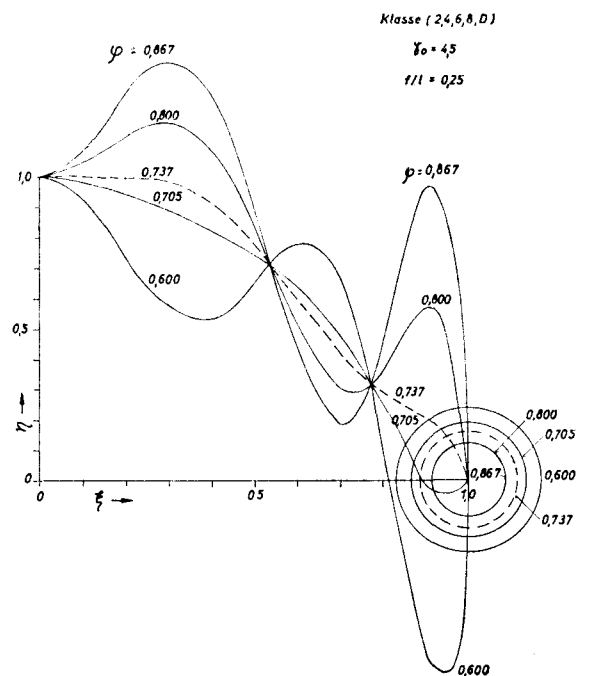


Bild 5 Abhängigkeit der Optimalverteilung vom Schärfegrad φ

strömungskörper unerwünscht. Die beiden Grenzfälle sind hier bereits angedeutet. Bei $\varphi = 0,705$ ist der Körper gerade noch geschlossen, d. h. der Dipol am Vorsteven ist stark genug, um den negativen Bereich der kontinuierlichen Verteilung auszugleichen. Über $\varphi = 0,867$ gibt es auch wiederum keine „gewöhnlichen“ Umströmungskörper, da der diskrete Dipol negativ wird.

Um die Wirksamkeit des Minimalisierungsverfahrens an einem konkreten Beispiel zu testen, wurde versucht, einen ungünstigen Geschwindigkeitsbereich einer Grundverteilung herauszugreifen und dort zu sehen, was sich durch Optimierung erreichen ließe. Die Widerstandskurve A der Grundverteilung $f_2(\xi) = 1 - \xi^4$ in Bild 7 weist einen großen Buckel

bei $F \approx 0,32$ auf. Es war auch von Weinblum, Amtsberg und Bock 1936 [2] festgestellt worden, daß dieser Bereich für völliger Körper ungünstig sei. Im Hinblick auf die körperverlängernde Wirkung der diskreten Singularitäten am Steven — was mit einer effektiven Verkleinerung der Froudeschen Zahl gleichbedeutend ist — wurde eine etwas höhere Froudesche Zahl, und zwar $\gamma_0 = 4,5$ gewählt. An dieser Stelle wurden dann die Optimalverteilungen der Klassen $\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$, $\langle 2, 4, 6, 8, Q \rangle$, $\langle 2, 4, 6, 8, D \rangle$ und $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D \rangle$ für $\varphi = 0,8$ ermittelt (Bild 6) und die zugehörigen Widerstandswerte über der Froudeschen Zahl als Kurven B, C und D in Bild 7 aufgetragen. Die Kurve für die Verteilung $\langle 2, 4, 6, 8, Q, D \rangle$ mußte in Anbetracht offensichtlicher Rundungsfehler ausgelassen werden, obwohl sie sogar oder vielmehr gerade weil sie negative Widerstandswerte ergab. Die drei Verteilungen B, C und D sind fast gleich gut. Der große Buckel bei $\gamma_0 \approx 4,5$ ist auf Kosten eines kleineren bei $\gamma_0 \approx 9,5$ beseitigt.

