

524 | August 1992

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Heinrich Schimmöller

Analytische Behandlung von Eigenspannungszuständen auf der Grundlage der Elastizitätstheorie

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Analytische Behandlung von Eigenspannungszuständen auf der Grundlage der Elastizitätstheorie

Heinrich Schimmöller, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1992

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 524

Analytische Behandlung
von Eigenspannungszuständen
auf der Grundlage der Elastizitätstheorie

Heinrich
Schimmöller

August 1992

Die vorliegende Arbeit wurde im Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 18:
Mechanik/Bruchmechanik, Nr. 88, Düsseldorf, VDI-Verlag 1990,
als Original veröffentlicht. Die Herausgabe als Instituts -
bericht erfolgt mit freundlicher Genehmigung des VDI-Verlages.

Vorwort

In Büchern der Festigkeitslehre oder der Elastizitätstheorie sucht man vergeblich nach einer zusammenhängenden Darstellung über Eigenspannungszustände. Man findet, wenn überhaupt, nur kurze Hinweise. Demnach ist der interessierte Ingenieur, Werkstoffkundler oder auch der Studierende der Ingenieur- und Naturwissenschaften, der sich in das Gebiet der Eigenspannungen einarbeiten muß, auf die Literatur angewiesen, in der der gesamte Wissensstand über Eigenspannungen in zahlreichen Einzelarbeiten dokumentiert ist. Hier wiederum findet man nur selten übergreifende und zusammenhängende Darstellungen des Themas. In der Regel behandeln diese Arbeiten die Eigenspannungen als Einzelproblem: Eigenspannungszustände werden an einem bestimmten Bauteil mit einem bestimmten Meß- oder Rechenverfahren für einen ganz bestimmten Zweck ermittelt.

Die geschilderte Situation ist insgesamt unbefriedigend. Sie führt dazu, daß den interessierten Fachleuten und Studierenden eine möglichst allgemeine und zusammenhängende Einarbeitung in das Fachgebiet Eigenspannungen erschwert wird. Und dies zu einem Zeitpunkt, in dem die Eigenspannungsforschung durch Anwendung numerischer Methoden und hochentwickelter Meßtechnik an Bedeutung gewonnen hat. Diese Bedeutung spiegeln z.B. zahlreiche Forschungsarbeiten und bestehende Arbeitsgruppen wieder, die sich mit der Bestimmung von Eigenspannungszuständen und ihrem Einfluß auf das Werkstoff- und Bauteilverhalten beschäftigen.

Die vorliegende Arbeit macht deshalb den Versuch, eine einführende und zusammenhängende Darstellung über Eigenspannungszustände zu geben. Eine solche Darstellung ist aus der Sicht der Kontinuumsmechanik möglich. Aus diesem Grunde wird in dieser Arbeit vom Standpunkt der Elastizitätstheorie aus argumentiert. In diesem Rahmen ist auch die Erweiterung und Anpassung der Theorie an das vorliegende Eigenspannungsproblem möglich, z.B. die Berücksichtigung von Anisotropie bei der Eigenspannungsbestimmung in Verbundwerkstoffen. Außerdem kommt die Beschreibung von Eigenspannungszuständen aus der Sicht der Elastizitätstheorie den numerischen Methoden entgegen, da vorhandene Programme für Probleme der Kontinuumsmechanik zur Berechnung von Eigenspannungszuständen genutzt werden können.

Hamburg, im August 1990

Heinrich Schimmöller

Inhaltsverzeichnis

0	Symbole	7
1	Einleitung	10
2	Einführung an einem Beispiel	12
2.1	Folgerungen aus dem Einführungsbeispiel	14
3	1D-1K-ES-Zustände bei gegebener $\varepsilon_q(\mathbf{y})$-Verteilung	16
3.1	Anwendung auf überelastische Biegung	18
3.2	Einwirkung eines Temperaturfeldes $\mathbf{t}(\mathbf{y})$	21
3.3	Lineare $\varepsilon_q(\mathbf{y})$ -Verteilungen	22
4	Zur Kompatibilität im 1D-1K-ES-Fall	23
5	Ursachen für $\varepsilon_{ij}^q(\mathbf{x}_i)$-Felder	24
5.1	Plastische Deformationen	24
5.2	Temperaturfelder	24
5.3	Volumendilatationen, insbesondere in der Wärmeeinflußzone von Schweißverbindungen	25
5.4	Phasengrenzwanderung und Magnetostriktion	26
6	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	27
6.1	Problemorientierte Differentialgleichungen	27
6.2	Randbedingungen	29

7	3D-3K-ES-Zustände bei gegebenem $\varepsilon_{ij}^q(\mathbf{x}_i)$-Feld	31
7.1	Problemorientierte Differentialgleichungen	31
7.2	Randbedingungen	32
7.3	Zur Kompatibilität im 3D-3K-ES-Fall	33
7.4	Wärmespannungen	34
7.5	Lineare Temperaturfelder	34
8	2D-2K-ES-Zustände bei gegebenem $\varepsilon_{11}^q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \varepsilon_{22}^q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \varepsilon_{12}^q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$-Feld	35
8.1	Problemorientierte Differentialgleichungen	35
8.2	Randbedingungen	37
8.3	Das ebene Wärmespannungsproblem	40
9	2D-1K-ES-Zustände bei Drehsymmetrie und gegebener $\varepsilon_q(\mathbf{r})$-Verteilung	41
9.1	Wärmepunkt $t(\mathbf{r})$	45
10	2D-1K-ES-Zustände in ebenen n-fach geschichteten Werkstoffen bei vollständiger Anisotropie der Einzelschichten und gegebenem $\varepsilon_a^q(\mathbf{x}_3)$-Feld	47
10.1	Die Gleichungen zur Berechnung der Eigenspannungen $\sigma_a(\mathbf{x}_3)$	49
10.2	Der allgemeine Bimetalleffekt	51
11	2D-1K-ES-Zustände in der homogenen anisotropen Platte	53
12	2D-1K-ES-Zustände in der homogenen isotropen Platte	55

13 Experimentelle Verfahren zur Bestimmung von Eigenspannungen	58
14 Abtragungsmethode	61
14.1 Abtragungsmethode für 1D-1K- und 2D-1K-ES-Verteilungen	61
14.2 Abtragungsmethode für 1D-2K-ES-Verteilungen	62
14.3 Einfluß der Abtrageschrittweite auf die Bestimmungs- genauigkeit der Eigenspannungen	63
14.4 Anwendung der Abtragungsmethode zur Bestimmung von 1D-1K-ES-Verteilungen	64
14.5 Anwendung der Abtragungsmethode zur Bestimmung von 2D-1K-ES-Verteilungen in ebenen n-fach geschichteten Werkstoffen bei vollständiger Anisotropie der Ein- zelschichten, Spezialisierung für Isotropie und einfache Schichtung	70
15 Die Überlagerung von Last- und Eigenspannungen	80
15.1 Der lineare oder elastische Überlagerungsfall	80
15.2 Der nichtlineare oder elastisch-plastische Überlagerungsfall	81
15.3 Der nichtlineare elastisch-plastische 1D-1K-Überlagerungsfall	82
15.4 Ein Beispiel aus der Praxis	89
16 Schrifttum	92

0 Symbole

Die Zusammenstellung enthält die wichtigsten Symbole. Durch Anwendung der Indizes ergeben sich weitere hier nicht aufgeführte Formelzeichen, deren Bedeutung durch den jeweiligen Index festgelegt wird. Weitere Bezeichnungen folgen aus dem Text und aus den Bildern.

Indizes

a, b, c, d	1 bis 6 oder 1,2,6
e	elastisch, tief- oder hochgestellt
i, j, k, l	1 bis 3
p	plastisch
q	Eigenspannungsquelle, tief- oder hochgestellt
r	radial
t	tangential

Lateinische Buchstaben

$C_1, C_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$	Konstante
c_{ab}	Matrix der Elastizitätskonstanten
c_{ab}^*	angepaßte Matrix der Elastizitätskonstanten
e	Volumendilatation, Vergleichsdehnung
E	Elastizitätsmodul
F	Airy'sche Spannungsfunktion
G	Schubmodul
M	Moment
n_i	Normaleneinsvektor
O	Gesamtoberfläche
O_g	Oberfläche für geometrische Randbedingungen
O_n	Oberfläche für natürliche Randbedingungen
$\overset{0}{P}_i$	Oberflächenspannung auf O_n
r, φ	Polarkoordinaten

r, r_0	Koordinaten des elastisch-plastischen Übergangs
s, s_0	Koordinaten des elastisch-plastischen Übergangs
t	veränderliche Temperatur
t_0, t_1	konstante Temperaturen
T	Temperaturdifferenz
u_i	Verschiebung
u_i^0	Verschiebung auf O_g
V	Volumen
x_i	Koordinaten
X_i	Spezifische Volumenkräfte
y	Koordinate
Z	Plattendicke
Z_0	Anfangsplattendicke
Z_1, Z_2	Schichtungsgrenze bei Verbundplatten

Griechische Buchstaben

α	Wärmeausdehnungskoeffizient
γ_{12}^a	Schubverformung durch Eigenspannungsquelle
δ_{ij}	Einheitstensor (Kronecker-Symbol)
ε	Gesamtdehnung
ε_{ij}	Tensor der Gesamtdehnung
ε_F	Streckgrenzendehnung σ_F/E
$\bar{\varepsilon}_b$	Gesamtdehnungstensor in der Ebene $x_3 = 0$
ζ_{ab}	Zeta-Matrix
κ_b	Krümmungstensor in der Ebene $x_3 = 0$
ν	Querkontraktionszahl
σ	Eigenspannung, Lastspannung
σ_{ij}	Eigenspannungstensor, Lastspannungstensor
σ_0	Randeigenspannung, Lastspannung
$\Delta\sigma_a$	Sprung des ebenen Eigenspannungstensors
σ_F	Fließgrenze bzw. Streckgrenze

Ableitungen

Neben der üblichen Schreibweise für partielle Ableitungen wird folgende Abkürzung benutzt:

$$(\dots)_{,i} = \frac{\partial(\dots)}{\partial x_i} \quad ; \quad \varepsilon_{ij,kl} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \quad \text{usw.}$$

Summationskonvention

Über doppelt vorkommende Indizes wird bei i, j, k, l von 1 bis 3 und bei a, b, c, d von 1 bis 6 oder über 1,2,6 summiert. Beispiel:

$$\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3} .$$

1 Einleitung

Bei der Beschäftigung mit Eigenspannungen stellt man fest, daß Grundlagen der Werkstoffkunde und der Mechanik (Elastizitätstheorie) benötigt werden. Man kann deshalb eine fachbezogene Ortsbestimmung für alle Eigenspannungsprobleme vornehmen: Sie liegen im Überdeckungsbereich der Grundlagenfächer Werkstoffkunde und Mechanik. In Bild 1 wird dieser Zusammenhang veranschaulicht.

Der Gesamtbereich, der sich als fächerübergreifender Zusammenhang zwischen den umfangreichen Fachgebieten Werkstoffwissenschaften einerseits und Mechanik andererseits darstellt, wird als Werkstoffmechanik bezeichnet, siehe Bild 1. Neben dem Gesamtkomplex Eigenspannungen liegen in diesem Bereich Fachgebiete wie Bruchmechanik und Technische Plastomechanik.

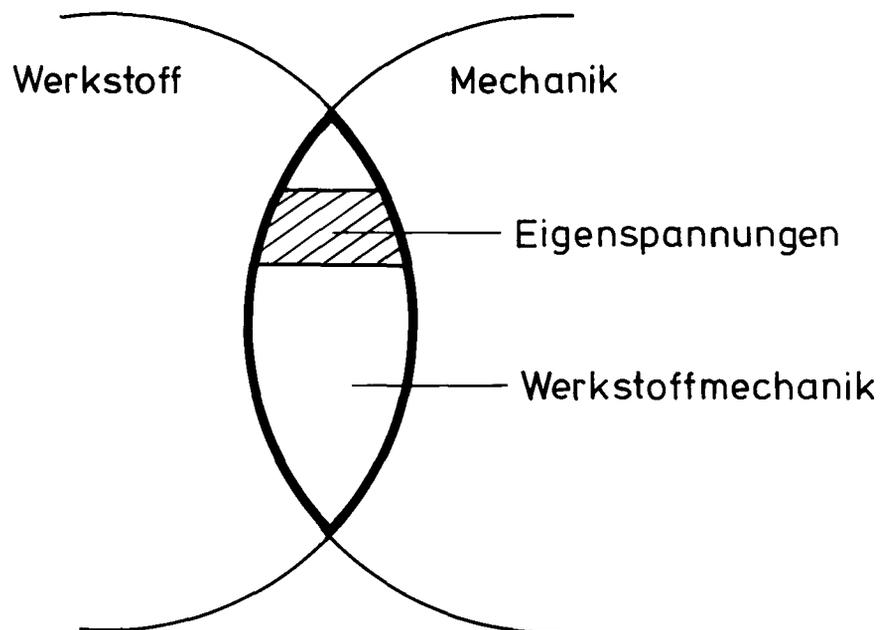


Bild 1: Eigenspannungen als fächerübergreifendes Problem

Aus der Sicht der Werkstoffkunde unterscheidet man Eigenspannungen I., II. und III. Art, siehe [1]. Eigenspannungen III. Art werden durch Störungen im regelmäßigen Aufbau der Kristallgitter (z.B. Versetzungen) verursacht. Diese Eigenspannungszustände haben nur einen

Wirkungsbereich in der Größenordnung der jeweils vorliegenden Gitterkonstanten. Eigenspannungen II. Art werden durch den kornartigen Aufbau der metallischen Werkstoffe ermöglicht. Sie entstehen z.B. durch unterschiedliche thermische Ausdehnungskoeffizienten in zweiphasigen Legierungen bei Temperaturänderung. Ihr Wirkungsbereich beschränkt sich auf die jeweils vorliegende Korngröße.

In der vorliegenden Arbeit werden nur die Eigenspannungen I. Art behandelt. Das sind die Eigenspannungszustände, die sich, genau wie die Lastspannungen, über das gesamte Bauteil erstrecken. Im Gegensatz zu den mikroskopisch und submikroskopisch wirkenden Eigenspannungen II. und III. Art spricht man bei den Eigenspannungen I. Art daher auch von makroskopisch wirkenden Eigenspannungszuständen. Bei der Behandlung dieser Eigenspannungen vernachlässigt man den physikalischen Werkstoffaufbau (Kristallgittertyp und Korngröße), indem man, genau wie in der Elastizitätstheorie, von den Stetigkeitseigenschaften des Kontinuums (Werkstoffs) ausgeht, siehe [2-5]. Dieser Standpunkt ermöglicht die in dieser Arbeit durchgeführte allgemeine Behandlung von Eigenspannungszuständen mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie. Daraus folgt außerdem, daß die in dieser Arbeit gegebene Darstellung nicht auf metallische Werkstoffe beschränkt ist. Die durchgeführten Betrachtungen und die abgeleiteten Gleichungen gelten z.B. für Kunststoffe und Keramiken entsprechend.

Da die Eigenspannungen I. Art (im folgenden stets als Eigenspannungen oder Eigenspannungszustände bezeichnet) über das gesamte Bauteil einwirken, überlagern sie sich bei auftretenden Betriebslasten elastisch oder elastisch-plastisch mit den Lastspannungen. Daraus folgt: Eigenspannungszustände können das Bauteilverhalten beeinflussen.

Der Gesamtkomplex Eigenspannungen umfaßt folgende Probleme: Bestimmung von Eigenspannungen, Umlagerung von Eigenspannungszuständen durch Glühbehandlung oder durch Überlagerung mit Lastspannungen, Einfluß von Eigenspannungen auf das mechanische, chemische und physikalische Werkstoffverhalten.

2 Einführung an einem Beispiel

Wir gehen von einem elastisch ideal-plastischen Stoffgesetz nach Bild 2 aus. Die größte mögliche elastische Dehnung, auch Streckgrenzdehnung ε_F genannt, beträgt

$$\varepsilon_F = \sigma_F / E . \quad (1)$$

Die Belastung OFG führt zur Gesamtdehnung ε . Nach elastischer Entlastung ist die plastische Dehnung ε_p eingepreßt, siehe Bild 2.

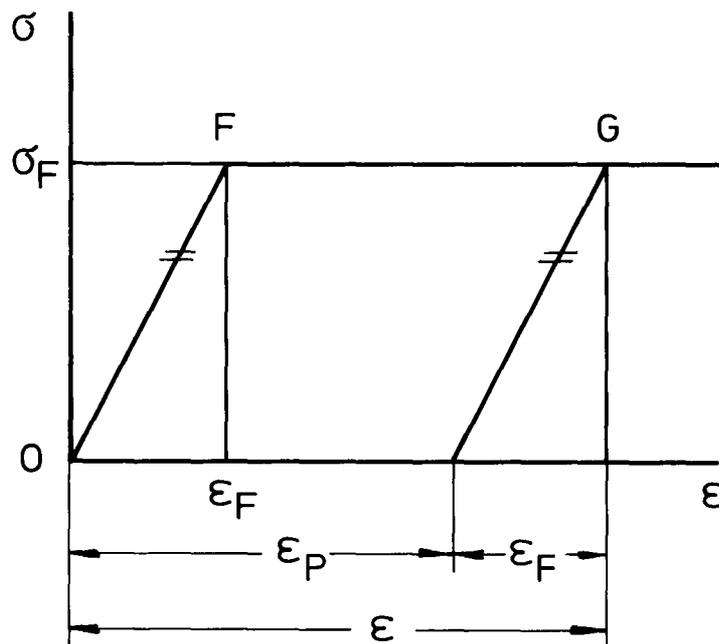


Bild 2: Elastisch ideal-plastisches Stoffgesetz

Ein Balken mit dem Rechteckquerschnitt $b \times 2H$ wird jetzt unter Zugrundelegung des Stoffgesetzes nach Bild 2 durch ein Moment M elastisch-plastisch verformt. Dabei entsteht der

im Bild 3 dargestellte Lastspannungsverlauf. Bei einer Plastizierung bis zur Balkenfaser s ist das Moment

$$M = b \int_{-H}^{+H} y \sigma(y) dy = b \sigma_F \left(H^2 - \frac{1}{3} s^2 \right) \quad (2)$$

erforderlich. Nach der Kompatibilitätsbedingung (Bernoullihypothese) bleiben die Balkenquerschnitte eben, siehe [6-8]. Demnach verläuft die durch M erzeugte Gesamtdehnung ε linear über dem Querschnitt, während im plastischen Bereich die größtmögliche elastische Dehnung ε_F auftritt. Man kann aus diesem Zusammenhang, der in Bild 4 dargestellt ist, den Verlauf der plastischen Dehnung $\varepsilon_p(y)$ bestimmen.

Wendet man in Bild 4a den Strahlensatz an, und berücksichtigt man für ε_F die Gl. (1), ergibt sich die Verteilung der plastischen Verformung im oberen Balkenbereich zu

$$\varepsilon_p(y) = \frac{\sigma_F}{E} \left(\frac{y}{s} - 1 \right). \quad (3)$$

Im elastischen Bereich ist $\varepsilon_p = 0$. Der Gesamtverlauf der plastischen Deformationen, die durch den Lastspannungszustand nach Bild 3 eingepägt werden, gibt Bild 4b wieder.

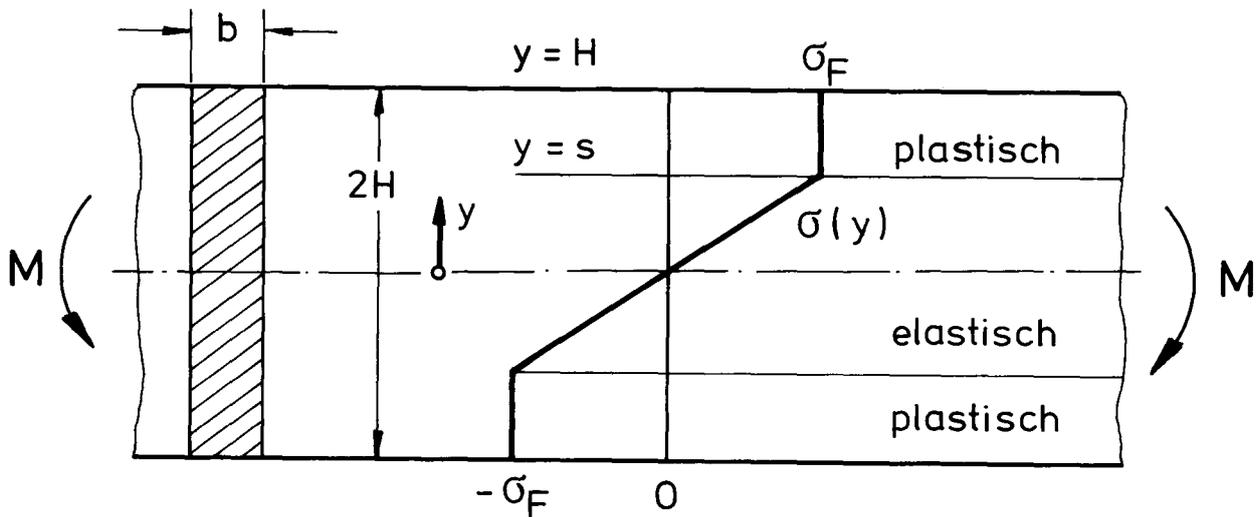


Bild 3: Lastspannungsverlauf durch Biegemoment M

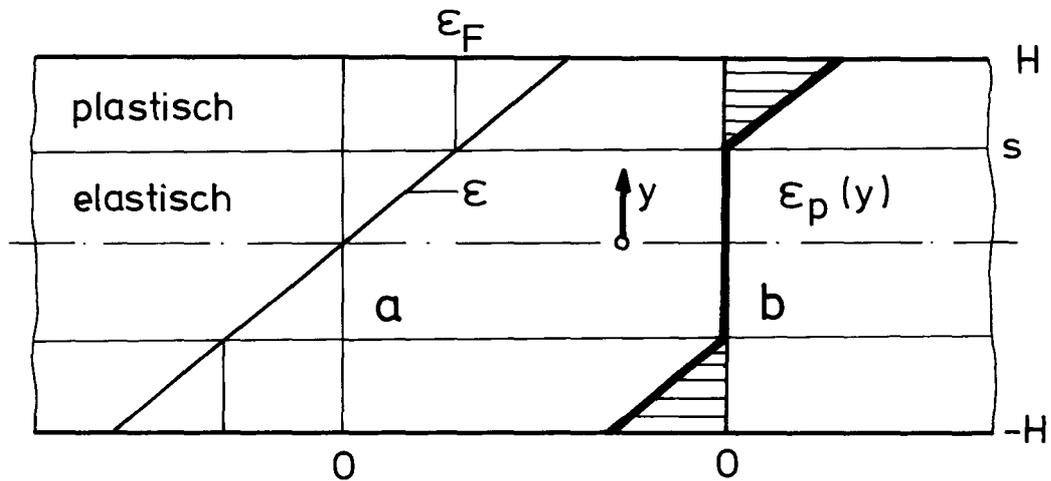


Bild 4: Zur Bestimmung des plastischen Dehnungsverlaufs

Bei Rücknahme des Biegemomentes M können die einzelnen Fasern nicht vollständig zurückfedern, da sie durch die ungleichmäßige ε_p -Verteilung nach Bild 4b behindert werden. Dadurch bildet sich in dem betrachteten balkenartigen Bauteil bei Entlastung ein Eigenspannungszustand aus. Es besteht demnach ein kausaler Zusammenhang zwischen den eingprägten bleibenden Dehnungen und den entstehenden Eigenspannungen. An dieser Stelle wird noch darauf hingewiesen, daß Eigenspannungen, die wie hier im Beispiel durch lokale überelastische Verformungen entstehen, allgemein als lastinduzierte Eigenspannungen bezeichnet werden.

2.1 Folgerungen aus dem Einführungsbeispiel

Den an diesem Einführungsbeispiel abgeleiteten Kausalzusammenhang zwischen eingprägten Deformationen und der Ausbildung von Eigenspannungen kann man verallgemeinern: Eigenspannungen entstehen durch bleibende und ungleichmäßige Verformungen. Diese werden im folgenden mit ε_q (eindimensional) oder mit ε_{ij}^q (dreidimensional) bezeichnet. Man nennt die die Eigenspannungen verursachenden ε_{ij}^q -Felder auch Eigenspannungsquellen oder Anfangsformänderungen [9], Extradehnungen [10,11], Restdeformationen [12], Eigendeformationen [14] oder eingprägte Dehnungen.

Wir wiederholen: Eigenspannungen entstehen durch bleibende und ungleichmäßige Verformungen. Der Begriff bleibende Verformungen ist physikalisch eindeutig. Der Begriff ungleichmäßige Verformungen ist aber mathematisch zunächst unklar. In dieser Arbeit wird nachgewiesen, daß eingeprägte Dehnungen dann als ungleichmäßig gelten, wenn sie die für das jeweilige Bauteil (Balken, Scheibe, Platte, allgemeines Kontinuum) gültigen Kompatibilitätsbedingungen nicht erfüllen. Die Bezeichnung "ungleichmäßig" in der hier festgelegten Bedeutung, nämlich im Hinblick auf Eigenspannungsentstehung durch bleibende Verformungen, ist damit mathematisch eindeutig definiert.

Wie man aus den gegebenen Beanspruchungen die Lastspannungen ermittelt, wird in der Elastizitätstheorie bzw. in der Festigkeitslehre behandelt, siehe z.B. [2-8]. Hier besteht jetzt die Frage, wie man aus gegebenen ε_{ij}^q -Feldern die zugehörigen Eigenspannungszustände ermittelt. Dieser Aufgabe wollen wir uns im folgenden zuwenden. Die Frage nach den physikalischen oder chemischen Ursachen für die Entstehung der Extradehnungsfelder wird in einem gesonderten Abschnitt kurz behandelt.

3 1D-1K-ES-Zustände bei gegebener $\varepsilon_q(y)$ -Verteilung

1D-1K-ES-Zustände sind eindimensionale bzw. einachsige Eigenspannungszustände, die von einer Koordinate abhängen. Wir wählen diese eindeutige Kurzbeschreibung des Eigenspannungszustandes auch in den folgenden Abschnitten entsprechend für mehrdimensionale bzw. mehrachsige Eigenspannungsverteilungen, die von mehreren Koordinaten abhängen.

