

506 | Juni 1990

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Hans Georg Zibell

**Effekte der gegenseitigen  
Beeinflussung bei mehreren  
rotationssymmetrischen Körpern mit  
vertikaler Achse in harmonischen  
Schwerewellen**

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

**Effekte der gegenseitigen Beeinflussung bei mehreren rotationsymmetrischen Körpern mit vertikaler Achse in harmonischen Schwerewellen**

Hans Georg Zibell, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1990

ISBN: 3-89220-506-x

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 506

EFFEKTE DER GEGENSEITIGEN BEEINFLUSSUNG  
BEI MEHREREN ROTATIONSSYMMETRISCHEN KÖRPERN  
MIT VERTIKALER ACHSE  
IN HARMONISCHEN SCHWEREWELLEN

von

Hans Georg Zibell

Juni 1990

<u>Inhalt</u>	Seite
Bezeichnungen	I
1. Einleitung	1
2. Formulierung der Randwertaufgabe	
2.1 Allgemeine Formulierung	5
2.2 Linearisierung der Randwertaufgabe	12
2.3 Aufspaltung der linearen Randwertaufgabe; Diffraktions- und Abstrahlungsproblem	16
2.4 Die lineare Randwertaufgabe einer Anordnung mehrerer Körper	22
2.5 Belastungen und Bewegungen	24
3. Lösung der linearen Randwertaufgabe	
3.1 Das Makroelemente-Verfahren für rotations- symmetrische Körper mit vertikaler Achse	29
3.2 Die Erweiterung des Makroelemente-Verfahrens auf mehrere rotationssymmetrische Körper nach der Methode der "Vielfachstreuung"	46
4. Ermittlung von Kräften aus der Betrachtung des infiniten Elementes; Beziehungen zwischen den Dämpfungskoeffizienten	65
5. Driftkräfte in den horizontalen Richtungen nach dem Impulssatz	85
6. Numerische Ergebnisse	97
7. Zusammenfassung	107
8. Literatur	109
9. Anhang	113
10. Abbildungen	133

## Bezeichnungen

$A_{WL}$	Wasserlinienfläche
$a$	äußerer Radius eines rotationssymmetrischen Körpers
$a_Q$	äußerer Radius des Körpers Q
$a_e, a_p$	innerer Radius des Elementes l bzw. p
$a_{ej}^{PQ}, b_{ej}^{PQ}$	hydrodynamische Masse und Koeffizient der Potentialdämpfung
$c_{ej}^P$	hydrostatischer Rückstellkoeffizient
$d$	Wassertiefe
$d_e$	Abstand zwischen Meeresboden und unterer horizontaler Elementgrenze (Oberseite des Körpers) des Elementes l
$E$	Energie
$F_{Wj}^Q$	erregende Wellenkraft, die auf den Körper Q in Richtung j wirkt
$F_{Wj0}^Q$	Amplitude der erregenden Wellenkraft
$\overline{F_{(2)j}^Q}^t$	Driftkraft, die auf den Körper Q in Richtung j wirkt
$F_R$	hydrodynamische Reaktionskraft
$F_{m\alpha}, G_{m\alpha}$	Fourierkoeffizienten
$g$	Erdbeschleunigung
$g_D, g_j$	partikulärer Anteil des Potentials
$h_p$	Abstand zwischen Meeresboden und oberer horizontaler Elementgrenze (Unterseite des Körpers) des Elementes p
$H$	Wellenhöhe
$I$	Impuls

$J_m()$ , $H_m()$	Besselfunktion, Hankelfunktion der ersten Art, der Ordnung m
$I_m()$ , $K_m()$	modifizierte Besselfunktionen der ersten bzw. der zweiten Art, der Ordnung m
$\rho$ , $\rho_j$	Masse, bzw. Massenkoeffizient
$\vec{n}$ , $\vec{n}^*$	Vektor der Flächennormalen - von der Fläche in die Flüssigkeit gerichtet bzw. von der Oberfläche des betrachteten Gebietes nach außen gerichtet
$n_j$	generalisierter Richtungskosinus
$p$	Druck
$p_{inst}$	instationärer Druck
$r, \varphi, z$	Zylinder-Koordinaten
$R$	Gebiet der Flüssigkeit
$R_{PQ}$	Abstand, bzw. horizontaler Abstand zwischen den Zentren der Körper P und Q
$s_j^Q, \dot{s}_j^Q, \ddot{s}_j^Q$	Bewegungs-, Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungskomponente des Körpers Q in Richtung j
$s_{j0}^Q$	Amplitude der Bewegungskomponente
$S$	Oberfläche
$S_Q$	benetzte Oberfläche des Körpers Q
$t$	Zeit
$u, v, w$	Geschwindigkeitskomponenten des Wasserteilchens
$V$	Volumen
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$x_P, y_P, z_P$	Koordinaten im lokalen System des Körpers P
$\alpha$	Wurzeln der transzendenten Gleichung $\omega^2/g + \alpha \tan(\alpha d) = 0$ mit $\alpha_0 = -i\kappa$
$\epsilon_m$	Neumann Symbol ( $\epsilon_0 = 1; \epsilon_m = 2$ für $m \geq 1$ )

$\delta_e$	Normierungsgröße $\delta_e = d$ für $l=1,2,3$ ; $\delta_e = d^2$ für $l=4,5,6$
$\delta_{ej}$	Kronecker Symbol ( $\delta_{ee} = 1$ ; $\delta_{ej} = 0$ für $l \neq j$ )
$\zeta$	Wellenoberfläche
$\kappa$	Wellenzahl ( $\alpha_0 = -i\kappa$ )
$\mu$	Wellenanlaufwinkel
$\rho$	Dichte des Wassers
$\phi$	Geschwindigkeitspotential
$\phi_0$	Geschwindigkeitspotential der ungestörten harmonischen Elementarwelle
$\phi_7$	Störpotential
$\phi_D$	Potential des Diffraktionsproblems $\phi_D = \phi_0 + \phi_7$
$\phi_{jq}$	Potential des Abstrahlungsproblems, das durch die harmonische Bewegung des Körpers $Q$ in Richtung $j$ entsteht
$\varphi$	zeitunabhängiger Anteil des Geschwindigkeitspotentials, komplexe Amplitude
$\lambda$	Wellenlänge
$\omega$	Kreisfrequenz
$\text{Re}(f)$	Realteil der komplexen Größe bzw. Funktion $f$
$\text{Im}(f)$	Imaginärteil
$\overline{f}$	konjugiert Komplexe zu $f$
$\overline{f}^t$	zeitunabhängiger Anteil (zeitlicher Mittelwert) der Funktion $f$
$\sum_{\alpha}^M$	Summe über alle Werte $\alpha$ , mit dem ersten Wert $\alpha_0 = -i\kappa$ (s.o.)
$\sum_{\alpha'}^M$	Summe über alle reellen Werte $\alpha'$ unter Ausschluß des imaginären Wertes $\alpha_0 = -i\kappa$
$\sum_{Q=1}^N$	Summe über alle Körper der Anordnung
$\sum_{Q^i=1}^N$	Summe über alle Körper mit Ausnahme des gerade betrachteten Körpers

## 1. Einleitung

In den letzten dreißig Jahren sind durch die Entwicklung der Offshore-Konstruktionen und durch die Weiterentwicklung der Schiffshydrodynamik bemerkenswerte Fortschritte auf dem Gebiet der hydromechanischen Analyse erzielt worden. Grundlage dieser Analyse ist die Untersuchung des Verhaltens von Konstruktionen unter der Wirkung harmonischer Elementarwellen (regelmäßiger Seegang). Dabei beeinflussen Typ und Größe der jeweiligen Struktur relativ zu den Wellenparametern die Kräfte, die vom umgebenden Medium auf die Struktur ausgeübt werden.

Die Gruppe der großvolumigen kompakten Strukturen läßt sich in guter Näherung potentialtheoretisch behandeln. Dies ist in den vergangenen Jahren mit Hilfe verschiedener numerischer Verfahren, vorwiegend in Form von linearen Rechnungen, durchgeführt worden.

Es wurden für kompakte Schwimmkörper beliebiger geometrischer Form die zwei- bzw. dreidimensionalen linearisierten Randwertaufgaben der Diffraktion und der Abstrahlung gelöst. Die gebräuchlichsten Methoden sind analytische und halbanalytische Verfahren, die Methode der konformen Abbildung (für ebene Probleme) und die Integralgleichungsverfahren /5/,/6/. In den letzten fünfzehn Jahren wurde zunehmend auch die Finite-Elemente-Methode verwandt /39/.

Die Klasse der rotationssymmetrischen Körper mit vertikaler Achse läßt sich vorteilhaft mit Hilfe spezieller Verfahren (vgl. z.B. /4/) behandeln.

In vielen Fällen konnte eine bemerkenswert gute Übereinstimmung mit dem Experiment festgestellt werden. Allerdings sind insbesondere die rein numerischen, allgemeingültigen Verfahren mit erheblichem Rechenaufwand und mit verfahrensspezifischen Schwierigkeiten verbunden (z.B. Irregularitäten beim Integralgleichungsverfahren, Erfüllung der Abstrahlbedingung bei der Finite-Elemente-Methode).

Viele Offshore Bauwerke bestehen aus zwei oder mehreren

Komponenten, die sehr nahe beieinander liegen, so daß ihre hydrodynamische Wechselwirkung nicht außer Acht gelassen werden kann. Solche Strukturgruppen sind z.B. mehrbeinige Schwerkraftstrukturen, Halbtaucher, Speicherbehälter; außerdem Strukturen, die in bestimmten Freiheitsgraden miteinander gekoppelt sind.

In den letzten zehn Jahren wurde eine Reihe von Untersuchungen an benachbarten Schwimmkörpern mit Berücksichtigung der hydrodynamischen Interaktion unter Verwendung verschiedener Verfahren durchgeführt (z.B. /16//28//30/).

Zylindrische Säulen, die auf dem Meeresboden stehen und bis über die Meeresoberfläche hinausragen, wurden bereits früher untersucht.

Das Diffraktionsproblem zweier vertikaler Zylinder haben Spring und Monkmeier /35/ basierend auf den theoretischen Konzepten von Mc Camy und Fuchs /17/ und Twersky /37/ gelöst. Ohkusu /27/ erweiterte das Verfahren der "Vielfachstreuung" /37/ (multiple scattering) für schwimmende Zylinder.

Neuere Untersuchungen - auch experimentelle - haben Reddy et. al. /32/ an Anordnungen von zwei und drei stehenden Zylindern durchgeführt.

Im Abschnitt 2. der vorliegenden Arbeit werden zunächst die allgemeinen potentialtheoretischen Grundlagen zur Behandlung der Randwertaufgabe für einen Körper, der sich unter der Wirkung einer Schwerewelle befindet, wiedergegeben. Das Vorgehen zur Linearisierung der Randwertaufgabe zur Ermittlung des Geschwindigkeitspotentials des Strömungsfeldes, das sich infolge einer erregenden Welle um einen schwimmenden Körper ausbildet, wird dargestellt. Dabei wird die Randwertaufgabe aufgespalten in das Diffraktionsproblem und das Abstrahlungsproblem. Diese Betrachtung wird dann auf eine Anordnung mehrerer Körper unter Berücksichtigung der gegenseitigen hydrodynamischen Wechselwirkung erweitert.

In Abschnitt 3. werden die Grundzüge des hier benutzten

Verfahrens zur hydrodynamischen Analyse eines einzelnen rotationssymmetrischen Körpers mit vertikaler Achse dargestellt. Dieses Verfahren wurde bereits in /8/,/20/ und /11/ ausführlich dargestellt und kann als konsequente Weiterentwicklung der von Garret /4/ für einen einfachen schwimmenden Zylinder aufgestellten Lösungsmethode angesehen werden.

Der Grundgedanke des hier benutzten halbanalytischen Verfahrens liegt in der Aufteilung des Strömungsfeldes in koaxiale Ringelemente - sogenannte Makroelemente - um den Körper herum. Durch die Stufen bei den aneinandergrenzenden Makroelementen wird dabei die Körperkontur idealisiert.

Das Potential des Strömungsfeldes wird in den einzelnen Makroelementen durch geeignete Fourier-Reihenansätze beschrieben. Aus der Forderung nach Stetigkeit des Potentials und seiner Ableitung in radialer Richtung an den Grenzen benachbarter Elemente ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Fourierkoeffizienten.

Die Makroelemente-Methode für den einzelnen rotationssymmetrischen Körper wird dann mit Hilfe des von Twersky /37/ aufgestellten Verfahrens der Vielfachstreuung ("multiple scattering") auf eine Anordnung mehrerer Körper erweitert (/10/). Es wird ein einheitliches Konzept sowohl für das Diffraktions- als auch für das Abstrahlungsproblem dargelegt.

Im Abschnitt 4. wird gezeigt, wie die Haskind-Newman-Beziehung /24/,/21/ vorteilhaft eingesetzt werden kann, um die erregenden Wellenkräfte und auch Kopplungskoeffizienten der hydrodynamischen Masse und der Potentialdämpfung zu ermitteln. Dazu wird eine Betrachtung der Potentiale im äußeren Element auf einer Zylindermantelfläche als Kontrollfläche, die einen einzelnen Körper innerhalb der Anordnung umschließt, durchgeführt. Es werden weiter einige energetische Betrachtungen dargelegt. Hiermit ergibt sich eine Reihe von Kontrollmöglichkeiten für die Ergebnisse, die nicht auf die rotationssymmetrischen Körper beschränkt sind.

Schließlich wird im Abschnitt 5. abgeleitet, wie die

Driftkräfte auf einen einzelnen Körper innerhalb der Anordnung in den horizontalen Richtungen ebenfalls aus der Betrachtung des Potentials im äußeren Element gewonnen werden können. Dazu wurde das von Newman /25/ aufgestellte Konzept, das auf einer Betrachtung des Fernfeldes bei unbeschränkter Wassertiefe beruht, modifiziert.

Auswirkungen der Interaktion auf Kräfte, Massen und Dämpfungskoeffizienten sowie auf die Bewegungen frei schwimmender Körper werden an einer Reihe ausgewählter Beispiele gezeigt und in Abschnitt 6. diskutiert.

Vergleiche von Ergebnissen, die mit Hilfe des hier dargestellten Verfahrens gewonnen wurden, mit veröffentlichten Ergebnissen anderer Autoren zeigen eine ausgezeichnete Übereinstimmung.

Das Verfahren bietet gegenüber einem Integralgleichungsverfahren (/8/) erhebliche Vorteile sowohl in Hinsicht auf die Rechenzeit als auch in Hinsicht auf die Genauigkeit der Ergebnisse.

## 2. Formulierung der Randwertaufgabe

### 2.1 Allgemeine Formulierung

Betrachtet wird ein beliebiger starrer Körper, frei schwimmend oder auf dem Meeresboden stehend, in einer harmonischen Elementarwelle (Abb. 1). Der Flüssigkeitsbereich um den Körper herum erstreckt sich in der Vertikalen vom starren ebenen Meeresboden bis zur freien Meeresoberfläche und in der Horizontalen allseitig bis ins Unendliche. Die Flüssigkeit wird als reibungsfrei und inkompressibel angenommen. Es wird ein globales Koordinatensystem  $(x, y, z)$  bzw.  $(r, \varphi, z)$ , mit Ursprung auf dem Meeresboden zugrundegelegt.

Für das Strömungsfeld um den Körper herum läßt sich das Geschwindigkeitspotential  $\phi$ , das eine Funktion des Ortes und der Zeit ist ( $\phi = \phi(x, y, z, t)$ ), definieren.

Das Potential hat im gesamten Flüssigkeitsbereich die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen und an den Rändern des Flüssigkeitsbereiches,

- an der benetzten Körperoberfläche
- am Meeresboden
- an der Meeresoberfläche
- im Unendlichen

die im weiteren näher ausgeführten Randbedingungen.

Die hier aufgeführten Grundlagen findet man z.B. bei Stoker /36/ in ausführlicher Form.

Für die Geschwindigkeit der Wasserteilchen  $\vec{v} = (u, v, w)$  gilt unter der Voraussetzung  $\text{rot } \vec{v} = 0$  (isentropie Strömung)

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad (2.1-1)$$

oder

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = (u, v, w) \quad (2.1-2).$$

Der Druck  $p$  im Flüssigkeitsbereich wird nach Bernoulli mit

$$\begin{aligned}
 p &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) - \rho g(z-d) \\
 &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho g(z-d)
 \end{aligned}
 \tag{2.1-3}$$

beschrieben. (Der konstante Umgebungsdruck wird nicht mit in die Betrachtung einbezogen.)

Das Potential muß weiter der Kontinuitätsgleichung im gesamten Strömungsfeld genügen. Diese lautet in allgemeiner Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0
 \tag{2.1-4}.$$

Für inkompressibles Medium  $\rho = \rho_0 = \text{konst.}$  nimmt dann die Kontinuitätsgleichung die Form der Laplace'schen Differentialgleichung an

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 0
 \tag{2.1-5},$$

oder

$$\Delta \phi(x, y, z, t) = 0
 \tag{2.1-6}.$$

Betrachtet wird nun eine Grenzoberfläche, bewegt oder festgehalten, die die Flüssigkeit von einem anderen Medium trennt, und die die Eigenschaft hat, daß die Teilchen, die sich auf der Oberfläche befinden, auch auf ihr bleiben. Solche Oberflächen sind z.B. Körperoberflächen, der Meeresboden und die freie Meeresoberfläche. Ist eine solche Oberfläche  $S$  etwa durch die Gleichung  $\eta(x, y, z, t) = 0$  gegeben, so liefert das totale Differential nach der Zeit

$$\frac{d\eta}{dt} = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0
 \tag{2.1-7}.$$

Der Vektor  $\vec{N}(\eta_x, \eta_y, \eta_z)$  ist ein Vektor normal zu

der Oberfläche  $S$ . Mit Glg (2.1-2) kann dann

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} = v_n \quad (2.1-8)$$

geschrieben werden, wobei mit  $\partial / \partial n$  die Differentiation in Richtung der Oberflächennormalen und mit  $v_n$  die gemeinsame Normalkomponente der Geschwindigkeit der Oberfläche und der Teilchen an dieser Oberfläche bezeichnet sind. Am Meeresboden  $S_B$  und auf der Oberfläche  $S_K$  eines in der Welle festgehaltenen Körpers sind die kinematischen Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_B} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_K} = 0 \quad (2.1-9)$$

zu erfüllen.

Die freie bewegte Meeresoberfläche läßt sich durch die Gleichung

$$\zeta(x, y, t) = z - d \quad (2.1-10)$$

in expliziter Form beschreiben; die Stillwasserfläche ist dabei dann Referenzfläche.

Aus der Betrachtung der zeitlichen Änderung der Oberfläche und der Teilchengeschwindigkeiten an der Oberfläche erhält man die kinematische Randbedingung an der Meeresoberfläche. Glg (2.1-10) differenziert nach der Zeit liefert:

$$\frac{d \zeta(x, y, t)}{d t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v = w \quad (2.1-11)$$

oder umgestellt

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.1-12).$$

Für den Druck an der Meeresoberfläche gilt

$$p \Big|_{z=d+\zeta} = 0 \quad (2.1-13).$$

Daraus folgt mit den Glgn (2.1-3) und (2.1-10):

$$\rho g \zeta(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.1-14),$$

die dynamische Randbedingung an der freien Meeresoberfläche.

Auf der benetzten Oberfläche  $S_k = S_k(x, y, z, t)$  eines in der Welle bewegten Körpers ist die kinematische Randbedingung gemäß Glg (2.1-8) zu erfüllen

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{S_k} = v_n \quad (2.1-15).$$

Weiter ist die Abstrahlbedingung zu erfüllen, die gewährleistet, daß sich das als Folge der Präsenz des Körpers ausbildende Ringwellensystem vom Körper weg bis ins Unendliche ausbreitet. Diese Bedingung wird im folgenden in Form der allgemeinen Sommerfeld'schen Abstrahlbedingung eingeführt (/34/).

An dieser Stelle wird noch eine kurze energetische Betrachtung ausgeführt, die in Abschnitt 4. benutzt wird, um einen Zusammenhang zwischen den Dämpfungskoeffizienten aufzuzeigen.

Die in einem räumlichen Gebiet  $R$  der Flüssigkeit vorhandene Energie - kinetische und potentielle - läßt sich mit dem folgenden Volumenintegral

$$E = \rho \iiint_R \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g(z-d) \right\} dx dy dz \quad (2.1-16),$$

oder auch wegen der Gültigkeit der Glg (2.1-3) mit

$$E = - \iiint_R \left( p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dy dz \quad (2.1-17)$$

beschreiben /36/, /21/.

Von Interesse ist die zeitliche Änderung der Energie im Gebiet  $R$ .

Im Zusammenhang mit der Betrachtung eines Flüssigkeitsbereiches  $R$  wird für die weiteren Ausführungen der Vektor der Flächennormalen  $\vec{n}^*$  der Oberfläche des Gebietes positiv definiert, wenn er nach außen gerichtet ist. Für den Vektor  $\vec{n}$  gelte die Definition:  $\vec{n} = -\vec{n}^*$ .

Die Energie ist gegeben in Form der Gleichung

$$E = \iiint_R f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (2.1-18).$$

Für die zeitliche Änderung der Energie in einem abgeschlossenen Gebiet  $R$  folgt dann allgemein

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_R \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz + \iint_S f v_{n^*} dS \quad (2.1-19),$$

wobei  $v_{n^*}$  die Normalengeschwindigkeit der Randfläche  $S$  des Gebietes  $R$  ist, die unabhängig von den Teilchengeschwindigkeiten, positiv in Richtung der äußeren Flächennormalen an der Randfläche  $S$  ist.

Glg (2.1-16) partiell differenziert nach der Zeit, eingesetzt für  $\partial f / \partial t$ , und Glg (2.1-17) eingesetzt für  $f$  in Glg (2.1-19) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \rho \iiint_R \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \right] dx dy dz \\ & - \iint_S \left( p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) v_{n^*} dS \end{aligned} \quad (2.1-20).$$

Das Volumenintegral in Glg (2.1-20) kann aber nach dem ersten Green'schen Satz (Anhang 9.6) unter Beachtung der Laplace'schen Differentialgleichung durch ein Oberflächenin-

tegral ersetzt werden. Mit

$$\begin{aligned} & \iiint_R \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \iint_{\text{einmal um das Glg (2.1-20)}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} dS \end{aligned} \quad (2.1-21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \rho \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} dS - \iint_S \left( p + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) v_{n^*} dS \\ &= \iint_S \left[ \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n^*} - v_{n^*} \right) - p v_{n^*} \right] dS \end{aligned} \quad (2.1-22).$$

Ist ein Teil der Randfläche  $S$  des Gebietes  $R$  in Ruhe ( $v_{n^*} = 0$ ), d.h. die Teilchen durchströmen die Fläche  $S$ , so ist der Energiefluß durch  $S$

$$\frac{dE}{dt} = \rho \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} dS \quad (2.1-23).$$

Bewegt sich die Randfläche  $S$  wie die Flüssigkeitsteilchen ( $\partial \phi / \partial n^* = v_{n^*}$ ), so gilt für den Energiefluß über  $S$

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_S p v_{n^*} dS \quad (2.1-24).$$

An der freien Oberfläche findet wegen der zu erfüllenden kinematischen und dynamischen Randbedingungen kein Energieaustausch mit der Umgebung statt ( $p = 0$ , Glg (2.1-13)).

Betrachtet wird nun ein abgeschlossenes Gebiet  $R$  um den Körper herum (Abb. 2) mit den Randflächen  $S_K$  als benetzter Körperoberfläche,  $S_B$  der freien Meeresoberfläche,  $S_B$  dem Meeresboden und einer vertikalen räumlich fixen Berandung  $S_R$  in einigem Abstand von dem Körper. Die zeitliche Änderung der Energie in dem Gebiet  $R$  ist gleich dem Energiefluß über die Randflächen  $S$  des Gebietes. Da kein Energieaustausch mit der freien Meeresoberfläche und dem Meeresboden stattfindet, erhält man

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_R = - \iint_{S_K} \rho v_{n^*} dS + \rho \iint_{S_R} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\phi}{dn^*} dS \quad (2.1-25).$$

Zu beachten ist, daß der Normalenvektor aus dem Gebiet  $R$  nach außen zeigt.

Betrachtet werden hier periodische Vorgänge. Da im Inneren des Gebietes  $R$  keine Energie dissipiert wird (die Flüssigkeit ist reibungsfrei), muß für die Änderung der mittleren zeitlichen Energie (Änderung der Energie über eine Periode) in  $R$

$$\overline{\left. \frac{dE}{dt} \right|_R}^t = 0 = - \iint_{S_K} \overline{\rho v_{n^*} dS}^t + \rho \iint_{S_R} \overline{\frac{d\phi}{dt} \frac{d\phi}{dn^*} dS}^t \quad (2.1-26)$$

gelten (/36/), d.h. Energie, die im zeitlichen Mittel über die Körperoberfläche  $S_K$  der Flüssigkeit im Gebiet  $R$  zugeführt wird, muß über den Rand  $S_R$  abgeführt werden.

## 2.2 Linearisierung der Randwertaufgabe

Da eine vollständige analytische Lösung der nichtlinearen Randwertaufgabe nicht möglich ist, beschränkt man sich auf Näherungslösungen unterschiedlicher Ordnung, die man mit Hilfe der Theorie der kleinen Störungen gewinnt.

Unter der Annahme, daß die Amplitude der erregenden Wellen  $H/2$  relativ klein ist, läßt sich das Potential  $\phi$  und die Oberflächenkontur  $\zeta$  mit den folgenden Potenzreihenansätzen annähern (/36/)

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \phi^{(n)}(x, y, z, t) \quad (2.2-1),$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \zeta^{(n)}(x, y, t) \quad (2.2-2),$$

wobei  $\varepsilon$  ein kleiner dimensionsloser Parameter ist ( $\varepsilon < 1$ ) und  $\phi^{(n)}$ ,  $\zeta^{(n)}$  geeignete zu wählende Funktionen sind. Die Summe über die Glieder  $n = 1, \dots, N$  beschreibt dann die Lösung N-ter Ordnung.

Weitere Schwierigkeiten ergeben sich dadurch, daß die Randbedingungen der Glgn (2.1-12), (2.1-14) und (2.1-15) an bewegten Oberflächen zu erfüllen sind. Man umgeht diese Schwierigkeiten, indem man die in den Randbedingungen auftretenden Ableitungen der Potentialfunktion in eine Taylorreihe an der zeitlichen Mittellage der entsprechenden Oberfläche entwickelt.

So werden die an der freien Meeresoberfläche zu erfüllenden Randbedingungen auf Randbedingungen an der Stillwasserfläche ( $z=d$ ) zurückgeführt. Mit

$$\phi_i \Big|_{z=d+\zeta} = \frac{\partial \phi}{\partial i} \Big|_{z=d} + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial i \partial z} \Big|_{z=d} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial i \partial z^2} \Big|_{z=d} \dots \quad (2.2-3)$$

( $i=x, y, z, t$ )

ergibt sich allgemein für die partiellen Ableitungen

$$\phi_i \Big|_{z=d+\zeta} = \phi_i \Big|_{z=d} + \zeta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \Big|_{z=d} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \Big|_{z=d} \dots \quad (2.2-4).$$

Setzt man die Entwicklungen (2.2-1), (2.2-2) und (2.2-4) in die Gleichungen der beiden Oberflächenbedingungen (2.1-12) und (2.1-14) ein und ordnet nach Potenzen von  $\varepsilon$ , so erhält man

$$\zeta_t^{(1)} - \phi_z^{(1)} = 0 \quad (2.2-5),$$

(z = d)

$$\begin{aligned} \zeta_t^{(2)} - \phi_z^{(2)} &= \phi_{zz}^{(1)} \zeta^{(1)} \\ \dots - \zeta_x^{(1)} \phi_x^{(1)} - \zeta_y^{(1)} \phi_y^{(1)} & \end{aligned} \quad (2.2-6),$$

(z = d)

und

$$\zeta^{(1)} + \frac{1}{g} \phi_t^{(1)} = 0 \quad (2.2-7)$$

(z = d)

$$\begin{aligned} \zeta^{(2)} + \frac{1}{g} \phi_t^{(2)} &= -\frac{1}{g} \phi_{tz}^{(1)} \zeta^{(1)} \\ \dots - \frac{1}{2g} [(\phi_x^{(1)})^2 + (\phi_y^{(1)})^2 + (\phi_z^{(1)})^2] & \end{aligned} \quad (2.2-8).$$

(z = d)

Mit Hilfe der Glgn (2.2-7), (2.2-8), ..., bzw. deren partiellen Ableitungen lassen sich die Terme der Oberflächenfunktion  $\zeta^{(n)}$ ,  $\zeta_i^{(n)}$  in den Gleichungen (2.2-5), (2.2-6), ..., eliminieren. Man erhält so jeweils eine kombinierte Oberflächenbedingung für die Teilpotentiale  $\phi^{(n)}$  der Ordnung n.

Analog kann bei der Aufstellung der Randbedingung an der bewegten Körperoberfläche vorgegangen werden. Die Funktion für die bewegte Körperoberfläche kann wie folgt angenommen werden

$$S_k(x, y, z, t) = S_0(x, y, z) + S^*(x(t), y(t), z(t)) \quad (2.2-9)$$

mit  $S_0$  als Funktion, die die Geometrie der ruhenden Oberfläche beschreibt, und

$$S^*(x(t), y(t), z(t)) = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n S^{*(n)}(x, y, z, t) \quad (2.2-10)$$

als Funktion, die die Bewegungen der Punkte der Körperoberfläche angibt.

Für die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Körperoberfläche kann geschrieben werden:

$$V_n = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n V_n^{(n)} \quad (2.2-11).$$

Die Taylorreihenentwicklung der partiellen Ableitungen der Potentialfunktion auf der Oberfläche des Körpers lautet dann:

$$\phi_i \Big|_{S_k} = \phi_i \Big|_{S_0} + \phi_{i,n} \Big|_{S_0} S_n^* + \phi_{i,nn} \Big|_{S_0} \frac{(S_n^*)^2}{2} \dots \quad (2.2-12),$$

wobei mit  $S_n^*$  die Normalkomponente der Bewegung der Oberfläche ( $S^*$ ) bezeichnet ist.

Aus der Randbedingung der Glg (2.1-15) ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Entwicklungen der Glgn (2.2-1), (2.2-10) bis (2.2-12)

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} \Big|_{S_0} = V_n^{(1)} \quad (2.2-13),$$

$$\dots \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} \Big|_{S_0} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial n^2} \Big|_{S_0} S_n^{*(1)} = V_n^{(2)} \quad (2.2-14).$$

Jedes Teilpotential  $\phi^{(n)}$  der Ordnung  $n$  hat für sich noch die Kontinuitätsgleichung (2.1-6) sowie die Randbedingung am Meeresboden zu erfüllen (2.1-9).

Demnach gilt also für die Randwertaufgabe 1. Ordnung (lineares Randwertproblem)

$$\Delta \phi^{(1)} = 0 \quad (2.2-15)$$

im gesamten Flüssigkeitsbereich,

- die kinematische Randbedingung am Meeresboden

$$\left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.2-16),$$

- die kinematische Randbedingung auf der benetzten Körperoberfläche  $S_0$

$$\left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} \right|_{S_0} = V_n^{(1)} \quad (2.2-17),$$

- die kombinierte Randbedingung an der Stillwasserfläche ( $z=d$ )

$$\frac{1}{g} \left. \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} \right|_{z=d} + \left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=d} = 0 \quad (2.2-18).$$

Für das Problem 2. Ordnung gilt:

$$\Delta \phi^{(2)} = 0 \quad (2.2-19)$$

im gesamten Flüssigkeitsbereich,

- die kinematische Randbedingung am Meeresboden

$$\left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.2-20),$$

- die kinematische Randbedingung auf der Körperoberfläche

$$\left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} \right|_{S_0} + \left. \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial n^2} \right|_{S_0} S_n^{+(1)} = V_n^{(2)} \quad (2.2-21),$$

- die kombinierte Randbedingung an der Stillwasserfläche ( $z=d$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} &= \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{g^2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \\ &- \frac{2}{g} \left[ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.2-22).$$

2.3 Aufspaltung der linearen Randwertaufgabe.  
Diffractions- und Abstrahlungsproblem.

Das Geschwindigkeitpotential 1. Ordnung der Bewegung des Wassers läßt sich mit  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  beschreiben (vgl. 2.1).

Betrachtet werden hier ausschließlich periodische Vorgänge, d.h. das Potential oszilliert mit der Kreisfrequenz der erregenden Welle  $\omega$ . Führt man für die Zeitabhängigkeit des Potentials die komplexe Funktion  $e^{-i\omega t}$  ein, so läßt sich der zeitunabhängige Anteil des Potentials mit  $\mathcal{Y}$  beschreiben:

$$\phi(x, y, z, t) = \mathcal{Y}(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.3-1).$$

$\mathcal{Y}(x, y, z)$  ist dann die komplexe Amplitude des Potentials in Abhängigkeit vom Ort.

Man vereinbart bei dieser Schreibweise stillschweigend, daß nur der Realteil des zeitabhängigen Potentials nach Glg (2.3-1) zu nehmen ist:

$$\text{Re} [\phi(x, y, z, t)] = \text{Re} [\mathcal{Y}(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}]$$

(vgl. dazu auch Anhang 9.7, (A.7-1) - (A.7-3))

Die hier betrachtete linearisierte Randwertaufgabe wird prinzipiell in zwei Teilprobleme aufgespalten, die überlagert sind (/7/, /8/):

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_D(x, y, z, t) + \phi_B(x, y, z, t) \quad (2.3-2).$$

$\phi_D$  stellt dabei das Diffractionsproblem dar,

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z, t) &= \phi_0(x, y, z, t) + \phi_7(x, y, z, t) \\ &= \{ \mathcal{Y}_0(x, y, z) + \mathcal{Y}_7(x, y, z) \} \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.3-3),$$

d.h. das Problem des in der harmonischen Elementarwelle festgehaltenen Körpers mit  $\phi_0$  dem Potential der ungestörten Elementarwelle und  $\phi_7$  dem Störpotential, das durch die Präsenz des Körpers entsteht.

$$\begin{aligned}\phi_8 &= \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j_0} \phi_j(x, y, z, t) \\ &= \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j_0} \psi_j(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (2.3-4)$$

beschreibt das Abstrahlungsproblem, d.h. das Problem der erzwungenen Oszillation des Körpers in ursprünglich glattem Wasser mit  $\phi_j$  ( $j=1, \dots, 6$ ), dem Potential, das durch die harmonische Bewegung des Körpers in Richtung  $j$  mit einer Einheitsamplitude entsteht.

$\dot{s}_{j_0}$  ist die komplexe Amplitude der Geschwindigkeit des Körpers in Richtung  $j$ . Gemäß den Definitionen der Abbildung 1 kennzeichnen die Indizes  $j=1, 2, 3$  die translatorischen Bewegungskomponenten,  $j=4, 5, 6$  die rotatorischen.

$\dot{s}_{j_0}$  ( $j=1, 2, 3$ ) sind also translatorische Geschwindigkeiten, während  $\dot{s}_{j_0}$  ( $j=4, 5, 6$ ) Winkelgeschwindigkeiten bezeichnen.

Für das Strömungsfeld um einen schwimmenden Körper herum gilt also:

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) &= \phi_0(x, y, z, t) + \phi_7(x, y, z, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j_0} \phi_j(x, y, z, t) \\ &= \left\{ \psi_0(x, y, z) + \psi_7(x, y, z) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j_0} \psi_j(x, y, z) \right\} \cdot e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (2.3-5).$$

Die Bewegungen  $s_j$  des Körpers sind periodisch, daher gilt

$$s_j = s_{j0} \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.3-6),$$

$$\dot{s}_j = -i\omega s_{j0} \cdot e^{-i\omega t} = \dot{s}_{j0} e^{-i\omega t} \quad (2.3-7),$$

$$\ddot{s}_j = -\omega^2 s_{j0} \cdot e^{-i\omega t} = \ddot{s}_{j0} e^{-i\omega t} \quad (2.3-8),$$

mit  $\dot{s}_j$  der zeitabhängigen Bewegung und  $\ddot{s}_j$  der Beschleunigung.

Für ein Element des Abstrahlungspotentials kann auch

$$\dot{s}_{j0} \psi_j \cdot e^{-i\omega t} = \dot{s}_{j0} \phi_j = \dot{s}_j \psi_j$$

geschrieben werden (, wobei vereinbarungsgemäß nur der Realteil des jeweiligen Produktes als zeitabhängige Größe zu nehmen ist).

Die Teilprobleme der Diffraktion und der Abstrahlung können unabhängig voneinander formuliert und gelöst werden. Bei dem mit Glg (2.3-5) formulierten Problem für einen freischwimmenden Körper sind zunächst auch die Bewegungen des Körpers als Antwort auf die Erregung durch die Welle Unbekannte des Problems. Diese können erst nach der Lösung der oben beschriebenen Teilprobleme durch Formulierung und Lösung einer Bewegungsgleichung ermittelt werden (vgl. 2.5).

Die Geschwindigkeitspotentiale  $\phi_j$  und damit auch die zeitunabhängigen Anteile  $\psi_j$ ,  $j=0,1,\dots,7$  müssen im gesamten Flüssigkeitsbereich der Laplace'schen Differentialgleichung (Glg. (2.2-15))

$$\Delta \phi_j(x, y, z, t) = 0 \quad ; \quad \Delta \psi_j(x, y, z) = 0 \quad (2.3-9)$$

genügen und sowohl die linearisierte Randbedingung an der Meeresoberfläche (Glg. (2.2-18)) als auch die kinematische Randbedingung am Meeresboden (Glg. (2.2-16)) erfüllen:

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 \phi_j}{dz^2} + \frac{d \phi_j}{dz} = 0 ; \quad -\frac{\omega^2}{g} y_j + \frac{dy_j}{dz} = 0 \quad (2.3-10),$$

für  $z=d$ ;  $j=0,1,\dots,7$

$$\frac{d \phi_j}{dz} = 0 ; \quad \frac{dy_j}{dz} = 0 \quad (2.3-11).$$

für  $z=0$ ;  $j=0,1,\dots,7$

Die Potentiale  $\phi_j$ ,  $j=1,2,\dots,7$  haben weiter die allgemeine Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung /34/ zu erfüllen, die sich durch den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{dy_j}{dr} - i \alpha y_j \right) = 0 \quad (2.3-12)$$

für  $j=1,2,\dots,7$

mit der Wellenzahl  $\alpha$  ausdrücken läßt ( $\alpha = 2 \pi / \lambda$ ;  $\lambda =$  Wellenlänge).

Für den in der Welle festgehaltenen Körper, d.h. vom Potential  $\phi_D = \phi_0 + \phi_7$ , muß die kinematische Randbedingung an der Körperoberfläche erfüllt werden; die Geschwindigkeitskomponente der Wasserteilchen normal zur Körperoberfläche muß verschwinden,

$$\frac{d \phi_D}{dn} \Big|_{S_0} = \frac{d(\phi_0 + \phi_7)}{dn} \Big|_{S_0} = 0 ; \quad \frac{dy_D}{dn} \Big|_{S_0} = \frac{d(y_0 + y_7)}{dn} \Big|_{S_0} = 0 \quad (2.3-13).$$

( $S_0$  ist die in der Ruhelage des Körpers benetzte Oberfläche des Körpers.)

Beim Abstrahlungsproblem  $\phi_j$ ,  $j=1,\dots,6$  ist die kinematische Randbedingung gemäß Glg (2.2-17) auf der ruhenden Körperoberfläche  $S_0$  zu erfüllen,

$$\frac{d \dot{s}_{j_0} \phi_j}{dn} \Big|_{S_0} = \dot{s}_{j_0} \frac{d \phi_j}{dn} \Big|_{S_0} = \dot{s}_{j_0} n_j \cdot e^{-i \omega t} \quad (2.3-14),$$

d.h.

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right|_{S_0} = n_j \cdot e^{-i\omega t}; \quad \left. \frac{\partial y_j}{\partial n} \right|_{S_0} = n_j \quad (2.3-15),$$

wobei die Funktionen  $n_j$  für das ortsfeste kartesische Koordinatensystem  $(x, y, z)$  wie folgt definiert sind:

$$n_1 = \cos(n, x) \quad (2.3-16),$$

$$n_2 = \cos(n, y) \quad (2.3-17),$$

$$n_3 = \cos(n, z) \quad (2.3-18),$$

$$n_4 = y \cos(n, z) - z \cos(n, y) = y n_3 - z n_2 \quad (2.3-19),$$

$$n_5 = z \cos(n, x) - x \cos(n, z) = z n_1 - x n_3 \quad (2.3-20),$$

$$n_6 = x \cos(n, y) - y \cos(n, x) = x n_2 - y n_1 \quad (2.3-21).$$

Die  $n_j$  sind durch die Gestalt der Körperoberfläche und die Wahl des Koordinatensystems bestimmt, es sind die  $n_1, n_2, n_3$  die Richtungskosinus der Normalen an der Körperoberfläche.

Für das Profil und das Potential der ungestörten ebenen harmonischen Elementarwelle mit Kreisfrequenz  $\omega$ , Wellenzahl  $\alpha$ , Wellenhöhe  $H$  und Wellenanlaufwinkel  $\mu$  werden die folgenden Ansätze gemacht (Airy'sche Welle):

$$\zeta_0(x, y, t) = \frac{H}{2} e^{i\alpha x \cos \mu + i\alpha y \sin \mu - i\omega t} \quad (2.3-22),$$

$$\begin{aligned}\phi_0(x, y, z, t) &= \psi_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \\ &= -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(\kappa z)}{\kappa \sinh(\kappa d)} e^{i\kappa x \cos\mu + i\kappa y \sin\mu - i\omega t}\end{aligned}$$

(2.3-23).

Daß mit diesen Ansätzen die Oberflächenbedingung der Glg (2.2-5) erfüllt wird, ist leicht zu prüfen. Die Forderung nach Erfüllung der zweiten Oberflächenbedingung (Glg (2.2-7)) führt auf die Dispersionsgleichung

$$\frac{\omega^2}{g} = \kappa \tanh(\kappa d) \quad (2.3-24),$$

die den Zusammenhang zwischen der Wellenzahl  $\kappa$  bzw. der Wellenlänge  $\lambda$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  beschreibt.

Damit wird vom Potential  $\phi_0$  auch die linearisierte Randbedingung an der Meeresoberfläche (Glg (2.3-10)) erfüllt. Daß  $\phi_0$  auch die kinematische Randbedingung am Meeresboden (Glg (2.3-11)) erfüllt, ist leicht zu sehen.

## 2.4 Die lineare Randwertaufgabe einer Anordnung mehrerer Körper

Das in 2.3 dargestellte Problem eines einzelnen Körpers in einer harmonischen Welle kann ohne Schwierigkeiten für eine Anordnung mehrerer Körper (Abb.3) erweitert werden. Da sich die Körper  $Q=1, \dots, N$  unabhängig voneinander in den sechs Freiheitsgraden bewegen können, ist entsprechend das Abstrahlungsproblem zu ergänzen /12/.

Es ist zweckmäßig, neben dem globalen Koordinatensystem für die einzelnen Körper innerhalb der Anordnung lokale Koordinatensysteme zu definieren, deren Ursprung jeweils in einem ausgezeichneten Punkt des Körpers in der Ruhelage liegt (etwa in einer Symmetrieebene, bei schwimmenden Körpern im Massenschwerpunkt oder im Schwerpunkt der Wasserlinienfläche). Die Kräfte und Bewegungen des Körpers  $Q$  werden dann bezüglich des lokalen Systems definiert.

Für das Strömungsfeld um die Körper herum gilt

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \phi_0(x, y, z, t) + \phi_\eta(x, y, z, t) \\ &+ \sum_{Q=1}^N \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j_0}^Q \phi_{jQ}(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.4-1),$$

bzw. für die komplexe Amplitude des Potentials

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi_0(x, y, z) + \varphi_\eta(x, y, z) \\ &+ \sum_{Q=1}^N \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j_0}^Q \varphi_{jQ}(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.4-2).$$

Das Diffraktionsproblem  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_\eta$  ist hierbei unter der Berücksichtigung aller Körper  $Q=1, \dots, N$  zu lösen. Es ist die Randbedingung

$$\left. \frac{\partial \varphi_D}{\partial n} \right|_{S_Q} = \left. \frac{\partial (\varphi_0 + \varphi_\eta)}{\partial n} \right|_{S_Q} = 0 \quad (2.4-3)$$

für  $Q=1, \dots, N$

auf den benetzten Oberflächen  $S_Q$  der einzelnen Körper  $Q$  zu erfüllen.  $\dot{s}_{j_0}^Q$  sind die Geschwindigkeitskomponenten des Körpers  $Q$  in Richtung  $j$  bezüglich des lokalen Koordinatensystems. Die Definitionen für die  $n_{jQ}$  der Glgn (2.3-16) bis (2.3-21) gelten für die  $Q$  lokalen Koordinatensysteme mit  $x_Q, y_Q, z_Q$  anstelle von  $x, y, z$ .

Beim Abstrahlungsproblem wird der einzelne Körper  $Q$  mit einer Einheitsamplitude erregt

$$\left. \frac{\partial \varphi_{jQ}}{\partial n} \right|_{S_Q} = n_{jQ} \quad (2.4-4),$$

$j=1, \dots, 6$

während die anderen Körper  $P$  ( $P \neq Q$ ) ruhen

$$\left. \frac{\partial \varphi_{jQ}}{\partial n} \right|_{S_P} = 0 \quad (2.4-5).$$

$Q \neq P; j=1, \dots, 6$

Die Laplace'sche Gleichung (2.3-9) sowie die Randbedingungen an den verbleibenden Grenzen des Flüssigkeitsbereiches Glgn (2.3-10) bis (2.3-12) gelten weiterhin.