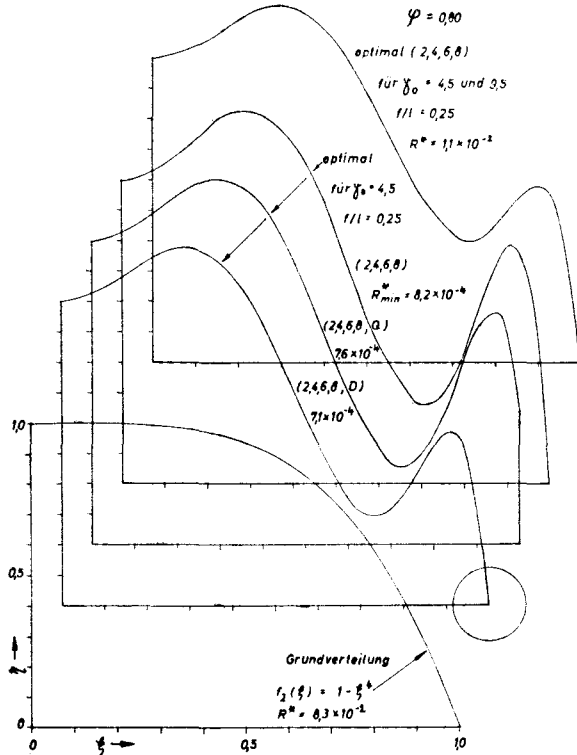


Bild 6 Vergleich einer Grundverteilung mit einigen Optimalverteilungen gleichen Schärfegrades

Dieses Ergebnis ist interessant. Es bedeutet nämlich folgendes: Wenn es die ausgleichende Wirkung des rapide ansteigenden Reibungswiderstandes nicht gäbe, so müßte man bei praktischer Anwendung der Formen B, C, D beim Anlauf des Körpers vom Ruhezustand erst unter großem Aufwand die Schwelle überspringen, um in den Genuß des beinahe Nullwiderstands auf Konstruktionsgeschwindigkeit zu gelangen. Um diesem Mißstand abzuhelpfen, wurde ein Experiment gemacht. Es wurde eine Verteilung der Klasse $\langle 2, 4, 6, 8 \rangle$ gleichzeitig für $\gamma_0 = 4,5$ und $9,5$ optimiert, indem an Stelle der Matrix **A** (4,5) eine abgewogene Mittelmatrix

$$\frac{\mathbf{A}(\gamma_0 = 4,5)}{\sqrt{4,5}} + \frac{\mathbf{A}(\gamma_0 = 9,5)}{\sqrt{9,5}}$$

in die Rechnung eingesetzt wurde⁴⁾. Die so erhaltene Verteilung (Bild 6) und ihre Widerstandskurve E (Bild 7) bezeugen

4) Die Gewichtungsfaktoren $1/\sqrt{\gamma_0}$ wurden eingesetzt, weil für diese Überlegung nicht der Widerstand, sondern der Leistungsbedarf ($\sim R/\sqrt{\gamma_0}$) entscheidend ist. Dieser einfache Ansatz vermag aber i. a. nicht die Erfüllung der Idealbedingung $R_{\min 1}/\sqrt{\gamma_{01}} = R_{\min 2}/\sqrt{\gamma_{02}}$ zu erzwingen; im vorliegenden Beispiel ist es zufällig annähernd gelungen.

