391 | Dezember 1997

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

A. Gamst

Existenz, Eindeutigkeit und Regularität stationärer Wellenströmungen, die von Druckverteilungen an der Wasseroberfläche verursacht werden -Lineare Theorie-

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Existenz, Eindeutigkeit und Regularität stationärer Wellenströmungen, die von Druckverteilungen an der Wasseroberfläche verursacht werden

-Lineare Theorie-

A. Gamst, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1979

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Existenz, Eindeutigkeit und Regularität stationärer Wellenströmungen, die von Druckverteilungen an der Wasseroberfläche verursacht werden
– Lineare Theorie –

A. Gamst

Dezember 1979

Bericht Nr. 391

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 391

Existenz, Eindeutigkeit und Regularität stationärer Wellenströmungen, die von Druckverteilungen an der Wasseroberfläche erzeugt werden - Lineare Theorie -

A. Gamst

Hamburg, Dezember 1979

Inhaltsverzeichnis

§1 Einleitung 1

§2 Bezeichnungen 4

§3 Herleitung der Randwertaufgabe 6

§4 Das Dirichletproblem im Halbraum 10

§5 Exkurs: Das Anfangswertproblem 16

§6 Allgemeine Bemerkungen zu den Operatoren B, B' und P 19

§7 Existenz 24

§8 Freie Wellen 38

§9 Eindeutigkeit 45

§10 Regularität 49

§11 Wellenfront, singulärer Träger und Analytizität der Fundamentallösung E 54

Anhang A: Beweis von Satz 11.8 62

Anhang B: Konturdeformationen 70

Anhang C: Historische Anmerkungen 76

Anhang D: Hilfsmittel aus der Theorie der Distributionen 86

Literatur 94

§1 *Einleitung*

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Randwertaufgabe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z) = 0 \qquad \text{für } z<0 \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u(x,y,0) = f(x,y) \tag{1.2}$$

Eine Lösung dieser Randwertaufgabe beschreibt (in erster Näherung) die Wellenströmung, die von einer mit fester Geschwindigkeit an der Oberfläche einer unbegrenzten Flüssigkeit wandernden und zeitlich unveränderlichen Druckverteilung erzeugt wird.

Neben (1.1),(1.2) betrachten wir auch kurz das zugehörige Anfangswertproblem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z,t) = 0 \qquad \text{für } z<0,\ t\geq 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u(x,y,0,t) = f(x,y,t) \qquad \text{für } t\geq 0 \tag{1.4}$$

$$u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) \qquad \text{für } z\leq 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,z,0) = u_1(x,y,z) \qquad \text{für } z\leq 0 \ . \tag{1.6}$$

Die Gleichung (1.4) tritt wohl erstmalig im Jahre 1815 bei *Cauchy* auf. Die ersten qualitativen Ergebnisse für die Randwertaufgabe (1.1),(1.2) leitete 1887 Baron *Kelvin* (damals noch *William Thomson*) her. Er zeigte unter anderem, daß die Welleneffekte auf ein keilförmiges Gebiet hinter der Störung beschränkt bleiben, und berechnete den Öffnungswinkel dieses Keils (*Kelvin*-Winkel, $2\times 19^\circ 28'$). Danach hat eine Vielzahl von Autoren die Ergebnisse von *Kelvin* vertieft; die wichtigsten Beiträge stammen wohl von *Ekman (1906),(1907); Havelock (1908); Hogner (1923); Peters (1949); Ursell (1960)* und *Bessho (1964)*.

Die Randwertaufgabe (1.1),(1.2) zeichnet sich durch eine charakteristische Schwierigkeit aus: sie ist *nicht elliptisch*, d.h. Singularitäten der Daten können sich ausbreiten - was ja z.B. beim Dirichletproblem oder Neumannproblem nie der Fall ist. Vermutlich aus diesem Grunde gibt es bisher (nach Kenntnis des Verfassers) keinen vollständigen Beweis dafür, daß es sich um ein *sachgemäßes Problem* handelt (*Courant-Hilbert (1968)*). Diese Lücke soll mit der vorliegenden Arbeit geschlossen werden.

Die hierfür notwendigen Beweise der Existenz, Eindeutigkeit (unter Beachtung einer "Abstrahlungsbedingung") und Regularität von Lösungen der Aufgabe (1.1),(1.2) beruhen auf einer einzigen Idee, wonach das Randwertproblem in zwei andere Probleme zerlegt werden kann: die Lösung der *Differentialgleichung*

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = f \tag{1.7}$$

auf dem Rande, und die nachfolgende Lösung des *Dirichletproblems*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{v} = 0 \qquad \text{für } z<0$$

$$\tilde{v}(x,y,0) = v(x,y)$$

mit anschließender *Differentiation*

$$u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{v} \quad . \tag{1.8}$$

Dieses u löst dann die Randwertaufgabe, denn

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{v} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{v}$$

$$= \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{v} = f \quad .$$

Allerdings setzt dies voraus, daß wir die Laplacegleichung sogar für z=0 benutzen dürfen. Eine eingehende Untersuchung zeigt jedoch, daß dies Vorgehen - in einem genau festgelegten Sinne - immer zulässig ist.

Das Auftreten der Differentialgleichung (1.7) im Zusammenhang mit der Randwertaufgabe (1.1),(1.2) ist keineswegs neu. Man findet sie beispielsweise bei *Bessho (1964)* und für das zweidimensionale instationäre Problem in der Form

$$\phi_{tttt} + \phi_{xx} = f \tag{1.9}$$

schon bei *Boussinesq (1885)* (zitiert nach *Kotik (1952)*). Es scheint dies jedoch das erste Mal zu sein, daß sie zur Grundlage der Untersuchung der dreidimensionalen Randwertaufgabe gemacht wird.

Die Vorteile dieses Verfahrens sind:

1) Man erhält einen vollständig begründeten Existenzsatz für beliebige Druckverteilungen mit kompaktem Träger im Rahmen der Theorie der temperierten Distributionen.

2) Die Eindeutigkeit der Lösungen läßt sich erstmals unter der Bedingung zeigen, daß nach vorn keine Wellen laufen*.

3) Man kann erstmals Regularitätssätze beweisen.

Wir werden dabei wie folgt vorgehen:

Im ersten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns mit vorbereitenden Fragen. Nach Vereinbarung einiger Bezeichnungen (§2) leiten wir die Randwertaufgabe aus den hydrodynamischen Grundgleichungen ab (§3). Anschließend formulieren wir das Dirichletproblem, diskutieren dessen Lösbarkeit und rechtfertigen die eben beschriebene Zerlegung der Randwertaufgabe (§4). Es folgt eine kurze Darstellung des Anfangswertproblems.

Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß das Problem (1.1),(1.2) sachgemäß ist. Wir untersuchen zunächst die Operatoren

$$B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad B' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad P = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

im Rahmen der Theorie der partiellen Differentialoperatoren und Randwertprobleme (§6). Dann wird eine Fundamentallösung E für P konstruiert und das Dirichletproblem für E gelöst, woraus sich eine Fundamentallösung und damit der Existenzsatz für das Randwertproblem (1.1),(1.2) ergibt (§7). Danach wenden wir uns den Lösungen der homogenen Aufgabe, den *freien Wellen*, zu (§8). Die Untersuchung der freien Wellen liefert ein Eindeutigkeitskriterium, und wir weisen nach, daß die vorher konstruierten Lösungen diesem Kriterium genügen (§9). Dann folgt ein Regulatitätssatz für die Differentialgleichung (1.7), aus dem sich ein entsprechender Satz für das Randwertproblem (1.1),(1.2) ergibt (§10). Schließlich wird die Fun-

* In den klassischen Aufsätzen wird die Eindeutigkeitsfrage meist vernachlässigt. Später werden häufig unzureichende Bedingungen genannt (siehe Anhang C). Sonst sind mir nur Eindeutigkeitskriterien bekannt, in denen *a priori* nicht bekannte Abklingeigenschaften der Fundamentallösung benutzt werden.

damentallösung auf Differenzierbarkeit untersucht.

Der letzte Teil besteht aus Nachträgen. Die beiden ersten liefern technische Einzelheiten, auf deren Beweis in Teil II zunächst verzichtet wurde. Im dritten Anhang versuche ich, einige Beziehungen zur ausgedehnten klassischen Literatur dieses Gebiets herzustellen. Im letzten Abschnitt habe ich die wichtigsten Ergebnisse der Distributionstheorie zusammengestellt, um es auch dem mehr mit der klassischen Potentialtheorie vertrauten Schiffshydrodynamiker zu ermöglichen, diese Arbeit ohne allzu häufiges Nachschlagen in anderen Werken zu lesen.

Das Problem (1.1),(1.2) ist zunächst für die Praxis nur von geringem Interesse. Im Schiffbau tritt eher der Fall auf, daß auf der rechten Seite in (1.1) eine weitere Distribution g erscheint. Beim "Problem des dünnen Schiffes" etwa wäre

$$g(x,y,z) = 2\delta(y)\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,z) \quad , \tag{1.10}$$

wobei die Funktion f die Schiffsoberfläche beschreibt. Für das sogenannte *Neumann-Kelvin-Problem* hingegen muß g so gewählt werden, daß die Normalkomponente der Strömung an der Schiffsoberfläche verschwindet (dies erfordert im allgemeinen die Lösung einer - weitgehend unerforschten - Integralgleichung). Das derart modifizierte Problem läßt sich jedoch bei gegebenem g dadurch auf (1.1),(1.2) zurückführen, daß man eine *spezielle* Lösung u_0 der Gleichung

$$\Delta u = g \tag{1.11}$$

auswählt und die durch u_0 *induzierte Druckverteilung*

$$f_0(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) u_0(x,y,0) \tag{1.12}$$

von der rechten Seite in (1.2) subtrahiert. Wegen der Nichteindeutigkeit des Problems (1.1),(1.2) muß dieses bei linearen Problemen wohlbekannte Verfahren natürlich mit der gebotenen Vorsicht angewandt werden. Das Eindeutigkeitskriterium dieser Arbeit (Satz 9.1) zeigt jedoch, daß man z.B. beim dünnen Schiff als u_0 die sogenannte *Doppelkörperströmung* wählen kann, die durch

$$u_0 = \frac{1}{4\pi r} * (g + g_1) \tag{1.13}$$

definiert wird. Hier ist $1/4\pi r$ die übliche Fundamentallösung des Laplaceoperators, der Stern steht für die Faltung, und

$$g_1(x,y,z) = g(x,y,-z) \quad .$$

Insofern ist also das Problem des dünnen Schiffes in (1.1),(1.2) bereits enthalten. Es soll jedoch nicht verschwiegen werden, daß in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich Druckverteilungen mit kompaktem Träger untersucht werden, während die durch ein dünnes Schiff über die Doppelkörperströmung induzierte Druckverteilung (1.12),(1.13) sicherlich keinen kompakten Träger besitzt. Man kann derartige Druckverteilungen aber in den Räumen $V^{k,s}$ des Abschnitts 10 durch solche mit kompaktem Träger *approximieren* (was ja bei der numerischen Auswertung der hier entworfenen Lösungskonstruktion ohnehin geschehen müßte), so daß die Regularitätssätze in Abschnitt 10 auch hierfür die notwendige Information liefern.

Diese Untersuchung entstand zum überwiegenden Teil während meiner Tätigkeit am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojektes über Schiffswellenfelder unter der Leitung von Prof. K. Eggers. Ihm danke ich für die großzügige Förderung meiner Arbeit und seine immerwährende Bereitschaft zur Diskussion.

§2 *Bezeichnungen*

Allgemeines, Mengenlehre

Wir benutzen die üblichen Symbole

$$\in, \notin, \cup, \cap, \subset, A\times B, A^n, A\setminus B .$$

Ist A eine Menge, so ist

$$\{x\in A \mid E(x)\}$$

die Teilmenge von A, deren Elemente die Eigenschaft E haben.

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen, wobei $0\notin\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{Z}$ sind die ganzen, $\mathbb{R}$ die reellen und $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen.

An einigen Stellen werden Abbildungen nach dem Schema

$$f: \begin{cases} A \longrightarrow B \\ a \longmapsto f(a) \end{cases}$$

definiert. Das soll andeuten, daß f auf A definiert ist, nach B abbildet, und daß das Bild von $a\in A$ mit f(a) bezeichnet wird. Daneben benutzen wir auch die Schreibweise $f: A \longrightarrow B$ oder schreiben allein die Wirkung f(a) von f auf a vor.

Das definierende Gleichheitszeichen := tritt einige Male auf, wird aber nicht konsequent benutzt.

Analysis in $\mathbb{R}^3$

Wir bewegen uns überwiegend in offenen Teilräumen des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Die Koordinaten werden dann mit (x,y,z) bezeichnet, wobei z als vertikale Koordinate mit positiver Richtung nach oben gedacht werden sollte. Die Differentialoperatoren

$$\nabla \text{ (Gradient)}, \quad \nabla\cdot \text{ (Divergenz)}, \quad \nabla\times \text{ (Rotation)}$$

und

$$\Delta \text{ (Laplaceoperator)}$$

beziehen sich *immer* auf den dreidimensionalen Fall.

Analysis in $\mathbb{R}^n$

An einigen Stellen wird etwas allgemeiner über Differentialoperatoren in $\mathbb{R}^n$ gesprochen. Dann sind x,w,θ Punkte in $\mathbb{R}^n$. Ist

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n ,$$

so definiert man

$$x^\alpha := \prod_{j=1}^{n} (x_j)^{\alpha_j} = (x_1)^{\alpha_1}\cdot(x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\ldots(x_n)^{\alpha_n}$$

und

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^{n} \left(-i\,\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}\right) = (-i)^{|\alpha|}\cdot\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\right)\ldots\ldots\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right),$$

wobei

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n .$$

Das Skalarprodukt schreiben wir $w\theta = \Sigma w_j \theta_j$, die euklidische Norm $|w| = (ww)^{1/2}$.

Funktionenräume

Mit

$$C^k(A,B)$$

bezeichnen wir die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f:A \longrightarrow B$ ($k \in \mathbb{N}_0$ oder $k=\infty$). Ist $B=\mathbb{C}$, so schreibt man kurz

$$C^k(A) \ .$$

Ferner ist

$$C_0^k(A)$$

die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f:A \longrightarrow \mathbb{C}$ mit *kompaktem Träger* (siehe z.B. Anhang D).

Distributionen

Die Räume der Testfunktionen werden wie üblich mit C_0^∞, $\mathcal{S}$, C^∞ bezeichnet; ihre Dualräume (Distributionsräume) mit $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$.

Das Diracmaß in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ mit Träger in $x_0 \in \mathbb{R}^1$ wird $\delta(x-x_0)$ geschrieben; ist $x_0=0$, so treten daneben die Versionen δ und $\delta(x)$ auf. In höheren Dimensionen unterscheide ich nicht zwischen δ, $\delta(x,y)$ und $\delta(x)\delta(y)$; etc.

Die Wirkung der Distribution T auf die Testfunktion ϕ ist

$$\langle T, \phi \rangle \ .$$

Die *Heaviside-Funktion* H wird definiert durch

$$H(t) = \begin{cases} 1 \ , & t > 0 \\ 0 \ , & t < 0 \end{cases}$$

Fouriertransformation

Im Normalfall ist $\mathcal{F}_n$ die n-dimensionale Fouriertransformation, gegeben durch

$$(\mathcal{F}_n \phi)(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(w) \exp(-i\theta w) \, dw$$

($w, \theta \in \mathbb{R}^n$), und deshalb

$$(\mathcal{F}_n^{-1} \phi)(\theta) = (\frac{1}{2\pi})^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi(w) \exp(i\theta w) \, dw \ .$$

($\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Ausnahme ist die eindimensionale Transformation, die nicht $\mathcal{F}_1$, sondern $\mathcal{F}_x$ oder $\mathcal{F}_y$ geschrieben wird, je nachdem, bezüglich welcher Variablen transformiert wird.

Die zu (x,y,z) dualen Variablen sind im allgemeinen (ξ,η,ζ). An einigen Stellen ist aber auch ζ eine komplexe Variable mit $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$. Ferner benutze ich bisweilen die Abkürzung $\hat{u}$ für $\mathcal{F}_n u$; außer in §11 ist dann immer der Fall n=2 gemeint.

§3 *Herleitung der Randwertaufgabe*

Die *exakten* Rand- und Anfangsrandwertaufgaben in der Theorie der Gravitationswellen an der Oberfläche inkompressibler wirbelfreier homogener Flüssigkeiten gelten im allgemeinen als schwer zugänglich. Hauptgrund dafür sind die *nichtlinearen* Randbedingungen, die an der *unbekannten* freien Oberfläche der Flüssigkeit zu erfüllen sind. Aus diesem Grunde ist es bisher nur in wenigen relativ speziellen Fällen möglich gewesen, Lösungen dieser Probleme anzugeben. Für eine Diskussion dieser Fragen sei etwa auf *Shinbrot (1976)* verwiesen.

Bei etwas komplexeren Aufgaben (wie etwa bei der Ermittlung des Wellenwiderstandes von Schiffen) ist man bis heute gezwungen, die Randbedingungen zu *linearisieren*. Unabhängig vom speziellen Charakter des Problems treten dann regelmäßig zwei typische Randoperatoren auf, der eine bei instationären Problemen (erstmalig bei *Cauchy (1815),S.52)*, der andere im stationären Fall. Zum Studium dieser Operatoren betrachten wir ein einfaches Modellproblem, in dem *allein* diese Operatoren in den Randbedingungen auftreten.