Die hier benutzte Lösungsmethode zur Ermittlung der Potentiale  $\phi_\eta, \phi_{jQ}$  ( $Q=1, \dots, N; j=1, \dots, 6$ ) wird in den Abschnitten 3.1 und 3.2 aufgezeigt.

Sind die Potentiale bekannt, so kann der instationäre Druck  $p_{inst}$  innerhalb der Flüssigkeit aus der linearisierten Bernoulli-Beziehung (vgl. Glg (2.1-3))

$$p_{inst} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.4-6)$$

gewonnen werden.

## 2.5 Belastungen und Bewegungen

Unter Berücksichtigung der Glgn (2.4-1) und (2.4-2) kann der instationäre Druck  $p_{inst}$  (Glg (2.4-6)) im gesamten Flüssigkeitsbereich um die Körper herum mit

$$p_{inst} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = i\omega\rho \left[ \varphi_0(x, y, z) + \varphi_7(x, y, z) + \sum_{Q=1}^N \sum_{j=1}^6 \dot{s}_{j0} \varphi_{jQ}(x, y, z) \right] \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.5-1)$$

beschrieben werden.

Es ist notwendig, die von der Flüssigkeit auf die Körper ausgeübten Kräfte für die einzelnen Teilprobleme getrennt zu formulieren.

Aus der Lösung des Diffraktionsproblems durch die Integration des entsprechenden Anteils des instationären Druckes über die benetzte Oberfläche des Körpers  $Q$  erhält man die infolge der Welle induzierte Erregungskraft in Richtung  $j$  für den Körper  $Q$  (im lokalen Koordinatensystem)

$$F_{Wj}^Q(t) = -i\omega\rho \iint_{S_Q} \varphi_D n_{jQ} dS \cdot e^{-i\omega t} \\ = -i\omega\rho \iint_{S_Q} (\varphi_0 + \varphi_7) n_{jQ} dS \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.5-2)$$

$Q=1, \dots, N; \quad j=1, \dots, 6$

(alle Körper festgehalten in der Welle).

Wird der einzeln Körper  $Q$  innerhalb der Anordnung mit der Amplitude  $\dot{s}_{j0}^Q$  erregt, während die anderen Körper als festgehalten betrachtet werden, so ergeben sich als Folge dieser Erregung die auf den Körper  $P$  in Richtung  $l$  ausgeübten Reaktionskräfte bezüglich des lokalen Koordinatensystems  $P$  nach der Integration über die entsprechende Körperoberfläche zu (/12/)

$$F_{R e_j}^{PQ}(t) = -i\omega \rho \dot{s}_j^Q \iint_{S_P} y_{jQ} n_{eP} dS \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.5-3).$$

$P, Q=1, \dots, N; j, l=1, \dots, 6$

Glg (2.5-3) gilt auch für  $Q=P; j=1$

Die hier benutzten Bezeichnungen für die Körper P und Q und die Bewegungsrichtungen l und j sind natürlich austauschbar. Im Abschnitt 3.2 wird dann noch für den in Richtung j bewegten Körper die Bezeichnung T eingeführt. Die Auswirkungen dieser Bewegung werden dann auf den Körpern P und Q betrachtet.

Führt man für das Oberflächenintegral in Glg (2.5-3) die Definition

$$-\rho \iint_{S_P} y_{jQ} n_{eP} dS = a_{e_j}^{PQ} + \frac{i}{\omega} b_{e_j}^{PQ} \quad (2.5-4)$$

ein, d.h. definiert man die reellen Größen  $a_{e_j}^{PQ}$  - hydrodynamische Masse - und  $b_{e_j}^{PQ}$  - Koeffizient der Potentialdämpfung -

$$a_{e_j}^{PQ} = -\rho \operatorname{Re} \left[ \iint_{S_P} y_{jQ} n_{eP} dS \right] \quad (2.5-5),$$

$$b_{e_j}^{PQ} = -\omega \rho \operatorname{Im} \left[ \iint_{S_P} y_{jQ} n_{eP} dS \right] \quad (2.5-6)$$

und berücksichtigt man, daß die Gln (2.3-6) bis (2.3-8) für dem Körper Q analog gelten, so kann die hydrodynamische Reaktionskraft der Glg (2.5-3) in der Form

$$F_{R e_j}^{PQ} = -a_{e_j}^{PQ} \ddot{s}_j^Q - b_{e_j}^{PQ} \dot{s}_j^Q \quad (2.5-7)$$

geschrieben werden.

Zur Ermittlung des Bewegungsverhaltens der frei schwimmenden Körper als Antwort auf die Erregung durch die harmonische Elementarwelle ist ein System von Schwingungsgleichungen - das System der Bewegungsgleichungen - aufzustellen

und zu lösen.

Für eine Anordnung mehrerer starrer Körper lautet das System der Bewegungsgleichungen in allgemeiner Form

$$\sum_{j=1}^6 m_{ej}^P \ddot{s}_j^P + \sum_{Q=1}^N \sum_{j=1}^6 (a_{ej}^{PQ} \ddot{s}_j^Q + b_{ej}^{PQ} \dot{s}_j^Q) + \sum_{j=1}^6 c_{ej}^P s_j^P = F_{we}^P(t) \quad (2.5-8),$$

$P=1, \dots, N; \quad l=1, \dots, 6$

mit  $m_{ej}^P$  den Massenkoeffizienten und  $c_{ej}^P$  den hydrostatischen Rückstellkoeffizienten.

Es ist  $m_{11}^P = m_{22}^P = m_{33}^P = m^P$  die Masse des Körpers P. Die Kopplungsglieder  $m_{12}^P, m_{23}^P, m_{34}^P$  sowie  $m_{14}^P, m_{25}^P, m_{36}^P$  entfallen.  $m_{44}^P, m_{55}^P, m_{66}^P$  sind die Massenträgheitsmomente bezüglich der x-, y-, bzw. der z-Achse des lokalen Systems. Im allgemeinen Fall verbleiben also die Kopplungsglieder  $m_{15}^P, m_{16}^P, m_{24}^P, m_{26}^P, m_{34}^P, m_{35}^P, m_{45}^P, m_{46}^P$  und  $m_{56}^P$  in der Massenmatrix. ( $m_{ej}^P = m_{je}^P$ )

Es ist zu beachten, daß mit den Potentialen  $\phi$  und damit definitionsgemäß mit dem instationären Druck  $p_{inst}$  (Glg (2.5-1)) der Druckanteil  $-\rho g(z-d)$  (Glg (2.1-3)) nicht erfaßt ist. In der Ruhelage befindet sich jeder einzelne Körper unter der Wirkung von Gewicht und Auftrieb in einer stabilen Gleichgewichtslage.

Die Rückstellkoeffizienten  $c_{ej}^P$  ( $j, l=3, 4, 5$ ) werden aus einer statischen Betrachtung der Wirkung des Auftriebs bzw. der Auftriebsverteilung und der Gewichtskraft bzw. den Momenten infolge der Gewichtskraft bei einer Einheitsauslenkung  $s_j^P$  ( $j=3, 4, 5$ ) des Körpers aus der Gleichgewichtslage gewonnen /33/. So ist  $c_{33}^P$  die linearisierte Änderung der Auftriebskraft infolge einer Tauchung  $s_3^P$

$$c_{33}^P = \rho g A_{WL}^P \quad (2.5-9),$$

mit  $A_{WL}^P$  der Wasserlinienfläche des Körpers.

Für das rückstellende Moment infolge einer Drehung  $s_4^P$  des Körpers gilt:

$$C_{44}^P = \rho g I_{WL_{xx}}^P + \rho g V^P z_P^V - g m^P z_P^m \quad (2.5-10),$$

mit  $I_{WL_{xx}}$  dem Trägheitsmoment der Wasserlinienfläche bezüglich des gewählten lokalen Koordinatensystems,  $V^P$  dem verdrängten Wasservolumen,  $z_P^V$  Verdrängungsschwerpunkt und  $z_P^m$  Massenschwerpunkt der Höhe nach.

Bei einer allgemeinen Lage des Körpers treten noch Kopplungsglieder auf. Es gilt

$$C_{34}^P = \rho g \iint_{A_{WL}^P} y_P dx_P dy_P \quad (2.5-11),$$

$$C_{45}^P = -\rho g \iint_{A_{WL}^P} x_P y_P dx_P dy_P \quad (2.5-12).$$

Die Integrale sind über die jeweilige Wasserlinienfläche bezüglich des lokalen Systems auszuführen. Für die Drehung  $s_5^P$  gilt analoges.

Im allgemeinen Fall sind alle Glieder  $a_{e_j}^{PQ}$ ,  $b_{e_j}^{PQ}$  des Systems besetzt. Aus Symmetriegründen entfällt bei den meisten Anordnungen jedoch eine größere Anzahl der Koeffizienten; damit kann sich Glg (2.5-8) erheblich vereinfachen.

Die hier ausgeführten Betrachtungen wurden bezüglich der  $N$  lokalen ortsfesten Koordinatensysteme durchgeführt ( $Q, P=1, \dots, N$ ). Es ist ebenso möglich die Bewegungen und Kräfte auf ein einziges globales System zu beziehen. Die Kräfte und Bewegungen sollten dann aber noch bezüglich der lokalen Systeme transformiert werden /12/, da erst die so umgerechneten Größen anschaulich, leichter zu beurteilen und zu vergleichen sind.



### 3. Lösung der linearen Randwertaufgabe

#### 3.1 Das Makroelemente-Verfahren für rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse

Das Makroelemente-Verfahren für den einzelnen rotationssymmetrischen Körper ist ausführlich in /8/, /20/ und /11/ dargestellt. An dieser Stelle werden daher nur die Grundzüge des Verfahrens angegeben, die zum Verständnis der in Abschnitt 3.2 ausgeführten Erweiterung dieses Verfahrens auf eine Anordnung mehrerer Körper notwendig sind.

Die Meridianlinie des einzelnen Rotationskörpers kann mit einer Treppenkurve angenähert werden; das Strömungsfeld um den Körper herum wird entsprechend den Stufen der Treppenkurve in koaxiale Ringelemente konstanter vertikaler Erstreckung aufgeteilt (Abb.4). Das Koordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  wird zweckmäßigerweise in die Achse des Rotationskörpers gelegt.

Es lassen sich drei Typen von Makroelementen definieren. Das Element des Typs I (infinites Makroelement) erstreckt sich von der äußeren vertikalen Berandung des Körpers ( $r=a$ ) bis ins Unendliche. Die horizontalen Grenzflächen werden durch den Meeresboden und die freie Meeresoberfläche gebildet. Die Elemente des Typs II reichen von der horizontalen Körperoberfläche bis zur Meeresoberfläche, während die Elemente des Typs III durch Meeresboden und untere Körperoberfläche begrenzt werden. Die vertikalen Grenzflächen der Elemente des Typs II und III werden durch Zylindermantelflächen gebildet, die jeweils mit einer Stufe in der idealisierten Körperkontur verbunden sind (Abb. 4).

Im folgenden wird gezeigt, wie prinzipiell mit Hilfe von Fourierreihenansätzen in Verbindung mit partikulären Lösungen der Laplace'schen Differentialgleichung die Geschwindigkeitspotentiale in den verschiedenartigen Ringelementen um den Körper herum beschrieben werden können.

Die Formulierung der Ansätze für die Geschwindigkeitspotentiale in den einzelnen Elementen wird so gewählt, daß

alle geforderten Randbedingungen an den horizontalen Rändern der Elemente (Meeresboden, Teil der horizontalen Körperoberfläche, freie Meeresoberfläche) durch den jeweiligen Ansatz erfüllt werden. Dabei werden die partikulären Anteile im Ansatz benötigt, um bei den Abstrahlungsproblemen die inhomogenen Randbedingungen auf den horizontalen Teilen der Körperoberfläche zu erfüllen.

Aus der Forderung nach Stetigkeit des Potentials und seiner Ableitung in radialer Richtung an den vertikalen Rändern benachbarter Elemente ergeben sich nach Anwendung des Galerkin-Verfahrens /3/ Beziehungen zwischen den unbekanntem Fourierkoeffizienten der benachbarten Elemente, die zu einem linearen Gleichungssystem mit den Fourierkoeffizienten aller Elemente als Unbekannten führen.

Die Kontinuitätsgleichung in Form der Laplace'schen Differentialgleichung (Glg.(2.3-9)) lautet bekanntlich für den zeitunabhängigen Anteil des Potentials in Zylinderkoordinaten

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1-1).$$

Mit dem Produktansatz für ein Element der Lösung

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\nu) \cdot Z(z) \quad (3.1-2)$$

erreicht man die Trennung der Variablen. Man erhält so die drei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen (/23/)

$$\frac{d^2 \Theta}{d\nu^2} + A^2 \Theta = 0 \quad (3.1-3),$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + B^2 Z = 0 \quad (3.1-4),$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left( B^2 + \frac{A^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (3.1-5).$$

Die Lösung der Randwertaufgabe des jeweiligen Teilpro-

blems wird dann zusammengesetzt aus den Summen der Lösungselemente.

Im Gegensatz zu /8/ wurde in Glg. (3.1-4)  $+ B^2 Z$  vereinbart; man gelangt so mit Glg. (3.1-5) zu der Differentialgleichung der modifizierten Besselfunktionen. Da  $B$  sowohl reelle als auch imaginäre Werte annehmen kann, beeinflusst die Definition des Vorzeichens die Lösung nicht.

Aus der Forderung nach Stetigkeit des Potentials in Umfangsrichtung ( $\Theta(\varphi) = \Theta(\varphi + 2\pi)$ ) folgt  $A=m$ ,  $m$ : ganzzahlig,  $-\infty < m < +\infty$ . Damit sind die

$$\Theta_m(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (3.1-6)$$

Lösungen der Glg (3.1-3) und bilden ein Orthogonalsystem über  $\varphi$ . An dieser Stelle werden in Hinblick auf den Abschnitt 3.2 nicht, wie sonst üblich, die reellen Funktionen  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  eingeführt, da die Erweiterung des Problems auf eine Anordnung mehrerer Körper bei der Beibehaltung der komplexen Schreibweise für  $\Theta$  sehr viel einfacher wird als bei Benutzung der reellen.

Allgemeine Lösung der Glg (3.1-4) ist

$$Z(z) = e^{iBz} \quad (3.1-7),$$

wobei  $B$  im allgemeinen Fall auch eine komplexe Zahl sein kann. Es folgt dann für  $R(r)$  die Lösung

$$R(r) = C_m I_m(Br) + D_m K_m(Br) \quad (3.1-8)$$

als Linearkombination der modifizierten Besselfunktionen 1. bzw. 2. Art,  $I_m()$ ,  $K_m()$  (/1/,/18/).

Betrachtet wird zunächst das Diffraktionsproblem

$$\mathcal{Y}_D = \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_\eta.$$

Das Potential der ungestörten harmonischen Elementarwelle ist bekannt (Glg (2.3-23)). Mit dem im Anhang 9.4 gegebenen Entwicklungssatz läßt sich  $\mathcal{Y}_0$  in Zylinderkoordinaten

formulieren

$$\varphi_0(r, \vartheta, z) e^{-i\omega t} = -i\omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(\kappa z)}{\kappa \sinh(\kappa d)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [i^m J_m(\kappa r) \cdot e^{im\vartheta - im\mu - i\omega t}] \quad (3.1-9).$$

$J_m(\ )$  sind dabei die Besselfunktionen der Ordnung  $m$ .

Da die Winkelabhängigkeit der Glg (3.1-6) im gesamten Strömungsfeld um den Rotationskörper herum gilt, kann der Ansatz für das Potential des Diffraktionsproblems formal

$$\varphi_D e^{-i\omega t} = -i\omega \frac{H}{2} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \gamma_{Dm}(r, z) e^{im\vartheta} \right] e^{-i\omega t} \quad (3.1-10)$$

geschrieben werden. Man erkennt aus der Form der Glg (3.1-10), daß das Problem für die Eigenwerte  $m$  entkoppelbar ist.

Für den einzelnen Körper ist es natürlich sinnvoll, die Symmetrie in Bezug auf die Wellenlaufrichtung  $\mu$  zu nutzen.

Für das Diffraktionsproblem kann dann

$$\varphi_D e^{-i\omega t} = -i\omega \frac{H}{2} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \gamma_{Dm}^*(r, z) \cos(m\vartheta - m\mu) \right] e^{-i\omega t} \quad (3.1-11)$$

geschrieben werden ( $\varepsilon_m =$  Neumann-Symbol;  $\varepsilon_0 = 1$ ;  $\varepsilon_m = 2$  für  $m \geq 1$ ).

Bei den Abstrahlungsproblemen  $j=1,3,5$  reduzieren sich die Ansätze der Art der Glgn (3.1-10), (3.1-11) wegen der Rotationssymmetrie des Körpers und der auf der Körperoberfläche zu erfüllenden Randbedingungen der Glg (2.3-15) auf

$$\begin{aligned} \varphi_1 e^{-i\omega t} &= \gamma_{11}(r, z) \frac{1}{2} (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) e^{-i\omega t} \\ &= \gamma_{11}(r, z) \cos \vartheta e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.1-12),$$

$$\gamma_3 e^{-i\omega t} = \gamma_{30}(r, z) e^{-i\omega t} \quad (3.1-13),$$

$$\gamma_5 e^{-i\omega t} = \gamma_{51}(r, z) \frac{1}{2} (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) e^{-i\omega t}$$

$$[ = \gamma_{51}(r, z) \cos \vartheta e^{-i\omega t} ] \quad (3.1-14).$$

Die Randbedingungen der Glgn (2.3-13) und (2.3-15) auf der benutzten Oberfläche des Körpers sind wegen der benutzten Idealisierung auf Flächen  $r=\text{konst.}$  bzw.  $z=\text{konst.}$  zu erfüllen.

Diese Randbedingungen werden für die Funktionen  $\gamma_j(r, z)$  am Beispiel des Elementes 1 (Abb.4) wie folgt definiert:

$$\frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial r} = U_j \quad (3.1-15),$$

$$\text{für } r=a_e ; d_e \leq z \leq d_{e-1}$$

$$\frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial z} = W_j \quad (3.1-16).$$

$$\text{für } z=d_e ; a_e \leq r \leq a_{e+1}$$

Für die Funktionen  $U_j$  und  $W_j$  gilt dann:

- beim Diffraktionsproblem  $j=D$

$$\frac{\partial \gamma_{Dm}}{\partial r} = U_D = 0 \quad (3.1-17),$$

$$\text{für } r=a_e ; d_e \leq z \leq d_{e-1}$$

$$\frac{\partial \gamma_{Dm}}{\partial z} = W_D = 0 \quad (3.1-18)$$

$$\text{für } z=d_e ; a_e \leq r \leq a_{e+1}$$

- und bei den Abstrahlungsproblemen  $j=1, 3, 5$

$$\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial r} = U_1 = 1 ; \quad \frac{\partial \gamma_{30}}{\partial r} = U_3 = 0 \quad (3.1-19),$$

$$\frac{\partial \psi_{51}}{\partial r} = U_5 = z \quad (3.1-20),$$

für  $r=a_e ; d_e \leq z \leq d_{e-1}$

$$\frac{\partial \psi_{11}}{\partial z} = W_1 = 0 ; \quad \frac{\partial \psi_{30}}{\partial z} = W_3 = 1 \quad (3.1-21),$$

$$\frac{\partial \psi_{51}}{\partial z} = W_5 = -r \quad (3.1-22).$$

für  $z=d_e ; a_e \leq r \leq a_{e+1}$

Die Glattwasserprobleme  $j=2,4$  erhält man einfach mit der Drehung des Koordinatensystems um  $\pi/2$ . Das Glattwasserproblem  $j=6$  (Drehung um die Hochachse) existiert für einen rotationssymmetrischen Körper nicht.

Die Wahl der Funktionen  $Z(z)$  (Glg. (3.1-7)) für die unterschiedlichen Elementtypen und damit auch die der Funktionen  $R(r)$  in den Ansätzen für  $\psi(r,z)$  werden durch die zu erfüllenden homogenen Randbedingungen an den horizontalen Grenzen der verschiedenen Elemente bestimmt.

#### Element des Typs I (infinite Element)

Für die Funktionen  $\psi(r,z)$  des Diffraktionsproblems (Glg (3.1-10)) im äußeren infiniten Element I wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\frac{1}{\alpha} \psi_{Dm}^I(r,z) = \left\{ J_m(\alpha r) - \frac{J_m(\alpha a)}{H_m(\alpha a)} H_m(\alpha r) \right\} \frac{\cosh(\alpha z)}{\alpha d \sinh(\alpha d)} e^{-im\mu} + \sum_{\alpha} \bar{F}_{Dm\alpha}^I \frac{K_m(\alpha r)}{K_m(\alpha a)} Z_{\alpha}(z) \quad (3.1-23).$$

Der erste Teil des Ansatzes ist so formuliert, daß das Potential der ungestörten Welle  $\psi_0$  - verbunden mit den Besselfunktionen  $J_m(\alpha r)$ , Glg (3.1-9) - auf dem Rand  $r=a$  gerade aufgehoben wird.

Die  $H_m(\ )$  sind die Hankelfunktionen erster Art der Ord-

nung m.

Mit den Funktionen  $H_m(\alpha r)$ ,  $K_m(\alpha r)$  ist das Störpotential  $\mathcal{Y}_\eta$  erfaßt; nur diese Funktionen gewährleisten die Erfüllung der allgemeinen Sommerfeld'schen Abstrahlbedingung (Glg. (2.3-12)) beim Störpotential  $\mathcal{Y}_\eta$ .

$F_{Dm\alpha}^I$  sind dabei die unbekanntenen Fourierkoeffizienten.

An den horizontalen Grenzen des Elementes (Meeresoberfläche, Meeresboden) sind die Randbedingungen der Glgn (2.3-10) und (2.3-11) zu erfüllen, d.h.

$$-\frac{\omega^2}{g} Z + \frac{dZ}{dz} = 0 \quad (3.1-24),$$

für  $z = d$

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad (3.1-25).$$

für  $z = 0$

Die Funktionen

$$Z_\alpha(z) = N_\alpha^{-1/2} \cos(\alpha z) \quad (3.1-26)$$

erfüllen die geforderten Randbedingungen und bilden ein Orthogonalsystem über ihren Geltungsbereich ( $0 \leq z \leq d$ ), wobei  $\alpha$  ( $B = \alpha$ , Glg (3.1-4)) die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\alpha \tan(\alpha d) + \frac{\omega^2}{g} = 0 \quad (3.1-27)$$

sind. Glg (3.1-27) hat zwei imaginäre ( $\alpha_0 = \pm i\alpha$ ) und unendlich viele reelle Lösungen. Hier sind die Lösungen  $\alpha_0 = -i\alpha$  und  $\alpha > 0$  für reelle  $\alpha$  zu berücksichtigen, entsprechend ist in Glg (3.1-23) die Summe über  $\alpha$  zu bilden. Die Zusammenhänge zwischen den Funktionen  $H_m(\ )$  und  $K_m(\ )$  bzw. zwischen den Funktionen  $J_m(\ )$  und  $I_m(\ )$  sind im Anhang 9.1 gegeben.

$N_\alpha$  ist die Normierungsgröße:

$$N_\alpha = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sin(2\alpha d)}{2\alpha d} \right] \quad (3.1-28),$$

Es gilt dann

$$\int_{z=0}^d Z_{\alpha}(z) Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d} = \delta_{\alpha\alpha^*} \quad (3.1-29)$$

mit  $\delta_{\alpha\alpha^*}$  dem Kronecker-Symbol.

Auch für  $\alpha_0 = -i\kappa$  ist die Funktion  $Z_{\alpha}(z)$  reell, es gilt

$$Z_{\kappa}(z) = N_{\kappa}^{-1/2} \cosh(\kappa z) \quad (3.1-30)$$

mit

$$N_{\kappa} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sinh(2\kappa d)}{2\kappa d} \right] \quad (3.1-31).$$

In diesem Fall geht die Glg (3.1-27) in die Dispersionsgleichung (2.3-24) über.

Die Funktionen  $\Psi(r, z)$  der Glgn (3.1-12) bis (3.1-14) für die Abstrahlungsprobleme  $j=1, 3, 5$  lauten

$$\frac{1}{\delta_j} \Psi_{jm}^i = \sum_{\alpha} F_{jm\alpha}^i \frac{k_m(\alpha r)}{k_m(\alpha a)} Z_{\alpha}(z) \quad (3.1-32)$$

( $m=0$  für  $j=3$ ;  $m=1$  für  $j=1, 5$ ) mit der Normierungsgröße

$$\delta_j = d \quad \text{für } j = 1, 3 \quad (3.1-33),$$

$$\delta_j = d^2 \quad \text{für } j = 5 \quad (3.1-34).$$

### Element des Typs II

Die Elemente I des Typs II liegen über dem Körper und haben wie das infinite Element eine freie Oberfläche.

Der allgemeine Ansatz für die Funktionen  $\Psi_j(r, z)$  lautet

$$\frac{1}{\delta_j} \gamma_{jm}^{(e)}(r, z) = g_{jm}^{(e)}(r, z) + \sum_{\alpha_e} \left\{ R_{m\alpha_e}(r) F_{jm\alpha_e} + R_{m\alpha_e}^*(r) F_{jm\alpha_e}^* \right\} Z_{\alpha_e}(z) \quad (3.1-35);$$

$j = D, 1, 3, 5$

dabei sind die Funktionen  $g_j$  partikuläre Anteile zur Erfüllung der inhomogenen Randbedingungen auf der horizontalen Körperoberfläche nach Glgn (3.1-21) und (3.1-22); es gilt

$$g_{30}^{(e)}(r, z) = \frac{z}{d} - 1 + \frac{g}{\omega^2} \quad (3.1-36),$$

$$g_{51}^{(e)}(r, z) = -\frac{r}{d^2} \left[ (z-d) + \frac{g}{\omega^2} \right] \quad (3.1-37).$$

Daß diese Funktionen auch die Randbedingung an der Meeresoberfläche nach Glg (2.3-10) erfüllen, ist leicht nachzuprüfen.

Es wird noch vereinbart

$$g_{Dm}^{(e)}(r, z) = g_{11}^{(e)}(r, z) = 0 \quad (3.1-38).$$

Die Funktionen

$$R_{m\alpha_e}(r) = \frac{k_m(\alpha_e r)}{k_m(\alpha_e a_e)} ; R_{m\alpha_e}^*(r) = \frac{I_m(\alpha_e r)}{I_m(\alpha_e a_{e+1})} \quad (3.1-39)$$

werden mit den modifizierten Besselfunktionen 1. und 2. Art gebildet. In /11/ werden Linearkombinationen aus den oben definierten Funktionen  $R_{m\alpha_e}(r)$  und  $R_{m\alpha_e}^*(r)$  angesetzt, so daß auf den vertikalen Rändern des Elementes 1 ( $r = a_e$  ;  $r = a_{e+1}$ ) jeweils ein Anteil des Potentials zu Null wird, was aber nicht zwingend ist und keine nennenswerten Vorteile bringt. Bei einem getauchten Körper existiert ein Element  $l=1$  mit der Rotationsachse  $r=0$  des Körpers im Zentrum. Für so

ein Element entfallen die Funktionen  $R_{m\alpha_e}(r)$  im obigen Ansatz (Glg (3.1-35)), da die  $K_m(\ )$  für  $r \rightarrow 0$  unbeschränkt werden.

Die Funktionen  $Z_{\alpha_e}(z)$  sind analog zu den  $Z_{\alpha}(z)$  des äusseren Elementes I zu bilden

$$Z_{\alpha_e}(z) = N_{\alpha_e}^{-1/2} \cos(\alpha_e(z - d_e)) \quad (3.1-40).$$

Sie sind orthonormale Funktionen über  $d_e \leq z \leq d$ , mit

$$N_{\alpha_e} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sin(2\alpha_e(d - d_e))}{2\alpha_e(d - d_e)} \right] \quad (3.1-41),$$

wobei  $\alpha_e$  die Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\frac{\omega^2}{g} + \alpha_e \tan(\alpha_e(d - d_e)) = 0 \quad (3.1-42)$$

sind, mit  $\alpha_{e0} = -i\alpha_e$ , der ersten imaginären Wurzel.

### Elemente des Typs III

Die Elemente p des Typs III liegen unter dem Körper (Abb.4).

Der allgemeine Ansatz für die Funktionen  $\psi_j(r, z)$  lautet (formal ähnlich zu dem des Typs II)

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_j} \psi_{jm}^{(p)}(r, z) &= g_{jm}^{(p)}(r, z) \\ &+ \sum_{n_p=0}^{\infty} \left\{ R_{mn_p}(r) F_{jm n_p} + R_{mn_p}^*(r) F_{jm n_p}^* \right\} \varepsilon_{n_p} \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) \end{aligned} \quad (3.1-43)$$

Die Funktionen  $g_j$  erfüllen die inhomogenen Randbedingungen auf der horizontalen Körperoberfläche  $z=h_p$  (Element p) analog zu den Glgn (3.1-21), (3.1-22) und die Randbedingung am Meeresboden (2.3-11). Es gilt

$$g_{30}^{(p)}(r, z) = \frac{z^2 - (1/2)r^2}{2h_p d} \quad (3.1-44),$$

$$g_{51}^{(p)}(r, z) = \frac{-r [z^2 - (1/4)r^2]}{2 h_p d^2} \quad (3.1-45).$$

Es wird noch vereinbart:

$$g_{0m}^{(p)}(r, z) = g_{11}^{(p)}(r, z) = 0 \quad (3.1-46).$$

Die Funktionen  $R(r)$  sind

$$R_{mn_p}(r) = \frac{K_m\left(\frac{n_p \pi r}{h_p}\right)}{K_m\left(\frac{n_p \pi a_p}{h_p}\right)}; \quad R_{mn_p}^*(r) = \frac{I_m\left(\frac{n_p \pi r}{h_p}\right)}{I_m\left(\frac{n_p \pi a_{p+1}}{h_p}\right)} \quad (3.1-47)$$

für  $n_p \geq 1$  und

$$R_{00}(r) = \ln\left(\frac{r}{a_p}\right); \quad R_{m0}(r) = \left(\frac{a_p}{r}\right)^{|m|} \quad (|m| \geq 1)$$

$$R_{m0}^*(r) = \left(\frac{r}{a_{p+1}}\right)^{|m|} \quad (|m| = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1-48)$$

für  $n_p = 0$ . Die Glgn (3.1-48) können als Sonderfälle der Glgn (3.1-47) aufgefaßt werden, die man beim Grenzübergang  $n_p \rightarrow 0$  erhält (vgl. Anhang 9.3); sie sind die Lösungen der Differentialgleichung (3.1-5) für  $B=0$ .

Bei einem frei schwimmenden Körper existiert ein Element  $p=1$  um die Rotationsachse des Körpers. Bei diesem Element verschwinden (wie bei einem solchen des Typs II) die Summenglieder, die mit den Funktionen  $R_{mn}(r)$  im Ansatz der Glg (3.1-43) verbunden sind.

Die Funktionen  $\cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right)$  mit  $n_p = 0, 1, 2, \dots$  erfüllen die homogenen Randbedingungen

$$\frac{\partial Z_{n_p}(z)}{\partial z} = 0 \quad \text{für } z = 0 \quad (3.1-49)$$

und  $z = h_p; a_p \leq r \leq a_{p+1}$

an den horizontalen Elementgrenzen; die Orthogonalitätsbeziehungen lauten:

$$\int_{z=0}^{h_p} \varepsilon_{n_p} \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) \cdot \cos\left(\frac{n_p^* \pi z}{h_p}\right) \frac{dz}{h_p} = \delta_{n_p n_p^*} \quad (3.1-50).$$

### Rand- und Übergangsbedingungen an den horizontalen Elementgrenzen

Im folgenden wird am Beispiel der benachbarten Elemente 1-1 und 1 des Typs II gezeigt, wie die Beziehungen zwischen den Fourierkoeffizienten benachbarter Elemente abgeleitet werden.

Aus der Forderung nach Stetigkeit des Potentials und seiner Ableitung in radialer Richtung im Strömungsfeld an einem Übergang vom Element 1-1 zum Element 1 und mit den Randbedingungen der Glg (3.1-15) folgt:

$$\frac{1}{\delta_j} \psi_{jm}^{(e-1)} = \frac{1}{\delta_j} \psi_{jm}^{(e)} \quad (3.1-51),$$

$r = a_e, \quad d_{e-1} \leq z \leq d$

$$\frac{a}{\delta_j} \frac{d\psi_{jm}^{(e)}}{dr} = \frac{a}{\delta_j} \frac{d\psi_{jm}^{(e-1)}}{dr}$$

$r = a_e, \quad d_{e-1} \leq z \leq d$

$$\frac{a}{\delta_j} \frac{d\psi_{jm}^{(e)}}{dr} = \frac{a}{\delta_j} u_j \quad (3.1-52)$$

$r = a_e, \quad d_e \leq z \leq d_{e-1}$

Das Element 1 ist in diesem Fall das Element mit der größeren vertikalen Erstreckung ( $d-d_e > d-d_{e-1}$ ). Das  $a$  in Glg (3.1-52) ist lediglich Normierungsgröße.

Aus der Anwendung des Galerkin-Verfahrens (/3/) auf Glg (3.1-51) mit  $Z_{e-1}^*(z)$  als Gewichtsfunktion, d.h. aus

$$\frac{1}{\delta_j} \int_{z=d_{e-1}}^d \gamma_{jm}^{(e-1)} \Big|_{r=a_e} \cdot Z_{\alpha_{e-1}^*} \frac{dz}{(d-d_{e-1})} = \frac{1}{\delta_j} \int_{z=d_{e-1}}^d \gamma_{jm}^{(e)} \Big|_{r=a_e} \cdot Z_{\alpha_{e-1}^*} \frac{dz}{(d-d_{e-1})} \quad (3.1-53)$$

erhält man unter Berücksichtigung der Glg (3.1-35) für die Elemente 1 und (1-1)

$$\begin{aligned} & \delta_{\alpha_{e-1} \alpha_{e-1}^*} \left\{ R_{m\alpha_{e-1}}(a_e) F_{jm\alpha_{e-1}} + R_{m\alpha_{e-1}}^*(a_e) F_{jm\alpha_{e-1}}^* \right\} \\ &= \sum_{\alpha_e} L_{\alpha_{e-1}^* \alpha_e} \left\{ R_{m\alpha_e}(a_e) F_{jm\alpha_e} + R_{m\alpha_e}^*(a_e) F_{jm\alpha_e}^* \right\} \\ & \quad + Q_{jm\alpha_{e-1}^*} \end{aligned} \quad (3.1-54).$$

Dabei sind nach Glg (3.1-39)

$$R_{m\alpha_{e-1}}(a_e) = \frac{K_m(\alpha_{e-1} a_e)}{K_m(\alpha_{e-1} a_{e-1})} \quad ; \quad R_{m\alpha_{e-1}}^*(a_e) = 1 \quad (3.1-55),$$

$$R_{m\alpha_e}(a_e) = 1 \quad ; \quad R_{m\alpha_e}^*(a_e) = \frac{I_m(\alpha_e a_e)}{I_m(\alpha_e a_{e+1})} \quad (3.1-56).$$

Es sind die Integrale

$$L_{\alpha_{e-1}^* \alpha_e} = \int_{z=d_{e-1}}^d Z_{\alpha_{e-1}^*} \cdot Z_{\alpha_e} \frac{dz}{(d-d_{e-1})} \quad (3.1-57),$$

und

$$Q_{jm\alpha_{e-1}^*} = \int_{z=d_{e-1}}^d (g_{jm}^{(e)} - g_{jm}^{(e-1)}) \Big|_{r=a_e} \cdot Z_{\alpha_{e-1}^*} \frac{dz}{(d-d_{e-1})} \quad (3.1-58).$$

Die Anwendung des Galerkin Verfahrens auf die Glgn (3.1-52) mit  $Z_{\alpha_e^*}(z)$  als Gewichtsfunktion ( $d_e \leq z \leq d$ ) liefert die zweite Beziehung auf dem Rand  $r = a_e$  zwischen den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
& \delta_{\alpha_e \alpha_e^*} \left\{ a R'_{m\alpha_e}(a_e) F_{jm\alpha_e} + a R'^*_{m\alpha_e}(a_e) F_{jm\alpha_e}^* \right\} \\
&= \frac{d-d_{e-1}}{d-d_e} \sum_{\alpha_{e-1}} L_{\alpha_e^* \alpha_{e-1}} \left\{ a R'_{m\alpha_{e-1}}(a_e) F_{jm\alpha_{e-1}} + a R'^*_{m\alpha_{e-1}}(a_e) F_{jm\alpha_{e-1}}^* \right\} \\
&\quad + P_{jm\alpha_e^*} \tag{3.1-59}
\end{aligned}$$

mit

$$R'(a_e) = \left. \frac{d R(r)}{dr} \right|_{r=a_e} \tag{3.1-60}$$

und

$$\begin{aligned}
P_{jm\alpha_e^*} &= a \int_{z=d_{e-1}}^d \left. \frac{d g_{jm}^{(e-1)}}{dr} \right|_{r=a_e} \cdot Z_{\alpha_e^*}(z) \frac{dz}{(d-d_e)} \\
&\quad - a \int_{z=d_e}^d \left. \frac{d g_{jm}^{(e)}}{dr} \right|_{r=a_e} \cdot Z_{\alpha_e^*}(z) \frac{dz}{(d-d_e)} \\
&\quad - \frac{a}{\delta_j} \int_{z=d_e}^{d_{e-1}} \left. U_j \right|_{r=a_e} \cdot Z_{\alpha_e^*}(z) \frac{dz}{(d-d_e)} \tag{3.1-61}.
\end{aligned}$$

Zu beachten sind die unterschiedlichen Integrationsgrenzen für die Integrale in Glg (3.1-61).

Die Rand- und Übergangsbedingungen an den Grenzen der unter dem Körper liegenden Elemente  $p$ , sowie die Übergangsbedingungen zum infiniten Element können in Analogie zu den obigen Ausführungen formuliert werden.

An dieser Stelle werden nur noch die Beziehungen angegeben, die sich aus der Ableitung des Potentials am Rand  $r = a$  des infiniten Elementes ergeben. Es ist dies die einzige Gleichung, die Beziehungen zwischen den Fourierkoeffizienten dreier Elemente angibt.  $l=L$  und  $p=P$  sind die

Elemente des Typs II und III, die an das infinite Element I anschließen. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 & \delta_{\alpha\alpha^*} a R'_{m\alpha}(a) F_{jm\alpha}^I \\
 &= \frac{d-d_L}{d} \sum_{\alpha_L} L_{\alpha^*\alpha_L} \left\{ a R'_{m\alpha_L}(a) F_{jm\alpha_L} + a R'^*_{m\alpha_L}(a) F_{jm\alpha_L}^* \right\} \\
 &+ \frac{h_p}{d} \sum_{n_p} L_{\alpha^*n_p} \left\{ a R'_{mn_p}(a) F_{jmn_p} + a R'^*_{mn_p}(a) F_{jmn_p}^* \right\} \\
 &+ P_{jm\alpha^*}
 \end{aligned} \tag{3.1-62}$$

mit den Funktionen  $R'(a)$  nach Glg (3.1-60) für die unterschiedlichen Elementtypen,

$$L_{\alpha^*n_p} = \int_{z=0}^{h_p} Z_{\alpha^*}(z) \cdot \varepsilon_{n_p} \cos\left(\frac{n_p \pi z}{h_p}\right) \frac{dz}{h_p} \tag{3.1-63}$$

und

$$\begin{aligned}
 P_{jm\alpha^*} &= a \int_{z=d_L}^d \left. \frac{dg_{jm}^{(e)}}{dr} \right|_{r=a} \cdot Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d} \\
 &+ a \int_{z=0}^{h_p} \left. \frac{dg_{jm}^{(P)}}{dr} \right|_{r=a} \cdot Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d} \\
 &+ a \int_{z=0}^d \left. \frac{dg_{jm}^{(I)}}{dr} \right|_{r=a} \cdot Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d} \\
 &+ \frac{a}{d_j} \int_{z=h_p}^{d_L} \left. U_j \right|_{r=a} \cdot Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d}
 \end{aligned} \tag{3.1-64},$$

wobei

$$g_{Dm}^{(I)} = \left\{ J_m(\alpha r) - \frac{J_m(\alpha a)}{H_m(\alpha a)} H_m(\alpha r) \right\} \frac{\cosh(\alpha z)}{\alpha d \sinh(\alpha d)} \cdot e^{-im\mu} \quad (3.1-65)$$

als partikulärer Anteil der Glg (3.1-23) beim Diffraktionsproblem aufgefaßt werden kann. Andere partikuläre Anteile, etwa für die Abstrahlungsprobleme, (Glg (3.1-32)), existieren im äußeren Feld nicht.

Die kompletten Randbedingungen an den Rändern aller Elemente sowie auch die Werte der Integrale über die vertikalen Ränder, die alle analytisch zu lösen sind, werden in /11/ angegeben.

Die Formulierung der Randbedingungen an den vertikalen Grenzen aller Elemente nach den Glgn (3.1-54), (3.1-59) und (3.1-62) führt zu einem linearen Gleichungssystem mit den Fourierkoeffizienten aller Elemente als Unbekannten.

Die unbekanntenen Fourierkoeffizienten der Elemente des Typs II können beginnend beim innersten Element rekursiv aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Ebenso verfährt man mit den Fourierkoeffizienten der Elemente des Typs III. Auf diese Weise gelangt man zu  $m$  Gleichssystemen mit den unbekanntenen Fourierkoeffizienten des infiniten Elementes, dessen rechte Seiten aus den inhomogenen Randbedingungen auf der Körperoberfläche resultieren:

$$[C_{m\alpha^* \alpha}] \left\{ F_{jm\alpha}^I \right\} = \left\{ P_{jm\alpha^*}^* \right\} \quad (3.1-66)$$

Die Matrix  $C_m$  ist unabhängig davon, ob es sich bei der Problemstellung  $j$  um das Diffraktions- oder um ein Abstrahlungsproblem handelt. Sie ist weiter für  $m = -m$  identisch wegen der Ansätze  $R(r)$  in den Funktionen  $\mathcal{Y}$  (Glg (3.1-23), (3.1-35) und (3.1-43)). Bei den Abstrahlungsproblemen werden für den einzelnen Körper allerdings nur die Fälle  $m=0,1$  benötigt. Beim Diffraktionsproblem geht wegen der Formulierung der Glg (3.1-65)

$$( g_{Dm}^{(I)} = 0 \quad \text{für } r = a )$$

als einzige inhomogene Randbedingung nach Glg (3.1-64)

$$P_{Dm\alpha^*} = a \int_{z=0}^d \frac{dg_{Dm}^{(i)}}{dr} \Big|_{r=a} Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d} \quad (3.1-67)$$

mit Glg (3.1-62) in das gesamte Gleichungssystem ein. Die  $P_{Dm\alpha^*}$  bilden dann die rechten Seiten der Gleichungssysteme (3.1-66), da bei der Elimination der Fourierkoeffizienten der inneren Felder beim Diffraktionsproblem keine weiteren inhomogenen Randbedingungen zu berücksichtigen waren.

Nach Lösung der  $m$  Gleichungssysteme (3.1-66) ist das Potential im infiniten Element bekannt. Die unbekanntenen Fourierkoeffizienten der inneren Felder erhält man dann aus den Beziehungen der Glgn (3.1-54) und (3.1-59), die zuvor benutzt wurden, um diese Koeffizienten aus dem gesamten System zu eliminieren. Damit sind die Potentiale im gesamten Flüssigkeitsbereich bekannt.

### 3.2 Die Erweiterung des Makroelemente-Verfahrens auf mehrere rotationssymmetrische Körper nach der Methode der "Vielfachstreuung"

Zur Erweiterung des im vorigen Abschnitt dargelegten Makroelemente-Verfahrens auf mehrere rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse wurde die Methode der Vielfachstreuung (multiple scattering) nach Twersky /27//10/ benutzt. Twersky hat diese Methode ursprünglich für ebene akustische oder elektromagnetische Wellen aufgestellt, die an einer parallelen Anordnung zylindrischer Körper gebeugt bzw. reflektiert werden. Dabei werden auch alle Wellensysteme mitberücksichtigt, die durch Reflektion zwischen den einzelnen Körpern entstehen. Die Ebene der erregenden Wellen und die des gesamten resultierenden Störwellensystems steht senkrecht zu den Zylinderachsen der Körper.

Innerhalb der Anordnung wird zunächst ein einzelner Körper unter der Wirkung der erregenden Welle betrachtet. Von dem Körper geht als Antwort auf diese Erregung ein Störwellensystem "0. Ordnung" aus. Die erregende Welle erfüllt zusammen mit diesem Störwellensystem die geforderten Randbedingungen auf der Körperoberfläche.

Ebenso gehen von den übrigen Körpern als Antwort auf die erregende Welle Störwellensysteme "0. Ordnung" aus. Die von den übrigen Körpern ausgehenden Störwellensysteme "0. Ordnung" treffen dann auf den gerade betrachteten einzelnen Körper auf und können hier zu einem einfallenden Wellensystem "1. Ordnung" zusammengefaßt werden. Als Antwort auf diese Erregung "1. Ordnung" geht wiederum ein Störwellensystem "1. Ordnung" vom Körper aus, das man aus der Erfüllung der geforderten Randbedingungen auf der Körperoberfläche erhält.