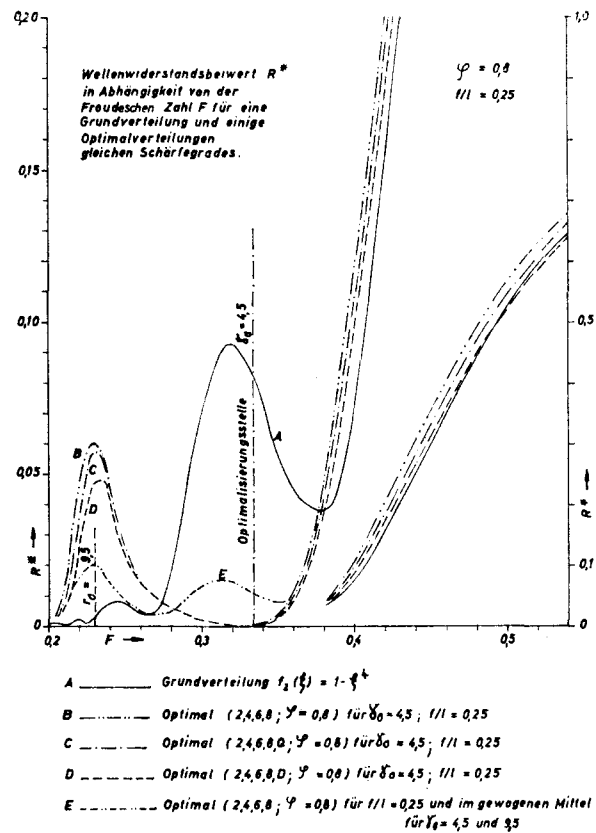


Bild 7 Widerstandskurven einiger Verteilungen gleichen Schärfegrades

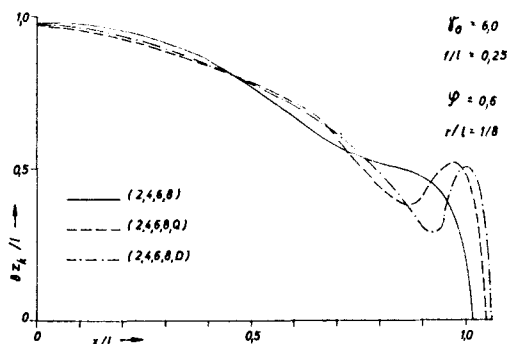
einen Teilerfolg des Experiments. Der absolute Vorteil an der ursprünglichen Optimalisierungsstelle ($\gamma_0 = 4,5$) wurde eingebüßt, aber dafür der sekundäre Buckel ($\gamma_0 = 9,5$) bedeutend abgemildert. Es wurde also eine Vergrößerung des Gütebereichs der Optimalverteilung erzielt durch eine sinnvolle Verteilung ihrer widerstandsvermindernden Wirkung auf zwei Geschwindigkeiten.

13. Umströmungskörper zu Optimalverteilungen

Hierbei interessiert vor allem die Beziehung der Körperparameter ℓ_k/r_k und φ_k zu den entsprechenden Verteilungsparametern ℓ/r bzw. φ . Für „normale“ Verteilungen gelten bekanntlich die Näherungsrelationen 3.(1) und 3.(2) und demzufolge sind Abweichungen zwischen Körper- und Verteilungsparametern relativ klein. Durch die Berechnung von „exakten“ Umströmungskörpern (allerdings ohne jegliche Berücksichtigung der freien Oberfläche) zu errechneten Optimalverteilungen nach Gleichung 3.(7) sollte die Frage geklärt werden, wie gut diese Übereinstimmung auch im Falle der ungewöhnlichen Optimalverteilungen gegeben ist. Für die praktische Anwendung unseres Verfahrens zur Ermittlung von Optimalkörpern mit vorgegebenen Parameterwerten ist diese Erkenntnis von großer Bedeutung, da in die Minimalrechnung ersatzweise die Verteilungsparameter als Nebenbedingung eingehen.

In Bild 8 sind Konturen von drei Rotationskörpern etwas verzerrt dargestellt, um einen Vergleich mit den zugehörigen Optimalverteilungen aus Bild 3 zu erleichtern. Die Verteilungsparameter wurden dabei auf $\varphi = 0,6$ und $\ell/r = 8$ festgehalten. Die Tabelle in Bild 8 zeigt, daß die Verteilung mit dem diskreten Dipol zur größten und die reine Polynomverteilung zur kleinsten Abweichung zwischen Körper- und Verteilungsparametern führt. Außerdem fällt auf, daß die Polynomverteilung einen Körper mit Schwanenhals liefert, die diskrete Quelle bzw. der Dipol hingegen am Steven einen richtigen Wulst hervorruft, die übrige Rumpfkontur jedoch etwas ausglättet. Die

Ursache für die widerstandsvermindernde Wirkung der diskreten Singularitäten am Intervallende liegt wahrscheinlich teils in der effektiven Körpervverlängerung und teils in der Wulstbildung.