Es gibt mehrere gut zugängliche Darstellungen des Linearisierungsprozesses (siehe etwa *John (1949); Stoker (1957); Peters-Stoker (1957); Wehausen-Laitone (1960)*), so daß ich mich hier auf eine kurze Zusammenfassung beschränken kann. Danach möchte ich noch auf zwei grundsätzliche Probleme etwas ausführlicher eingehen.

Wir betrachten die folgende Situation: *gegeben* sei zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ eine bekannte *Druckverteilung* p an der Oberfläche einer inkompressiblen wirbelfreien homogenen Flüssigkeit. *Gesucht* ist das von dieser Druckverteilung (man denke etwa an ein Luftkissenboot) erzeugte *Geschwindigkeitsfeld* $v=v(x,y,z,t)$ in der Flüssigkeit, bei bekannten Anfangsbedingungen.

Um das Problem mathematisch formulieren zu können, nehmen wir an, daß die Flüssigkeit zum Zeitpunkt t das Gebiet

$$\Omega_t = \{(x,y,z) \mid z < \zeta(x,y,t)\} \tag{3.1}$$

ausfüllt. Der zeitabhängige Verlauf der Flüssigkeitsoberfläche werde also durch die Funktion ζ beschrieben. Die *ungestörte freie Oberfläche* sei die Ebene $z=0$.

Die Flüssigkeit sollte inkompressibel und homogen sein. Dann gilt für das gesuchte Geschwindigkeitsfeld $v=(v_1,v_2,v_3)$

$$\nabla \cdot v = 0 \qquad \text{in } \Omega_t \text{ für alle } t \geq 0 \ . \tag{3.2}$$

Ferner wurde vorausgesetzt, daß die Strömung wirbelfrei ist, also

$$\nabla \times v = 0 \qquad \text{in } \Omega_t \text{ für alle } t \geq 0 \ . \tag{3.3}$$

Wegen (3.1) ist nun Ω_t einfach zusammenhängend. Deshalb existiert ein Geschwindigkeitspotential, d.h. eine skalarwertige Funktion ϕ mit

$$v = \nabla \phi \qquad \text{in } \Omega_t \text{ für alle } t \geq 0 \ . \tag{3.4}$$

Als *Feldgleichung* haben wir also wegen (3.2)

$$\Delta \phi = 0 \qquad \text{in } \Omega_t \text{ für alle } t \geq 0 \ . \tag{3.5}$$

Bei $z=\zeta(x,y,t)$ treten zwei Randbedingungen hinzu:

a) die *kinematische* Randbedingung (Randpunkt bleibt Randpunkt)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{3.6}$$

b) die *dynamische* Randbedingung (Bernoulli-Gleichung)

$$p + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho gz + \frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2 = C \qquad (3.7)$$

Hier ist $p=p(x,y,t)$ die gegebene Druckverteilung, ρ die Dichte der Flüssigkeit, g die Erdbeschleunigung und C eine möglicherweise noch von der Zeit abhängige Konstante (der Einfluß der Oberflächenspannung wird hier vernachlässigt).

Das Problem (3.5) - (3.7), ergänzt durch Anfangsbedingungen an ϕ und $\partial\phi/\partial t$, ist nach meiner Kenntnis bis heute ungelöst, auch unter beliebig scharfen Bedingungen an p. Das zugehörige *linearisierte* Problem läßt sich jedoch mit bekannten Methoden behandeln (siehe etwa Abschnitt 5), und seine Lösung besitzt bereits wesentliche Merkmale des modellierten physikalischen Strömungsvorganges.

Der Linearisierungsprozeß wird üblicherweise wie folgt begründet:

Zunächst stellt man sich vor, daß das Problem (3.5) - (3.7) zu einer Schar von Problemen gehört, die zusätzlich von einem Parameter ε abhängen. In unserem Fall wäre eine solche Schar z.B. durch

$$p(x,y,t,\varepsilon) = \varepsilon p^{(1)}(x,y,t) \qquad (3.8)$$

definiert.

Dann *nimmt man an*, daß die zugehörigen Lösungen in einer Umgebung von $\varepsilon=0$ in äußerst einfacher Weise von ε abhängen:

$$\phi(x,y,z,t,\varepsilon) = \sum_1^\infty \varepsilon^i \phi^{(i)}(x,y,z,t) \quad , \qquad (3.9)$$

$$\zeta(x,y,t,\varepsilon) = \sum_1^\infty \varepsilon^i \zeta^{(i)}(x,y,t) \quad . \qquad (3.10)$$

Schließlich *unterstellt man zusätzlich*, daß sich die Funktionen $\phi^{(i)}$ um Punkte auf der ungestörten freien Oberfläche in eine Potenzreihe nach z entwickeln lassen:

$$\phi^{(i)}(x,y,z,t) = \sum_0^\infty \frac{z^j}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j}\phi^{(i)}(x,y,0,t) \quad . \qquad (3.11)$$

Die Entwicklungen (3.8) - (3.11) werden nun in die Gleichungen (3.6) und (3.7) eingesetzt. Man sortiert die resultierenden Terme nach Potenzen von ε; das ergibt in (3.6)

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\zeta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\right.$$

$$\left. - \zeta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2}\right) + \varepsilon^3(.....) + ... = 0 \qquad (3.12)$$

und in (3.7) mit $C=0$

$$\varepsilon\left(p^{(1)} + \rho\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} + \rho g\zeta^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left(\rho\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t} + \rho g\zeta^{(2)} + \rho\zeta^{(1)}\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z\partial t}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\rho(\nabla\phi^{(1)})^2\right) + \varepsilon^3(.....) + ... = 0 \quad . \qquad (3.13)$$

Faßt man (3.12) und (3.13) als Identitäten zwischen formalen Potenzreihen in ε auf, so können sie nur bestehen, wenn die Koeffizienten bei jeder ε-Potenz verschwinden. Dies führt beim Koeffizienten von ε^1 zu den *Randbedingungen erster Ordnung*

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \tag{3.14}$$

und

$$p^{(1)} + \rho \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \rho g \zeta^{(1)} = 0 \quad , \tag{3.15}$$

die sich zu der einzigen Bedingung

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} / \rho \tag{3.16}$$

zusammenfassen lassen. Als "linearisierte" Feldgleichung erhalten wir dazu aus (3.5) und (3.7)

$$\Delta \phi^{(1)} = 0 \quad . \tag{3.17}$$

Die Gleichung (3.16) ist an der ungestörten Oberfläche z=0 zu erfüllen, im Gegensatz zu (3.6) und (3.7), die an dem unbekannten Rand $z=\zeta(x,y,t)$ gelten sollten.

Die *Randbedingungen zweiter Ordnung* sind

$$\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = - \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} + \zeta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \tag{3.18}$$

und

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + g \zeta^{(2)} = - \zeta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \phi^{(1)})^2 \quad . \tag{3.19}$$

Man kann sie wieder zu einer einzigen Bedingung zusammenfassen.

Die Gleichungen für das stationäre Problem lassen sich ganz analog herleiten. Man kann sie aber auch aus den Gleichungen für das instationäre Problem gewinnen; dazu nehmen wir an, daß $p^{(1)}$ in der Form

$$p^{(1)}(x,y,t) = q^{(1)}(x-Ut,y) \tag{3.20}$$

geschrieben werden kann, die Druckverteilung also in einem Koordinatensystem, das mit der Geschwindigkeit U in positiver x-Richtung wandert, als zeitlich konstant wahrgenommen wird. Es ist dann vernünftig, dieselbe Invarianzeigenschaft auch von der Lösung zu erwarten. Dann tritt an die Stelle von (3.16)

$$U^2 \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x^2} + g \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \frac{U}{\rho} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} \quad , \tag{3.21}$$

wenn

$$\phi^{(1)}(x,y,z,t) = \psi^{(1)}(x-Ut,y,z) \quad . \tag{3.22}$$

Dazu gehört wieder die Feldgleichung

$$\Delta \psi^{(1)} = 0 \quad .$$

Wir transformieren noch auf dimensionslose Koordinaten

$$(x,y,z) \longrightarrow (x',y',z') = (x,y,z)g/U^2$$

und erhalten schließlich den Hauptgegenstand dieser Arbeit , das Randwertpro-

blem im Halbraum

$$\Delta u = 0 \qquad \text{für } z<0 \quad , \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial z} = f \qquad \text{für } z=0 \tag{3.24}$$

Dabei dürfen wir, falls dies notwendig sein sollte, ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$f = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{3.25}$$

annehmen und z.B. von der Funktion F verlangen, daß sie einen kompakten Träger besitzt, ohne damit die physikalische Situation zu stark einzuschränken.

Abschließend seien noch zwei grundsätzliche Schwächen der hier skizzierten Herleitung erwähnt.

Zum ersten enthalten bereits die nichtlinearen Randbedingungen (3.6) und (3.7) nicht mehr die Möglichkeit der *Wellenbrechung*. Sehr viele physikalisch und technisch interessante Fälle, die unter Verwendung dieser Bedingungen beschrieben werden sollen, zeigen aber *regelmäßig* brechende Wellen*. Für das Verhältnis vom mathematischen Modell zur Wirklichkeit kann dies eigentlich nur zwei mögliche Konsequenzen haben: entweder besitzt in derartigen Fällen das nichtlineare Problem überhaupt keine Lösung, denn "Lösung" müßte ja bedeuten, daß auch im Modell keine Wellenbrechung auftritt; oder das mathematische Problem besitzt eine Lösung, aber dann hat diese Lösung notwendigerweise überhaupt nichts mit der physikalischen Realität zu tun. Überspitzt gesagt: wenn das mathematische Modell im Prinzip physikalisch relevante Aussagen liefert, dann dürfte es in den meisten Fällen gar keine Lösung besitzen (ich denke hier überwiegend an Schiffe). Angesichts dieser Überlegungen sind dann Störungsentwicklungen wie (3.9) und (3.10) mit einiger Skepsis zu betrachten, denn sie setzen ja die *Existenz* der linken Seite voraus.

Zum anderen hat bereits *Joseph (1973)* darauf hingewiesen, daß es eigentlich unstatthaft ist , die Potentiale $\phi^{(i)}$ wie in (3.11) in eine Taylorreihe um z=0 herum zu entwickeln. Denn die $\phi^{(i)}$ sind ja zunächst für z>0 gar nicht erklärt, während der linken Seite in (3.9) Werte auch für z>0 zukommen, sobald nämlich ζ positive Werte annimmt. Das Ergebnis der Untersuchung von *Joseph* (keineswegs eine vollständige Analyse des Problems) läßt sich etwa dahingehend zusammenfassen, daß dieses Vorgehen berechtigt ist, solange die Reihen (3.9) und (3.10) konvergieren und die $\phi^{(i)}$ dort,wo es nötig ist, harmonische Fortsetzungen über die Ebene z=0 hinaus besitzen - zwei in der Regel keineswegs triviale Voraussetzungen. Die Fortsetzbarkeit bedeutet insbesondere, daß $\phi^{(1)}$ bei (x,y,0,t) bezüglich x, y und z analytisch sein muß, wenn dort $\zeta^{(1)}$ positiv ist.Diese Voraussetzung ist beim stationären Problem regelmäßig nicht erfüllt, und zwar mindestens "im Schatten" des singulären Trägers der Druckverteilung (siehe Abschnitt 11).

*) Mit dieser Problematik befaßt sich aus *experimenteller* Sicht der Aufsatz von *Miyata-Inui-Kajitani (1979)*. Hier werden z.B. sowohl die nichtlinearen als auch die linearen Randbedingungen an Messungen nachgeprüft.

§4 Das Dirichletproblem im Halbraum

Die Grundidee der vorliegenden Untersuchung ist, wie bereits angekündigt, die *Zerlegung* des Randwertproblems (3.23),(3.24) in zwei etwas einfachere Aufgaben, nämlich die Lösung einer Differentialgleichung auf dem Rande und die Lösung eines Dirichletproblems. In diesem Abschnitt soll die genannte Zerlegung vorgenommen werden (Satz 4.4)

Ein klassisches Ergebnis (siehe etwa *Jeffreys-Swirles (1956),14.113,* für den 2-dimensionalen Fall) besagt, daß die Lösung des *Dirichletproblems*

$$\Delta u = 0 \quad \text{für } z<0 \quad ,$$

$$u = f \quad \text{für } z=0 \quad ,$$

wobei f eine gegebene Funktion ist, in der Form

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z + i\xi x + i\eta y)\, \hat{f}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \qquad (4.1a)$$

geschrieben werden kann.Wir wollen zunächst versuchen, den Gültigkeitsbereich dieser Formel bzw. ihrer natürlichen Verallgemeinerung

$$u(x,y,z) = \mathfrak{F}_2^{-1}\{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)\mathfrak{F}_2 f\} \qquad (4.1b)$$

in dem für den Rest der Arbeit notwendigen Umfang aufzuklären.

Als erstes werden wir festlegen, was unter einer Lösung des Dirichletproblems verstanden werden soll.

Definition 4.1 Sei $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Eine Abbildung

$$\tilde{A} : \begin{cases} (-\infty,0] \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \\ z \longmapsto \tilde{A}(z) \end{cases}$$

heißt *Lösung des Dirichletproblems für* A, wenn gilt:

a) $\tilde{A} \in C^0((-\infty,0];\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)) \cap C^2((-\infty,0);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$;

b) $\Delta\tilde{A} = 0 \quad$ für $z<0$;

c) $\lim_{z\uparrow 0} \tilde{A}(z) = A \quad$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

d) $\lim_{z\uparrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z)$ existiert in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

e) $\lim_{z\downarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+|z|}\,\tilde{A}(z)\right) = 0 \quad$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

f) $\lim_{z\downarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+|z|}\,\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z)\right) = 0 \quad$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

Bemerkung Dieser Lösungsbegriff wurde gewählt, weil er eng genug ist, um die nun folgenden Aussagen zu erlauben, aber auch weit genug, um die später auftretenden Fälle zu erfassen. Man beachte, daß die Wahl der Topologie in $\mathcal{S}'$ für die Konvergenz von *Folgen* unerheblich ist; schwache Konvergenz impliziert hier starke Konvergenz (siehe etwa *Treves (1967),S.358).*

Lemma 4.1 Es existiert *höchstens eine* Lösung des Dirichletproblems für $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Beweis: Sei $\tilde{A}$ eine Lösung des Dirichletproblems für A=0. Wir müssen zeigen, daß $\tilde{A}$ verschwindet. Dazu definieren wir eine Abbildung $\bar{A}$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ durch

$$\bar{\tilde{A}}(z) := \begin{cases} \tilde{A}(z) & \text{für } z \leq 0 \\ -\tilde{A}(-z) & \text{für } z > 0 \end{cases}$$

Wegen a) gehört $\bar{A}$ zu $C^0(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)) \cap C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$. Die Differentialquotienten $\partial/\partial z\, \bar{A}(0)$ und $\partial^2/\partial z^2\, \bar{A}(0)$ existieren und sind gleich den existierenden Grenzwerten für z=0; dies folgt aus dem Mittelwertsatz (etwa in der Form von *Dieudonné (1960), 8.5.3*) und für $\partial^2/\partial z^2\, \bar{A}$ aus b) und c). Dann gilt aber

$$\Delta \bar{A} = 0 \tag{4.2}$$

für *alle* $z \in \mathbb{R}$ (Schwarz'sches Reflektionsprinzip).

Wegen e) ist

$$z \longmapsto \bar{A}(z)$$

durch ein Polynom beschränkt. Nach einem bekannten Kriterium (siehe etwa *Treves (1967), Theorem 25.4*) gehört $\bar{A}$ dann zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ und kann deshalb mit einem Element aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ identifiziert werden (*Treves (1967), s.534*). Aus (4.2) folgt jetzt

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\, \mathcal{F}_3 \bar{A} = 0 \quad ,$$

d.h. die 3-dimensionale Fouriertransformierte von $\bar{A}$ hat ihren Träger im Nullpunkt, was wiederum bedeutet, daß $\bar{A}$ selbst ein *Polynom* ist.

Mit elementaren Überlegungen schließt man jetzt aus $\bar{A}$=0 für z=0 und der Bedingung e), daß $\bar{A}$ und damit auch $\tilde{A}$ verschwindet.

Bemerkung Die Funktion u(x,y,z) = z zeigt, daß die Bedingung e) nicht mehr wesentlich abgeschwächt werden kann, ohne daß die Eindeutigkeit verloren geht. Auch das Verlassen von $\mathcal{S}'$ führt zu Nichteindeutigkeit: u(x,y,z) = exp(x) sin z wäre eine beschränkte C^∞-Abbildung $\mathbb{R} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ mit u=0 für z=0 und (4.2).