Rekursiv können so die einfallenden und abstrahlenden Wellensysteme der Ordnung  $u+1$  der Vielfachstreuung aus den Systemen der Ordnung  $u$  gewonnen werden. Die Wellensysteme klingen mit wachsender Ordnung  $u$  ab, so daß die Rekursion

nach einer bestimmten Anzahl von Schritten abgebrochen werden kann.

Die Lösung der Randwertaufgabe kann dann als Summe über die Ordnung  $u$  der auf den einzelnen Körper einfallenden und der von diesem Körper ausgehenden Wellensysteme dargestellt werden. Für die gesamte Anordnung der Körper kann die Lösung auch mit der erregenden Welle und der Summe über alle abstrahlenden Wellensysteme aller Körper beschrieben werden.

Die Wellensysteme der Diffraktion und der Abstrahlung im äußeren infiniten Element des einzelnen rotationssymmetrischen Körpers sind mit den Potentialen  $\mathcal{V}$  der Glgn (3.1-10) bis (3.1-14) in Verbindung mit den Glgn (3.1-23) und (3.1-32) für die Funktionen  $\mathcal{V}$  gegeben.

Wegen der Orthogonalität der Funktion  $Z_{\alpha}(z)$  ( $0 \leq z \leq d$ ) in den Ansätzen für die Potentiale im äußeren infiniten Element lassen sich bei den hier betrachteten Randwertaufgaben die Wellensysteme entkoppeln. Man hat also im äußeren Element eine Summe von Wellensystemen mit den verschiedenen  $\alpha$  in der  $(x,y)$  bzw.  $(r, \varphi)$  Ebene vorliegen, die überlagert sind ( $\alpha$  sind die Wurzeln der Glg (3.1-27).).

Betrachtet wird nun eine Anordnung von  $N$  rotationssymmetrischen Körpern mit vertikaler Achse (Abb.5) unter der Wirkung einer harmonischen Elementarwelle. Neben einem globalen Koordinatensystem  $(x,y,z)$  werden  $N$  lokale Koordinatensysteme mit den Ursprüngen am Meeresboden  $(x_Q, y_Q, z_Q = z)$  ( $Q=1, \dots, N$ ) vereinbart (Abb.6); die  $z$ -Achsen fallen mit den jeweiligen Rotationsachsen der Körper zusammen. Die geometrischen Definitionen an zwei benachbarten Körpern  $Q$  und  $P$  können den Abbildungen 6 und 7 entnommen werden.

Für die mit dem Wellenanlaufwinkel  $\mu$  (Abb.5) auf die Anordnung der Körper einfallende ungestörte Welle kann die komplexe Amplitude des Potentials  $\mathcal{V}_0$  (vgl. Glgn (2.3-23), (3.1-9)) bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Körpers  $Q$  mit

$$\frac{1}{d} y_0(r_a, \vartheta_a, z) = -i\omega \frac{H}{2} B_a Z_x(z) \cdot \sum_{m_a=-\infty}^{+\infty} i^{m_a} J_{m_a}(x r_a) e^{i m_a \vartheta_a - i m_a \mu} \quad (3.2-1)$$

beschrieben werden, mit der Konstanten  $B_a$

$$B_a = \frac{e^{i x (X_{0a} \cos \mu + Y_{0a} \sin \mu)}}{d \cdot Z_x'(d)} \quad (3.2-2),$$

$Z_x(z)$  nach Glg (3.1-30) und

$$Z_x'(d) = \left. \frac{d Z_x(z)}{dz} \right|_{z=d} \quad (3.2-3).$$

(Glg (3.2-1)) wird noch auf eine der Glg (3.1-10) analoge Form gebracht,

$$y_0(r_a, \vartheta_a, z) = -i\omega \frac{H}{2} \left[ \sum_{m_a=-\infty}^{+\infty} i^{m_a} \gamma_{0m_a}(r_a, z) e^{i m_a \vartheta_a} \right] \quad (3.2-4),$$

mit der Definition

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \gamma_{0m_a}(r_a, z) &= G_{0m_a}^a \frac{J_{m_a}(x_0 r_a)}{J_{m_a}(x_0 a_a)} Z_{x_0}(z) \\ &= G_{0m_a}^a x \frac{J_{m_a}(x r_a)}{J_{m_a}(x a_a)} Z_x(z) \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

( $x_0 = -i x$ ), wobei dann für  $G$

$$\begin{aligned} G_{0m_a}^a &= i^{m_a} e^{-m_a \mu} B_a J_{m_a}(x_0 a_a) \\ &= e^{-i m_a \mu} B_a J_{m_a}(x a_a) \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

gelten muß.

Als Antwort auf die erregende Welle geht vom Körper ein Störwellensystem aus. Für das Störpotential mit der Ordnung

u = 0 der gegenseitigen Beeinflussung gilt

$$y_{\eta}^{Q,0''}(r_Q, \vartheta_Q, z) = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m_Q=-\infty}^{+\infty} i^{m_Q} \gamma_{\eta m_Q}^{Q,0''}(r_Q, z) e^{i m_Q \vartheta_Q} \quad (3.2-7),$$

mit

$$\frac{1}{d} \gamma_{\eta m_Q}^{Q,0''} = \left\{ -G_{0 m_Q \alpha_0}^Q \frac{K_{m_Q}(\alpha_0 r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha_0 a_Q)} Z_{\alpha_0}(z) + \sum_{\alpha} F_{\eta m_Q \alpha}^{Q_0} \frac{K_{m_Q}(\alpha r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha a_Q)} Z_{\alpha}(z) \right\} \quad (3.2-8).$$

Die unbekanntenen Fourierkoeffizienten des Störpotentials erhält man aber aus der Lösung des Diffraktionsproblems  $\mathcal{Y}_D$  für den einzelnen Körper Q ohne Berücksichtigung der Beeinflussung durch die anderen Körper. Es gilt analog zu Glg (3.1-23) für die Funktionen  $\Upsilon$  im äußeren infiniten Element

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \Upsilon_{D m_Q}^{Q_0} &= \frac{1}{d} \Upsilon_{0 m_Q}^Q + \frac{1}{d} \gamma_{\eta m_Q}^{Q_0} \\ &= G_{0 m_Q \alpha_0}^Q \left\{ \frac{I_{m_Q}(\alpha_0 r_Q)}{I_{m_Q}(\alpha_0 a_Q)} - \frac{K_{m_Q}(\alpha_0 r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha_0 a_Q)} \right\} Z_{\alpha_0}(z) \\ &\quad + \sum_{\alpha} F_{\eta m_Q \alpha}^{Q_0} \frac{K_{m_Q}(\alpha r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha a_Q)} Z_{\alpha}(z) \end{aligned} \quad (3.2-9).$$

Der Anteil

$$g_{D m_Q}^{Q_0} = G_{0 m_Q \alpha_0}^Q \left\{ \frac{I_{m_Q}(\alpha_0 r_Q)}{I_{m_Q}(\alpha_0 a_Q)} - \frac{K_{m_Q}(\alpha_0 r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha_0 a_Q)} \right\} Z_{\alpha_0}(z) \quad (3.2-10)$$

in Glg (3.2-9) kann wie der in Glg (3.1-65) als ein partikulärer Anteil aufgefaßt werden; er unterscheidet sich vom  $g_D$  der Glg (3.1-65) lediglich dadurch, daß mit  $B_Q$  nach Glg (3.2-2) der Ursprung der Welle um  $X_{0Q}, Y_{0Q}$  verschoben wurde.

Die m Gleichungssysteme für die unbekanntenen Fourierkoeffizienten der Glg (3.2-9) lauten dann analog zur Glg

(3.1-66) für den Körper  $\mathcal{Q}$

$$[C_{m_a}^{\mathcal{Q}} \alpha^* \alpha] \left\{ F_{7m_a}^{\mathcal{Q}_0} \right\} = \left\{ P_{Dm_a}^{\mathcal{Q}_0} \alpha^* \right\} \quad (3.2-11)$$

mit

$$P_{Dm_a}^{\mathcal{Q}_0} \alpha^* = a_a \int_{z=0}^d \frac{d g_{Dm_a}^{\mathcal{Q}_0}}{d r_a} \Big|_{r_a=a_a} \cdot Z_{\alpha^*}(z) \frac{dz}{d} \quad (3.2-12).$$

Wegen der Orthogonalität der Funktionen  $Z_{\alpha}(z)$  gilt

$$P_{Dm_a}^{\mathcal{Q}_0} \alpha^* = 0 \quad \text{für } \alpha^* \neq \alpha_0 \quad (3.2-13)$$

und

$$P_{Dm_a}^{\mathcal{Q}_0} \alpha_0 = \alpha_0 a_a G_{0m_a}^{\mathcal{Q}_0} \left\{ \frac{I_{m_a}'(\alpha_0 a_a)}{I_{m_a}(\alpha_0 a_a)} - \frac{K_{m_a}'(\alpha_0 a_a)}{K_{m_a}(\alpha_0 a_a)} \right\} \quad (3.2-14),$$

wobei

$$I_{m_a}'(\alpha_0 a_a) = \frac{d I_{m_a}(\alpha_0 r_a)}{d(\alpha_0 r_a)} \Big|_{r_a=a_a} \quad (3.2-15)$$

und

$$K_{m_a}'(\alpha_0 a_a) = \frac{d K_{m_a}(\alpha_0 r_a)}{d(\alpha_0 r_a)} \Big|_{r_a=a_a} \quad (3.2-16)$$

ist.

Wegen der Gültigkeit der Beziehungen der Glgn (A.1-12) und (A.1-13) kann für Glg (3.2-14) auch

$$\begin{aligned} P_{Dm_a}^{\mathcal{Q}_0} \alpha_0 &= \frac{G_{0m_a}^{\mathcal{Q}_0}}{I_{m_a}(\alpha_0 a_a) K_{m_a}(\alpha_0 a_a)} \\ &= -\frac{2i}{\pi} \frac{G_{0m_a}^{\mathcal{Q}_0}}{J_{m_a}(x a_a) H_{m_a}(x a_a)} \end{aligned} \quad (3.2-17)$$

geschrieben werden.

Für das vom Körper  $\mathcal{Q}$  ausgehende Störwellensystem der Ordnung  $u$  kann allgemein in Analogie zur Glg (3.2-7) der folgende Ansatz gemacht werden

$$y_{7m_a}^{\mathcal{Q}_u}(r_a, z) = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m_a=-\infty}^{+\infty} i^{m_a} \psi_{7m_a}^{\mathcal{Q}_u}(r_a, z) e^{i m_a z/a} \quad (3.2-18)$$

mit

$$\frac{1}{d} \gamma_{\eta m_a}^{Qu}(r_a, z) = \sum_{\alpha} \left\{ F_{\eta m_a \alpha}^{Qu} - G_{\eta m_a \alpha}^{Qu} \right\} \frac{K_{m_a}(\alpha r_a)}{K_{m_a}(\alpha a_a)} Z_{\alpha}(z) \quad (3.2-19).$$

Dieses Wellensystem kann nun als Teil eines auf den Körper P einfallenden Systems betrachtet werden.

Mit Hilfe eines Additionstheorems der Besselfunktionen kann das Potential der Glg (3.2-18) bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Körpers P transformiert werden. Es gilt (vgl. Anhang 9.5)

$$\begin{aligned} & K_{m_a}(\alpha r_a) e^{i m_a \vartheta_a} \\ &= \sum_{m_p = -\infty}^{+\infty} (-1)^{m_p} K_{m_a - m_p}(\alpha R_{aP}) \\ & \cdot e^{i(m_a - m_p)\beta_{aP}} I_{m_p}(\alpha r_p) e^{i m_p \vartheta_p} \end{aligned} \quad (3.2-20).$$

( $R_{aP} > r_p$ )

Die in Glg (3.2-20) benutzten geometrischen Größen können der Abb. 7 entnommen werden.

Mit Hilfe der Glg (3.2-20) kann nun für das Potential der Glgn (3.2-18), (3.2-19) im lokalen Koordinatensystem des Körpers P

$$\gamma_{\eta}^{Qu}(r_p, \vartheta_p, z) = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m_p = -\infty}^{+\infty} i^{m_p} \gamma_{\eta m_p}^{Qu}(r_p, z) e^{i m_p \vartheta_p} \quad (3.2-21)$$

geschrieben werden, mit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \gamma_{\eta m_p}^{Qu}(r_p, z) \\ &= \sum_{\alpha} \left[ \sum_{m_a = -\infty}^{+\infty} i^{m_a} \left\{ F_{\eta m_a \alpha}^{Qu} - G_{\eta m_a \alpha}^{Qu} \right\} \cdot \frac{K_{m_a - m_p}(\alpha R_{aP})}{K_{m_a}(\alpha a_a)} \right. \\ & \left. \cdot e^{i(m_a - m_p)\beta_{aP}} \right] \cdot i^{m_p} I_{m_p}(\alpha r_p) Z_{\alpha}(z) \end{aligned} \quad (3.2-22).$$

Durch die Addition aller von den Körpern  $Q'$  ( $Q'=1, \dots, N$ ) - mit Ausnahme des Körpers  $P$  ( $Q' \neq P$ ) - ausstrahlenden Potentiale der Ordnung  $u$  erhält man das auf den Körper  $P$  einfallende Potential der Ordnung  $(u+1)$  der gegenseitigen Beeinflussung),

$$\begin{aligned} & \varphi_{\eta}^{*P(u+1)}(r_p, \vartheta_p, z) \\ &= -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m_p=-\infty}^{+\infty} i^{m_p} \Psi_{\eta m_p}^{*P(u+1)}(r_p, z) e^{i m_p \vartheta_p} \\ &= \sum_{Q'=1}^N \varphi_{\eta}^{Q'u}(r_p, \vartheta_p, z) \end{aligned} \quad (Q'=1, \dots, N; Q' \neq P) \quad (3.2-23)$$

mit

$$\frac{1}{d} \Psi_{\eta m_p}^{*P(u+1)} = \sum_{\alpha} G_{\eta m_p \alpha}^{P(u+1)} \frac{I_{m_p}(\alpha r_p)}{I_{m_p}(\alpha a_p)} Z_{\alpha}(z) \quad (3.2-24)$$

und

$$\begin{aligned} G_{\eta m_p \alpha}^{P(u+1)} &= \left[ \sum_{Q'=1}^N \sum_{m_{Q'}=-\infty}^{+\infty} i^{m_{Q'}} \left\{ \tilde{F}_{\eta m_{Q'} \alpha}^{Q'u} - G_{\eta m_{Q'} \alpha}^{Q'u} \right\} \right. \\ & \cdot \left. \frac{K_{m_{Q'}-m_p}(\alpha R_{Q'P})}{K_{m_{Q'}}(\alpha a_{Q'})} e^{i(m_{Q'}-m_p)\beta_{Q'P}} \right] i^{m_p} I_{m_p}(\alpha a_p) \end{aligned} \quad (3.2-25).$$

Für das daraufhin vom Körper  $P$  ausgehende Potential der Ordnung  $(u+1)$  kann dann nach Glg (3.2-18)

$$\varphi_{\eta}^{P(u+1)} = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m_p=-\infty}^{+\infty} i^{m_p} \Psi_{\eta m_p}^{P(u+1)}(r_p, z) e^{i m_p \vartheta_p} \quad (3.2-26)$$

geschrieben werden, mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \Psi_{\eta m_p}^{P(u+1)}(r_p, z) &= \sum_{\alpha} \left\{ \tilde{F}_{\eta m_p \alpha}^{P(u+1)} - G_{\eta m_p \alpha}^{P(u+1)} \right\} \\ & \cdot \frac{K_{m_p}(\alpha r_p)}{K_{m_p}(\alpha a_p)} Z_{\alpha}(z) \end{aligned} \quad (3.2-27).$$

Mit den Potentialen  $y_{\eta}^{*P(u+1)} + y_{\eta}^{P(u+1)}$  nach den Glgn (3.2-23) und (3.2-24) liegt ein Diffraktionsproblem der Ordnung  $(u+1)$  für den einzelnen Körper  $P$  vor. Auf dem Körper  $P$  ist die Randbedingung

$$\frac{\partial \left( y_{\eta}^{*P(u+1)}(r_p, \vartheta_p, z) + y_{\eta}^{P(u+1)}(r_p, \vartheta_p, z) \right)}{\partial n} \Big|_{S_P} = 0 \quad (3.2-28)$$

zu erfüllen.

Die unbekanntenen Fourierkoeffizienten der Ansätze der Glgn (3.2-26), (3.2-27) erhält man aus der Lösung der  $m$  linearen Gleichungssysteme für den Körper  $P$  wie für die Ordnung  $u=0$  nach Glg (3.2-11)

$$\left[ C_{m_p \alpha^* \alpha}^P \right] \left\{ F_{\eta m_p \alpha}^{P(u+1)} \right\} = \left\{ P_{\eta m_p \alpha^*}^{P(u+1)} \right\} \quad (3.2-29),$$

wobei die  $P_{\eta m_p \alpha^*}^{P(u+1)}$  analog zur Glg (3.2-12) zu bilden sind

$$P_{\eta m_p \alpha^*}^{P(u+1)} = \frac{G_{\eta m_p \alpha^*}^{P(u+1)}}{I_{m_p}(\alpha^* a_p) K_{m_p}(\alpha^* a_p)} \quad (3.2-30)$$

(vgl. Glg (3.2-17)). Im Unterschied zur Glg (3.2-11) sind im allgemeinen Fall in Glg (3.2-29) alle  $P_{\eta m_p \alpha^*}^{P(u+1)}$  besetzt.

Mit Hilfe der Glgn (3.2-23) bis (3.2-27) und (3.2-29) können dann rekursiv die Potentiale der nächst höheren Ordnung der gegenseitigen Beeinflussung ermittelt werden.

Praktische Rechnungen haben gezeigt, daß etwa nach der Ordnung  $u=6$  oder  $7$  die Rekursion abgebrochen werden kann. Beiträge höherer Ordnung wirken sich auf die numerischen Ergebnisse nicht mehr aus.

Damit sind aber die Potentiale im äußeren infiniten Element um die einzelnen Körper herum bekannt. Für das Störpotential des Diffraktionsproblems gilt

$$y_{\eta} = \sum_{Q=1}^N \sum_{u=0}^{N_u} y_{\eta}^{Q_u} \quad (3.2-31),$$

wobei dann die  $y_{\eta}^{a_u}$  bezüglich der verschiedenen lokalen Koordinatensysteme vorliegen.

In der näheren Umgebung des Körpers Q kann das gesamte Wellensystem im äußeren Element mit der Summe der aus- und einstrahlenden Potentiale bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Körpers Q beschrieben werden

$$y_D(r_a, \vartheta_a, z) = y_0(r_a, \vartheta_a, z) + y_{\eta}^{a_0}(r_a, \vartheta_a, z) + \sum_{u=1}^{N_u} (y_{\eta}^{*a_u}(r_a, \vartheta_a, z) + y_{\eta}^{a_u}(r_a, \vartheta_a, z)) \quad (3.2-32).$$

Nach der Summation über die Ordnungen u kann für das Potential des Diffraktionsproblems nach Glg (3.2-32) noch formal

$$y_D(r_a, \vartheta_a, z) = y_{\eta}^{*a}(r_a, \vartheta_a, z) + y_{\eta}^a(r_a, \vartheta_a, z) \quad (3.2-33)$$

geschrieben werden, wobei hier  $y_{\eta}^{*a}$  das Potential der ungestörten Welle  $y_0$  beinhaltet. Es gilt dann

$$\frac{1}{d} y_{\eta}^{*a}(r_a, \vartheta_a, z) = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha} \sum_{m_a=-\infty}^{+\infty} i^{m_a} G_{\eta m_a \alpha}^a \frac{I_{m_a}(\alpha r_a)}{I_{m_a}(\alpha a_a)} e^{i m_a \vartheta_a} Z_{\alpha}(z) \quad (3.2-34)$$

und

$$\frac{1}{d} y_{\eta}^a(r_a, \vartheta_a, z) = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha} \sum_{m_a=-\infty}^{+\infty} i^{m_a} F_{\eta m_a \alpha}^a \frac{K_{m_a}(\alpha r_a)}{k_{m_a}(\alpha a_a)} e^{i m_a \vartheta_a} Z_{\alpha}(z) \quad (3.2-35).$$

Mit der rein formalen Definition

$$G_{\eta m_a \alpha_0}^{a_0} = G_{0 m_a \alpha_0}^{a_0} i \quad G_{\eta m_a \alpha}^{a_0} = 0 \quad \text{für } \alpha \neq \alpha_0$$

werden die Fourierkoeffizienten wie folgt gebildet:

$$G_{\eta m_a \alpha}^a = \sum_{u=0}^{N_u} G_{\eta m_a \alpha}^{a_u} \quad (3.2-36),$$

$$F_{\eta m_a \alpha}^Q = \sum_{u=0}^{N_u} \left\{ F_{\eta m_a \alpha}^{Q_u} - G_{\eta m_a \alpha}^{Q_u} \right\} \quad (3.2-37).$$

Das Potential des Diffraktionsproblems erfüllt die Randbedingung der Glg (2.4-3) auf den Körperoberflächen  $S_Q$ . Aus Glg (3.2-28) folgt mit Glg (3.2-33) als Summe über  $u$  sofort

$$\left. \frac{\partial y_D}{\partial n} \right|_{S_Q} = \left. \frac{\partial}{\partial n} (y_{\eta}^{+Q} + y_{\eta}^Q) \right|_{S_Q} = 0 \quad (3.2-38).$$

Vertauscht man in Glg (3.2-20) die Indizes  $P$  und  $Q$ , so liegt das Additionstheorem für die Transformation von den lokalen Koordinatensystemen  $P$  auf das System  $Q$  vor. Wegen der Einschränkung  $r_P < R_{QP}$  ist die Darstellung des Potentials des Diffraktionsproblems in Form der Glg (3.2-33) nur in einem begrenzten Gebiet gültig.

Für  $r_P > R_{QP}$  lautet das Additionstheorem mit den modifizierten Besselfunktionen 2. Art (vgl. Anhang 9.5)

$$\begin{aligned} & K_{m_Q}(\alpha r_Q) e^{i m_Q \vartheta_Q} \\ &= \sum_{m_P=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m_P - m_Q} I_{m_P - m_Q}(\alpha R_{QP}) e^{-i(m_P - m_Q)\beta_{QP}} \\ & \quad \cdot K_{m_P}(\alpha r_P) e^{i m_P \vartheta_P} \end{aligned} \quad (3.2-39).$$

$$(r_P > R_{QP})$$

Mit Hilfe dieses Additionstheorems können die  $\sum_u y_{\eta}^{Q_u}$  ( $Q=1, \dots, N$ ) der Glg (3.2-31) auf ein einziges lokales System  $P^*$  transformiert werden. Die so gewonnene Darstellung des Störpotentials ist gültig in einem Gebiet, das sich von einem Kreis ( $r_{P^*} = \text{konst.}$ ), der alle Körper einschließt, bis ins Unendliche erstreckt. Für eine Transformation bezüglich des globalen Koordinatensystems gilt das oben Gesagte analog.

Innerhalb der Anordnung wird nun das Abstrahlungsproblem eines Körpers  $T$ , der mit einer Einheitsamplitude in Richtung  $j$  erregt wird, betrachtet. Die Lösung des Problems der Ordnung der gegenseitigen Beeinflussung  $u=0$  ist iden-

tisch mit der Lösung für den Einzelkörper. Die Lösung erfüllt die Randbedingung

$$\frac{\partial y_{jT}}{\partial n} \Big|_{S_T} = \frac{\partial y_{jT}^{\text{"0" }}}{\partial n} \Big|_{S_T} = n_{jT} \quad (3.2-40)$$

auf der Körperoberfläche  $S_T$ , mit  $n_{jT}$  dem Richtungskosinus bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Körpers T.

Für alle anderen Körper  $T \neq Q$  gilt für das Potential der Ordnung  $u=0$

$$y_{jT}^{Q \text{"0" }} = 0 \quad T \neq Q \quad (3.2-41).$$

Für das von einem Körper Q ausgehende Störwellensystem der Ordnung u des hier betrachteten Abstrahlungsproblems kann in Anlehnung an die Glgn (3.2-18) und (3.2-19)

$$y_{jT}^{Qu}(r_Q, \vartheta_Q, z) = \sum_{m_Q=-\infty}^{+\infty} \gamma_{jT m_Q}^{Qu}(r_Q, z) e^{im_Q \vartheta_Q} \quad (3.2-42)$$

geschrieben werden, mit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta_j} \gamma_{jT m_Q}^{Qu}(r_Q, z) \\ &= \sum_{\alpha} \left\{ F_{jT m_Q \alpha}^{Qu} - G_{jT m_Q \alpha}^{Qu} \right\} \frac{K_{m_Q}(\alpha r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha a_Q)} Z_{\alpha}(z) \end{aligned} \quad (3.2-43).$$

Das Potential der Ordnung  $u=0$  für den erregten Körper T kann als Sonderfall der obigen Gleichung aufgefaßt werden, wobei dann

$$G_{jT m_T \alpha}^{T_0} = 0$$

vereinbart wird. Die unbekanntenen Fourierkoeffizienten  $F_{jT}^{T_0}$  sind nur für  $j=3$ ;  $m=0$  und  $j=1,2,4,5$ ;  $m=+1,-1$  besetzt; sie sind aus der Lösung der Glg (3.1-66) bekannt. Es gilt

$$F_{1T 1 \alpha}^{T_0} = F_{1T (-1) \alpha}^{T_0} = e^{-i \frac{\pi}{2}} \tilde{F}_{2T 1 \alpha}^{T_0} = e^{i \frac{\pi}{2}} \tilde{F}_{2T (-1) \alpha}^{T_0} \quad (3.2-44),$$

$$\mathcal{F}_{5T1\alpha}^{\tau_0} = \mathcal{F}_{5T(-1)\alpha}^{\tau_0} = -e^{-i\pi/2} \mathcal{F}_{4T1\alpha}^{\tau_0} = -e^{i\pi/2} \mathcal{F}_{4T(-1)\alpha}^{\tau_0} \quad (3.2-45),$$

d.h. bei den Bewegungsrichtungen  $j=1,5$  werden Wellen erzeugt, deren Winkelabhängigkeit mit  $\cos \nu$  beschrieben wird, während bei  $j=2,4$  die Wellen mit  $\sin \nu$  verbunden sind. Das Vorzeichen  $-e^{\pm i\pi/2}$  in Glg (3.2-45) für  $j=4$  resultiert aus dem gegenüber  $j=5$  vertauschten Drehsinn der Bewegung (vgl. Abb. 1).

Wie beim Diffraktionsproblem kann das vom Körper T ausgehende Wellensystem als auf den Körper P einfallendes System betrachtet werden. Es gilt analog zu den Glgn (3.2-23) bis (3.2-25)

$$\begin{aligned} \psi_{jT}^{*P(u+1)} &= \sum_{m_p=-\infty}^{+\infty} \psi_{jTm_p}^{*P(u+1)}(r_p, z) e^{i m_p \nu_p} \\ &= \sum_{Q'=1}^N \psi_{jT}^{Q'u}(r_p, \nu_p, z) \end{aligned} \quad (Q'=1, \dots, N; Q' \neq P) \quad (3.2-46)$$

mit

$$\frac{1}{\delta_j} \psi_{jTm_p}^{*P(u+1)} = \sum_{\alpha} G_{jTm_p\alpha}^{P(u+1)} \frac{I_{m_p}(\alpha r_p)}{I_{m_p}(\alpha a_p)} Z_{\alpha}(z) \quad (3.2-47)$$

und

$$\begin{aligned} G_{jTm_p\alpha}^{P(u+1)} &= \left[ \sum_{Q'=1}^N \sum_{m_{Q'}=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m_p} \left\{ \mathcal{F}_{jTm_{Q'}\alpha}^{Q'u} - G_{jTm_{Q'}\alpha}^{Q'u} \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{K_{m_{Q'}-m_p}(\alpha R_{Q'P})}{K_{m_{Q'}}(\alpha a_{Q'})} e^{i(m_{Q'}-m_p)\beta_{Q'P}} \right] I_{m_p}(\alpha a_p) \quad (3.2-48). \end{aligned}$$

Bei der Ordnung  $u=0$  existiert nur das vom Körper T ausgehende Wellensystem (vgl. Glg (3.2-41)). Die Summe über  $Q'$  in Glg (3.2-48) reduziert sich in diesem Fall auf ein Glied mit  $Q' = T$ . Auf dem erregten Körper T ( $P = T$ ) verschwinden daher die ein- und ausfallenden Systeme der Ordnung  $u=1$

$$y_{jT}^{*P(u+1)} = y_{jT}^{P(u+1)} = 0 \quad (3.2-49).$$

Das als Antwort auf das einfallende System  $u+1$  vom Körper  $P$  ausgehende System kann nach den Glgn (3.2-42), (3.2-43) mit  $P$  anstelle von  $Q$  und  $(u+1)$  anstelle von  $u$  beschrieben werden.

Auf der Oberfläche des Körpers  $P$  haben die Potentiale die Randbedingung

$$\frac{\partial (y_{jT}^{*P(u+1)}(r_p, \vartheta_p, z) + y_{jT}^{P(u+1)}(r_p, \vartheta_p, z))}{\partial n} \Big|_{S_P} = 0 \quad (3.2-50)$$

zu erfüllen wie beim Diffraktionsproblem nach Glg (3.2-28), da die einzige inhomogene Randbedingung der Aufgabenstellung mit Glg (3.2-40) bereits vollständig erfüllt wurde. Die unbekanntenen Fourierkoeffizienten der Ordnung  $(u+1)$  erhält man daher wie beim Diffraktionsproblem durch die Glgn (3.2-29) mit Glg (3.2-30):

$$[C_{m_p \alpha^* \alpha}^P] \left\{ F_{jT m_p \alpha}^{P(u+1)} \right\} = \left\{ P_{jT m_p \alpha^*}^{P(u+1)} \right\} \quad (3.2-51),$$

$$P_{jT m_p \alpha^*}^{P(u+1)} = \frac{G_{jT m_p \alpha^*}^{P(u+1)}}{I_{m_p}(\alpha^* a_p) K_{m_p}(\alpha^* a_p)} \quad (3.2-52).$$

Rekursiv können dann die Potentiale der nächst höheren Ordnung ermittelt werden.

Für das Abstrahlungsproblem gilt dann allgemein

$$y_{jT} = \sum_{Q=1}^N \sum_{u=0}^{N_u} y_{jT}^{Q u} \quad (3.2-53),$$

wobei die Glgn (3.2-41) und (3.2-49) zu beachten sind. Die abstrahlenden Teilpotentiale  $y_{jT}^{Q u}$  in Glg (3.2-53) liegen bezüglich der einzelnen lokalen Koordinatensysteme vor.

In den lokalen Koordinatensystemen der Körper  $T$  bzw.  $Q$  gilt für das Potential des Abstrahlungsproblems in der näheren Umgebung der Körper

$$\begin{aligned}
\psi_{jT}(r_T, \vartheta_T, z) &= \psi_{jT}^{\mathcal{P}^0}(r_T, \vartheta_T, z) \\
&+ \sum_{u=2}^{N_u} \left( \psi_{jT}^{*\mathcal{P}^u}(r_T, \vartheta_T, z) + \psi_{jT}^{\mathcal{P}^u}(r_T, \vartheta_T, z) \right)
\end{aligned} \tag{3.2-54}$$

und

$$\psi_{jT}(r_Q, \vartheta_Q, z) = \sum_{u=1}^{N_u} \left( \psi_{jT}^{*Q_u}(r_Q, \vartheta_Q, z) + \psi_{jT}^{Q_u}(r_Q, \vartheta_Q, z) \right) \tag{3.2-55}.$$

(T ≠ Q)

Nach Summation über die Ordnungen kann dann ähnlich wie beim Diffraktionsproblem

$$\begin{aligned}
\psi_{jT}(r_T, \vartheta_T, z) &= \psi_{jT}^{\mathcal{P}^E}(r_T, \vartheta_T, z) \\
&+ \psi_{jT}^{*\mathcal{P}^T}(r_T, \vartheta_T, z) + \psi_{jT}^{\mathcal{P}^T}(r_T, \vartheta_T, z)
\end{aligned} \tag{3.2-56}$$

und

$$\psi_{jT}(r_Q, \vartheta_Q, z) = \psi_{jT}^{*Q}(r_Q, \vartheta_Q, z) + \psi_{jT}^Q(r_Q, \vartheta_Q, z) \tag{3.2-57},$$

(T ≠ Q)

geschrieben werden, wobei das Potential der Ordnung der gegenseitigen Beeinflussung (u=0) abgespalten wurde. (Das Potential der Ordnung u=0 ist aber das Potential des Abstrahlungsproblems für den Einzelkörper T ohne Einfluß der anderen Körper,  $\psi_{jT}^{\mathcal{P}^E} = \psi_{jT}^{\mathcal{P}^{*0}}$  .)

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta_j} \psi_{jT}^{\mathcal{P}^E}(r_T, \vartheta_T, z) \\
= \sum_{\alpha} \sum_{m_T=-\infty}^{+\infty} F_{jT}^{\mathcal{P}^E} m_T \alpha \frac{K_{m_T}(\alpha r_T)}{K_{m_T}(\alpha a_T)} e^{i m_T \vartheta_T} Z_{\alpha}(z)
\end{aligned} \tag{3.2-58}.$$

Weiter gilt für  $\psi_{jT}^{*Q}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta_j} \psi_{jT}^{*Q}(r_Q, \vartheta_Q, z) \\
= \sum_{\alpha} \sum_{m_Q=-\infty}^{+\infty} G_{jT}^{*Q} m_Q \alpha \frac{I_{m_Q}(\alpha r_Q)}{I_{m_Q}(\alpha a_Q)} e^{i m_Q \vartheta_Q} Z_{\alpha}(z)
\end{aligned} \tag{3.2-59},$$

und für  $y_{jT}^Q$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_j} y_{jT}^Q(r_Q, \vartheta_Q, z) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{m_Q=-\infty}^{+\infty} F_{jT m_Q \alpha}^Q \frac{K_{m_Q}(\alpha r_Q)}{K_{m_Q}(\alpha a_Q)} e^{i m_Q \vartheta_Q} Z_{\alpha}(z) \end{aligned} \quad (3.2-60)$$

für alle  $Q$  einschließlich  $Q = T$ , wobei die Fourierkoeffizienten analog zu den Glgn (3.2-36) und (3.2-37) des Diffraktionsproblems zu bilden sind. (Die Summe ist hierbei allerdings über  $u = 2, \dots, N_u$  bei  $Q = T$  bzw. über  $u = 1, \dots, N_u$  bei  $Q \neq T$  zu bilden., s.o.).

Daß das Potential des Abstrahlungsproblems  $y_{jT}$  (Gln (3.2-56) und (3.2-57)) die Randbedingungen auf den Körperoberflächen gemäß Glgn (2.4-4) und (2.4-5) erfüllt, ist leicht zu zeigen. Es gilt Glg (3.2-50), und damit für die Summe über  $u$  ( $u \geq 1$ )

$$\frac{\partial (y_{jT}^{*Q}(r_Q, \vartheta_Q, z) + y_{jT}^Q(r_Q, \vartheta_Q, z))}{\partial n} \Big|_{S_Q} = 0 \quad (3.2-61)$$

für alle  $Q$  (einschließlich  $Q = T$ ).

Mit der Glg (3.2-40) ist die einzige inhomogene Randbedingung der Aufgabenstellung bereits vollständig erfüllt:

$$\frac{\partial y_{jT}(r_T, \vartheta_T, z)}{\partial n} \Big|_{S_T} = \frac{\partial y_{jT}^{TE}(r_T, \vartheta_T, z)}{\partial n} \Big|_{S_T} = n_{jT} \quad (3.2-62).$$

Auch die Teilpotentiale des Abstrahlungsproblems der Glg (3.2-53) können wie die des Diffraktionsproblems mit Hilfe des Additionstheorems der Glg (3.2-39) auf ein globales Koordinatensystem transformiert werden. Als Besselfunktionen treten dann im Ansatz für die Potentiale im äußeren Bereich um die Körper herum ausschließlich die Funktionen  $K_m(\alpha r)$  auf (mit  $\alpha_0 = -i\chi$ ), was in Übereinstimmung mit der Abstrahlbedingung der Glg (2.3-12) steht.

Damit sind aber alle Potentiale der Glgn (2.4-1), (2.4-

2) im äußeren Element um den einzelnen Körper herum bekannt.

Die Potentiale für die inneren Felder des einzelnen Körpers sind dann nach Abschnitt 3.1 wie beim Einzelkörper zu bestimmen. Damit können die einzelnen Anteile des linearisierten instationären Druckes nach Glg (2.5-1) bestimmt werden.

Aus der Integration über die in der Ruhelage benetzte Oberfläche des Körpers können die erregenden Wellenkräfte (Glg (2.5-2)) und die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse und der Potentialdämpfung (Gln (2.5-5), (2.5-6)) gewonnen werden.

Für die weiteren Ausführungen in den folgenden Abschnitten ist es zweckmäßig die Potentiale des Diffraktionsproblems (Gln (3.2-33) bis (3.2-35)) und die des Abstrahlungsproblems (Gln (3.2-56) bis (3.2-60)) in einer etwas abgeänderten Form darzustellen. Die im vorigen benutzte Normierung der Besselfunktionen wird nun aufgehoben und die Glieder, die mit der imaginären Wurzel  $\alpha_0 = -i\kappa$  verbunden sind, werden aus der Summe über die  $\alpha$  herausgelöst. Beispielhaft kann für das abstrahlende Potential des Diffraktionsproblems

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \varphi_7^Q(r_Q, \vartheta_Q, z) = & -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{7m\kappa}^{*Q} H_m(\kappa r_Q) e^{im\vartheta_Q} Z_\kappa(z) \\ & - i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{7m\alpha'}^{*Q} K_m(\alpha' r_Q) e^{im\vartheta_Q} Z_{\alpha'}(z) \end{aligned} \quad (3.2-63)$$

bzw. für das abstrahlende Teilpotential des Abstrahlungsproblems

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_j} \varphi_{j\pi}^Q(r_Q, \vartheta_Q, z) = & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{j\pi m\kappa}^{*Q} H_m(\kappa r_Q) e^{im\vartheta_Q} Z_\kappa(z) \\ & + \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{j\pi m\alpha'}^{*Q} K_m(\alpha' r_Q) e^{im\vartheta_Q} Z_{\alpha'}(z) \end{aligned} \quad (3.2-64)$$

geschrieben werden.

Die Summe über die  $\alpha'$  beinhaltet also nur noch die Funktionen mit den reellen  $\alpha$ . Die Fourierkoeffizienten erhält man durch einen einfachen Koeffizientenvergleich mit den o.a. Gleichungen. Es gilt

$$F_{7m\alpha}^{*Q} = i^m F_{7m\alpha}^Q / H_m(\alpha a_Q) \quad (3.2-65),$$

$$F_{7m\alpha'}^{*Q} = i^m F_{7m\alpha'}^Q / K_m(\alpha' a_Q) \quad (3.2-66)$$

und

$$F_{jTm\alpha}^{*Q} = F_{jTm\alpha}^Q / H_m(\alpha a_Q) \quad (3.2-67),$$

$$F_{jTm\alpha'}^{*Q} = F_{jTm\alpha'}^Q / K_m(\alpha' a_Q) \quad (3.2-68).$$

Die einfallenden Potentiale können ebenso dargestellt werden. Für das einfallende Potential des Diffraktionsproblems gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} Y_7^{*Q}(r_Q, \beta_Q, z) &= -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{7m\alpha}^{*Q} J_m(\alpha r_Q) e^{im\beta_Q} Z_z(z) \\ &- i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{7m\alpha'}^{*Q} I_m(\alpha' r_Q) e^{im\beta_Q} Z_{\alpha'}(z) \end{aligned} \quad (3.2-69),$$

und für das einfallende Potential des Abstrahlungsproblems

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_j} Y_{jT}^{*Q}(r_Q, \beta_Q, z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{jTm\alpha}^{*Q} J_m(\alpha r_Q) e^{im\beta_Q} Z_z(z) \\ &+ \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{jTm\alpha'}^{*Q} I_m(\alpha' r_Q) e^{im\beta_Q} Z_{\alpha'}(z) \end{aligned} \quad (3.2-70).$$

Die Glgn (3.2-65) bis (3.2-68) gelten dann analog für die  $G$  in Verbindung mit den Besselfunktionen 1. Art. Daneben können die Potentiale noch unter Benutzung der reellen Winkelfunktionen dargestellt werden. Für das abstrahlende Potential  $y_7^Q$  kann beispielhaft

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} y_7^Q &= -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \bar{F}_{7m\alpha}^{QC} H_m(\alpha r_Q) \cos(m \vartheta_Q) Z_x(z) \\ &\quad - i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha'} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \bar{F}_{7m\alpha'}^{QC} K_m(\alpha' r_Q) \cos(m \vartheta_Q) Z_{\alpha'}(z) \\ &\quad - i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \bar{F}_{7m\alpha}^{QS} H_m(\alpha r_Q) \sin(m \vartheta_Q) Z_x(z) \\ &\quad - i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha'} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \bar{F}_{7m\alpha'}^{QS} K_m(\alpha' r_Q) \sin(m \vartheta_Q) Z_{\alpha'}(z) \quad (3.2-71) \end{aligned}$$

geschrieben werden.  $\epsilon_m$  ist das Neumann-Symbol. Für den Zusammenhang mit den Fourierkoeffizienten der Glg (3.2-63) gilt dann

$$\bar{F}_{7m\alpha}^{*Q} = \bar{F}_{7m\alpha}^{QC} - i \bar{F}_{7m\alpha}^{QS} \quad (3.2-72),$$

$$\bar{F}_{7(-m)\alpha}^{*Q} = (-1)^m \left\{ \bar{F}_{7m\alpha}^{QC} + i \bar{F}_{7m\alpha}^{QS} \right\} \quad (3.2-73)$$

( $m \geq 0$ )

und

$$\bar{F}_{7m\alpha'}^{*Q} = \bar{F}_{7m\alpha'}^{QC} - i \bar{F}_{7m\alpha'}^{QS} \quad (3.2-74),$$

$$\bar{F}_{7(-m)\alpha'}^{*Q} = \bar{F}_{7m\alpha'}^{QC} + i \bar{F}_{7m\alpha'}^{QS} \quad (3.2-75),$$

( $m \geq 0$ )

wobei die Glgn (A.1-8) bis (A.1-11) zu beachten sind.

$$(\bar{F}_{70\alpha}^{QS} = 0)$$



#### 4. Ermittlung von Kräften aus der Betrachtung des infiniten Elementes. Beziehungen zwischen den Dämpfungskoeffizienten

Die Matrix der hydrodynamischen Reaktionskräfte, bzw. der hydrodynamischen Massen und Dämpfungen, ist bei einer Anordnung mehrerer Körper relativ groß. Die Integration der instationären Druckanteile über die Körperoberfläche zur Ermittlung der Kräfte ist, wenn sehr viele Elemente bei der Idealisierung des Strömungsfeldes eingesetzt wurden, aufwendig. Hier wird gezeigt, wie mit Hilfe der Haskind-Newman-Beziehung /24/,/21/ die Kräfte zum Teil aus der Betrachtung der Potentiale im infiniten Element gewonnen werden können.

Die im folgenden ausgeführten Betrachtungen gelten allgemein für eine Anordnung mehrerer Körper in Schwerewellen bei beschränkter Wassertiefe und sind nicht auf rotationssymmetrische Körper beschränkt.

Die linearen Potentiale des Strömungsfeldes um einen Körper allgemeiner geometrischer Form lassen sich in einiger Entfernung von dem Körper ebenfalls mit Hilfe von Fourierreihenansätzen beschreiben, so wie sie für den rotationssymmetrischen Körper in der allgemeinen Form (vgl. Glg (3.1-10)) aufgestellt wurden. Liegt etwa die Lösung für ein Randwertproblem mehrerer Körper in Schwerewellen nach dem Integralgleichungsverfahren /5/,/6/ vor, so können die Potentiale für das Strömungsfeld um den einzelnen Körper herum mit Hilfe der Additionstheoreme nach Fourierreihen entwickelt werden, wie sie in Form der Glgn (3.2-33) bis (3.2-35) und (3.2-55) bis (3.2-57) ,bzw. (3.2-63), (3.2-69) und (3.2-64), (3.2-70) gegeben sind. Es ist zu beachten, daß bei einem Einzelkörper allgemeiner geometrischer Form bei den Abstrahlungspotentialen  $\psi_{j,r}^{T_e}$  alle  $m_r$  besetzt sind.

Betrachtet wird die Anordnung mehrerer rotationssymmetrischer Körper (Abb. 5,6). Der Flüssigkeitsbereich um die Körper herum sei das Gebiet  $R$ . Analog zum Einzelkörper der Abb. 2 ist das Gebiet  $R$  von den Oberflächen der Körper  $S_a$  ,

der Stillwasserfläche  $S_d$  ( $z = d$ ), dem Meeresboden  $S_B$  und von einer vertikalen geschlossenen Fläche  $S_R$  in einigem Abstand von der Anordnung begrenzt.

Nach dem zweiten Green'schen Satz (Anhang 9.6) gilt für zwei beliebige Potentiale  $\phi$  und  $\phi^*$ , die die Laplace'sche Gleichung erfüllen, in einem abgeschlossenen Gebiet  $R$  /14/, /21/

$$\iint_S \left( \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n^*} \right) dS = 0 \quad (4.-1),$$

wobei  $S$  die Oberfläche des Gebietes  $R$  und  $\vec{n}^*$  der nach außen gerichtete Normalenvektor der Oberfläche ist.