Formvergleich:

Parameter	K l a s s e		
	(2,4,6,8)	(2,4,6,8,Q)	(2,4,6,8,D)
l_k/l	1,047	1,069	1,0609
r_k/r	0,980	0,971	0,974
l_k/r_k	8,28	8,62	8,71
φ_k	0,604	0,575	0,574

Bild 8 Beispiele von Umströmungskörpern zu Optimalverteilungen verschiedener Klassen, aber derselben Intensität ($l/r = 8,00$) und des gleichen Schärfegrades ($\varphi = 0,60$)

In Bild 9 sind die entsprechenden Körperkonturen zu den Verteilungen aus Bild 5 aufgetragen. Das sind Optimalverteilungen verschiedener Schärfegrade innerhalb derselben Klasse. Der Wert des Parameters l/r wurde jeweils so gewählt, daß der Körperparameter l_k/r_k gerade den Wert 8,00 annimmt. Interessant ist, daß der negative Teilbereich in der Verteilung

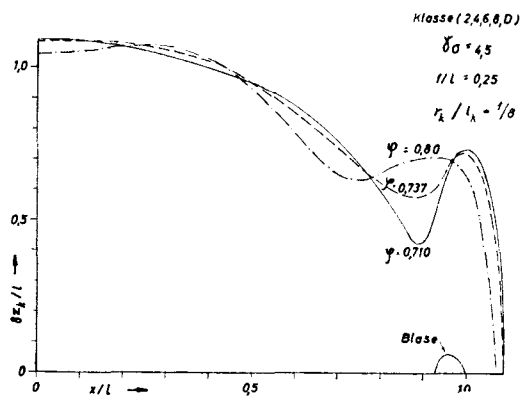


Bild 9 Beispiele von Umströmungskörpern zu Optimalverteilungen verschiedener Schärfegrade innerhalb derselben Klasse

für $\varphi = 0,710$ eine innere Blase im zugehörigen Körper erzeugt. Da sie von der Außenströmung völlig isoliert ist, kann sie in keiner Weise die geschlossene Körperkontur beeinträchtigen. Es sei aber festgestellt, daß eine solche Erscheinung in Umströmungskörpern zu rein kontinuierlichen Achsverteilungen — wie sie bisher ausschließlich betrachtet wurden — nicht vorkommen kann.

Die Schärfegrade der Umströmungskörper aus Bild 9 sind in Bild 10 in Abhängigkeit vom Verteilungsschärfegrad φ aufgetragen. Da die Umströmungskörper für hohe φ -Werte eine Anschwellung aufweisen, mußte ein neuer, auf den größten Durchmesser bezogener, effektiver Schärfegrad φ_k^* eingeführt werden. Die Kurve ist auf den Bereich $0,705 < \varphi < 0,867$ beschränkt, weil im vorliegenden Fall die Verteilungen außerhalb dieser Grenzen keinen geschlossenen Umströmungskörper

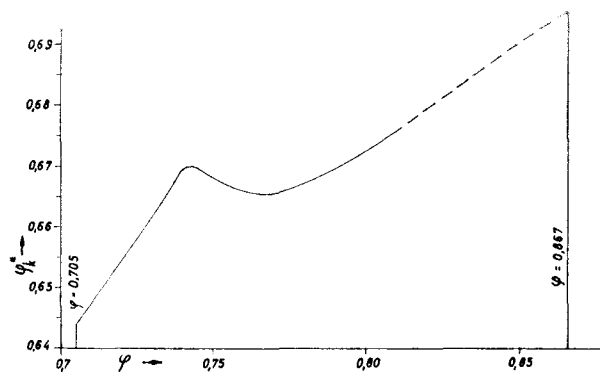


Bild 10 Körperschärfegrad in Abhängigkeit vom Verteilungsschärfegrad

mehr liefern. Der Verlauf der Kurve $\varphi_k^* = \varphi_k^*(\varphi)$ gibt deutlich das Zusammenspiel der Anschwellung und des diskreten Dipols wieder. Von $\varphi = 0,705$ bis $0,740$ hat die Kurve einen natürlichen Verlauf: φ_k^* steigt monoton mit φ an, bis die Anschwellung einsetzt. Obwohl der auf das Hauptspant bezogene φ_k noch weiter ansteigt, fällt der effektive Schärfegrad φ_k^* im Bereich $\varphi = 0,745$ bis $0,765$ ab. Dann schließlich macht sich die ständige Abnahme des Dipols am Steven dadurch bemerkbar, daß φ_k^* wieder ansteigt von $\varphi = 0,770$ bis etwa $0,867$, wo endlich der diskrete Dipol gerade verschwindet und der Umströmungskörper plötzlich aufhört zu existieren.