Die *Existenz* einer Lösung des Dirichletproblems im Sinne von Definition 4.1 läßt sich nicht für jedes $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ zeigen; wir erfassen jedoch eine große Klasse von Distributionen mit

Lemma 4.2 Sei $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, $A = A_1 + A_2$, wobei $\mathcal{F}_2 A_1$ lokal integrierbar und $(0,0) \notin \operatorname{supp} \mathcal{F}_2 A_2$. Dann gibt es eine Lösung des Dirichletproblems für A, und sie hat die Form

$$\tilde{A}(z) = \mathcal{F}_2^{-1}\{ \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)\, \mathcal{F}_2 A\} \tag{4.3}$$

(vgl. (4.1)). Die Restriktion von $\frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}$ auf die Ebene z=0 ist

$$\frac{\partial A}{\partial z} := \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}(0) = \mathcal{F}_2^{-1}(\sqrt{\xi^2+\eta^2} \cdot \mathcal{F}_2 A) \quad . \tag{4.4}$$

Beweis: Da $(\xi,\eta) \longmapsto \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)$ für $z \neq 0$ nicht unendlich oft differenzierbar ist, gehört diese Funktion nicht zum Raum $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$ der Multiplikatoren auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, d.h. im allgemeinen ist das Produkt

$$\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z) \cdot T \tag{4.5}$$

für beliebiges $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ nicht erklärt. Unter den genannten Voraussetzungen ist es jedoch nicht schwer, das Produkt (4.5) für $T = \mathcal{F}_2 A$ einwandfrei zu definieren.

a) $T = \mathcal{F}_2 A_1$; dann ist (4.5) wieder eine lokal integrierbare Funktion, denn für alle $z \leq 0$ ist $\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ferner ist

$$z \longmapsto \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z) \cdot f$$

bei gegebenem $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ mit kompaktem Träger eine unendlich oft differenzierbare Abbildung von $(-\infty,0]$ nach $L^1(\mathbb{R}^2)$, welche für $z \downarrow -\infty$ mit allen Ableitungen in L^1 gegen 0 konvergiert. Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß der Träger von A_1 kompakt ist (den "Rest" schlagen wir zu A_2), erfüllt dann

$$\tilde{A}_1(z) := \mathcal{F}_2^{-1}\{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)\,\mathcal{F}_2 A_1\} \tag{4.6}$$

die Bedingungen a) - f) in Definition 4.1, ist also Lösung des Dirichletproblems für A_1.

b) $T = \mathcal{F}_2 A_2$. Wegen $(0,0) \notin \operatorname{supp} \mathcal{F}_2 A_2$ findet man eine Umgebung U von (0,0) mit $U \cap \operatorname{supp} \mathcal{F}_2 A_2 = \emptyset$. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\phi \subset U$, $\phi(0,0)=1$, $\phi \geq 0$. Dann gehört für jedes $z \leq 0$ die Funktion

$$e_z(\xi,\eta) := \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\phi(\xi,\eta)}\,z)$$

zu $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$ (siehe etwa *Treves (1967), Theorem 25.5*), d.h.

$$T \longmapsto e_z \cdot T$$

ist eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ in sich. Für $\operatorname{supp} T \cap U = \emptyset$ ist dann aber

$$e_z \cdot T = \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z) \cdot T \quad . \tag{4.7}$$

Die Bedingungen a) - f) in Definition 4.1 lassen sich jetzt für

$$\tilde{A}_2(z) := \mathcal{F}_2^{-1}\{e_z \cdot \mathcal{F}_2 A_2\} \tag{4.8}$$

unschwer nachprüfen, und es ist $\lim\limits_{z\downarrow-\infty} \tilde{A}_2(z) = 0 = \lim\limits_{z\downarrow-\infty} \frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_2(z)$.
Die Darstellungen (4.3) und (4.4) ergeben sich jetzt unmittelbar aus (4.6),(4.7) und (4.8) sowie Lemma 4.1.

Bemerkung Nur solche Distributionen A, deren Fouriertransformierte im Ursprung nicht mehr lokal integrierbare Singularitäten besitzen, bereiten also Schwierigkeiten bei der Lösung des Dirichletproblems. Für $A(x,y) = x^2$ etwa, $\mathcal{F}_2 A = -4\pi^2 \delta_{\xi\xi}$, läßt sich e) nicht mehr erfüllen (siehe Lemma 4.6).

Im Beweis von Lemma 4.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß aus den Eigenschaften a) und d) in Definition 4.1 mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Existenz des Differentialquotienten $\partial/\partial z\, \tilde{A}(0)$ und die Identität

$$\lim_{z\uparrow 0} \frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(z) = \frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}(0)$$

gefolgert werden können. Unter Verwendung der Potentialgleichung ergibt sich durch Induktion nach der Ableitungsordnung mit demselben Schluß

$$\tilde{A} \in C^\infty(\,(-\infty,0];\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)\,) \tag{4.9}$$

Insbesondere gilt dann

Lemma 4.3 Sei $\tilde{A}$ Lösung des Dirichletproblems für $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Für jeden linearen Differentialoperator $P(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ mit konstanten Koeffizienten existiert

$$PA := \lim_{z\uparrow 0} P\tilde{A}(z) \tag{4.10}$$

als Grenzwert in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, und $P\tilde{A}$ ist Lösung des Dirichletproblems für PA.

Beweis: Die Existenz von PA sowie die Bedingungen a), c) und d) folgen aus (4.9). Die übrigen Bedingungen sind offensichtlich ebenfalls erfüllt (alle höheren z-Ableitungen lassen sich über die Laplacegleichung in x- und y-Ableitungen verwandeln, und dies sind stetige Operationen auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$).

Wir können jetzt Randwertprobleme zerlegen:

Satz 4.4 Sei

$$B(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z) = B_1(\partial/\partial x,\partial/\partial y) + B_2(\partial/\partial x,\partial/\partial y)\partial/\partial z \quad (4.11)$$

ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten.

Vorgelegt sei die Randwertaufgabe

$$B\tilde{u} = f \qquad \text{für } z=0 \quad (4.12)$$

$$\Delta\tilde{u} = 0 \qquad \text{für } z<0 \quad (4.13)$$

Definiert man den Differentialoperator P durch

$$P(\partial/\partial x,\partial/\partial y) := B_1^2 + B_2^2\cdot(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \quad , \quad (4.14)$$

und besitzt die Differentialgleichung

$$Pv = f$$

eine Lösung $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, *für die eine Lösung* $\tilde{v}$ *des Dirichletproblems existiert*, so ist

$$\tilde{u} := B'\tilde{v} := (B_1 - B_2\partial/\partial z)\tilde{v}$$

eine Lösung der Randwertaufgabe (4.12),(4.13).

Beweis:

$$B\tilde{u} = BB'\tilde{v} = P\tilde{v} \qquad \text{für } z<0$$

wegen der Laplacegleichung. Lemma 4.3 besagt gerade, daß dies auch noch für z=0 richtig ist. Also existiert $B\tilde{u}$ auch für z=0, und

$$\lim_{z\uparrow 0} B\tilde{u} = Pv = f$$

Die Laplacegleichung (4.13) ist "sowieso" erfüllt.

Von nun an sei, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, stets

$$B(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.15)$$

und, mit den obigen Bezeichnungen,

$$B'(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.16)$$

sowie

$$P(\partial/x,\partial/\partial y) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad . \quad (4.17)$$

Bemerkung Nach *Hörmander (1958a), S.245* ist das *Randwertproblem* (4.12),(4.13) genau dann elliptisch, wenn der *Differentialoperator* (4.14) elliptisch ist; siehe dazu Abschnitt 6.

Wir benötigen noch eine leichte Verallgemeinerung von Lemma 4.3. Sei $\phi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$, so daß also

$$T \longmapsto \phi\cdot T$$

eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ in sich ist . Wir setzen zu $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

$$S_\phi := \mathfrak{F}_2^{-1}\{\phi\cdot\mathfrak{F}_2 S\} \quad . \quad (4.18)$$

Lemma 4.5 Sei $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und $\tilde{S}$ die Lösung des Dirichletproblems für S. Dann ist

$$z \longmapsto (\tilde{S}(z))_\phi$$

Lösung des Dirichletproblems für S_ϕ (d.h. $(\widetilde{S_\phi}) = (\tilde{S})_\phi$).

Beweis: Für jedes $z \leq 0$ und jedes $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ haben wir

$$\begin{aligned}
\langle (\tilde{S}(z))_\phi, \psi \rangle &= \langle \mathcal{F}_2^{-1}\{\phi \cdot \mathcal{F}_2 \tilde{S}(z)\}, \psi \rangle \\
&= \langle \phi \cdot \mathcal{F}_2 \tilde{S}(z), \mathcal{F}_2^{-1}\psi \rangle = \langle \mathcal{F}_2 \tilde{S}(z), \phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\psi \rangle \\
&= \langle \tilde{S}(z), \mathcal{F}_2\{\phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\psi\} \rangle
\end{aligned}$$

Die Bedingungen a) und c) - f) in Definition 4.1 sind Aussagen vom Typ "für alle $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ hat

$$g_\omega(z) := \langle \tilde{S}(z), \omega \rangle$$

die Eigenschaft ..."; da sie nach Voraussetzung für alle ω erfüllt sind, gelten sie insbesondere für ω von der Form

$$\omega = \mathcal{F}_2\{\phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\psi\} \quad ,$$

wenn ψ den Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ durchläuft.

Es ist also nur noch b) nachzuprüfen. Nach Voraussetzung gilt hier

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle \tilde{S}(z), \omega \rangle = \langle -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\tilde{S}(z), \omega \rangle \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Wie oben schließen wir daraus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle (\tilde{S}(z))_\phi, \psi \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle \tilde{S}(z), \mathcal{F}_2\{\phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\psi\} \rangle \\
&= \langle -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\tilde{S}(z), \mathcal{F}_2\{\phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\psi\} \rangle = \langle \tilde{S}(z), \mathcal{F}_2\{(\xi^2+\eta^2) \cdot \phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\psi\} \rangle \\
&= \langle \tilde{S}(z), \mathcal{F}_2\{\phi \cdot \mathcal{F}_2^{-1}\{-(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\psi\}\} \rangle = \langle (\tilde{S}(z))_\phi, -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\psi \rangle \\
&= \langle -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\tilde{S}(z))_\phi, \psi \rangle
\end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, und das war noch zu zeigen.

Zum Abschluß lösen wir das Dirichletproblem für Polynome.

Lemma 4.6 Sei $A = Q(x,y)$ ein Polynom in x und y. Es existiert genau dann eine Lösung $\tilde{A}$ des Dirichletproblems für A, wenn

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})A = 0 \quad . \tag{4.19}$$

Für $\tilde{A}$ gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{A} = 0 \quad . \tag{4.20}$$

Beweis: Wenn (4.19) erfüllt ist, so können wir A konstant fortsetzen, und die Eigenschaften a) - f) in Definition 4.1 folgen in trivialer Weise, ebenso (4.20).

Sei umgekehrt $\tilde{A}$ eine Lösung des Dirichletproblems für A=Q, und Q_m der Hauptteil von Q. Es genügt, (4.19) für Q_m zu beweisen, denn dann existiert eine Lösung des Dirichletproblems für Q_m, und $Q-Q_m$ kann genauso behandelt werden wie Q. Durch Induktion ergibt sich dann die Behauptung.

Sei dazu

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\ Q_m = \sum_{j+k=m-2} a_{jk} x^j y^k \quad .$$

Wir bilden

$$Q^{jk} := \frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\ Q \quad .$$

Dann ist

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\ Q^{jk} = j!k!\ a_{jk} = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\ Q_m^{jk} \quad ,$$

da alle Glieder niedrigerer Ordnung entfallen. Nach Lemma 4.3 ist $\partial^{j+k}/\partial x^j \partial y^k\ \tilde{A}$ Lösung des Dirichletproblems für Q^{jk}. Wir zeigen jetzt, daß $a_{jk} = 0$ gilt; da j und k beliebig sind, folgt daraus, daß

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\ Q_m = 0$$

und damit die Behauptung.

Nach Konstruktion ist Q^{jk} ein Polynom vom Grad 2, also Linearkombination der Polynome 1, x, y, xy, x^2-y^2 und x^2. Die ersten fünf dieser Polynome genügen der Gleichung (4.19); wir müssen also nur noch nachweisen, daß das Polynom x^2 keine Lösung des Dirichletproblems erlaubt.

Wir setzen deshalb $B(x,y) = x^2$ und nehmen an, daß $\tilde{B}$ eine Lösung des Dirichletproblems für B ist. Nach Lemma 4.3 und Lemma 4.1 haben wir

$$\partial\tilde{B}/\partial x = 2x \quad ,$$

$$\partial\tilde{B}/\partial y = 0 \quad .$$

$\tilde{B}$ hat also die Form

$$\tilde{B}(x,y,z) = x^2 + g(z) \quad ; \qquad (4.21)$$

das ist ein klassischer Schluß, der auch auf Distributionen angewandt werden darf (siehe etwa *Schwartz (1973), Chap. 4, §5, ex. 1*).

Wegen der Laplacegleichung haben wir ferner

$$g''(z) = -2 \quad ,$$

d.h. (gleiche Argumentation wie bei (4.21))

$$g(z) = -z^2 + c_1 z + c_2$$

für irgendwelche Konstanten c_1 und c_2. Dann kann $\tilde{B}$ aber nicht die Bedingung e) erfüllen; es gibt also keine Lösung des Dirichletproblems für $B(x,y) = x^2$.

Daraus folgt, daß der Koeffizient von x^2 in der Darstellung von Q^{jk} als Linearkombination der oben genannten Basispolynome verschwinden muß. Demnach ist das Polynom Q^{jk} harmonisch, und deshalb

$$a_{jk} = 0 \quad .$$

§5 Exkurs: Das Anfangswertproblem

Im Gegensatz zur Randwertaufgabe (3.23),(3.24) bietet die Anfangswertaufgabe

$$\Delta u = 0 \qquad \text{für } t \geq 0,\ z<0 \tag{5.1}$$

$$u_{tt} + u_z = f \qquad \text{für } t>0,\ z=0 \tag{5.2}$$

$$u = v_0 \qquad \text{für } t=0,\ z=0 \tag{5.3}$$

$$u_t = v_1 \qquad \text{für } t=0,\ z=0 \tag{5.4}$$

für sich genommen keine größeren Schwierigkeiten. Sie wurde deshalb bereits in einem sehr viel allgemeineren Rahmen (einschließlich eingetauchter Körper, Körper an der Wasseroberfläche und für endliche Wassertiefe) eingehend untersucht (siehe *Friedman-Shinbrot(1967),(1969); Garipov (1967); Lau (1972)*); sogar ein nichtlineares Problem aus diesem Bereich ist schon erfolgreich behandelt worden (*Shinbrot (1976)*).

Hier soll nur in einer kurzen Skizze das grundsätzliche Lösungsverhalten für das Problem (5.1)-(5.4) angedeutet werden. Die Methode besteht, in leichter Verallgemeinerung des Ansatzes von *Kampé de Fériet-Kotik (1953)*, in der Anwendung der Fouriertransformation und der Hilfsmittel aus Abschnitt 4. Dann ergibt sich die Lösung durch eine Konstruktion, mit der auch das Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

gelöst werden kann (siehe dazu *Treves (1975), sec.13*).

Wir präzisieren zunächst wieder den Lösungsbegriff.

Definition 5.1 Seien v_0 und v_1 aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, f eine stetige Abbildung von $[0,\infty)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Das Paar $(u,\tilde{u})$, bestehend aus den Abbildungen

$$u: \begin{cases} [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \\ t \longmapsto u(t) \end{cases}$$

und

$$\tilde{u}: \begin{cases} [0,\infty) \times (-\infty,0] \longrightarrow (\mathbb{R}^2) \\ (t,z) \longmapsto u(t,z) \end{cases}$$

heißt *Lösung der Randwertaufgabe (5.1)-(5.4)*, wenn gilt:

a) Für jedes $t \geq 0$ ist

$$z \longmapsto \tilde{u}(t,z)$$

Lösung des Dirichletproblems für u(t);

b) u ist zweimal stetig differenzierbar, und

$$u_{tt} + u_z = f \qquad \text{für } t>0;$$

c) $u(0) = v_0$;

d) $u_t(0) = v_1$.

Bemerkung u_z wurde in (4.4) definiert.

In fast vollständiger Analogie zur Wellengleichung gilt dann

Satz 5.1 Sei v_0 aus $H^s(\mathbb{R}^2)$, v_1 aus $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^2)$, f aus $C^0([0,\infty);H^{s-1/2}(\mathbb{R}^2))$
Dann gibt es genau eine Lösung $(u,\tilde{u})$ von (5.1)-(5.4), und

$$u \in \bigcap_{k=0,1,2} C^k([0,\infty); H^{s-k/2}(\mathbb{R}^2)) \tag{5.5}$$

Beweis: a) Existenz Die Daten f(t), v_0 und v_1 erfüllen sämtlich die Voraussetzungen von Lemma 4.2 (ihre Fouriertransformierten sind sogar lokal *quadratisch* integrierbar). Wir nehmen deshalb einmal an, daß dasselbe auch für u gilt - es wird sich sogleich herausstellen, daß diese Annahme berechtigt ist. Unter Benutzung von (4.4) werden wir also auf die Anfangswertaufgabe

$$\hat{u}_{tt} + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,\hat{u} = \hat{f} \qquad \text{für } t>0$$
$$\hat{u}(0) = \hat{v}_0$$
$$\hat{u}_t(0) = \hat{v}_1$$

einer *gewöhnlichen* Differentialgleichung geführt. In bekannter Weise (siehe *Treves (1975), sec.13*) erhält man als Lösung

$$\hat{u}(t) = \hat{v}_0 \cos \rho t + \hat{v}_1 \frac{\sin \rho t}{\rho} + \int_0^t \hat{f}(s)\, \frac{\sin\rho(t-s)}{\rho}\, ds, \tag{5.6}$$

wobei

$$\rho = \rho(\xi,\eta) = (\xi^2+\eta^2)^{1/4} \quad . \tag{5.7}$$

Genau dieselbe Struktur hat die Lösung der Wellengleichung, nur ist dort

$$\rho = (\xi^2+\eta^2)^{1/2} \quad . \tag{5.8}$$

Der Beweis von (5.5) läßt sich deshalb bei *Treves (1975)* nachlesen; man ersetze im dort angegebenen Beweis lediglich (5.8) durch (5.7).