Das hier zu behandelnde 1D-1K-ES-Problem entspricht dem Einführungsbeispiel, siehe Abschnitt 2. Wir können deshalb von Bild 4b ausgehen. Statt der speziellen $\varepsilon_p(y)$ -Verteilung nach Bild 4b nehmen wir jetzt eine ganz allgemeine Verteilung der Extradehnungen an, die wir mit $\varepsilon_q(y)$ bezeichnen. Damit wird ausgedrückt, daß die physikalische Ursache der eingepprägten Dehnungen für die nachfolgenden Berechnungen keine Rolle spielt. Zur Beantwortung der Frage, wie die durch $\varepsilon_q(y)$ erzeugten Eigenspannungen berechnet werden, formulieren wir die elastischen Grundgleichungen des Problems:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_q , \quad (4)$$

$$\sigma = E\varepsilon_e , \quad (5)$$

$$\varepsilon = C_1 y + C_2 , \quad (6)$$

$$b \int_{-H}^{+H} \sigma dy = 0 , \quad (7)$$

$$b \int_{-H}^{+H} y \sigma dy = 0 . \quad (8)$$

In diesem Gleichungssystem hängen alle Größen von der Koordinate y ab, siehe Bild 4.

Gl.(4) nennen wir die Dehnungsbeziehung: Die Gesamtdehnung ε einer Balkenfaser setzt sich aus der elastischen Dehnung ε_e und aus der eingepprägten Dehnung ε_q zusammen. Da die Eigenspannungsentstehung durch ε_q rein elastisch ablaufen soll, tritt in der Dehnungsbeziehung kein zusätzlicher plastischer Dehnungsanteil auf.

Gl.(5) ist das Stoffgesetz nach Hooke: Die gesuchten Eigenspannungen σ berechnen sich aus den elastischen Dehnungen ε_e . Die über das Stoffgesetz mit den Eigenspannungen σ verknüpften Dehnungen ε_e werden auch spannungswirksame Dehnungen genannt.

Gl.(6) ist die Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingung des Balkens, auch Bernoullihypothese genannt. Danach sind die Gesamtdehnungen ε linear über dem Querschnitt verteilt. Wir merken uns bereits an dieser Stelle ganz allgemein: Die Gesamtdehnungen müssen stets die Verträglichkeitsbedingungen des vorliegenden Bauteils erfüllen.

Die Gln.(7) und (8) sind die Kräfte- und Momentengleichgewichtsbedingungen des Balkens. Wie aus den Gln.(7) und (8) ersichtlich, müssen die aus dem gesuchten Eigenspannungsverlauf $\sigma(y)$ gebildeten resultierenden Kräfte und Momente verschwinden. Demnach treten keine äußeren Beanspruchungen auf, und die aus dem Gleichungssystem (4) bis (8) ermittelten Spannungen σ sind reine Eigenspannungen ohne Lastspannungsanteil.

Zur Auflösung des Gleichungssystems (4) bis (8) nach den gesuchten Eigenspannungen $\sigma(y)$ setzen wir die Gln.(4) und (6) in Gl.(5) ein. Man erhält:

$$\sigma = E(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) . \quad (9)$$

Mit Gl.(9) sind die gesuchten Eigenspannungen bis auf die Konstanten C_1 und C_2 bekannt. Diese Konstanten müssen jetzt so bestimmt werden, daß die Eigenspannungen nach Gl.(9) die Gleichgewichtsbedingungen (7) und (8) erfüllen. Einsetzen von Gl.(9) in die Gln.(7) und (8) liefert:

$$b \int_{-H}^{+H} E(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) dy = 0 , \quad (10)$$

$$b \int_{-H}^{+H} E(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) y dy = 0 . \quad (11)$$

Dies sind die beiden Gleichungen zur Bestimmung von C_1 und C_2 . Die einfache Integration der Gln.(10) und (11) und die Auflösung nach C_1 und C_2 ergibt:

$$C_1 = \frac{3}{2H^3} \int_{-H}^{+H} y \varepsilon_q dy \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} \varepsilon_q dy . \quad (12)$$

Einsetzen in Gl. (9) liefert:

$$\sigma(y) = E \left\{ \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} \varepsilon_q(y) dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} y \varepsilon_q(y) dy - \varepsilon_q(y) \right\}. \quad (13)$$

Gl. (13) ist die Gleichung zur Berechnung der gesuchten 1D-1K-ES-Zustände. Wie ersichtlich, sind die Eigenspannungen $\sigma(y)$ eine eindeutige Funktion der Eigenspannungsquelle $\varepsilon_q(y)$. Das zugrunde gelegte Gleichungssystem (4) bis (8) berücksichtigt nur elastische Vorgänge bei der Eigenspannungsentstehung durch die Eigenspannungsquelle. Aus diesem Grunde müssen die nach Gl. (13) berechneten Eigenspannungen im Gesamtbereich $-H \leq y \leq H$ unterhalb der Streckgrenze σ_F liegen. Diese Bedingung ist meistens erfüllt, siehe Abschnitt 3.1.

Wie aus der Ableitung ersichtlich, gilt Gl. (13) in der vorliegenden Form nur für Rechteckquerschnitte. Bei veränderlicher Balkenbreite, z.B. bei Profilen, steht $b = b(y)$ in den Gln. (7), (8), (10) und (11) jeweils unter dem Integral. Die Gln. (4), (5), (6) und (9) bleiben gültig. Demzufolge ändern sich für $b = b(y)$ nur die aus den Gln. (10) und (11) zu bestimmenden Konstanten C_1 und C_2 .

3.1 Anwendung auf überelastische Biegung

Wir wenden Gl. (13) jetzt auf die im Einführungsbeispiel behandelte überelastische Biegung an, siehe Abschnitt 2. Ein Biegemoment M erzeugt den Lastspannungsverlauf $\sigma(y)$, siehe Bild 3. Dieser prägt über den physikalischen Vorgang der Plastizität die ungleichmäßigen und bleibenden Dehnungen $\varepsilon_p(y)$ nach Bild 4b ein. Die genannte $\varepsilon_p(y)$ -Verteilung ist nach Entlastung durch das Biegemoment M verantwortlich für die im Balken verbleibenden Eigenspannungen. Wir setzen $\varepsilon_p(y) = \varepsilon_q(y)$ in Gl. (13) ein und kontrollieren anschließend, ob die ermittelten Eigenspannungen für jede Balkenfaser unterhalb der Streckgrenze σ_F liegen.

Um konkrete Eigenspannungswerte zu erhalten, legen wir $s = H/2$ fest, siehe Bild 3 und 4. Aus Gl. (3) folgt damit für den oberen plastischen Balkenbereich

$$\varepsilon_q(y) = \frac{\sigma_F}{E} \left(\frac{2y}{H} - 1 \right). \quad (14)$$

Die größte auftretende plastische Randdehnung bzw. Randstauchung beträgt nach Gl. (14) $\varepsilon_q(H) = \sigma_F/E$. Der zugrunde gelegte $\varepsilon_q(y)$ -Verlauf ist in Bild 5a eingetragen. Einsetzen

dieses Verlaufs in Gl. (13) führt auf den in Bild 5b dargestellten Eigenspannungsverlauf $\sigma(y)$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Auswertung der Gl. (13) mit der $\varepsilon_q(y)$ -Verteilung nach Bild 5a hier nicht wiedergegeben. Bei der Nachrechnung beachte man, daß der erste Integralterm in Gl. (13), es handelt sich um die Fläche unter der $\varepsilon_q(y)$ -Verteilung, wegen der schiefsymmetrischen Form von $\varepsilon_q(y)$ verschwindet, siehe Bild 5a. Wie aus Bild 5b ersichtlich, liegen die nach Gl. (13) berechneten Eigenspannungen unterhalb der Streckgrenze σ_F . Die Anwendung dieser Gleichung ist demnach berechtigt.

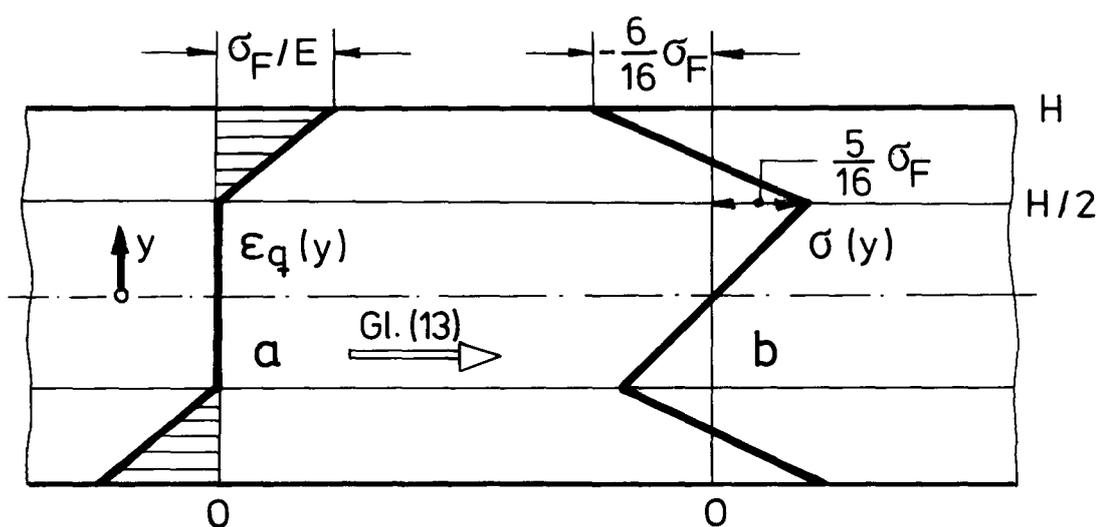


Bild 5: Extradehnungsverlauf $\varepsilon_q(y)$ und zugehöriger Eigenspannungszustand $\sigma(y)$ nach Gl. (13)

Man kann den Eigenspannungsverlauf nach Bild 5b auch zeichnerisch ermitteln. Da die plastisch verformten Balkenfasern bei Entlastung elastisch zurückfedern, kann man die Entlastung durch negative Überlagerung der zu M gehörenden vollständig elastischen Lastspannungsverteilung mit den wahren Lastspannungen erreichen. Das Ergebnis der Überlagerung sind die gesuchten Eigenspannungen. Die Überlagerung ist in Bild 6 dargestellt. Der zeichnerisch ermittelte Eigenspannungsverlauf $\sigma(y)$ in Bild 6 entspricht den nach Gl. (13) berechneten Eigenspannungen, siehe Bild 5b. Der in Bild 6 eingetragene elastische Lastspannungsverlauf folgt aus der elastischen Randspannung $\sigma = M/W$. Das Moment M berechnet sich mit $s = H/2$ aus Gl. (2) zu $M = 11bH^2\sigma_F/12$. Das Widerstandsmoment ergibt sich nach Bild 3 zu $W = b(2H)^2/6$.

Demnach beträgt die elastische Lastspannung am Rand $\sigma = M/W = 11\sigma_F/8$, siehe Bild 6.

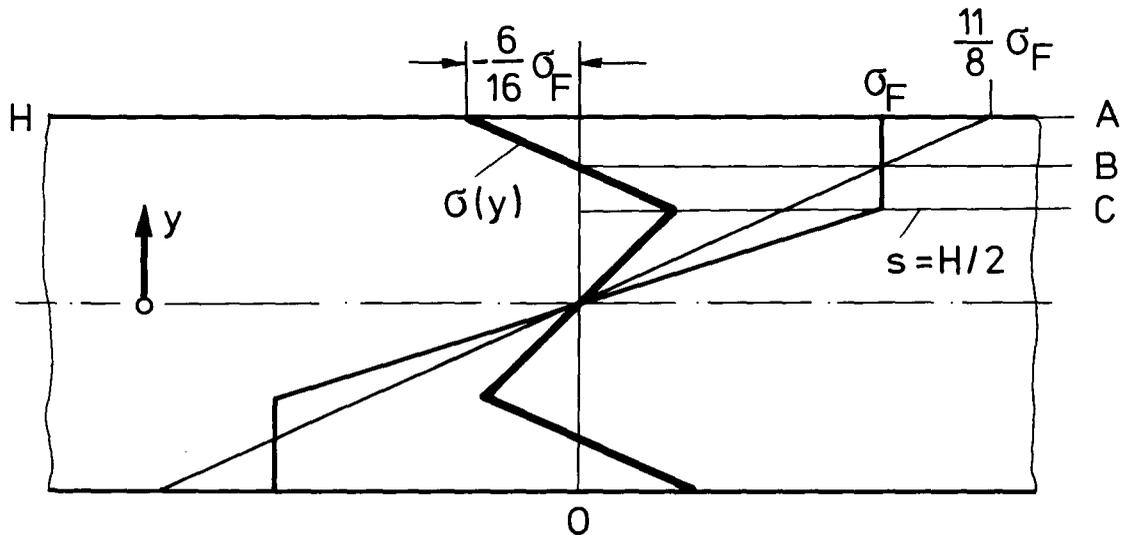


Bild 6: Zeichnerische Ermittlung der Eigenspannungen $\sigma(y)$

Den Vorgang der Be- und Entlastung der einzelnen Balkenfasern kann man auch im Spannungsdehnungsdiagramm darstellen. In Bild 7 sind für die Fasern A, B und C, siehe Bild 6, die zugehörigen Zyklen eingetragen, z.B. für die Faser A: Belastung $0A$, Entlastung AA' . Die zurückbleibenden Eigenspannungen in den einzelnen Fasern werden im Spannungsdehnungsdiagramm durch die Punkte A' , B' und C' gekennzeichnet, siehe Bild 7. Die bleibenden Deformationen, es handelt sich um die Strecken \overline{CB} und \overline{CA} in Bild 7, erhält man aus dem zugehörigen $\epsilon_q(y)$ -Verlauf nach Bild 5a. Wie aus Bild 7 ersichtlich, ist der Bereich für elastisches Entlasten im eindimensionalen Fall gleich der doppelten Streckgrenze σ_F . In diesem Bereich $2\sigma_F$ gilt die Bestimmungsgleichung (13).

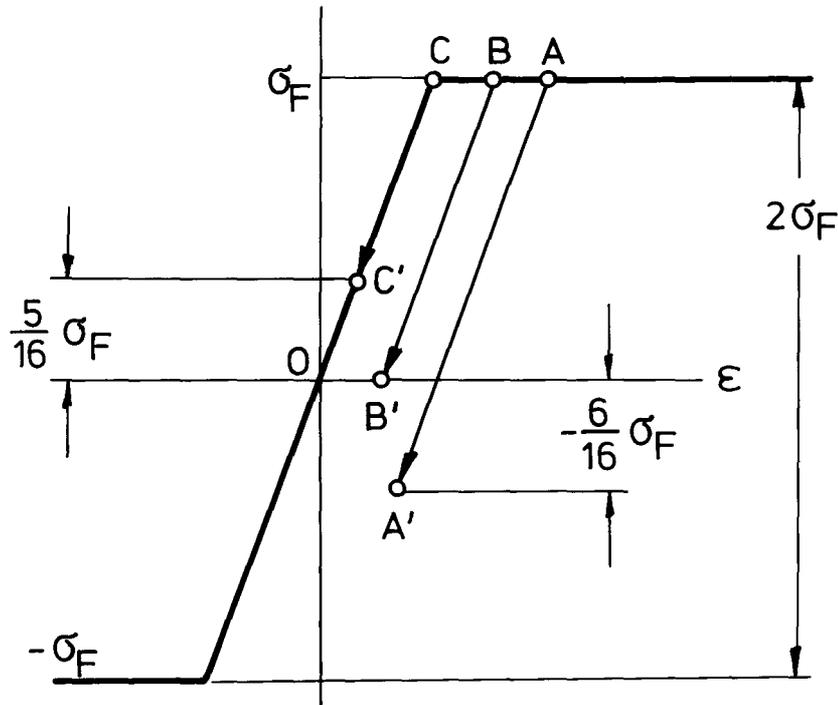


Bild 7: Darstellung der Eigenspannungen im σ - ϵ -Diagramm

3.2 Einwirkung eines Temperaturfeldes $t(y)$

Als zweites Anwendungsbeispiel der Gl.(13) betrachten wir den Fall, daß auf den Balken mit dem Rechteckquerschnitt $b \times 2H$, siehe Bild 3, ein Temperaturfeld $t(y)$ einwirkt. Für die einzelnen Balkenfasern ergibt sich dadurch die Extradehnung bzw. Eigenspannungsquelle

$$\varepsilon_q(y) = \alpha\{t(y) - t_0\} = \alpha T(y) , \quad (15)$$

mit α als Wärmeausdehnungskoeffizient, t_0 als Bezugstemperatur (z.B: Raumtemperatur) und T als Temperaturdifferenz. Einsetzen von Gl.(15) in Gl.(13) liefert unter der Voraussetzung, daß α nicht von der Koordinate y abhängt:

$$\sigma(y) = E\alpha\left\{\frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} T(y)dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} yT(y)dy - T(y)\right\} . \quad (16)$$

Gl.(16) beschreibt die durch das Temperaturfeld $t(y)$ erzeugten Eigenspannungen. Diese werden mit Rücksicht auf das verursachende Temperaturfeld auch als Wärmespannungen bezeichnet. Bei der Rechnung fällt der konstante Anteil $-\alpha t_0$ heraus. Daher kann in Gl.(16) statt $T(y)$ auch $t(y)$ eingesetzt werden, man vergleiche dazu Abschnitt 3.3.

Im vorliegenden Fall hängt die Streckgrenze von der Temperatur ab. Bezeichnet man $\sigma_F(t)$ als Warmstreckgrenze, so gilt Gl.(16) nur für den Fall, daß in keiner Faser y die Warmstreckgrenze erreicht wird. In diesem Falle sind die Extradehnungen nach Gl.(15) und die daraus resultierenden Wärmespannungen nach Gl.(16) nur solange vorhanden, wie das Temperaturfeld einwirkt. Aus diesem Grunde bezeichnet man die durch Temperaturänderung hervorgerufenen Extradehnungen nach Gl.(15) auch als quasiplastisch, siehe [13].

3.3 Lineare $\varepsilon_q(y)$ -Verteilungen

Wir betrachten die folgenden linearen Verteilungen von $\varepsilon_q(y)$:

$$\varepsilon_q(y) = 0 , \quad (17)$$

$$\varepsilon_q(y) = a , \quad (18)$$

$$\varepsilon_q(y) = by , \quad (19)$$

$$\varepsilon_q(y) = a + by . \quad (20)$$

Die Größen a und b sind Konstante. Setzt man die Gln.(17) bis (20) einzeln in die Eigenspannungsbestimmungsgleichung (13) ein, verschwinden in allen vier Fällen die Eigenspannungen. Auf die einfache Rechnung wird hier verzichtet. Dieses Ergebnis entspricht für die Gln.(17) und (18) den Erwartungen, da verschwindende oder konstante Extradehnungen keine Eigenspannungen erzeugen können. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß in den Fällen nach Gl.(19) und Gl.(20) die Eigenspannungen ebenfalls verschwinden. Da die Gln.(19) und (20) der Kompatibilitätsbedingung Gl.(6) genügen, besteht offensichtlich folgender Zusammenhang: Erfüllt die Eigenspannungsquelle die für das Bauteil gültige Vertäglichkeitsbedingung, ergeben sich aus ihr keine Eigenspannungen. Dieser Sachverhalt wird im folgenden Abschnitt durch Betrachtung der Kompatibilitätsbedingung bestätigt.

4 Zur Kompatibilität im 1D-1K-ES-Fall

Wir betrachten die Verträglichkeitsbedingung Gl.(6) und das Stoffgesetz für den einachsigen Lastspannungszustand, nämlich $\varepsilon = C_1 y + C_2$ und $\sigma = E\varepsilon$. Wie ersichtlich, sind die im Stoffgesetz auftretenden spannungswirksamen Dehnungen ε gleich den kompatiblen Gesamtdehnungen.

Für den einachsigen Eigenspannungszustand betrachten wir die Gln.(4), (5) und (6). Aus den Gln.(4) und (6) folgt in diesem Falle für die spannungswirksame Dehnung

$$\varepsilon_e = C_1 y + C_2 - \varepsilon_q . \quad (21)$$

Wie aus Gl.(21) ersichtlich, sind die im Stoffgesetz Gl.(5) auftretenden spannungswirksamen Dehnungen ε_e bei allgemeiner Eigenspannungsquelle ε_q , also bei Anwesenheit von Eigenspannungen, nicht verträglich, da sie die Kompatibilitätsbedingung Gl.(6) nicht erfüllen. Setzt man die linear verteilten Eigenspannungsquellen nach den Gln.(17) bis (20) einzeln in Gl.(21) ein, so ergibt sich für die spannungswirksamen Dehnungen

$$\varepsilon_e = C_1 y + C_2 - 0 = C_1 y + C_2 ,$$

$$\varepsilon_e = C_1 y + C_2 - a = C_1 y + \bar{C}_2 ,$$

$$\varepsilon_e = C_1 y + C_2 - by = \bar{C}_1 y + C_2 ,$$

$$\varepsilon_e = C_1 y + C_2 - a - by = \bar{C}_1 y + \bar{C}_2 ,$$

mit $\bar{C}_1 = C_1 - b$ und $\bar{C}_2 = C_2 - a$ als neue Konstante. Wie aus den letzten vier Gleichungen ersichtlich, ist die spannungswirksame Dehnung ε_e in den vier Fällen nach Gl.(17) bis Gl.(20) verträglich. Dies entspricht aber, wie oben beschrieben, dem reinen Lastspannungszustand: Es treten keine Eigenspannungen auf. Da die vier untersuchten ε_q -Verteilungen die Kompatibilitätsbedingung Gl.(6) erfüllen, erkennt man auch ohne den Weg über die Gl.(13): Erfüllt die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_q(y)$ die Verträglichkeitsbedingung Gl.(6), ergeben sich aus ihr keine Eigenspannungen. Dieser Zusammenhang wird im 3D-3K-ES-Fall noch ganz allgemein nachgewiesen.

5 Ursachen für $\varepsilon_{ij}^q(x_i)$ -Felder

Im folgenden werden die wichtigsten Ursachen für das Entstehen von Eigenspannungsquellen genannt.

5.1 Plastische Deformationen

Bei der Belastung von Bauteilen und Konstruktionen ist das örtliche Erreichen der Fließgrenze infolge von Spannungskonzentrationen unvermeidlich. Zum anderen kann eine gewollte Ausnutzung des Werkstoffs bis zur Fließgrenze in Teilbereichen des Bauteils der Berechnung zugrunde gelegt sein, siehe Bild 3. In beiden Fällen gewährleistet die verformungsbehindernde Wirkung der die plastischen Zonen umschließenden elastischen Werkstoffbereiche die Tragfähigkeit des Bauteils oder der Konstruktion. Fließen tritt dann auf, wenn im einachsigen Spannungszustand die gültige Streckgrenze erreicht wird. Im mehrachsigen Fall muß örtlich das für den vorliegenden Werkstoff gültige Fließkriterium erfüllt sein, siehe z.B. [3,15]. Durch das lokale Fließen werden bleibende und ungleichmäßige Dehnungen eingepreßt, die nach Entlastung einen Eigenspannungszustand verursachen. Man vergleiche das Einführungsbeispiel im Abschnitt 2.

5.2 Temperaturfelder

Bei Einwirkung eines Temperaturfeldes $t(x_i)$ auf einen Körper mit thermischer Isotropie ergeben sich für die einzelnen Volumenelemente gestalttreue Form- bzw. Volumenänderungen. Es werden keine Gleit- bzw. Scherdeformationen erzeugt: $\varepsilon_{12}^q = \varepsilon_{23}^q = \varepsilon_{13}^q = 0$. Demnach berechnet sich das eingepreßte Feld der Extradehnungen wie folgt:

$$\varepsilon_{ij}^q(x_i) = \alpha \{t(x_i) - t_0\} \delta_{ij} = \alpha T(x_i) \delta_{ij} , \quad (22)$$

mit δ_{ij} als Einheitstensor. Die durch die eingepreßten Dehnungen nach Gl.(22) erzeugten Eigenspannungen heißen auch Wärmespannungen.

5.3 Volumendilatationen, insbesondere in der Wärmeeinflußzone von Schweißverbindungen

Treten im Kontinuum chemische Reaktionen oder physikalische Vorgänge auf, die für ein Volumenelement dV den neuen Volumenbedarf $dV + \Delta(dV)$ erzeugen, so wird dadurch die spezifische Volumenänderung bzw. die Volumendilatation

$$e_q = \Delta(dV)/dV \quad (23)$$

eingepreßt. Dies führt zur Entstehung von Eigenspannungen. Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie hängt die Volumendilatation mit den drei eingepreßten Normaldehnungen wie folgt zusammen

$$e_q = \varepsilon_{11}^q + \varepsilon_{22}^q + \varepsilon_{33}^q, \quad (24)$$

siehe [2-5,16]. In der Regel laufen die chemischen Reaktionen oder die physikalischen Vorgänge, wie bei Einwirken eines Temperaturfeldes, als gestalttreue Volumenänderung ab, wobei keine Raumrichtung bevorzugt wird. Demnach gilt $\varepsilon_{11}^q = \varepsilon_{22}^q = \varepsilon_{33}^q$ und aus Gl. (24) folgt:

$$e_q = 3\varepsilon_{11}^q = \dots \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{11}^q = \frac{1}{3}e_q, \quad \text{usw.} \quad (25)$$

Nach Gl. (25) berechnet sich das durch Volumendilatation erzeugte Extradehnungsfeld wie folgt:

$$\varepsilon_{ij}^q(x_i) = \frac{1}{3}e_q(x_i)\delta_{ij}. \quad (26)$$

Als Beispiel für physikalisch verursachte Volumendilatation wird auf das Umwandlungsverhalten der Stähle durch Wärmebehandlung und durch Schweißen hingewiesen, siehe [17-20]. So entsteht bei Abkühlung mit der oberen kritischen Abkühlungsgeschwindigkeit durch Umklappvorgänge im Kristallgitter ein martensitisches Gefüge, siehe [17,20]. In diesem ist der Kohlenstoff zwangsgelöst, wodurch eine eingepreßte vom Kohlenstoffgehalt etwa linear abhängige Volumenvergrößerung entsteht, siehe [18]. Schätzt man die durch Martensitbildung entstehende Volumenänderung für einen mittleren Kohlenstoffgehalt von 0.2 Prozent mit $e_q = 0.01$ ab, siehe [18], so ergeben sich nach Gl. (26) die drei eingepreßten Extradehnungen in der Größenordnung

von

$$\varepsilon_{11}^q = \varepsilon_{22}^q = \varepsilon_{33}^q = 0.003 . \quad (27)$$

Zur Beurteilung dieses Wertes berechnen wir die ungefähre Größe der Streckgrenzdehnung eines unlegierten Baustahls nach Gl.(1) zu

$$\varepsilon_F = \frac{\sigma_F}{E} = \frac{210}{210\,000} = 0.001 . \quad (28)$$

Der Vergleich von Gl.(27) mit Gl.(28) zeigt auf, daß die durch martensitische Umwandlungen erzeugten Eigenspannungsquellen ein vielfaches der größten möglichen elastischen Dehnungswerte ε_F betragen können. Demnach ist zu erwarten, daß sich die Eigenspannungen in der Wärmeeinflußzone von Schweißverbindungen charakteristisch ausbilden.