So werden beispielsweise die beiden Potentiale der Abstrahlungsprobleme  $\phi_{jT}$  und  $\phi_{eP}$  der Randwertaufgabe der Glg (2.4-1) überlagert

$$\iint_S \left( \phi_{jT} \frac{\partial \phi_{eP}}{\partial n^*} - \phi_{eP} \frac{\partial \phi_{jT}}{\partial n^*} \right) dS = 0 \quad (4.-2).$$

$$(1, j=1, \dots, 6; P, T=1, \dots, N)$$

Grundsätzlich gilt die Glg (4.-1) für alle möglichen Kombinationen der Potentiale der Glg (2.4-1). (Überlagert man zwei identische Potentiale, so wird die Glg (4.-2) natürlich trivial.)

Betrachtet wird hier die lineare Randwertaufgabe, daher gilt Glg (4.-2) ebenso für die komplexen Amplituden der Potentiale

$$\iint_S \left( \psi_{jT} \frac{\partial \psi_{eP}}{\partial n^*} - \psi_{eP} \frac{\partial \psi_{jT}}{\partial n^*} \right) dS = 0 \quad (4.-3).$$

Wegen der Randbedingungen der Glgn (2.3-10) und (2.3-11) an der Stillwasserfläche und am Meeresboden, die von allen Potentialen der Glg (2.4-1) erfüllt werden, entfallen

die Integrale über diese Oberflächen.

Damit sind aber die Integrale in Glg (4.-3) über alle Körperoberflächen  $S_Q$  ( $Q=1, \dots, N$ ) und über die Randfläche  $S_R$  zu bilden.

$$\sum_{Q=1}^N \iint_{S_Q} \left( y_{j\pi} \frac{\partial y_{ep}}{\partial n^*} - y_{ep} \frac{\partial y_{j\pi}}{\partial n^*} \right) dS$$

$$+ \iint_{S_R} \left( y_{j\pi} \frac{\partial y_{ep}}{\partial n^*} - y_{ep} \frac{\partial y_{j\pi}}{\partial n^*} \right) dS = 0 \quad (4.-4).$$

Nach dem, was in Abschnitt 3.2 über die formale Entwicklung der abstrahlenden Potentiale bezüglich des globalen bzw. eines einzigen lokalen Koordinatensystems für den äußeren Bereich um die Körper herum gesagt worden ist, kann analog zu den Glgn (3.2-63), (3.2-64)

$$\frac{1}{d} y_{\eta} (r, \nu, z) = -i\omega \frac{H}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{\eta m \chi}^* H_m(\chi r) e^{im\nu} Z_{\chi}(z)$$

$$- i\omega \frac{H}{2} \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{\eta m \alpha'}^* K_m(\alpha' r) e^{im\nu} Z_{\alpha'}(z) \quad (4.-5)$$

und

$$\frac{1}{\delta_j} y_{j\pi} (r, \nu, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{j\pi m \chi}^* H_m(\chi r) e^{im\nu} Z_{\chi}(z)$$

$$+ \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{j\pi m \alpha'}^* K_m(\alpha' r) e^{im\nu} Z_{\alpha'}(z) \quad (4.-6)$$

geschrieben werden.

Zweckmäßigerweise wird die Randfläche  $S_R$  als Zylindermantelfläche mit einem Radius  $r=\text{konst.}$ , der alle Körper einschließt, und mit  $0 \leq z \leq d$  angenommen. Im Anhang 9.8 wird gezeigt, daß für das Integral über  $S_R$  allgemein

$$\iint_{S_A} \left( \psi \frac{d\psi^*}{dn^*} - \psi^* \frac{d\psi}{dn^*} \right) ds$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^d \left( \psi \frac{d\psi^*}{dn^*} - \psi^* \frac{d\psi}{dn^*} \right) dz \quad r \Big|_{r=\text{konst.}} \quad d\vartheta = 0$$

(4.-7)

gilt, sofern mit  $\psi$  und  $\psi^*$  die Potentiale zweier abstrahlender oder zweier einfallender Wellensysteme bezeichnet sind. (Für die Kombination eines einfallenden Wellensystems mit einem abstrahlenden System gilt Glg (4.-7) nicht.)

Es gilt also nach Glg (4.-7) für die zwei Potentiale des Abstrahlungsproblems  $\psi_{jT}$  und  $\psi_{eP}$

$$\iint_{S_A} \left( \psi_{jT} \frac{d\psi_{eP}}{dn^*} - \psi_{eP} \frac{d\psi_{jT}}{dn^*} \right) dS = 0 \quad (4.-8).$$

Die Potentiale  $\psi_{eP}$  und  $\psi_{jT}$  erfüllen nach den Glgn (2.4-4) und (2.4-5) die folgenden Randbedingungen auf den Körperoberflächen  $S_Q$  ( $Q=1, \dots, N$ ):

$$\frac{d\psi_{eP}}{dn^*} \Big|_{S_Q} = \begin{cases} -n_{eP} & \text{für } Q = P \\ 0 & \text{für } Q \neq P \end{cases} \quad (4.-9),$$

( $Q = 1, \dots, N$ )

$$\frac{d\psi_{jT}}{dn^*} \Big|_{S_Q} = \begin{cases} -n_{jT} & \text{für } Q = T \\ 0 & \text{für } Q \neq T \end{cases} \quad (4.-10),$$

( $Q = 1, \dots, N$ )

wobei zu beachten ist, daß die Richtung der Flächennormalen  $n$  entgegengesetzt ist gegenüber  $n^*$  (vgl. Glg (2.4-4)).

Setzt man die Glgn (4.-7), (4.-9) und (4.-10) in Glg (4.-4) ein, so verbleiben in Glg (4.-4) nur noch die Inte-

grale über die Körperoberflächen  $S_P$  und  $S_T$

$$\begin{aligned} & \iint_{S_P} \left( \varphi_{jT} \frac{d\varphi_{eP}}{dn^*} \right) dS - \iint_{S_T} \left( \varphi_{eP} \frac{d\varphi_{jT}}{dn^*} \right) dS \\ &= - \iint_{S_P} \left( \varphi_{jT} n_{eP} \right) dS + \iint_{S_T} \left( \varphi_{eP} n_{jT} \right) dS \end{aligned} \quad (4.-11).$$

Diese Integrale multipliziert mit  $\rho$  sind aber als Koeffizienten der hydrodynamischen Massen und der Potentialdämpfung nach Glgn (2.5-4) bis (2.5-6) zu interpretieren. Damit sind bereits die Reziprozitätsbeziehungen zwischen den Koeffizienten hergeleitet (vgl. auch /21/):

$$a_{ej}^{PT} = a_{je}^{TP} ; b_{ej}^{PT} = b_{je}^{TP} \quad (4.-12).$$

Analog zu den Glgn (4.-1) bis (4.-4) wird nun das Potential des Diffraktionsproblems  $\varphi_D = \varphi_0 + \varphi_T$  mit dem Potential eines Abstrahlungsproblems  $\varphi_{eP}$  überlagert. Es gilt (vgl. Glg (4.-4))

$$\begin{aligned} & \sum_{Q=1}^N \iint_{S_Q} \left( \varphi_D \frac{d\varphi_{eP}}{dn^*} - \varphi_{eP} \frac{d\varphi_D}{dn^*} \right) dS \\ &+ \iint_{S_R} \left( \varphi_D \frac{d\varphi_{eP}}{dn^*} - \varphi_{eP} \frac{d\varphi_D}{dn^*} \right) dS = 0 \end{aligned} \quad (4.-13).$$

Nach Glg (2.4-3) verschwindet die Ableitung des Potentials des Diffraktionsproblems normal zu den Oberflächen auf allen Körperoberflächen  $S_Q$ . Mit den Randbedingungen der Glg (4.-9) folgt dann aus Glg (4.-13)

$$\begin{aligned} & \iint_{S_P} \left( \varphi_D n_{eP} \right) dS \\ &= \iint_{S_R} \left( \varphi_D \frac{d\varphi_{eP}}{dn^*} - \varphi_{eP} \frac{d\varphi_D}{dn^*} \right) dS \end{aligned} \quad (4.-14).$$

Multipliziert man Glg (4.-14) mit  $-i\omega\rho e^{-i\omega t}$ , so erhält man damit nach Glg (2.5-2) die erregende Kraft, die infolge der Elementarwelle auf den festgehaltenen Körper P innerhalb der Anordnung ausgeübt wird. Das Potential des Diffraktionsproblems auf der rechten Seite der Glg (4.-14) wird durch das Potential der ungestörten Welle  $\varphi_0$  und das Störpotential  $\varphi_\eta$  ersetzt.

Damit folgt aus Glg (4.-14)

$$\begin{aligned}
 F_{we}^P(t) &= -i\omega\rho \iint_{S_P} (\varphi_D n_{eP}) dS \cdot e^{-i\omega t} \\
 &= -i\omega\rho \left[ \iint_{S_R} \left( \varphi_0 \frac{d\varphi_{eP}}{dn^*} - \varphi_{eP} \frac{d\varphi_0}{dn^*} \right) dS \right. \\
 &\quad \left. + \iint_{S_R} \left( \varphi_\eta \frac{d\varphi_{eP}}{dn^*} - \varphi_{eP} \frac{d\varphi_\eta}{dn^*} \right) dS \right] \cdot e^{-i\omega t} \quad (4.-15).
 \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber wird noch einmal das Potential der einfallenden ungestörten Welle (vgl. Glg (3.2-1)ff) aufgeführt

$$\frac{1}{d} \varphi_0 = -i\omega \frac{H}{2} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{0m\kappa}^* J_m(\kappa r) e^{im\psi} Z_\kappa(z) \right\} \quad (4.-16)$$

mit

$$G_{0m\kappa}^* = (i)^m \frac{e^{-im\psi}}{dZ'_\kappa(d)} \quad (4.-17).$$

Im Anhang 9.8 wird das Ergebnis der Integration über die Randfläche  $S_R$ , wie sie bei der Überlagerung zweier beliebiger Teilpotentiale auftritt, diskutiert.

Nach dem, was bereits im Zusammenhang mit Glg (4.-7) gesagt wurde, entfällt das zweite Integral über  $S_R$  in Glg (4.-15).

Setzt man die Entwicklungen für die Potentiale nach Glgn (4.-16) und (4.-6) in Glg (4.-15) ein, so erhält man dann unter Beachtung der Glgn (A.8-1), (A.8-2) und (A.8-6)

$$F_{we}^P(t) = (-i\omega\rho)(-i\omega\frac{H}{2}d\delta_e) \cdot 4id \cdot \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m G_{0m\alpha}^* \hat{F}_{eP(-m)\alpha}^* \right\} \cdot e^{-i\omega t} \quad (4.-18).$$

Da das Potential der ungestörten Welle nur mit der Funktion  $Z_\alpha(z)$  verbunden ist, treten in Glg (4.-18) keine Koeffizienten mehr mit den reellen  $\alpha'$  auf.

Bildet man die Summe für positive  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) und stellt man die Konstanten um, so gilt

$$F_{we}^P(t) = -i2\omega^2\rho\frac{H}{2}d^2\delta_e \cdot e^{-i\omega t} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-1)^m \left[ G_{0m\alpha}^* \hat{F}_{eP(-m)\alpha}^* + G_{0(-m)\alpha}^* \hat{F}_{ePm\alpha}^* \right] \quad (4.-19).$$

Mit der Einführung des Neumann'schen Symbols  $\epsilon_m$  in Glg (4.-19) wurde berücksichtigt, daß in Glg (4.-18) nur ein Glied mit  $m = 0$  auftritt.

Das Ergebnis mußte unabhängig von der Wahl des Radius  $r = \text{konst.}$  sein.

Auf ähnliche Weise lassen sich noch Beziehungen für die hydrodynamischen Reaktionskräfte (vgl. Glg (2.5-3)) aus der Betrachtung der einfallenden und der abstrahlenden Wellensysteme in der näheren Umgebung des einzelnen Körpers  $Q$  innerhalb der Anordnung ableiten.

Die Potentiale der Abstrahlungsprobleme (Gln (3.2-56) bis (3.2-60)) liegen in der Form der Gln (3.2-64) und (3.2-70) vor in Zylinderkoordinaten bezüglich der lokalen Koordinatensysteme. Das Gebiet  $R$  um den Körper  $Q$  sei so durch  $S_R$  (mit  $r = \text{konst.}$ ) abgegrenzt, daß kein zweiter Körper  $P$  eingeschlossen oder berührt wird ( $a_Q \leq r_Q \leq R_{QP} - a_P$ , vgl. Abbildungen 6, 7 und 2).

Überlagert wird nun das Potential des Abstrahlungsproblems  $\varphi_{eP}$  mit dem des Abstrahlungsproblems  $\varphi_{jQ}^{GF}$  des ein-

zelenen Körpers Q ohne Einfluß der anderen Körper.

Die Anwendung des zweiten Green'schen Satzes auf die Potentiale  $\mathcal{Y}_{eP}$  und  $\mathcal{Y}_{jQ}^{QE}$  im Gebiet R liefert nun völlig analog zur Glg (4.-4), hier nur im lokalen Koordinatensystem des Körpers Q,

$$\iint_{S_Q} \left( \mathcal{Y}_{eP} \frac{\partial \mathcal{Y}_{jQ}^{QE}}{\partial n^*} - \mathcal{Y}_{jQ}^{QE} \frac{\partial \mathcal{Y}_{eP}}{\partial n^*} \right) dS + \iint_{S_R} \left( \mathcal{Y}_{eP} \frac{\partial \mathcal{Y}_{jQ}^{QE}}{\partial n^*} - \mathcal{Y}_{jQ}^{QE} \frac{\partial \mathcal{Y}_{eP}}{\partial n^*} \right) dS = 0 \quad (4.-20).$$

Auf der Körperoberfläche Q gelten die Randbedingungen der Glgn (3.2-61) und (3.2-62). Auf der Kontrollfläche  $S_R$  muß wieder nach ein- und abstrahlenden Potentialanteilen unterschieden werden. Nur die Kombinationen von einfallenden und abstrahlenden Potentialanteilen (vgl. Glgn (4.-13) bis (4.-15) und Anhang 9.8) liefern Beiträge zum Integral über  $S_R$ .

Es gilt für  $P \neq Q$

$$\iint_{S_Q} \mathcal{Y}_{eP} n_{jQ} dS = \iint_{S_R} \left( \mathcal{Y}_{eP}^{*Q} \frac{\partial \mathcal{Y}_{jQ}^{QE}}{\partial n^*} - \mathcal{Y}_{jQ}^{QE} \frac{\partial \mathcal{Y}_{eP}^{*Q}}{\partial n^*} \right) dS \quad (4.-21) \quad (P \neq Q)$$

und nach Glg (2.5-4)

$$a_{je}^{QP} + \frac{i}{\omega} b_{je}^{QP} = - \rho \iint_{S_Q} \mathcal{Y}_{eP} n_{jQ} dS = - \rho \iint_{S_R} \left( \mathcal{Y}_{eP}^{*Q} \frac{\partial \mathcal{Y}_{jQ}^{QE}}{\partial n^*} - \mathcal{Y}_{jQ}^{QE} \frac{\partial \mathcal{Y}_{eP}}{\partial n^*} \right) dS \quad (4.-22). \quad (P \neq Q)$$

Setzt man für die Potentiale in Glg (4.-22) die Entwicklungen in Form der Glgn (3.2-64) und (3.2-70) ein und integriert über  $S_R$ , so erhält man unter Berücksichtigung der Glgn (A.8-6) und (A.8-7)

$$\begin{aligned}
a_{je}^{QP} + \frac{i}{\omega} b_{je}^{QP} &= -\rho \delta_e \delta_j \\
\cdot \left\{ 4id \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{epm\alpha}^{*Q} F_{ja(-m)\alpha}^{*QE} (-1)^m \right. \\
&\quad \left. - 2\pi \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{epm\alpha'}^{*Q} F_{ja(-m)\alpha'}^{*QE} \right\} \quad (4.-23). \\
&\quad (P \neq Q)
\end{aligned}$$

Bildet man noch die Summe für positive  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), so gilt

$$\begin{aligned}
a_{je}^{QP} + \frac{i}{\omega} b_{je}^{QP} &= -\rho \delta_e \delta_j d \\
\cdot \left\{ 2i \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m \left[ G_{epm\alpha}^{*Q} F_{ja(-m)\alpha}^{*QE} + G_{ep(-m)\alpha}^{*Q} F_{ja m\alpha}^{*QE} \right] \right. \\
&\quad \left. - \pi \sum_{\alpha'} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[ G_{epm\alpha'}^{*Q} F_{ja(-m)\alpha'}^{*QE} + G_{ep(-m)\alpha'}^{*Q} F_{ja m\alpha'}^{*QE} \right] \right\} \\
&\quad (P \neq Q) \quad (4.-24).
\end{aligned}$$

Bei dem Potential des Abstrahlungsproblems eines einzelnen rotationssymmetrischen Körpers sind nur die Fourierkoeffizienten der Reihe über  $m$  mit  $m = 0$  bzw.  $m = 1$  zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 3.1).

Es muß noch der Fall  $Q = P$  diskutiert werden, d.h. die Kombination zweier abstrahlender Potentiale, die von ein und demselben Körper ausgehen. Glg (4.-20) gilt auch für  $P = Q$ . Wegen der Randbedingungen der Glgn (3.2-61) und (3.2-62) gilt aber nun anstelle von Glg (4.-21):

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_Q} (y_{ep} n_{jq} - y_{ja}^{QE} n_{ea}) ds \\
&= \iint_{S_Q} \left\{ (y_{ea}^{QE} + y_{ea}^{*Q} + y_{ea}^Q) n_{ja} - y_{ja}^{QE} n_{ea} \right\} ds \\
&= \iint_{S_R} \left( y_{ea}^{*Q} \frac{\partial y_{ja}^{QE}}{\partial n^*} - y_{ja}^{QE} \frac{\partial y_{ep}^{*Q}}{\partial n^*} \right) ds \quad (4.-25).
\end{aligned}$$

Mit der Definition der Glg (4.-22) erhält man aus Glg (4.-25)

$$a_{je}^{QQ} + \frac{i}{\omega} b_{je}^{QQ} - a_{ej}^{QE} - \frac{i}{\omega} b_{ej}^{QE} = -\rho \iint_{S_R} \left( \varphi_{eQ}^{*u} \frac{\partial \varphi_{jQ}}{\partial n^*} - \varphi_{jQ}^{*u} \frac{\partial \varphi_{eQ}}{\partial n^*} \right) dS \quad (4.-26),$$

wobei hier mit  $a_{ej}^{QE}$  und  $b_{ej}^{QE}$  die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse und Dämpfung des Einzelkörpers ohne Einfluß irgendwelcher anderer Körper bezeichnet sind.

Die Reziprozitätsbeziehungen der Glg (4.-12) gelten auch für den Einzelkörper. Mit Glg (4.-26) ist dann der Anteil der Koeffizienten der hydrodynamischen Masse und Dämpfung gegeben, der als Folge der Präsenz der anderen Körper auftritt. Das Ergebnis der Integration in Glg (4.-26) läßt sich sofort aus der rechten Seite der Glg (4.-24) bestimmen, indem man dort formal den Index P durch Q ersetzt.

Die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse und der Dämpfung für den Einzelkörper können auf die oben gezeigte Art nicht gewonnen werden.

Die in Abschnitt 2.1 abgeleitete Beziehung für die einem Gebiet der Flüssigkeit R zu- bzw. abgeführte Energie (Gln (2.1-23) bis (2.1-26)) wird hier bei der linearen Randwertaufgabe benutzt, um einen Zusammenhang zwischen den Potentialen der Abstrahlungsprobleme aufzuzeigen. Für den mittleren zeitlichen Energiefluß über eine räumliche feste Fläche S gilt nach Glg (2.1-26) (vgl. hierzu auch /21/)

$$\overline{\frac{dE}{dt}}^t \Big|_S = \overline{\dot{E}}^t \Big|_S = \rho \iint_S \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n^*} dS \quad (4.-27).$$

Für den Energiefluß über die Oberfläche eines Körpers Q gilt nach Glg (2.1-24)

$$\overline{\frac{dE}{dt}}^t \Big|_{S_Q} = \overline{\dot{E}}^t \Big|_{S_Q} = - \iint_{S_Q} \overline{p^{(1)} v_{n^*}^{(1)}}^t dS \quad (4.-28).$$

Wegen der Randbedingung auf der Körperoberfläche (Glg (2.2-17)) und wegen der für den instationären Druck vorgenommenen Linearisierung (Glg (2.4-6))

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n^*} = v_{n^*}^{(1)} ; \quad p^{(1)} = -\rho \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \quad (4.-29)$$

gilt aber Glg (4.-27) ebenso auf der bewegten wie auf der festgehaltenen Körperoberfläche

$$\overline{\dot{E}}^t \Big|_{S_Q} = - \iint_{S_Q} \overline{p^{(1)} v_{n^*}^{(1)}}^t dS = \rho \iint_{S_Q} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n^*} dS \quad (4.-30).$$

Der Index (1), der die lineare Aufgabenstellung kennzeichnet, wird im weiteren fortgelassen.

Die einfache zeitliche Abhängigkeit der Potentiale 1. Ordnung ist mit Glg (2.3-1) gegeben.

Der zeitliche Mittelwert des Produktes zweier Funktionen mit der zeitlichen Abhängigkeit  $e^{-i\omega t}$  wird im Anhang 9.7 hergeleitet (Glg (A.7-7)).

Für Glg (4.-27) kann also mit der komplexen Amplitude  $\mathcal{Y}$  des Potentials  $\phi$  unter Beachtung der zeitlichen Abhängigkeit

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}^t \Big|_S &= \frac{\rho}{4} \iint_S \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial n^*} \right) dS \\ &= \frac{\rho}{4} \iint_S \left( (-i\omega \mathcal{Y}) \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial n^*} + (-i\omega) \mathcal{Y} \frac{\partial \overline{\mathcal{Y}}}{\partial n^*} \right) dS \\ &= \frac{i\omega\rho}{4} \iint_S \left( \overline{\mathcal{Y}} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial n^*} - \mathcal{Y} \frac{\partial \overline{\mathcal{Y}}}{\partial n^*} \right) dS \end{aligned} \quad (4.-31)$$

geschrieben werden. Mit  $\overline{\mathcal{Y}}$  ist dabei die zu  $\mathcal{Y}$  konjugiert

komplexe Amplitude bezeichnet.

Wegen der Randbedingung an der Stillwasserfläche nach Glg (2.3-10) geht selbstverständlich auch über diese Fläche im zeitlichen Mittel keine Energie.

Betrachtet wird wieder das Gebiet R um die N Körper herum, das von der äußeren Kontrollfläche  $S_R$ , die alle Körper einschließt, begrenzt wird. Als Kontrollfläche  $S_R$  wird zweckmäßigerweise wieder eine Zylindermantelfläche mit  $r = \text{konst.}$  und  $0 \leq z \leq d$  genommen.

Auch bei der linearisierten Aufgabenstellung ist die Änderung der mittleren zeitlichen Energie in R Null (vgl. Glg (2.1-26)); d.h. also Energie, die etwa der Flüssigkeit in R über eine Körperoberfläche zugeführt wird, muß über die Kontrollfläche  $S_R$  abgeführt werden. Nach Glg (4.-31) gilt dann unter Beachtung der Randbedingungen an der Stillwasserfläche und am Meeresboden

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}^t \Big|_S &= \frac{i\omega\rho}{4} \sum_Q \iint_{S_Q} \left( \overline{\psi} \frac{d\psi}{dn^*} - \psi \frac{d\overline{\psi}}{dn^*} \right) ds \\ &+ \frac{i\omega\rho}{4} \iint_{S_R} \left( \overline{\psi} \frac{d\psi}{dn^*} - \psi \frac{d\overline{\psi}}{dn^*} \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (4.-32).$$

Betrachtet wird zunächst das Abstrahlungsproblem eines Körpers P innerhalb der Anordnung, der mit der Amplitude  $\dot{s}_{e_0}^P$  erregt wird. Anstelle von  $\psi$  in Glg (4.-32) kann nun  $\dot{s}_{e_0}^P \psi_{eP}$  eingesetzt werden (vgl. Glg (2.4-2) und Abschnitt 2.3). Wegen der Randbedingungen der Glg (4.-9) entfallen die Integrale über die Körperoberflächen  $S_Q$  mit  $P \neq Q$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}^t \Big|_{S_P} &= - \frac{i\omega\rho}{4} \iint_{S_P} \left( \overline{\dot{s}_{e_0}^P \psi_{eP}} \dot{s}_{e_0}^P \frac{d\psi_{eP}}{dn^*} - \dot{s}_{e_0}^P \psi_{eP} \overline{\dot{s}_{e_0}^P \frac{d\psi_{eP}}{dn^*}} \right) ds \\ &= \frac{i\omega\rho}{4} \iint_{S_R} \left( \overline{\dot{s}_{e_0}^P \psi_{eP}} \dot{s}_{e_0}^P \frac{d\psi_{eP}}{dn^*} - \dot{s}_{e_0}^P \psi_{eP} \overline{\dot{s}_{e_0}^P \frac{d\psi_{eP}}{dn^*}} \right) ds \end{aligned} \quad (4.-33).$$

Die Randbedingungen der Glg (4.-9) werden auch von der

konjugiert komplexen Amplitude  $\overline{y_{ep}}$  des Potentials erfüllt (/21/).

Es gilt

$$\left. \frac{d y_{ep}}{d n^*} \right|_{S_Q} = \begin{cases} -\overline{n_{ep}} = -n_{ep} & \text{für } Q = P \\ 0 & \text{für } Q \neq P \end{cases} \quad (4.-34),$$

(Q = 1, \dots, N)

da  $n_{ep}$  reell ist.

Mit der Definition der Glg (2.4-4) erhält man dann

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}^t / S_P &= - \frac{i \omega \rho}{4} |\dot{s}_{e0}^P|^2 \iint_{S_P} \left( \overline{y_{ep}} \frac{\partial y_{ep}}{\partial n^*} - y_{ep} \frac{\partial \overline{y_{ep}}}{\partial n^*} \right) dS \\ &= \frac{i \omega \rho}{4} |\dot{s}_{e0}^P|^2 \iint_{S_P} (\overline{y_{ep}} - y_{ep}) n_{ep} dS = \frac{1}{2} |\dot{s}_{e0}^P|^2 b_{ee}^{PP} \end{aligned} \quad (4.-35).$$

Mit Glg (4.-35) bzw. (4.-33) ist die Energie gegeben, die im zeitlichen Mittel der Flüssigkeit über die Körperoberfläche zugeführt werden muß, damit der Schwingungsvorgang nicht abklingt. Der Dämpfungskoeffizient  $b_{ee}^{PP}$  - d.h. ein Diagonalglied der Dämpfungsmatrix - muß immer positiv sein, da mit einem erzwungenen Schwingungsvorgang keine Energie gewonnen werden kann.

Mit der Entwicklung der Glg (4.-6) kann die Integration über  $S_R$  leicht ausgeführt werden. Mit den im Anhang 9.8 gegebenen Glgn (A.8-4) bis (A.8-12) erhält man aus den Glgn (4.-33) und (4.-35)

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}^t / S_P &= \frac{1}{2} |\dot{s}_{e0}^P|^2 b_{ee}^{PP} \\ &= \frac{i \omega \rho}{4} |\dot{s}_{e0}^P|^2 \delta_e^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-\delta_{id}) \overline{F_{epmx}^*} \overline{F_{epmx}^*} \end{aligned} \quad (4.-36);$$

bzw. für positive  $m$  ( $m \geq 0$ )

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}^t |S_P &= \frac{1}{2} |\dot{s}_{e_0}^P|^2 b_{ee}^{PP} \\ &= \omega_p \delta_e^2 d |\dot{s}_{e_0}^P|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left\{ F_{ePm\chi}^* \overline{F_{ePm\chi}^*} + F_{eP(-m)\chi}^* \overline{F_{eP(-m)\chi}^*} \right\} \end{aligned} \quad (4.-37).$$

Die im zeitlichen Mittel zugeführte Energie wird also nur von den Wellen, die mit  $\alpha_0 = -i\chi$  verbunden sind, abgeführt; und zwar führt jede Einzelwelle der Summe über  $m$  Energie ab. (Alle Glieder der Summe über  $m$  in Glg (4.-36) bzw. (4.-37) sind reell und positiv; folglich ist auch  $b_{ee}^{PP}$  positiv.) Für einen einzelnen rotationssymmetrischen Körper ohne Einfluß anderer Körper reduziert sich die Summe in Glg (4.-37) auf ein Glied.

Überlagert werden nun die Abstrahlungsprobleme zweier Körper  $P$  und  $T$  innerhalb der Anordnung. Dabei wird der Körper  $P$  mit der Amplitude  $\dot{s}_{e_0}^P$  erregt, während gleichzeitig der Körper  $T$  mit der Amplitude  $\dot{s}_{j_0}^T$  und mit derselben Kreisfrequenz  $\omega$  bewegt wird. Die zeitlichen Phasen der Bewegungen sowie die Verhältnisse der Amplituden sind willkürlich angenommen.

Die Beschreibung dieses Experimentes ist physikalisch nur richtig, wenn unabhängig von den Phasen und den Amplituden der Bewegungen der Anordnung im zeitlichen Mittel Energie stets zugeführt werden muß, so daß der Vorgang nicht abklingt.

Analog zu den Bewegungsgleichungen (2.5-8) können die von außen auf die Körper aufgebrauchten Kräfte  $F_e^P$  und  $F_j^T$  formuliert werden, die zur Aufrechterhaltung der Schwingungsvorgänge notwendig sind:

$$\begin{aligned} F_e^P(t) &= m_{ee}^P \ddot{s}_e^P + a_{ee}^{PP} \ddot{s}_e^P + b_{ee}^{PP} \dot{s}_e^P + c_{ee}^P s_e^P \\ &\quad + a_{ej}^{PT} \ddot{s}_j^T + b_{ej}^{PT} \dot{s}_j^T \end{aligned} \quad (4.-38),$$

$$F_j^T(t) = m_{jj}^T \ddot{s}_j^T + a_{jj}^{TT} \ddot{\dot{s}}_j^T + b_{jj}^{TT} \dot{s}_j^T + c_{jj}^T s_j^T + a_{je}^{TP} \ddot{s}_e^P + b_{je}^{TP} \dot{s}_e^P \quad (4.-39).$$

Daneben treten noch weitere hydrodynamische Reaktionskräfte auf, die aber nicht mit einem Energieaustausch verbunden sind. Diese Kräfte sind bei einer praktischen Ausführung des Experimentes, etwa durch Führungen bzw. Auflager, aufzunehmen.

Wegen der einfachen zeitlichen Abhängigkeit der Kräfte und der Bewegungen in den Gln (4.-38) und (4.-39) können diese durch ihre komplexen Amplituden ersetzt werden.

Für die im zeitlichen Mittel der Anordnung zugeführte Energie gilt dann (vgl. Anhang 9.7)

$$\begin{aligned} \dot{E}^t |_{S_P} + \dot{E}^t |_{S_T} &= \overline{F_e^P \dot{s}_e^P}^t + \overline{F_j^T \dot{s}_j^T}^t \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \overline{F_{e_0}^P \dot{s}_{e_0}^P} + \overline{F_{j_0}^T \dot{s}_{j_0}^T} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[ (m_{ee}^P + a_{ee}^{PP}) \overline{\ddot{s}_{e_0}^P} + b_{ee}^{PP} \overline{\dot{s}_{e_0}^P} + c_{ee}^P \overline{s_{e_0}^P} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{ej}^{PT} \overline{\ddot{s}_{j_0}^T} + b_{ej}^{PT} \overline{\dot{s}_{j_0}^T} \right] \cdot \dot{s}_{e_0}^P \right. \\ &\quad \left. + \left[ (m_{jj}^T + a_{jj}^{TT}) \overline{\ddot{s}_{j_0}^T} + b_{jj}^{TT} \overline{\dot{s}_{j_0}^T} + c_{jj}^T \overline{s_{j_0}^T} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{je}^{TP} \overline{\ddot{s}_{e_0}^P} + b_{je}^{TP} \overline{\dot{s}_{e_0}^P} \right] \cdot \dot{s}_{j_0}^T \right\} \quad (4.-40). \end{aligned}$$

Aus den Gln (2.3-6) bis (2.3-8) folgt

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{\ddot{s}_{e_0}^P} \dot{s}_{e_0}^P \right\} = \frac{1}{2} \left( \overline{-i\omega \dot{s}_{e_0}^P} \dot{s}_{e_0}^P - i\omega \overline{\dot{s}_{e_0}^P} \ddot{s}_{e_0}^P \right) = 0 \quad (4.-41)$$

und

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{s_{e_0}^P} \dot{s}_{e_0}^P \right\} = \frac{1}{2} \left( \overline{s_{e_0}^P} (-i\omega) s_{e_0}^P + s_{e_0}^P \overline{(-i\omega) s_{e_0}^P} \right) = 0 \quad (4.-42).$$

Die Glgn (4.-41) und (4.-42) gelten analog für die Bewegung  $\dot{s}_j^T$  des Körpers T. Damit verbleiben auf der rechten Seite der Glg (4.-40) nur noch die Glieder, die mit den Dämpfungskoeffizienten verbunden sind (vgl. hierzu auch /21/):

$$\begin{aligned} & \overline{\dot{E}}^t | S_P + \overline{\dot{E}}^t | S_T \\ &= \frac{1}{2} \left\{ b_{ee}^{PP} \overline{\dot{s}_{e_0}^P} \dot{s}_{e_0}^P + \frac{1}{2} b_{ej}^{PT} (\overline{\dot{s}_{j_0}^T} \dot{s}_{e_0}^P + \dot{s}_{j_0}^T \overline{\dot{s}_{e_0}^P}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} b_{je}^{TP} (\overline{\dot{s}_{e_0}^P} \dot{s}_{j_0}^T + \dot{s}_{e_0}^P \overline{\dot{s}_{j_0}^T}) + b_{jj}^{TT} \overline{\dot{s}_{j_0}^T} \dot{s}_{j_0}^T \right\} \end{aligned} \quad (4.-43).$$

Die der Flüssigkeit im Gebiet R zugeführte Energie nach Glg (4.-43) muß mit den Wellensystemen über die Kontrollfläche  $S_R$  abgeführt werden. Analog zu den Glgn (4.-32) und (4.-33) kann

$$\begin{aligned} & \overline{\dot{E}}^t | S_P + \overline{\dot{E}}^t | S_T = \overline{\dot{E}}^t | S_R \\ &= \frac{i \omega \rho}{4} \iint_{S_R} \left\{ \overline{(\dot{s}_{e_0}^P y_{eP} + \dot{s}_{j_0}^T y_{jT})} \cdot \left( \dot{s}_{e_0}^P \frac{\partial y_{eP}}{\partial n^*} + \dot{s}_{j_0}^T \frac{\partial y_{jT}}{\partial n^*} \right) \right. \\ & \quad \left. - (\dot{s}_{e_0}^P y_{eP} + \dot{s}_{j_0}^T y_{jT}) \cdot \overline{\left( \dot{s}_{e_0}^P \frac{\partial y_{eP}}{\partial n^*} + \dot{s}_{j_0}^T \frac{\partial y_{jT}}{\partial n^*} \right)} \right\} dS \end{aligned} \quad (4.-44)$$

geschrieben werden. Dabei können die Amplituden  $y_{eP}$  und  $y_{jT}$  der Potentiale wegen Glg (4.-6) wie folgt zusammengefaßt werden

$$\begin{aligned} & \dot{s}_{e_0}^P y_{eP} + \dot{s}_{j_0}^T y_{jT} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\delta_e \dot{s}_{e_0}^P \tilde{F}_{ePm\alpha}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \tilde{F}_{jTm\alpha}^*) H_m(\alpha r) e^{imj} Z_\alpha(z) \\ & \quad + \sum_{\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\delta_e \dot{s}_{e_0}^P \tilde{F}_{ePm\alpha'}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \tilde{F}_{jTm\alpha'}^*) K_m(\alpha' r) e^{imj} Z_{\alpha'}(z) \end{aligned} \quad (4.-45).$$

Damit läßt sich die über  $S_R$  abgeführte Energie analog

zur Glg (4.-37) direkt formulieren:

$$\begin{aligned}
 & \overline{\dot{E}}^t |_{S_P} + \overline{\dot{E}}^t |_{S_T} \\
 &= \omega \rho d \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left\{ (\delta_e \dot{s}_{e_0}^P \overline{F_{ePm\alpha}}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{F_{jTm\alpha}}^*) \right. \\
 & \quad \cdot (\delta_e \dot{s}_{e_0}^P \overline{F_{ePm\alpha}}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{F_{jTm\alpha}}^*) \\
 & \quad + (\delta_e \dot{s}_{e_0}^P \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^*) \\
 & \quad \left. \cdot (\delta_e \dot{s}_{e_0}^P \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^*) \right\} \quad (4.-46);
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 & \overline{\dot{E}}^t |_{S_P} + \overline{\dot{E}}^t |_{S_T} \\
 &= \omega \rho d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \epsilon_m \left\{ \left| \delta_e \dot{s}_{e_0}^P \overline{F_{ePm\alpha}}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{F_{jTm\alpha}}^* \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left| \delta_e \dot{s}_{e_0}^P \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^* + \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^* \right|^2 \right\} \quad (4.-47).
 \end{aligned}$$

Damit ist bereits gezeigt, daß die Wellensysteme die Energie im zeitlichen Mittel abführen - unabhängig von den Phasen und den Amplituden der Bewegungen der Körper.

Nach Ausmultiplizieren der Glg (4.-47) und Zusammenfassen erhält man

$$\begin{aligned}
 & \overline{\dot{E}}^t |_{S_P} + \overline{\dot{E}}^t |_{S_T} \\
 &= \omega \rho d \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \delta_e^2 \dot{s}_{e_0}^P \overline{\dot{s}_{e_0}^P} (\overline{F_{ePm\alpha}}^* \overline{F_{ePm\alpha}}^* + \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^* \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^*) \right. \\
 & \quad + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \epsilon_m \delta_e \delta_j \dot{s}_{e_0}^P \overline{\dot{s}_{j_0}^T} (\overline{F_{ePm\alpha}}^* \overline{F_{jTm\alpha}}^* + \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^* \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^*) \\
 & \quad + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \epsilon_m \delta_j \delta_e \dot{s}_{j_0}^T \overline{\dot{s}_{e_0}^P} (\overline{F_{jTm\alpha}}^* \overline{F_{ePm\alpha}}^* + \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^* \overline{F_{eP(-m)\alpha}}^*) \\
 & \quad \left. + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \epsilon_m \delta_j^2 \dot{s}_{j_0}^T \overline{\dot{s}_{j_0}^T} (\overline{F_{jTm\alpha}}^* \overline{F_{jTm\alpha}}^* + \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^* \overline{F_{jT(-m)\alpha}}^*) \right\} \quad (4.-48).
 \end{aligned}$$

Man erhält offensichtlich dasselbe Ergebnis für die abgeführte Energie, wenn man in den Glgn (4.-43) bis (4.-48) die komplexen Geschwindigkeitsamplituden durch ihre konjugiert komplexen Werte ersetzt. Damit folgt aber aus Glg (4.-48), daß

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \delta_e \delta_j \dot{s}_{e_0}^P \overline{\dot{s}_{j_0}^T} ( \overline{F_{ePm\chi}^*} \overline{F_{jTm\chi}^*} + F_{eP(-m)\chi}^* \overline{F_{jT(-m)\chi}^*} ) \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \delta_e \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{\dot{s}_{e_0}^P} ( F_{jTm\chi}^* \overline{F_{ePm\chi}^*} + \overline{F_{jT(-m)\chi}^*} F_{eP(-m)\chi}^* ) \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \delta_e \delta_j \overline{\dot{s}_{e_0}^P} \dot{s}_{j_0}^T ( F_{ePm\chi}^* \overline{F_{jTm\chi}^*} + F_{eP(-m)\chi}^* \overline{F_{jT(-m)\chi}^*} ) \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \delta_e \delta_j \dot{s}_{j_0}^T \overline{\dot{s}_{e_0}^P} ( \overline{F_{jTm\chi}^*} F_{ePm\chi}^* + \overline{F_{jT(-m)\chi}^*} F_{eP(-m)\chi}^* )
 \end{aligned} \tag{4.-49}$$

gelten muß, unabhängig von den Phasen und den Amplituden der Geschwindigkeiten. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \delta_e \delta_j ( \overline{F_{ePm\chi}^*} \overline{F_{jTm\chi}^*} + F_{eP(-m)\chi}^* \overline{F_{jT(-m)\chi}^*} ) \\
 & = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \delta_e \delta_j ( \overline{F_{ePm\chi}^*} F_{jTm\chi}^* + \overline{F_{eP(-m)\chi}^*} F_{jT(-m)\chi}^* )
 \end{aligned} \tag{4.-50}.$$

Mit Glg (4.-36) sind die Diagonalglieder der Dämpfungsmatrix  $b_{ee}^{PP}$  und  $b_{jj}^{TT}$  bestimmt. Es gilt die Reziprozitätsbeziehung (Glg (4.-12)). Damit folgt aus den Glgn (4.-43), (4.-48) und (4.-50) für die Kopplungsglieder der Dämpfungsmatrix

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} b_{ej}^{PT} = \frac{1}{2} b_{je}^{TP} \\
 & = \omega_p d \delta_e \delta_j \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m ( \overline{F_{ePm\chi}^*} \overline{F_{jTm\chi}^*} + F_{eP(-m)\chi}^* \overline{F_{jT(-m)\chi}^*} ) \\
 & = \omega_p d \delta_e \delta_j \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m ( \overline{F_{ePm\chi}^*} F_{jTm\chi}^* + \overline{F_{eP(-m)\chi}^*} F_{jT(-m)\chi}^* )
 \end{aligned} \tag{4.-51}.$$

Die Wellensysteme können auch mit den reellen Funktionen  $\cos(m\psi)$ ,  $\sin(m\psi)$  beschrieben werden (vgl. Glgn (3.2-71) - (3.2-75)).

Aus der im vorigen ausgeführten Betrachtung der Überlagerung der abstrahlenden Wellensysteme läßt sich nun ganz allgemein mit Hilfe der Cauchy-Ungleichung (/1/)

$$\sum_{m=1}^M |f_m g_m| \leq \sqrt{\sum_{m=1}^M |f_m|^2 \cdot \sum_{m=1}^M |g_m|^2}$$

die Beziehung:

$$\left\{ \left| \sqrt{b_{jj}^{\tau\tau}} \dot{s}_{j0}^{\tau} \right| + \left| \sqrt{b_{ee}^{pp}} \dot{s}_{e0}^p \right| \right\}^2 \geq b_{jj}^{\tau\tau} |\dot{s}_{j0}^{\tau}|^2 + b_{ee}^{pp} |\dot{s}_{e0}^p|^2 + b_{ej}^{\tau\tau} \overline{\dot{s}_{j0}^{\tau}} \dot{s}_{e0}^p + b_{je}^{\tau p} \overline{\dot{s}_{e0}^p} \dot{s}_{j0}^{\tau} \geq 0 \quad (4.-52),$$

ableiten, bzw. da  $\dot{s}_{j0}^{\tau}$  und  $\dot{s}_{e0}^p$  nach Betrag und Phase willkürlich sind:

$$\sqrt{b_{jj}^{\tau\tau} \cdot b_{ee}^{pp}} \geq |b_{ej}^{\tau p}| \quad (4.-53).$$

Würde die Ungleichung (4.-53) nicht erfüllt, widerspräche sie der Glg (4.-47) und damit geltenden physikalischen Grundlagen. (Es wäre Energiegewinnung möglich.)

Für einen einzelnen schwimmenden rotationssymmetrischen Körper folgt aus den Glgn (4.-43), (4.-47), ( $T = P$ ;  $1, j=1, 5$ ) sofort

$$\sqrt{b_{jj}^{\tau\tau} b_{ee}^{\tau\tau}} = |b_{ej}^{\tau\tau}| = |b_{je}^{\tau\tau}| \quad (4.-54),$$

da hierbei nur ein Ringwellensystem mit  $m = 1$  ( $\hat{=} \cos\psi$ ) vom Körper ausgeht, das von den beiden Ringwellensystemen als Folge der Bewegungen des Körpers in den Richtungen  $j=1$  und  $j=5$  gebildet wird (vgl. 3.1).

Praktische Rechnungen zeigen, daß Glg (4.-54) auch bei den Abstrahlungsproblemen ( $1, j=1, 5$ ;  $1, j=2, 4$ ) einzelner Kör-

per, die zur x-z-Ebene und zur y-z-Ebene symmetrisch sind, erfüllt wird. (Bei Rechnungen nach den Integralgleichungsverfahren allerdings nur im Rahmen der erzielbaren numerischen Genauigkeit.)

Die hier angegebenen Beziehungen der Gln (4.-53) und (4.-54) können vom Leser anhand eigener Rechenergebnisse überprüft werden.

Von Newman /24/ wurden allgemeingültige Beziehungen zwischen den erregenden Wellenkräften und den Dämpfungskoeffizienten aus Fernfeldbetrachtungen der abstrahlenden Wellensysteme abgeleitet.

An dieser Stelle wird nur noch kurz auf die Überlagerung des Diffraktionsproblems mit einem Abstrahlungsproblem eingegangen.