Beunruhigend ist die Tatsache, daß im ganzen Bereich φ_k^* erheblich kleiner ist als φ . Diese Verteilungsklasse mit dem diskreten Dipol und der charakteristischen Anschwellung täuscht also bei effektiv kleinem φ_k^* ein relativ großes φ vor. Aus diesem Grunde ist der Widerstandsvergleich in Bild 7 auch nicht ganz echt. Die Umströmungskörper von B, C und D sind effektiv bedeutend schärfer als derjenige von A, weil der letzte keine Anschwellung aufweist (Bild 6).

14. Zusammenfassung und Schlußfolgerung

1. Das hier untersuchte Optimalisierungsverfahren bringt in jedem Fall einen echten Gewinn ein, aber ein Vergleich auf Grund der formalen Verteilungsparameter allein täuscht einen übertriebenen Vorteil zugunsten der Optimalverteilungen vor. Ein Vergleich bezüglich der Formparameter der zugehörigen Umströmungskörper wirkt ausgleichend.

2. Die Hinzunahme von diskreten Quellen und Dipolen an Intervallenden führt zu wesentlichen Widerstandsvermindierungen in Bereichen, wo das Polynom allein auch schon gute Resultate liefert. Bei kleineren γ_0 und ungünstigen φ , wo das Polynom oft zu unbefriedigenden Ergebnissen führt, vermag auch der diskrete Dipol, wenn überhaupt, dann nur eine kleine Verbesserung zu erzielen.

3. Optimalverteilungen mit diskreten Dipolen ergeben fast ausnahmslos Umströmungskörper mit ausgesprochenen Wülsten. Die widerstandsvermindernde Wirkung der diskreten Singularitäten an den Steven beruht teils auf der effektiven Körpervverlängerung und teils auf der wirksamen Wulstbildung.

4. Ein einfaches Verfahren ermöglicht es, Verteilungen oder Körper gleichzeitig für zwei Geschwindigkeiten oder einen ganzen Bereich von Geschwindigkeiten zu optimieren.

5. Eine Schwäche des Verfahrens ist es, daß man keine Schranken für die Ordinaten der Verteilung vorschreiben kann, wie etwa $0 < \eta < 1$. Denn die Verteilungen mit negativen Teilbereichen sind als Umströmungskörperersatz fast unbrauchbar. In der Verteilungsanschwellung hat die Rechnung einen Ausweg gefunden, um unangenehme Aufgaben zu umgehen und die gestellten Nebenbedingungen effektiv zu verfälschen.

6. Häufig auftretende Labilitäterscheinungen (besonders bei kleineren γ_0) in der Matrixrechnung verlangen eine genauere Fehlerabschätzung und Einsatz von Alternativverfahren wie das der konvergenten Gradienten. Eine weitere Möglichkeit zur Stabilisierung der Rechnung besteht darin, daß man die Summe des Wellen- und Reibungswiderstandes minimiert. Für die Praxis sind ohnehin nur Körper geringsten Gesamtwiderstandes interessant. Dieses Hilfsmittel, von Weinblum Reibungsbremse genannt, ist von Webster und Wehausen erfolgreich angewandt worden [15].

7. Ein Dilemma dieser Untersuchung ist, daß die zugrunde liegende linearisierte Wellentheorie an sich nur für große f/l gilt, aus praktischen Erwägungen aber nur die kleineren f/l unsere Aufmerksamkeit verdienen. Im Anschluß an frühere Versuche sollte experimentell geprüft werden, wie weit die Theorie zuverlässige Aussagen gestattet.