Neben Martensit tritt in der Wärmeeinflußzone von Schweißverbindungen vor allem Zwischenstufengefüge auf. Dieser Gefügebestandteil entsteht durch gleichzeitiges Auftreten von Umklappvorgängen und Kohlenstoffdiffusion, siehe [17,20]. Das Zwischenstufengefüge hat ebenfalls einen größeren Volumenbedarf als das ungestörte Grundgitter bzw. der Gleichgewichtsferrit. Die durch den Vergleich von Gl.(27) mit Gl.(28) gefolgerte charakteristische Ausbildung der Eigenspannungen in der Wärmeeinflußzone von Schweißverbindungen kann man demnach wie folgt beschreiben: Durch den erhöhten Volumenbedarf von Martensit und Zwischenstufengefüge bilden sich in der Wärmeeinflußzone Druckeinsattelungen im Eigenspannungsverlauf aus. Bei der Interpretation von gemessenen Eigenspannungsverteilungen in Schweißverbindungen kommen wir auf den hier aufgezeigten Zusammenhang zurück.

5.4 Phasengrenzwanderung und Magnetostriktion

Beim Gießen tritt mit Beginn der Erstarrung eine Zustandsänderung des Kontinuums mit wandernder Phasengrenze bzw. Erstarrungsfront auf. Dies hat die Entstehung einer Eigenspannungsquelle zur Folge, siehe [21]. Mit Eigenspannungen durch magnetostriktive Effekte kommt man bereits in den Bereich der Festkörperphysik, siehe [11].

6 Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Das nächste Ziel ist die Formulierung der Grundgleichungen und der zugehörigen Randbedingungen zur Beschreibung des allgemeinen räumlichen Eigenspannungsproblems (3D-3K-ES-Problem) bei gegebenem $\varepsilon_{ij}^q(x_i)$ -Feld. Eine solche Formulierung setzt jedoch die Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie voraus. Das sind die problemorientierten Differentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen zur Berechnung der Verschiebungen, Dehnungen und Lastspannungen, welche durch äußere Beanspruchungen und durch vorgegebene Verschiebungen verursacht werden. In den beiden folgenden Abschnitten werden diese Grundgleichungen und Randbedingungen ohne Ableitung angegeben. Die Herleitung dieser Gleichungen ist Aufgabe der Elastostatik bzw. Elastizitätstheorie, siehe z.B. [2-5,16,30-35].

6.1 Problemorientierte Differentialgleichungen

Es werden kleine Verschiebungen $u_i(x_i)$ vorausgesetzt. Dann gelten für den Zusammenhang zwischen Dehnungstensor ε_{ij} und Verschiebungsvektor u_i die Gleichungen der linearen Kinematik. Die Gleichgewichtsbedingungen im Innern des Kontinuums (Statik) werden am unverformten Volumenelement aufgestellt (Theorie I. Ordnung). Es wird Homogenität, Isotropie und physikalische Linearität des elastischen Körpers angenommen. Dann gilt für die Koppelung zwischen Dehnungen ε_{ij} und Lastspannungen σ_{ij} das entsprechende Stoffgesetz nach Hooke. Damit lauten die Grundgleichungen:

$$\text{Kinematik} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) , \quad (29)$$

$$\text{Statik} \quad \sigma_{ij,i} + X_j = 0 , \quad (30)$$

$$\text{Stoffgesetz} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu}\delta_{ij}\sigma_{kk}) . \quad (31)$$

Die Gln. (30) sind die drei Kräftegleichgewichtsbedingungen. Die drei Momentengleichgewichtsbedingungen werden durch die Symmetrie des Lastspannungstensors σ_{ij} erfüllt. Die Symmetrie des Dehnungstensors ε_{ij} folgt aus den Gln.(29). Eliminiert man die Verschiebungen u_i aus den Gln.(29), erhält man die Kompatibilitätsbedingungen. Das Grundgleichungssystem (29)

bis (31) lautet dann:

$$\text{Komp. Bed.} \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad (32)$$

$$\text{Statik} \quad \sigma_{ij,i} + X_j = 0, \quad (33)$$

$$\text{Stoffgesetz} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right). \quad (34)$$

Schreibt man die Gln.(32) für alle möglichen Kombinationen der Indizes i, j, k, l aus, ergeben sich $3^4 = 81$ Gleichungen. Diese Anzahl reduziert sich allerdings auf sechs Gleichungen. Die restlichen Gleichungen sind wegen der Symmetrie von ε_{ij} entweder identisch erfüllt oder es handelt sich um Wiederholungen. Die sechs Kompatibilitätsbedingungen nach den Gln.(32) lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Die Gln.(35) sind die Kompatibilitätsbedingungen des allgemeinen räumlichen Verzerrungszustandes. Es sei kurz darauf hingewiesen, daß die sechs Gleichungen (35) nicht unabhängig voneinander sind. Es gelten nämlich die Bianchi'schen Identitäten, siehe [3,16]. Danach bleiben für die Bilanz von Gleichungen und Unbekannten aus den Kompatibilitätsbedingungen (35) drei Gleichungen übrig. Zur Schreibvereinfachung kürzen wir die Gln.(35) wie folgt ab,

$$\text{Ink}(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad (36)$$

mit Ink als linearem Differentialoperator zweiter Ordnung, der die Differentiationsprozeduren nach den Gln.(35) auf ε_{ij} anwendet. Mit der Schreibweise nach Gl.(36) schreibt sich das Grundgleichungssystem (32) bis (34) in der Form:

$$Ink(\varepsilon_{ij}) = 0 , \quad (37)$$

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 , \quad (38)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu}\delta_{ij}\sigma_{kk}) . \quad (39)$$

Das Gleichungssystem (37) bis (39) gilt für Lastspannungen. Daher erfüllen die im Stoffgesetz Gl.(39) mit den Lastspannungen gekoppelten spannungswirksamen Dehnungen die Kompatibilitätsbedingungen nach Gl.(37).

Es wird noch darauf hingewiesen, daß die Bilanz zwischen den zur Verfügung stehenden Gleichungen einerseits und den auftretenden Unbekannten andererseits ausgeglichen ist. So stehen mit dem Gleichungssystem (29) bis (31) insgesamt 15 Gleichungen für die 15 Unbekannten u_i , ε_{ij} und σ_{ij} zur Verfügung. Im Gleichungssystem (37) bis (39) treten die Verschiebungen nicht auf. Bei diesem Gleichungssystem handelt es sich um insgesamt zwölf Gleichungen für die zwölf Unbekannten ε_{ij} und σ_{ij} .

6.2 Randbedingungen

Die in den Grundgleichungen auftretenden Unbekannten, nämlich die Verschiebungen u_i , die Dehnungen ε_{ij} und die Lastspannungen σ_{ij} werden im allgemeinen durch Volumenkräfte X_i , durch Oberflächenbelastungen $\overset{0}{p}_i$ und durch vorgegebene Oberflächenverschiebungen $\overset{0}{u}_i$ hervorgerufen. Daraus folgt, daß die Lösungen der problemorientierten Differentialgleichungen bestimmte Randbedingungen erfüllen müssen.

Wir gehen hier vom allgemeinen Fall gemischter Randbedingungen aus. Danach sind auf einem Teilbereich O_g der Gesamtoberfläche O die Verschiebungen $\overset{0}{u}_i$, und auf dem Teilbereich O_n die Oberflächenbelastungen $\overset{0}{p}_i$ vorgegeben. Zunächst gilt

$$O = O_g \cup O_n . \quad (40)$$

Auf dem Oberflächenbereich O_g sind die Verschiebungen $\overset{0}{u}_i$ vorgegeben. Demnach muß die Lösung für das Verschiebungsfeld u_i auf O_g folgende Bedingung erfüllen:

$$\overset{0}{u}_i(x_i) \text{ für alle } x_i \in O_g . \quad (41)$$

Man bezeichnet Gl. (41) als Verschiebungsrandbedingung, als wesentliche Randbedingung oder als geometrische Randbedingung.

Auf dem Oberflächenbereich O_n wirken die äußeren Belastungen $\overset{0}{p}_i$ ein. Demnach muß die Lösung für den Lastspannungstensor σ_{ij} am Oberflächenelement mit $\overset{0}{p}_i$ im Kräftegleichgewicht stehen:

$$\overset{0}{p}_i(x_i) = n_j(x_i)\sigma_{ij}(x_i) \text{ für alle } x_i \in O_n . \quad (42)$$

Man bezeichnet Gl. (42) als Krastrandbedingungen oder als natürliche Randbedingungen.

Abschließende Bemerkungen

Die das elastische Kontinuum beschreibenden Differentialgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen bezeichnet man auch als allgemeines Integrationsproblem oder als Randwertproblem der Elastizitätstheorie. Das Auffinden von analytischen Lösungen für den allgemeinen räumlichen Fall unter Einhaltung der Randbedingungen ist nur in wenigen Fällen möglich. Aus diesem Grunde werden die Randwertprobleme der Elastizitätstheorie heute ganz allgemein mit den numerischen Methoden der finiten Elemente behandelt, siehe z.B. [22-28].

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man die problemorientierten Differentialgleichungen bei Erfüllung der geometrischen und der natürlichen Randbedingungen alternativ als Variationsproblem formulieren kann, siehe [27,28]. Wendet man das Variationsproblem direkt an, um Näherungslösungen für Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen zu erhalten, so beinhalten diese Lösungen die Erfüllung der das System beschreibenden Differentialgleichungen, ohne daß man diese selbst braucht.

7 3D-3K-ES-Zustände bei gegebenem $\varepsilon_{ij}^q(\mathbf{x}_i)$ -Feld

Wie aus Abschnitt 6 ersichtlich, entstehen durch spezifische Volumenkräfte X_i , durch Oberflächenbelastungen $\overset{0}{p}_i$ und durch vorgegebene Oberflächenverschiebungen $\overset{0}{u}_i$ im elastischen Kontinuum Verschiebungen, Dehnungen und Lastspannungen. Demgegenüber liegt ein reiner Eigenspannungszustand vor, wenn ein Extradehnungsfeld $\varepsilon_{ij}^q(\mathbf{x}_i)$ eingeprägt ist und die genannten äußeren Einwirkungen entfallen. Eigenspannungen sind demnach Spannungen, die in einem Körper bei Abwesenheit der Volumenkräfte, der Oberflächenbelastungen und der vorgegebenen Oberflächenverschiebungen auftreten. Im folgenden werden die problemorientierten Differentialgleichungen und die zugehörigen Randbedingungen für den allgemeinen räumlichen 3D-3K-ES-Zustand unter Berücksichtigung der Eigenspannungsquelle $\varepsilon_{ij}^q(\mathbf{x}_i)$ aufgestellt.

7.1 Problemorientierte Differentialgleichungen

Bei Anwesenheit von Extradehnungen berechnen sich die Gesamtdehnungen entsprechend der Dehnungsbeziehung Gl.(4) aus den eingepprägten Extradehnungen und den spannungswirksamen elastischen Dehnungen. Die Kompatibilitätsbedingungen Gl.(37) gelten wie bei Lastspannungen auch im Eigenspannungsfall für die Gesamtdehnungen, man vergleiche den eindimensionalen Fall Gl.(6). In den Gleichgewichtsbedingungen Gl.(38) müssen die Volumenkräfte X_i verschwinden. Das Stoffgesetz Gl.(39) ist mit den elastischen spannungswirksamen Dehnungen zu formulieren, man vergleiche den eindimensionalen Fall Gl.(5). Die Grundgleichungen für 3D-3K-ES-Zustände lauten demnach wie folgt:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^q, \quad (43)$$

$$Ink(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad (44)$$

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad (45)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right). \quad (46)$$

Im Gleichungssystem (43) bis (46) sind die σ_{ij} die gesuchten Eigenspannungskomponenten. Wie im eindimensionalen Fall nach Abschnitt 3 soll die Eigenspannungsentstehung durch die Eigenspannungsquelle ε_{ij}^q rein elastisch, also ohne Bildung plastischer Dehnungen, ablaufen.

Aus diesem Grunde tritt in den Dehnungsbeziehungen (43) kein zusätzlicher plastischer Dehnungsanteil auf. Bei der im Rahmen dieser Arbeit noch behandelten elastisch-plastischen Überlagerung von Last- und Eigenspannungen wird die Neubildung plastischer Verformungsanteile mit berücksichtigt. Die Gleichungen (45) beschreiben das Kräftegleichgewicht der Eigenspannungskomponenten am Volumenelement im Innern des Körpers. Das Momentengleichgewicht wird durch die Symmetrie des Eigenspannungstensors gewährleistet. Wie ersichtlich, erfüllen die im Stoffgesetz Gl. (46) mit den Eigenspannungen gekoppelten spannungswirksamen Dehnungen nicht die Kompatibilitätsbedingungen Gl. (44). Mit dem Gleichungssystem (43) bis (46) stehen 18 Gleichungen für 18 unbekannte Funktionen zur Verfügung.

7.2 Randbedingungen

Bei Eigenspannungszuständen treten auf dem Oberflächengebiet O_g keine vorgegebenen Verschiebungen $\overset{0}{u}_i$ auf und auf dem Oberflächengebiet O_n verschwinden die äußeren Belastungen $\overset{0}{p}_i$. Demnach ist die Gesamtoberfläche spannungsfrei. Betrachtet man ein Volumenelement (Elementartetraeder) an der Oberfläche, müssen die an diesem Element wirkenden Eigenspannungen wegen $\overset{0}{p}_i = 0$ für sich allein im Kräftegleichgewicht stehen. Demnach gelten für die Gesamtoberfläche O in Anlehnung an Gl. (42) die Randbedingungen:

$$0 = n_j(x_i)\sigma_{ij}(x_i) \text{ für alle } x_i \in O . \quad (47)$$

Die problemorientierten Differentialgleichungen (43) bis (46) mit den zugehörigen Randbedingungen (47) beschreiben das allgemeine Integrationsproblem bzw. das allgemeine Randwertproblem zur Berechnung der durch die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_{ij}^g(x_i)$ verursachten Eigenspannungen. Man bezeichnet das Gleichungssystem (43) bis (46) auch als die Grundgleichungen des gestörten elastischen Kontinuums, siehe [10].

Wie im Lastspannungsfall nach Abschnitt 6 ist das Auffinden analytischer Lösungen unter Einhaltung der Randbedingungen für den hier beschriebenen allgemeinen räumlichen 3D-3K-ES-Fall in der Regel nicht möglich. Es wird jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß in der vorliegenden Arbeit noch analytische Lösungen für das einfachere 2D-1K-ES-Problem in zwei unterschiedlichen Fällen abgeleitet werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, daß mit Gl. (13) die analytische Lösung des einfachen 1D-1K-ES-Problems vorliegt.

Der Vollständigkeit halber sei noch auf eine zur Gl.(47) alternative Randbedingung hingewiesen. Für das unendlich ausgedehnte Kontinuum kann man den durch die Randbedingung (47) vorgegebenen Randeffekt verschwindender Oberflächenbelastung vernachlässigen. In diesem Fall geht die Randbedingung (47) über in die Integralbedingung

$$\int_V \sigma_{ij} dV = 0 , \quad (48)$$

siehe [11,29,30]. Die Integralbedingung Gl.(48) bedeutet: Für jede kartesische Komponente des Eigenspannungstensors σ_{ij} verschwindet das Volumenintegral.

7.3 Zur Kompatibilität im 3D-3K-ES-Fall

Setzt man die Dehnungsbeziehung Gl.(43) in die Kompatibilitätsbedingung Gl.(44) ein, und beachtet man die Linearität des *Ink*-Operators, kann der nachfolgende Zusammenhang hingeschrieben werden:

$$\begin{aligned} Ink(\varepsilon_{ij}) &= 0 , \\ Ink(\varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^q) &= 0 , \\ Ink(\varepsilon_{ij}^e) + Ink(\varepsilon_{ij}^q) &= 0 , \\ Ink(\varepsilon_{ij}^e) &= - Ink(\varepsilon_{ij}^q) \neq 0 , \\ Ink(\varepsilon_{ij}^e) &\neq 0 . \end{aligned} \quad (49)$$

Die im Abschnitt 5 aufgezählten Mechanismen zur Bildung der Eigenspannungsquelle ε_{ij}^q erfüllen in der Regel nicht die Verträglichkeitsbedingungen des Kontinuums. Demnach folgt aus der letzten Gl.(49), daß die spannungswirksamen Dehnungen ε_{ij}^e bei Anwesenheit von Eigenspannungen nicht verträglich sind.

Ist ε_{ij}^q zufällig verträglich, gilt nach Gl.(49) $Ink(\varepsilon_{ij}^e) = 0$, und das Gleichungssystem (43) bis (46) beschreibt formal einen reinen Lastspannungszustand. Da in diesem Falle die Volumenkräfte X_i verschwinden, siehe Gl.(45), und nach der geltenden Randbedingung (47) die Gesamtoberfläche spannungsfrei ist, können auch im Innern des Körpers keine Spannungen

auftreten. Aus dieser Betrachtung folgt ganz allgemein: Eine Eigenspannungsquelle, welche die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, erzeugt keine Eigenspannungen.

7.4 Wärmespannungen

Wirkt ein Temperaturfeld $t(x_i)$ auf den Körper ein, so gilt für die dadurch eingprägten Extradehnungen die Gl.(22). In diesem Falle liegt mit dem Gleichungssystem (43) bis (46) und den Randbedingungen (47) das allgemeine Wärmespannungsproblem vor. Da hier die Eigenspannungsentstehung ohne Neubildung plastischer Deformationen angenommen wurde, müssen die aus den Gln.(43) bis (47) berechneten Eigen- bzw. Wärmespannungen für alle Stellen x_i unterhalb der Warmstreckgrenze $\sigma_F(t)$ liegen. Im dreidimensionalen Fall gilt ein Fließkriterium. Wählt man das Fließkriterium nach v.Mises, siehe [3,6,15], so muß für die Lösung an jeder Stelle x_i

$$\sigma_F\{t(x_i)\} > \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

gelten, mit σ_1, σ_2 und σ_3 als Hauptspannungen des Eigenspannungszustandes σ_{ij} im Punkte x_i .

7.5 Lineare Temperaturfelder

Wir betrachten das lineare Temperaturfeld

$$t(x_i) = a + bx_1 + cx_2 + dx_3, \quad (51)$$

mit a, b, c und d als Konstante. Nach Gl.(22) folgt damit

$$\varepsilon_{ij}^q(x_i) = \alpha \{a + bx_1 + cx_2 + dx_3 - t_0\} \delta_{ij}. \quad (52)$$

Da der *Ink*-Operator von zweiter Ordnung ist, man vergleiche die Gln.(35), verschwindet $\text{Ink}(\varepsilon_{ij}^q)$. Demnach erfüllt die Eigenspannungsquelle nach Gl.(52) die Verträglichkeitsbedingungen und daraus folgt: Lineare Temperaturfelder erzeugen keine Wärmespannungen.

8 2D-2K-ES-Zustände bei gegebenem

$\varepsilon_{11}^q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\varepsilon_{22}^q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\varepsilon_{12}^q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ -Feld

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Eigenspannungen in x_3 -Richtung verschwinden:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 . \quad (53)$$

Dann verbleiben noch die Normalkomponenten der Eigenspannungen σ_{11} und σ_{22} und die Schubeigenspannungen σ_{12} . Das ist der gesuchte zweidimensionale bzw. zweiachsige Eigenspannungszustand der in der x_1 - x_2 -Ebene wirkt und der nur von den beiden Koordinaten x_1 und x_2 abhängen soll:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2), \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) . \quad (54)$$

Diese Eigenspannungen werden durch das eingeprägte Extradehnungsfeld

$$\varepsilon_{11}^q(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{22}^q(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad \varepsilon_{12}^q(x_1, x_2) = \gamma_{12}^q/2 \quad (55)$$

verursacht. Solche Eigenspannungszustände heißen, da ihre Komponenten nur in einer Ebene wirken, auch ebene Eigenspannungszustände. Bei der Formulierung der Grundgleichungen bzw. der problemorientierten Differentialgleichungen kann auf die Theorie ebener Lastspannungszustände, auch Scheibentheorie genannt, zurückgegriffen werden, siehe z.B. [2-5,30-35]. In Anlehnung an diese Theorie bezeichnen wir die Gl.(53) als Definitionsgleichung des ebenen Eigenspannungszustandes und die Eigenspannungskomponenten nach Gl.(54) als ebenen Eigenspannungstensor. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Eigenspannungskomponenten gemäß Gl.(54) nicht von der Dickenkoordinate x_3 abhängen. Das bedeutet, die gesuchten Eigenspannungskomponenten sind über der Scheibendicke bzw. über der Blechdicke konstant.

8.1 Problemorientierte Differentialgleichungen

Die im folgenden formulierten Grundgleichungen gelten für Scheiben. Das sind ebene Bauteile (Bleche), deren konstante Dicke klein ist gegenüber den Flächenabmessungen.

Das Gleichungssystem (43) bis (46) gilt für das allgemeine räumliche Eigenspannungsproblem. Spezialisiert man das genannte Gleichungssystem durch Zugrundelegung der Gln. (53), (54) und (55), erhält man die Grundgleichungen für 2D-2K-ES-Zustände:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{11}^q, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^q, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^q, \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0, \quad (58)$$

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22}^e = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \quad \varepsilon_{12}^e = \frac{\sigma_{12}}{2G}. \quad (59)$$

Bei den Gln. (56) handelt es sich um die Dehnungsbeziehungen. Gl. (57) ist die Verträglichkeitsbedingung in der betrachteten x_1 - x_2 -Ebene, man vergleiche die erste Gleichung der Gln. (35). Das Kräftegleichgewicht in x_1 - und in x_2 -Richtung wird durch die beiden Gln. (58) ausgedrückt. Das Momentengleichgewicht am Scheibenelement wird durch die Gleichheit der Schubspannungen $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ gewährleistet. Demnach ist der ebene Eigenspannungstensor nach Gl. (54) symmetrisch. Schließlich beschreiben die Gln. (59) das Stoffverhalten. Mit dem Gleichungssystem (56) bis (59) stehen neun Gleichungen für neun unbekannte Funktionen zur Verfügung.

Durch die nachfolgende Behandlung wird die Anzahl der Gleichungen im Gleichungssystem (56) bis (59) reduziert. Zunächst setzt man die Gln. (56) und die Gln. (59) in die Gl. (57) ein. Die Verträglichkeitsbedingung Gl. (57) erhält damit folgende Form:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \right\} - \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & = - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}^q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}^q}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^q}{\partial x_1 \partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Leitet man die erste Gleichgewichtsbedingung aus Gl. (58) nach x_1 und die zweite nach x_2 ab, erhält man

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2},$$

und hieraus

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right). \quad (61)$$

Setzt man Gl.(61) in Gl.(60) ein, und beachtet man den Zusammenhang zwischen den Stoffkennwerten $G = E/2(1 + \nu)$, so ergibt sich:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right\} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}^q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}^q}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^q}{\partial x_1 \partial x_2} \right). \quad (62)$$

Das Gleichungssystem (56) bis (59) ist damit auf die drei Gleichungen (58) und (62) reduziert. In diesen drei Gleichungen treten die drei gesuchten Eigenspannungskomponenten σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} als Unbekannte auf. Man löst nunmehr das Gleichungssystem (58) und (62) formal auf, indem man eine skalare Ortsfunktion $F(x_1, x_2)$, genannt Airy'sche Spannungsfunktion, wie folgt einführt, siehe [2-5,30-35]:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (63)$$

Der Ansatz nach Gl.(63) erfüllt die beiden Gleichgewichtsbedingungen nach Gl.(58). Dies kann man durch Einsetzen bestätigen. Demnach bleibt Gl.(62) übrig. Einsetzen von Gl.(63) in Gl.(62) ergibt schließlich:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = -E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}^q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}^q}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^q}{\partial x_1 \partial x_2} \right). \quad (64)$$

Die Auflösung von Gl. (64) nach der Spannungsfunktion F hat unter Beachtung der Randbedingungen zu erfolgen, die F auf der Scheibenberandung erfüllen muß. Wir formulieren zunächst diese Randbedingungen und kommentieren anschließend die grundlegende Gl.(64).

8.2 Randbedingungen

Die problemorientierten Differentialgleichungen (56) bis (59) und die Gl.(64) konnten hier vollständig abgeleitet werden. Bei der Formulierung der Randbedingungen zur Gl.(64)

benötigen wir die bekannten Randbedingungen für ebene Lastspannungszustände, auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird, siehe [2-5,30-35].

Wir gehen also vom ebenen Lastspannungszustand aus. Das Scheibenrandelement muß dann mit den auf der Berandung angreifenden Beanspruchungen p_1 und p_2 in x_1 - und in x_2 -Richtung im Kräftegleichgewicht stehen. Daraus folgen zwei Randbedingungen für die Spannungsfunktion F . Für ebene Eigenspannungszustände gilt die räumliche Oberflächenbedingung Gl.(47) entsprechend: Die Scheibenberandung ist spannungsfrei. Man kann deshalb die beiden Randbedingungen des Lastspannungsfalles mit $p_1 = p_2 = 0$ für ebene Eigenspannungszustände spezialisieren. Es ergibt sich:

$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{auf dem Rand,} \quad (65)$$

mit n als nach außen gerichteter Randnormale in der x_1 - x_2 -Ebene. Die beiden Gln.(65) sind die Randbedingungen zur Differentialgleichung (64).

Gl.(64) ist eine lineare inhomogene partielle Differentialgleichung 4. Ordnung zur Bestimmung der Spannungsfunktion F . Die auf F angewandten Differentiationen, man vergleiche die linke Seite der Gl.(64), bezeichnet man als biharmonischen Differentialoperator, siehe [2-5,30-35]. Demnach ist Gl.(64) eine inhomogene biharmonische Differentialgleichung zur Beschreibung des 2D-2K-ES-Zustandes. Gelingt die Auflösung der Gl.(64) nach F unter Beachtung der Randbedingungen (65), so sind nach den Gln.(63) auch die drei gesuchten Eigenspannungskomponenten bekannt.

Setzt man die eingepprägten Extradehnungen gleich Null, ergibt sich aus Gl.(64) eine homogene biharmonische Differentialgleichung für die Spannungsfunktion F . Diese homogene Gleichung ist die bekannte Scheibengleichung für ebene Lastspannungszustände, siehe [2-5,30-35]. In Anlehnung an diese Bezeichnung nennen wir die grundlegende Gl.(64) die erweiterte oder die modifizierte Scheibengleichung für ebene Eigenspannungszustände. Wie ersichtlich, tritt die Eigenspannungsquelle nach Gl.(55) in Gl.(64) gegenüber der homogenen Scheibengleichung für Lastspannungszustände als Störfunktion auf. Die im Abschnitt 7.2 gebrauchte Bezeichnung "gestörtes elastisches Kontinuum" wird aus Gl.(64) besonders offenkundig.