Durch die harmonische Elementarwelle (Potential  $\phi_0$ ) wird im zeitlichen Mittel dem Gebiet R keine Energie über die geschlossene Kontrollfläche  $S_R$  zu- oder abgeführt (vgl. Anhang 9.8). Mit den abstrahlenden Wellensystemen des Störpotentials  $\phi_\eta$  und dem Potential des Abstrahlungsproblems  $\phi_{CP}$  wird Energie nach außen abgeführt. Aus der Betrachtung der Überlagerung des Potentials der ungestörten Welle  $\phi_0$  mit den Potentialen  $\phi_\eta$  und  $\phi_{CP}$  erhält man dann die dem Gebiet R zugeführte Energie.

## 5. Driftkräfte in den horizontalen Richtungen nach dem Impulssatz

Die an der freien bewegten Meeresoberfläche zu erfüllenden nichtlinearen Randbedingungen und die Abstrahlbedingung im Unendlichen erschweren die Behandlung des Diffraktionsproblems. Bislang konnte daher noch keine befriedigende Lösung der Randwertaufgabe 2. Ordnung aufgestellt werden, die das gesamte Strömungsfeld um einen dreidimensionalen Körper, der von einer harmonischen Welle 2. Ordnung erregt wird, vollständig beschreibt. In den letzten fünf Jahren wurden jedoch Arbeiten vorgestellt, die zeigen, wie die auf einen dreidimensionalen Körper ausgeübten doppelharmonischen Kräfte auch ohne Kenntnis aller Potentialanteile 2. Ordnung ermittelt werden können /22/, /13/. Der numerische Aufwand zur Bestimmung dieser zeitabhängigen Kräfte 2. Ordnung ist erheblich.

Neben den zeitabhängigen Kraftanteilen 2. Ordnung wirken noch mittlere zeitunabhängige Kraftanteile 2. Ordnung, die Driftkräfte, auf einen Körper. Die Driftkräfte sind aber unabhängig von den Potentialen 2. Ordnung und lassen sich aus dem instationären Druck mit Hilfe der Potentiale 1. Ordnung bestimmen.

Newman /25/, (/21/) hat gezeigt, wie die auf einen Körper in den horizontalen Richtungen ausgeübten Driftkräfte vorteilhaft unter Anwendung des Impulssatzes aus einer Betrachtung des Fernfeldes gewonnen werden können.

Im folgenden werden die prinzipiellen Aussagen von Newman benutzt, um die Driftkräfte auch für die einzelnen Körper  $Q$  innerhalb einer Anordnung mehrerer rotationssymmetrischer Körper herzuleiten. Dabei werden die Potentiale im infiniten Element des einzelnen Körpers auf einer Kontrollfläche betrachtet, die nur einen einzelnen Körper innerhalb der Anordnung umschließt.

Für die zeitliche Änderung des Impulses  $I$  in den horizontalen Richtungen 1,2 im Gebiet  $R$  des Körpers  $Q$  (vgl. Abb.2, /25/) - reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeit

vorausgesetzt - kann geschrieben werden

$$\frac{dI_1}{dt} = - \iint_S [ p \cos(n^*, x) + \rho u (u_{n^*} - v_{n^*}) ] dS \quad (5.-1),$$

$$\frac{dI_2}{dt} = - \iint_S [ p \cos(n^*, y) + \rho v (u_{n^*} - v_{n^*}) ] dS \quad (5.-2),$$

wobei  $S$  ( $S = \zeta + S_B + S_R + S_Q$ ) die Oberfläche des Gebietes  $R$  (vgl. Abschnitt 4) ist und  $\cos(n^*, x)$ ,  $\cos(n^*, y)$  die Richtungskosinus der Oberflächennormalen sind.  $u$  und  $v$  sind die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen an der Oberfläche.  $u_{n^*}$  ( $u_{n^*} = \partial \phi / \partial n^*$ ) ist die Teilchengeschwindigkeit normal zur Oberfläche und  $v_{n^*}$  die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Oberfläche.

Die Glgn (5.-1) und (5.-2) sagen aus, daß die zeitliche Änderung des Impulses in  $R$  gleich ist dem Impuls, der mit den Teilchen pro Zeiteinheit durch die Oberfläche strömt, und der Summe der äußeren Horizontalkräfte infolge des Druckes.

Die freie Meeresoberfläche und der Meeresboden werden nicht durchströmt ( $u_{n^*} - v_{n^*} = 0$  auf  $\zeta$  bzw.  $u_{n^*} = v_{n^*} = 0$  auf  $S_B$ ). Der Druck an der Meeresoberfläche ist  $p = 0$ ; am ebenen horizontalen Meeresboden sind die Richtungskosinus Null, d.h. die Integrale in den Glgn (5.-1) und (5.-2) über die Meeresoberfläche und über den Meeresboden entfallen. Die Integrale über die Körperoberfläche liefern die vom Körper auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte; das gilt für den festgehaltenen Körper

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n^*} \right|_{S_Q} = u_{n^*} = v_{n^*} = 0 \quad (5.-3)$$

und auch für den bewegten Körper

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n^*} \right|_{S_Q} = u_{n^*} = v_{n^*} \quad (5.-4).$$

Die Kontrollfläche  $S_R$  ist festgehalten, damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{d \bar{I}_1}{dt} &= - \iint_{S_Q} [ p \cos(n^*, x) ] dS \\ &\quad - \iint_{S_R} [ p \cos(n^*, x) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} ] dS \end{aligned} \quad (5.-5),$$

$$\begin{aligned} \frac{d \bar{I}_2}{dt} &= - \iint_{S_Q} [ p \cos(n^*, y) ] dS \\ &\quad - \iint_{S_R} [ p \cos(n^*, y) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} ] dS \end{aligned} \quad (5.-6)$$

und für die auf den Körper Q ausgeübten Kräfte

$$\begin{aligned} F_1^Q &= \iint_{S_Q} [ p \cos(n^*, x) ] dS \\ &= - \iint_{S_R} [ p \cos(n^*, x) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} ] dS - \frac{d \bar{I}_1}{dt} \end{aligned} \quad (5.-7),$$

$$\begin{aligned} F_2^Q &= \iint_{S_Q} [ p \cos(n^*, y) ] dS \\ &= - \iint_{S_R} [ p \cos(n^*, y) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial n^*} ] dS - \frac{d \bar{I}_2}{dt} \end{aligned} \quad (5.-8).$$

(Zu beachten sind die Richtungen der Flächennormalen.)

Betrachtet werden nun die zeitlichen Mittelwerte der Gln (5.-7) und (5.-8), um die mittleren zeitunabhängigen-Kraftanteile zu bestimmen. Die letzten Terme in den obigen Gleichungen liefern keinen Beitrag, da der hier betrachtete Vorgang periodisch ist und es daher, etwa von Periode zu Periode, keine Änderung des mittleren zeitlichen Impulses im Gebiet R geben kann. Wie in Abschnitt 4 wird als Kontrollfläche  $S_R$  die Zylindermantelfläche mit dem Zylinderradius  $r_Q = \text{konst.}$  ( $0 \leq z \leq d$ ) betrachtet. Es gilt bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Körpers Q

$$\frac{d\phi}{dx_Q} = \frac{d\phi}{dr_Q} \frac{dr_Q}{dx_Q} + \frac{d\phi}{d\vartheta_Q} \frac{d\vartheta_Q}{dx_Q} = \frac{d\phi}{dr_Q} \cos \vartheta_Q - \frac{d\phi}{d\vartheta_Q} \frac{1}{r_Q} \sin \vartheta_Q \quad (5.-9),$$

$$\frac{d\phi}{dy_Q} = \frac{d\phi}{dr_Q} \frac{dr_Q}{dy_Q} + \frac{d\phi}{d\vartheta_Q} \frac{d\vartheta_Q}{dy_Q} = \frac{d\phi}{dr_Q} \sin \vartheta_Q + \frac{d\phi}{d\vartheta_Q} \frac{1}{r_Q} \cos \vartheta_Q \quad (5.-10).$$

Damit folgt aus den Glgn (5.-7) und (5.-8)

$$\overline{F_1^Q}^t = - \int_{z=0}^{d+y} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \left\{ \overline{\rho \cos \vartheta_Q}^t + \rho \frac{d\phi}{dr_Q} \left( \frac{d\phi}{dr_Q} \cos \vartheta_Q - \frac{d\phi}{d\vartheta_Q} \frac{1}{r_Q} \sin \vartheta_Q \right) \right\} r_Q \Big|_{r_Q = \text{konst.}} d\vartheta_Q dz \quad (5.-11),$$

$$\overline{F_2^Q}^t = - \int_{z=0}^{d+y} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \left\{ \overline{\rho \sin \vartheta_Q}^t + \rho \frac{d\phi}{dr_Q} \left( \frac{d\phi}{dr_Q} \sin \vartheta_Q + \frac{d\phi}{d\vartheta_Q} \frac{1}{r_Q} \cos \vartheta_Q \right) \right\} r_Q \Big|_{r_Q = \text{konst.}} d\vartheta_Q dz \quad (5.-12),$$

wobei mit  $\overline{\quad}^t$  der zeitliche Mittelwert angedeutet ist. Das Ergebnis muß unabhängig sein von der Wahl des Radius  $r_Q = \text{konst.}$ , wenn dieser Radius nur den einzelnen Körper Q umschließt. Handelt es sich bei dem Körper um einen frei schwimmenden Körper, so halten die Kräfte den Körper in einer mittleren Position, um die er oszilliert.

Bei den Ausführungen bezüglich des Impulses wurde bisher keine Linearisierung vorgenommen. Im folgenden muß die Betrachtung auf das Problem 2. Ordnung beschränkt werden. Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt, lassen sich zur näherungsweisen Lösung der nichtlinearen Randwertaufgabe der Diffraktion prinzipiell Potentialansätze unterschiedlicher Ordnung aufstellen.

Aus der Oberflächenbedingung der Glg (2.2-22) erkennt

man, daß für die zeitliche Abhängigkeit des Potentials 2. Ordnung

$$\phi^{(2)} = f_1^{(2)}(x, y, z) + \operatorname{Re} \left[ f_2^{(2)}(x, y, z) \cdot e^{-2i\omega t} \right] \quad (5.-13)$$

gelten muß (/7/), d.h. es existiert ein zeitunabhängiger Anteil und ein Anteil, der mit der doppelten Kreisfrequenz oszilliert. Beschränkt man sich bei den Glgn (5.-11) und (5.-12) ausschließlich auf die Terme 2. Ordnung, so erkennt man, daß das Potential 2. Ordnung nur mit  $p$  in die Gleichungen eingehen könnte. In den Druckanteil 2. Ordnung geht das Potential  $\phi^{(2)}$  nach Glg (2.1-3) mit  $\partial\phi/\partial t$  ein. Der zeitliche Mittelwert ist aber

$$\overline{\left( \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t} \right)^t} = 0 \quad (5.-14).$$

Damit ist gezeigt, daß zur Ermittlung der Driftkräfte die Kenntnis der Potentiale 1. Ordnung ausreichend ist.

Es wird zunächst die Integration des Druckes über  $z$  durchgeführt, dabei ist zu beachten, daß die Integration formal erst einmal bis zur Wellenoberfläche 1. Ordnung  $z = d + \zeta^{(1)}$  durchzuführen ist, um alle Anteile des Druckes 2. Ordnung zu erfassen.

Mit Glg (2.1-3) kann geschrieben werden

$$\overline{\left( \int_{z=0}^{d+\zeta} p \, dz \right)^t} = \overline{\int_{z=0}^{d+\zeta} \left\{ -\rho \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} - \rho g(z-d) - \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_a} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y_a} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz}^t \quad (5.-15),$$

wobei nur Terme bis zur 2. Ordnung berücksichtigt sind.

Für die ersten beiden Terme der rechten Seite der Glg (5.-15) gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{z=0}^{d+\zeta} \left[ -\rho \frac{d\phi^{(1)}}{dt} - \rho g (z-d) \right] dz \\
&= - \int_{z=0}^d \rho \frac{d\phi^{(1)}}{dt} dz - \int_{z=d}^{d+\zeta} \rho \frac{d\phi^{(1)}}{dt} dz - \frac{1}{2} \rho g (z-d)^2 \Big|_{z=0}^{z=d+\zeta} \\
&= 0 - \rho \zeta^{(1)} \frac{d\phi^{(1)}}{dt} \Big|_{z=d} - \frac{1}{2} \rho g (\zeta^{(1)})^2 - \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad (5.-16).
\end{aligned}$$

Das Potential 1. Ordnung liefert keinen zeitunabhängigen Anteil 2. Ordnung im Bereich  $0 \leq z \leq d$ . Die Konstante  $1/2 \rho g d^2$  folgt aus dem hydrostatischen Druck. Sie hat keinen Einfluß auf die Kräfte, da sie bei der Integration über  $\mathcal{V}$  entfällt. Sie wird im weiteren fortgelassen. Die Integration der vom Quadrat der Geschwindigkeiten abhängigen Terme in Glg (5.-15) - wie auch in den Glgn (5.-11) und (5.-12) - ist bis zur Stillwasserfläche  $z = d$  durchzuführen; die darüber hinausgehende Integration ergäbe Terme 3. Ordnung. Daraus folgt für das Integral des Druckanteils 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
\left( \int_{z=0}^{d+\zeta} p dz \right)^{(2)} &= - \rho \zeta^{(1)} \frac{d\phi^{(1)}}{dt} \Big|_{z=d} - \frac{1}{2} \rho g (\zeta^{(1)})^2 \\
&- \frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \left[ \left( \frac{d\phi^{(1)}}{dx_Q} \right)^2 + \left( \frac{d\phi^{(1)}}{dy_Q} \right)^2 + \left( \frac{d\phi^{(1)}}{dz} \right)^2 \right] dz \quad (5.-17).
\end{aligned}$$

Wegen der linearisierten Oberflächenbedingung der Glg (2.2-7)

$$\zeta^{(1)} = - \frac{1}{g} \frac{d\phi^{(1)}}{dt} \Big|_{z=d} \quad (5.-18)$$

kann noch zusammengefaßt werden (vgl. /21/)

$$- \rho \zeta^{(1)} \frac{d\phi^{(1)}}{dt} \Big|_{z=d} - \frac{1}{2} \rho g (\zeta^{(1)})^2 = \frac{\rho}{2g} \left( \frac{d\phi^{(1)}}{dt} \Big|_{z=d} \right)^2 \quad (5.-19).$$

Der Anteil der Vertikalkomponenten der Teilchengeschwindigkeit  $\partial\phi/\partial z$  in Glg (5.-17) kann einmal partiell integriert werden. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen der Glgn (2.2-16) und (2.2-18) gilt dann

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \overline{\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2} dz \\
 &= -\frac{1}{2} \rho \left. \overline{\phi^{(1)} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}} \right|_{z=0}^{z=d} + \frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \overline{\phi^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2}} dz \\
 &= +\frac{\rho}{2g} \left. \overline{\phi^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial t^2}} \right|_{z=d} + \frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \overline{\phi^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2}} dz \quad (5.-20).
 \end{aligned}$$

Die Glgn (5.-19) und (5.-20) werden in Glg (5.-17) eingesetzt. Weiter werden für die Anteile der Horizontalkomponenten der Teilchengeschwindigkeit Polarkoordinaten nach den Glgn (5.-9) und (5.-10) eingeführt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{z=0}^{d+g} \rho dz \right)^{(2)} &= \frac{\rho}{2g} \left. \overline{\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t}\right)^2} \right|_{z=d} + \frac{\rho}{2g} \left. \overline{\phi^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial t^2}} \right|_{z=d} \\
 &+ \frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \overline{\phi^{(1)} \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2}} dz - \frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \overline{\left[ \left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r_a}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_a} \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial r_a}\right)^2 \right]} dz \quad (5.-21).
 \end{aligned}$$

Die zeitliche Abhängigkeit der Potentiale 1. Ordnung ist  $e^{-i\omega t}$ . Mit Glg (A.7-7) folgt für den 1. Term der rechten Seite der Glg (5.-21)

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{2g} \left. \overline{\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t}\right)^2} \right|_{z=d} &= \frac{\rho}{4g} \left. \overline{(-i\omega\phi^{(1)})(-i\omega\phi^{(1)})} \right|_{z=d} \\
 &= \frac{\rho}{4g} \omega^2 \left. \overline{\phi^{(1)}\phi^{(1)}} \right|_{z=d} \quad (5.-22),
 \end{aligned}$$

wobei mit  $\overline{\phi}$  wieder die konjugiert komplexe Funktion von  $\phi$  bezeichnet ist. Für den 2. Term in Glg (5.-21) gilt

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\rho}{2g} \phi^{(1)} \frac{d^2 \phi^{(1)}}{dt^2}} \Big|_{z=d} &= \frac{\rho}{8g} \left[ \phi^{(1)} \overline{(-\omega^2 \phi^{(1)})} + \overline{\phi^{(1)}} (-\omega^2 \phi^{(1)}) \right] \Big|_{z=d} \\ &= \frac{\rho}{4g} (-\omega^2) \phi^{(1)} \overline{\phi^{(1)}} \Big|_{z=d} \end{aligned} \quad (5.-23).$$

Damit heben sich aber diese beiden Terme der Glg (5.-21) auf.

Im weiteren wird die Formulierung der Driftkraft für das Diffraktionsproblem in x-Richtung nach Glg (5.-11) abgeleitet. Die Kraft in y-Richtung erhält man, indem man in Glg (5.-11)  $\cos \psi_a$ ,  $\sin \psi_a$  durch  $\cos(\psi_a - \pi/2)$ ,  $\sin(\psi_a - \pi/2)$  ersetzt.

Der Index (1) zur Kennzeichnung der 1. Ordnung bei den Potentialen wird im weiteren fortgelassen.

Für die Driftkraft in x-Richtung folgt dann aus Glg (5.-11) mit Glg (5.-21) und dem oben Gesagten

$$\begin{aligned} \overline{F_1^{(2)Q}} &= \\ &= -\frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \int_{\psi_a=0}^{2\pi} \left[ \phi \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \left( \frac{d\phi}{dr_a} \right)^2 - \left( \frac{1}{r_a} \frac{d\phi}{d\psi_a} \right)^2 \right] \cos \psi_a r_a \Big|_{r_a = \text{konst.}} d\psi_a dz \\ &= -\rho \int_{z=0}^d \int_{\psi_a=0}^{2\pi} \left[ \frac{d\phi}{dr_a} \left( \frac{d\phi}{dr_a} \cos \psi_a - \frac{d\phi}{d\psi_a} \frac{1}{r_a} \sin \psi_a \right) \right] r_a \Big|_{r_a = \text{konst.}} d\psi_a dz \end{aligned} \quad (5.-24).$$

Die Quadrate der Ableitung der Potentiale in radialer Richtung können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}
\overline{F_1^{(2)Q}}^t &= \\
&- \frac{1}{2} \rho \int_{z=0}^d \int_{\vartheta_Q=0}^{2\pi} \left\{ \left[ \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial r_Q} \right)^2 - \left( \frac{1}{r_Q} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta_Q} \right)^2 \right] \cos \vartheta_Q \right. \\
&- \left. 2 \frac{\partial \phi}{\partial r_Q} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta_Q} \frac{1}{r_Q} \sin \vartheta_Q \right\} \cdot r_Q \Big|_{r_Q = \text{konst.}} d\vartheta_Q dz \quad (5.-25).
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun das Potential des Diffraktionsproblems, so kann man mit der komplexen Amplitude  $\mathcal{Y}$  des Potentials unter Beachtung der zeitlichen Abhängigkeit (vgl. Anhang 9.7) für die Driftkraft

$$\begin{aligned}
\overline{F_1^{(2)Q}}^t &= \\
&- \frac{1}{4} \rho \int_{z=0}^d \int_{\vartheta_Q=0}^{2\pi} \left\{ \left[ \mathcal{Y}_D \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{Y}}_D}{\partial z^2} + \frac{\partial \mathcal{Y}_D}{\partial r_Q} \frac{\partial \overline{\mathcal{Y}}_D}{\partial r_Q} - \frac{1}{r_Q^2} \frac{\partial \mathcal{Y}_D}{\partial \vartheta_Q} \frac{\partial \overline{\mathcal{Y}}_D}{\partial \vartheta_Q} \right] \cos \vartheta_Q \right. \\
&- \left. \left[ \frac{\partial \mathcal{Y}_D}{\partial r_Q} \frac{\partial \overline{\mathcal{Y}}_D}{\partial \vartheta_Q} + \frac{\partial \overline{\mathcal{Y}}_D}{\partial r_Q} \frac{\partial \mathcal{Y}_D}{\partial \vartheta_Q} \right] \frac{1}{r_Q} \sin \vartheta_Q \right\} \cdot r_Q \Big|_{r_Q = \text{konst.}} d\vartheta_Q dz \quad (5.-26)
\end{aligned}$$

schreiben.

Die Potentiale des Diffraktionsproblems der Glgn (3.2-33) bis (3.2-35) liegen in Form der Glgn (3.2-63), (3.2-69) vor. Wegen der Orthogonalität der Funktionen  $Z_\alpha(z)$  und wegen

$$\frac{\partial^2 Z_\alpha(z)}{\partial z^2} = -\alpha^2 Z_\alpha(z)$$

können die Integrale über  $\vartheta$  für alle  $\alpha$  getrennt gelöst werden. Für Glg (5.-26) kann formal auch

$$\begin{aligned}
\overline{F_1^{(2)Q}}^t &= -\frac{1}{4} \rho f(\mathcal{Y}_D, \overline{\mathcal{Y}}_D) \\
&= -\frac{1}{4} \rho \left[ f_1(\mathcal{Y}_7^{*Q}, \overline{\mathcal{Y}}_7^{*Q}) + f_2(\mathcal{Y}_7^{*Q}, \overline{\mathcal{Y}}_7^Q) \right. \\
&\quad \left. + f_3(\overline{\mathcal{Y}}_7^{*Q}, \mathcal{Y}_7^Q) + f_4(\mathcal{Y}_7^Q, \overline{\mathcal{Y}}_7^Q) \right] \quad (5.-27)
\end{aligned}$$

geschrieben werden.

Die einzelnen Integrale sind im Anhang 9.9 gegeben. Daß das Integral  $f_1$  () zu Null werden muß, kann auch direkt abgeleitet werden. Die Potentiale dieses Integrals beschreiben nur einfallende Wellensysteme, die auch ohne Präsenz eines Körpers existieren können bzw. die nicht durch einen Körper gestört sind.

Für die Driftkraft in x-Richtung ergibt sich dann mit den Teilintegralen - Glgn (A.9-11), (A.9-12), (A.9-14), (A.9-21) und (A.9-22), (Anhang 9.9) - nach Umordnen

$$\begin{aligned}
 \overline{F_1^{(2)Q}} &= \frac{1}{2} \int \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2 \\
 &\cdot \left\{ i(\alpha d) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ - \left( G_{\eta m \alpha}^{*Q} + \overline{F_{\eta m \alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{\eta(m+1)\alpha}^{*Q}} \right. \right. \\
 &\quad + \left. \left( G_{\eta(m+1)\alpha}^{*Q} + \overline{F_{\eta(m+1)\alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{\eta m \alpha}^{*Q}} \right. \\
 &\quad + \left. \left( G_{\eta m \alpha}^{*Q} + \overline{F_{\eta m \alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{\eta(m+1)\alpha}^{*Q}} \right. \\
 &\quad \left. - \left( G_{\eta(m+1)\alpha}^{*Q} + \overline{F_{\eta(m+1)\alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{\eta m \alpha}^{*Q}} \right] \\
 &+ \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha'} (\alpha' d) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ G_{\eta m \alpha'}^{*Q} \overline{F_{\eta(m+1)\alpha'}^{*Q}} + G_{\eta(m+1)\alpha'}^{*Q} \overline{F_{\eta m \alpha'}^{*Q}} \right. \\
 &\quad \left. + \overline{G_{\eta m \alpha'}^{*Q}} \overline{F_{\eta(m+1)\alpha'}^{*Q}} + \overline{G_{\eta(m+1)\alpha'}^{*Q}} \overline{F_{\eta m \alpha'}^{*Q}} \right] \left. \right\} \quad (5.-28)
 \end{aligned}$$

Die Summe über  $\alpha'$  ist die Summe über die reellen  $\alpha$ .

Die Driftkraft in y-Richtung erhält man, indem man jeweils die erste Summe der  $f_{2x}$ , der  $f_{4x}$  und der  $f_{2\alpha}$  (Gln (A.9-8), (A.9-19)) mit  $e^{-i\pi/2} = -i$  und die zweite Summe (Gln (A.9-9), (A.9-20)) mit  $e^{+i\pi/2} = +i$  multipliziert ent-

sprechend den geänderten Richtungskosinus. (Die Integrale  $f_{3\alpha}$  sind die konjugiert komplexen Integrale zu  $f_{2\alpha}$ .)

Für die Driftkraft in y-Richtung gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(2)Q}}^t &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2 \\ &\cdot \left\{ (\alpha d) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ - \left( G_{7m\alpha}^{*Q} + \overline{F_{7m\alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{7(m+1)\alpha}^{*Q}} \right. \right. \\ &\quad - \left. \left( G_{7(m+1)\alpha}^{*Q} + \overline{F_{7(m+1)\alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{7m\alpha}^{*Q}} \right. \\ &\quad - \left. \left( \overline{G_{7m\alpha}^{*Q} + F_{7m\alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{7(m+1)\alpha}^{*Q}} \right. \\ &\quad \left. - \left( \overline{G_{7(m+1)\alpha}^{*Q} + F_{7(m+1)\alpha}^{*Q}} \right) \overline{F_{7m\alpha}^{*Q}} \right] \\ &+ i \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha'} (\alpha' d) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ - G_{7m\alpha'}^{*Q} \overline{F_{7(m+1)\alpha'}^{*Q}} + G_{7(m+1)\alpha'}^{*Q} \overline{F_{7m\alpha'}^{*Q}} \right. \\ &\quad \left. + \overline{G_{7m\alpha'}^{*Q}} \overline{F_{7(m+1)\alpha'}^{*Q}} - \overline{G_{7(m+1)\alpha'}^{*Q}} \overline{F_{7m\alpha'}^{*Q}} \right] \Big\} \quad (5.-29). \end{aligned}$$

Für einen einzelnen Körper entfällt die Summe über die reellen  $\alpha'$  in den Gln (5.-28), (5.-29), da die harmonische Elementarwelle keine Glieder mit den reellen  $\alpha$  enthält. Ebenso entfällt diese Summe bei einer Anordnung einfacher rotationssymmetrischer Körper mit konstantem Durchmesser, die auf den Meeresboden aufgestellt sind und sich bis über die Stillwasserfläche hinaus erstrecken.

Zur Errechnung der Driftkräfte für die frei schwimmenden Körper sind die Potentiale der Abstrahlungsprobleme und die Bewegungen der Körper (vgl. Glg (2.4-2)) mit zu berücksichtigen. Es sind lediglich die Fourierkoeffizienten der einfallenden und abstrahlenden Wellensysteme in den Gln

(5.-28) und (5.-29) so abzuändern, daß die Abstrahlungspotentiale multipliziert mit den normierten Bewegungen der Körper mit in die Gleichungen eingehen.

Für die Koeffizienten des gesamten Potentials gilt dann:

$$G_{m\alpha}^{*Q} = G_{\eta m\alpha}^{*Q} + \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\dot{s}_{j0}^p \delta_j}{-i\omega H/2 d} \right) G_{j^p m\alpha}^{*Q} \quad (5.-30),$$

und

$$\begin{aligned} F_{m\alpha}^{*Q} &= F_{\eta m\alpha}^{*Q} + \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\dot{s}_{j0}^Q \delta_j}{-i\omega H/2 d} \right) F_{j^Q m\alpha}^{*QE} \\ &+ \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\dot{s}_{j0}^p \delta_j}{-i\omega H/2 d} \right) F_{j^p m\alpha}^{*Q} \end{aligned} \quad (5.-31).$$

Für einen rotationssymmetrischen Körper gibt es kein Moment um die Hochachse ( $j=6$ ). Für Körper allgemeiner geometrischer Form kann leicht analog zu den vorigen Betrachtungen mit Hilfe der von Newman /25/ abgeleiteten Beziehungen für den Impuls das Driftmoment um die Hochachse bestimmt werden, wenn die Potentiale in Form von Fourierreihen vorliegen.

Zur Bestimmung der Driftkraft in vertikaler Richtung und der Driftmomente um die horizontalen Achsen sind nach Lee und Newman /15/ wohl Integrationen über die Stillwasserfläche und den Meeresboden nicht zu umgehen. Die Anwendung des Impulssatzes bietet dann aber kaum Vorteile gegenüber dem Verfahren der direkten Integration (/31/) beim Diffraktionsproblem der rotationssymmetrischen Körper.

## 6. Numerische Ergebnisse

Auf der Basis des Rechenprogramms (DIFRAC-R) für die Analyse eines einzelnen rotationssymmetrischen Körpers beliebiger Form wurde nach dem in dieser Arbeit dargelegten theoretischen Konzept das Rechenprogramm DIFRAC-M für die Analyse einer Anordnung mehrerer Körper erstellt und lauffähig gemacht.

In einer umfangreichen Reihe von Testrechnungen wurden die Ergebnisse überprüft. Zum Vergleich wurden in der Literatur gegebene theoretische sowie experimentelle Ergebnisse nachgerechnet (/2/,/9/,/19/,/26/,/27/,/29/,/35/). Dabei konnte in der Regel eine sehr gute Übereinstimmung erzielt werden.

Alle Rechnungen wurden auf der CYBER 175 des Rechenzentrums der RWTH-Aachen durchgeführt. Die Erfahrungen, die bei der Analyse einzelner rotationssymmetrischer Körper bezüglich der Anzahl der Fourierkoeffizienten und der Idealisierung gewonnen wurden /11/ konnten übernommen werden. So wurde die Anzahl der Fourierkoeffizienten für die vertikale Richtung in den Elementen des Typs I und II auf 20, die für Elemente des Typs III auf 50 festgelegt.

Bei der Anzahl 11 der Fourierkoeffizienten ( $-5 \leq m \leq +5$ ) in Umfangsrichtung zeigte sich bereits eine ausreichende Genauigkeit der Ergebnisse. Bei den ausgeführten Rechnungen (mit  $-9 \leq m \leq +9$ ) beträgt die Genauigkeit der Ergebnisse ca. 1%. Für die Ordnung der gegenseitigen Beeinflussung war  $u=7$  in der Regel ausreichend. Für kleine Werte der dimensionslosen Wellenzahl ( $\kappa a < 0.3$ ) wurde bereits mit  $u=3$  ausreichende Genauigkeit erzielt.

Das hier dargelegte spezielle Verfahren für die rotationssymmetrischen Körper erwies sich im Vergleich mit einem Integralgleichungsverfahren (/8/,/12/) sowohl in Hinsicht auf Speicherplatzbedarf als auch auf Rechenzeit (1/10) effizienter.

Im Rahmen dieser Arbeit werden beispielhaft Ergebnisse

der Untersuchungen von Körpern, die eine relativ einfache geometrische Form aufweisen, gezeigt. Bei Anordnungen dieser Körper lassen sich die Effekte der gegenseitigen hydrodynamischen Beeinflussung am deutlichsten zeigen.

Im folgenden werden auch Wellenkräfte für die horizontalen Richtungen auf stehende, über die Meeresoberfläche hinausragende Zylinder angegeben, die bezogen sind auf die Kraft, die auf einen einzelnen alleinstehenden Zylinder wirkt. In der Abb. 8 wird daher die Horizontalkraft nach der bekannten Lösung von Mc Camy und Fuchs /16/ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Wellenzahl angegeben. Beim Diffraktionsproblem des einfachen stehenden Zylinders ist der Kraftverlauf über  $z$  ( $0 \leq z \leq d$ ) proportional zu  $\cosh(\alpha z)$ . Beim Potential des Diffraktionsproblems treten wegen der einfachen Randbedingung auf der Zylindermantelfläche keine Summenglieder mit den reellen  $\alpha$  auf (vgl. Abschnitt 3.1).

Die Wellenkraft 1. Ordnung läßt sich sehr einfach durch Integration des instationären Druckes über die Körperoberfläche ermitteln.

Mit der Normierung

$$f_{W10} = \frac{F_{W10}}{\rho g \pi a^2 H/2 \tanh(\alpha d)}$$

läßt sich dann der dimensionslose Koeffizient  $f_{W10}$  der Horizontalkraft definieren, der unabhängig von der Wassertiefe  $d$  ist. Es ist sinnvoll, diese Art der Normierung auch für eine Anordnung mehrerer stehender Zylinder zu übernehmen, da auch bei dieser Randwertaufgabe die einfache Abhängigkeit des Kraftverlaufs über  $z$  wie für den einzelnen Zylinder gilt (vgl. Abschnitt 3.2) und damit die so normierte Kraft unabhängig von der Wassertiefe ist.

Wie für die Kraft läßt sich für das auf den Zylinder wirkende Kippmoment bezüglich des Meeresbodens ein dimensionsloser Koeffizient definieren, der ebenfalls unabhängig von der Wassertiefe ist.

Für das Verhältnis von Kippmoment zu Horizontalkraft

gilt

$$\frac{F_{W50}}{F_{W10}} = \frac{\int_{z=0}^d z \cosh(\alpha z) dz}{\int_{z=0}^d \cosh(\alpha z) dz}$$

Für den dimensionslosen Koeffizienten des Kippmomentes gelte die Definition:

$$f_{W50} = f_{W10}$$

Daraus folgt dann:

$$f_{W50} = \frac{F_{W50}}{\rho g \pi a^2 d H/2 \left\{ \tanh(\alpha d) + \frac{1}{\alpha d} \left( \frac{1}{\cosh(\alpha d)} - 1 \right) \right\}}$$

Für einfache auf dem Meeresboden stehende Zylinder hat man also sofort mit der Auftragung für  $f_{W10}$  auch das Kippmoment.

Bei einer Anordnung mehrerer gleichartiger Körper erfährt jeweils derjenige Körper, der sich als erster in der Wellenlaufrichtung befindet, die größten Interaktionseffekte bei den erregenden Kräften. Die Vergrößerung der Kraft gegenüber der, die auf den einzelnen Körper wirkt, kann bei bestimmten Frequenzen durchaus 50% betragen und zwar in einem Bereich, der maßgeblich sein kann für die Auslegung der Struktur.

Van Oortmerssen /29/ zeigt theoretische und experimentelle Ergebnisse einer Untersuchung zweier benachbarter auf dem Meeresboden stehender Zylinder. Diesen Ergebnissen werden in der Abbildung 9 eigene Rechenergebnisse gegenübergestellt.

Die Zylinderachsen haben einen Abstand  $R = 6 a$  voneinander. Aufgetragen ist in Abb. 9 a der Vergrößerungsfaktor der Horizontalkraft für den ersten Zylinder, d.h. die auf diesen Zylinder ausgeübte Kraft bezogen auf die Kraft, die auf einen einzelnen alleinstehenden Zylinder wirkt. Die Übereinstimmung der Ergebnisse - auch der experimentellen -

ist sehr gut. In der Abb. 9 b ist der Vergrößerungsfaktor für die Kraft, die auf den zweiten Zylinder ausgeübt wird, gezeigt. Die Interaktionseffekte sind für diesen Zylinder deutlich kleiner.

In der Abb. 10 sind die Ergebnisse der Untersuchung einer Anordnung dreier Zylinder, die von Ohkusu in /26/ veröffentlicht wurden, dargestellt. Aufgetragen sind die dimensionslosen Wellenkräfte in den horizontalen Richtungen, die bei zwei Abständen  $R$  ( $R = 5 a$  bzw.  $R = 10 a$ ) auf die Zylinder ausgeübt werden. Die Ergebnisse der Nachrechnung zeigen kaum Abweichungen.

Die Abb. 11 zeigt einige Ergebnisse einer vergleichenden Untersuchung zweier schwimmender Zylinder, die von Matsui und Tamaki /19/ analysiert wurden. Beispielhaft sind die erregenden Wellenkräfte für die horizontale Richtung (Abb. 11 a), ein Kopplungsglied der Massen- und der Dämpfungsmatrix (Abb. 11 b) und die Übertragungsfunktionen für die Tauchbewegung der Zylinder (Abb. 11 c) gezeigt.

Als eine Erweiterung der von Ohkusu /27/ für eine Konfiguration dreier schwimmender Zylinder durchgeführten Untersuchung werden in der Abb. 12 für die hydrodynamischen Massen und die Koeffizienten der Potentialdämpfung für die  $x$ -Bewegung ( $j=1$ ) und die Drehbewegung um die  $y$ -Achse ( $j=5$ ) gezeigt.

In der Abbildung 13 sind die Übertragungsfunktionen der Horizontalkräfte für drei abgestufte Zylinder dargestellt. Eine derartige Anordnung von Auftriebskörpern kann man bei Halbtauchern finden.

Schließlich zeigt die Abb. 14 den Einfluß einer stehenden Struktur auf die Horizontal- und die Vertikalbewegung eines in der Nähe frei schwimmenden Zylinders bei zwei Abständen  $R$ .

Die im folgenden aufgeführten Ergebnisse für die auf die Körper wirkenden Driftkräfte beschränken sich auf das Diffraktionsproblem.

Es finden sich in der Literatur nur wenige Beispiele für die Driftkräfte, die auf rotationssymmetrische Körper unter Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung wirken.

Um die Gültigkeit der in Abschnitt 5. abgeleiteten Formeln für die Driftkräfte zu überprüfen, wurden zunächst einmal Vergleichsrechnungen mit einzelnen rotationssymmetrischen Körpern (/9/) durchgeführt.

Beispielhaft wird in der Abb. 15 der Verlauf der Driftkraft aus dem Diffraktionsproblem für einen einfachen schwimmenden Zylinder, der in der Welle festgehalten ist, gezeigt. Die mit dem Rechenprogramm DIFRAC-M erzielten Ergebnisse müssen identisch sein mit jenen, die mit dem Programm DIFRAC-R aus der Fernfeldbetrachtung nach Newman gewonnen wurden, da die in Abschnitt 5 dieser Arbeit abgeleiteten Beziehungen auch für den Einzelkörper unabhängig vom Radius der Kontrollfläche gelten.

Zum Vergleich sind in Abb. 15 auch Ergebnisse aufgetragen, die mit Hilfe eines Integralgleichungsverfahrens (Programm SING-A) durch direkte Integration des zeitunabhängigen Anteils des instationären Druckes über die Körperoberfläche nach Pinkster /31/ gewonnen wurden.

Es ist bekannt, daß die auf diese Art ermittelten Werte in starkem Maße abhängig sind von der Idealisierung der Körperoberfläche durch finite Oberflächenelemente, d.h. die Werte sind nur zuverlässig bei Verwendung einer sehr großen Anzahl von Elementen.

Die in Abb. 15 benutzte Normierung für die Driftkraft

$$\frac{\overline{F_1^{(2)}}}{\frac{1}{2} \rho g a (H/2)^2}$$

ist üblich. Mit dieser Normierung wird bei größeren Wellenzahlen ein konstanter Grenzwert erreicht, da sich die Wel-

lenbildung dann nur noch in unmittelbarer Nähe der Stillwasserfläche abspielt und an der Körperoberfläche Totalreflexion stattfindet (/7/).

Der Bereich der mittleren und größeren Wellenlängen (kleinere Wellenzahl) kann bei dieser Art der Auftragung unterschätzt werden. Die mittleren Wellenlängen sind mit größeren Wellenhöhen verbunden. Das Verhältnis Wellenhöhe zu Wellenlänge kann praktisch den Wert  $1/7$  nicht überschreiten, darüberhinaus bricht die Welle.

In der Abbildung 16 ist für den einfachen stehenden Zylinder der Abb. 8 die Driftkraft für die x-Richtung in normierter Form in Abhängigkeit von der dimensionslosen Wellenzahl angegeben.

Ähnlich wie bei der Wellenkraft 1. Ordnung kann für den einfachen auf dem Meeresboden stehenden Zylinder ein dimensionsloser Koeffizient der Driftkraft angegeben werden, der von der Wassertiefe unabhängig ist.

Nach dem, was in Abschnitt 5. im Zusammenhang mit der Integration über die Kontrollfläche  $S_R$  zur Ermittlung der Driftkraft gezeigt wurde, kann die Integration über  $z$  ( $0 \leq z \leq d$ ) für den einfachen Zylinder separat ausgeführt werden:

$$\overline{F_1^{(z)}}^t = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} f_1(r, \vartheta) \Big|_{r=\text{konst.}} d\vartheta \cdot \int_{z=0}^d f_2(z) dz$$

Die Funktion  $f_2(z)$  ist proportional zum Quadrat des Diffraktionspotentials und auch proportional zum Quadrat der horizontalen Teilchengeschwindigkeiten an einer beliebigen Stelle des Strömungsfeldes ( $x = \text{konst.}$ ,  $y = \text{konst.}$ ).

Man kann ganz formal die Driftkraft so formulieren, als ob sie aus einem Staudruck resultierte

$$\overline{F_1^{(z)}}^t = \frac{1}{2} c(\alpha a) \rho \cdot 2a \int_{z=0}^d |u_0(z)|^2 dz$$

Für die Geschwindigkeit  $|u_0(z)|$  kann der Betrag der Teilchengeschwindigkeit der ungestörten Welle in Wellenlauf-  
richtung eingesetzt werden.

Mit Glg (2.3-23) erhält man dann

$$|u_0(z)| = \left| \frac{\partial \varphi_0(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = \omega \frac{H}{2} \frac{\cosh(\alpha z)}{\sinh(\alpha d)}$$

für  $\mu = 0$ .

Die Kreisfrequenz  $\omega$  kann mit Hilfe der Dispersionsgleichung (2.3-24) ersetzt werden. Nach Ausführung der Integration über  $z$  erhält man für die Driftkraft:

$$\overline{F_1^{(2)}}^t = \frac{1}{2} C(\alpha a) \rho g a \left(\frac{H}{2}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{2\alpha d}{\sinh(2\alpha d)} \right\}$$

oder für den dimensionslosen Koeffizienten der Driftkraft:

$$\overline{f_1^{(2)}}^t (= C(\alpha a)) = \frac{\overline{F_1^{(2)}}^t}{\frac{1}{2} \rho g a \left(\frac{H}{2}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{2\alpha d}{\sinh(2\alpha d)} \right\}}$$

Diese Normierung für die Horizontalkräfte wird bei der Auftragung der Ergebnisse für die einfachen auf dem Boden stehenden, bis über die Meeresoberfläche hinausragenden Zylinder benutzt.

Eatock Taylor und Hung /2/ geben Vergrößerungsfaktoren der Driftkräfte für eine Anordnung zweier benachbarter stehender Zylinder an, wie sie in der Abb. 17 skizziert ist. Für den Bereich relativ großer Wellenlängen haben Eatock Taylor und Hung den Einfluß des Abstandes der Zylinder auf die Driftkräfte in x-Richtung untersucht. Für den Bereich sehr großer Abstände  $R$  geben sie eine Näherung an.

Die Abbildung 17 zeigt, daß im Bereich größerer Wellenlängen die Driftkraft bei kleiner werdenden Abständen bis

auf das 4-fache des Wertes der Kraft für den Einzelzylinder anwachsen kann. Für die betrachtete Konfiguration wurden die Driftkräfte für den hauptsächlich interessierenden Bereich der normierten Wellenzahl  $0 \leq \alpha a \leq 2.0$  (d.h. also  $0 \leq \alpha R \leq 10$  für  $R/a = 5$  bzw.  $0 \leq \alpha R \leq 4$  für  $R/a = 2$ ) nachgerechnet und den Ergebnissen von Eatock Taylor und Hung gegenübergestellt. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Lediglich für den Fall der sich nahezu berührenden Zylinder ergeben sich Abweichungen, die vertretbar sind.

Weiter sind in den Abbildungen 18 und 19 die Driftkräfte in  $y$ -Richtung für den Zylinder I gezeigt. Bei großen Abständen  $R$  im Bereich kleinerer Wellenlängen ist diese Kraft wesentlich kleiner als die  $x$ -Kraft.

Für den Bereich der größeren Wellenlängen bei kleineren Abständen ist die Auftragung mit der Normierung der Abb. 18 nicht mehr sinnvoll. Für kleine Abstände  $R$  wurde daher in Abb. 19 die  $y$ -Kraft mit der Normierung, wie sie für den einzelnen Zylinder der Abb. 16 eingeführt wurde, aufgetragen. Es zeigt sich, daß bei kleinen Abständen sehr große  $y$ -Kräfte auftreten können.

In der Abbildung 20 sind Vergrößerungsfaktoren der Driftkräfte für die Konfiguration der zwei Zylinder der Abb. 9 gezeigt. Aufgetragen sind über der Wellenzahl die Kräfte auf die Zylinder bezogen auf die Kraft, die auf einen einzelnen Zylinder wirkt. Die Ergebnisse einer Nachrechnung mit dem Programm SING-A sind zum Vergleich gezeigt.

Für die drei auf dem Meeresboden stehenden bis über die Meeresoberfläche hinausragenden Zylinder der Abb. 10 sind in Abb. 21 die Driftkräfte für die horizontalen Richtungen aufgetragen.

Diese Abbildung und auch Abb. 20 machen deutlich, daß sich die gegenseitige Beeinflussung bei den Driftkräften stärker bemerkbar macht als bei den Wellenkräften 1. Ordnung. Es ist zu beachten, daß die Driftkräfte absolut allerdings kleiner sind als die Kräfte 1. Ordnung. Der Einfluß des Abstandes  $R$  (Abb. 21) auf den Verlauf der Driftkräfte

und auf den Verlauf der Kräfte 1. Ordnung (Abb. 10) über der Wellenzahl ist qualitativ vergleichbar.