Schlußwort

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, Professor Weinblum, auf dessen Veranlassung diese Arbeit entstanden ist, und Dr. Eggers, von dem das wesentliche Konzept für diese Untersuchung stammt, für wichtige Anregungen und nützliche Hinweise zu danken. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft gebührt Dank für die Zuwendungen, die die Benutzung der elektronischen Rechenanlage, ebenso die Beteiligung der Studenten unseres Instituts an der Auswertung der Ergebnisse ermöglicht haben. Insbesondere möchte ich cand. nav. arch. Jöns und Zunker für ihre Mitarbeit danken. Auch dem Deutschen Akademischen Austauschdienst und der Alexander-von-Humboldt-Stiftung bin ich zu Dank verpflichtet für die Verleihung von Forschungsstipendien, die mir erst die Möglichkeit gaben, mich mit den hier behandelten Fragen zu befassen.

(Vorgetragen am 25. Januar 1962)

Schrifttum

- [1] G. Weinblum: Rotationskörper geringsten Wellenwiderstandes. Ingenieurarchiv, VII. Band, 2. Heft, April 1936, S. 104—117.
- [2] G. Weinblum, H. Amtsberg und W. Bock: Versuche über den Wellenwiderstand getauchter Rotationskörper. Schiffbau, Schiffahrt und Hafenaufbau, 37. Jahrgang, 1936, S. 411—419.
- [3] G. Weinblum: The Wave Resistance of Bodies of Revolution. Report 758 (58 Pages), May 1951, David Taylor Model Basin, Washington.
- [4] G. Weinblum: Wellenwiderstand von Rotationskörpern. Schiffstechnik, Heft 26, April 1958 (5. Band), S. 43—54.
- [5] Iu. D. Shmyglevskii: On a class of rotational bodies with a minimum wave resistance. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Translation of the Soviet Journal PMM, Volume 24, No. 5, 1960, pp. 923—926.
- [6] H. Amtsberg: Untersuchungen über die Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1937, S. 177—225.
- [7] J. V. Wehausen: Wave Resistance of Thin Ships. Naval Hydrodynamics; Publication 515, National Academy of Sciences, National Research Council (U.S.A.), 1957, pp. 109—137.
- [8] S. Karp, J. Kotik and J. Lurye: On the Problem of Minimum Wave Resistance for Struts and Strut-like Dipole Distributions. Third Symposium on Naval Hydrodynamics, Scheveningen (The Hague), Netherlands, September 1960, pp. 56—116.
- [9] T. Inui, T. Takahai, M. Kumano: A Study on Wavemaking Resistanceless Hull Form. Proc. of the 10th Jap. Nat. Congr. for App. Mech. 1960, pp. 243—246.
- [10] T. Inui, T. Takahai, M. Kumano: Wave Profile Measurements on the Wave-Making Characteristics of the Bulbous Bow. (in Japanese with English Summary. Journal of the Soc. of Nav. Arch., Japan, 1960, pp. 103—115.

- [11] A. Duschek: Höhere Mathematik, II. Band, 2. Auflage, Springer-Verlag 1958, S. 141—147.
- [12] I. N. Sneddon: Functional Analysis. Handbuch der Physik, Band II, Mathematische Methoden II, Springer-Verlag 1955, S. 229—234.
- [13] S. D. Sharma: Ein Verfahren zur Berechnung optimaler Dipolverteilungen für getauchte Rotationskörper geringsten Wellenwiderstandes mit Hilfe der elektronischen Rechenanlage IBM 650. Bericht Nr. 105 des Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg, Oktober 1961 (45 Seiten).
- [14] M. Kirsch: Die Erzeugung von Rotationskörpern aus vorgegebenen Singularitätenverteilungen. Schiff und Hafen, Jahrgang 11, Heft 11, November 1959, S. 3—23.
- [15] W. C. Webster und J. V. Wehausen: Schiffe geringsten Wellenwiderstandes mit vorgeschriebenem Hinterschiff. Symposium über Schiffstheorie im Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Januar 1962 (23 Seiten).