Auf der rechten Seite von Gl.(64) wird die Kompatibilitätsbedingung auf die Eigenspannungsquelle angewandt, man vergleiche Gl.(57). Ist diese zufällig kompatibel, verschwindet die Störfunktion und Gl.(64) geht in die homogene Scheibengleichung für ebene

Lastspannungszustände über. Mit den Randbedingungen nach Gl.(65) verschwinden dann F und mit den Gln.(63) auch die Eigenspannungen im gesamten Scheibenbereich.

Abschließende Bemerkungen

Bisher gelang nur im 1D-1K-ES-Fall mit der Gl.(13) eine explizite Auflösung der gesuchten Eigenspannungen als Funktion der gegebenen Eigenspannungsquelle.

Mit Gl.(64) liegt formal ebenfalls eine explizite und übersichtliche Lösung für den ebenen Eigenspannungszustand als Funktion der vorgegebenen zweidimensionalen Extradehnung vor, allerdings führt der Weg zu den gesuchten Eigenspannungen in diesem Falle über die Auflösung der partiellen Differentialgleichung (64).

Wie ersichtlich, erschweren die im 3D-3K- und im 2D-2K-ES-Fall auftretenden partiellen Differentialgleichungen die Auflösung nach den gesuchten Eigenspannungen erheblich. Das Auffinden analytischer Lösungen für partielle Differentialgleichungen oder deren numerische Behandlung sind aber umfangreiche Sondergebiete der Mathematik und der Numerik, auf die in dieser Arbeit nicht eingegangen werden kann.

Es wird aber darauf hingewiesen, daß das Auffinden einzelner analytischer Lösungen für die Gl.(64) in Anlehnung an die für ebene Lastspannungszustände entwickelten Methoden möglich ist, siehe z.B. [2-5,30-35]. Meist verwendet man heute numerische Verfahren, siehe z.B. [22-28]. Diese ermöglichen auch die Einhaltung der Randbedingungen an Oberflächen und Berandungen kompliziert geformter Bauteile.

Bei der mathematischen Beschreibung von 2D-1K-ES-Zuständen hängen alle Größen nur von einer Koordinate ab. Demzufolge treten bei der Behandlung solcher Eigenspannungszustände nur gewöhnliche Differentialgleichungen auf. Dies ermöglicht in der Regel die Angabe von vollständigen analytischen Lösungen für die gesuchten Eigenspannungen, man vergleiche die Abschnitte 9, 10, 11 und 12.

8.3 Das ebene Wärmespannungsproblem

Wirkt ein Temperaturfeld $t(x_1, x_2)$ auf die Scheibe ein, wird dadurch nach Gl.(22) die Eigenspannungsquelle

$$\varepsilon_{11}^a = \varepsilon_{22}^a = \alpha \{t(x_1, x_2) - t_0\}, \quad \varepsilon_{12}^a = 0 \quad (66)$$

eingepägt. Einsetzen von Gl.(66) in die modifizierte Scheibengleichung für ebene Eigenspannungszustände Gl.(64) ergibt:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = -\alpha E \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x_2^2} \right). \quad (67)$$

Dies ist die Differentialgleichung, die das ebene Wärmespannungsproblem beschreibt. Da bei reiner Temperaturbelastung die Scheibenberandung spannungsfrei bleibt, gelten auch hier die beiden Randbedingungen (65).

Die aus Gl.(67) ermittelten Wärmespannungen dürfen an keiner Stelle (x_1, x_2) die Warmstreckgrenze $\sigma_F(t)$ erreichen, siehe Abschnitt 7.4. Im vorliegenden ebenen Fall ist die Hauptspannung in x_3 -Richtung $\sigma_3 = 0$. Dann muß unter Zugrundelegung von Gl.(50)

$$\sigma_F \{t(x_1, x_2)\} > (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)^{\frac{1}{2}} \quad (68)$$

gelten, mit σ_1 und σ_2 als Hauptspannungen des berechneten Wärmespannungszustandes σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} im Punkte (x_1, x_2) . Bei Gl.(68) handelt es sich um das Fließkriterium nach v. Mises im ebenen Fall.

Für den Sonderfall eines linearen Temperaturfeldes $t(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2$ verschwindet die rechte Seite von Gl.(67). Es treten keine Wärmespannungen auf, man vergleiche die Abschnitte 7.5 und 8.2.

9 2D-1K-ES-Zustände bei Drehsymmetrie und gegebener $\varepsilon_q(\mathbf{r})$ -Verteilung

Wir betrachten jetzt zweidimensionale bzw. zweiachsige Eigenspannungszustände, die nur von einer Koordinate abhängen. Solche 2D-1K-ES-Zustände treten bei drehsymmetrischen Problemen auf. Die Grundgleichungen des 2D-2K-ES-Problems, es handelt sich um die Gln. (56) bis (59), werden daher zweckmäßig in Polarkoordinaten (r, φ) formuliert, man vergleiche dazu die entsprechenden Gleichungen für ebene Lastspannungszustände im r - φ -Koordinatensystem [2,4,5,30-35]. Bei Drehsymmetrie tritt keine φ -Abhängigkeit auf. Außerdem verschwinden die Schubeigenspannungen und alle Schubverformungen. Das drehsymmetrische 2D-1K-ES-Problem wird dann durch folgende Grundgleichungen beschrieben:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^q, \quad \varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \varepsilon_t^q, \quad (69)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u_r}{r}, \quad (70)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0, \quad (71)$$

$$\varepsilon_r^e = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t), \quad \varepsilon_t^e = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r). \quad (72)$$

Die Gln. (69) sind die Dehnungsbeziehungen in radialer und in tangentialer Richtung. Bei den Gln. (70) handelt es sich um die Gleichungen der Kinematik, mit u_r als Verschiebung in radialer Richtung. Gl. (71) ist die Kräftegleichgewichtsbedingung in radialer Richtung, mit σ_r und σ_t als gesuchte radiale und tangentiale Eigenspannungskomponenten. Die Gln. (72) beschreiben das Stoffverhalten. Mit dem Gleichungssystem (69) bis (72) stehen sieben Gleichungen für sieben unbekannte Funktionen zur Verfügung. Diese hängen nur vom Radius r ab.

Wir betrachten hier den in der Regel auftretenden Fall, daß die in radialer und tangentialer Richtung eingepprägten Dehnungen gleich groß sind. Demnach gilt für die Eigenspannungsquelle

$$\varepsilon_r^q(r) = \varepsilon_t^q(r) = \varepsilon_q(r). \quad (73)$$

In Bild 8 ist der gesuchte drehsymmetrische 2D-1K-ES-Zustand mit einer diesen Eigenspan-

nungszustand verursachenden Eigenspannungsquelle $\varepsilon_q(r)$ dargestellt.

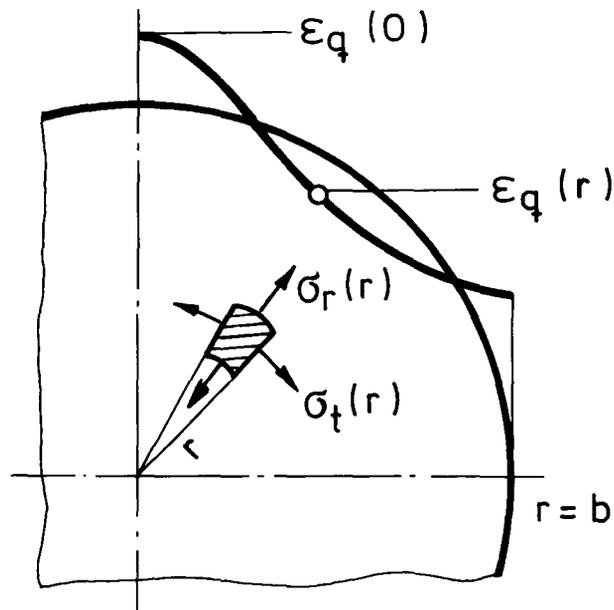


Bild 8: Drehsymmetrischer 2D-1K-ES-Zustand mit Eigenspannungsquelle

Wir lösen jetzt das Gleichungssystem (69) bis (72) unter Beachtung von Gl.(73) nach den gesuchten Eigenspannungskomponenten σ_r und σ_t auf. Zunächst setzen wir die Gln.(72) in die Gln.(69) ein. Aus diesen beiden neuen Gleichungen folgt, wenn man sie nach σ_r und σ_t auflöst:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \{ \varepsilon_r + \nu \varepsilon_t - (1 + \nu) \varepsilon_q \} , \quad (74)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \{ \varepsilon_t + \nu \varepsilon_r - (1 + \nu) \varepsilon_q \} .$$

Einsetzen der Gln.(74) in die Gleichgewichtsbedingung Gl.(71) liefert:

$$r \frac{d}{dr} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) + (1 - \nu) (\varepsilon_r - \varepsilon_t) = (1 + \nu) r \frac{d\varepsilon_q}{dr} . \quad (75)$$

In Gl. (75) werden die Gln. (70) eingesetzt. Damit erhält man:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = (1 + \nu) \frac{d\varepsilon_q}{dr}, \quad (76)$$

oder identisch:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d(r u_r)}{dr} \right\} = (1 + \nu) \frac{d\varepsilon_q}{dr}. \quad (77)$$

Mit der Gl. (77) ist das drehsymmetrische 2D-1K-ES-Problem auf eine inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgeführt. Die zweimalige Integration der Gl. (77) liefert die allgemeine Lösung für das radiale Verschiebungsfeld $u_r(r)$, welches durch die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_q(r)$ induziert wird, nämlich

$$u_r(r) = (1 + \nu) \frac{1}{r} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (78)$$

mit C_1 und C_2 als Integrationskonstante. Aus Gl. (78) folgen mit den Gln. (70) die Gesamtdehnungen in radialer und tangentialer Richtung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du_r}{dr} = -(1 + \nu) \frac{1}{r^2} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr + (1 + \nu) \varepsilon_q + C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \\ \varepsilon_t &= \frac{u_r}{r} = +(1 + \nu) \frac{1}{r^2} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr + C_1 + \frac{C_2}{r^2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Setzt man die Gln. (79) in die Gln. (74) ein, erhält man die allgemeine Lösung für die gesuchten Eigenspannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= -E \frac{1}{r^2} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr + \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ C_1 (1 + \nu) - C_2 (1 - \nu) \frac{1}{r^2} \right\}, \\ \sigma_t(r) &= +E \frac{1}{r^2} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr - E \varepsilon_q + \frac{E}{1 - \nu^2} \left\{ C_1 (1 + \nu) + C_2 (1 - \nu) \frac{1}{r^2} \right\}. \end{aligned} \quad (80)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 stammen aus der Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung Gl. (76) bzw. Gl. (77). Sie können mit Hilfe von zwei Randbedingungen bestimmt werden. Da im Scheibenmittelpunkt $r = 0$ keine Verschiebung auftreten

kann, gilt $u_r(0) = 0$. Außerdem muß die Scheibenberandung spannungsfrei sein, man vergleiche die Abschnitte 7.2 und 8.2. Daher muß die Eigenspannungskomponente σ_r für $r = b$ verschwinden, siehe Bild 8. Es gilt $\sigma_r(b) = 0$. Demnach lauten die beiden Randbedingungen

$$u_r(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_r(b) = 0 . \quad (81)$$

Aus der ersten Randbedingung (81) folgt mit Gl.(78):

$$u_r(0) = (1 + \nu) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \varepsilon_q r \, dr}{r} + C_1 \cdot 0 + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_2}{r} = 0 . \quad (82)$$

Nach der l'Hospital'schen Regel, siehe z.B. [36], verschwindet der erste Limes in Gl.(82). Um Gl.(82) zu erfüllen, muß demnach $C_2 = 0$ sein. Damit ist die erste der beiden Randbedingungen (81) ausgewertet.

Aus der zweiten Randbedingung (81) folgt mit σ_r aus den Gln.(80) und mit $C_2 = 0$:

$$\sigma_r(b) = -E \frac{1}{b^2} \int_0^b \varepsilon_q r \, dr + \frac{E}{1 - \nu} C_1 = 0 ,$$

und daraus

$$C_1 = (1 - \nu) \frac{1}{b^2} \int_0^b \varepsilon_q r \, dr .$$

Einsetzen der Integrationskonstanten C_1 und C_2 in die Gln.(80) liefert endgültig die gesuchten Eigenspannungskomponenten als Funktion der Eigenspannungsquelle $\varepsilon_q(r)$:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= E \left\{ \frac{1}{b^2} \int_0^b \varepsilon_q r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr \right\} , \\ \sigma_t(r) &= E \left\{ \frac{1}{b^2} \int_0^b \varepsilon_q r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r \varepsilon_q r \, dr - \varepsilon_q(r) \right\} . \end{aligned} \quad (83)$$

Für $r \rightarrow 0$ müssen sich für $\sigma_r(0)$ und $\sigma_t(0)$ eindeutige Werte ergeben. Wir berechnen deshalb nach der Regel von l'Hospital den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \varepsilon_q r \, dr}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_q(r)r}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_q(r)}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon_q(0) , \quad (84)$$

mit $\varepsilon_q(0)$ als Extradehnung im Scheibenmittelpunkt, siehe Bild 8. Mit Gl.(84) ergibt sich für die Eigenspannungen im Scheibenmittelpunkt $r = 0$:

$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = E\left\{\frac{1}{b^2} \int_0^b \varepsilon_q r \, dr - \frac{1}{2} \varepsilon_q(0)\right\} . \quad (85)$$

Mit den Gln.(83) und (85) ist das drehsymmetrische 2D-1K-ES-Problem vollständig gelöst.

9.1 Wärmepunkt $t(r)$

Bei punktförmiger Erwärmung einer Scheibe bildet sich ein drehsymmetrisches Temperaturfeld $t(r)$ aus. Dadurch wird die Eigenspannungsquelle

$$\varepsilon_q(r) = \alpha\{t(r) - t_0\} = \alpha T(r) \quad (86)$$

eingepägt. Einsetzen von Gl.(86) in die Gln.(83) liefert für die Wärmespannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \alpha E \left\{ \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r \, dr \right\} , \\ \sigma_t(r) &= \alpha E \left\{ \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r \, dr - T(r) \right\} . \end{aligned} \quad (87)$$

Die Wärmespannungen im Scheibenmittelpunkt $r = 0$ betragen nach Gl.(85):

$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \alpha E \left\{ \frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r \, dr - \frac{1}{2} T(0) \right\} , \quad (88)$$

mit $T(0) = t(0) - t_0$ als Temperaturdifferenz im Scheibenmittelpunkt. In den Gln.(87) und (88) kann statt $T(r)$ und $T(0)$ auch $t(r)$ und $t(0)$ eingesetzt werden, da die Terme mit der konstanten Bezugstemperatur t_0 herausfallen und aus diesem Grunde keinen Wärmespannungsanteil verursachen. Man vergleiche hierzu die Bemerkungen zur Gl.(16) und Abschnitt 3.3.

Die durch $t(r)$ verursachten Wärmespannungen nach den Gln.(87) dürfen die Streckgrenze nicht erreichen. Demnach gilt die Warmstreckgrenzenbedingung nach Gl.(68). Da im vorliegenden drehsymmetrischen Fall die Schubeigenspannungen verschwinden, liegt mit σ_r und σ_t

nach den Gln.(87) im ganzen r -Bereich bereits ein reiner Hauptspannungszustand vor. Aus diesem Grunde lautet die Bedingung nach Gl.(68) für den vorliegenden drehsymmetrischen Warmespannungszustand:

$$\sigma_F\{t(r)\} > (\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r\sigma_t)^{\frac{1}{2}} . \quad (89)$$

Im Scheibenmittelpunkt gilt $\sigma_r(0) = \sigma_t(0)$, siehe Gl.(88). Damit lautet die Bedingung (89) für den Scheibenmittelpunkt

$$\sigma_F\{t(0)\} > \sigma_r(0) . \quad (90)$$

Mit den Bedingungen (89) und (90) wird sichergestellt, daß die nach den Gln.(87) und (88) berechneten Warmespannungen die Warmstreckgrenze nicht erreichen.

10 2D-1K-ES-Zustände in ebenen n-fach geschichteten Werkstoffen bei vollständiger Anisotropie der Einzelschichten und gegebenem $\varepsilon_a^q(\mathbf{x}_3)$ -Feld

Ebene metallische Schichtwerkstoffe können z.B. durch Warmwalzen, Sprengplattieren oder Auftragsschweißen hergestellt werden. Außerdem wird auf die verschiedenen faserverstärkten Werkstoffe hingewiesen, wobei besonders faserverstärkte Kunststoffe eine Rolle spielen. Die Faserverstärkung führt zu richtungsabhängigen mechanischen und thermischen Werkstoffeigenschaften, also zur Anisotropie.

Um die Faserverstärkung allgemein zu berücksichtigen, sollen in diesem Abschnitt die möglichen Eigenspannungszustände in einem ebenen n-fach geschichteten Werkstoff bei vollständiger Anisotropie der Einzelschichten für eine gegebene Eigenspannungsquelle berechnet werden. Aus diesen allgemeinen Gleichungen können dann die für isotrope Schichtwerkstoffe gültigen Beziehungen hergeleitet werden. Ein vollständig anisotropes Werkstoffverhalten kann durch das generalisierte Hooke'sche Gesetz beschrieben werden. Wir führen dieses Gesetz in der nach den Spannungen aufgelösten Form

$$\sigma_a = c_{ab}\varepsilon_b, \quad (a, b = 1 \text{ bis } 6) \quad (91)$$

ein, siehe [2,37], mit

$$\sigma_a = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \varepsilon_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (92)$$

als die symmetrischen Tensoren der Spannungen und Dehnungen in Form von Spaltenmatrizen. In der zweiten Gl. (92) ist $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$, $\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$ und $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$.

Die 6×6 -Matrix c_{ab} in Gl. (91) heißt Matrix der Elastizitätskonstanten. Mit Hilfe von Energiebetrachtungen kann die Symmetrie von c_{ab} nachgewiesen werden, siehe [3,4,33,37]. Demnach

benötigt man zur vollständigen Beschreibung einer allgemeinen Anisotropie 21 Werkstoffkennwerte. Für Isotropie werden dagegen nur zwei Werkstoffkonstante benötigt: E und G , oder E und ν , oder G und ν .

Bei der Herstellung ebener Schichtwerkstoffe oder bei Belastung derselben z.B. durch eine Temperaturänderung (dies führt zu dem bekannten Bimetalleffekt) entstehen Eigenspannungen. Diese hängen im allgemeinen nicht von den Flächenkoordinaten ab. Legt man die Schichtungsebenen parallel zur x_1 - x_2 -Ebene, hängen die gesuchten Eigenspannungen nur von der x_3 -Koordinate ab. Es liegt damit ein zweiachsiger parallel zu den Schichtungsebenen wirkender und nur von der Dickenrichtung x_3 abhängiger 2D-1K-ES-Zustand vor. Ausgehend von der in den Gln.(91)und (92) eingeführten Indizierung und in Anlehnung an die Gln.(54) und (55) können dann der beschriebene ebene Eigenspannungszustand und die wirksame Eigenspannungsquelle wie folgt geschrieben werden:

$$\sigma_a(x_3) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \varepsilon_a^q(x_3) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^q \\ \varepsilon_2^q \\ \varepsilon_6^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^q \\ \varepsilon_{22}^q \\ \gamma_{12}^q \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Wie aus den Gln.(93) ersichtlich, laufen die Indizes a , b über 1, 2 und 6. Dies gilt auch für alle nachfolgenden Gleichungen dieses Abschnitts. Der beschriebene Eigenspannungszustand ist in Bild 9 an einem Scheiben- bzw. Plattenelement eines zweifach geschichteten Werkstoffs veranschaulicht.

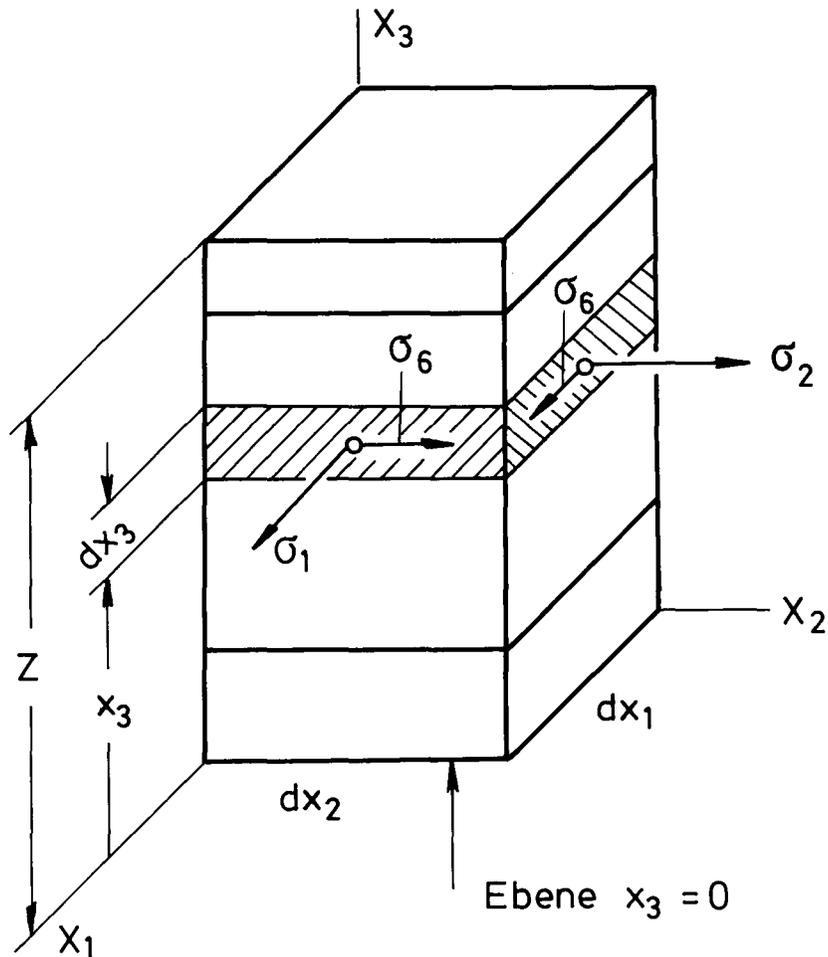


Bild 9: Eigenspannungszustand $\sigma_a(x_3)$ am zweifach geschichteten Scheibenelement $dx_1 \times dx_2 \times Z$

10.1 Die Gleichungen zur Berechnung der Eigenspannungen $\sigma_a(x_3)$

Zur Behandlung des vorliegenden Problems muß man die Grundgleichungen für den kombinierten Scheiben-Plattenspannungszustand unter Berücksichtigung der Eigenspannungsquelle $\epsilon_a^q(x_3)$ wie in den vorangegangenen Abschnitten formulieren und in geeigneter Weise nach den gesuchten Eigenspannungen auflösen. Auf die Wiedergabe dieser Grundgleichungen und der Auflösungsprozeduren wird hier verzichtet, siehe [38,39]. Stattdessen geben wir hier das endgültige Gleichungssystem an, dessen Auflösung bei gegebener Eigenspannungsquelle $\epsilon_a^q(x_3)$

direkt zu dem gesuchten ebenen Eigenspannungszustand $\sigma_a(x_3)$ führt:

$$0 = \bar{\varepsilon}_b \int_0^Z c_{ab}^* dx_3 + \kappa_b \int_0^Z x_3 c_{ab}^* dx_3 - \int_0^Z c_{ab}^* \varepsilon_b^q dx_3, \quad (94)$$

$$0 = \bar{\varepsilon}_b \int_0^Z x_3 c_{ab}^* dx_3 + \kappa_b \int_0^Z x_3^2 c_{ab}^* dx_3 - \int_0^Z x_3 c_{ab}^* \varepsilon_b^q dx_3, \quad (95)$$

$$\sigma_a = c_{ab}^* (\bar{\varepsilon}_b + x_3 \kappa_b - \varepsilon_b^q), \quad (96)$$

$$(a, b = 1, 2, 6).$$

Zunächst werden die im Gleichungssystem (94) bis (96) auftretenden Größen erklärt. $\bar{\varepsilon}_b$ ist der Tensor der Gesamtdehnung in der Ebene $x_3 = 0$, siehe Bild 9:

$$\bar{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix}. \quad (97)$$

Bei κ_b handelt es sich um den Krümmungstensor der Ebene $x_3 = 0$:

$$\kappa_b = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa_{22} \\ -\kappa_{11} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Im Hinblick auf die in dieser Arbeit noch behandelte Zerlegungsmethode für geschichtete Platten wird bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß $\bar{\varepsilon}_b$ z.B. mit einer aufgeklebten Dehnungsmeßstreifenrosette und κ_b z.B. mit Hilfe eines Krümmungsmeßgerätes in der Ebene $x_3 = 0$ meßbar sind.

Die Matrix c_{ab}^* ist die von der Dickenkoordinate x_3 abhängige an das geschichtete Kontinuum angepaßte Matrix der Elastizitätskonstanten:

$$c_{ab}^*(x_3) = \frac{\begin{vmatrix} c_{ab} & c_{a3} & c_{a4} & c_{a5} \\ c_{3b} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{4b} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{5b} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix}}, \quad (a, b = 1, 2, 6). \quad (99)$$

Wegen der Symmetrie von c_{ab} ist auch c_{ab}^* symmetrisch. Die Gesamtdehnung ε_b in einer beliebigen Plattenebene x_3 berechnet sich über die Gln.(97) und (98) zu

$$\varepsilon_b(x_3) = \bar{\varepsilon}_b + x_3 \kappa_b, \quad (b = 1, 2, 6). \quad (100)$$

Wir kommen zurück auf das Gleichungssystem (94) bis (96). Für einen bestimmten Schichtwerkstoff ist die Matrix $c_{ab}^*(x_3)$ nach Gl.(99) berechenbar. Bei gegebener Eigenspannungsquelle $\varepsilon_b^q(x_3)$ stehen dann mit dem Gleichungssystem (94) und (95) insgesamt sechs lineare Gleichungen zur Bestimmung der insgesamt sechs Komponenten von $\bar{\varepsilon}_b$ und κ_b zur Verfügung. Löst man das inhomogene lineare Gleichungssystem (94) und (95) nach $\bar{\varepsilon}_b$ und κ_b auf, läßt sich der durch die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_b^q(x_3)$ induzierte ebene Eigenspannungszustand $\sigma_a(x_3)$ nach Gl.(96) direkt berechnen. Mit dem Gleichungssystem (94) bis (96) liegt damit die explizite Lösung des 2D-1K-ES-Problems in n-fach geschichteten anisotropen Werkstoffen vor.

10.2 Der allgemeine Bimetalleffekt

Erwärmt man einen Bimetallstreifen, treten Spannungen und Verformungen auf. Man bezeichnet dies allgemein als Bimetalleffekt. Mit Hilfe des Gleichungssystems (94) bis (96) kann der allgemeine Bimetalleffekt einer n-fach geschichteten Platte (zweidimensionales n-Metall) bei Anisotropie berechnet werden.