Schließlich sind in der Abb. 22 noch die Driftkräfte des Diffraktionsproblems für die zwei schwimmenden Zylinder der Abb. 11 gezeigt. Es werden Abschattungseffekte, die der zweite Zylinder erfährt, deutlich.



## 7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden einige Effekte der gegenseitigen hydrodynamischen Beeinflussung an Strukturen unter der Wirkung von harmonischen Schwerewellen am Beispiel rotationssymmetrischer Körper mit vertikaler Achse aufgezeigt.

Zunächst wurden die allgemeinen Grundlagen der potentialtheoretischen Behandlung von Strukturen, die auf dem Meeresboden stehen bzw. frei schwimmen, unter der Wirkung von Wellen dargelegt. Das prinzipielle Vorgehen zur Linearisierung der Randwertaufgaben der Diffraktion und der Abstrahlung wurden gezeigt.

Es wurden dann die Grundzüge eines Makroelemente-Verfahrens zur hydrodynamischen Analyse rotationssymmetrischer Körper mit vertikaler Achse und die Erweiterung dieses Verfahrens auf Anordnungen mehrerer Körper beschrieben.

Der Grundgedanke des Makroelemente-Verfahrens liegt in der Aufteilung des Strömungsfeldes um die Körper herum in koaxiale Ringelemente. Die Potentiale in den Elementen werden durch Fourierreihen angenähert.

Auf diese Weise läßt sich das Strömungsfeld innerhalb der einzelnen Elemente durch analytische Funktionen beschreiben. Alle notwendigen Integrationen über die Begrenzungsflächen der Elemente können analytisch ausgeführt werden.

Im Abschnitt 4. dieser Arbeit wurde aufgezeigt, wie vorteilhaft aus der Betrachtung des Strömungsfeldes um einzelne Körper innerhalb der Anordnung bzw. um die Anordnung der Körper hydrodynamische Kräfte ermittelt und Beziehungen zwischen den Dämpfungskoeffizienten abgeleitet werden können. Diese Betrachtungen sind nicht auf rotationssymmetrische Körper beschränkt und bieten eine Reihe von Kontrollmöglichkeiten.

Schließlich wurden im Abschnitt 5. allgemeingültige Formeln zur Ermittlung der auf die Körper wirkenden Driftkräfte in den horizontalen Richtungen nach dem Impulssatz

abgeleitet.

Zur Überprüfung des Verfahrens wurden Beispiele aus der Literatur nachgerechnet. Die vergleichenden Rechnungen zeigten eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

Die Auswirkungen der gegenseitigen hydrodynamischen Beeinflussung auf die Kräfte, hydrodynamische Massen und Dämpfungskoeffizienten sowie auf die Bewegungen frei schwimmender Körper wurden an ausgewählten Beispielen demonstriert. Die Vergrößerung der Kräfte gegenüber jenen, die auf den einzelnen Körper wirken, kann bei bestimmten Konfigurationen nicht mehr vernachlässigt werden und muß bei einer zuverlässigen Bemessung der Strukturen mit berücksichtigt werden.

Es zeigte sich, daß das hier benutzte Verfahren bei einem Vergleich mit einem Integralgleichungsverfahren erhebliche Vorteile sowohl in Hinsicht auf die Rechenzeit als auch in Hinsicht auf die Genauigkeit der Ergebnisse bietet.

## 8. Literatur

- /1/ Abramowitz M. und I. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications Inc., New York 1972
- /2/ Eatock Taylor R. und S.M. Hung: Wave Drift Enhancement Effects in Multi Column Structures. Applied Ocean Research, 1985, Bd. 7 ,Nr. 3
- /3/ Fletcher C.A.J.: Computational Galerkin Methods. Springer Verlag, New York, 1984
- /4/ Garret C.J.R.: Wave Forces on a Circular Dock. Journal of Fluid Mechanics, Bd. 43, Teil I, 1971
- /5/ Garrison C.J.: Hydrodynamics of Large Objects in the Sea. Part I, No.1; Part II, No.2. Journal of Hydronautics. Bd.8, 1974
- /6/ Garrison, C.J.: Hydrodynamic Loading of Offshore Structures. Three-Dimensional Source Distribution Method. In: Numerical Methods in Offshore Engineering. John Wiley & Sons, 1978
- /7/ Kokkinowrachos K.: Hydromechanik der Seebauwerke. In: Handbuch der Werften, Bd. XV, Schiffahrts-Verlag "Hansa", Hamburg 1980
- /8/ Kokkinowrachos K., S. Asorakos und S. Mavrakos: Belastungen und Bewegungen großvolumiger Seebauwerke durch Wellen. Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 2905, Westdeutscher Verlag, Opladen 1980
- /9/ Kokkinowrachos K., L.Bardis und S. Mavrakos: Drift Forces on One and Two-Body Systems in Regular Waves. BOSS '82, M.I.T. Cambridge 1982
- /10/ Kokkinowrachos K., I.Thanos und H.G. Zibell: Hydrodynamic Interaction Between Several Vertical Bodies of Revolution in Waves. Proc. 5th Intern. Symp. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE), Tokyo, April 1986
- /11/ Kokkinowrachos K., S. Asorakos und S. Mavrakos: Behaviour of Vertical Bodies of Revolution in Waves. Ocean Engineering, Bd. 13, Nr. 6, 1986

- /12/ Kokkinowrachos K., A. Mitzlaff und H.G. Zibell: Verhalten von Mehrkörpersystemen bei Operationen im Meer. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Bd. 80, Springer Verlag, Berlin 1986
- /13/ Kokkinowrachos K. und I.Thanos: Second-Order Forces on Arbitrary Vertical Axisymmetric Bodies. 8th Intern. Symp. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE), Den Haag, März 1989
- /14/ Lamb Sir H.: Hydrodynamics. 6. Ed., Cambridge University Press, London 1945
- /15/ Lee C.M. und J.N.Newman: The Vertical Mean Force and Moment of Submerged Bodies Under Waves. Journal of Ship Research, Sept. 1971
- /16/ Løken A.E.: Hydrodynamic Interaction Between Several Floating Bodies of Arbitrary Form in Waves. Intern. Symposium on Hydrodynamics in Ocean Engineering, Trondheim 1981
- /17/ Mac Camy R. und R. Fuchs: Wave Forces on Piles: A Diffraction Theory. Beach Erosion Board, Technical Memorandum (69), 1954
- /18/ Magnus W., F. Oberhettinger und R.P. Soni: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer-Verlag New York 1966
- /19/ Matsui T. und T. Tamaki: Hydrodynamic Interaction Between Groups of Vertical Axisymmetric Bodies Floating in Waves. Intern. Symposium on Hydrodynamics in Ocean Engineering, Trondheim 1981
- /20/ Mavrakos S.: Eine lineare Lösung des Oberflächenwellenproblems außerhalb und innerhalb rotationssymmetrischer Körper mit vertikaler Achse. Dissertation, RWTH Aachen, 1981
- /21/ Mei C.C.: The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. John Willey & Sons, 1983

- /22/ Molin B. und A. Marion: Second-Order Loads and Motions for Floating Bodies in Regular Waves. 5th Intern. Symp. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE), Tokyo April 1986
- /23/ Morse P.M. und H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics. Mc. Graw Hill, 1953
- /24/ Newman J.N.: The Exciting Forces on Bodies Fixed in Waves. Journal of Ship Research , Dez. 1962
- /25/ Newman J.N.: The Drift Force and Moment on Ships in Waves. Journal of Ship Research, März 1967
- /26/ Ohkusu M.: Wave Action on Groups of Vertical Circular Cylinders. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, 131, 1972 (auf japanisch)
- /27/ Ohkusu M.: Hydrodynamic Forces on Multiple Cylinders in Waves. Intern. Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, University College London 1974
- /28/ Ohkusu M.: Ship Motions in Vicinity of a Structure. BOSS '76 Conference. Trondheim 1976
- /29/ Oortmerssen G. van: Hydrodynamic Interaction Between two Structures. Boss '79 Conference, London 1979
- /30/ Oortmerssen G. van: Some Hydrodynamic Aspects of Multi-Body Systems. Intern. Symposium on Hydrodynamics in Ocean Engineering, Trondheim 1981
- /31/ Pinkster J.A.: Drift Forces, Mooring Problems. Proc. 2nd WEGEMT Graduate School: Advanced Aspects of Offshore Engineering, Aachen, Wageningen, März 1979
- /32/ Reddy K.I.S., B.N. Kumar und J. Dattatri: Interactions of a Group of Vertical Cylinders in Water Waves. Intern. Symp. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE), Den Haag, März 1989
- /33/ Schneekluth H.: Hydromechanik zum Schiffsentwurf. 2. Aufl., Koeler, Herford 1977
- /34/ Sommerfeld A.: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 6. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M. 1978

- /35/ Spring B.H. und P.L. Monkmeyer: Interaction of Plane Waves with Vertical Cylinders. Proc. 14th Coastal Eng. Conf., Bd. III, 1974
- /36/ Stoker J.J.: Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. Interscience Publishers Inc., New York 1957
- /37/ Twersky V.: Multiple Scattering of Radiation by an Arbitrary Configuration of Parallel Cylinders in Waves. Journal of the Acoustical Society of America, Bd. 24 Nr. 1, 1952
- /38/ Watson G.N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2. Ed., Cambridge University Press, London 1944
- /39/ Zienkiewicz O.C., P. Bettess und D.W. Kelly: The Finite Element Method for Determining Fluid Loading on Rigid Structures. Two- and Three-Dimensional Formulations. In: Numerical Methods in Offshore Engineering. John Wiley & Sons, 1978

9. ANHANG

## 9.1 Beziehungen zwischen den Besselfunktionen

Die allgemeinen Beziehungen für die Besselfunktionen findet man in /1/, /18/, /38/.

Die hier aufgeführten Beziehungen zwischen den Besselfunktionen, den Hankelfunktionen und den modifizierten Besselfunktionen gelten ohne Einschränkungen nur für ganzzahlige (positive, wie negative) Ordnungen  $m$ . Die Argumente  $\rho$  dürfen auch komplexe Werte annehmen.

Die Hankelfunktion 1. Art ( $H_m(\rho) = H_m^{(1)}(\rho)$ ) wird gebildet

$$H_m(\rho) = J_m(\rho) + i Y_m(\rho) \quad (\text{A.1-1})$$

mit den Besselfunktionen 1. und 2. Art ( $J_m, Y_m$ ). Beide Funktionen liefern für reelles Argument reelle Werte.  $Y_m(\rho)$  wird auch als Neumann'sche Funktion bezeichnet. Auch die Werte der modifizierten Besselfunktionen sind bei reellem Argument reell.

Die Besselfunktionen sind durch folgende Beziehungen miteinander verbunden

$$I_m(-i\rho) = (-i)^m J_m(\rho) \quad (\text{A.1-2}),$$

$$K_m(-i\rho) = \frac{\pi}{2} (i)^{m+1} H_m(\rho) \quad (\text{A.1-3}).$$

Es gilt speziell für ein reelles Argument  $\rho = \alpha r$ :

$$I_m(-i\alpha r) = (-i)^m J_m(\alpha r) \quad (\text{A.1-4}),$$

$$K_m(-i\alpha r) = \frac{\pi}{2} (i)^{m+1} H_m(\alpha r) \quad (\text{A.1-5}),$$

und für ein imaginäres Argument  $\rho = i\alpha r$  ( $\alpha$  reell):

$$I_m(\alpha r) = (-i)^m J_m(i\alpha r) \quad (\text{A.1-6}),$$

$$K_m(\alpha r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (i)^{m+1} H_m(i\alpha r) \quad (\text{A.1-7}).$$

Für die Funktionen mit negativer Ordnung  $m$  gelten die linearen Abhängigkeiten:

$$J_m(\alpha r) = (-1)^m J_{(-m)}(\alpha r) \quad (\text{A.1-8}),$$

$$H_m(\alpha r) = (-1)^m H_{(-m)}(\alpha r) \quad (\text{A.1-9}),$$

$$I_m(\alpha r) = I_{(-m)}(\alpha r) \quad (\text{A.1-10}),$$

$$K_m(\alpha r) = K_{(-m)}(\alpha r) \quad (\text{A.1-11}).$$

Die Funktionen 1. und 2. Art sind verbunden durch

$$I_m'(\rho) K_m(\rho) - I_m(\rho) K_m'(\rho) = \frac{1}{\rho} \quad (\text{A.1-12}),$$

$$J_m'(\rho) H_m(\rho) - J_m(\rho) H_m'(\rho) = \left(-\frac{2i}{\sqrt{\pi}\rho}\right) \quad (\text{A.1-13}),$$

$$\overline{H_m'(\rho)} H_m(\rho) - \overline{H_m(\rho)} H_m'(\rho) = \left(-\frac{4i}{\sqrt{\pi}\rho}\right) \quad (\text{A.1-14}),$$

mit  $R_m'(\rho) = dR_m(\rho)/d\rho$  und  $\overline{H_m(\rho)}$  als konjugiert komplexer Funktion zu  $H_m(\rho)$ .

## 9.2 Rekursionsformeln

Für die Besselfunktionen  $R_m(\rho) = J_m(\rho)$  bzw.  $R_m(\rho) = H_m(\rho)$  gelten allgemein die Rekursionsformeln

$$R_{m-1}(\rho) - R_{m+1}(\rho) = 2 R'_m(\rho) \quad (\text{A.2-1}),$$

$$R_{m-1}(\rho) + R_{m+1}(\rho) = \frac{2m}{\rho} R_m(\rho) \quad (\text{A.2-2}).$$

Für die modifizierten Besselfunktionen  $I_m(\rho)$ ,  $K_m(\rho)$  mit  $\rho = (\alpha r)$  gilt

$$I_{m-1}(\alpha r) + I_{m+1}(\alpha r) = 2 \frac{dI_m(\alpha r)}{d(\alpha r)} = 2 I'_m(\alpha r) \quad (\text{A.2-3}),$$

$$I_{m-1}(\alpha r) - I_{m+1}(\alpha r) = \frac{2m}{\alpha r} I_m(\alpha r) \quad (\text{A.2-4})$$

und

$$K_{m-1}(\alpha r) + K_{m+1}(\alpha r) = -2 \frac{dK_m(\alpha r)}{d(\alpha r)} = -2 K'_m(\alpha r) \quad (\text{A.2-5}),$$

$$K_{m-1}(\alpha r) - K_{m+1}(\alpha r) = -\frac{2m}{\alpha r} K_m(\alpha r) \quad (\text{A.2-6}).$$

Die Glgn (A.2-3) bis (A.2-6) können auch aus den Glgn (A.2-1) und (A.2-2) mit Hilfe der Glgn (A.1-6) und (A.1-7) hergeleitet werden.

Auch die Werte der Ableitungen  $J'_m(\rho)$ ,  $Y'_m(\rho)$ ,  $I'_m(\rho)$  und  $K'_m(\rho)$  sind bei reellem Argument reell.

### 9.3 Grenzwerte

Im Zusammenhang mit den Funktionen für die unter dem Körper liegenden Elemente können die folgenden Grenzwerte gebildet werden:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{I_m \left( \frac{n \pi r}{h} \right)}{I_m \left( \frac{n \pi a}{h} \right)} \right) = \left( \frac{r}{a} \right)^{|m|} \quad (A.3-1),$$

$|m| = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{K_m \left( \frac{n \pi r}{h} \right)}{K_m \left( \frac{n \pi a}{h} \right)} \right) = \left( \frac{a}{r} \right)^{|m|} \quad (A.3-2),$$

$|m| = 1, 2, 3, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{K_0 \left( \frac{n \pi r}{h} \right)}{K_0 \left( \frac{n \pi a}{h} \right)} \right) = \ln \left( \frac{r}{a} \right) \quad (m = 0) \quad (A.3-3).$$

### 9.4 Der Entwicklungssatz der Besselfunktionen

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes kann das Potential der ungestörten Welle in Zylinderkoordinaten transformiert werden (Jacobi-Anger Formel). Es gilt

$$\begin{aligned} e^{i(x \cos \mu + y \sin \mu)} &= e^{i x r \cos(\vartheta - \mu)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{i m (\vartheta - \mu)} J_m(xr) \end{aligned} \quad (A.4-1).$$

mit

$$\vartheta = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

### 9.5 Die Additionstheoreme

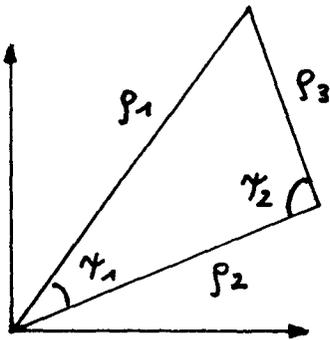
Die Additionstheoreme für die Bessel- und die Hankelfunktionen  $J_m(\rho_1)$  bzw  $H_m(\rho_1)$  lauten

$$J_m(\rho_1) \frac{\cos(m\gamma_1)}{\sin(m\gamma_1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m+n}(\rho_2) J_n(\rho_3) \frac{\cos(n\gamma_2)}{\sin(n\gamma_2)} \quad (\text{A.5-1}),$$

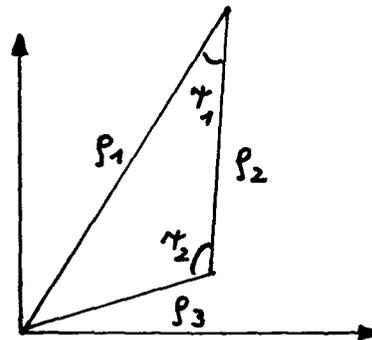
$$H_m(\rho_1) \frac{\cos(m\gamma_1)}{\sin(m\gamma_1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}(\rho_2) J_n(\rho_3) \frac{\cos(n\gamma_2)}{\sin(n\gamma_2)} \quad (\text{A.5-2}).$$

(  $\rho_2 > \rho_3$  )

Die Bezeichnungen können den Skizzen entnommen werden.



Skizze 1



Skizze 2

Für die modifizierten Besselfunktionen lauten die Additionstheoreme

$$I_m(\rho_1) \frac{\cos(m\gamma_1)}{\sin(m\gamma_1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_{m+n}(\rho_2) I_n(\rho_3) \frac{\cos(n\gamma_2)}{\sin(n\gamma_2)} \quad (\text{A.5-3}),$$

$$K_m(\rho_1) \frac{\cos(m\gamma_1)}{\sin(m\gamma_1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{m+n}(\rho_2) I_n(\rho_3) \frac{\cos(n\gamma_2)}{\sin(n\gamma_2)} \quad (\text{A.5-4}).$$

(  $\rho_2 > \rho_3$  )

Mit  $r_a = \rho_1$ ;  $R_{QP} = \rho_2$ ;  $r_p = \rho_3$  (vgl. Skizze 1 mit Abb. 7)

und  $\gamma_1 = \psi_a - \beta_{QP}$ ;  $\pi - \gamma_2 + \beta_{QP} = \psi_p$  erhält man nach Umformung Glg (3.2-20)

Mit  $r_a = \rho_1$ ;  $r_p = \rho_2$ ;  $R_{QP} = \rho_3$  (vgl. Skizze 2 mit Abb. 7) und  $2\pi - \gamma_1 - \gamma_2 = \psi_a - \beta_{QP}$ ;  $\pi - \gamma_2 + \beta_{QP} = \psi_p$  erhält man nach Umformung Glg (3.2-39).

## 9.6 Die Green'schen Sätze

Nach dem 1. Green'schen Satz gilt für zwei harmonische Geschwindigkeitspotentiale  $\phi$  und  $\phi^*$  in einem abgeschlossenen Gebiet  $R$ , sofern keine Quellen oder Senken innerhalb des Gebietes vorhanden sind, /14/:

$$\begin{aligned} & \iiint_R \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_S \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} dS - \iiint_R \phi (\Delta \phi^*) dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.6-1}),$$

wobei  $S$  die Oberfläche des betrachteten Gebietes ist und mit  $\partial / \partial n^*$  die Ableitung in Richtung der äußeren Oberflächennormalen bezeichnet ist.

Der 2. Green'sche Satz folgt unmittelbar aus dem 1. Satz. Da  $\phi$  und  $\phi^*$  austauschbar sind, gilt:

$$\begin{aligned} & \iiint_R (\phi (\Delta \phi^*) - (\Delta \phi) \phi^*) dx dy dz \\ &= \iint_S \left( \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n^*} - \frac{\partial \phi}{\partial n^*} \phi^* \right) dS \end{aligned} \quad (\text{A.6-2}).$$

## 9.7 Das Produkt zweier zeitabhängiger komplexer Funktionen

Die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  haben die einfache Zeitabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$

$$F_{1,2} = \operatorname{Re} [ f_{1,2} \cdot e^{-i\omega t} ] \quad (\text{A.7-1}),$$

wobei  $f_{1,2}$  komplexe Funktionen bzw. komplexe Amplituden sind. Sind die Funktionen mit

$$F_{1,2} = f_{1,2} \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{A.7-2})$$

gegeben, so wird stillschweigend vereinbart, daß nur der Realteil der komplexen Funktion zu beachten ist. Es gilt auch

$$\overline{F_{1,2}} = \frac{1}{2} ( f_{1,2} \cdot e^{-i\omega t} + \overline{f_{1,2} \cdot e^{-i\omega t}} ) \quad (\text{A.7-3})$$

mit  $\overline{f_{1,2}}$ , der zu  $f_{1,2}$  konjugiert komplexen Funktion. Das Produkt der Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  ist dann

$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_2 &= \frac{1}{2} ( f_1 \cdot e^{-i\omega t} + \overline{f_1 \cdot e^{-i\omega t}} ) \\ &\cdot \frac{1}{2} ( f_2 \cdot e^{-i\omega t} + \overline{f_2 \cdot e^{-i\omega t}} ) \end{aligned} \quad (\text{A.7-4}).$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man

$$\begin{aligned} F_1 \cdot F_2 &= \frac{1}{4} ( f_1 \cdot f_2 e^{-2i\omega t} + \overline{f_1 \cdot f_2 e^{-2i\omega t}} ) \\ &+ \frac{1}{4} ( f_1 \cdot \overline{f_2} + \overline{f_1} \cdot f_2 ) \end{aligned} \quad (\text{A.7-5}),$$

oder

$$F_1 \cdot F_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [ f_1 f_2 e^{-2i\omega t} + \overline{f_1 f_2} ] \quad (\text{A.7-6}).$$

Der mittlere zeitunabhängige Anteil des Produktes ist dann

$$\begin{aligned} \overline{F_1 \cdot F_2}^t &= \frac{1}{4} ( f_1 \cdot \overline{f_2} + \overline{f_1} \cdot f_2 ) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} ( f_1 \cdot \overline{f_2} ) \end{aligned} \quad (\text{A.7-7}).$$

## 9.8 Oberflächenintegrale

Die Integration über eine Kontrollfläche  $S_R$ , wie sie bei der Kombination zweier Teilpotentiale der Randwertaufgabe auftritt, wird abgeleitet.

Die Kontrollfläche  $S_R$  ist eine Zylindermantelfläche mit einem Radius  $r = \text{konst.}$  und  $0 \leq z \leq d$ . Die komplexen Amplituden zweier Teilpotentiale liegen in der Form der Glgn (3.2-63), (3.2-64) und (3.2.69), (3.2.70) vor:

$$y_1 = c_1 \sum_{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} R_m^*(\alpha r) e^{im\psi} Z_{\alpha}(z) \quad (\text{A.8-1}),$$

$$y_2 = c_2 \sum_{\alpha} \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} F_{m^*\alpha} R_{m^*}(\alpha r) e^{im^*\psi} Z_{\alpha}(z) \quad (\text{A.8-2}).$$

$R_m^*(\alpha r)$ ,  $R_{m^*}(\alpha r)$  seien Besselfunktionen.

Es wird das Integral

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \iint_{S_R} \left( y_1 \frac{dy_2}{dn^*} - y_2 \frac{dy_1}{dn^*} \right) ds \\ &= \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^d \left( y_1 \frac{dy_2}{dr} - y_2 \frac{dy_1}{dr} \right) r dz d\psi \end{aligned} \quad (\text{A.8-3})$$

gebildet.

Wegen der Orthogonalität über  $z$  kann das Integral der Glg (A.8-3) mit der einfachen Summe über  $\alpha$

$$\bar{I} = \sum_{\alpha} \bar{I}_{\alpha} \quad (\text{A.8-4})$$

beschrieben werden.

Wegen der Orthogonalität über  $\psi$  liefern nur die Anteile mit  $m = -m^*$  einen Beitrag. Für  $\bar{I}_{\alpha}$  ergibt sich die einfache Summe über  $m$ :

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= c_1 \cdot c_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha} \left( R_m^* \frac{dR_{(-m)}}{dr} - R_{(-m)} \frac{dR_m^*}{dr} \right) \right. \\
&\quad \cdot r \left. \Big|_{r=\text{konst.}} \right\} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} d\vartheta \int_{z=0}^d Z_\alpha^2(z) dz \\
&= c_1 \cdot c_2 \cdot 2\pi \cdot d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha} \left( R_m^* \frac{dR_{(-m)}}{dr} - R_{(-m)} \frac{dR_m^*}{dr} \right) \cdot r
\end{aligned} \tag{A.8-5}.$$

Es gelten die Abhängigkeiten der Glg. (A.1-8) bis (A.1-11). Damit ist aber schon gezeigt, daß das Integral der Glg (A.8-5) zu Null wird, wenn es sich bei den Teilpotentialen und um zwei abstrahlende Potentiale ( $R_m^* = R_{-m} = K_m()$  bzw  $R_m^* = (-1)^m R_{-m} = H_m()$ ) oder um zwei einfallende Potentiale ( $R_m^* = R_{-m} = I_m()$  bzw.  $R_m^* = (-1)^m R_{-m} = J_m()$ ) handelt.

Bei der Kombination eines einfallenden Teilpotentials  $\mathcal{Y}_1$  mit einem abstrahlenden Teilpotential  $\mathcal{Y}_2$  ergibt sich mit den Glgn (A.1-8) bis (A.1-13) aus Glg (A.8-5)

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= c_1 c_2 \cdot 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha} (-1)^m (J_m H_m' - H_m J_m') \cdot \alpha r \\
&= c_1 c_2 \cdot 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha} (-1)^m \left( \frac{2i}{\pi \alpha r} \right) \alpha r \\
&= c_1 c_2 4i d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha}
\end{aligned} \tag{A.8-6},$$

bzw.

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= c_1 c_2 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha} (I_m K_m' - K_m I_m') \alpha r \\
&= -c_1 c_2 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} F_{(-m)\alpha}
\end{aligned} \tag{A.8-7}.$$

Es werden noch die Integrale der Kombination mit dem konjugiert komplexen Potential  $\overline{\psi_2}$  benötigt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 I^* &= \iint_{S_R} \left( \psi_1 \frac{d\overline{\psi_2}}{dn^*} - \overline{\psi_2} \frac{d\psi_1}{dn^*} \right) ds \\
 &= \int_{\nu=0}^{2\pi} \int_{z=0}^d \left( \psi_1 \frac{d\overline{\psi_2}}{dr} - \overline{\psi_2} \frac{d\psi_1}{dr} \right) r dz d\nu \quad (\text{A.8-8}).
 \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität über  $z$  kann für das Integral der Glg (A.8-8) wieder die Summe über  $\alpha$

$$I^* = \sum_{\alpha} I_{\alpha}^* \quad (\text{A.8-9})$$

gebildet werden.

Die Integrale  $I_{\alpha}^*$  sind wieder einfache Summen über  $m$  ( $im = -i m^* = i m^*$ ):

$$I_{\alpha}^* = c_1 \cdot \overline{c_2} \cdot 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} \overline{F_{m\alpha}} \left( R_m^* \frac{dR_m}{dr} - \overline{R_m} \frac{dR_m^*}{dr} \right) \cdot r \quad (\text{A.8-10}).$$

Handelt es sich bei den Teilpotentialen  $\psi_1$  und  $\overline{\psi_2}$  um die Teilpotentiale zweier einfallender Wellensysteme, so sind die Funktionen  $R_m^* = R_m = I_m()$  bzw.  $R_m^* = R_m = J_m()$  reell.

Es gilt dann:

$$\overline{R_m} = R_m ; \quad \overline{\frac{dR_m}{dr}} = \frac{dR_m}{dr} \quad (\text{A.8-11}).$$

für reelle  $R_m$

Die Integrale  $I_{\alpha}^*$  werden zu Null.

Handelt es sich bei den Funktionen  $y_1$  und  $\overline{y_2}$  um die Teilpotentiale zweier abstrahlender Wellensysteme, so gilt die Glg (A.8-11) für die reellen Funktionen  $R_m = K_m()$ , die mit den reellen  $\alpha'$  verbunden sind. Das Integral der Glg (A.8-10) wird Null. Für  $\alpha_0 = -i\chi$  ist  $R_m = R_m^* = H_m()$  zu setzen. Aus Glg (A.8-10) ergibt sich mit Glg (A.1-14)

$$\begin{aligned} I_\chi^* &= c_1 \overline{c_2} \cdot 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\chi} \overline{F_{m\chi}} \left( -\frac{4i}{\pi k r} \cdot \chi \right) \cdot r \\ &= -i c_1 \overline{c_2} 8d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\chi} \overline{F_{m\chi}} \end{aligned} \quad (\text{A.8-12}).$$

Es sind noch die Integrale der Kombination eines einfallenden Wellensystems  $y_1$  mit einem abstrahlenden System  $\overline{y_2}$  zu bilden. Für die reellen Funktionen  $R_m = K_m()$ ;  $R_m^* = I_m()$  ( $\alpha$  reell) folgt aus Glg (A.8-10) mit Glg (A.1-12)

$$\begin{aligned} I_\alpha^* &= c_1 \overline{c_2} 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} \overline{F_{m\alpha}} \left( -\frac{1}{\alpha r} \alpha \right) r \\ &= -c_1 \overline{c_2} 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} \overline{F_{m\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{A.8-13}),$$

und für  $R_m = H_m()$ ;  $R_m^* = J_m()$  mit Glg (A.1-13)

$$\begin{aligned} I_\chi^* &= c_1 \overline{c_2} \cdot 2\pi d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\chi} \overline{F_{m\chi}} \left( -\frac{2i}{\pi k r} \cdot \chi \right) r \\ &= -i c_1 \overline{c_2} 4d \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\chi} \overline{F_{m\chi}} \end{aligned} \quad (\text{A.8-14}).$$

### 9.9 Integrale zur Berechnung der Driftkräfte

Betrachtet wird das Teilintegral  $f_z$  ( ) der Glg (5.-27). Wegen der Orthogonalität über  $z$  läßt sich das Integral wieder mit der einfachen Summe über  $\alpha$

$$f_z (y_7^{*a}, \overline{y_7^a}) = \sum_{\alpha} f_{z\alpha} \quad (\text{A.9-1})$$

beschreiben.

Es wird für die Potentiale des Diffraktionsproblems die vereinfachte Schreibweise der Glgn (A.8-1) und (A.8-2) benutzt mit  $R_m^*(kr) = J_m$  ( ) bzw.  $R_m^*(\alpha r) = I_m$  ( ) und  $R_{m^*}(kr) = H_m$  ( ) bzw.  $R_{m^*}(\alpha r) = K_m$  ( ).

Es wird das erste Glied (Glg (A.9-1)) der Summe über  $\alpha$  mit  $\alpha_0 = -ik$  abgeleitet. Nach Glg (5.-26) gilt dann:

$$\begin{aligned} f_{z\alpha} &= c_1 \overline{c_2} \int_{z=0}^d Z_{\alpha}^2(z) dz \cdot \\ &\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \left\{ \left[ +x^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} J_m(xr) e^{im\vartheta} \cdot \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} \overline{F_{m^*\alpha} H_{m^*}(xr) e^{im^*\vartheta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} \frac{dJ_m(xr)}{dr} e^{im\vartheta} \cdot \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} \overline{F_{m^*\alpha} \frac{dH_{m^*}(xr)}{dr} e^{im^*\vartheta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} J_m(xr) \frac{de^{im\vartheta}}{d\vartheta} \cdot \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} \overline{F_{m^*\alpha} H_{m^*}(xr) \frac{de^{im^*\vartheta}}{d\vartheta}} \right] \cdot \cos \vartheta \right. \\ &\quad \left. - \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha} \frac{dJ_m(xr)}{dr} e^{im\vartheta} \cdot \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \overline{F_{m^*\alpha} H_{m^*}(xr) \frac{de^{im^*\vartheta}}{d\vartheta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} G_{m\alpha} J_m(xr) \frac{de^{im\vartheta}}{d\vartheta} \cdot \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} \overline{F_{m^*\alpha} \frac{dH_{m^*}(xr)}{dr} e^{im^*\vartheta}} \right] \sin \vartheta \right\} \\ &\quad \cdot r d\vartheta \end{aligned} \quad (\text{A.9-2}).$$

Die Konstante  $c_1 \cdot \overline{c_2}$  ist beim Diffraktionsproblem reell. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \overline{c_2} \cdot \int_{z=0}^d Z_x^2(z) dz &= (-i\omega \frac{H}{2} d) \overline{(-i\omega \frac{H}{2} d)} \cdot d \\ &= \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^3 \end{aligned} \quad (\text{A.9-3}).$$

Die Funktionen der Richtungskosinus  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$  in Glg (A.9-2) werden mit Hilfe der komplexen Winkelfunktionen  $e^{+i\vartheta}$  und  $e^{-i\vartheta}$  ersetzt.

Wegen der Orthogonalität über  $\vartheta$  ergeben sich bei der Integration zwei einfache Summen über  $m$  mit  $m - m^* + 1 = 0$  und  $m - m^* - 1 = 0$ , d.h.  $m^* = m + 1$  bzw.  $m = m^* + 1$ .

Es folgt aus Glg (A.9-2)

$$\begin{aligned} f_{2x} &= \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^3 \frac{1}{2} \cdot 2\pi. \\ &\left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m,x} \overline{F_{m+1,x}} \cdot \left[ x^2 J_m(\cdot) \overline{H_{m+1}(\cdot)} \right. \right. \\ &\quad + x^2 J_m'(\cdot) \overline{H_{m+1}'(\cdot)} - \frac{m}{r} J_m(\cdot) \left(\frac{m+1}{r}\right) \overline{H_{m+1}(\cdot)} \\ &\quad \left. \left. + x J_m'(\cdot) \left(\frac{m+1}{r}\right) \overline{H_{m+1}(\cdot)} - \frac{m}{r} J_m(\cdot) x \overline{H_{m+1}'(\cdot)} \right] \cdot r \right. \\ &\quad \left. \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} G_{m^*,x} \overline{F_{m^*,x}} \cdot \left[ x^2 J_{m^*}(\cdot) \overline{H_{m^*}(\cdot)} \right. \right. \\ &\quad + x^2 J_{m^*}'(\cdot) \overline{H_{m^*}'(\cdot)} - \left(\frac{m^*+1}{r}\right) J_{m^*}(\cdot) \frac{m^*}{r} \overline{H_{m^*}(\cdot)} \\ &\quad \left. \left. - x J_{m^*}'(\cdot) \left(\frac{m^*}{r}\right) \overline{H_{m^*}(\cdot)} + \left(\frac{m^*+1}{r}\right) J_{m^*}(\cdot) x \overline{H_{m^*}'(\cdot)} \right] \cdot r \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9-4}).$$

Die erste Summe über  $m$  ist mit  $e^{+i\vartheta}$ , die zweite Summe über  $m^*$  ist mit  $e^{-i\vartheta}$  der Funktionen der Richtungskosinus verbunden.

Die Glieder in der ersten Summe der Glg (A.9-4) werden unter Beachtung der Rekursionsformeln (Gln (A.2-1), (A.2-2))

zusammengefaßt:

2. Glied + 4. Glied ((A.2-1) + (A.2-2))

$$\begin{aligned} & \times J_m'(\lambda) \left\{ \times \overline{H_{m+1}'(\lambda)} + \left(\frac{m+1}{r}\right) \overline{H_{m+1}(\lambda)} \right\} \\ & = \times J_m'(\lambda) \left\{ \times \overline{H_m(\lambda)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9-5}),$$

3. Glied + 5. Glied

$$\begin{aligned} & - \frac{m}{r} J_m(\lambda) \left\{ \left(\frac{m+1}{r}\right) \overline{H_{m+1}(\lambda)} + \times \overline{H_{m+1}'(\lambda)} \right\} \\ & = - \frac{m}{r} J_m(\lambda) \left\{ \times \overline{H_m(\lambda)} \right\} \\ & = - \times J_m(\lambda) \left\{ \frac{m}{r} \overline{H_m(\lambda)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9-6}),$$

1. Glied + (A.9-6) ((A.2-1) - (A.2-2))

$$\begin{aligned} & \times J_m(\lambda) \left\{ \times \overline{H_{m+1}(\lambda)} - \frac{m}{r} \overline{H_m(\lambda)} \right\} \\ & = \times J_m(\lambda) \left\{ - \times \overline{H_m'(\lambda)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9-7}).$$

Mit den Glgn (A.9-5) und (A.9-7) erhält man für die erste Summe der Glg (A.9-4)

$$S_{1\lambda} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\lambda} \overline{F_{m+1,\lambda}} \cdot \lambda^2 \left\{ J_m'(\lambda) \overline{H_m(\lambda)} - J_m(\lambda) \overline{H_m'(\lambda)} \right\} \cdot r \quad (\text{A.9-8}).$$

Die Zusammenfassung der Glieder der zweiten Summe erfolgt nach demselben Muster für die Funktionen  $J_{m^*+1}(\lambda)$ .

((2. + 5. Glied), (3. + 4. Glied, + 1. Glied.)

Es folgt für die zweite Summe

$$S_{2\lambda} = \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} G_{m^*+1,\lambda} \overline{F_{m^*,\lambda}} \cdot \lambda^2 \left\{ J_{m^*+1}(\lambda) \overline{H_{m^*+1}'(\lambda)} - \overline{H_{m^*+1}(\lambda)} J_{m^*+1}'(\lambda) \right\} \cdot r \quad (\text{A.9-9}).$$

Damit folgt aus Glg (A.9-4) mit Glg (A.1-13)

$$f_{2x} = \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^3 \cdot \pi \cdot \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{mx} \overline{F_{m+1,x}} \cdot x \left[ x r \left( \frac{+2i}{\pi x r} \right) \right] + \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} G_{m^*+1,x} \overline{F_{m^*x}} \cdot x \left[ x r \left( \frac{-2i}{\pi x r} \right) \right] \right\} \quad (\text{A.9-10}).$$

Glg (A.9-10) wird zusammengefaßt, und  $m^*$  wird durch  $m$  ersetzt:

$$f_{2x} = \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2 (x d) 2i \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [G_{mx} \overline{F_{m+1,x}} - G_{m+1,x} \overline{F_{mx}}] \quad (\text{A.9-11}).$$

Die Funktion  $f_{3x}$  ist die konjugiert Komplexe der Funktion  $f_{2x}$ , es folgt aus (A.9-11)

$$f_{3x} = \overline{f_{2x}} = \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2 (x d) \cdot 2i \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [-\overline{G_{mx}} \overline{F_{m+1,x}} + \overline{G_{m+1,x}} \overline{F_{mx}}] \quad (\text{A.9-12}).$$

Es gelten dieselben Rekursionsformeln für die Funktionen  $J_m()$  und  $H_m()$ , sowie  $\overline{H_m()}$ . Das Integral  $f_{1x}$  erhält man, indem man in den Glgn (A.9-2) bis (A.9-9) die Funktionen  $\overline{H_m()}$  durch  $\overline{J_m()}$  und die  $\overline{F_m}$  durch die  $\overline{G_m}$  ersetzt. Die Funktionen  $J_m()$  sind reell; damit werden die Summen der Glgn (A.9-8), (A.9-9) zu Null:

$$f_{1x} = 0 \quad (\text{A.9-13}).$$

Weiter erhält man die  $f_{4x}$ , indem man in den obigen Gleichungen die Funktionen  $J_m()$  durch  $H_m()$  und die  $G_m$  durch die  $F_m$  ersetzt.

Unter Beachtung der Glg (A.1-14) erhält man so aus den

Gln (A.9-8) bis (A.9-11):

$$f_{4\alpha} = \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2(\alpha d) 4i \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [F_{m\alpha} \overline{F_{m+1,\alpha}} - F_{m+1,\alpha} \overline{F_{m\alpha}}] \quad (\text{A.9-14}).$$

Die Rekursionsformeln (Gln (A.2-1), (A.2-2)) gelten auch für die  $J_m()$  und  $H_m()$  bzw.  $\overline{H_m()}$  mit imaginärem Argument (vgl. Gln (A.1-6), (A.1-7)). Man kann daraus sofort schließen, daß die Integrale  $f_{1\alpha'}$  bzw.  $f_{4\alpha'}$  für die reellen Funktionen  $I_m()$  bzw.  $K_m()$  zu Null werden:

$$f_{1\alpha'} = f_{4\alpha'} = 0 \quad (\text{A.9-15}).$$

für reelle  $\alpha$

Es müssen noch die Integrale  $f_{2\alpha'}$  bzw.  $f_{3\alpha'}$  für reelle  $\alpha$  untersucht werden.

Es ist nicht ratsam die mit Glg (A.9-2) durchgeführte Ableitung mit imaginärem Argument durchzuführen, da diese Ableitung dann sehr bald unübersichtlich wird.

Die Ableitung erfolgt hier mit den reellen Funktionen  $I_m()$ ,  $K_m()$ . Man erhält aus Glg (A.9-4) die entsprechende Formel für  $f_{2\alpha'}$ , wenn man  $\alpha$  durch  $\alpha'$ , die Funktionen  $J_m()$  durch  $I_m()$  und die  $H_m()$  durch  $K_m()$  ersetzt. Zu beachten ist, daß jeweils das erste Glied in den Summen wegen

$$\frac{d^2 Z_{\alpha'}(z)}{dz^2} = -\alpha'^2 Z_{\alpha'}(z) \quad \text{für reelle } \alpha$$

negativ wird.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 f_{2\alpha'} &= \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^3 \cdot \pi \\
 &\cdot \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha'} \overline{F_{m+1,\alpha'}} \left[ -\alpha'^2 I_m(\cdot) K_{m+1}(\cdot) \right. \right. \\
 &\quad + \alpha'^2 I_m'(\cdot) K_{m+1}'(\cdot) - \frac{m}{r} I_m(\cdot) \left(\frac{m+1}{r}\right) K_{m+1}(\cdot) \\
 &\quad \left. \left. + \alpha' I_m(\cdot) \left(\frac{m+1}{r}\right) K_{m+1}'(\cdot) - \frac{m}{r} I_m(\cdot) \alpha' K_{m+1}'(\cdot) \right] \cdot r \right. \\
 &+ \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} G_{m^*+1,\alpha'} \overline{F_{m^*+1,\alpha'}} \left[ -\alpha'^2 I_{m^*+1}(\cdot) K_{m^*}(\cdot) \right. \\
 &\quad + \alpha'^2 I_{m^*+1}'(\cdot) K_{m^*}'(\cdot) - \left(\frac{m^*+1}{r}\right) I_{m^*+1}(\cdot) \frac{m^*}{r} K_{m^*}(\cdot) \\
 &\quad \left. \left. - \alpha' I_{m^*+1}'(\cdot) \left(\frac{m}{r}\right) K_{m^*}(\cdot) + \left(\frac{m^*+1}{r}\right) I_{m^*+1}(\cdot) \alpha' K_{m^*}'(\cdot) \right] \cdot r \right\}
 \end{aligned}$$

(A.9-16).

Die Zusammenfassung der Glieder in der ersten Summe der Glg (A.9-16) erfolgt wieder nach dem Muster der Glgn (A.9-5) bis (A.9-7) hier mit den Rekursionsformeln der Glgn (A.2-5), (A.2-6).

Es ergibt sich daraus

$$S_{1\alpha'} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha'} \overline{F_{m+1,\alpha'}} \alpha'^2 \left\{ -I_m'(\cdot) K_m(\cdot) + I_m(\cdot) K_m'(\cdot) \right\} \cdot r$$

(A.9-17).

Die Glieder in der zweiten Summe der Glg (A.9-16) werden analog zur Summe  $S_{2\alpha}$  (Glg (A.9-9)), hier mit den Rekursionsformeln der Glgn (A.2-3), (A.2-4), zusammengefaßt.

Es ergibt sich daraus

$$S_{2\alpha'} = \sum_{m^*=-\infty}^{+\infty} G_{m^*+1,\alpha'} \overline{F_{m^*+1,\alpha'}} \alpha'^2 \left\{ K_m'(\cdot) I_m(\cdot) - K_m(\cdot) I_m'(\cdot) \right\} \cdot r$$

(A.9-18).