Aus (5.5) ergibt sich insbesondere mit Hilfe von Lemma 4.2, daß die Bedingung a) in Definition 5.1 erfüllt werden kann; die übrigen Bedingungen ergeben sich aus (5.5) und (5.6).

b) Eindeutigkeit Sei

$$v_0 = v_1 = f(t) = 0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$$

für alle $t\geq 0$, $(u,\tilde{u})$ eine zugehörige Lösung der Anfangswertaufgabe (5.1)-(5.4) im Sinne von Definition 5.1. Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ bilden wir (siehe (4.18))

$$u_\phi(t) = \mathcal{F}_z^{-1}\{\phi \cdot \hat{u}(t)\}$$

Wir dürfen wegen $C_0^\infty \subset \mathcal{O}_M$ das Lemma 4.5 anwenden; demnach ist

$$\tilde{u}_\phi(t,z) = \mathcal{F}_z^{-1}\{\phi \cdot \hat{\tilde{u}}(t,z)\}$$

die zugehörige Lösung des Dirichletproblems.

Offensichtlich gilt

$$(u_{tt})_\phi = (u_\phi)_{tt}$$

sowie

$$(u_z)_\phi = (u_\phi)_z \quad ,$$

und das hat zur Folge, daß dann auch $(u_\phi,\tilde{u}_\phi)$ Lösung des vollhomogenen Problems ist.

Sei jetzt $(0,0) \notin \operatorname{supp} \phi$; dann läßt sich auf $u_\phi(t)$ das Lemma 4.2 anwenden. Es gilt also (4.4), und wir erhalten durch Fouriertransformation

$$(\hat{u}_\phi)_{tt} + \sqrt{\xi^2+\eta^2}\,\hat{u}_\phi = 0 \qquad \text{für } t>0$$

$$\hat{u}_\phi(0) = 0$$

$$(\hat{u}_\phi)_t(0) = 0 \quad .$$

Die einzige Distributionslösung dieser Anfangswertaufgabe ist aber die identisch verschwindende Abbildung, oder

$$\hat{u}_\phi(t) = \phi \cdot \hat{u}(t) = 0 \ .$$

Der Träger von $\hat{u}(t)$ *ist also für alle* $t \geq 0$ *im Ursprung enthalten.*

Deshalb können wir Lemma 4.6 anwenden und finden

$$u_z(t) = 0 \quad .$$

für alle $t \geq 0$. Dann bleibt vom Anfangswertproblem

$$u_{tt} = 0 \qquad \text{für } t \geq 0 \ ,$$

$$u(0) = 0 \ ,$$

$$u_t(0) = 0 \ ;$$

die einzige Lösung hierfür ist wieder

$$u = 0 \ ,$$

und das war zu zeigen.

Bemerkungen 1) Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist vor allem deshalb so einfach, weil *Daten* mit endlichen verallgemeinerten Energieintegralen (also Daten aus irgendwelchen H^s-Räumen) auch *Lösungen* mit solchen Eigenschaften produzieren (und nur dieser Fall ist auch physikalisch interessant). Bei der Randwertaufgabe dagegen ist auch für Daten von diesem Typ die Lösung nie quadratisch integrierbar (eventuelle pathologische Fälle ausgenommen).

2) Ebenso wie bei der Wellengleichung und im Gegensatz zu hypoelliptischen Problemen (siehe etwa *Hörmander (1976), Theorem 2.3.4 und Theorem 4.1.5*) ist die Regularitätsaussage (5.5) *nicht optimal*: aus (5.5) ergibt sich nur

$$u_{tt} + u_z \in C^0([0,\infty);\ H^{s-1}(\mathbb{R}^2)),$$

während (5.2) und die Voraussetzungen von Satz 5.1 besagen, daß diese Funktion in Wirklichkeit sogar zu

$$C^0([0,\infty);\ H^{s-1/2}(\mathbb{R}^2))$$

gehört. Durch Lösung der Anfangswertaufgabe und nachfolgende Anwendung des Differentialoperators verliert man also Information. Diese Erscheinung werden wir auch beim Randwertproblem antreffen.

§6 *Allgemeine Bemerkungen zu den Operatoren B,B' und P*

Das Lösungsverhalten elliptischer Randwertaufgaben ist in der grundlegenden Arbeit von *Agmon-Douglis-Nirenberg (1959)* eindeutig charakterisiert worden. Das System der Randoperatoren muß, damit auch am Rande *optimale* Regularitätsaussagen gelten, einer algebraischen Bedingung genügen, die in der erwähnten Arbeit als "Complementing Condition" eingeführt wird*). Ich habe an anderer Stelle (*Eggers-Gamst (1978),Appendix B*) nachgewiesen, daß der Randoperator

$$B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \tag{6.1}$$

in Verbindung mit dem Laplaceoperator eine *nicht-elliptische* Randwertaufgabe definiert, da die "Complementing Condition" von *Agmon-Douglis-Nirenberg* nicht erfüllt ist. Den Anstoß zu dieser Untersuchung gab eine Arbeit von *Dern*, in der die Regularitätssätze von *Agmon-Douglis-Nirenberg* benutzt wurden (siehe *Dern (1977),Beweis von Prop.5.2*).

Eine etwas verfeinerte Begriffsbildung bei der Klassifikation von Randwertaufgaben zu elliptischen bzw. hypoelliptischen Differentialoperatoren benutzt *Hörmander (1958a)*. Die dort entwickelte Theorie ist zwar auf Operatoren mit konstanten Koeffizienten und Halbraumprobleme beschränkt, aber eben dieser Fall liegt ja hier vor. Genauer gesagt wird unser Randoperator (6.1) dort sogar als Beispiel diskutiert (siehe *Hörmander (1958a), (3.10),(3.11),(3.12)*). Das Ergebnis der Diskussion läßt sich wie folgt formulieren:

Satz 6.1 (Hörmander) Das Randwertproblem

$$Bu = f \qquad \text{für } z=0 \tag{6.2}$$

$$\Delta u = g \qquad \text{für } z<0 \tag{6.3}$$

ist *nicht hypoelliptisch* (also insbesondere *nicht elliptisch*). Ersetzt man dagegen B durch

$$B' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z} \quad , \tag{6.4}$$

so ist das entstehende Problem *hypoelliptisch*, aber *nicht elliptisch*.

Für die genauen Definitionen möchte ich den Leser auf die zitierte Arbeit verweisen; die genannten Begriffe spielen im folgenden Text praktisch keine Rolle mehr. Ganz knapp läßt sich jedoch sagen, daß die Lösungen hypoelliptischer (bzw. elliptischer) Randwertaufgaben in der Umgebung eines Punktes genau dann unendlich oft differenzierbar (bzw. analytisch) sind, wenn die Daten (also in (6.2) und (6.3) die rechten Seiten f und g) dort diese Eigenschaften besitzen.

In Abschnitt 4 gewannen wir aus (6.1) und (6.4) unter Benutzung der Laplacegleichung den tangentialen Differentialoperator

$$P = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad . \tag{6.5}$$

Satz 4.4 gestattet es, Aussagen über Lösungen der Randwertaufgabe (6.2),(6.3) mit g=0 auf dem Umweg über Lösungen der Differentialgleichung

$$Pu = f$$

zu gewinnen. Die erste Frage, die sich hier stellt, lautet deshalb: Was für In-

*) Siehe *Agmon-Douglis-Nirenberg (1959,S.626,S.633)*. Die Bedingung wurde erstmalig von *Lopatinskij* formuliert. In einer etwas anderen Form findet man sie bei *Hörmander (1976),S246*, und *Dieudonné(1978b),S.98*. Eine ausführliche Diskussion dieser Bedingung gibt *Treves (1975),S.367ff*.

formationen liefert die allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten über den Operator (6.5) ?

Wir wollen P in diesem Abschnitt nur ganz grob klassifizieren. Die Grundlage dafür bildet die Kenntnis der Nullstellen seines *Symbols*

$$\sigma_P(\xi,\eta) = \xi^4 - \xi^2 - \eta^2 \quad , \tag{6.6}$$

d.h. der Fouriertransformierten von $P\delta$, bzw. seines Hauptsymbols

$$\sigma_P^0(\xi,\eta) = \xi^4 \quad .$$

Lemma 6.2 Für $\eta \in \mathbb{R}$ besitzt das Polynom

$$\sigma_P(\zeta,\eta) = \zeta^4 - \zeta^2 - \eta^2$$

die Nullstellen

$$\zeta_1(\eta) = \xi_1(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\eta^2} + \frac{1}{2}} \quad , \tag{6.7}$$

$$\zeta_2(\eta) = -\xi_1(\eta) \quad ,$$

$$\zeta_3(\eta) = i\xi_3(\eta) = i\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\eta^2} - \frac{1}{2}} \quad , \tag{6.8}$$

$$\zeta_4(\eta) = -i\xi_3(\eta) \quad .$$

Die nichtnegativen Funktionen ξ_1 und ξ_3 sind beliebig oft differenzierbar (ξ_3 für $\eta \neq 0$). Für $\eta \geq 0$ gilt

$$\eta = \xi_1(\eta) \cdot \xi_3(\eta) \quad , \tag{6.9}$$

$$\frac{d\xi_1}{d\eta}(\eta) = \frac{\eta}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1} = \frac{\xi_3}{\xi_1^2+\xi_3^2} \quad , \tag{6.10}$$

$$\frac{d\xi_3}{d\eta}(\eta) = \frac{\xi_1}{\xi_1^2+\xi_3^2} \qquad (\eta \neq 0) \quad . \tag{6.11}$$

Außerdem ist ξ_3^2 überall in $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und damit auch

$$\xi_1^2+\xi_3^2 = \sqrt{1+4\eta^2} \quad . \tag{6.12}$$

Der *Beweis* besteht aus elementaren Rechnungen und kann hier fortgelassen werden.

Für den Rest der Arbeit verstehen wir unter ξ_1 und ξ_3 immer die durch (6.7) und (6.8) definierten Funktionen.

Lemma 6.3 Die Menge M der *reellen* Nullstellen des Symbols (6.6) besteht aus 3 disjunkten zusammenhängenden C^∞-Mannigfaltigkeiten, nämlich

$$\{(0,0)\} \quad ,$$

$$M_0^+ := \{(\xi,\eta) \mid \xi = \xi_1(\eta)\} \quad , \tag{6.13}$$

$$M_0^- := \{(\xi,\eta) \mid \xi = -\xi_1(\eta)\} \quad . \tag{6.14}$$

Beweis: Klar nach Lemma 6.2.

Daraus ergeben sich die folgenden Aussagen:

Lemma 6.4 a) P ist *nicht hypoelliptisch* (Definition von *Hörmander (1976), S.99*), also auch nicht elliptisch;
b) P ist *partiell hypoelliptisch* bezüglich der Geraden x=0 und y=0 (Definition

von *Hörmander (1976),S.106*);
c) P ist *nicht hyperbolisch* (Definition von *Hörmander (1976),S.132*).

Beweis: a) σ_P besitzt reelle Nullstellen außerhalb jeder beschränkten Menge, siehe (6.13) , (6.14).

b) Siehe Example, *Hörmander (1976),S.107*.

c) Nach einem Ergebnis von *Svensson (1971)* muß ein hyperbolischer Operator schwächer (siehe *Hörmander (1976),S.70*) als sein Hauptteil sein. Der Hauptteil von P enthält jedoch keine Ableitungen nach y, so daß er nicht stärker als P sein kann.

Bemerkungen 1) P ist insbesondere *nicht strikt hyperbolisch* (Definition von *Hörmander (1976),S.137*), denn σ_P^0 besitzt mehrfache Nullstellen auf dem Einheitskreis $\xi^2+\eta^2=1$.

2) Aus c) und Theorem 5.6.2 in *Hörmander (1976)* ergibt sich, daß P keine Fundamentallösung mit Träger in einer Halbebene besitzen kann. Wir können deshalb darauf verzichten, eine derartige Fundamentallösung für P zu suchen (vgl. die Konstruktion der Fundamentallösung im nächsten Abschnitt).

Insgesamt besagt Lemma 6.4, daß uns für P eigentlich nur die *allgemeine* Theorie der linearen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten (Existenz einer Fundamentallösung etc.; siehe *Hörmander (1976),Chap.III*) zur Verfügung steht, denn P gehört zu keiner der besser erforschten *speziellen* Klassen von Operatoren. Dabei bildet Teil b) keineswegs eine Ausnahme, weil *jeder* Operator bezüglich einer geeigneten Hyperebene partiell hypoelliptisch ist.

Formal ist es auch möglich, den Operatoren B und B' ein Symbol zuzuordnen. Laut Lemma 4.2 wirkt $\partial/\partial z$ nämlich auf die Fouriertransformierte wie Multiplikation mit $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Man hätte dann

$$\sigma_B(\xi,\eta) = -\xi^2 + \sqrt{\xi^2+\eta^2} \tag{6.16}$$

$$\sigma_{B'}(\xi,\eta) = -\xi^2 - \sqrt{\xi^2+\eta^2} \tag{6.17}$$

Diese Darstellung haben wir aber nur unter den Voraussetzungen von Lemma 4.2 bewiesen, d.h. sie gelten nur außerhalb einer beliebigen Nullumgebung. Im Rahmen der Theorie der Fourier-Integral-Operatoren ist es nun zwar üblich, sich für Symbole nur außerhalb beschränkter Mengen zu interessieren, aber diese Theorie führt dann nur noch zu Näherungslösungen,d.h. an die Stelle der *Fundamentallösung* E zum Operator Q mit der Eigenschaft

$$Q\, E * u = u$$

tritt eine *Parametrix* E_0 mit

$$Q\, E_0 * u = u + L\, u$$

wobei L ein stark glättender Operator ist (siehe dazu die Bemerkungen bei *Dieudonné (1978a),S.136*).

Im vorliegenden Fall hielt ich es angesichts der expliziten klassischen Formeln für echte Fundamentallösungen nicht für angebracht, diesen Weg zu gehen. Dann erfordert aber der Gebrauch der Symbole (6.16) und (6.17) ziemliche Vorsicht, während die Diskussion von(6.6) keine großen Schwierigkeiten bietet.

Wir notieren noch

Lemma 6.5 Die einzige reelle Nullstelle von $\sigma_{B'}$ ist der Ursprung. Die reellen Nullstellen von σ_P sind auch Nullstellen von σ_B. Ferner gilt

$$\sigma_P = \sigma_{B'} \cdot \sigma_B \quad . \tag{6.18}$$

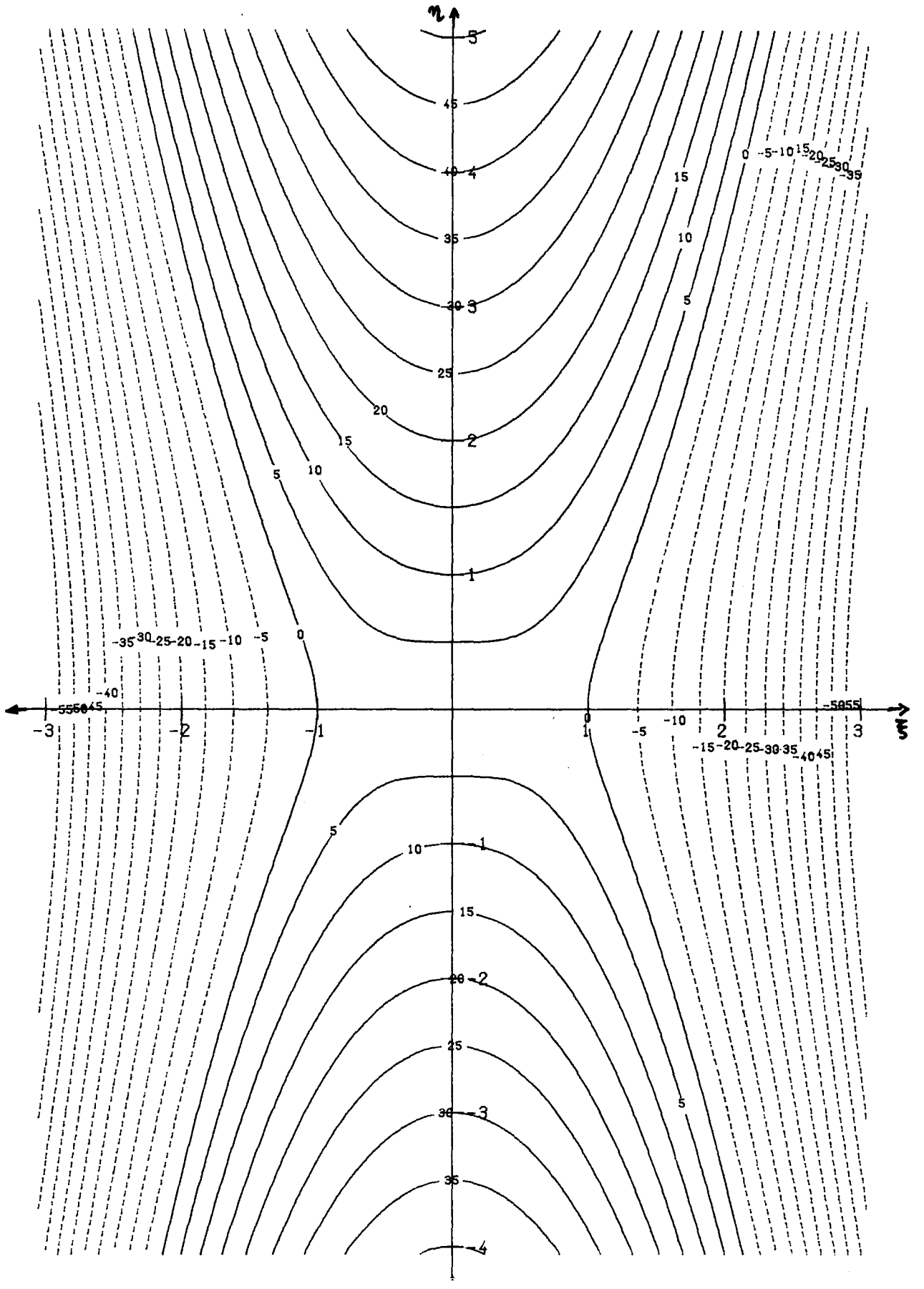

Fig.1 Höhenlinien der Funktion $\sigma_B \times 10^1$ (6.16).
Die Linien zum Niveau 0 entsprechen den Mannigfaltigkeiten M_0^+ und M_0^-.