Bei von den Ortskoordinaten x_i unabhängiger Erwärmung der Platte von t_0 auf t_1 läßt sich die Eigenspannungsquelle ε_a^q wie folgt berechnen:

$$\varepsilon_a^q(x_3) = \alpha_a(x_3)(t_1 - t_0), \quad (101)$$

mit $\alpha_a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6)$ als transponierte Spaltenmatrix der Wärmeausdehnungskoeffizienten für thermische Anisotropie. Einsetzen von Gl.(101) in das inhomogene lineare Gleichungssystem (94) und (95) führt nach Auflösung zu den durch die Erwärmung verursachten Deformationen $\bar{\epsilon}_b$ und κ_b in der Ebene $x_3 = 0$, siehe Bild 9. Die durch die Temperaturänderung erzeugten Wärmespannungen berechnen sich dann aus den drei Gleichungen (96). Die Gesamtdehnungen in der Platte als Funktion von x_3 ergeben sich schließlich aus den Gln.(100). Damit sind alle Größen bekannt.

11 2D-1K-ES-Zustände in der homogenen anisotropen Platte

In diesem Abschnitt sollen die allgemein gültigen Gleichungen des Abschnitts 10 für ungeschichtete bzw. homogene Platten spezialisiert werden. Die allgemeine Anisotropie des Werkstoffs soll vorerst erhalten bleiben. Es werden also die 2D-1K-ES-Zustände in ungeschichteten aber anisotropen Platten berechnet. Diese Annahmen treffen z.B. auf faserverstärkte und in Dickenrichtung homogen aufgebaute Kunststoffplatten zu.

Bei der homogenen Platte hängen die Komponenten der angepaßten Matrix der Elastizitätskonstanten c_{ab}^* nicht mehr von x_3 ab. In dem Gleichungssystem (94) und (95) können deshalb die c_{ab}^* -Matrizen vor die Integrale gesetzt werden. Anschließend Multiplikation mit der Kehrmatrix $(c_{ab}^*)^{-1}$ ermöglicht die direkte Auflösung des Gleichungssystems (94) und (95) nach $\bar{\epsilon}_b$ und κ_b . Nach einer Zwischenrechnung erhält man

$$\bar{\epsilon}_b = \frac{4}{Z} \int_0^Z \epsilon_b^q dx_3 - \frac{6}{Z^2} \int_0^Z x_3 \epsilon_b^q dx_3, \quad (102)$$

$$\kappa_b = -\frac{6}{Z^2} \int_0^Z \epsilon_b^q dx_3 + \frac{12}{Z^3} \int_0^Z x_3 \epsilon_b^q dx_3, \quad (103)$$

mit Z als Plattendicke, siehe Bild 9. Setzt man die Gln.(102) und (103) in die Gl.(96) ein, ergibt sich

$$\sigma_a(x_3) = c_{ab}^* \left\{ \left(\frac{4}{Z} - \frac{6x_3}{Z^2} \right) \int_0^Z \epsilon_b^q dx_3 + \left(\frac{12x_3}{Z^3} - \frac{6}{Z^2} \right) \int_0^Z x_3 \epsilon_b^q dx_3 - \epsilon_b^q(x_3) \right\}. \quad (104)$$

Dies sind die gesuchten Eigenspannungen in Abhängigkeit von der Eigenspannungsquelle $\epsilon_b^q(x_3)$ für homogene anisotrope Platten.

Für eine homogene Platte legt man das Koordinatensystem zweckmäßig in die Mittelebene der Platte. In Anlehnung an die Bilder 3 und 4 und im Hinblick auf Gl.(13) bezeichnen wir jetzt die Dickenkoordinate bezogen auf die Mittelebene mit y und die Plattendicke mit $2H$. Es gilt dann:

$$Z = 2H, \quad x_3 = y + H, \quad dx_3 = dy. \quad (105)$$

Wendet man die Transformation nach Gl.(105) konsequent auf Gl.(104) an, ergibt sich für die

Eigenspannungen

$$\sigma_a(y) = c_{ab}^* \left\{ \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} \varepsilon_b^q dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} y \varepsilon_b^q dy - \varepsilon_b^q(y) \right\} . \quad (106)$$

Der Aufbau von Gl. (106) entspricht formal dem von Gl. (13). Gl. (106) ist die zweidimensionale Erweiterung der Gl. (13) unter Berücksichtigung von allgemeinen anisotropen Werkstoffeigenschaften. Es wird allerdings darauf hingewiesen, daß der Doppelindex b über 1,2,6 zu summieren ist. Daher unterscheidet sich Gl. (106) in ausgeschriebener Form und wegen der anisotropen elastischen Konstanten c_{ab}^* doch beträchtlich von Gl. (13).

12 2D-1K-ES-Zustände in der homogenen isotropen Platte

In Gl. (106) beinhaltet die angepaßte Matrix der Elastizitätskonstanten c_{ab}^* noch die vollständige Werkstoffanisotropie. Spezialisiert man c_{ab}^* für Isotropie, erhält man aus Gl. (106) die Bestimmungsgleichung des ebenen Eigenspannungszustandes für die homogene und isotrope Platte.

Die Matrix c_{ab}^* berechnet sich nach Gl. (99) aus der Matrix c_{ab} . Daher benötigt man zunächst die Matrix der Elastizitätskonstanten c_{ab} für Isotropie. Diese ergibt sich aus dem für Isotropie gültigen Stoffgesetz Gl. (39). Löst man Gl. (39) nach den Spannungen σ_{ij} auf, und beachtet man den Zusammenhang $E = 2G(1 + \nu)$, ergibt sich

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \right), \quad (107)$$

wobei über den Doppelindex k von 1 bis 3 summiert wird. Ausschreiben der Gl. (107) für $i, j = 1, 2, 3$ liefert die sechs bekannten Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen für den isotropen Hooke'schen Körper. Bringt man diese sechs Gleichungen dann in die Form der Gl. (91), ergibt sich daraus die Matrix c_{ab} für den isotropen Körper zu:

$$c_{ab} = \frac{2G}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Mit Gl. (108) läßt sich über Gl. (99) die Matrix c_{ab}^* berechnen. Man erhält:

$$c_{ab}^* = \frac{G}{1 - \nu} \begin{bmatrix} 2 & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix}. \quad (109)$$

Dies ist die angepaßte Matrix der Elastizitätskonstanten für isotropes Werkstoffverhalten. Ein-

setzen von Gl. (109) in Gl. (106) liefert:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} (\varepsilon_1^q + \nu \varepsilon_2^q) dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} (\varepsilon_1^q + \nu \varepsilon_2^q) y dy - (\varepsilon_1^q + \nu \varepsilon_2^q) \right\}, \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} (\varepsilon_2^q + \nu \varepsilon_1^q) dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} (\varepsilon_2^q + \nu \varepsilon_1^q) y dy - (\varepsilon_2^q + \nu \varepsilon_1^q) \right\}, \\ \sigma_6 &= G \left\{ \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} \varepsilon_6^q dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} \varepsilon_6^q y dy - \varepsilon_6^q \right\}.\end{aligned}\quad (110)$$

Nach den Gln. (110) läßt sich der in einer homogenen und isotropen Platte herrschende ebene Eigenspannungszustand $\sigma_a(y)$ als Funktion der Eigenspannungsquelle $\varepsilon_a^q(y)$ bestimmen. Die aus Abschnitt 10 übernommene 1-2-6-Indizierung kann in Anlehnung an Gl. (93) in die gebräuchlichere Doppelindizierung 11-22-12 umgeschrieben werden.

Wärmespannungen

Durch Einwirkung einer von den Flächenkoordinaten unabhängigen Temperaturverteilung $t(y)$ wird die Eigenspannungsquelle

$$\varepsilon_1^q(y) = \varepsilon_2^q(y) = \alpha \{t(y) - t_0\} = \alpha T(y) \quad \text{und} \quad \varepsilon_6^q = 0 \quad (111)$$

eingepägt. Einsetzen von Gl. (111) in Gl. (110) liefert die durch $t(y)$ induzierten Wärmespannungen

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{2H} \int_{-H}^{+H} T(y) dy + \frac{3y}{2H^3} \int_{-H}^{+H} T(y) y dy - T(y) \right\}, \quad (112)$$

wobei $T(y)$ wieder durch $t(y)$ ersetzt werden kann. Der zweiachsige Wärmespannungszustand unterscheidet sich gegenüber dem einachsigen Fall durch den Faktor $1/(1-\nu)$, man vergleiche Gl. (112) mit Gl. (16). Da die Schubeigenspannungen σ_6 verschwinden, liegt ein Hauptspannungszustand vor, für den die Warmstreckgrenzenbedingung nach Gl. (68) erfüllt sein muß. Nach Gl. (112) ist $\sigma_1 = \sigma_2$. Damit ergibt sich aus Gl. (68):

$$\sigma_F \{t(y)\} > \sigma_1(y). \quad (113)$$

Gl.(113) stellt sicher, daß in keiner Plattenebene y die Warmstreckgrenze erreicht wird. Die Wärmespannungen entstehen dann rein elastisch, also ohne Ausbildung von plastischen Deformationen. Nur in diesem Falle ist die Anwendung von Gl.(112) gerechtfertigt.

13 Experimentelle Verfahren zur Bestimmung von Eigenspannungen

Zu Anfang dieses Abschnittes gestatten wir uns einen kurzen Rückblick. Bei den bisherigen Betrachtungen gingen wir davon aus, daß für den jeweils vorliegenden Fall die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_{ij}^q(x_i)$ bekannt ist. Dies ermöglichte uns die vollständige Formulierung der Grundgleichungen zur Bestimmung der herrschenden Eigenspannungen. Diese Grundgleichungen ergaben sich aus den Gleichungen der Kinematik, der Statik und aus dem Stoffgesetz für das linear elastische Kontinuum, wobei die Eigenspannungsquelle als zusätzlicher Dehnungsanteil eingeführt wurde und die kennzeichnenden Merkmale von Eigenspannungszuständen, nämlich verschwindende spezifische Volumenkräfte und spannungsfreie Gesamtoberfläche, berücksichtigt wurden. Eigenspannungszustände, die nur von einer Koordinate abhängen, führten auf gewöhnliche Differentialgleichungen. In diesen Fällen gelang auch die explizite Auflösung nach den gesuchten Eigenspannungen, die sich als eindeutige Funktion der eingepprägten Eigenspannungsquelle ergaben. Wir fassen zusammen: Die bisherige Betrachtungsweise erlaubt uns bei bekannter Eigenspannungsquelle $\varepsilon_{ij}^q(x_i)$ die vollständige Beschreibung, und damit auch bei Heranziehung geeigneter analytischer oder numerischer Verfahren die Berechnung beliebiger Eigenspannungszustände.

In den meisten Herstellungsprozessen und Fertigungsverfahren werden die Bauteile mit Eigenspannungen "beladen". Als Beispiele seien genannt: Walzen, Gießen, Pressen, Schmieden, Ziehen, Richten, Härten, Schweißen, Auftragsschweißen, Brennschneiden, Spreng- und Walzplattieren, Drehen, Fräsen, Hobeln und Schleifen. Die durch den jeweiligen Fertigungsprozeß eingepprägten Eigenspannungsquellen entziehen sich aber meistens unserer Kenntnis. Daher kann man sagen, daß in vielen praktischen Fällen die durch das jeweilige Fertigungsverfahren eingebrachten Eigenspannungsquellen, die den Eigenspannungszustand erzeugen, nicht bekannt sind.

Als Beispiel betrachten wir eine Unterpulver-Auftragsschweißung von austenitischem Stahl auf einen dickwandigen Grundwerkstoff aus Feinkornbaustahl, siehe [40,41]. Dabei entsteht durch die plastischen Deformationen des Grundwerkstoffes, durch die Umwandlungsvorgänge in der Wärmeeinflußzone des Grundwerkstoffes und durch die unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Grundwerkstoff und Plattierung ein resultierender Eigenspannungszustand. Für den Fall, daß man eine nachträgliche Wärmebehandlung vornimmt, wird der ursprüngliche

durch das Schweißplattieren induzierte Eigenspannungszustand nochmals umgelagert.

Es ist offensichtlich, daß man für den im Beispiel geschilderten komplexen Vorgang der Eigenspannungsentstehung nicht in der Lage ist, auswertbare Informationen über die Eigenspannungsquelle zu erhalten. Für das genannte Beispiel und in vielen praktischen Fällen mit ähnlich komplexen Ursachen für die Eigenspannungsbildung versagen deshalb die bislang in dieser Arbeit angewendeten Methoden, über $\varepsilon_{ij}^g(x_i)$ die Eigenspannungszustände zu berechnen.

Zur Bestimmung von Eigenspannungszuständen in Bauteilen ohne Kenntnis der Eigenspannungsquelle wurden deshalb zahlreiche und zum Teil sehr unterschiedlich arbeitende experimentelle Eigenspannungsmessverfahren entwickelt. Diese Verfahren werden im folgenden aufgezählt, siehe [42]:

1. Abtrage- oder Zerlegemethoden,
2. Nutverfahren,
3. Ringkernverfahren,
4. Bohrlochmethode,
5. Tandemfreischnittverfahren,
6. Röntgenografie,
7. Neutronenbeugung,
8. Spannungsoptik und Moiréverfahren,
9. Ultraschallverfahren und
10. Magnetische Verfahren.

Die Methoden 1 bis 5 werden gelegentlich auch als mechanische Verfahren bezeichnet. Bei 6 und 7 handelt es sich um Beugungsverfahren. Die Methoden unter 8 heißen auch optische Verfahren. Die mechanischen Verfahren 1 bis 5 kennzeichnen nur die Art und Weise, mit der man durch spanabhebende Bearbeitung oder durch chemischen oder funkenerosiven Abtrag das Gleichgewicht des eigenspannungsbehafteten Körpers stört, um dadurch am Restkörper meßbare Verformungsreaktionen auszulösen. Dagegen bezeichnen die Verfahren 6 bis 10 nur die Meßmethoden. So kann man beispielsweise die Abtragemethode 1 anwenden und die dadurch ausgelösten Verformungen des Restkörpers mit Hilfe der Moirétechnik 8 messen, siehe [43]. Die gebräuchliche Einteilung der Eigenspannungsmessmethoden nach der Aufzählung 1 bis 10 ist demnach nicht streng systematisch.

Das Thema dieser Arbeit ist die Beschreibung von Eigenspannungszuständen aus der Sicht der Kontinuumsmechanik. Daher wird auf die aufgezählten experimentellen Methoden zur Eigenspannungsbestimmung im einzelnen nicht eingegangen. Dies wäre auch angesichts der Methodenvielfalt und der unterschiedlichen physikalischen Prinzipien der Meßmethoden eine viel zu umfangreiche Aufgabe.

Wir wollen in dieser Arbeit aber die Abtragungsmethode behandeln, da diese Methode auf die Grundlagen der Elastizitätstheorie in besonderem Maße angewiesen ist.

14 Abtragungsmethode

14.1 Abtragungsmethode für 1D-1K- und 2D-1K-ES-Verteilungen

Wir stellen uns einen Balken nach Bild 5 oder eine Platte nach Bild 9 vor. Der herrschende Eigenspannungszustand soll beim Balken nur von der Höhenkoordinate y (1D-1K-ES-Verteilung) und bei der Platte nur von der Dickenkoordinate x_3 (2D-1K-ES-Verteilung) abhängen, man vergleiche die Bilder 5 b und 9.

Bei der Abtragungsmethode wird der eigenspannungsbehaftete Balken oder die eigenspannungsbehaftete Platte in hinreichend dünnen Schichten Schritt für Schritt abgetragen. Die in den abgetragenen Schichten ausgelösten Eigenspannungen verursachen am Restbalken oder an der Restplatte Verformungsreaktionen, die man nach jedem Abtragungsschritt als Krümmung oder Dehnung mit Hilfe eines geeigneten Meßverfahrens registriert. Bei Balken und Platte mißt man diese Verformungsreaktionen zweckmäßig auf der der Abtragung gegenüberliegenden Seite (Meßseite).

Der Zusammenhang zwischen den in den abgetragenen Schichten herrschenden ursprünglichen Eigenspannungen (das sind die Eigenspannungen, die in diesen Schichten im unzerlegten Original-Bauteil wirken) und den registrierten Formänderungen am Restkörper wird durch die für das jeweilige Bauteil geltenden Grundgleichungen der Elastizitätstheorie hergestellt. Diese Gleichungen nennt man Auswertgleichungen. Die Auswertgleichungen sind für das jeweils vorliegende Bauteil abzuleiten oder dem Schrifttum zu entnehmen. Demnach ermöglichen die Auswertgleichungen die Umrechnung der im Abtragungversuch ermittelten Verformungsreaktionen in die gesuchten Eigenspannungen.

Wie ersichtlich, besteht das Abtrageverfahren aus einem experimentellen Teil (Bauteilabtragung und Messung der ausgelösten Verformungen) und aus einem rechnerischen Teil (Berechnung der Eigenspannungen über die Auswertgleichungen). Aus diesem Grunde bezeichnen wir die Methode derart ermittelter Eigenspannungen auch als experimentell-rechnerische Methode der Bauteilabtragung oder als experimentell-rechnerische Methode der Bauteilzerlegung durch Abtragen.

Die Abtragungsmethode ermöglicht die Bestimmung der Eigenspannungsverteilung über der Höhe bzw. über der Dicke des Bauteils. Man spricht in diesem Zusammenhang auch ganz allgemein

von der Tiefenverteilung der Eigenspannungen. Es wird darauf hingewiesen, daß der Ermittlung der Tiefenverteilung allgemein große Bedeutung zukommt, siehe [42]. Die Ermittlung der Eigenspannungsverteilung bezeichnet man auch als vollständige Eigenspannungsanalyse, im Gegensatz etwa zur Eigenspannungsbestimmung nur an der Bauteiloberfläche.

14.2 Abtragungsmethode für 1D-2K-ES-Verteilungen

Im vorstehend beschriebenen Fall für Balken und Platte hängen die Eigenspannungen nur von einer Koordinate ab. Dementsprechend ist in einer abgetragenen Schicht der ausgelöste Eigenspannungszustand nicht veränderlich.

Betrachtet man dagegen einen durch Kehlnahtschweißen hergestellten T-Träger, so hängen die durch das Schweißen eingebrachten und in Längsrichtung wirkenden Eigenspannungen von den beiden Querschnittskordinaten ab. Es liegt demnach eine 1D-2K-ES-Verteilung vor. In diesem Falle ist der in einer gedachten Schicht wirkende Eigenspannungszustand veränderlich. Daher stellen die durch Schichtenabtrag ausgelösten Dehnungsreaktionen am Restkörper keinen eindeutigen Bezug zu den ursprünglichen Eigenspannungen in der abgetragenen Schicht her.

Man muß deshalb im Falle des geschweißten T-Trägers mit 1D-2K-ES-Verteilung die Abtragung des Querschnittes durch hinreichend kleine Flächenstücke vornehmen. Für diese können dann die im jeweiligen Flächenstück wirkenden ursprünglichen Eigenspannungen über die abzuleitenden Auswertgleichungen aus den gemessenen zugehörigen Dehnungsreaktionen bestimmt werden.

Im Falle des T-Trägers besteht eine Flächensymmetrieachse, und die abzuleitenden Auswertgleichungen werden aus den Grundgleichungen der sogenannten “geraden Biegung” ermittelt. Bei Profilen ohne Flächensymmetrieachse (z.B. L- oder Z-Profile) müssen zur Ableitung der Auswertgleichungen die Grundgleichungen der sogenannten “schiefen Biegung” herangezogen werden, siehe z.B. [44]. Wie aus diesen kurzen Hinweisen nochmals ersichtlich, benötigt man zur Auswertung der Abtragungsmethode die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.

14.3 Einfluß der Abtrageschrittweite auf die Bestimmungsgenauigkeit der Eigenspannungen

Die nach dem Abtrageverfahren ermittelten Eigenspannungen werden als Mittelwert für die jeweils abgetragene Schicht oder für das jeweils abgetragene Flächenstück berechnet. Bei sehr kleinen Abtrageschritten wird der experimentelle Aufwand groß, bei sehr grob ausgeführten Abtragungen wachsen die Bestimmungsfehler der ermittelten Eigenspannungen. Im vorstehenden Text wurden deshalb die Formulierungen "hinreichend dünne Schichten" und "hinreichend kleine Flächenstücke" gewählt.

Da man allgemein keinen quantitativen Zusammenhang zwischen Abtrageschrittweite und Bestimmungsfehler zur Verfügung hat, wird man zunächst auf eigene oder fremde Erfahrungswerte bei der Wahl der Abtrageschrittweite zurückgreifen. Häufig wird die Eigenspannungsverteilung (Tiefenverteilung) nur in einer oberflächennahen Zone von einigen Millimetern benötigt. In solchen Fällen ist die Wahl einer relativ dünnen Abtrageschichtdicke in der Größenordnung Zehntelmillimeter möglich. Als Beispiel wird auf durchgeführte Eigenspannungsanalysen nach der Abtragungsmethode hingewiesen. So wurden in der Arbeit [45] 0.1 mm, in [46,47] 0.2 mm, in [48] 0.4 mm und in [40,41,49] 0.5 mm für die Abtrageschrittweite gewählt.

Die Bestimmungsgenauigkeit der Abtragungsmethode wurde nach Kenntnis des Autors erstmals für einen Balken mit 1D-1K-ES-Verteilung systematisch untersucht, siehe [50]. In der genannten Arbeit wird neben der Berechnung des Bestimmungsfehlers der Eigenspannungen als Funktion unterschiedlich dicker Schichtenabtragungen auch die Rechengenauigkeit von drei unterschiedlich aufgebauten Auswertgleichungen überprüft. Der Bestimmungsgenauigkeit der Randeigenspannung wird besondere Beachtung geschenkt. Außerdem wird auf die Möglichkeit hingewiesen, den Einfluß des Meßfehlers auf die Bestimmungsgenauigkeit der Eigenspannungen mit Hilfe der Auswertgleichung zu berechnen. Das angewendete Prinzip der Fehleranalyse kann auch auf andere nach dem Abtrageverfahren auf Eigenspannungen zu untersuchende Bauteile übertragen werden. Insofern liegt mit der Arbeit [50] eine allgemeine Methode für die Fehlerbestimmung beim Abtrageverfahren vor, die man im Einzelfall als Ergänzung und Absicherung der Eigenspannungsanalyse heranziehen kann.

14.4 Anwendung der Abtragungsmethode zur Bestimmung von 1D-1K-ES-Verteilungen

In einem Balken mit Rechteckquerschnitt, Anfangshöhe h_0 und Dicke 1, liege ein nur von der Höhenkoordinate abhängiger und in Balkenlängsrichtung wirkender 1D-1K-ES-Zustand vor. Als Beispiel vergleiche man Bild 5b. Eine solche Eigenspannungsverteilung soll mit der in Bild 10 veranschaulichten Abtragungsmethode bestimmt werden.

Wie aus Bild 10 ersichtlich, wird der Balken durch Schichtenabtrag t_μ ($\mu = 1$ bis ν) von h_0 auf h_μ ($\mu = 1$ bis ν) Schritt für Schritt abgetragen. Nach jeweils Abtragen einer Schicht t_μ wird auf der Meßseite des Restbalkens die zu h_μ zugehörige Verformung $s_\mu = s_\mu(h_\mu)$ als Durchbiegung über der Balkenlänge $2a$ gemessen und registriert. Man nennt die Durchbiegung s_μ auch Biegepfeil. Die in Bild 10 skizzierte Meßeinrichtung bezeichnet man als Biegepfeilmeßgerät. In Bild 10 wurde die Zerlegung bis zum ν -ten Abtrageschritt vollzogen. Entsprechend wurde am Biegepfeilmeßgerät in Bild 10 der aktuelle Wert s_ν eingetragen. Zur praktischen Ausführung von Biegepfeilmeßgeräten vergleiche man die Arbeiten [45,47].

Die gesuchten Eigenspannungen σ_μ ($\mu = 1$ bis ν) sind jeweils Mittelwerte in der Schicht t_μ . Bei σ_0 handelt es sich um die Randeigenspannung, siehe Bild 10. Die c_μ ($\mu = 1$ bis ν) sind die Hebelarme von der Neutralen Faser NF des Restbalkens der Höhe h_ν bis zur jeweiligen Schichtmitte t_μ . Unter der Voraussetzung eines hinreichend dünnen Schichtenabtrages wirken

die gesuchten Eigenspannungen σ_μ jeweils in der Mitte von t_μ , siehe Bild 10.