Mit Glg (A.1-12) folgt

$$S_{1\alpha'} = -\alpha' \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m\alpha'} \overline{F_{m+1,\alpha'}} \quad (\text{A.9-19}),$$

und

$$S_{2\alpha'} = -\alpha' \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{m+1,\alpha'} \overline{F_{m\alpha'}} \quad (\text{A.9-20}).$$

Für  $f_{2\alpha'}$  folgt dann

$$f_{2\alpha'} = \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2 \alpha' d \cdot \tilde{\pi}.$$

$$(-1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [G_{m\alpha'} \overline{F_{m+1,\alpha'}} + G_{m+1,\alpha'} \overline{F_{m\alpha'}}] \quad (\text{A.9-21}),$$

und für  $f_{3\alpha'}$

$$f_{3\alpha'} = \overline{f_{2\alpha'}} = \omega^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 d^2 \alpha' d \cdot \tilde{\pi}.$$

$$(-1) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\overline{G_{m\alpha'}} \overline{F_{m+1,\alpha'}} + \overline{G_{m+1,\alpha'}} \overline{F_{m\alpha'}}] \quad (\text{A.9-22}).$$



## 10. ABBILDUNGEN

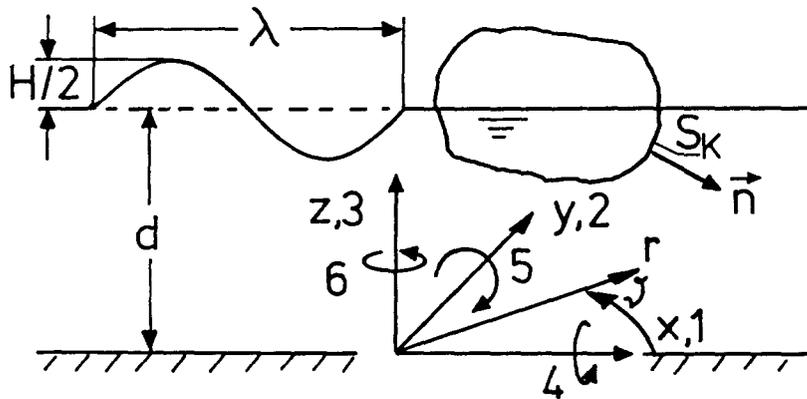


Abb. 1: Körper in der Welle. Koordinatensystem; Definition der Bewegungsrichtungen

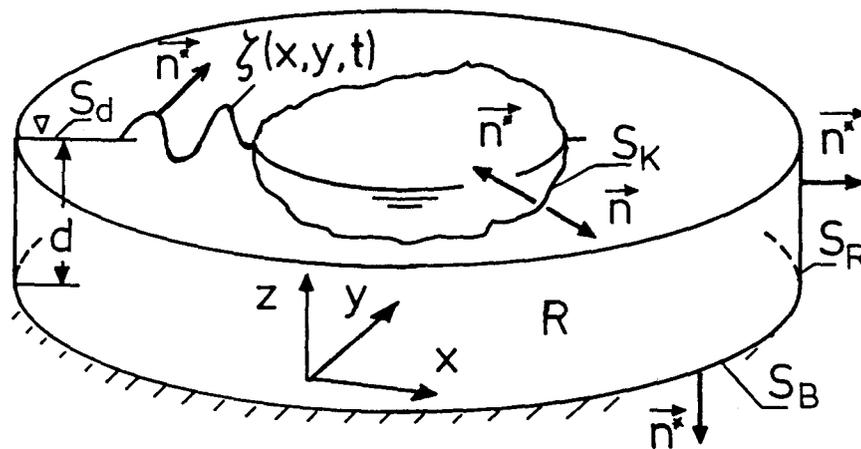


Abb. 2: Bezeichnungen im Zusammenhang mit der Betrachtung des Gebietes  $R$  der Flüssigkeit

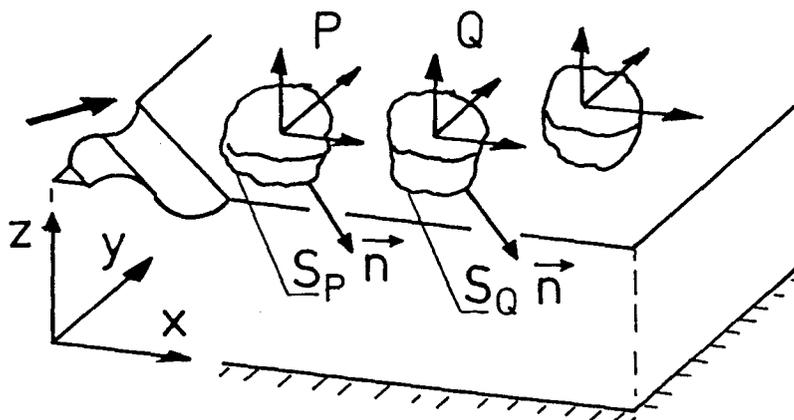


Abb. 3: Mehrere Körper unter der Wirkung einer Elementarwelle

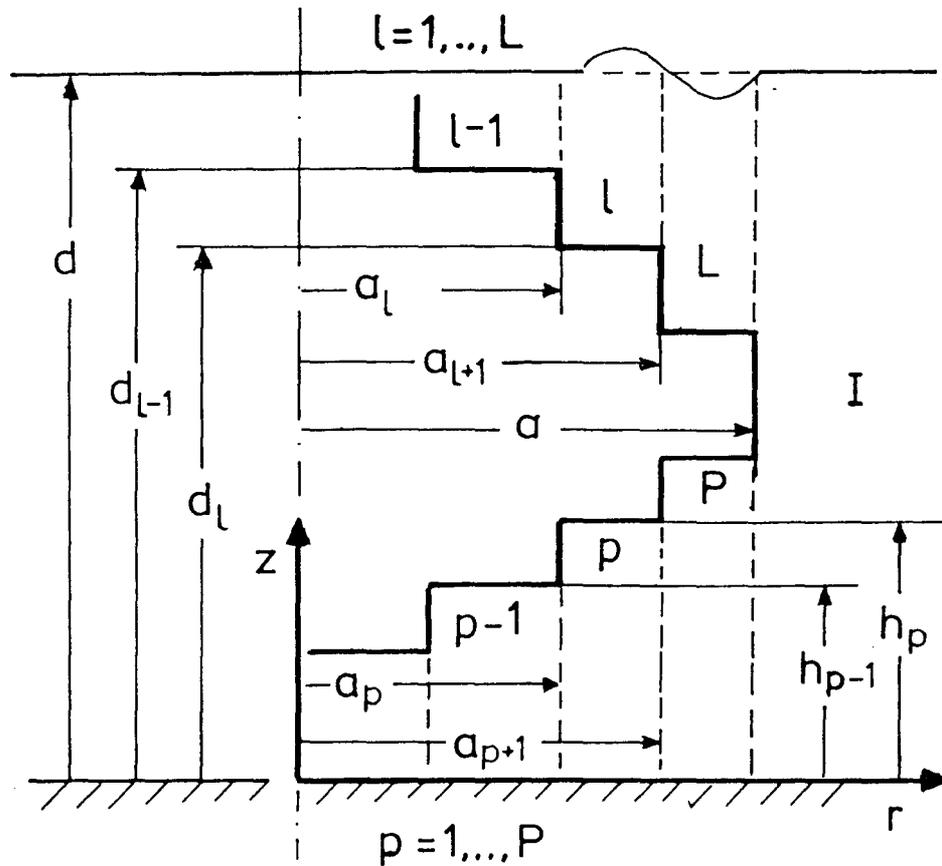
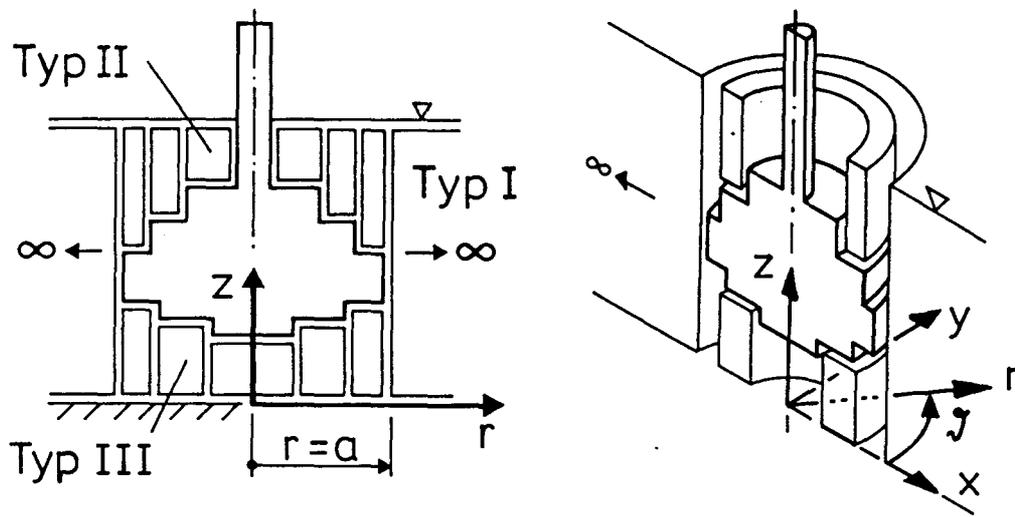


Abb. 4: Diskretisierung durch Makroelemente

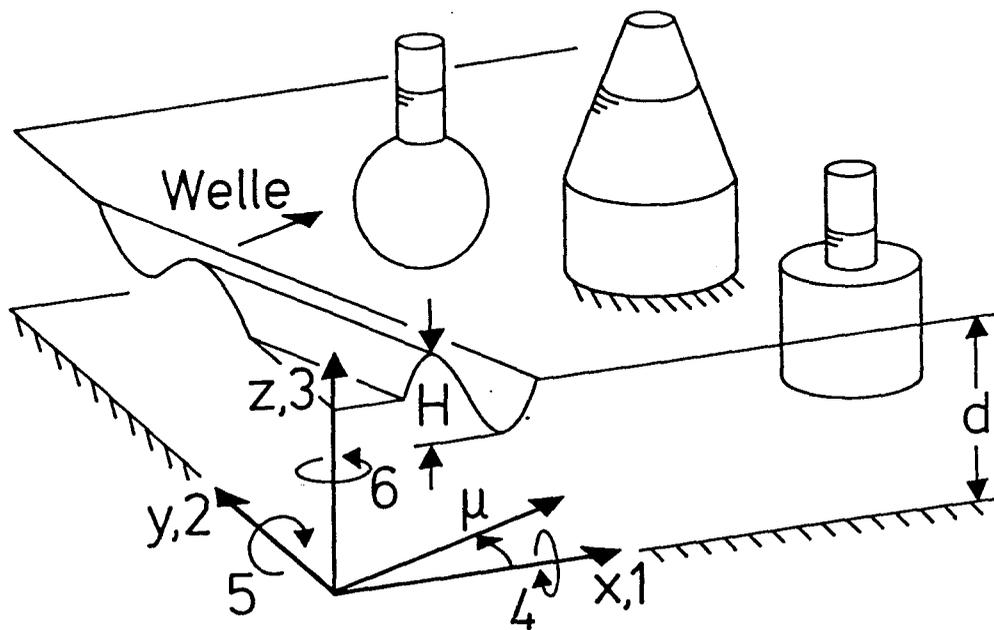


Abb. 5: Anordnung mehrerer rotationssymmetrischer Körper unter der Wirkung einer Welle

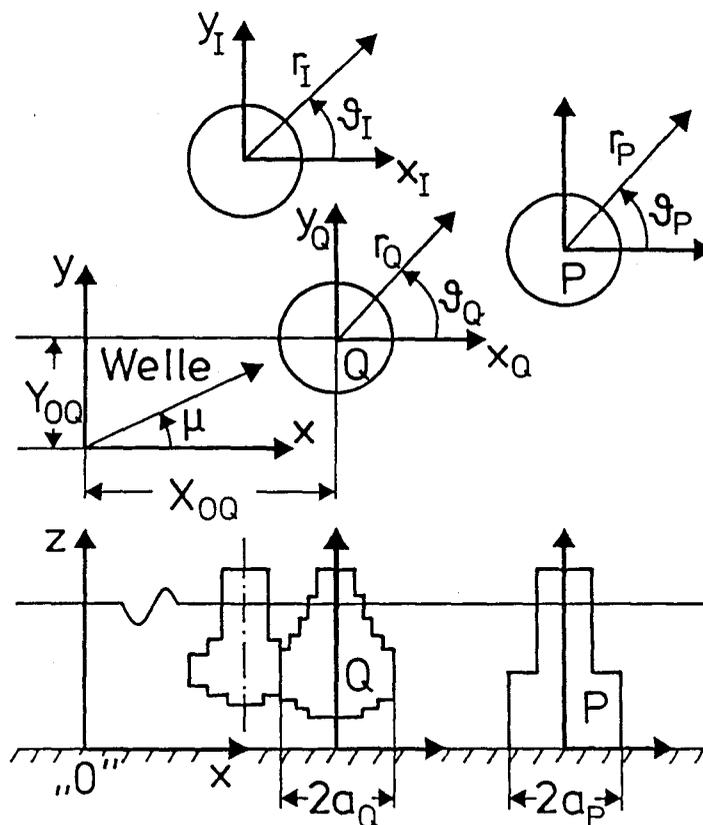


Abb. 6: Definitionsskizze; Bezeichnungen

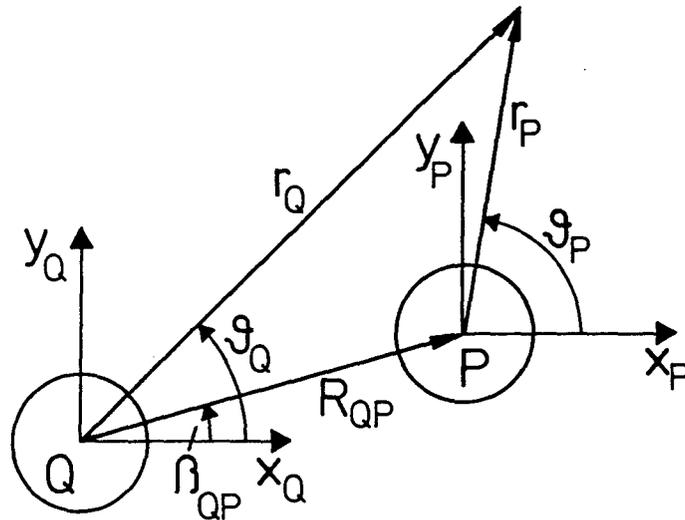


Abb. 7: Bezeichnungen an zwei benachbarten Körpern P und Q zu den Additionstheoremen der Besselfunktionen

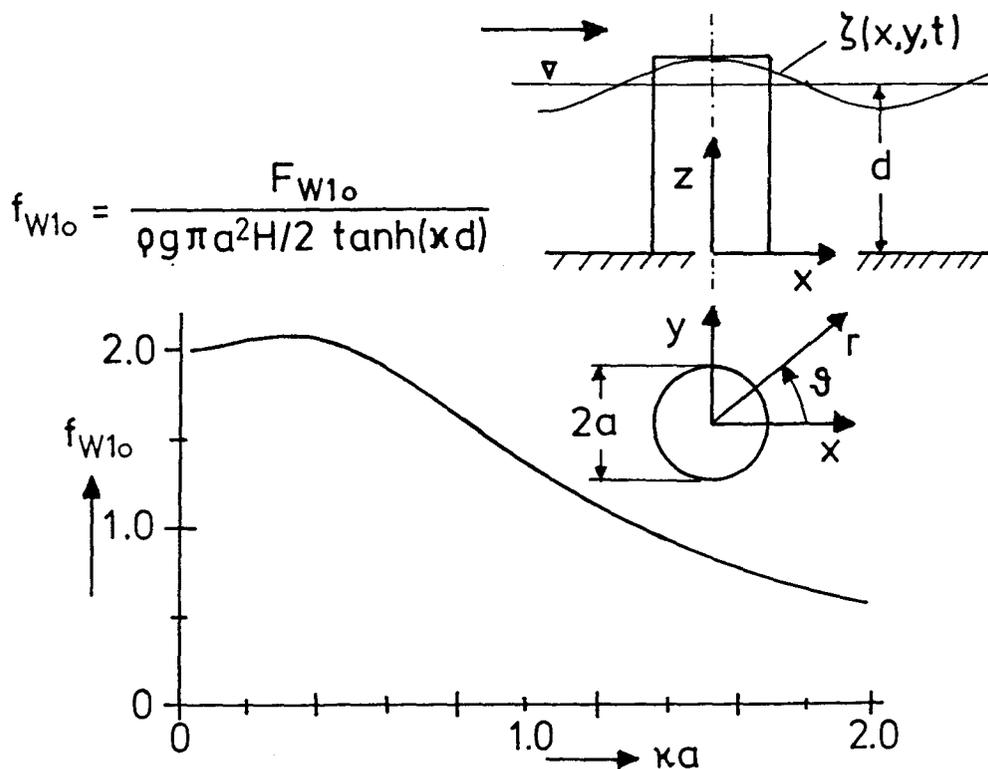
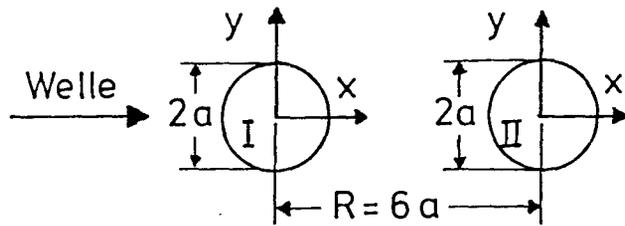


Abb. 8: Einfacher auf dem Boden stehender Zylinder. Horizontalkraft nach Mc Camy und Fuchs in Abhängigkeit von der Wellenzahl



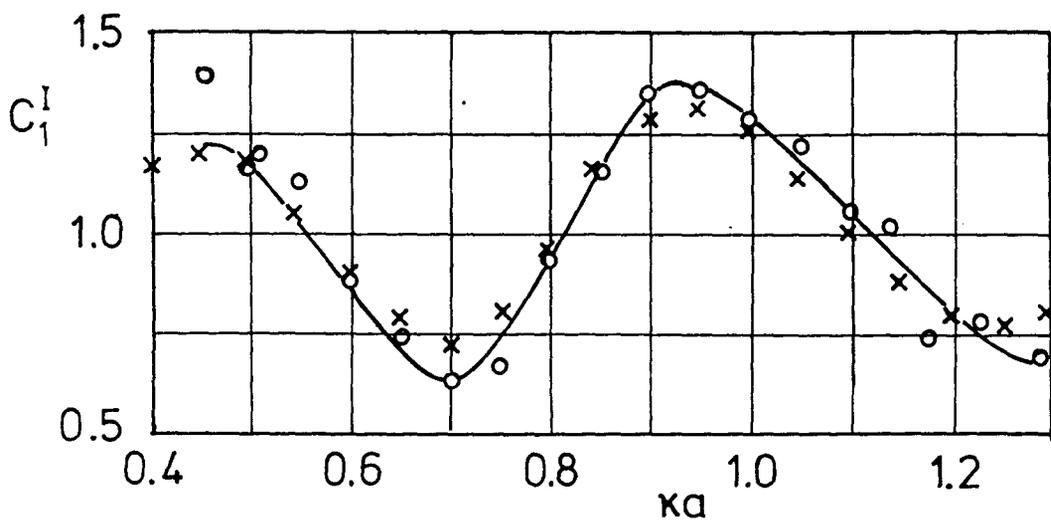
KÖRPER I

v. Oortmessen DIFRAC-M

$$C_1^Q = F_{W1_0}^Q / F_{W1_0}^E$$

Rechnung : ————— x

Experiment : o



KÖRPER II Rechnung DIFRAC-M -----

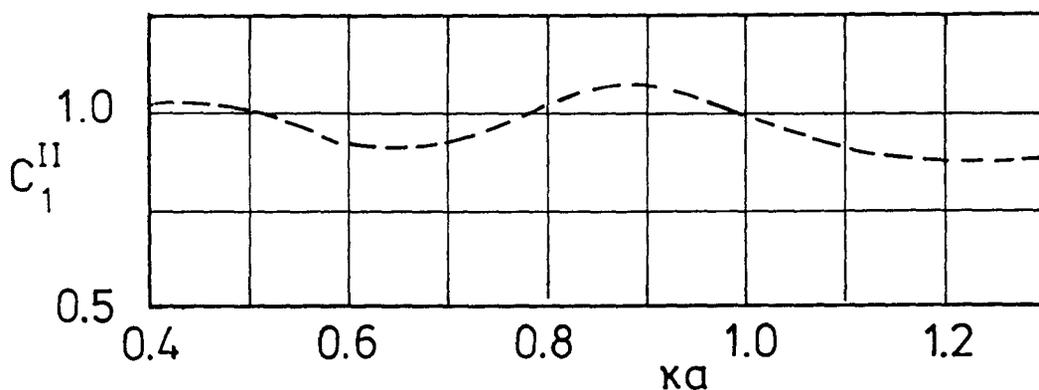


Abb. 9 a,b: Zwei auf dem Boden stehende Zylinder.

Wellenkraft in der horizontalen Richtung auf den Zylinder I bzw. II bezogen auf die Kraft, die auf einen einzelnen Zylinder wirkt

Zylinder Q	Ohkusu	DIFRAC-M
Q = I	—	+
Q = II	- - - -	x
einzelner Zylinder	.....	

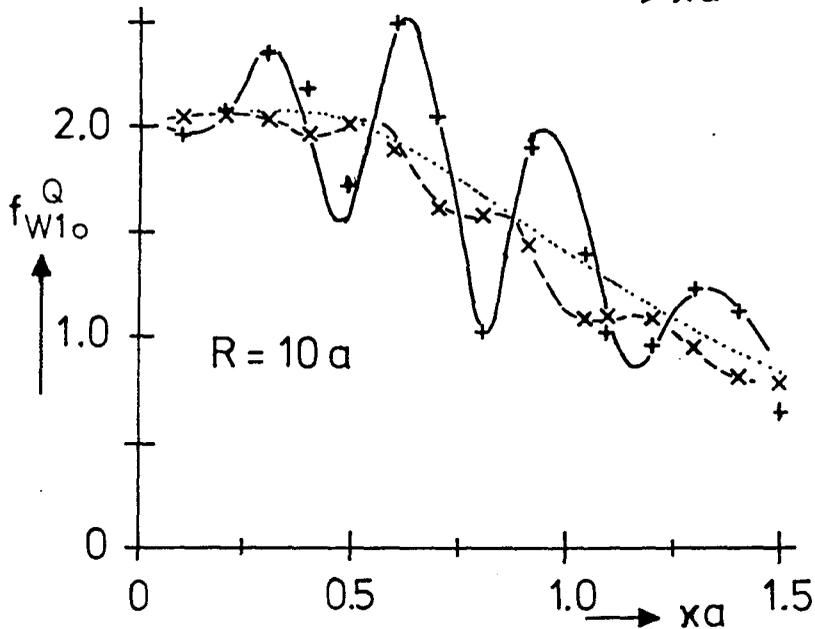
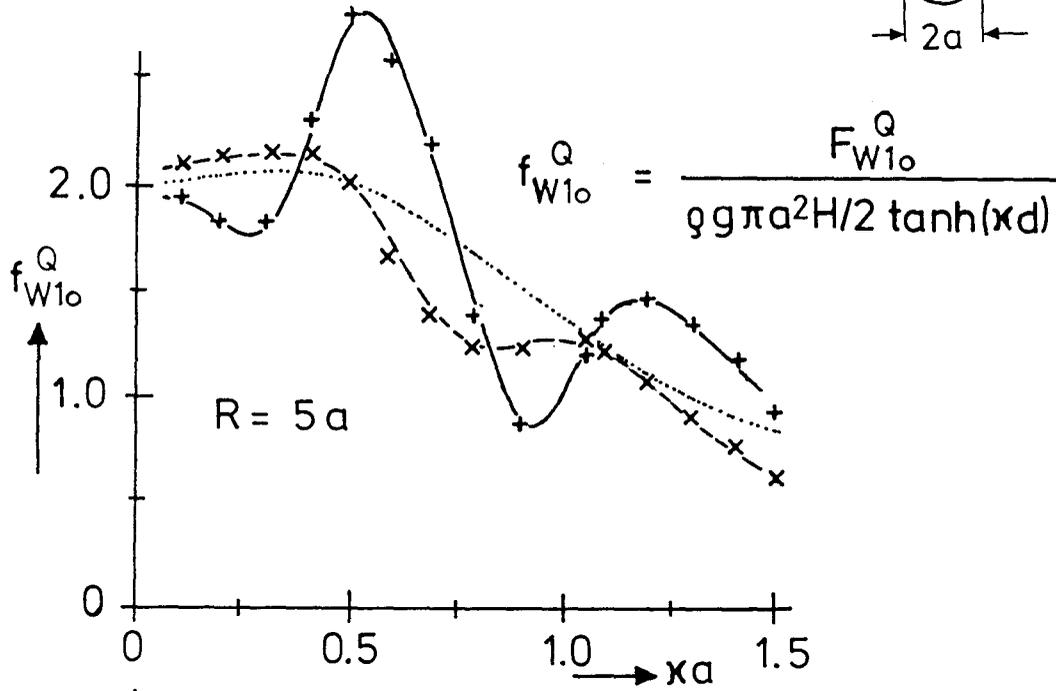
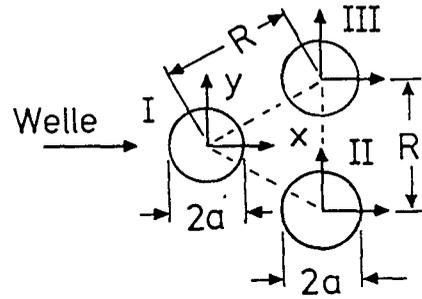
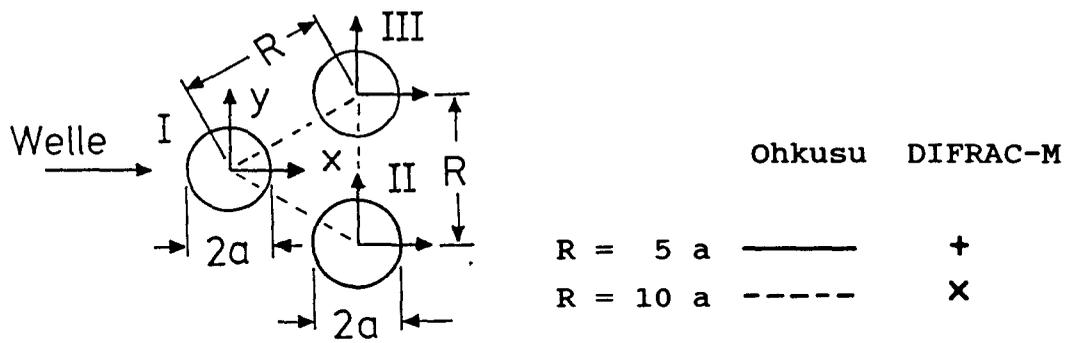


Abb. 10 a,b: Drei auf dem Boden stehende Zylinder. Wellenkräfte in x-Richtung auf die Zylinder für zwei Abstände in Abhängigkeit von der Wellenzahl



$$f_{W2o}^{II} = \frac{F_{W2o}^{II}}{g g \pi a^2 H / 2 \tanh(\chi d)}$$

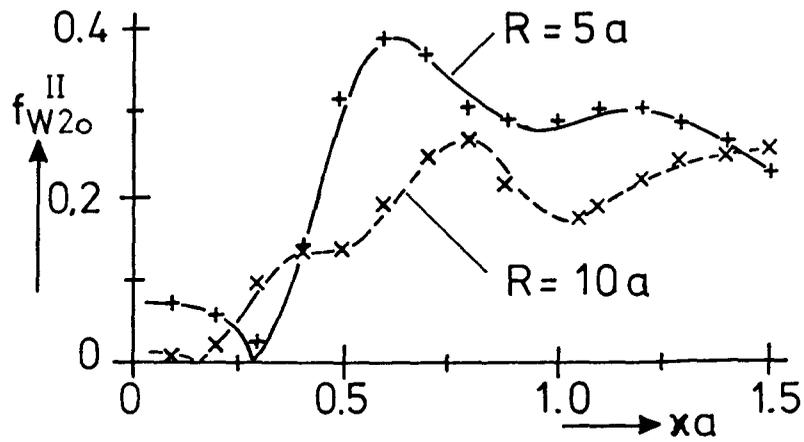


Abb. 10 c: Drei auf dem Boden stehende Zylinder.  
Wellenkräfte in y-Richtung auf den Zylinder II  
für zwei Abstände R in Abhängigkeit von der  
Wellenzahl

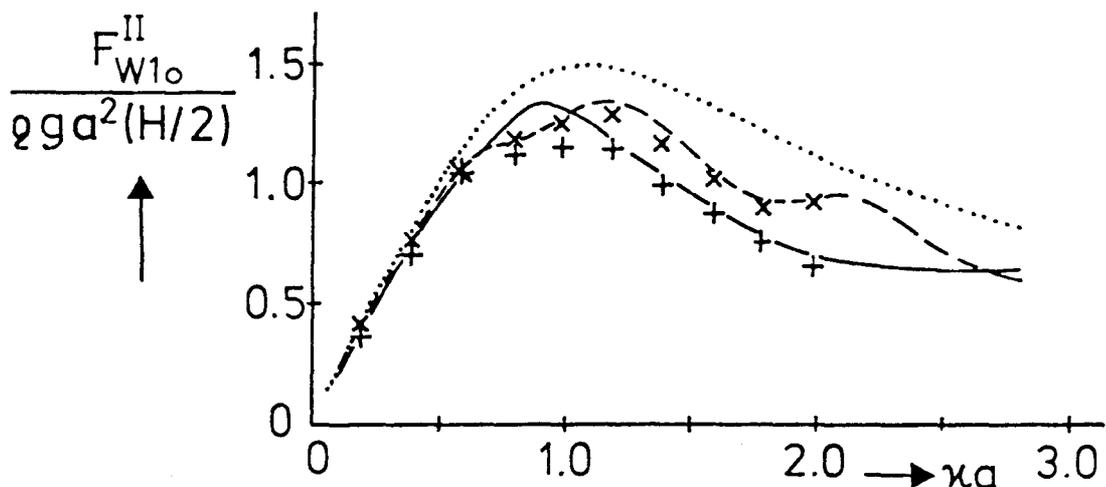
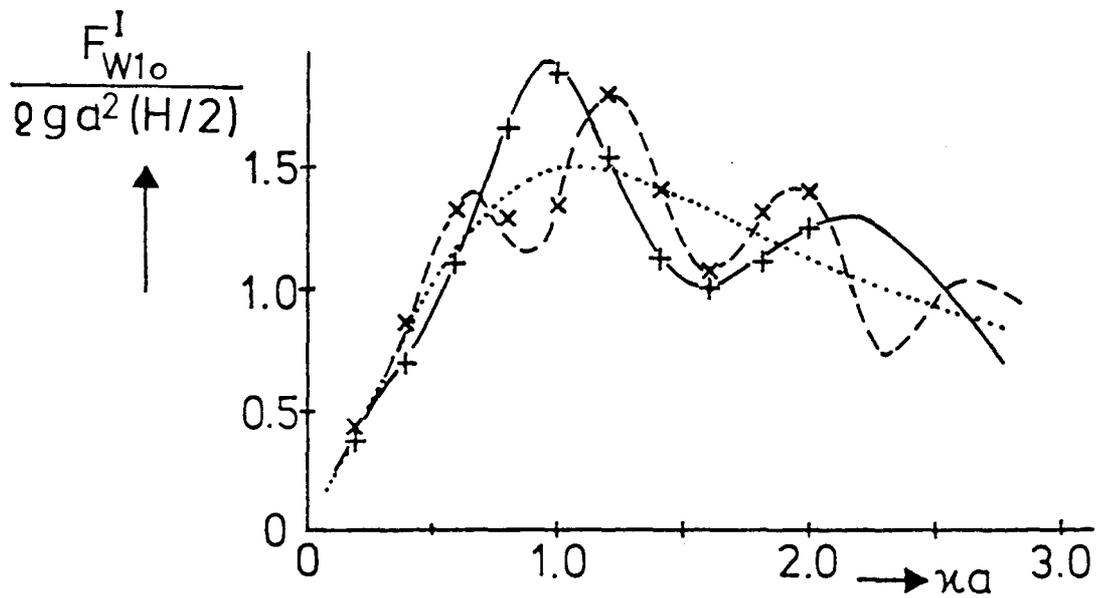
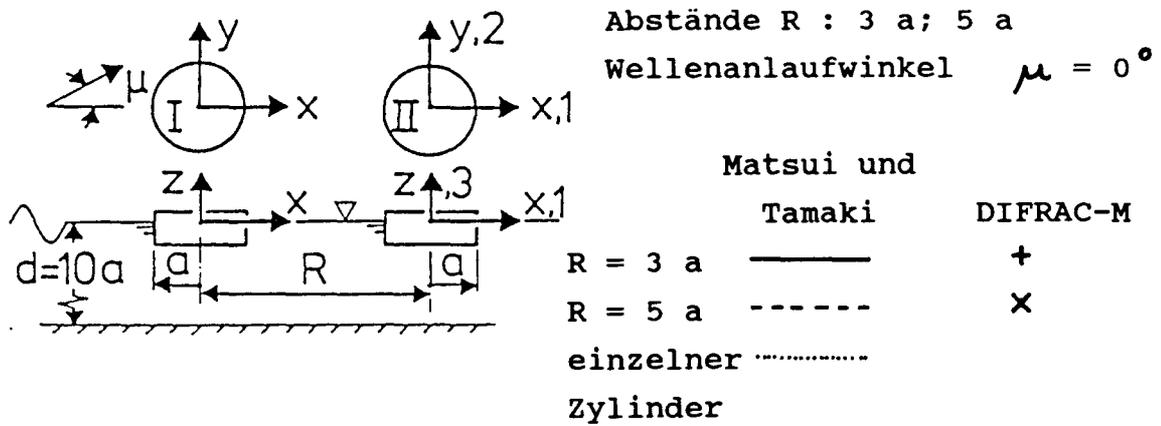


Abb. 11 a: Zwei schwimmende Zylinder.  
Wellenkräfte in der horizontalen Richtung in  
Abhängigkeit von der Wellenzahl

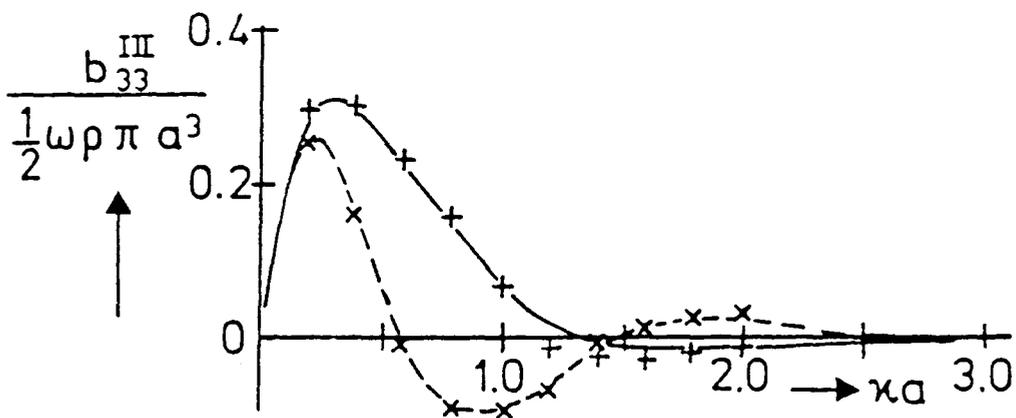
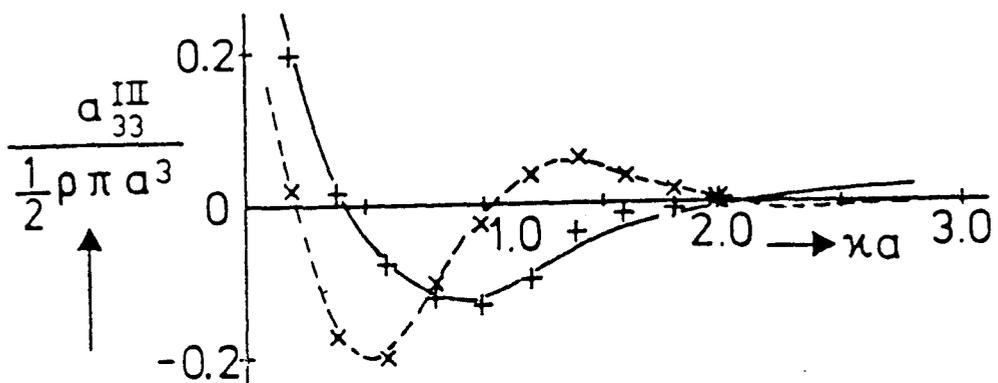
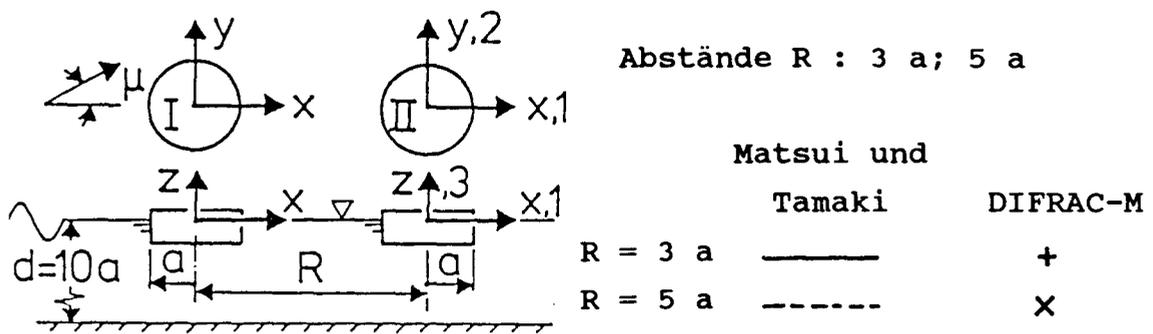
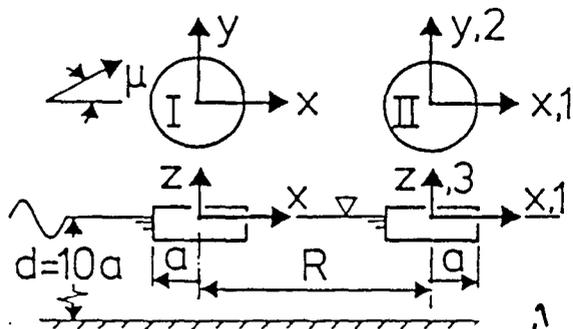


Abb. 11 b: Zwei schwimmende Zylinder.  
Koeffizienten der hydrodynamischen Masse und  
der Potentialdämpfung der gegenseitigen  
Beeinflussung



Abstände  $R$  :  $3 a$ ;  $5 a$

Masse eines Zylinders  $0.5 \rho \pi a^3$

Massenträgheitsmoment  $0.75 \rho \pi a^5$

Gewichtsschwerpunkt  $z^m = 0$

Wellenanlaufwinkel  $\mu = 0^\circ$

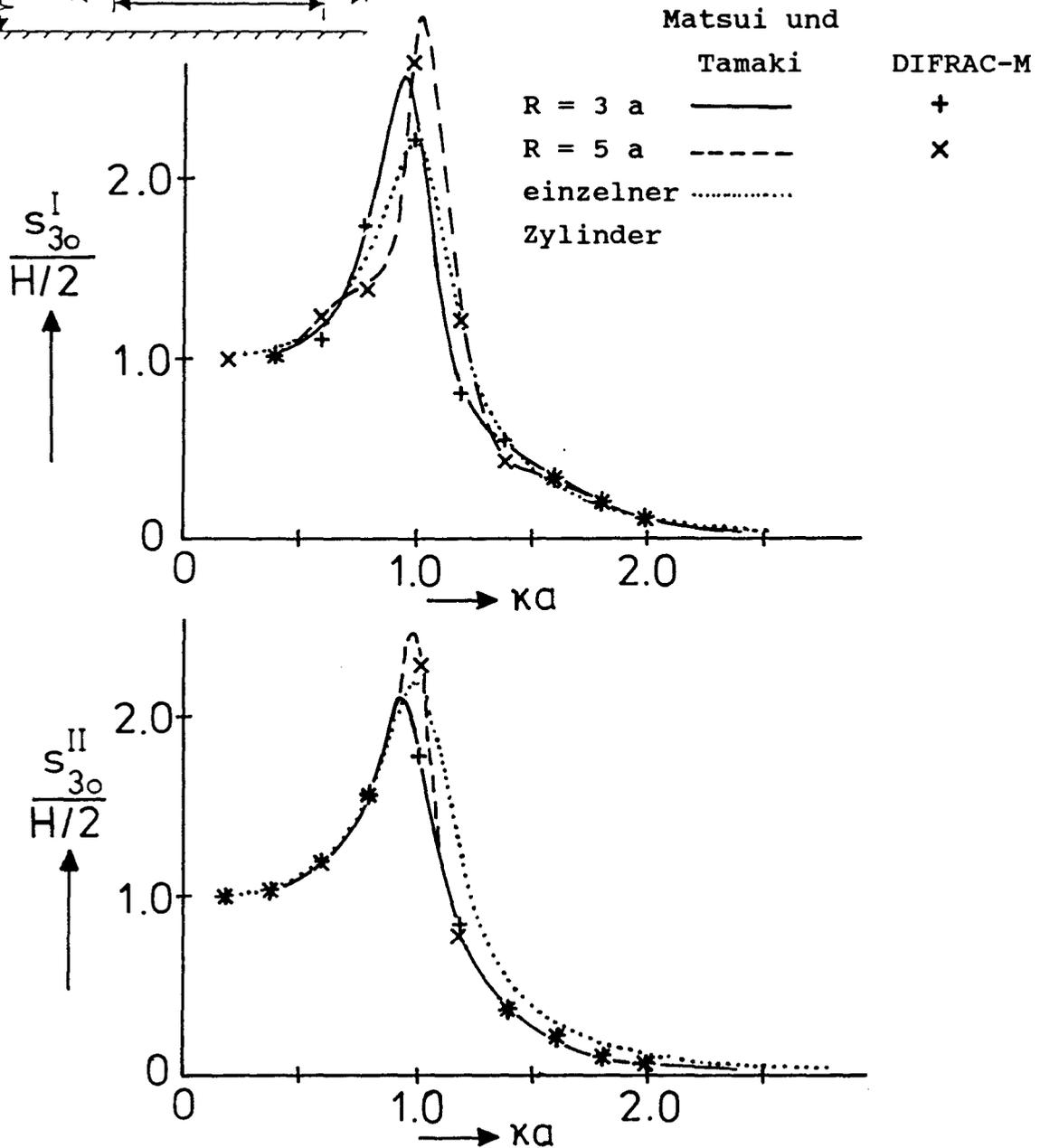
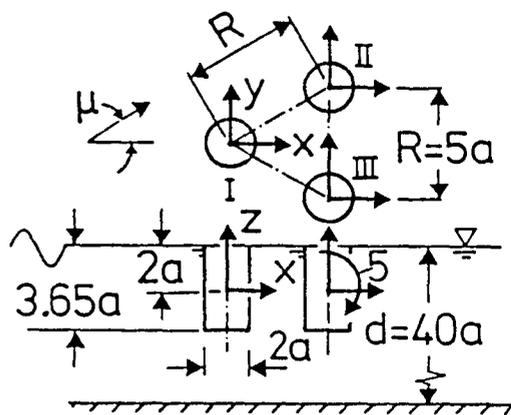


Abb. 11 c: Zwei schwimmende Zylinder.  
Übertragungsfunktionen der Tauchbewegung der Zylinder



Körper	Q	P	
I	I	I	- · - -
II	II	II	- - - -
I	II	II	- - - -
einzelner Körper			————

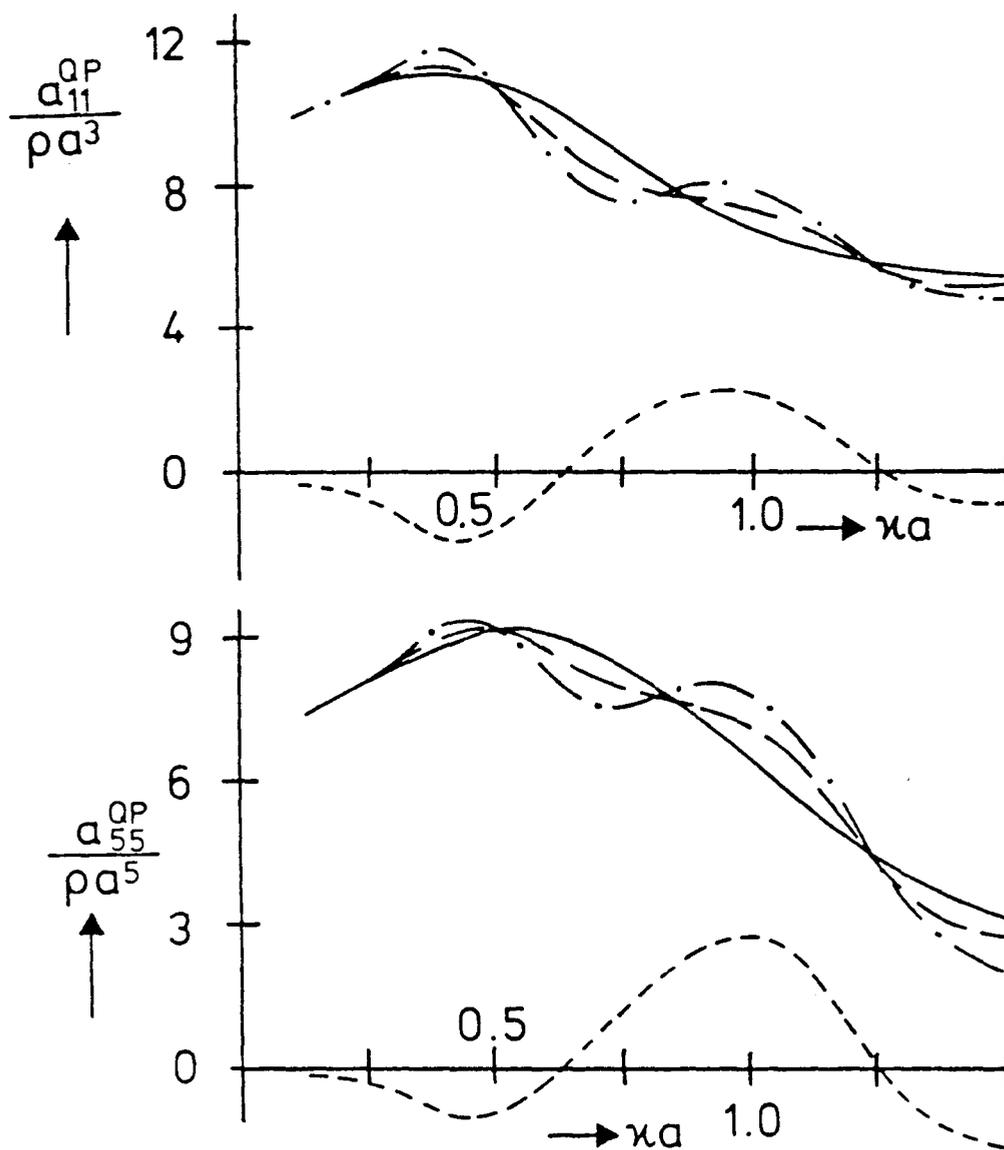
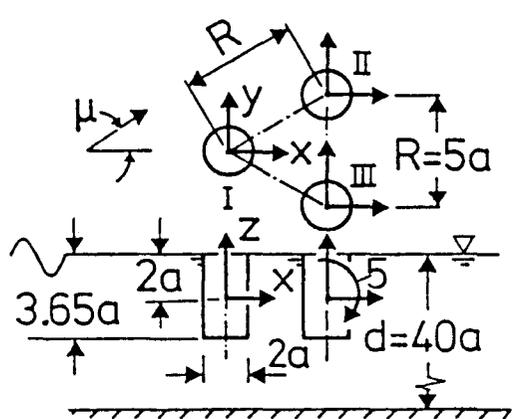