Allgemeine Bezeichnung

- a_n Koeffizienten der Grundverteilungen
- a_v^s Koeffizienten der symmetrischen Grundverteilungen
- a_μ^a Koeffizienten der antimetrischen Grundverteilungen
- A_{jk} Hilfsfunktionen für den Wellenwiderstand der Grundverteilungen
- D formaler Hauptspantdurchmesser der Verteilung
- D_k Hauptspantdurchmesser des Rotationskörpers
- f Tauchtiefe (s. Bild 1)
- f/l Tiefenzahl
- $f_n(\xi)$ Grundverteilungen
- $F = \frac{u_0}{Vg\ell}$ Längen-Froude-Zahl der Verteilung
- g Erdbeschleunigung
- i, k, i', k' Indizes
- i^*, j^* Zwischenintegrale nach Weinblum [4]
- ℓ halbe Länge der Verteilung
- ℓ_k halbe Länge des Rotationskörpers
- L Länge der Verteilung
- L_k Länge des Rotationskörpers
- $m(x)$ Liniendipolverteilung
- m Anzahl der Abszissenstellen in den Matrizen H und V
- m, n Indizes
- r formaler Hauptspantdurchmesser der Verteilung
- r_k Hauptspantdurchmesser des Rotationskörpers
- R Wellenwiderstand der Verteilung
- R_{\min} minimalisierter Wellenwiderstand
- R^* Wellenwiderstandsbeiwert nach Weinblum [4]
- R^*_{\min} minimalisierter Wellenwiderstandsbeiwert
- \tilde{R}^* indirekt berechneter Beiwert R^*
- \tilde{R}^*_{\min} indirekt berechneter Beiwert R^*_{\min}
- S formale Spantfläche der Verteilung
- S_k Spantfläche des Rotationskörpers
- u_0 Anströmungs-, bzw. Fahrtgeschwindigkeit
- V formale Verdrängung der Verteilung
- V_k Verdrängung des Rotationskörpers
- x Koordinate in Fahrtrichtung, parallel zur Liniendipolverteilung, bzw. Achse des Rotationskörpers
- $z_k(x)$ Kontur des Rotationskörpers
- α Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten der Grundverteilungen
- γ Integrationsvariable
- γ_0 dimensionsloser Geschwindigkeitsparameter
- δ Diracsche Delta-Funktion
- $\eta(\xi)$ Verteilung, präziser: bezogene Liniendipolverteilung
- λ Faktor eines Koeffizientenvektors in einer Linearkombination aus zwei Koeffizientenvektoren
- μ, ν Indizes
- ξ dimensionslose Koordinate in Fahrt-, bzw. Achsrichtung
- ξ' Integrationsvariable
- ρ Wasserdichte
- φ formaler Schärfegrad der Verteilung
- φ_1 formaler Schärfegrad der ersten Verteilung
- φ_2 formaler Schärfegrad der zweiten Verteilung
- φ_3 formaler Schärfegrad der linear kombinierten Verteilung
- φ_k Schärfegrad des Rotationskörpers (bezogen auf den Hauptspantdurchmesser)
- φ^*_k effektiver Schärfegrad des Rotationskörpers (bezogen auf den größten Durchmesser)

Bezeichnungen für Matrizen und Vektoren

\mathbf{a}	Koeffizientenvektor oder -matrix der Grundverteilungen
\mathbf{A}	Matrix der Hilfsfunktionen A_{ik}
\mathbf{A}_s	spezielle Matrix \mathbf{A}
\mathbf{B}	Nebenbedingungsmatrix
\mathbf{B}^*	modifizierte Nebenbedingungsmatrix
\mathbf{B}_s	spezielle Nebenbedingungsmatrix
\mathbf{C}	vorgeschriebene Parametermatrix
$\tilde{\mathbf{C}}$	aus den Verteilungskoeffizienten errechnete Parametermatrix
\mathbf{H}	Ordinatenmatrix
\mathbf{H}_s	spezielle Ordinatenmatrix
\mathbf{K}	Kernmatrix