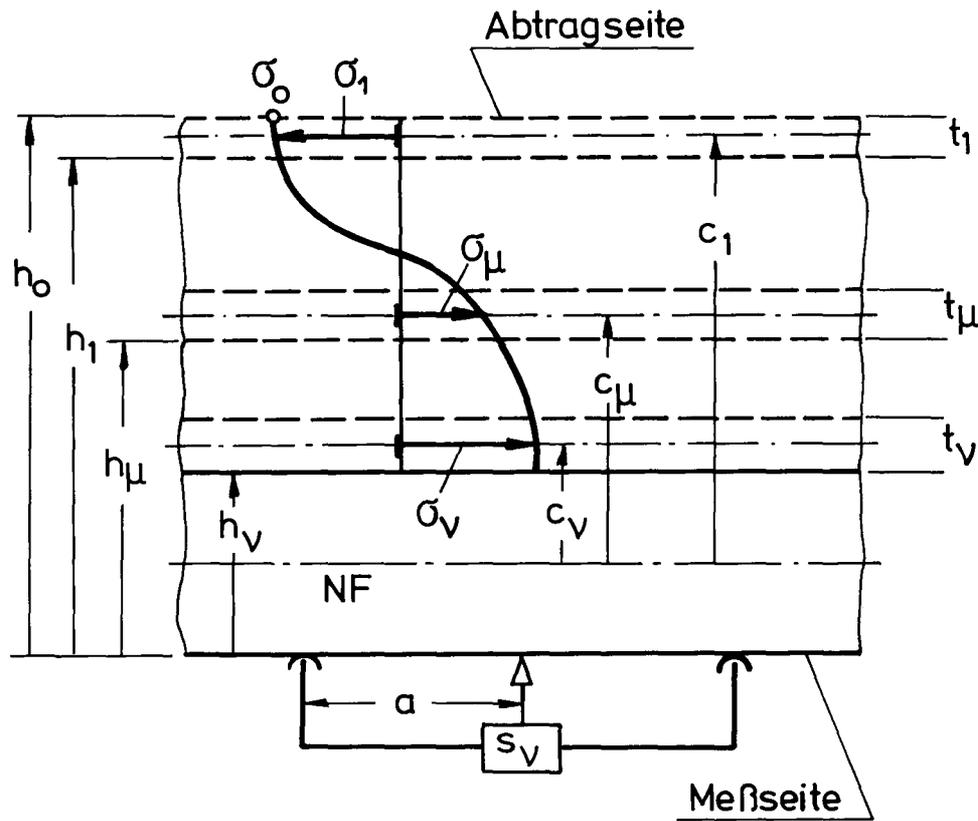


Bild 10: Abtragungsmethode mit Biegepeilmessung für Balken mit Rechteckquerschnitt

Wendet man die Balkenmechanik auf den in Bild 10 dargestellten Schichtenabtrag konsequent an, ergibt sich nach [50] die benötigte Auswertgleichung in der Form:

$$\sigma_\nu = \frac{\frac{Eh_\nu^3}{3a^2}(s_0 - s_\nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sigma_\mu t_\mu (h_0 - t_1 - t_2 - \dots - t_{\mu-1} + t_{\mu+1} + \dots + t_\nu)}{t_\nu (h_\nu + t_\nu)} \quad (114)$$

mit $\nu = 1, 2, 3, \dots$. In Gl. (114) treten die Hebelarme c_μ nicht explizit auf, da sie als Funktion von h_0 und t_μ geschrieben wurden, siehe [50]. Aus Gl. (114) folgen die gesuchten Eigenspannungen in den einzelnen Schichten:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Eh_1^3(s_0 - s_1)}{3a^2 t_1(h_1 + t_1)} \quad , \\ \sigma_2 &= \frac{Eh_2^3(s_0 - s_2) - \sigma_1 t_1(h_0 + t_2)}{3a^2 t_2(h_2 + t_2)} \quad , \\ \sigma_3 &= \frac{Eh_3^3(s_0 - s_3) - \sigma_1 t_1(h_0 + t_2 + t_3) - \sigma_2 t_2(h_0 - t_1 + t_3)}{3a^2 t_3(h_3 + t_3)} \quad \text{usw.}\end{aligned}\tag{115}$$

Die Randeigenspannung σ_0 , siehe Bild 10, ergibt sich aus σ_1 durch den Grenzübergang:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \lim_{t_1 \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{Eh_1^3(s_0 - s_1)}{3a^2 t_1(h_1 + t_1)} = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{E(h_0 - t_1)^3(s_0 - s_1)}{3a^2 t_1 h_0} \\ &= \frac{Eh_0^2}{3a^2} \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{s_0 - s_1}{h_0 - h_1} = \frac{Eh_0^2}{3a^2} \frac{ds}{dh} \Big|_{h_0}.\end{aligned}\tag{116}$$

Zu Beginn der Messung setzt man zweckmäßig $s_0(h_0) = 0$. Die Meßgenauigkeit der Biegepeile liegt bei Verwendung von mechanischen Meßuhren bei 0.001 mm, bei induktiven Wegaufnehmern erreicht man 0.0001 mm. Die Abtrageschrittweite t_μ braucht nach den Auswertgleichungen (114) und (115) nicht konstant zu sein. In der Praxis wählt man jedoch häufig $t_\mu = \text{konst.}$ Wie die Gln. (115) zeigen, handelt es sich bei der Auswertgleichung (114) um eine numerisch einfach zu handhabende und leicht zu programmierende Rekursionsformel: Nach der Berechnung von σ_1 ergibt sich σ_2 usw.

Die Biegepeilmeßmethode hat sich im Zusammenhang mit der Auswertgleichung (114) praktisch bewährt, siehe [45-47,50]. Es sei noch angemerkt, daß auf der Meßseite ebensogut Krümmung oder Längsdehnung gemessen werden können. In diesen Fällen muß allerdings die Auswertgleichung entsprechend abgeändert werden.

Gegenüber Gl. (114) anders aufgebaute Auswertgleichungen findet man in den Arbeiten [51,52]. In diesen Gleichungen treten allerdings Integrationen und Differentiationen der gemessenen und

deshalb nur punktweise bekannten Biegepeilfunktion $s_\mu(h_\mu)$ auf. Da besonders das numerische Differenzieren eine bekannte Fehlerquelle darstellt, siehe [46], geben wir hier der finit aufgebauten Auswertgleichung (114) den Vorzug. In diesem Zusammenhang wird noch darauf hingewiesen, daß die Gl. (114) und die Auswertgleichungen nach [51,52] auf ihre Rechengenauigkeit überprüft wurden, siehe [50].

Für die Bestimmung der Randeigenspannung σ_0 nach Gl.(116) ist eine Differentiation der Meßwerte allerdings unerläßlich. Liegt die Stützstellenfunktion der Biegepeile $s_\mu(h_\mu)$ vor, kann man z.B. eine Kurve durch die Meßpunkte legen und durch Anlegen der Tangente den benötigten Wert ds/dh an der Stelle h_0 grafisch bestimmen. Einfacher (da programmierbar) und genauer ist die numerische Differentiation mit Hilfe eines Lagrange'schen Interpolationspolynoms durch fünf Meßpunkte, wobei die Stützstellenfunktion vorher geglättet wird, siehe [46].

Eigenspannungen durch Brennschneiden

Beim Brennschneiden von Stahl treten zwei Randeffekte auf, die zur Erzeugung eines in Schneidrichtung wirkenden und von der Koordinate y abhängigen 1D-1K-ES-Zustandes $\sigma(y)$ führen, Bild 11. Es handelt sich um die Aufhärtung und die plastische Stauchung des wärmebeeinflussten Bereichs, siehe [47].

Die Aufhärtung entsteht durch die hohe Abkühlungsgeschwindigkeit und durch die Aufkohlung der Schneidzone. Die die Härtesteigerung verursachende Martensitbildung ist mit einer Volumenvergrößerung verbunden, die Druckeigenspannungen in der Brennschneidfläche hervorruft, man vergleiche dazu Abschnitt 5.3.

Die plastische Stauchung des brenngeschnittenen Randes erfolgt durch die Erwärmung einer schmalen Zone während des Schneidevorganges. Nach Abkühlung entstehen hierdurch Zug-eigenspannungen, man vergleiche dazu Abschnitt 5.1.

Für die vorgenannten beiden Mechanismen kann die resultierende Eigenspannungsquelle und damit die resultierende Eigenspannungsverteilung nicht bestimmt werden. Deshalb ist man auf experimentelle Verfahren zur Bestimmung der Eigenspannungen angewiesen.

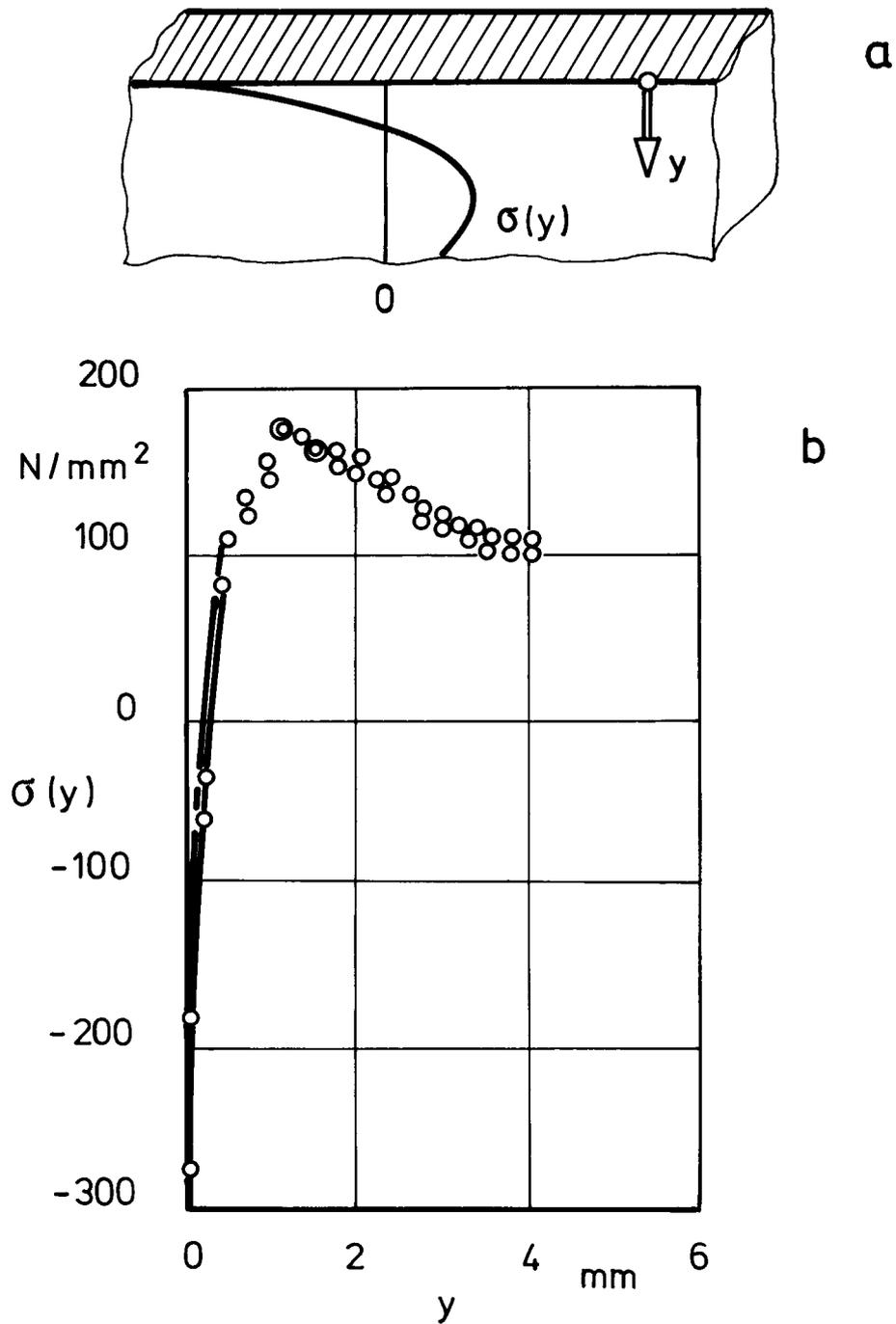


Bild 11: Eigenspannungen in brenngeschnittenen Stahlblechen
a: Veranschaulichung des 1D-1K-ES-Zustandes
b: An zwei Probekörpern gemessene Tiefenverteilung $\sigma(y)$,
Werkstoff St E 36, nach [47]

Die Tiefenverteilung der Eigenspannungen in brenngeschnittenen Stahlblechen wurde für den schweißgeeigneten Feinkornbaustahl St E 36 nach dem Abtrageverfahren entsprechend Bild 10 in Kombination mit der Auswertgleichung (114) im Tiefenbereich von 4 mm bestimmt. Das Ergebnis nach [47] für "kalt" brenngeschnittene Bauteile gibt Bild 11 wieder. Wie ersichtlich, herrschen im Randbereich Druckeigenspannungen in der Größenordnung von 200 N/mm². Damit erweist sich in diesem Falle der Mechanismus der Aufhärtung als bestimmend. Man vergleiche dazu Abschnitt 5.3, wo auf die charakteristische Ausbildung von Eigenspannungen durch Volumendilatation bereits hingewiesen wurde.

Ergänzende Hinweise

Der Einfluß von Kohlenstoffgehalt, Schneidgeschwindigkeit und Heizflammengröße auf die Tiefenverteilung der Eigenspannungen in der Brennschneidzone wurde in der Arbeit [46] näher untersucht.

Im Rahmen eines Beitrages zur Gütesicherung unterwasser-plasmageschnittener Blechkanten wurden für einen höherfesten Schiffbaustahl auch die Eigenspannungen durch Unterwasser-Plasmaschneiden bestimmt [45].

In der Praxis wird die aufgehärtete und riefenbehaftete Brennschneidfläche häufig durch Übersleifen abgearbeitet. Dadurch ergibt sich eine Störung des Gleichgewichts und eine Umlagerung der ursprünglichen Eigenspannungen. Ist die Biegepeilfunktion $s_\mu(h_\mu)$ bekannt, kann man die für eine beliebige Bearbeitungstiefe sich einstellende umgelagerte Eigenspannungsverteilung mit der zugehörigen neuen Randeigenspannung nach [46,47] berechnen.

Der Einfluß der durch Brennschneiden induzierten Eigenspannungen auf die Dauerschwingfestigkeit wurde an Proben aus Stahl St 52-3 auf der Grundlage von Rißfortschrittmessungen untersucht [53].

Abschließend wird noch auf die Arbeit [54] hingewiesen. Sie beschäftigt sich mit der Entstehung und Bestimmung von Schweißeigenspannungen. In der genannten Arbeit werden ferner Maßnahmen zur Herabsetzung der entstehenden Schweißeigenspannungen besprochen. Der Abbau von Schweißeigenspannungen wird eingehend behandelt. Außerdem findet man in der Arbeit [54] allgemeine Hinweise über den Einfluß von Eigenspannungen auf das Werkstoffverhalten.

14.5 Anwendung der Abtragungsmethode zur Bestimmung von 2D-1K-ES-Verteilungen in ebenen n-fach geschichteten Werkstoffen bei vollständiger Anisotropie der Einzelschichten, Spezialisierung für Isotropie und einfache Schichtung

Wir setzen einen 2D-1K-ES-Zustand $\sigma_a(x_3)$ nach Bild 9 und Gl.(93) voraus. Die zu untersuchende Platte mit der Anfangsdicke Z_0 wird in Schichten Schritt für Schritt abgetragen. In Abhängigkeit von der variablen Plattendicke Z erfolgt auf der Meßseite $x_3 = 0$ mit Hilfe einer Dehnungsmeßstreifenrosette (DMS-Rosette) die Messung und Registrierung des ebenen Tensors der Gesamtdehnung $\bar{\epsilon}_b(Z)$, siehe Gl.(97) und Bild 12. Zu Beginn der Abtragungen gilt für die drei Komponenten der Gesamtdehnung $\bar{\epsilon}_b(Z_0) = 0$. In Bild 12 wurde ein zweifach geschichteter Werkstoff, bestehend aus drei unterschiedlichen Werkstoffschichten, angenommen. Die beiden Schichtungsgrenzen bzw. Schichtungsebenen sind mit Z_1 und Z_2 gekennzeichnet.

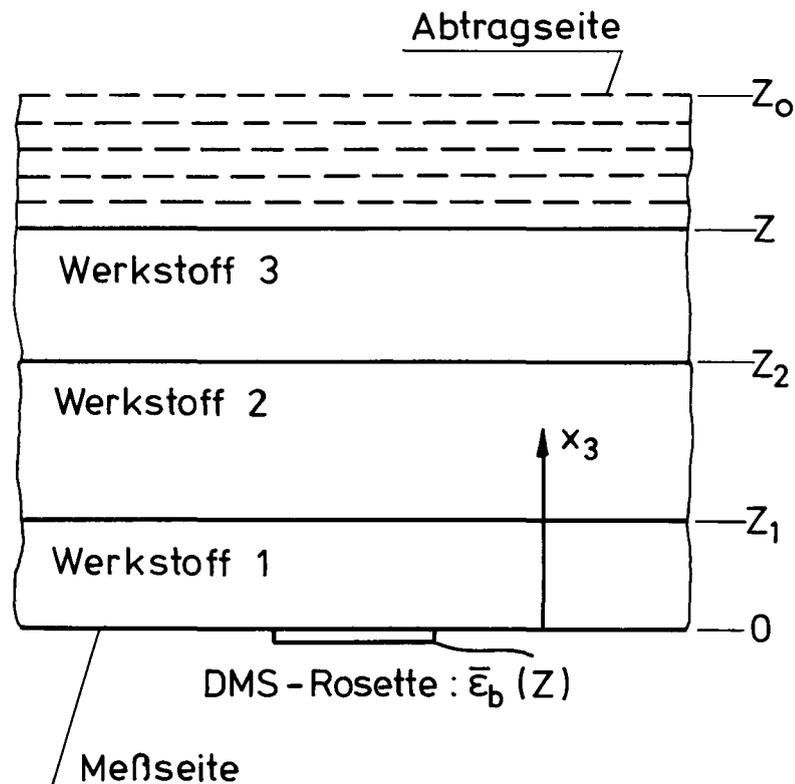


Bild 12: Veranschaulichung der Abtragungsmethode an einer zweifach geschichteten Platte, bestehend aus drei Werkstoffschichten

Als Verformungsreaktion der Restplatte kann auch der Krümmungstensor der Meßseite $x_3 = 0$, nämlich $\kappa_b(Z)$ nach Gl. (98), bestimmt werden. Wir entscheiden uns hier aber für die bewährte Messung der Gesamtdehnungen mit einer DMS-Rosette, siehe Bild 12.

Die benötigte Auswertgleichung zur Bestimmung der gesuchten Eigenspannungen $\sigma_a(Z)$ aus den Meßwerten $\bar{\varepsilon}_b(Z)$ kann über die im Abschnitt 10 dargestellten Grundgleichungen der kombinierten Scheiben-Plattentheorie für anisotrope und eben geschichtete Werkstoffe gefunden werden. Die vollständige Ableitung wurde in den Arbeiten [38,39] durchgeführt. Wir beschränken uns deshalb auf die Wiedergabe des Endergebnisses. Die gesuchte Auswertgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \sigma_a(Z) = & \{\zeta_{ab}(Z) - Z\delta_{ab}\}^{-1} \cdot \left\{ \frac{d\zeta_{bc}}{dZ} \int_Z^{Z_0} \sigma_c(x_3) dx_3 + [Zc_{bd}^*(Z) - \zeta_{bc}(Z)c_{cd}^*(Z) \right. \\ & \left. - \frac{d\zeta_{bc}}{dZ} \int_0^Z c_{cd}^* dx_3] \bar{\varepsilon}_d(Z) + \left[\int_0^Z x_3 c_{bd}^* dx_3 - \zeta_{bc}(Z) \int_0^Z c_{cd}^* dx_3 \right] \frac{d\bar{\varepsilon}_d(Z)}{dZ} \right\}, \end{aligned} \quad (117)$$

$$a, b, c, d = 1, 2, 6 .$$

Die in Gl. (117) auftretende c_{ab}^* -Matrix ist bereits bekannt, siehe Gl. (99). Die vorkommende ζ_{ab} -Matrix ergibt sich dadurch, daß in der Ableitungsprozedur bei Messung der $\bar{\varepsilon}_b(Z)$ -Werte der nicht benötigte Krümmungstensor $\kappa_b(Z)$ der Ebene $x_3 = 0$ eliminiert werden muß. Nach [38,39] gilt:

$$\zeta_{ab}(Z) = \int_0^Z x_3^2 c_{ad}^* dx_3 \cdot \left\{ \int_0^Z x_3 c_{db}^* dx_3 \right\}^{-1}, \quad (118)$$

$$a, b, d = 1, 2, 6 .$$

Damit sind alle Größen in der Auswertgleichung (117) bekannt, und die gesuchten Eigenspannungen $\sigma_a(Z)$ können als Funktion der gemessenen $\bar{\varepsilon}_b(Z)$ -Werte berechnet werden. Bevor wir auf diese Berechnung näher eingehen, sollen zuvor die wirksamen Oberflächeneigenspannungen $\sigma_a(Z_0)$ bestimmt werden. Setzt man $Z = Z_0$, siehe Bild 12, und beachtet man $\bar{\varepsilon}_b(Z_0) = 0$, so ergibt sich aus der Auswertgleichung (117) für die in der Plattenoberfläche herrschenden Eigenspannungen:

$$\sigma_a(Z_0) = \{\zeta_{ab}(Z_0) - Z_0\delta_{ab}\}^{-1} \left\{ \int_0^{Z_0} x_3 c_{bd}^* dx_3 - \zeta_{bc}(Z_0) \int_0^{Z_0} c_{cd}^* dx_3 \right\} \left. \frac{d\bar{\varepsilon}_d(Z)}{dZ} \right|_{Z_0}. \quad (119)$$

Im Zusammenhang mit Gl. (119) wird auf die sogenannte Spannungsrißkorrosion (SRK) hingewiesen. Sie führt zur Rißbildung in einer benetzten Metalloberfläche, wenn ein für den

Werkstoff kritisches Angriffsmittel vorliegt und wenn in der benetzten Metalloberfläche Zug-eigenspannungen vorliegen, siehe [54]. Bei Druckeigenspannungen in der Oberfläche tritt SRK nicht auf. Die nach Gl.(119) berechenbaren Oberflächeneigenspannungen geben daher einen wichtigen Hinweis zur Beurteilung der Empfindlichkeit gegenüber SRK.

Wir kommen zurück auf die Auswertgleichung (117). Die auftretenden Doppelindizes sind über 1, 2, 6 zu summieren. Da die gesuchten Eigenspannungskomponenten auch auf der rechten Gleichungsseite unter dem ersten Integral auftreten, handelt es sich bei Gl.(117) um drei gekoppelte lineare Gleichungen zur Bestimmung von $\sigma_1(Z)$, $\sigma_2(Z)$ und $\sigma_6(Z)$. Der Vollständigkeit halber wird angemerkt, daß es sich vom Typ her bei Gl.(117) um ein lineares, inhomogenes Volterra'sches Integralgleichungssystem 2. Art handelt. Diese mathematische Kennzeichnung darf allerdings nicht zu der Annahme verleiten, die Auflösung von Gl.(117) nach den gesuchten Eigenspannungen $\sigma_a(Z)$ mit bekannten Meßwerten $\bar{\epsilon}_b(Z)$ sei besonders schwierig. Wie durch Vergleich ersichtlich, bestehen zwischen den Auswertgleichungen (114) und (117) formale Ähnlichkeiten. Hier wie dort stehen die Eigenspannungen jeweils auf der linken Gleichungsseite. Hier wie dort treten die Eigenspannungen außerdem noch auf der rechten Gleichungsseite unter dem Summen- bzw. Integralzeichen auf. Dieser spezielle Aufbau der Gl.(117) gestattet es daher, ähnlich wie im Falle der Auswertgleichung (114), die Bestimmung der Eigenspannungen als Rekursionsrechnung durchzuführen. Im Falle der Gl.(117) muß dabei allerdings die Koppelung der drei Gleichungen (117) berücksichtigt werden. Diese Berechnungen sind numerisch unproblematisch. Zur Vereinfachung der Auswertung ist ein Rechenprogramm zu empfehlen, welches die Bestimmung der Oberflächeneigenspannungen $\sigma_a(Z_0)$ nach Gl.(119) mit einschließt.

Spezialisierung für Isotropie

Man beachte, daß die Auswertgleichung (117) noch ganz allgemein für n-fache Schichtung und vollständige Anisotropie der Einzelschichten gilt. In der Regel haben wir es jedoch mit isotropen metallischen Werkstoffen zu tun. Daher wird die Anisotropie der Einzelschichten jetzt aufgegeben. Für Isotropie ist die Matrix $c_{ab}^* = c_{ab}^*(\nu_i, G_i)$ nach Gl.(109) bekannt, wobei für die i-te Werkstoffschicht die zugehörigen Werte ν_i und G_i gelten, man vergleiche Bild 12. Einsetzen von Gl.(109) in Gl.(118) liefert nach [38,39] die $\zeta_{ab}(Z)$ -Matrix für Isotropie in der

Form:

$$\zeta_{ab}(Z) = \zeta \delta_{ab} . \quad (120)$$

Wegen der in Gl.(118) auftretenden Integrationen über die veränderliche Plattendicke Z treten dabei in der ζ -Funktion neben der veränderlichen Plattendicke Z noch die n - Schichtungsgrenzen Z_1, Z_2, \dots, Z_n , sowie die Werkstoffkonstanten der $n + 1$ Werkstoffschichten $\nu_1, G_1, \nu_2, G_2, \dots, \nu_{n+1}, G_{n+1}$ auf, siehe Bild 12. Demnach gilt für die ζ -Funktion in Gl.(120):

$$\zeta = \zeta(Z, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \nu_1, G_1, \nu_2, G_2, \dots, \nu_{n+1}, G_{n+1}) . \quad (121)$$

Wie aus Gl.(120) ersichtlich, ist $\zeta_{ab}(Z)$ eine reine Diagonalmatrix. Einsetzen von Gl.(120) in Gl.(117) führt auf die Auswertgleichung für Isotropie:

$$\begin{aligned} \sigma_a(Z) = & (\zeta - Z)^{-1} \cdot \left\{ \frac{d\zeta}{dZ} \int_Z^{Z_0} \sigma_a(x_3) dx_3 + [Z c_{ab}^*(Z) - \zeta c_{ab}^*(Z) - \frac{d\zeta}{dZ} \int_0^Z c_{ab}^* dx_3] \bar{\epsilon}_b(Z) \right. \\ & \left. + \left[\int_0^Z x_3 c_{ab}^* dx_3 - \zeta \int_0^Z c_{ab}^* dx_3 \right] \frac{d\bar{\epsilon}_b(Z)}{dZ} \right\} , \end{aligned} \quad (122)$$

$$a, b = 1, 2, 6 .$$

Gegenüber Gl.(117) ist Gl.(122) entkoppelt. Bei isotropen Einzelschichten hat man es deshalb nicht mehr wie bei Gl.(117) mit einem Gleichungssystem zu tun, sondern mit drei einzelnen Auswertgleichungen für die drei gesuchten Eigenspannungskomponenten $\sigma_1(Z)$, $\sigma_2(Z)$ und $\sigma_6(Z)$. Die numerische Auswertung kann in Anlehnung an Gl.(114) durch Rekursion erfolgen, siehe auch [38,39].

Die Oberflächeneigenspannungen ergeben sich mit $Z = Z_0$ und $\bar{\epsilon}_b(Z_0) = 0$ aus Gl.(122):

$$\sigma_a(Z_0) = (\zeta_0 - Z_0)^{-1} \left\{ \int_0^{Z_0} x_3 c_{ab}^* dx_3 - \zeta_0 \int_0^{Z_0} c_{ab}^* dx_3 \right\} \Big|_{Z_0} \frac{d\bar{\epsilon}_b(Z)}{dZ} \Big|_{Z_0} , \quad (123)$$

$$a, b = 1, 2, 6,$$

mit $\zeta_0 = \zeta(Z_0, Z_1, \dots, G_{n+1})$ nach Gl.(121).

Spezialisierung für einfach geschichtete Werkstoffe

Großflächige einfach beschichtete Werkstoffe, häufig auch plattierte Werkstoffe genannt, spielen in der Praxis eine große Rolle. Ein Grundwerkstoff, auch als Trägerwerkstoff bezeichnet, wird zur Oberflächenverbesserung (Korrosionsschutz, Verschleißfestigkeit, Reflexionsverhalten) mit einem geeigneten Sonderwerkstoff plattiert.

Die wichtigste Werkstoffpaarung besteht aus unlegiertem oder niedrig legiertem Stahl als Trägerwerkstoff und austenitischem Cr-Ni-Stahl als Plattierung. Einsatzgebiete sind z.B. der chemische Apparatebau, die Kerntechnik und der Bau von Chemikaliertankern. Der Trägerwerkstoff hat die mechanischen Beanspruchungen aufzunehmen. Die Plattierung, häufig auch als Aufagewerkstoff bezeichnet, soll den Trägerwerkstoff vor korrosivem Angriff schützen.