Abb. 12 a: Drei schwimmende Zylinder.  
Koeffizienten der hydrodynamischen Masse



Körper	Q	P	Line Style
I	I	I	- · - · -
II	II	II	- - - - -
I	II	I	- - - - -
einzelner Körper			

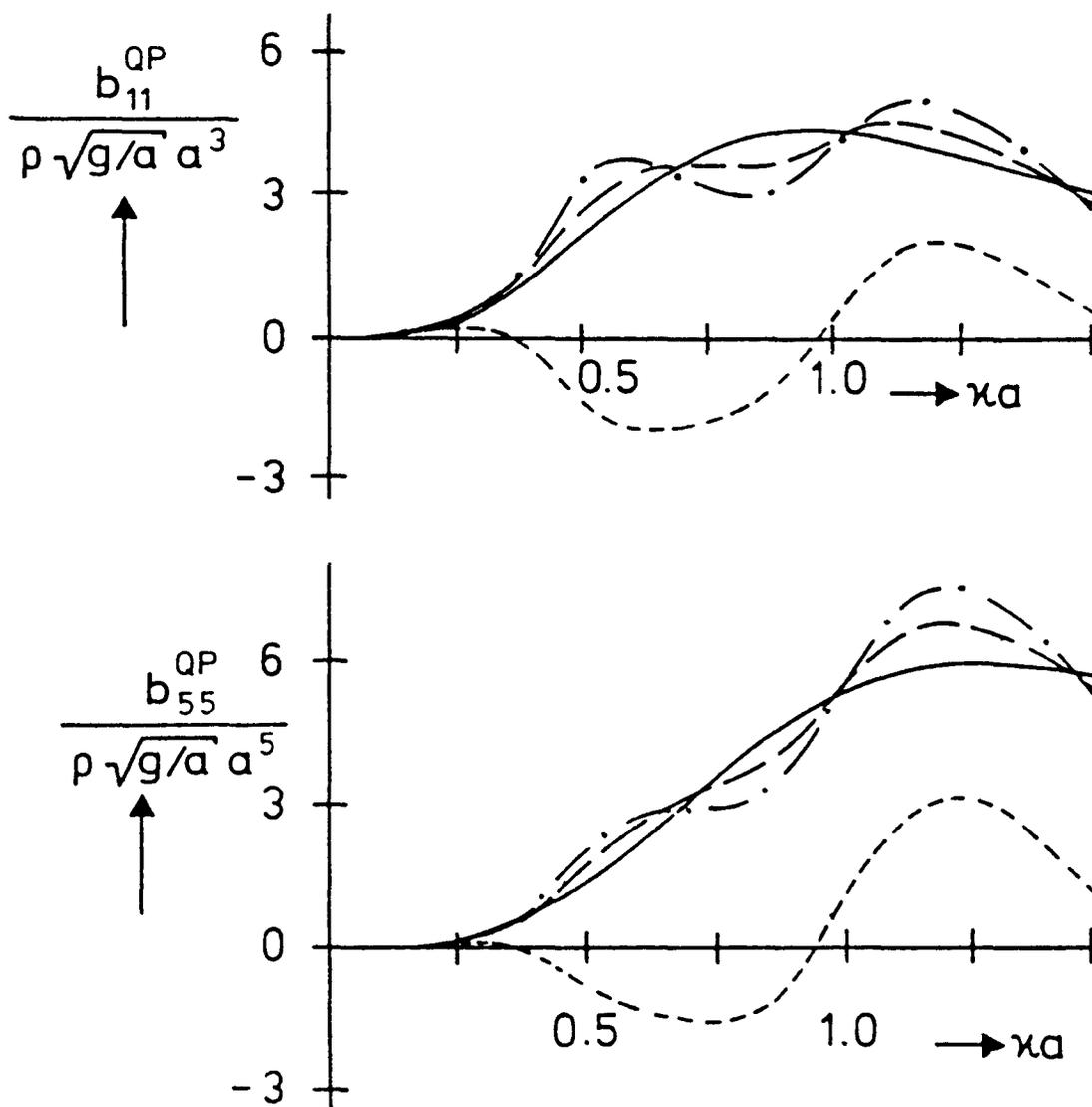


Abb. 12 b: Drei schwimmende Zylinder.  
Koeffizienten der Potentialdämpfung

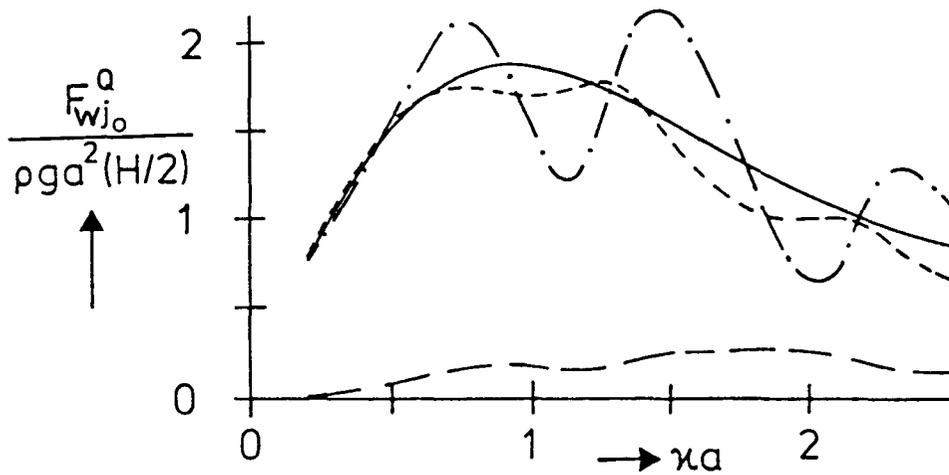
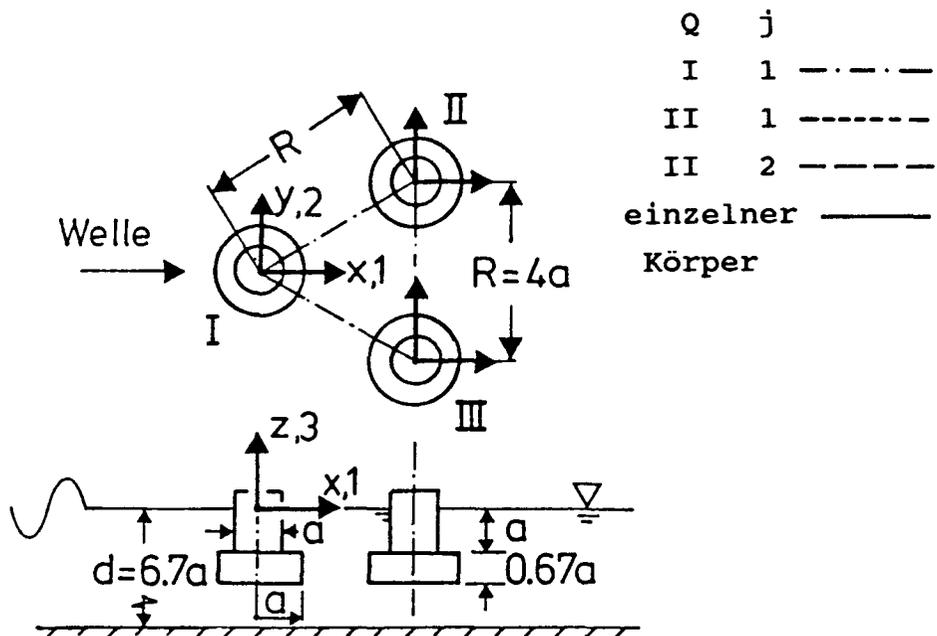
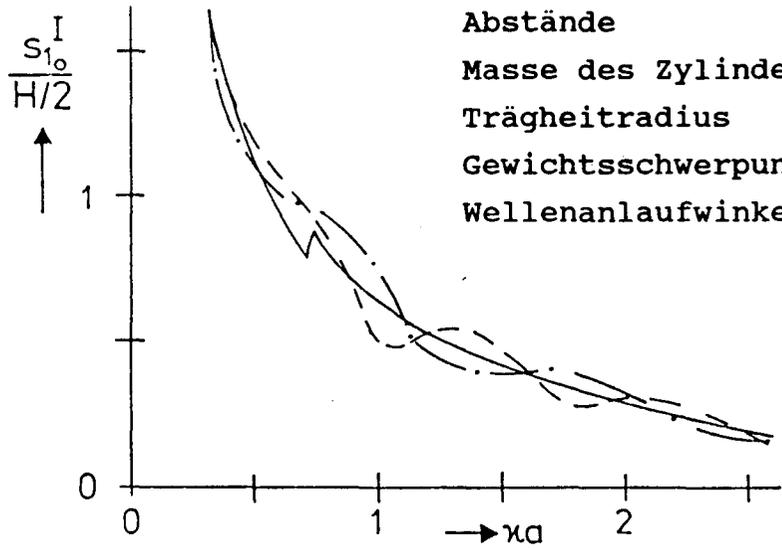
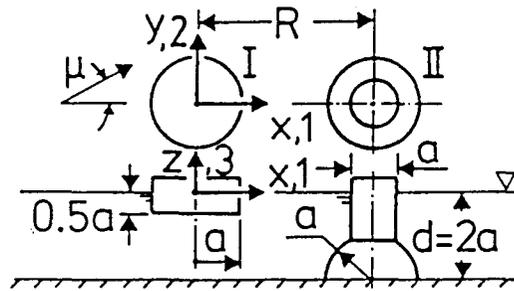


Abb. 13: Drei abgestufte schwimmende Zylinder.  
Wellenkräfte in den horizontalen Richtungen in  
Abhängigkeit von der Wellenzahl

$R = 3 a$       — · —  
 $R = 4 a$       - - -  
 einzelner  
 Zylinder      ———



Abstände  $R : 3 a; 4 a$   
 Masse des Zylinders  $0.5 \rho \pi a^3$   
 Trägheitradius  $i = 0.5 a$   
 Gewichtsschwerpunkt  $z^m = 0$   
 Wellenanlaufwinkel  $\mu = 0^\circ$

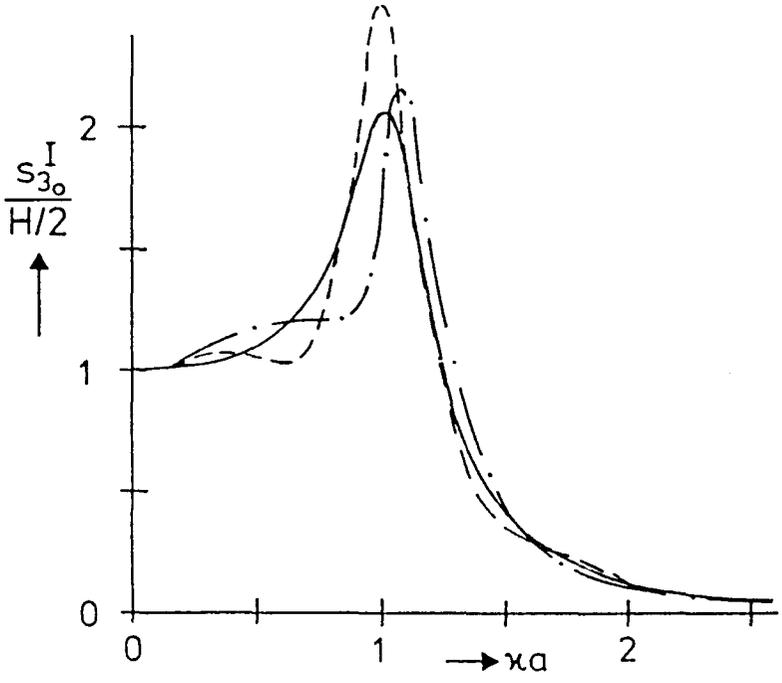


Abb. 14: Schwimmender Zylinder in der Nähe einer Struktur.  
 Übertragungsfunktionen der Horizontalbewegung und  
 der Tauchbewegung des Zylinders

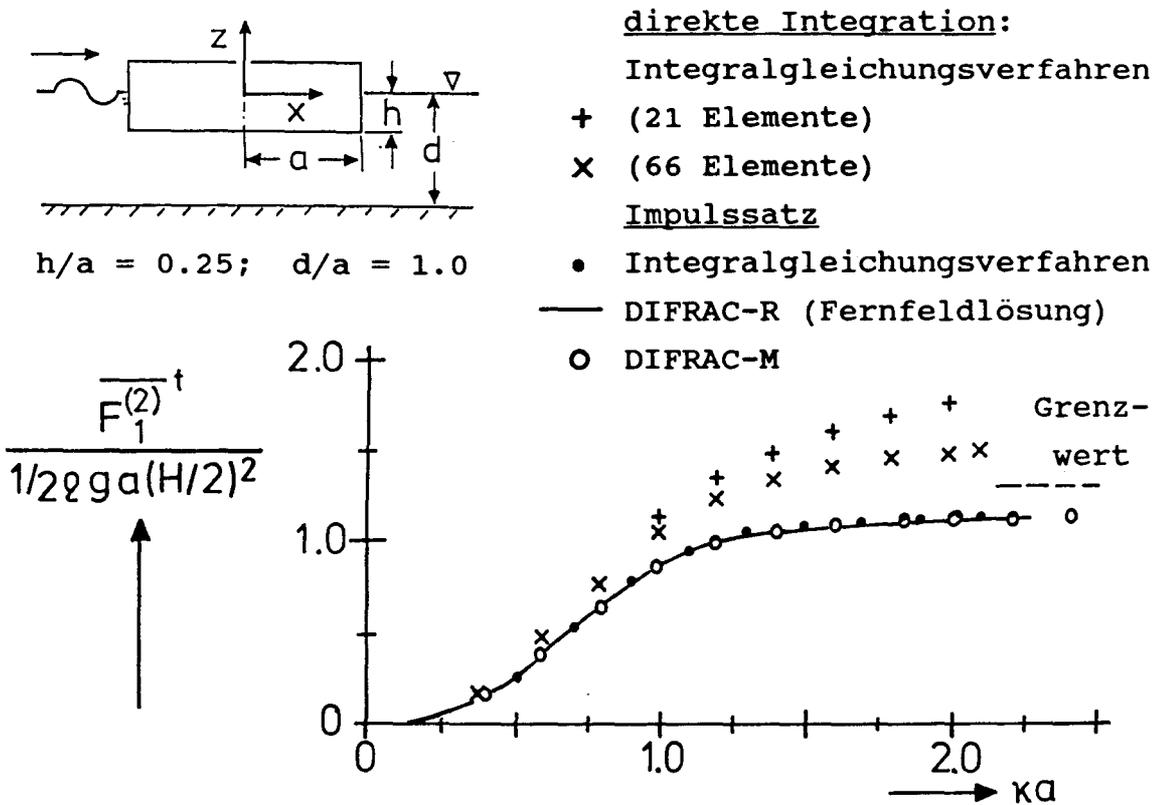


Abb. 15: Schwimmender Zylinder, in der Welle festgehalten. Driftkraftverlauf über der Wellenzahl

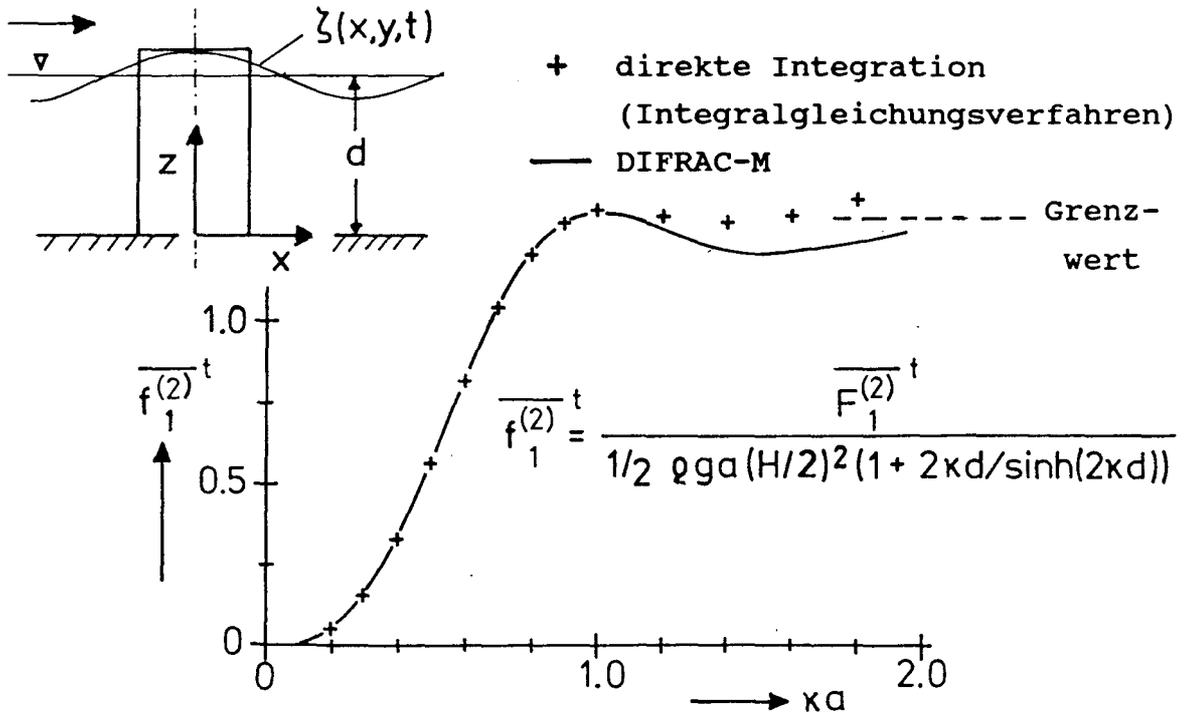


Abb. 16: Einfacher auf dem Boden stehender Zylinder. Driftkraftverlauf über der Wellenzahl

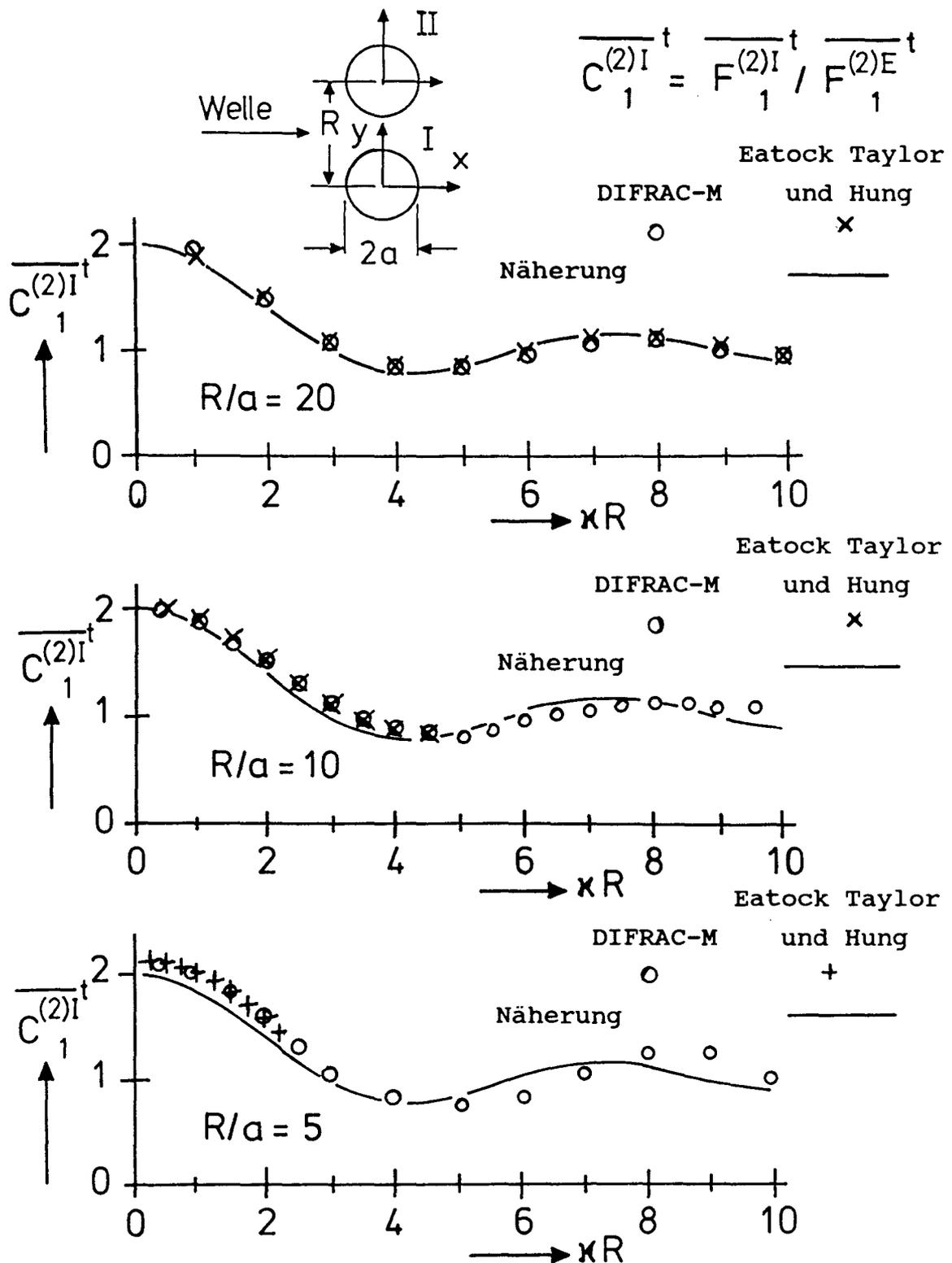


Abb. 17 a-c: Zwei auf dem Boden stehende Zylinder.  
 Drifkraft in x-Richtung auf den Zylinder I  
 bezogen auf die Drifkraft, die auf einen  
 einzelnen Zylinder wirkt, für mehrere Abstände

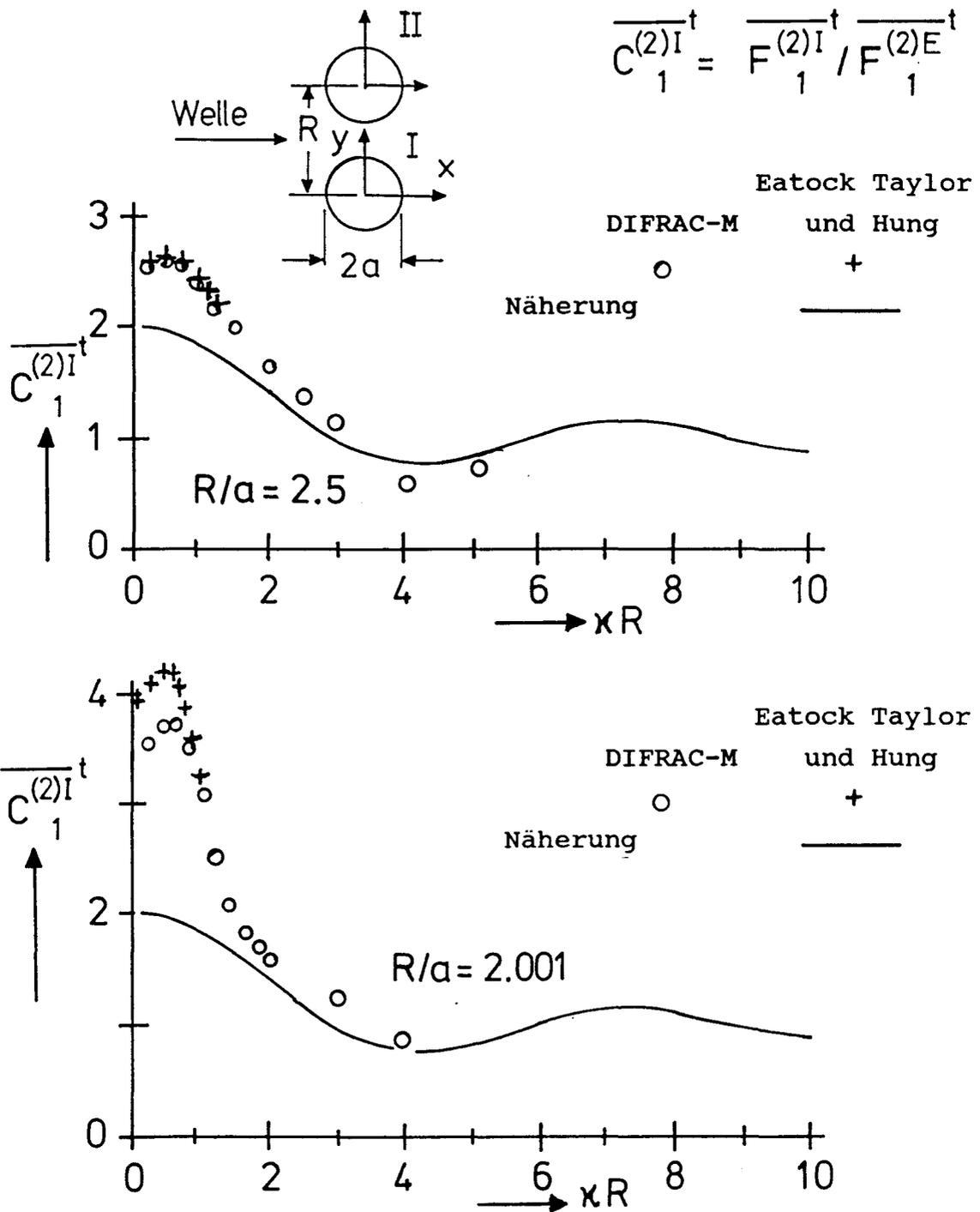


Abb. 17 d,e: Zwei auf dem Boden stehende Zylinder.  
 Driftkraft in x-Richtung auf den Zylinder I  
 bezogen auf die Driftkraft, die auf einen  
 einzelnen Zylinder wirkt, für mehrere Abstände

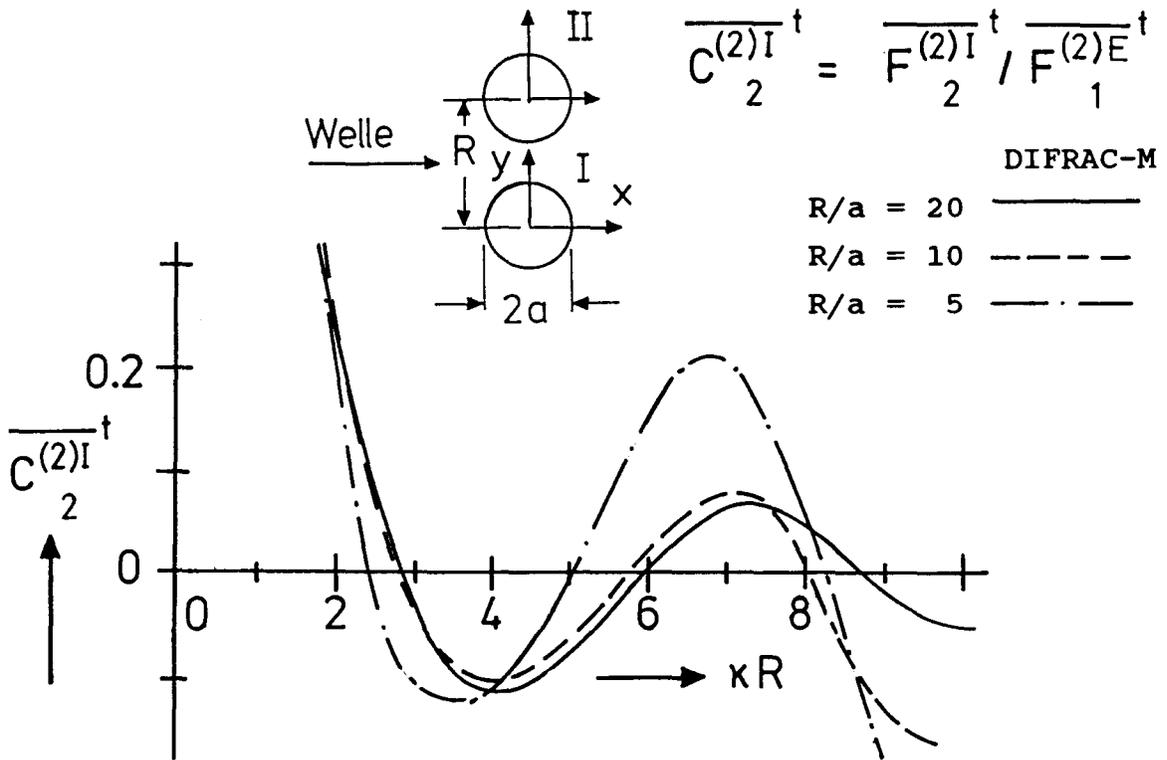


Abb. 18: Zwei auf dem Boden stehende Zylinder.

Driftkraft in y-Richtung auf den Zylinder I bezogen auf die Driftkraft, die infolge der Welle auf einen einzelnen Zylinder wirkt

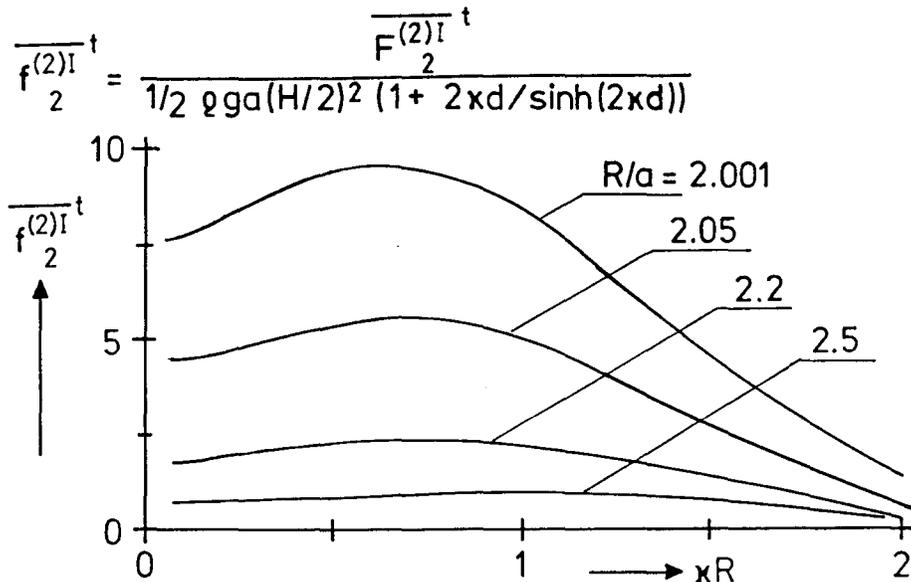
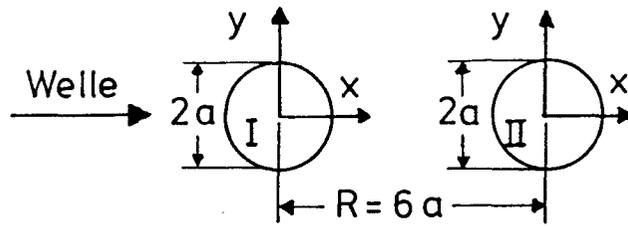


Abb. 19: Zwei auf dem Boden stehende Zylinder.

Driftkraft in y-Richtung auf den Zylinder I bei kleinen Abständen für den Bereich großer Wellenlängen



$$\frac{C_1^{(2)Q}}{1}^t = \frac{F_1^{(2)Q}}{1}^t / \frac{F_1^{(2)E}}{1}^t$$

(Q = I, II)

Körper Q	DIFRAC-M	SING-A
Q = I	—	+
Q = II	- - -	x

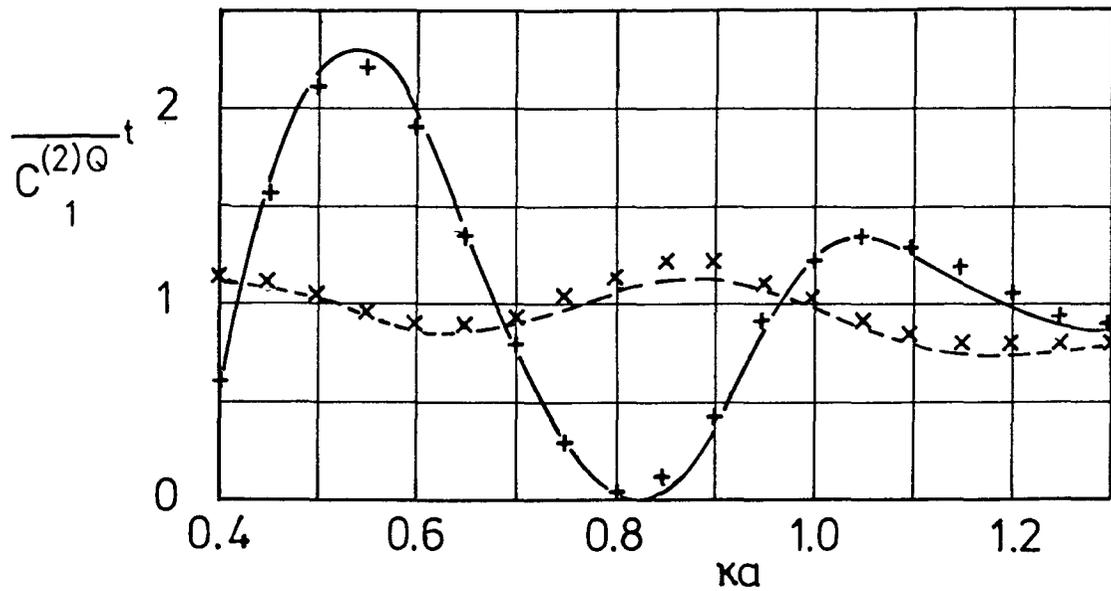


Abb. 20: Zwei auf dem Boden stehende Zylinder.  
 Driftkräfte in x-Richtung bezogen auf die  
 Driftkraft, die auf einen einzelnen Zylinder wirkt

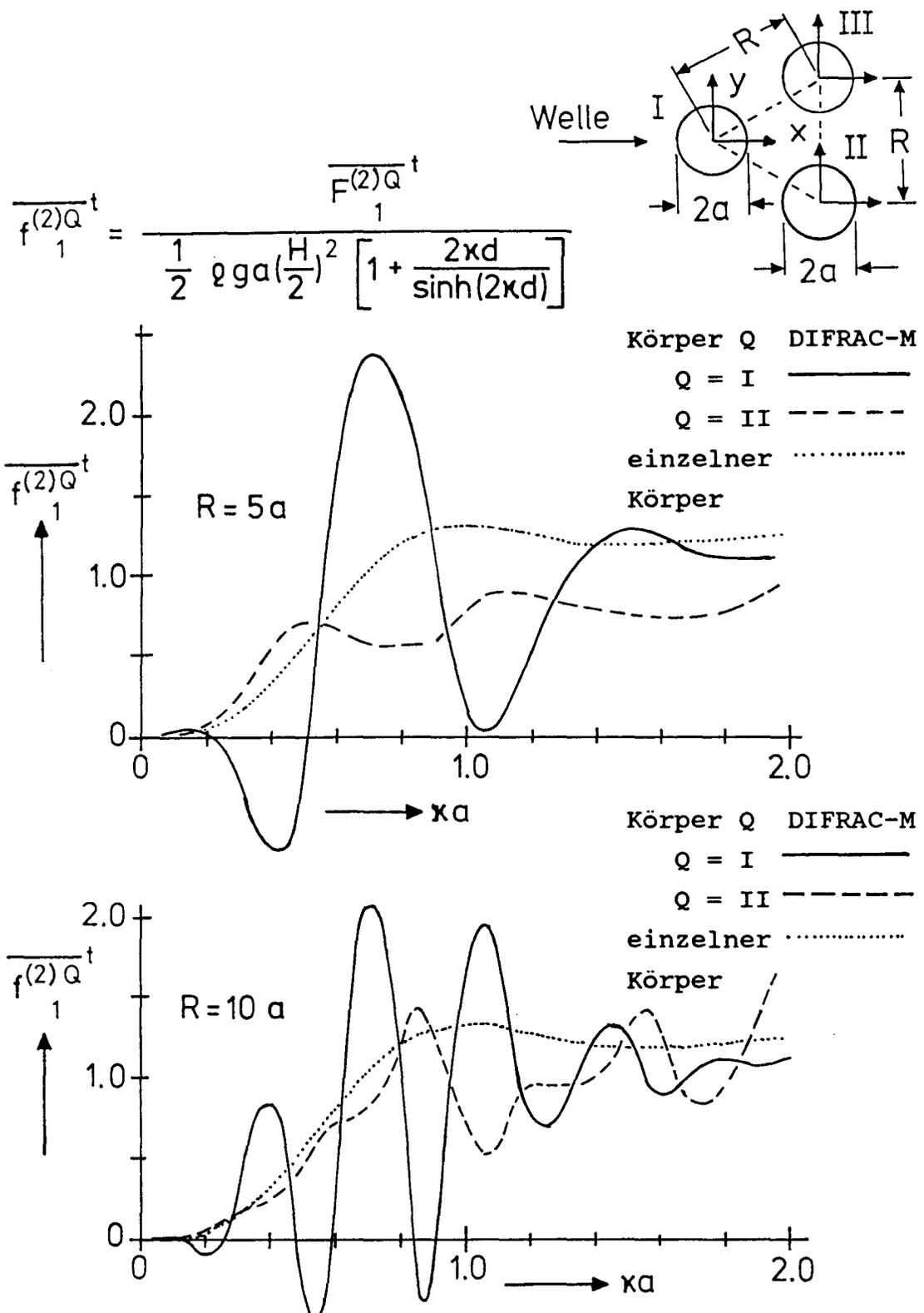
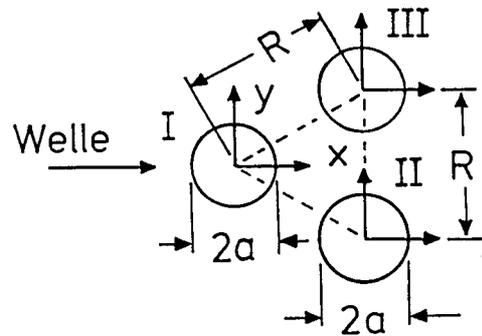


Abb. 21 a,b: Drei auf dem Boden stehende Zylinder.  
 Driftkräfte in x-Richtung über der Wellenzahl  
 für zwei Abstände R



$$\frac{\overline{f^{(2)II}}}{2}^t = \frac{\overline{F^{(2)II}}}{2}^t}{\frac{1}{2} \rho g a \left(\frac{H}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2\kappa d}{\sinh(2\kappa d)}\right]}$$

Körper II DIFRAC-M  
 R = 5 a —————  
 R = 10 a - - - - -

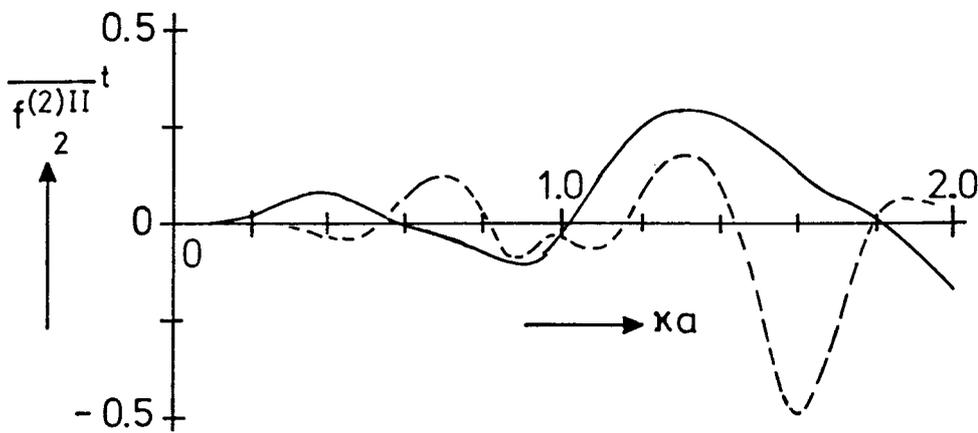


Abb. 21 c: Drei auf dem Boden stehende Zylinder.  
 Driftkräfte in y-Richtung für zwei Abstände R

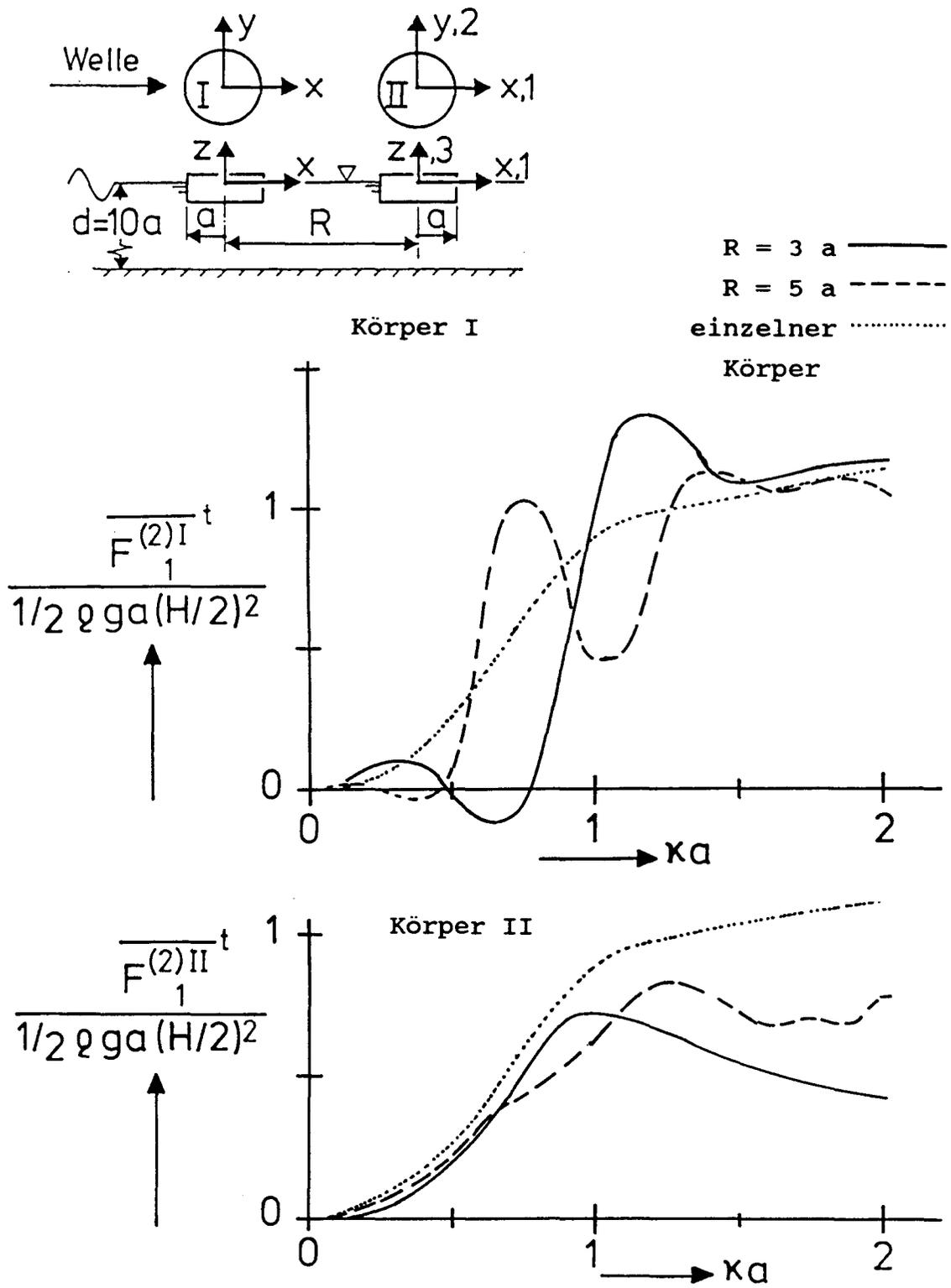


Abb. 22: Zwei schwimmende Zylinder. Driftkräfte auf die in der Welle festgehaltenen Körper