In Übereinstimmung mit den bisherigen Vereinbarungen legen wir jetzt fest:

Definition 6.1 Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Eine Abbildung

$$\tilde{u} : \begin{cases} (-\infty, 0] \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \\ z \longmapsto \tilde{u}(z) \end{cases}$$

heißt *Lösung der Randwertaufgabe*

$$B\tilde{u} = f \qquad \text{für } z=0 \quad , \tag{6.19}$$

$$\Delta\tilde{u} = 0 \qquad \text{für } z<0 \quad , \tag{6.20}$$

wenn gilt:

a) $\tilde{u}$ ist Lösung des Dirichletproblems (Definition 4.1) für $u := \tilde{u}(o)$.

b) $Bu = f$.

§7 *Existenz*

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis eines Existenzsatzes für Lösungen der Randwertaufgabe (6.19),(6.20), wenn die rechte Seite f zu $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ gehört, also eine Distribution mit kompaktem Träger ist (Satz 7.6). Dazu betrachten wir zunächst die Differentialgleichung

$$P\,v = f \tag{7.1}$$

und zeigen, daß für eine bestimmte Lösung v dieser Gleichung das Dirichletproblem lösbar ist; Satz 4.4 liefert dann, daß

$$\tilde{u} = B'\,\tilde{v}$$

eine Lösung der Randwertaufgabe im Sinne von Definition 6.1 ist.

Diese indirekte Vorgehensweise wäre nicht notwendig, ginge es allein darum, einen Existenzsatz aufzustellen. Man erhält aber durch dieses Verfahren eine Reihe von Formeln, die später beim Beweis der Eindeutigkeits- und Regularitätssätze von großer Nützlichkeit sind. Außerdem ist unsere Methode als neuer, von bisher bekannten Existenzbeweisen unabhängiger Weg schon an sich interessant.

Wir wenden uns also als erstes der Gleichung (7.1) zu. Hier ist bekannt (*Hörmander (1958b)*), daß zu jedem $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ auch eine Lösung $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ existiert. Aber damit wissen wir noch nicht, ob das *Dirichletproblem* für dieses v lösbar ist. So genügt z.B. das Polynom

$$Q(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 12x^2$$

der *homogenen* Gleichung, aber es gibt keine Lösung des Dirichletproblems für Q (im Sinne von Definition 4.1), denn

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Q = -24$$

(siehe Lemma 4.6).

Ferner läßt sich ein Eindeutigkeitsprinzip auf der Grundlage einer solchen "reinen" Existenzaussage schwer formulieren. Wegen der Existenz unendlich vieler linear unabhängiger temperierter Lösungen der homogenen Gleichung, die dazu noch stets eine Lösung des zugehörigen Dirichletproblems erlauben (*freie Wellen, siehe Abschnitt 8*), scheint mir deshalb eine Charakterisierung *bestimmter* Lösungen von (7.1) kaum möglich zu sein, wenn man den Erzeugungsmechanismus für v nicht genau überblickt. Aus diesem Grunde werden wir eine *Fundamentallösung* E konstruieren und die Gleichung (7.1) durch Faltung von f mit dieser Fundamentallösung befriedigen. Damit wird die Existenz von Lösungen der Gleichung (7.1) auf die Existenz des Faltungsproduktes

$$v = E * f$$

zurückgeführt. Um zur ursprünglichen Randwertaufgabe zurückzukommen, müssen wir außerdem eine Lösung $\tilde{v}$ des Dirichletproblems für v konstruieren. Diese beiden Probleme lassen sich aber für eine hinreichend große und auch praktisch interessante Klasse von Distributionen (nämlich $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$) lösen *.

Für die Konstruktion der Fundamentallösung bemerken wir zunächst, daß die partielle Fouriertransformation $\mathcal{F}_y$ bezüglich y ein Isomorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ auf sich ist (das kann man mit denselben Methoden wie bei der "vollen" Fouriertransformation beweisen, aber auch über das Tensorprodukt, siehe etwa *Treves (1967)*,

---

* Diese Klasse ist jedoch *nicht* groß genug, um auch Theorie 2.Ordnung treiben zu können.

S.531 und 534) Hier ist natürlich

$$(\mathfrak{F}_y\phi)\ (x,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,y)\ \exp(-i\eta y)\ dy$$

für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ zu setzen.

Das Problem

$$P\ E = (\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\ E = \delta(x,y) = \delta(x)\cdot\delta(y) \qquad (7.2)$$

ist also, in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, äquivalent zu dem Problem

$$(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2)\ F = \delta(x)\cdot\mathbf{1}(\eta) \qquad (7.3)$$

(man setze $F = \mathfrak{F}_y E$, bzw. $E = \mathfrak{F}_y^{-1} F$).

Die Gleichung (7.3) ist nun eine gewöhnliche Differentialgleichung, die allerdings noch von dem Parameter η abhängt. Fundamentallösungen für gewöhnliche Differentialgleichungen lassen sich aber nach einem sehr übersichtlichen Verfahren gewinnen (siehe etwa *Treves (1975), sec.4*).

Lemma 7.1 Sei $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta \neq 0$ und

$$Q_\eta(\frac{d}{dx}) := \frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2} - \eta^2$$

a) Q_η besitzt genau eine Fundamentallösung $F_0(.,\eta)$ mit den Eigenschaften

1) $F_0(.,\eta) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$; (7.4)

2) $\lim_{x \to +\infty} F_0(x,\eta) = 0$. (7.5)

b) F_0 hat die Form

$$F_0(x,\eta) = -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2 + \xi_3^2)\xi_3} + H(-x)\frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1} \qquad (7.6)$$

Beweis: 4 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung

$$Q_\eta g = 0 \qquad (7.7)$$

sind

$$g_1(x,\eta) = \exp(i\xi_1 x)$$

$$g_2(x,\eta) = \exp(-i\xi_1 x)$$

$$g_3(x,\eta) = \exp(\xi_3 x)$$

$$g_4(x,\eta) = \exp(-\xi_3 x)$$

(siehe Lemma 6.2). Alle (Distributions-) Lösungen der Gleichung (7.7) lassen sich als Linearkombinationen dieser Basisfunktionen darstellen (siehe etwa *Schwartz (1973), Chap.V, Théorème IX*).

Die Ableitungen der durch (7.6) gegebenen Funktion F_0 sind

$$\frac{d}{dx} F_0(x,\eta) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(-x)\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2 + \xi_3^2)} + H(-x)\frac{\cos(\xi_1 x)}{(\xi_1^2 + \xi_3^2)}\ , \qquad (7.8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F_0(x,\eta) = -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_3 + \frac{\delta(x)}{\xi_1^2+\xi_3^2} - H(-x)\frac{\sin(\xi_1 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_1 - \frac{\delta(x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_3 - H(-x)\frac{\sin(\xi_1 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_1 \qquad (7.9)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}F_0(x,\eta) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(-x)\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_3^2 - H(-x)\frac{\cos(\xi_1 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_1^2 \qquad (7.10)$$

$$\frac{d^4}{dx^4}F_0(x,\eta) = -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_3^3 + \frac{\delta(x)\xi_3^2}{\xi_1^2+\xi_3^2} + H(-x)\frac{\sin(\xi_1 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_1^3 + \frac{\delta(x)\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_3^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_3^3 + H(-x)\frac{\sin(\xi_1 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\xi_1^3 + \delta(x) \qquad (7.11)$$

Daraus ergibt sich

$$Q_\eta F_0(x,\eta) = -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}(\xi_3^4 + \xi_3^2 - \eta^2) + H(-x)\frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1}(\xi_1^4 - \xi_1^2 - \eta^2) + \delta$$

$$= \delta \quad .$$

F_0 ist also Fundamentallösung von Q_η. Ferner ist F_0 stetig und beschränkt (für jedes feste η, als Funktion von x) und gehört deshalb zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Auch (7.5) ist offensichtlich erfüllt.

F_0 ist aber auch die *einzige* Fundamentallösung von Q_η mit diesen beiden Eigenschaften; denn keine nichttriviale Linearkombination von g_3 und g_4 gehört zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, und keine nichttriviale Linearkombination von g_1 und g_2 erfüllt (7.5).

Wegen

$$\xi_3 = \frac{|\eta|}{\xi_1}$$

(Lemma 6.2) ist der bezüglich x symmetrische Anteil von F_0

$$-\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}$$

für jedes feste x in keiner Umgebung von $\eta=0$ integrierbar. (7.6) liefert also noch keine natürliche Definition für eine Lösung F von (7.3) in der Umgebung von $\eta=0$. Es liegt jedoch nahe, F dort als *Pseudofunktion* zu interpretieren (siehe etwa *Schwartz (1973), S.38ff; Lavoine (1963)*). Sei dazu

$$\chi_{[-1,1]}(\eta) := \begin{cases} 1\,, & -1 \le \eta \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad (7.12)$$

wir definieren die Distribution $\mathrm{Pf}\,\frac{\chi_{[-1,1]}(\eta)}{|\eta|}$ durch

$$< \mathrm{Pf}\,\frac{\chi_{[-1,1]}(\eta)}{|\eta|}\,,\ \phi > := \int_{-1}^{1}\frac{\phi(\eta)-\phi(0)}{|\eta|}\,d\eta \qquad (7.13)$$

(vgl. *Dieudonné (1978a), 23.19, ex.3*).

Satz 7.2 a) Die Distribution aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \quad , \tag{7.14}$$

bestehend aus den lokal integrierbaren und für festes x bezüglich η integrierbaren Funktionen

$$F_1(x,\eta) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3} - \frac{\chi_{[-1,1]}(\eta)}{|\eta|}\right\} \tag{7.15}$$

und

$$F_2(x,\eta) = H(-x)\,\frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1} \tag{7.16}$$

sowie der von x unabhängigen Pseudofunktion

$$F_3(x,\eta) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Pf}\,\frac{\chi_{[-1,1]}(\eta)}{|\eta|} \tag{7.17}$$

ist eine Lösung der Gleichung (7.3).

b) F hat die Eigenschaften

1) $\frac{\partial F}{\partial x}$ ist lokal integrierbar; (7.18)

2) F ist reell und bezüglich η symmetrisch; (7.19)

3) für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ mit $0 \notin A$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert

$$\sup_{\eta \in A} |F(x,\eta)| \quad ,$$

und

$$\lim_{x \to +\infty} \sup_{\eta \in A} |F(x,\eta)| = 0 \quad . \tag{7.20}$$

c) Jede andere temperierte Lösung von (7.3) mit den in b) genannten Eigenschaften unterscheidet sich von F höchstens um ein reelles Vielfaches der Distribution $\mathbf{1}(x)\cdot\delta(\eta)$.

Beweis: a) F gehört zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$; denn F_3 hat bezüglich η einen kompakten Träger und ist bezüglich x konstant, während F_2 stetig und beschränkt ist. Ferner ist F_1 für $|\eta| \geq 1$ stetig und beschränkt, und für $|\eta| \leq 1$ liefert der Mittelwertsatz

$$|F_1(x,\eta)| \leq \left|\frac{1-\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}\right| + \left|\frac{1}{|\eta|} - \frac{1}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}\right|$$

$$\leq C(1+|x|) \quad ,$$

so daß also F_1 lokal integrierbar und polynomial beschränkt ist.

Gleichung (7.3) ist erfüllt, wenn für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ gezeigt werden kann, daß

$$\left\langle\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2\right) F \;,\; \phi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(0,\eta)\, d\eta \quad . \tag{7.21}$$

Aus (7.15)-(7.17) ergibt sich bereits, daß $\partial F/\partial x$ eine wohlbestimmte lokal integrierbare Funktion ist, nämlich dF_0/dx . Entsprechendes gilt dann auch für $\partial^2 F/\partial x^2$ und $\partial^3 F/\partial x^3$. Außerdem "schmilzt" die Pseudofunktion F_3 bei Multiplikation mit η^2 zu einer lokal integrierbaren Funktion herunter und kann mit F_1 zusammengefaßt werden:

$$\eta^2 F(x,\eta) = -\frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}\eta^2 + H(-x)\ \frac{\sin(\xi_1 x)\eta^2}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1} \quad . \tag{7.22}$$

Also haben wir für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\langle(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2)\ F, \phi\rangle = -\langle\frac{\partial^3}{\partial x^3}F, \frac{\partial}{\partial x}\phi\rangle + \langle(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2)F, \phi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{-\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(x,\eta)\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\eta) + ((\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2)\ F(x,\eta))\ \phi(x,\eta)\}dxd\eta$$

Daraus folgt dann, unter Benutzung von (7.9)-(7.11), die Gleichung (7.21) (einmal partiell integrieren, derselbe Gedankengang wie beim Beweis von $dH/dx = \delta$).

b) (7.18) ergab sich bereits beim Beweis von a). (7.19) liest man direkt aus den Formeln (7.15)-(7.17) ab. Und man erhält (7.20), wenn man bedenkt, daß für jedes $\varepsilon>0$

$$(F_1 + F_3)(x,\eta) = -\frac{1}{2}\{\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3} - \frac{\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\eta)}{|\eta|}\} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Pf}\,\frac{\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\eta)}{|\eta|} + C_\varepsilon\cdot\delta(\eta)$$

mit einer geeigneten Konstanten C_ε gilt. Wählt man jetzt ε so, daß $[-\varepsilon,\varepsilon]\cap A = \emptyset$, so findet man für $x>0$

$$\sup_{\eta\in A}|F(x,\eta)| \le \frac{1}{2}\frac{\exp(-\xi_3(\varepsilon)|x|)}{(\xi_1^2 + \xi_3^2)\xi_3} \quad ,$$

woraus (7.20) folgt.

c) Temperierte Lösungen der homogenen Gleichung

$$(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2)\,u = 0 \quad , \tag{7.23}$$

die außerdem noch (7.20) erfüllen, müssen für $\eta\neq 0$ verschwinden; das folgt sofort aus Lemma 7.1. Wir dürfen also annehmen, daß supp u eine Teilmenge der Geraden $\eta=0$ ist.

Lokal ist u, wie jede Distribution, von endlicher Ordnung, hat also die Form

$$u = \sum_{j=0}^{k} u_j(x)\cdot\frac{\partial^j}{\partial\eta^j}\,\delta(\eta) \quad ,$$

wobei die u_j irgendwelche Distributionen von *einer* Veränderlichen sind.

$\partial u/\partial x$ hat seinen Träger auf einer Menge vom Maß Null, kann also nur dann lokal integrierbar sein (siehe (7.18)), wenn es verschwindet. Darum muß jedes u_j konstant sein:

$$u_j(x) = c_j \quad .$$

Anwendung der Gleichung (7.23) ergibt

$$0 = (\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \eta^2)\,u = \sum_{j=0}^{k} c_j\cdot(-\eta^2)\cdot\delta^{(j)}(\eta)$$

$$= \sum_{j=2}^{k} c_j\cdot(-2)\binom{j}{2}\cdot\delta^{(j-2)}(\eta)$$

Die Ableitungen des Diracmaßes sind aber linear unabhängig, und so müssen die c_j für $j\geq 2$ verschwinden.

Aber auch c_1 muß verschwinden, denn $\partial\delta/\partial\eta$ ist nicht symmetrisch bezüglich η. Also

$$u = c_0 \cdot \delta(\eta) \quad ,$$

und natürlich muß c_0 reell sein,wenn u es ist.

Satz 7.3 Sei F definiert durch (7.14)-(7.17), und

$$E = \mathfrak{F}_3^{-1} F \quad . \tag{7.24}$$

a) Dann hat E die Eigenschaften:

1) E ist eine temperierte Fundamentallösung von P;

2) E ist stetig, und es gibt eine Konstante C, so daß

$$|E(x,y)| \leq C(1 + \ln(1+|x|) + \ln(1+|y|)) \tag{7.25}$$

3) E ist reell und symmetrisch bezüglich y.

b) Jede temperierte Fundamentallösung E' von P, für die

$$F' = \mathfrak{F}_3 E'$$

die Eigenschaften (7.18)-(7.20) hat, unterscheidet sich von E höchstens um eine reelle Konstante.