Im Hinblick auf den verbreiteten Einsatz der plattierten Werkstoffe werden jetzt die für Isotropie geltenden Auswertgleichungen für einfache Beschichtung spezialisiert. In Bild 13 ist der Querschnitt einer einseitig plattierten Platte, bestehend aus dem Grundwerkstoff 1 und der Plattierung 2, dargestellt. Da für die meisten Metalle die Querkontraktionszahl ν ungefähr 0.3 beträgt, setzen wir für die nachfolgenden Berechnungen $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Für die Werkstoffschicht 1 (Grundwerkstoff) ergibt sich dann nach Gl. (109) $\overset{1}{c}_{ab}^* = \overset{1}{c}_{ab}^*(\nu, G_1)$ und für die Werkstoffschicht 2 (Plattierung) $\overset{2}{c}_{ab}^* = \overset{2}{c}_{ab}^*(\nu, G_2)$, siehe Bild 13. Einsetzen in Gl. (118) liefert für ζ die Funktion

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{gZ_1^3 + Z^3}{gZ_1^2 + Z^2}, \quad (124)$$

wobei zur Abkürzung $g = G_1/G_2 - 1$ gesetzt wurde. Setzt man die Matrix $\overset{2}{c}_{ab}^*(\nu, G_2)$ nach Gl. (109) und ζ nach Gl. (124) in Gl. (122) ein, ergibt sich nach umfangreicher Zwischenrechnung für den Abtragebereich $Z_1 \leq Z \leq Z_0$ die Auswertgleichung

$$\begin{aligned} \sigma_a(Z) = & \frac{-2}{Z(gV^2 + 1)} \int_Z^{Z_0} \sigma_a dx_3 + \frac{-gV^2 + 2gV + 1}{gV^2 + 1} \overset{2}{c}_{ab}^* \bar{\epsilon}_b(Z) \\ & + \frac{g^2V^4 + 4gV^3 - 6gV^2 + 4gV + 1}{-2gV^3 + 3gV^2 + 1} \frac{Z}{2} \overset{2}{c}_{ab}^* \frac{d\bar{\epsilon}_b(Z)}{dZ}, \end{aligned} \quad (125)$$

mit $V = Z_1/Z$ als Abkürzung für das durch Abtragung veränderliche Plattierungsverhältnis. Gl. (125) gilt demnach nur für die Bestimmung der Eigenspannungen in der Plattierungsschicht, siehe Bild 13. Für den homogenen Plattenteil $0 \leq Z \leq Z_1$, also für den Grundwerkstoff, ergibt

sich die Auswertgleichung zur Bestimmung der Eigenspannungsverteilung aus Gl. (125), wenn man $V = 0$ oder $g = 0$ setzt. Außerdem muß an Stelle von $\overset{2}{c}_{ab}^*$ die Matrix $\overset{1}{c}_{ab}^*$ verwendet werden, siehe Bild 13. Man erhält damit aus Gl. (125):

$$\sigma_a(Z) = -\frac{2}{Z} \int_Z^{Z_0} \sigma_a dx_3 + \overset{1}{c}_{ab}^* \bar{\varepsilon}_b(Z) + \frac{Z}{2} \overset{1}{c}_{ab}^* \frac{d\bar{\varepsilon}_b(Z)}{dZ}. \quad (126)$$

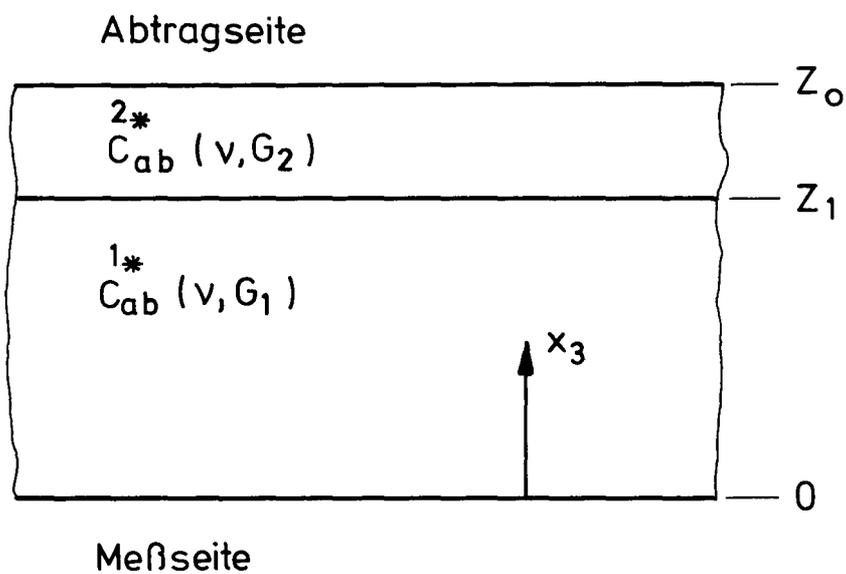


Bild 13: Einseitig plattierter Werkstoff, bestehend aus dem Grundwerkstoff 1 und der Plattierung 2, mit $\nu_1 = \nu_2 = \nu$

Die Eigenspannungskomponenten in der Plattierungsoberfläche folgen mit $Z = Z_0$, $\bar{\varepsilon}_b(Z_0) = 0$ und $V_0 = Z_1/Z_0$ aus Gl.(125):

$$\sigma_a(Z_0) = \frac{g^2 V_0^4 + 4gV_0^3 - 6gV_0^2 + 4gV_0 + 1}{-2gV_0^3 + 3gV_0^2 + 1} \frac{Z_0}{2} c_{ab}^* \left. \frac{d\bar{\varepsilon}_b(Z)}{dZ} \right|_{Z_0}. \quad (127)$$

Da die Werkstoffkonstanten in der Schichtungsebene Z_1 unstetig sind, ergibt sich für $Z \rightarrow Z_1$ ein Sprung in der Eigenspannungsverteilung. Dieser wird mit $\Delta\sigma_a(Z_1)$ bezeichnet. Man kann diesen Wert durch Stetigkeitsbetrachtungen in der Umgebung der Stelle Z_1 exakt bestimmen. In [38,39] wurden diese Berechnungen durchgeführt. Es ergibt sich danach für den Spannungssprung an der Schichtgrenze Z_1 bei einfacher Schichtung und Isotropie:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_a(Z_1) = & \frac{Z_1}{2} c_{ab}^* \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left. \frac{d\bar{\varepsilon}_b(Z)}{dZ} \right|_{Z_1+\varepsilon} - \left. \frac{d\bar{\varepsilon}_b(Z)}{dZ} \right|_{Z_1-\varepsilon} \right\} \\ & - \frac{2}{Z_1} \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) \int_{Z_0}^{Z_1} \sigma_a dx_3 + \frac{6}{Z_1^2} \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) \int_{Z_0}^{Z_1} x_3 \sigma_a dx_3. \end{aligned} \quad (128)$$

Anwendung auf austenitische Cr-Ni-Stahl Plattierungen

Die Auswertgleichungen (125) bis (128) wurden im Zusammenhang mit der Abtragemethode nach Bild 12 auf unterschiedlich hergestellte austenitische Cr-Ni-Stahl Plattierungen angewendet. In der Arbeit [48] wurden die Eigenspannungsverläufe in warmgewalzten und sprenggeschweißten austenitplattierten Stahlblechen ermittelt. Die Bestimmung der Schweißeigenspannungen und der Wärmespannungen in einem mit Bandedrode aus nichtrostendem Stahl unterpulverschweißplattierten Blech aus unlegiertem Baustahl erfolgte in der Arbeit [49]. Außerdem sind die Verteilungen der Schweißeigenspannungen in durch Unterpulverschweißen austenitisch plattierten dickwandigen Feinkornbaustählen bestimmt worden, siehe [40,41].

In den vier zitierten Untersuchungen [40,41,48,49] ergaben sich die Schubeigenspannungen $\sigma_6(Z)$ als klein gegenüber den Normaleigenspannungen $\sigma_1(Z)$ und $\sigma_2(Z)$, man vergleiche dazu nochmals Bild 9. Ebenfalls als vernachlässigbar klein gegenüber den Normaleigenspannungen erwies sich der jeweils nach Gl.(128) berechnete Spannungssprung in der Schichtungsebene $\Delta\sigma_a(Z_1)$. Aus diesem Grunde blieb er in allen Auftragungen der Eigenspannungsverteilungen unberücksichtigt. Eine zusammengefaßte Darstellung der Arbeiten [40,41,48,49] findet man in dem Beitrag [54].

Als Beispiel für die Eigenspannungsverteilung in einem austenitisch plattierten dickwandigen Feinkornbaustahl geben wir hier die Ergebnisse der Arbeit [40] wieder. Ein Grundwerkstoff aus dem Feinkornbaustahl 22NiMoCr37 (DIN-Nr. 1.6751, ASTM A508-Class 2) mit einer Dicke von $Z_1 = 86$ mm, siehe Bild 13, wurde durch zweilagiges Unterpulverauftragsschweißen von je 4.5 mm mit einer Banelektrode aus austenitischem Cr-Ni-Stahl plattiert. Die gesamte Plattierungsdicke $Z_0 - Z_1$ betrug 9 mm, die Gesamtdicke der Platte $Z_0 = 95$ mm, siehe Bild 13.

In Bild 14 sind die experimentell-rechnerisch ermittelten Eigenspannungsverteilungen der Normaleigenspannungen in Schweißrichtung $\sigma_1(Z)$ und der Normaleigenspannungen quer zur Schweißrichtung $\sigma_2(Z)$ für den geschweißten Zustand (ohne Wärmenachbehandlung) dargestellt. Wie aus Bild 14 ersichtlich, wurden die Eigenspannungsverteilungen bis zu einer Tiefe von etwa 19 mm ermittelt. Die in Bild 14 eingetragenen Verläufe sind die Mittelwertkurven aus zwei untersuchten Proben.

Der durch Unterpulverbandplattieren induzierte Eigenspannungszustand entsteht durch plastische Deformationen und durch Umwandlungsvorgänge in der Wärmeeinflußzone (WEZ) des Grundwerkstoffes. Diese beiden Mechanismen treten auch beim Brennschneiden auf, man vergleiche Abschnitt 14.4. Bei der vorliegenden Schweißplattierung sind außerdem noch die unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Grundwerkstoff und Plattierung für die Entstehung der resultierenden Eigenspannungen verantwortlich.

In der WEZ des Grundwerkstoffes verläuft die Umwandlung vorwiegend in der Zwischenstufe, man vergleiche Abschnitt 5.3. Dadurch bedingt ergibt sich hier gegenüber dem unbeeinflussten Grundwerkstoff ein größerer Volumenbedarf. Die dadurch lokal entstehenden Druckeigenspannungen führen in der WEZ des Grundwerkstoffes zu einer Einsattelung im resultierenden Eigenspannungsverlauf. In Bild 14 tritt diese charakteristische Ausbildung der Eigenspannungen in der Unterplattierungsschicht $Z < Z_1$ ausgeprägt in Erscheinung. Wie aus Bild 14 ersichtlich, führen die Umwandlungsvorgänge zu einem Minimum der Eigenspannungen im Zugeigenspannungsgebirge.

Die in der Plattierungsoberfläche $Z = Z_0$ herrschenden Zugeigenspannungen sind in Schweißrichtung kleiner als quer zur Schweißrichtung, siehe Bild 14. Dieses Ergebnis kann durch die spezielle Geometrie des Schmelzbades beim Unterpulverbandplattieren erklärt werden, siehe [40]. Außerdem wurde die Umlagerung der in Bild 14 dargestellten Eigenspannungsverläufe durch eine nachträgliche Wärmebehandlung bestimmt [40].

Der Einfluß der Grundwerkstoffdicke auf die Eigenspannungsverteilung in austenitisch plattierten dickwandigen Feinkornbaustählen wurde in [41] ermittelt. In der genannten Arbeit wurde außerdem die Eigenspannungsumlagerung durch nachträglich durchgeführte induktive Stoßglühungen bestimmt. Anhand der ermittelten Eigenspannungsverteilungen, die ähnlich charakteristisch wie in Bild 14 verlaufen, konnte der Bildungsmechanismus von Unterplattierungsrisen erklärt werden [41].

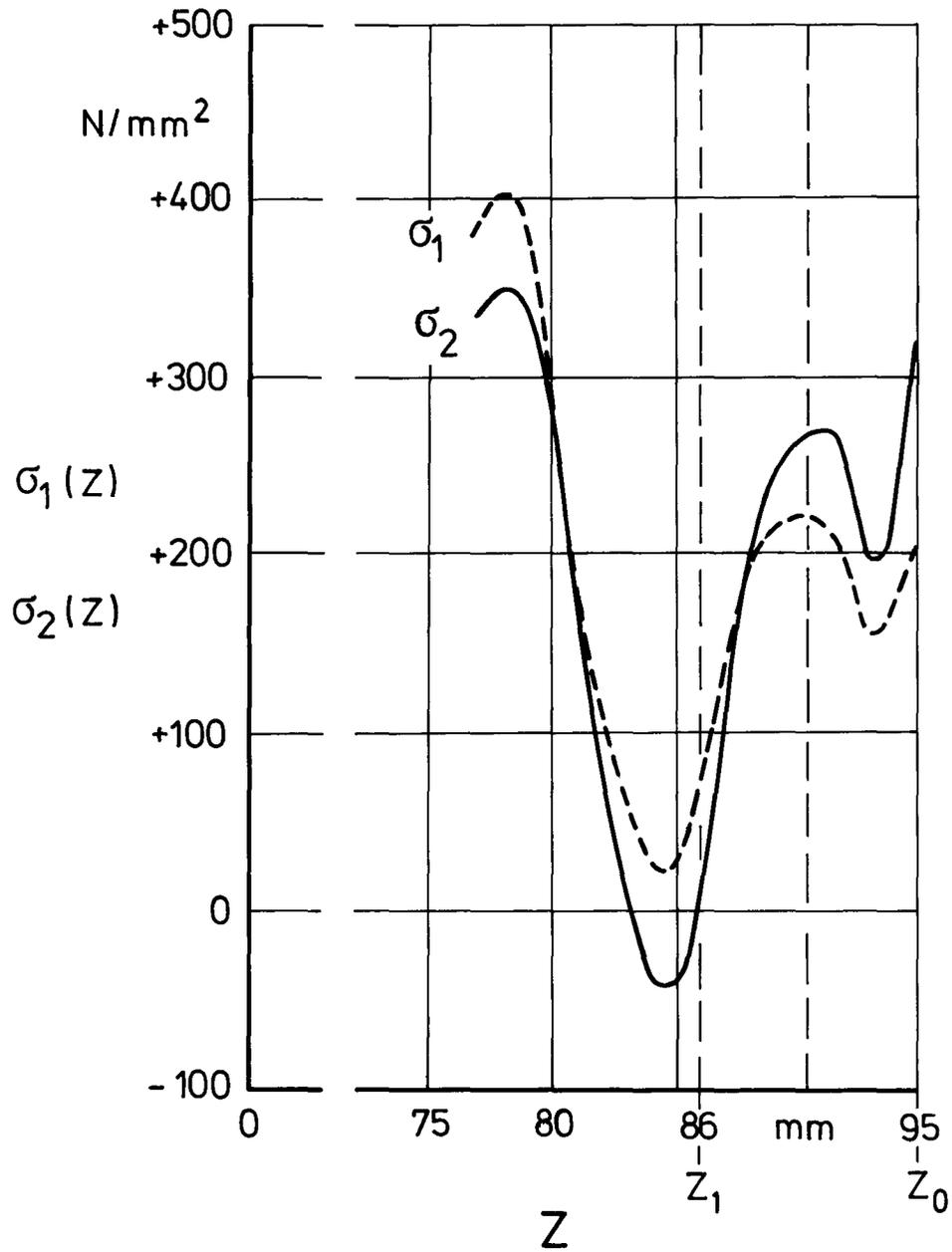


Bild 14: Verlauf der Normaleigenspannungen in Schweißrichtung $\sigma_1(Z)$ und der Normaleigenspannungen quer zur Schweißrichtung $\sigma_2(Z)$ in einem austenitisch unterpulverbandplattierten dickwandigen Feinkornbaustahl ohne Wärmenachbehandlung, nach [40]

15 Die Überlagerung von Last- und Eigenspannungen

15.1 Der lineare oder elastische Überlagerungsfall

Bei Belastung eines Bauteils überlagern sich die Lastspannungen aus den Betriebslasten $\overset{1}{\sigma}_{ij}$ mit den im Bauteil vorliegenden Eigenspannungen $\overset{2}{\sigma}_{ij}$. Der auf das Bauteil einwirkende resultierende Spannungszustand σ_{ij} kann als Addition von Last- und Eigenspannungstensor berechnet werden:

$$\sigma_{ij}(x_i) = \overset{1}{\sigma}_{ij}(x_i) + \overset{2}{\sigma}_{ij}(x_i). \quad (129)$$

Die lineare oder elastische Überlagerung nach Gl.(129) gilt nur dann, wenn für alle Stellen x_i des Bauteils das Fließen durch den resultierenden Spannungszustand $\sigma_{ij}(x_i)$ ausgeschlossen werden kann. Dies ist mit Hilfe eines für den Werkstoff gültigen Fließkriteriums nachzuprüfen. Ein Fließkriterium für duktile metallische Werkstoffe ist das Kriterium nach v.Mises, siehe Gl.(50). Diesem liegt die sogenannte Gestaltänderungsenergiehypothese zugrunde. Danach wird Fließen ausgeschlossen, wenn im ganzen Bauteil

$$\sigma_F > \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (130)$$

gilt, mit $\sigma_1(x_i)$, $\sigma_2(x_i)$ und $\sigma_3(x_i)$ als Hauptspannungen des resultierenden Spannungszustandes σ_{ij} im Punkte x_i .

Im linearen Überlagerungsfall kann man nach getrennter Durchführung der Last- und Eigenspannungsanalyse die im Bauteil wirkenden resultierenden Spannungen σ_{ij} nach Gl.(129) berechnen. Es besteht aber auch die Möglichkeit, den elastischen Überlagerungsfall zur Bestimmung der resultierenden Spannungen σ_{ij} als ein geschlossenes Randwertproblem zu formulieren.

Für die durch die spezifischen Volumenkräfte X_i , durch die Oberflächenbelastungen $\overset{0}{p}_i$ und durch die Oberflächenverschiebungen $\overset{0}{u}_i$ verursachten Lastspannungen gilt das problemorientierte Differentialgleichungssystem (37) bis (39) mit den zugehörigen Randbedingungen (41) und (42). Für die durch die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_{ij}^q(x_i)$ induzierten Eigenspannungen gelten die problemorientierten Differentialgleichungen (43) bis (46) mit der zugehörigen Randbedingung (47).

Wegen des linearen Charakters können die beiden vorgenannten Randwertprobleme wie folgt linear kombiniert werden:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^q, \quad (131)$$

$$\text{Ink}(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad (132)$$

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0, \quad (133)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad (134)$$

mit den beiden zu erfüllenden Randbedingungen

$$\overset{0}{u}_i(x_i) \quad \text{für alle } x_i \in O_g, \quad (135)$$

$$\overset{0}{p}_i(x_i) = n_j(x_i) \sigma_{ij}(x_i) \quad \text{für alle } x_i \in O_n. \quad (136)$$

Für den Fall, daß die Eigenspannungsquelle $\varepsilon_{ij}^q(x_i)$ bekannt ist, beschreibt das Randwertproblem (131) bis (136) den linearen Überlagerungsfall in geschlossener Form. Die Auflösung führt direkt zu den auf das Bauteil einwirkenden resultierenden Spannungen σ_{ij} .

15.2 Der nichtlineare oder elastisch-plastische Überlagerungsfall

In der Regel ist die Anwendung von Gl.(129) unzulässig, da bei der Überlagerung von Last- und Eigenspannungen häufig lokale Fließvorgänge eingeleitet werden. Diese kommen dadurch zustande, daß sich die aufgebrachtten Lastspannungen mit den größten Eigenspannungswerten vorzeichengleich addieren können. Tritt dies auf, entstehen örtlich hohe resultierende Spannungen, die in aller Regel lokales Fließen auslösen.

Als Beispiel betrachten wir die Eigenspannungsverteilung in einem Balken nach Bild 11 mit dem Größtwert der Druckeigenspannungen am Balkenrand. Beim Aufbringen eines Biegemoments kann sich die ebenfalls am Balkenrand auftretende größte Druckbiegespannung vorzeichengleich mit den größten Druckeigenspannungen überlagern. Die daraus resultierende Druckspannung erreicht schon bei verhältnismäßig geringen Lastspannungen in den Randfasern des Balkens die Druckfließgrenze und führt hier zu örtlichem Fließen.

Als weiteres Beispiel zur Überlagerung von Last- und Eigenspannungen betrachten wir die Eigenspannungsverteilung in einem plattierten dickwandigen Feinkornbaustahl nach Bild 14. Danach liegen im Unterplattierungsbereich Zugeigenspannungsmaxima vor. Bei Auftreten einer gleichmäßigen Zugspannung, z.B. in Schweißrichtung, überlagern sich die Zugeigenspannungen σ_1 und die Zuglastspannungen wieder vorzeichengleich. Auch in diesem Falle führen schon verhältnismäßig geringe Lastspannungen in der Umgebung des Eigenspannungsmaximums zum örtlichen Fließen.

Die Überlagerung von Last- und Eigenspannungszuständen unter Berücksichtigung lokaler Fließvorgänge ist ein nichtlineares elastisch-plastisches Randwertproblem der Kontinuumsmechanik. Die Behandlung im ebenen oder räumlichen Fall ist aufwendig und kann nur mit Hilfe numerischer Methoden durchgeführt werden.

Nimmt man nach der nichtlinearen elastisch-plastischen Überlagerung von Last- und Eigenspannungen die Belastung wieder zurück, so liegt nach Entlastung ein veränderter Eigenspannungszustand vor. Die ursprünglichen Eigenspannungen wurden durch den einmaligen Be- und Entlastungsvorgang umgelagert. Der Grund für diese Umlagerung sind die durch das örtliche Fließen erzeugten ungleichmäßigen plastischen Deformationen. Diese verändern die ursprüngliche Eigenspannungsquelle und damit den ursprünglichen Eigenspannungszustand.

15.3 Der nichtlineare elastisch-plastische 1D-1K-Überlagerungsfall

Wir wollen jetzt den einfachsten möglichen Fall der nichtlinearen Überlagerung von Last- und Eigenspannungen analytisch behandeln. Dieser Fall entsteht, wenn ein langer zylindrischer Stab mit einer 1D-1K-ES-Verteilung durch eine gleichmäßig verteilte Lastspannung σ_0 beansprucht wird. Um das Knickproblem zu vermeiden, wählen wir als Belastung eine Zugspannung. Diese wird so gewählt, daß durch die Überlagerung mit den vorhandenen Eigenspannungen örtliches Fließen auftritt. Für unsere Betrachtungen legen wir ein elastisch ideal-plastisches Stoffgesetz ohne Verfestigung nach Bild 2 mit der Streckgrenze σ_F zugrunde.

Wir betrachten einen Flachzugstab mit dem Rechteckquerschnitt $2H \times$ Dicke 1, siehe Bild 15. Die Eigenspannungsquelle sei mit $\varepsilon_q(y)$ allgemein vorgegeben, man vergleiche Abschnitt 3. Die zugehörige Eigenspannungsverteilung berechnet sich nach Gl. (13). Sie ist in Bild 15 als Span-

nungsverlauf a dargestellt. Überlagert man die gleichmäßige Lastspannung σ_0 gemäß Gl. (129) linear, ergibt sich der in Bild 15 gestrichelte Spannungsverlauf b . Dieser stellt sich in Wirklichkeit nicht ein, da die Streckgrenze σ_F nicht überschritten werden kann.

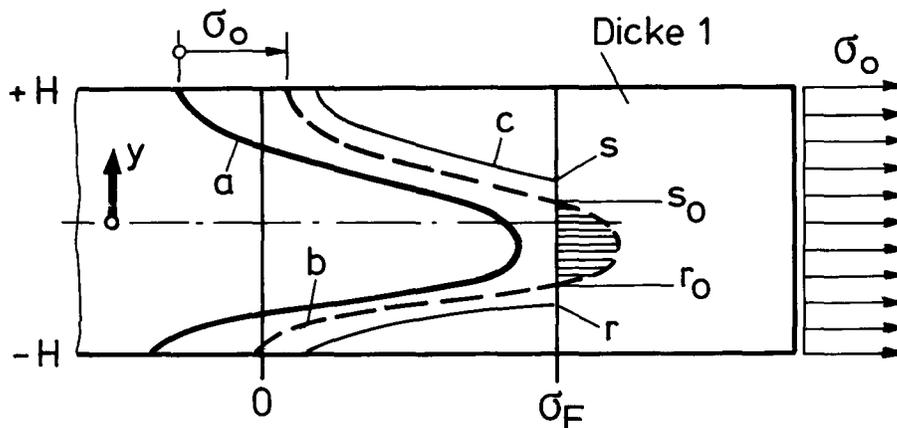


Bild 15: Der elastisch-plastische 1D-1K-Überlagerungsfall

- a: Eigenspannungsverlauf
- b: Resultierender Spannungsverlauf aus linearer Überlagerung
- c: Resultierender Spannungsverlauf aus nichtlinearer Überlagerung
- r, s: Koordinaten des tatsächlichen Fließbereiches

Der durch die konstante Fließspannung σ_F abgeschnittene Spannungsverlauf b genügt, wie aus der schraffierten Fläche in Bild 15 ersichtlich, nicht den Gleichgewichtsbedingungen. Infolgedessen hat die in Bild 15 zunächst grafisch ermittelte Fließzone $r_0 \leq y \leq s_0$ noch nicht ihre endgültige Ausdehnung erreicht. Die Werkstoffbereiche oberhalb von s_0 und unterhalb von r_0 werden vielmehr durch die Belastung σ_0 soweit auf Fließniveau angehoben, bis die Kräfte- und Momentengleichgewichtsbedingung erfüllt sind. Damit ist der elastisch-plastische Überlagerungsvorgang abgeschlossen und der endgültige lokale Fließbereich $r \leq y \leq s$ bestimmt, Bild 15. Die aus der elastisch-plastischen Überlagerung hervorgehende resultierende Beanspru-

chung ist in Bild 15 als Spannungsverlauf c dargestellt.