$\tilde{\mathbf{O}}$	Restmatrix
\mathbf{P}	Einflußmatrix
\mathbf{R}	Wellenwiderstandsmatrix
\mathbf{R}^*	Matrix der Wellenwiderstandsbeiwerte \mathbf{R}^*
$\tilde{\mathbf{R}}^*$	indirekt berechnete \mathbf{R}^*
\mathbf{R}^*_{\min}	Matrix der minimalisierten Wellenwiderstandsbeiwerte
$\tilde{\mathbf{R}}^*_{\min}$	indirekt berechnete \mathbf{R}^*_{\min} (optimale Koeffizientenmatrix)
\mathbf{T}	transformierende Matrix
\mathbf{V}	Verteilungsmatrix
\mathbf{X}	Lösungsvektor oder -matrix des Minimalproblems (optimale Koeffizientenmatrix)
$\mathbf{Y} = (1/2) (\mathbf{Y})^T$	
\mathbf{Y}'	Matrix der Lagrangeschen Multiplikatoren

Diskussion

H. A m t s b e r g :

Bis zu welchen Tauchtiefenverhältnissen f/l lassen diese Wellenwiderstandsberechnungen richtige Werte erwarten?

Welches ist die tatsächliche Form der Grenzstromfläche, die sich unter Zugrundelegung der Optimalverteilungen bei beschränkter Anströmung ergibt? In Bild 9 des Vortrags sind als Beispiele nur die Konturen von Umströmungskörpern angegeben (Rotationskörper), die sich bei den für $f/l = 0,25$ ermittelten Optimalverteilungen in unbeschränkter Anströmung ergeben.

S. D. S h a r m a (Schlußwort):

Herr Professor Amtsberg hat durch seine Fragen unsere Aufmerksamkeit auf zwei wichtige Aspekte des Problems gelenkt. Eine wesentliche Einschränkung der hier angewandten linearisierten Wellenwiderstandstheorie besteht darin, daß der abgeleitete Ausdruck für den Wellenwiderstand an sich nur für große Tauchtiefen gilt. Die Frage nach der kleinst zulässigen Tiefenzahl f/l läßt sich nicht präzise beantworten, weil es auf die Intensität der Verteilung — charakterisiert durch den Parameter r/l — an-

kommt. Das Verhältnis r/f ist m. E. ein besseres Maß für die Beurteilung der Tauchtiefe in bezug auf die Linearisierung des Potentials. Nach den mir bekannten theoretischen und experimentellen Unterlagen ist $r/f = 1/2$ etwa die Grenze der Gültigkeit der Theorie für langgestreckte Körper.

Es trifft zu, daß die Konturen in Bild 9 unter der Annahme allseitig unbeschränkter Anströmung berechnet wurden, und zwar nach dem Verfahren von Amtsberg [6]. Es ist im Prinzip möglich, die tatsächliche Form der Grenzstromfläche unter Berücksichtigung der freien Oberfläche zu ermitteln, wenn man sich diese in erster Näherung als eine feste Wand vorstellt. Zu der gegebenen Dipolverteilung kommt die an der Wand gespiegelte Verteilung noch hinzu. Die Umströmungsfläche muß durch numerische Integration längs der Stromlinien ermittelt werden, weil es dann keine Stromfunktion mehr gibt. Nach diesem Verfahren haben wir in neuerer Zeit schiffsähnliche Umströmungskörper zu Rechteckverteilungen errechnet. Eine Übertragung auf Achsverteilungen ist ohne weiteres möglich. Es wird vermutlich eine leichte Deformation der Rotationskörper von Bild 9 zur Folge haben.

Bemerkung zu den Bildern

In Bild 4 fehlen rechts unten die Exponenten der Zahlen unter \mathbf{R}^*_{\min} . Es muß heißen $7,9 \cdot 10^{-4}$, $6,9 \cdot 10^{-6}$ und $1,1 \cdot 10^{-9}$.

In der Tabelle unter Bild 8 fehlt ein Bruchstrich. Es muß in der Spalte „Parameter“, 2. Reihe richtig r_k/r heißen.