Beweis: a) Die Eigenschaft 1) ergibt sich aus Satz 7.2 und den Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts.

Wir schreiben

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \tag{7.26}$$

mit

$$E_j = \mathfrak{F}_3^{-1} F_j \qquad ; \; j=1,2,3.$$

Dann sind

$$E_1(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3} - \frac{\chi_{[-1,1]}(\eta)}{|\eta|} \} \exp(i\eta y) \, d\eta \tag{7.27}$$

und

$$E_2(x,y) = \frac{1}{2\pi} H(-x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1} \exp(i\eta y) \, d\eta \tag{7.28}$$

nach üblichen Sätzen über parameterabhängige Integrale (z.B. *Dieudonné (1970), (13.8.6)*) stetige Funktionen. Ferner ist E_3 als Fouriertransformierte einer Distribution mit kompaktem Träger analytisch:

$$\begin{aligned} 2\pi E_3(x,y) &= -\frac{1}{2} < \mathrm{Pf} \frac{\chi_{[-1,1]}}{|\eta|} , \exp(i\eta y) > = -\int_0^1 \frac{\cos(\eta y) - 1}{\eta} \, d\eta \\ &= -\int_0^y \frac{\cos t - 1}{t} \, dt = -\mathrm{Ci}(y) + \gamma + \ln y \\ &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu(2\nu)!} y^{2\nu} \end{aligned} \tag{7.29}$$

(*Abramowitz-Stegun (1965), S. 231ff*).

Für E_2 und E_3 gelten offenbar die Abschätzungen

$$|E_2(x,y)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1} \, d\eta = C$$

und

$$|E_3(x,y)| \leq C(1 + \ln(1+|y|))$$

E_1 wird zerlegt:

$$E_1 = E_{1,1} + E_{1,2} = \mathcal{F}_2^{-1}\{(1-\chi_{[-1,1]})\, F_1\} + \mathcal{F}_2^{-1}\{\chi_{[-1,1]} F_1\}$$

Dann ist $E_{1,1}$ beschränkt:

$$|E_{1,1}(x,y)| = |\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}\cos(\eta y)\, d\eta| \leq \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{d\eta}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3} .$$

Für $E_{1,2}$ gilt

$$|2\pi E_{1,2}(x,y)| \leq \int_0^1 |\frac{\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3} - \frac{1}{|\eta|}|\, d\eta$$

$$\leq \int_0^1 |\frac{1-\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}|\, d\eta + \int_0^1 |\frac{1}{|\eta|} - \frac{1}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}|\, d\eta .$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist eine gewisse von x und y unabhängige Konstante. Im ersten Summanden führen wir ξ_3 als neue Integrationsvariable ein und erhalten wegen

$$\frac{d\xi_3}{d\eta} = \frac{\eta}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}$$

(siehe (6.9) und (6.11)) eine Abschätzung durch eine bekannte Funktion:

$$\int_0^1 |\frac{1-\exp(-\xi_3|x|)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_3}|\, d\eta \leq \int_0^{\xi_3(1)} \frac{1-\exp(-\xi|x|)}{\xi}\, d\xi = \int_0^{|x|\xi_3(1)} \frac{1-\exp(-\xi)}{\xi}\, d\xi$$

Dieses Exponentialintegral wird majorisiert durch $C(1+\ln|x|)$ (*Abramowitz-Stegun (1965), S.228ff*). Also auch insgesamt

$$|E_1(x,y)| \leq C(1 + \ln(1+|x|))$$

und damit (7.25). Eigenschaft [2] ist dann nachgewiesen.
Die Eigenschaft [3] ergibt sich aus der Tatsache, daß die Fouriertransformierte einer reellen und symmetrischen Distribution wieder reell und symmetrisch ist.

[c] Die Behauptung folgt sofort aus Satz 7.2, Teil [c].

Von nun an verstehen wir unter E, E_1, E_2, E_3 immer die durch (7.24) und (7.27)-(7.29) definierten Funktionen.

Um jetzt das Dirichletproblem für E lösen zu können, benötigen wir die zweidimensionale Fouriertransformierte $\hat{E}$ von E, d.h. die eindimensionale Fouriertransformierte $\mathcal{F}_x F$ bezüglich x von F. Für $\eta \neq 0$ läßt sich diese Transformation ohne Schwierigkeiten durchführen. Es gilt ja (siehe etwa *Lavoine (1963)*)

$$\mathcal{F}_x\{\frac{1}{2}\exp(-\alpha|x|)\}(\xi) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+(\xi/\alpha)^2} = \frac{\alpha}{\xi^2+\alpha^2} \qquad (7.30)$$

für $\alpha>0$, und für $\beta>0$

$$\mathcal{F}_x\{H(-x)\sin(\beta x)\}(\xi) = Pf\frac{\beta}{\xi^2-\beta^2} + \frac{i\pi}{2}(\delta(\xi+\beta) - \delta(\xi-\beta)). \qquad (7.31)$$

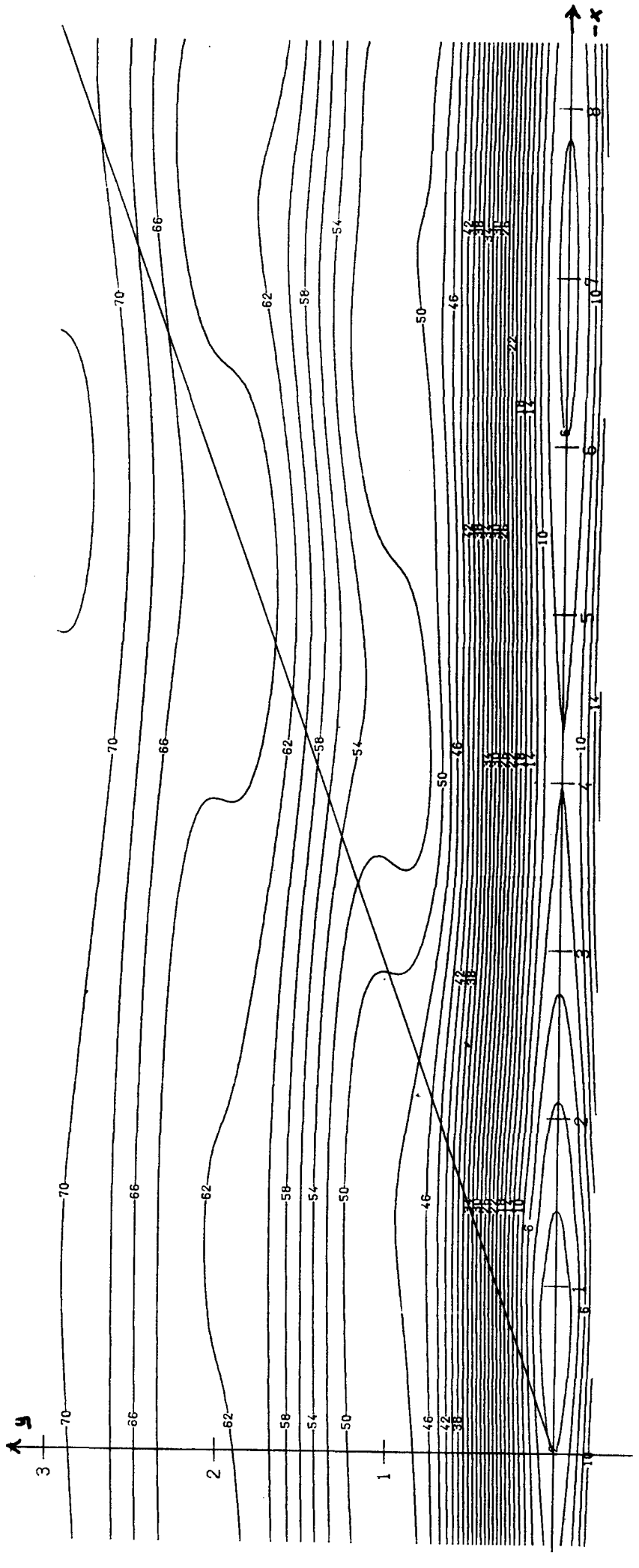

Fig.2 Höhenlinien der Funktion $E \times 10^1$ (7.26)-(7.29) in der Nähe des Ursprungs.
Auswertung von E_1 und E_2 durch schnelle Fouriertransformation (512 Wellen), von E_3 durch endliche Taylorreihe. Die durchgezogene schräge Linie ist die Halbgerade $\theta = \theta_c = \arctan(1/\sqrt{8})$ (siehe Anhang C).

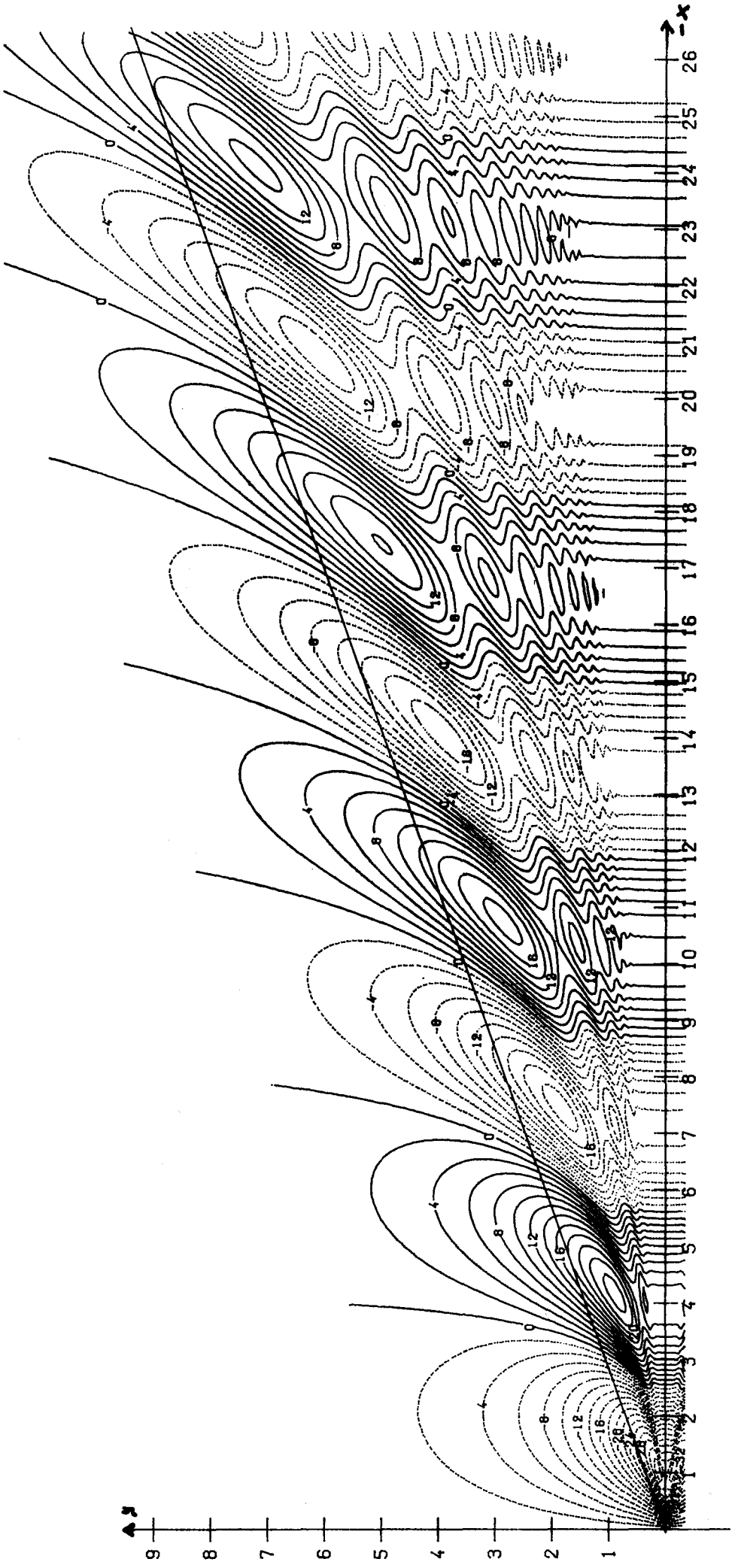

Fig.3 Höhenlinien der Funktion $E_2 \times 10^2$ (7.28) in der Nähe des Ursprungs.
Auswertung durch schnelle Fouriertransformation (512 Wellen).

In diesem Fall bedeutet Pf, daß an den Nullstellen des Nenners der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist. Wegen

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{\xi-\xi_0} - i\pi\delta(\xi-\xi_0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\xi-\xi_0+i\varepsilon} \tag{7.32}$$

(siehe etwa *Reed-Simon (1972), S. 137* oder Anhang B) können wir auch schreiben

$$\mathfrak{F}_x\{H(-x)\,\sin(\beta x)\}(\xi) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{\frac{1}{\xi-\beta+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\beta+i\varepsilon}\}$$

Unter Benutzung dieser Formeln erhalten wir für $\eta\neq 0$

$$\hat{E}(\xi,\eta) = (\mathfrak{F}F)(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2}\{\frac{-1}{\xi^2+\xi_3^2} + \frac{1}{2\xi_1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\frac{1}{\xi-\xi_1+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1+i\varepsilon})\}$$

Für $\xi^2\neq\xi_1^2$ kann man den Grenzübergang $\varepsilon\downarrow 0$ durchführen und erhält, wie nicht anders zu erwarten war,

$$\hat{E}(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2}\{\frac{-1}{\xi^2+\xi_3^2} + \frac{1}{\xi^2-\xi_1^2}\} = \frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2}\{\frac{\xi_1^2+\xi_3^2}{\xi^4-(\xi_1^2-\xi_3^2)\xi^2-\xi_1^2\xi_3^2}\}$$

$$= \frac{1}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} = \{\sigma_p(\xi,\eta)\}^{-1} \qquad (\eta\neq 0,\ \xi^2\neq\xi_1^2) \tag{7.33}$$

Für $\eta=0$ gilt immerhin noch

$$\hat{E}_2(\xi,0) = \frac{1}{2\xi_1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2}(\frac{1}{\xi-\xi_1+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1+i\varepsilon}) \quad .$$

Die genaue Form der Fouriertransformierten von E_1+E_3 für $\eta=0$ läßt sich mit den bisher verwendeten einfachen Hilfsmitteln nicht mehr ermitteln. Wir können jedoch auf eine exakte Kenntnis bis zu einem gewissen Grad durchaus verzichten. Das einzige, wovon wir uns überzeugen müssen, ist die Lösbarkeit des Dirichletproblems.
Dazu bemerken wir zunächst, daß wir sowohl bei $\widehat{(E_x)} = i\xi\hat{E}$ als auch bei $\widehat{(E_y)} = i\eta\hat{E}$ keine Schwierigkeiten haben, wenn wir η gegen 0 gehen lassen. Die eben angewendeten Formeln (und ihre Analoga für die Komponenten von F_x) liefern für $\xi^2\neq\xi_1^2$ lokal integrierbare Funktionen, und zwar

$$i\xi\hat{E}(\xi,\eta) = \frac{i\xi}{\xi_1^2+\xi_3^2}\{\frac{-1}{\xi^2+\xi_3^2} + \frac{1}{2\xi_1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\frac{1}{\xi-\xi_1+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1+i\varepsilon})\}$$

sowie

$$i\eta\hat{E}(\xi,\eta) = \frac{i\eta}{\xi_1^2+\xi_3^2}\{\frac{-1}{\xi^2+\xi_3^2} + \frac{1}{2\xi_1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\frac{1}{\xi-\xi_1+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1+i\varepsilon}\}$$

auch für eine Umgebung von $\eta=0$. In der Umgebung des Ursprungs gilt deshalb

$$i\xi\hat{E}(\xi,\eta) = \frac{i\xi}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} \quad , \quad i\eta\hat{E}(\xi,\eta) = \frac{i\eta}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} \quad .$$

Wir wählen jetzt eine feste Nullumgebung, z.B.

$$U = \{(\xi,\eta)\,|\ \xi^2+\eta^2 \leq 1/2\}$$

und setzen dazu

$$\chi_U(\xi,\eta) = \begin{cases} 1\ , & (\xi,\eta)\in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine mögliche Interpretation von $\{\sigma_p(\xi,\eta)\}^{-1}$ auf U ist dann die Distribution

$$\phi \longmapsto \iint_U \frac{\phi(\xi,\eta) - \phi(0,0)}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}\, d\xi\, d\eta \quad , \tag{7.34}$$

die $\mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U(\xi,\eta)}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}$ genannt werden soll.

Wir können jetzt zeigen, daß $\hat{E}$ "im wesentlichen" auf U mit dieser Distribution übereinstimmt.

Lemma 7.4 Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$,

$$T = \frac{1}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}$$

für $0<\xi^2+\eta^2<1/2$, $T = 0$ für $\xi^2+\eta^2 \geq 1/2$. Ferner gelte

$$i\xi T = \frac{i\xi}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}\,\chi_U(\xi,\eta)$$

und

$$i\eta T = \frac{i\eta}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}\,\chi_U(\xi,\eta) \quad ,$$

d.h. $i\xi T$ und $i\eta T$ seien lokal integrierbare Funktionen.

Dann hat T die Form

$$T = \mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U(\xi,\eta)}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} + c\cdot\delta(\xi,\eta) \tag{7.35}$$

mit einer komplexen Zahl c.