Die Grundgleichungen zur Beschreibung des vorliegenden nichtlinearen 1D-1K-Überlagerungsfalles lauten in Anlehnung an das Gleichungssystem (4) bis (8) wie folgt:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_q , \quad (137)$$

$$\sigma = E\varepsilon_e , \quad (138)$$

$$\text{für } -H \leq y \leq r \text{ und } s \leq y \leq +H ,$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_F}{E} + \varepsilon_q + \varepsilon_p , \quad (139)$$

$$\sigma = \sigma_F = \textit{konst.} , \quad (140)$$

$$\text{für } r < y < s ,$$

$$\varepsilon = C_1 y + C_2 , \quad (141)$$

$$\int_{-H}^{+H} \sigma dy = 2H\sigma_0 , \quad (142)$$

$$\int_{-H}^{+H} y\sigma dy = 0 , \quad (143)$$

$$\text{für } -H \leq y \leq +H .$$

Alle veränderlichen Größen hängen nur von y ab. Die Gln.(137) und (138) beschreiben die beiden elastischen Bereiche, die Gln.(139) und (140) den Bereich des örtlichen Fließens, man vergleiche Bild 15. In Gl.(139) kennzeichnet $\varepsilon_p = \varepsilon_p(y)$ die durch den Überlagerungsvorgang eingeleiteten plastischen Deformationen, die Größe σ_F/E die Streckgrenzdehnung nach Gl.(1). Unabhängig vom elastischen oder plastischen Werkstoffverhalten gelten im Gesamtbereich die Verträglichkeitsbedingung Gl.(141) und die beiden Gleichgewichtsbedingungen Gl.(142) und Gl.(143).

Zunächst werden die Spannungen für die beiden elastisch gebliebenen Bereiche berechnet. Einsetzen von Gl.(137) und Gl.(141) in Gl.(138) liefert:

$$\sigma = E\{C_1 y + C_2 - \varepsilon_q(y)\} . \quad (144)$$

Jetzt werden die beiden Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet. Einsetzen von Gl.(140) und Gl.(144) in die Kräftegleichgewichtsbedingung Gl.(142) und in die Momentengleichgewichtsbedingung Gl.(143) ergibt:

$$\int_{-H}^r E(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) dy + \int_r^s \sigma_F dy + \int_s^{+H} E(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) dy = 2H\sigma_0 , \quad (145)$$

$$\int_{-H}^r yE(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) dy + \int_r^s y\sigma_F dy + \int_s^{+H} yE(C_1 y + C_2 - \varepsilon_q) dy = 0 . \quad (146)$$

In diesen beiden Gleichungen treten vier Unbekannte auf. Es handelt sich um die beiden Konstanten C_1 und C_2 aus der Kompatibilitätsbedingung Gl.(141) und um die Bereichsgrenzen r und s des örtlichen Fließens. Die beiden noch fehlenden Gleichungen ergeben sich aus Gl.(144) wie folgt: An den beiden Stellen $y = s$ und $y = r$ muß die Spannungsverteilung in den elastischen Bereichen nach Gl.(144) die Fließgrenze σ_F erreichen, siehe Bild 15. Damit stehen zwei zusätzliche Bedingungen zur Verfügung, die den Spannungsübergang vom elastischen zum plastischen Bereich regeln.

Ausrechnen der Integrale in den Gln.(145) und (146) und zweimaliges Ausschreiben der Gl.(144) als elastisch-plastische Übergangsbedingung für die Spannungen liefert:

$$(r^2 - s^2)C_1 + 2(r - s + 2H)C_2 = \frac{2}{E} \{ 2H\sigma_0 + \sigma_F(r - s) + E[\int_{-H}^r \varepsilon_q dy + \int_s^{+H} \varepsilon_q dy] \} , \quad (147)$$

$$2(r^3 - s^3 + 2H^3)C_1 + 3(r^2 - s^2)C_2 = \frac{6}{E} \{ \sigma_F \frac{r^2 - s^2}{2} + E[\int_{-H}^r y\varepsilon_q dy + \int_s^{+H} y\varepsilon_q dy] \} , \quad (148)$$

$$\sigma_F = E\{C_1 s + C_2 - \varepsilon_q(s)\} , \quad (149)$$

$$\sigma_F = E\{C_1 r + C_2 - \varepsilon_q(r)\} . \quad (150)$$

Das Gleichungssystem (147) bis (150) beschreibt den nichtlinearen elastisch-plastischen 1D-1K-Überlagerungsfall. Bei vorgegebener Eigenspannungsquelle $\varepsilon_q(y)$ können die vier Größen C_1 , C_2 , r und s aus den Gln.(147) bis (150) berechnet werden. Mit C_1 und C_2 ergibt sich aus Gl.(141) die Gesamtdehnung ε , die elastische Dehnungsverteilung ε_e berechnet sich aus Gl.(137), die Spannungsverteilung σ in den elastischen Bereichen liefert Gl.(138). Die durch den Überlagerungsvorgang ausgelösten lokalen plastischen Deformationen $\varepsilon_p(y)$ lassen sich aus der Gl.(139) bestimmen. Damit sind alle Größen bekannt.

Wir kommen zurück auf das den elastisch-plastischen Überlagerungsmechanismus beschreibende Gleichungssystem (147) bis (150). Zur Auflösung desselben kann man die beiden letzten Gln.(149) und (150) nach C_1 und C_2 auflösen:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_q(r) - \varepsilon_q(s)}{r - s}, \quad (151)$$

$$C_2 = \frac{\sigma_F}{E} + \frac{r\varepsilon_q(s) - s\varepsilon_q(r)}{r - s}. \quad (152)$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die Gln.(147) und (148) liefert zwei nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der Fließbereichsgrenzen r und s . Damit ist das Gleichungssystem (147) bis (150) auf zwei nichtlineare Gleichungen reduziert. Diese können durch Iteration aufgelöst werden, wobei als Schätzung für die benötigten Anfangswerte des Iterationsverfahrens nach [55] die grafisch oder rechnerisch bestimmten Schnittpunkte r_0 und s_0 gewählt werden können, siehe Bild 15.

Bei ansteigender Lastspannung σ_0 wird der vollplastische Zustand bei $r = -H$ und $s = +H$ erreicht, siehe Bild 15. Einsetzen dieser Werte in die Momentengleichgewichtsbedingung Gl.(148) zeigt, daß diese identisch erfüllt ist. Aus der Kräftegleichgewichtsbedingung Gl.(147) folgt mit $r = -H$ und $s = +H$ die von $\varepsilon_q(y)$ und damit von den Eigenspannungen unabhängige Grenzspannung $\sigma_0 = \sigma_F$. Die von dem Stab ertragbare größte Belastung, auch Traglast genannt, ist demnach $2H\sigma_F$. Dieser Wert, vom vorliegenden Eigenspannungszustand vollständig unabhängig, entspricht der Traglast eines eigenspannungsfreien Stabes.

Spezialisierung für symmetrische Eigenspannungsverteilungen

Für symmetrische Eigenspannungsquellen bzw. für symmetrische Eigenspannungsverteilungen gilt

$$\varepsilon_q(y) = \varepsilon_q(-y) \quad \text{und} \quad r = -s. \quad (153)$$

Einsetzen in die Gln.(151) und (152) liefert:

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{\sigma_F}{E} + \varepsilon_q(s). \quad (154)$$

Mit den Gln. (153) und (154) ergibt sich aus Gl. (147)

$$s = \frac{1}{\varepsilon_q(s)} \left\{ H \frac{\sigma_F - \sigma_0}{E} + H \varepsilon_q(s) - \int_s^{+H} \varepsilon_q dy \right\} \quad (155)$$

als Bestimmungsgleichung für die symmetrische Ausdehnung s der plastischen Zone in Abhängigkeit von $\varepsilon_q(y)$, σ_F und σ_0 . Gl. (155) ist bereits auf die für Iterationsverfahren günstige Form $s = f(s)$ gebracht. Die Konvergenz ist gewährleistet, siehe [55].

Als Beispiel wurde die in y symmetrische Eigenspannungsquelle

$$\varepsilon_q(y) = e \left(\frac{y^2}{H^2} - 1 \right) \quad (156)$$

behandelt, mit $e = \sigma_0/E$ als auf die Lastspannung σ_0 bezogene Dehnung, man vergleiche hierzu die Arbeit [55]. Die zur Eigenspannungsquelle Gl. (156) zugehörige Eigenspannungsverteilung, berechnet nach Gl. (13), lautet

$$\sigma(y) = \sigma_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{y^2}{H^2} \right). \quad (157)$$

Die Eigenspannungsverteilung nach Gl. (157) ist in Bild 16 als Spannungsverlauf a dargestellt. Aus der linearen Überlagerung mit der Lastspannung $\sigma_0 = 12/13 \cdot \sigma_F$ ergibt sich der Spannungsverlauf b und $s_0 = H/2$, siehe Bild 16. Die iterative Auflösung der für Symmetrie geltenden Gl. (155) liefert für die endgültige Ausdehnung des örtlichen Fließens $s = 0.6735 H$ und den aus Last- und Eigenspannungen entstehenden resultierenden Spannungsverlauf c , siehe Bild 16.

Bei Zurücknahme der Lastspannung σ_0 werden die einzelnen Fasern des Stabquerschnittes elastisch entlastet. Dies führt nach Entlastung zu dem veränderten Eigenspannungsverlauf d , Bild 16.

Vergleicht man die ursprüngliche Eigenspannungsverteilung a mit der durch den einmaligen Belastungsvorgang veränderten Eigenspannungsverteilung d , erkennt man aus Bild 16 den folgenden grundlegenden Sachverhalt: Die Eigenspannungsspitzen werden sowohl im Zug- als auch im Druckbereich abgebaut. Einmalige Be- und Entlastung führt demnach bei Auslösen von örtlichen Fließvorgängen zu einem Abbau der Eigenspannungen.

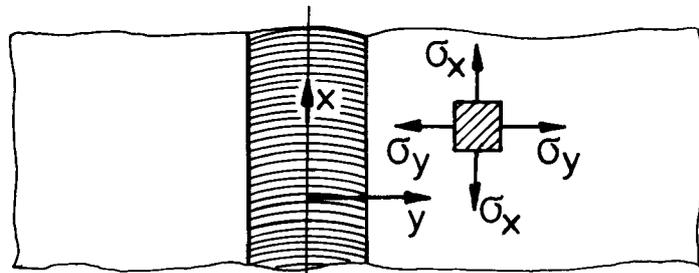
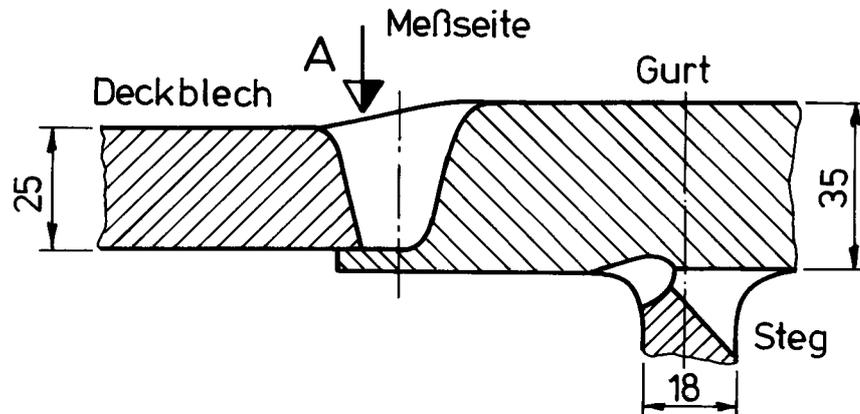
Der beschriebene Vorgang wird daher als Verfahren zum Abbau der Eigenspannungen eingesetzt. Dabei versucht man, durch gezielte einmalige Be- und Entlastung von Bauteilen und Konstruktionen den vorliegenden Eigenspannungszustand zu entschärfen. Das Verfahren bezeichnet man als Überbelasten oder als Overstressing. Nach den Erfahrungen, die man an Brücken, Fahrzeugen, Druckbehältern, Dükern und Rohrleitungen gesammelt hat, kann man das Overstressing als Mittel zum Eigenspannungsabbau da empfehlen, wo thermisches Entspannen nicht möglich ist, siehe [54,56]. Auf das Verhalten innerer Fehlstellen (Mikrorisse, Kerben) bei Anwendung der Overstressing-Behandlung wird in der Arbeit [54] eingegangen.

15.4 Ein Beispiel aus der Praxis

Der Abbau von Eigenspannungen durch elastisch-plastische Überlagerung mit Lastspannungen wurde im Abschnitt 15.3 analytisch nachgewiesen, siehe Bild 16. Als Ergänzung dieser Darstellung wird jetzt ein Beispiel aus der Praxis angeführt, welches der Arbeit [54] entnommen wurde.

An einer geschweißten Doppelschalenkonstruktion wurden die an der Innenschale herrschenden Oberflächeneigenspannungen in geschweißtem Zustand und nach einer mit plastischen Verformungen gekoppelten Belastungsprobe bestimmt. Die innere Schale, bestehend aus schmalen Gurt- und breiten Deckblechen, ist über die an den Gurtblechen befestigten Stege mit der Außenschale verbunden, siehe Bild 17. Die Außenschale ist in Bild 17 nicht dargestellt. Die Eigenspannungsmessungen erfolgten in einem Großversuch (Maßstab 1:1) mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifenrosetten.

In Bild 17 sind die gemessenen Normaleigenspannungen in Schweißrichtung, genannt Längseigenspannungen σ_x , im Bereich der Stumpfnah zwischen Gurt- und Deckblech in Abhängigkeit vom Nahtabstand y aufgetragen. Die Kurve a kennzeichnet die Eigenspannungen in geschweißtem Zustand, die Kurve b gibt den Eigenspannungsverlauf nach einmaliger Be- und Entlastung wieder, Bild 17.



Ansicht in Richtung A

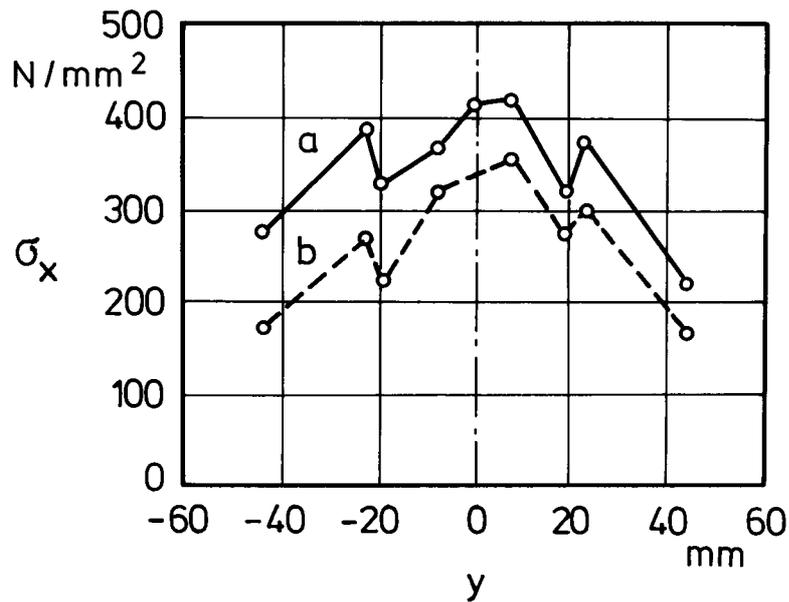


Bild 17: Längseigenspannungen σ_x an der Oberfläche der Innenschale einer Doppelschalenkonstruktion, nach [54]

a: In geschweißtem Zustand

b: Nach einmaliger Be- und Entlastung

Wie aus den beiden Eigenspannungsauftragungen ersichtlich, führt die durchgeführte elastisch-plastische Überlagerung von Lastspannungen zu einem bemerkenswerten Abbau der Eigenspannungen im untersuchten Bereich. Aus der Zuordnung von Querschnitt und Eigenspannungsverlauf erkennt man, daß im Bereich der beiden Wärmeeinflußzonen die für Umwandlungsvorgänge charakteristischen Einsattelungen in der Eigenspannungsverteilung auftreten, man vergleiche Abschnitt 5.3. Diese umwandlungsbedingten Einsattelungen bleiben nach der Umlagerung der Eigenspannungen erhalten, siehe Kurve *b*, Bild 17. Aus Vergleich der Kurven *a* und *b* erkennt man ferner, daß der im Deckblech (links von Nahtmitte) erzielte Eigenspannungsabbau etwa doppelt so groß wie im Bereich des Steges (rechts von Nahtmitte) ausfällt. Dies hängt offenbar mit der gegenüber dem Deckblech größeren Steifigkeit des Gurt-Steg-Bereiches zusammen. Der Mechanismus des Eigenspannungsabbaus durch Overstressing setzt deshalb, wie am Beispiel von Bild 17 besonders gut erkennbar, eine möglichst fließweiche Gestaltung voraus.

16 Schrifttum

- [1] Macherauch, E., H. Wohlfahrt u. U. Wolfstieg:
Zur zweckmäßigen Definition von Eigenspannungen. Härterei - Technische Mitteilungen 28 (1973) Nr. 3, 201/211.
- [2] Schimmöller, H.:
Vorlesungen über Elastizitätstheorie. Vorlesungsmanuskript Nr. 21, Universität Hamburg 1990.
- [3] Betten, J.:
Elastizitäts- und Plastizitätslehre. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg u. Sohn 1985.
- [4] Eschenauer, H. u. W. Schnell:
Elastizitätstheorie I: Grundlagen, Scheiben und Platten. Mannheim/Wien/Zürich: B.I.-Wissenschaftsverlag 1986.
- [5] Hahn, H. G.:
Elastizitätstheorie. Stuttgart: G. B. Teubner 1985.
- [6] Schimmöller, H.:
Vorlesungen über Festigkeitslehre. Vorlesungsmanuskript Nr. 17, Universität Hamburg 1989.
- [7] Pestel, E. u. J. Wittenburg:
Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre. Mannheim/Wien/Zürich: B.I.-Wissenschaftsverlag 1981.
- [8] Schnell, W., D. Gross u. W. Hauger:
Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo: Springer-Verlag 1985.
- [9] Reißner, H.: Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen. ZAMM 11 (1931) Nr. 1, 1/8.
- [10] Rieder, G.:
Spannungen und Dehnungen im gestörten elastischen Medium. Zeitschr. für Naturforschung 11 a (1956), 171/173.

- [11] Rieder, G.:
Eigenspannungen in unendlich geschichteten und elastisch anisotropen Medien, insbesondere in Weiss'schen Bezirken und in geschichteten Platten. Abh. d. Brschwg. Wiss. Gesellschaft 11 (1959), 20/61.
- [12] Indenbom, V. L. u. L. I. Vidro:
Thermoplastic and Structural Stresses in Solids. Soviet Physics - Solid State 6 (1964) Nr. 4, 767/772.
- [13] Kröner, E.:
Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1958.
- [14] Stickforth, J.:
Die Krümmung freier Bimetallstreifen sowie allgemeiner freier Streifen mit beliebiger Ortsabhängigkeit der thermischen und elastischen Eigenschaften über den Streifenquerschnitt. Techn. Mitt. Krupp, Forsch.-Ber. 21 (1963) Nr. 3, 85/93.
- [15] Ismar, H. u. O. Mahrenholtz:
Technische Plastomechanik. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg u. Sohn 1979.
- [16] Duschek, A. u. A. Hochrainer:
Tensorrechnung in analytischer Darstellung. III. Teil: Anwendungen in Physik und Technik. Wien/New York: Springer-Verlag 1965.
- [17] Das Zustandsschaubild Eisen-Kohlenstoff und die Grundlagen der Wärmebehandlung der Eisen-Kohlenstoff-Legierungen. Düsseldorf: Verlag Stahleisen M.B.H. 1961.
- [18] Domke, W.:
Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung. Essen: Verlag W. Giradet 1964.
- [19] Reed-Hill, R. E.:
Physical Metallurgy Principles. New York/Cincinnati/Toronto/London/Melbourne: Van Nostrand Reinhold Company 1964.
- [20] Ruge, J.:
Handbuch der Schweißtechnik. Bd. I: Werkstoffe. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1980.

- [21] Rieder, G.:
Zur Entstehung und Berechnung der Gußspannungen. ZAMM 45 (1965) Nr. 4, 153/170.
- [22] Gallagher, R. H.:
Finite-Element-Analysis. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1976.
- [23] Zienkiewicz, O. C.:
Methode der finiten Elemente. München/Wien: Carl Hauser Verlag 1984.
- [24] Gawehn, W.:
Finite-Element-Methode. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg u. Sohn 1985.
- [25] Bathe, K.-J.:
Finite-Elemente-Methoden. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo: Springer-Verlag 1986.
- [26] Kämmer, G., H. Franek u. H. G. Recke:
Einführung in die Methode der finiten Elemente. München/Wien: Carl Hauser Verlag 1988.
- [27] Schimmöller, H.:
Das Variationsproblem der Elastostatik. Hamburg: Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 489, 1989.
- [28] Schimmöller, H.:
Grundgleichungen und Variationsproblem der Elastodynamik. Hamburg: Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 492, 1989.
- [29] Stickforth, J.:
Über einige notwendige Bedingungen für Eigenspannungszustände. Techn. Mitt. Krupp, Forsch.-Ber. 20 (1962) Nr. 1, 29/32.
- [30] Schimmöller, H.:
Vorlesungen über Werkstoffmechanik. Teil I: Eigenspannungszustände. Vorlesungsmanuskript Nr. 20, Universität Hamburg 1989/1990.
- [31] Biezeno, C. B. u. R. Grammel:
Technische Dynamik. Erster Band: Grundlagen und einzelne Maschinenteile. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1953.
- [32] Szabó, I.:
Höhere Technische Mechanik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1960.

- [33] Saada, A. S.:
Elasticity. Theory and Applications. New York/Toronto/Oxford/Sydney/Braunschweig:
Pergamon Press Inc. 1974.
- [34] Göldner, H.:
Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1. Weinheim: Physik Verlag 1979.
- [35] Timoshenko, S. P. u. J. N. Goodier:
Theory of Elasticity. Auckland/... /Tokyo: Mc Graw-Hill Book Company 1982.
- [36] Duschek, A.:
Vorlesungen über höhere Mathematik, I. Band. Wien: Springer-Verlag 1956.
- [37] Sokolnikoff, I. S.:
Mathematical Theory of Elasticity. New York/Toronto/London: Mc Graw-Hill Book Com-
pany, Inc. 1956.
- [38] Schimmöller, H.:
Experimentell-rechnerische Bestimmung von Eigenspannungen in austenitplattierten
Stahlblechen. Dissertation an der Technischen Universität Braunschweig, 1971.
- [39] Schimmöller, H.:
Bestimmung von Eigenspannungen in ebenen plattierten Werkstoffen. Teil I: Rechnerische
Grundlagen. Materialprüfung 14 (1972) Nr. 4, 115/122.
- [40] Schimmöller, H. A. u. J. L. Ruge:
Estimation of residual stresses in reactor pressure vessel steel specimens clad by stainless
steel strip electrodes. International conference on residual stresses in welded construction
and their effects, London 15.-17. November 1977, Abington Hall/Cambridge: The Welding
Institute 1977.
- [41] Bertram, W., K. Detert u. H. Schimmöller:
Eigenspannungen in austenitisch plattiertem dickwandigem Feinkornbaustahl. Archiv
Eisenhüttenwesen 48 (1977) Nr. 12, 623/628.
- [42] Dritte Arbeitssitzung der Gemeinschaft Experimentelle Spannungsanalyse (GESA) im
VDI/VDE, Arbeitsgruppe 3: Experimentelle Verfahren zur Bestimmung von Eigenspan-
nungen. 9. März 1989 in Mülheim, Anlage 3 zur Tagesordnung.

- [43] König, G. u. H. Kockelmann:
Ermittlung von Eigenspannungen in Folien und dünnen Walzbändern mittels Zerlege- und Abtrageverfahren unter Verwendung der Schattenmoirétechnik. Kolloquium über Eigenspannungen und Oberflächenverfestigung. Ingenieurhochschule Zwickau DDR, 29.-30. November 1989.
- [44] Klöppel, K.:
Zur Weiterentwicklung der Eigenspannungsforschung. Neuzeitliche Schweißtechnik. Vorträge der Großen Schweißtechnischen Tagung München 1960. Fachbuchreihe Schweißtechnik, Bd. 20, S. 6/24. Düsseldorf: Deutscher Verlag für Schweißtechnik GmbH 1960.
- [45] Paetzold, H.:
Beitrag zur Gütesicherung Unterwasser-Plasmageschnittener Blechkanten in der Schiffskonstruktion. Forschungszentrum des Deutschen Schiffbaus e.V., Bericht Nr.211/1989, Hamburg 1989.
- [46] Rao, K. N., J. Ruge u. H. Schimmöller:
Bestimmung der durch Brennschneiden von Stahlblechen verursachten Eigenspannungen. Forschung im Ingenieurwesen 36 (1970) Nr.6, 192/200.
- [47] Ruge, J. u. H. Schimmöller:
Berechnung von Eigenspannungen in brenngeschnittenen Stahlblechen aus St E 36. DVS-Bericht 22, S. 67/71. Düsseldorf: Deutscher Verlag für Schweißtechnik 1971.
- [48] Schimmöller, H.:
Bestimmung von Eigenspannungen in ebenen plattierten Werkstoffen. Teil II: Eigenspannungen in warmgewalzten und sprenggeschweißten austenitplattierten Stahlblechen. Materialprüfung 14 (1972) Nr.11, 380/387.
- [49] Ruge, J. u. H. Schimmöller:
Bestimmung des zweidimensionalen Schweiß- und Wärmespannungszustandes in einem mit Bandlektrode aus nichtrostendem Stahl unterpulverschweißplattierten Blech aus unlegiertem Baustahl. Schweißen und Schneiden 24 (1972) Nr.10, 391/394.
- [50] Schimmöller, H.:
Berechnung des numerischen Einflusses von Zerlegeschrittweite und Auswertgleichung auf die Bestimmungsgenauigkeit von experimentell-rechnerischen Eigenspannungsermittlungen. Zeitschrift für Werkstofftechnik 4 (1973) Nr. 6, 315/322.

- [51] Stäblein, F.:
Spannungsmessungen an einseitig abgelöschten Knüppeln. Kruppsche Monatshefte 12 (Mai 1931), 93/99.
- [52] Treuting, R. G. u. W. T. Read:
A mechanical determination of biaxial residual stress in sheet materials. J. appl. phys. 22 (1951) Nr. 2, 130/134.
- [53] Lormes, H.:
Dauerschwingfestigkeitsuntersuchungen an brenngeschnittenen Proben aus Stahl St 52-3 mit und ohne Nachbehandlung auf der Grundlage von Rißfortschrittmessungen. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, AIF-Bericht Nr. 5062, 1984.
- [54] Schimmöller, H.:
Eigenspannungen. Abschnitt 23.5 in: J. Ruge, Handbuch der Schweißtechnik, Bd. II, Verfahren und Fertigung, S. 277/315. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1980.
- [55] Schimmöller, H.:
Rechnerische Behandlung der Verlagerung von Eigenspannungen in einem Stabmodell durch Überbelastung. Zeitschrift für Werkstofftechnik 3 (1972) Nr. 6, 301/306.
- [56] Rädiker, W.:
Anwendung einer gezielten Überbelastung zur Verringerung der Sprödbbruchgefahr. Schweißen und Schneiden 22 (1970), 178/183.