Bemerkung a) Die wesentliche Information, die wir ja zur Lösung des Dirichletproblems brauchen, besteht darin, daß *keine Ableitungen*, insbesondere keine Ableitungen der Ordnung ≥ 2, des Diracmaßes in T enthalten sind, denn b) wir wissen schon, daß die Multiplikation von δ mit $\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)$ wohldefiniert ist (Lemma 4.6, "Fourier-transformiert", für Q=1).

Beweis: Für $0<\xi^2+\eta^2$ stimmt T mit der Pseudofunktion (7.34) überein. Die Distribution

$$T_0 = T - \mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U(\xi,\eta)}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}$$

hat also ihren Träger im Ursprung. Ferner ist auch

$$i\xi\,\mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U(\xi,\eta)}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} = \frac{i\xi}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}\,\chi_U(\xi,\eta)$$

mit der lokal integrierbaren Funktion $i\xi T$ identisch, und Entsprechendes gilt bei $i\eta T$. Wir haben also zusätzlich

$$i\xi T_0 = 0 \quad \text{und} \quad i\eta T_0 = 0 \quad .$$

Da die Distributionen mit Träger im Ursprung genau die endlichen Linearkombinationen des Diracmaßes und seiner Ableitungen sind, aber nur für j=0 das Produkt $i\xi\,\partial^{j+k}\delta/\partial x^j \partial y^k$ und nur für k=0 das Produkt $i\eta\,\partial^{j+k}\delta/\partial x^j \partial y^k$ verschwindet, haben wir

$$T_0 = c\cdot\delta(\xi,\eta) \quad .$$

Satz 7.5 a) Das Dirichletproblem für E ist lösbar.

b) In der Umgebung des Ursprungs ist die Fouriertransformierte von $\partial\hat{E}/\partial z$ lokal integrierbar:

$$\chi_U(\xi,\eta)\,\frac{\partial\hat{E}}{\partial z}\,(z) = \chi_U(\xi,\eta)\,\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}\,\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z) \quad . \qquad (7.36)$$

Beweis: a) Nach unseren bisherigen Erkenntnissen können wir E zerlegen in

$$\hat{E} = \chi_U\,\hat{E} + (1-\chi_U)\,\hat{E} \quad .$$

Der Anteil $(1-\chi_U)\hat{E}$ läßt sich problemlos mit $\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)$ multiplizieren (siehe Lemma 4.2), so daß wir unsere Aufmerksamkeit auf $\chi_U\hat{E}$ konzentrieren können. Nach Lemma 7.4 haben wir

$$\chi_U\hat{E} = \mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U(\xi,\eta)}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} + c\cdot\delta(\xi,\eta) \quad .$$

Für den zweiten Summanden nehmen wir, wie bereits angekündigt, Lemma 4.6 in Anspruch, so daß schließlich nur noch die Pseudofunktion (7.34) zu behandeln ist. Wir setzen

$$T = \mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}$$

und definieren hierfür versuchsweise als Fortsetzung für $z<0$

$$\tilde{T}(z) = T + S(z) \qquad (7.37)$$

mit der bezüglich ξ und η integrierbaren Funktion

$$S(z) = \chi_U(\xi,\eta)\,\frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z) - 1}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2} \quad . \qquad (7.38)$$

Wir müssen dann zeigen (Definition 4.1)

α) $z \longmapsto S(z) \in C^2((-\infty,0);\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$;

β) $\frac{\partial}{\partial z}\,S(z) - (\xi^2+\eta^2)\tilde{T}(z) = 0$ für $z<0$;

γ) $\lim_{z\uparrow 0} S(z) = 0$;

δ) $\lim_{z\uparrow 0} \frac{\partial}{\partial z}\,S(z)$ existiert in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$;

ε) $\lim_{z\downarrow-\infty} S(z)\,\frac{1}{1+|z|} = 0$;

ζ) $\lim_{z\downarrow-\infty} \frac{\partial}{\partial z}S(z)\,\frac{1}{1+|z|} = 0$.

α) Die Abbildung gehört sogar zu $C^\infty((-\infty,0];L^1(\mathbb{R}^2))$, wie man sich leicht überlegt.

β) folgt aus

$$(\xi^2+\eta^2)\,\mathrm{Pf}\,\frac{\chi_U}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} = \frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^4-\xi^2-\eta^2}\,\chi_U \quad .$$

γ) Satz von der majorisierten Konvergenz.

δ) siehe α).

ε) Hier ist die einzige nennenswerte Schwierigkeit versteckt. Wir schreiben S(z) um: für alle $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\langle S(z),\psi\rangle = \iint_U \frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z) - 1}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\,\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \iint_U \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)\, \frac{\psi(\xi,\eta) - \psi(0,0)}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, d\xi d\eta$$

$$- \iint_U \frac{\psi(\xi,\eta) - \psi(0,0)}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, d\xi d\eta \;+\; \psi(0,0) \iint_U \frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z) - 1}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, d\xi d\eta \,. \qquad (7.39)$$

Hier konvergiert der erste Summand mit $z \to -\infty$ gegen 0: für $(\xi,\eta) \in U$ hat man

$$\left| \frac{\psi(\xi,\eta) - \psi(0,0)}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2} \right| \leq (\sup_U |\mathrm{grad}\,\psi|) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi^2+\eta^2} \,,$$

so daß

$$\frac{\psi(\xi,\eta) - \psi(0,0)}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, \chi_U \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

wenn $1 \leq p < 2$, und

$$\lim_{z \to -\infty} \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)\, \chi_U = 0 \quad \text{in } L^q(\mathbb{R}^1)$$

für $q < \infty$ (Satz von der majorisierten Konvergenz). Man wähle also ein p mit $1 \leq p < 2$, q so daß $1/p + 1/q = 1$, und wende die Höldersche Ungleichung auf den ersten Summanden an.

Der zweite Summand ist

$$- \langle T, \psi \rangle$$

und erfüllt deshalb die nachzuweisende Bedingung für $z \to -\infty$. Der dritte Summand hat offenbar die Form

$$c(z) \cdot \langle \delta, \psi \rangle$$

mit der von z abhängigen Konstanten

$$c(z) = \iint_U \frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z) - 1}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, d\xi d\eta \quad .$$

Der Beweis für $\varepsilon)$ ist geführt, wenn wir

$$\lim_{z \to -\infty} \frac{c(z)}{1+|z|} = 0 \qquad (7.40)$$

zeigen können. c(z) läßt sich aber wieder durch ein Exponentialintegral abschätzen:

$$\left| \iint_U \frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z) - 1}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, d\xi d\eta \right| \leq 2 \iint_U \frac{1 - \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)}{\xi^2 + \eta^2}\, d\xi d\eta$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1/2}} \frac{1 - \exp(\rho z)}{\rho^2}\, \rho d\rho d\theta = 4\pi \int_0^{\sqrt{1/2}\,|z|} \frac{1 - \exp(-t)}{t}\, dt$$

$$\leq C(1 + \ln(1+|z|)) \quad . \qquad (7.41)$$

Daraus ergibt sich sofort (7.40).

$\zeta)$ Es ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{T}(z) = \frac{\partial}{\partial z} S(z) = \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)\, \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi^4 - \xi^2 - \eta^2}\, \chi_U \quad , \qquad (7.42)$$

und diese Funktion konvergiert wieder in jedem $L^p(\mathbb{R}^2)$ mit $p<2$ für $z \to -\infty$ gegen 0; also erst recht

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{1}{1+|z|} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{T}(z) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$$

b) Die Identität (7.36) folgt aus (7.37) und (7.38).

Satz 7.6 Sei f eine Distribution mit kompaktem Träger. Die Randwertaufgabe (6.19), (6.20) besitzt die Lösung

$$\tilde{u}(z) = \tilde{K}(z) * f = \lim_{z\to-\infty} \mathcal{F}_2^{-1}\{-\frac{f(\xi,\eta)}{\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i\varepsilon\xi} \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}z)\} \quad (7.43)$$

Hierbei ist

$$\tilde{K}(z) = \lim_{z\to-\infty} \mathcal{F}_2^{-1}\{-\frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)}{\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i\varepsilon\xi}\} \quad (7.44)$$

Ferner gilt

$$\tilde{u}(z) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z})\,\tilde{E}(z) * f \quad (7.45)$$

mit der Lösung $\tilde{E}$ des Dirichletproblems für E.

Beweis: Da f einen kompakten Träger hat, gehört $\hat{f}$ zu $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$. Wir können dann, mit der in (4.18) eingeführten Bezeichnungsweise, auch

$$T * f = T_{\hat{f}} \qquad (T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$$

schreiben und Lemma 4.5 anwenden. Danach ist

$$z \longmapsto \tilde{v}(z) := \tilde{E}(z) * f$$

Lösung des Dirichletproblems für $E * f$. Satz 4.4 zeigt, daß

$$\tilde{u}(z) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z})\,\tilde{E}(z) * f$$

Lösung der Randwertaufgabe (im Sinne von Definition 6.1) ist.

Sei jetzt

$$\tilde{K} = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z})\,\tilde{E} \quad .$$

Dann ist sicherlich

$$\tilde{u} = \tilde{K} * f \quad ,$$

und nachzuweisen ist nur noch (7.44), denn (7.43) folgt daraus.

Wir hatten gesehen, daß

$$\{(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z})\,\tilde{E}(z)\} = \frac{-\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi^4-\xi^2-\eta^2} \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)$$

$$= \frac{-\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)}{\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

sicherlich für $\sigma_p \neq 0$, aber auch in einer Umgebung des Ursprungs gilt. Insofern hat man (7.44) für $\xi^2 \neq \xi_1^2$. Die Fälle $\xi=\xi_1$ und $\xi=-\xi_1$ ergeben sich aus den Überlegungen in Anhang B (Lemma B.2 und nachfolgende Anwendung).

§8 *Freie Wellen*

Um die im letzten Abschnitt konstruierten Lösungen der Randwertaufgabe (6.19), (6.20) eindeutig charakterisieren zu können, müssen wir die Lösungen der *homogenen* Aufgabe

$$B\tilde{u} = 0 \qquad \text{für } z=0 \tag{8.1}$$

$$\Delta\tilde{u} = 0 \qquad \text{für } z<0 \tag{8.2}$$

etwas näher betrachten. Sie tragen traditionell den Namen "freie Wellen".

Der nun folgende Lösungsbegriff lehnt sich eng an die bisherigen Definitionen an. Er enthält als zusätzliche (physikalisch und mathematisch berechtigte) Bedingung die Forderung nach dem Abklingen der Lösung in Tiefenrichtung.

Definition 8.1 Eine Abbildung $\tilde{u}: (-\infty,0] \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ heißt *freie Welle*, wenn gilt:

a) $\tilde{u}$ ist Lösung der Randwertaufgabe (8.1),(8.2) im Sinne von Definition 6.1;

b) $$\lim_{z\to-\infty} \tilde{u}(z) = 0 \qquad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)\,; \tag{8.3}$$

c) $$\lim_{z\to-\infty} \frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}(z) = 0 \qquad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \tag{8.4}$$

In Analogie zu Lemma 4.3 gilt wieder

Lemma 8.1 Ist $\tilde{u}$ eine freie Welle und Q ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, so ist auch $Q\tilde{u}$ eine freie Welle.

Beweis: Siehe Beweis von Lemma 4.3. Auch die Eigenschaften (8.3) und (8.4) "vererben" sich von $\tilde{u}$ auf $Q\tilde{u}$.

Es sei an die Bezeichnungen von Lemma 6.3 erinnert. Dort wurden

$$M_0^+ = \{(\xi,\eta)\,|\; \xi = \xi_1(\eta)\}$$

und

$$M_0^- = \{(\xi,\eta)\,|\; \xi = -\xi_1(\eta)\}$$

eingeführt. Daneben setzen wir

$$M_0 = M_0^+ \cup M_0^- \quad .$$

Eine erste Beschreibung der freien Wellen liefert

Satz 8.2 a) Jedem $(\xi_0,\eta_0) \in M_0$ läßt sich eine freie Welle, nämlich

$$\tilde{u}_{(\xi_0,\eta_0)}(x,y,z) = \exp(i\xi_0 x)\cdot\exp(i\eta_0 y)\cdot\exp(\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2}\,z) \tag{8.5}$$

zuordnen.

b) Jede freie Welle genügt den Differentialgleichungen

$$B\tilde{u} = 0 \tag{8.6}$$

und

$$P\tilde{u} = 0 \tag{8.7}$$

für *alle* $z\leq 0$.

c) Jede freie Welle hat die Form

$$\tilde{u}(z) = \{\hat{u}\cdot\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)\} \qquad (8.8)$$

wobei $\hat{u} = \mathfrak{F}_2\{\tilde{u}(0)\}$ ein *Einfachschichtpotential** mit $\operatorname{supp}\hat{u} \subset M_0$ ist.

Beweis: Wegen $(\xi_0,\eta_0) \neq (0,0)$ ist die durch (8.5) gegebene Funktion, die wir ja auch als

$$\tilde{u}_{(\xi_0,\eta_0)}(x,y,z) = 4\pi^2\,\mathfrak{F}_1^{-1}\{\delta(\xi-\xi_0)\cdot\delta(\eta-\eta_0)\cdot\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)\}(x,y)$$

schreiben können, Lösung des Dirichletproblems für

$$u_{(\xi_0,\eta_0)}(x,y) = \exp(i\xi_0 x)\,\exp(i\eta_0 y) \quad .$$

(8.3) und (8.4) sind offenbar erfüllt. Zum Nachweis der Randbedingung verweisen wir auf Lemma 6.5 : nach Voraussetzung ist $(\xi_0,\eta_0) \notin M_0$, d.h.

$$\sigma_P(\xi_0,\eta_0) = 0 \quad ,$$

also auch

$$\sigma_B(\xi_0,\eta_0) = 0 \quad .$$

Andererseits ist natürlich

$$B\tilde{u}_{(\xi_0,\eta_0)} = \sigma_B(\xi_0,\eta_0)\cdot\tilde{u}_{(\xi_0,\eta_0)}$$

und deshalb zusammen

$$B\tilde{u}_{(\xi_0,\eta_0)} = 0$$

(für *alle* $z \leq 0$).

b) $\tilde{u}$ ist Lösung eines Dirichletproblems, also auch $v = B\tilde{u}$. Wegen $v(0) = 0$ muß v für *jedes* $z \leq 0$ verschwinden (Lemma 4.1).

Dann verschwindet erst recht

$$P\tilde{u} = B'B\tilde{u} = B'v \quad .$$

c) Nach (8.7) haben wir

$$\sigma_P\hat{u} = 0 \quad ,$$

d.h. der Träger von $\hat{u}$ ist in $M = M_0 \cup \{(0,0)\}$ enthalten.

Da (0,0) ein *isolierter* Punkt von M ist, können wir u in zwei Komponenten u_1 und u_2 zerlegen, so daß $\hat{u}_1$ seinen Träger im Ursprung und $\hat{u}_2$ seinen Träger in M_0 hat. Der Übergang von u zu u_1 entspricht dabei einer Operation (siehe 4.18)

$$u \longmapsto u_\phi$$

für ein geeignetes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, und deshalb ergibt die Anwendung von Lemma 4.5

$$B\tilde{u}_1 = B(\tilde{u}_\phi) = (B\tilde{u})_\phi = 0 \quad ,$$

d.h. auch $\tilde{u}_1$ ist eine freie Welle. Nach Lemma 4.6 ist dann $\tilde{u}_1$ konstant (bezüglich z). Definition 8.1, Bedingung b) zeigt jetzt, daß $\tilde{u}_1$ nur 0 sein kann. Also

---

* und zwar im Sinne der Definition von *Schwartz (1973), Chap.III, §10,S.102,* "couche multiple d'ordre 1".

$$u = u_2$$

mit $\operatorname{supp} \hat{u}_2 \subset M_0$. Die Formel (8.8) erhalten wir aus Lemma 4.2.

Es ist noch zu zeigen, daß $\hat{u}$ ein *Einfach*schichtpotential ist. Dazu benutzen wir ein Kriterium von *Schwartz (1973)* *.

Wir benötigen noch eine Hilfsfunktion $\phi \geq 0$ aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\phi=0$ für $\xi^2+\eta^2 \geq 1/2$, $\phi=1$ in einer Umgebung des Ursprungs.

Lemma 8.3 Die Funktion

$$\sigma_p'(\xi,\eta) = \xi^4 - \xi^2 - \eta^2 - \phi(\xi,\eta)$$

ist *regulär* im Sinne von *Schwartz (1973), S.127*, d.h.

1) $\sigma_p' \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$;

2) die Mannigfaltigkeit U, die durch die Gleichung $\sigma_p'(\xi,\eta) = 0$ definiert wird, ist singularitätenfrei und hat die Dimension 1;

3) der Gradient von σ_p' verschwindet nirgends auf U.

Beweis: Es ist $U = M_0$; ϕ bewirkt gerade die Entfernung der störenden Nullstelle von σ_p im Ursprung. Die Eigenschaften 1)-3) sind entweder offensichtlich oder in Lemma 6.3 enthalten.

Damit ist *Théorème VIII, Chap. V* in *Schwartz (1973), S.127* anwendbar. Es zeigt, daß $\hat{u}$ ein Einfachschichtpotential ist, d.h. für jedes $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ hängt $\langle \hat{u}, \psi \rangle$ nur von den Werten von ψ auf M_0 ab, nicht jedoch z.B. von den Werten der Ableitung von ψ in Richtung der Normalen an M_0.

Bemerkung $\hat{u}$ ist jedoch keineswegs immer ein *Maß*, wie es von *Dern (1977), S.64* behauptet wurde. Man prüft z.B. leicht nach, daß

$$\tilde{v}(x,y,z) = iy \exp(ix) \exp(z)$$

eine freie Welle ist (rein reelle Version: $y \cos(x) \exp(z)$), deren Fouriertransformierte (bezüglich x und y) nur noch die *Ableitung* eines Maßes ist:

$$\mathfrak{F}_2 \tilde{v}(\xi,\eta,z) = \frac{\partial}{\partial \eta} \{\delta(\xi-1)\ \delta(\eta)\ \exp(z)\} \quad .$$

Wegen (8.8) genügt es von nun an, sich auf die Betrachtung von u zu beschränken. Es sei deshalb erlaubt, die Distribution u vorübergehend ebenfalls eine freie Welle zu nennen.

Den Schlüssel zur Charakterisierung der in Abschnitt 7 konstruierten Lösungen liefert

Satz 8.4 Sei u eine freie Welle.

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ läßt sich auf genau eine stetige Weise eine temperierte Distribution $\bar{u}(x)$ der Variablen y definieren, so daß $\bar{u}(x)$ für hinreichend glattes u mit der lokal integrierbaren Funktion

$$y \longmapsto u(x,y) \qquad (8.9)$$

übereinstimmt.

b) $x \longmapsto \bar{u}(x)$ und $x \longmapsto \mathfrak{F}_y \bar{u}(x)$ sind reell-analytische Abbildungen

* Der nun folgende letzte Teil des Beweises von Satz 8.2 geht auf *Dern (1977), S.63* zurück.

von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, und es gilt

$$\mathcal{F}_y \bar{u}(x) = \cos(\xi_1 x)\,\mathcal{F}_y \bar{u}(0) + \frac{\sin(\xi_1 x)}{\xi_1}\,\mathcal{F}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x) \quad . \tag{8.10}$$

c) Gibt es für irgendeine reelle Zahl x ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\bar{u}(x) \in H^s(\mathbb{R}^1)$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x) \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^1)$, so gilt dasselbe für *alle* $x \in \mathbb{R}$, und das "verallgemeinerte Impulsflußintegral"

$$e_s(u,x) := \int_{-\infty}^{\infty} \{\xi_1^2(\eta)\,|(\mathcal{F}_y \bar{u}(x))(\eta)|^2 + |(\mathcal{F}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x))(\eta)|^2\}(1+\eta^2)^{s-1/2} d\eta \tag{8.11}$$

ist endlich und unabhängig von x.

Beweis: Wir zerlegen

$$\hat{u} = \hat{u}^+ + \hat{u}^-$$

mit $\operatorname{supp} \hat{u}^+ \subset M_0^+$, $\operatorname{supp} \hat{u}^- \subset M_0^-$. Es ist anschaulich klar, daß u damit als Summe zweier Distributionen geschrieben werden kann, die nur noch von *einer* Variablen abhängen. Diese anschauliche Vorstellung liegt der nun folgenden Konstruktion zugrunde. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ wieder eine der üblichen Hilfsfunktionen, und zwar diesmal mit $\phi \equiv 1$ in $[-1/4, 1/4]$, $\phi = 0$ außerhalb von $(-1/2, 1/2)$. Wir definieren einen Operator Ω^+ durch

$$(\Omega^+ \psi)(\xi,\eta) := \phi(\xi - \xi_1(\eta)) \cdot \psi(\eta)$$

und behaupten, daß Ω^+ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ist.

Zunächst ist klar, daß $\Omega^+\psi$ unendlich oft differenzierbar ist, denn ϕ und ξ_1 und damit auch ω^+, gegeben durch

$$\omega^+(\xi,\eta) = \phi(\xi - \xi_1(\eta))$$

sind von diesem Typ. Seien jetzt Q_1 und Q_2 irgendwelche Polynome in zwei Variablen. Wir müssen noch zeigen, daß es Polynome Q_1' und Q_2' in *einer* Variablen gibt, so daß

$$\sup_{\xi,\eta} |Q_1(\xi,\eta)\; Q_2(\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta)\; \omega^+\psi| \le \sup_{\eta} |Q_1'(\eta)\; Q_2'(\partial/\partial\eta)\; \psi|$$

gilt. Nun verschwindet $\omega^+\psi$ außerhalb des "Schlauchs" $|\xi - \xi_1| \le 1/2$, so daß wir

$$\sup_{\xi,\eta}$$

durch

$$\sup_{|\xi-\xi_1| \le \frac{1}{2}} \sup_{\eta}$$

ersetzen können. Q_1, sicherlich abschätzbar durch $C(1+\xi^2+\eta^2)^k$ für genügend große C und k, läßt sich also sogar durch $C'(1+\eta^2)^{k'}$ majorisieren.

Die Leibnizformel zeigt, daß die Anwendung von Q_2 auf das Produkt $\omega^+\psi$ eine Summe von Produkten liefert, von denen der erste Faktor aus irgendwelchen Ableitungen von ϕ besteht; dieser Faktor ist jeweils durch eine Konstante beschränkt, die nur vom Grad von Q_2 abhängt. Der zweite Faktor umfaßt sämtliche durch die Kettenregel hereinkommenden Ableitungen von ξ_1; diese sind wiederum beschränkt. Der jeweils dritte Faktor besteht dann aus Ableitungen von ψ, deren maximale Ordnung jedoch durch den Grad von Q_2 bezüglich $\partial/\partial\eta$ begrenzt wird. Damit ist der Beweis der Behauptung zwar nicht vollständig durchgeführt, aber wohl mit hinreichender Ausführlichkeit skizziert worden.

Wir definieren jetzt die Distribution $v^+(0)$ durch

$$\langle v^+(0),\psi\rangle := \langle \hat{u}^+,\omega^+\psi\rangle \tag{8.12}$$

(d.h. wir bilden die transponierte Abbildung ${}^t\Omega^+$ zur eben definierten Abbildung Ω^+ und setzen $v^+(0) = {}^t\Omega^+\hat{u}^+$). Dann ist $v^+(0)$ aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

Entsprechend definieren wir

$$\langle v^-(0),\psi\rangle := \langle u^-,\omega^-\psi\rangle \tag{8.13}$$

mit

$$\omega^-(\xi,\eta) = \phi(\xi+\xi_1(\eta)) \quad .$$

Schließlich setzen wir

$$\bar{u}(0) := \mathcal{F}_y^{-1}\{v^+(0) + v^-(0)\} \; . \tag{8.14}$$

Damit ist $\bar{u}(x)$ für x=0 definiert. Der allgemeine Fall ergibt sich aus diesem Spezialfall durch Translation (siehe Beweis von Teil b)). Die Abbildung

$$u \longmapsto \bar{u}(0)$$

ist nach Konstruktion stetig. Wir müssen noch zeigen, daß die durch (8.14) definierte Distribution $\bar{u}(0)$ für hinreichend glattes u mit der lokal integrierbaren Funktion (8.9) für x=0 übereinstimmt. Aus Dichtheitsgründen ist dann auch die Eindeutigkeit dieser Konstruktion nachgewiesen.

Sei also u eine genügend oft differenzierbare freie Welle. Die Funktionenschar $(\chi_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$, gegeben durch

$$\chi_\varepsilon(x) = \frac{c}{\varepsilon}\exp(-(\frac{x}{\varepsilon})^2) \quad ,$$

liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ und konvergiert für $\varepsilon\downarrow 0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ gegen das Diracmaß $\delta(x)$, wenn c geeignet gewählt wird. Deshalb gilt für jedes $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u(0,y)\,\psi(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\,\psi(y)\,\chi_\varepsilon(x)\,dy\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle u,\psi\chi_\varepsilon\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle \hat{u},\mathcal{F}_\eta^{-1}\psi\,\mathcal{F}_\xi^{-1}\chi_\varepsilon\rangle\end{aligned}$$

Nun ist

$$(\mathcal{F}_\xi^{-1}\chi_\varepsilon)(\xi) = \exp(-(\varepsilon\xi)^2) \quad .$$

Wir können außerdem $\hat{u}$ durch $(\omega^+ + \omega^-)\hat{u}$ ersetzen, da dieser Faktor in einer Umgebung des Trägers von $\hat{u}$ konstant 1 ist. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u(0,y)\,\psi(y)\,dy &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle \hat{u}\exp(-(\varepsilon\xi)^2),(\omega^+ + \omega^-)\mathcal{F}_\eta^{-1}\psi\rangle \\ &= \langle \hat{u},(\omega^+ + \omega^-)\mathcal{F}_\eta^{-1}\psi\rangle \\ &= \langle v^+(0) + v^-(0),\mathcal{F}_\eta^{-1}\psi\rangle \\ &= \langle u(0),\psi\rangle \quad .\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon\downarrow 0$ konnte durchgeführt werden wegen

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T \cdot \exp(-(\varepsilon\xi)^2) = T$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ für alle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Die Translation einer Distribution T um x' läßt sich schreiben als

$$\tau_{x'} T = \delta(x-x') * T \quad .$$

Wir definieren deshalb $\bar{u}(x')$ durch

$$\bar{u}(x') := \overline{\delta(x-x')*u}\,(0) \quad .$$

Bei Anwendung analoger Definitionen auf v^+ und v^- folgt dann

$$\begin{aligned} \langle v^+(x'), \psi \rangle &= \langle (\mathcal{F}_2\{\delta(x-x')*u\})^+, \omega^+\psi \rangle \\ &= \langle \exp(-ix'\xi)\cdot \hat{u}^+, \omega^+\psi \rangle \\ &= \langle \hat{u}^+, \omega^+ \cdot \exp(-ix'\xi)\cdot\psi \rangle \end{aligned}$$

und, da der Wert von $\langle u^+, g\rangle$ für alle $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ nur von den Werten von g auf M_0^+ abhängt (Satz 8.2, Teil c)),

$$\begin{aligned} &= \langle \hat{u}^+, \omega^+ \cdot \exp(-ix'\xi_1)\cdot\psi \rangle \\ &= \langle v^+(0), \psi \cdot \exp(-ix'\xi_1) \rangle \\ &= \langle v^+(0)\cdot\exp(-ix'\xi_1), \psi \rangle \quad , \end{aligned}$$

mit anderen Worten

$$v^+(x') = v^+(0)\, \exp(-ix'\xi_1) \quad .$$

Entsprechend gilt wegen $\xi = -\xi_1$ auf M_0^-

$$v^-(x') = v^-(0)\, \exp(ix'\xi_1) \quad .$$

Deshalb sind $x \longmapsto v^+(x)$ und $x \longmapsto v^-(x)$ reell-analytische Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Durch Differenzieren erhält man

$$\frac{dv^+}{dx}(x) = -i\xi_1\, v^+(0)\, \exp(-i\xi_1)$$

und

$$\frac{dv^-}{dx}(x) = i\xi_1\, v^-(0)\, \exp(ix\xi_1) \quad .$$

Mit linearer Algebra folgt dann für beliebige $x, x' \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_y\, \bar{u}(x) = \cos(\xi_1(x-x'))\mathcal{F}_y \bar{u}(x') + \frac{\sin(\xi_1(x-x'))}{\xi_1} \mathcal{F}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x') \qquad (8.15)$$

und

$$\mathcal{F}_y \frac{\partial u}{\partial x}(x) = -\xi_1 \sin(\xi_1(x-x'))\mathcal{F}_y \bar{u}(x') + \cos(\xi_1(x-x'))\mathcal{F}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x') \quad . \qquad (8.16)$$

Formel (8.15) enthält als Spezialfall die behauptete Identität (8.10).

c) Die eben hergeleiteten Formeln (8.15) und (8.16) zeigen, daß, falls $\bar{u}(x')$ aus $H^s(\mathbb{R}^1)$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x') \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^1)$ für $s \in \mathbb{R}$ und *irgendein* $x' \in \mathbb{R}$, sogar $\bar{u}(x) \in H^s(\mathbb{R}^1)$ und $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^1)$ für *alle* $x \in \mathbb{R}$ gelten muß. Denn es gibt Konstanten c_1 und c_2, so daß

$$c_1(1+\eta^2)^{1/4} \leq \xi_1(\eta) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\eta^2} + \frac{1}{2}} \leq c_2(1+\eta^2)^{1/4} \quad ,$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^1)} &= \|(1+\eta^2)^{s/2} \mathcal{F}_y \bar{u}(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\ &= \|(1+\eta^2)^{s/2} \{\cos(\xi_1(x-x')\mathcal{F}_y \bar{u}(x') + \frac{\sin(\xi_1(x-x'))}{\xi_1} \mathcal{F}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x')\|_{L^2} \\ &\leq \|(1+\eta^2)^{s/2} \mathcal{F}_y \bar{u}(x')\|_{L^2} + \|\frac{(1+\eta^2)^{s/2}}{\xi_1} \mathcal{F}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x')\|_{L^2} \\ &\leq \|\bar{u}(x')\|_{H^s} + c_1^{-1} \|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x')\|_{H^{s-1/2}} \quad , \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x)\|_{H^{s-1/2}} \leq c_2 \|\bar{u}(x')\|_{H^s} + \|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x')\|_{H^{s-1/2}} \quad .$$

Damit ist auch die Endlichkeit der Funktion $e_s(u,x)$ gesichert. Der Integrand in (8.11) ist sogar *punktweise* invariant; dies ist eine allgemeine Eigenschaft der Lösungen der Schwingungsgleichung

$$w'' + \xi_1^2 w = 0 \quad ,$$

der sowohl $v^+(x)$ als auch $v^-(x)$ genügen.

§9 Eindeutigkeit

Satz 8.4 liefert uns das folgende Eindeutigkeitskriterium:

Satz 9.1 a) Für jedes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ gibt es *höchstens eine* Lösung $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ der Differentialgleichung

$$Pu = f,$$

so daß für alle $x \geq x_0$ die Distributionen $u(x,\cdot)$ und $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot)$ wohldefiniert sind und ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$u(x,\cdot) \in H^s(\mathbb{R}^1)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^1) \tag{9.1}$$

und

$$\lim_{x \to +\infty} e_s(u,x) = 0\quad . \tag{9.2}$$

b) Für jedes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ gibt es *höchstens eine* Lösung u der Randwertaufgabe (6.19), (6.20) im Sinne von Definition 6.1, so daß die Distributionen $u(x,\cdot) = u(x,\cdot,0)$ und $\partial u/\partial x(x,\cdot)$ wohldefiniert sind und ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$u(x,\cdot) \in H^s(\mathbb{R}^1)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^1) \tag{9.3}$$

und

$$\lim_{x \to +\infty} e_s(u,x) = 0\quad . \tag{9.4}$$

Beweis: a) Es ist zu zeigen, daß die homogene Differentialgleichung unter den genannten Bedingungen nur eine Lösung, nämlich u=0, zuläßt. Die Lösungen der homogenen Gleichung haben aber die Form

$$u = Q + v,$$

wobei Q ein Polynom und v eine freie Welle ist. Dabei hat $\mathcal{F}_y Q(x,\cdot)$ seinen Träger in $\eta=0$: für

$$Q(x,y) = \Sigma a_{jk} x^j y^k$$

ist

$$\mathcal{F}_y Q(x,\eta) = 2\pi \Sigma a_{jk} x^j (i\frac{\partial}{\partial \eta})^k \delta(\eta)\quad .$$

Die Koeffizienten der k-ten Ableitung von δ verhalten sich dabei für $x \to +\infty$ wie Polynome. Im Gegensatz dazu haben wir gesehen (Formeln (8.15) und (8.16)), daß die Fouriertransformierten der freien Wellen bezüglich x *oszillieren* (wobei die Frequenz noch von η abhängt). Die beiden Anteile Q und v von u können sich also gegenseitig nicht kompensieren, so daß (9.2) für Q und v *einzeln* gelten muß.

Damit aber $e_s(Q,x)$ überhaupt für eine unendliche Menge von x-Werten *existiert*, muß Q verschwinden, denn das Diracmaß und seine Ableitungen sind keine meßbaren Funktionen.

Die freie Welle v muß ebenfalls verschwinden, da $e_s(v,x)$ nach Satz 8.4 bezüglich x invariant ist und deshalb wegen (9.2) identisch 0 sein muß, was v=0 impliziert.

b) Auch hier haben die Lösungen des homogenen Problems die Form Polynom + freie Welle, so daß dieselben Schlüsse wie eben angewandt werden können.

Bemerkung Benutzt man die klassische Terminologie, so haben wir mit Satz 9.1 gezeigt, daß es für beide Aufgaben höchstens eine Lösung gibt, die "vor der Störung keine Wellen" hat.

Der Rest dieses Abschnitts ist dem Nachweis gewidmet, daß die mit Hilfe der Fundamentallösungen E und K in Abschnitt 7 konstruierten Lösungen der Bedingung

$$\lim_{x \to +\infty} e_s(u,x) = 0$$

in den wichtigsten Fällen genügen. Allerdings gibt es eine bedeutende Ausnahme, nämlich E selbst. $E(x,\cdot)$ kann für kein x zu irgendeinem $H^s(\mathbb{R}^1)$ gehören, denn die y-Fouriertransformierte $F = \mathcal{F}_y E$ enthält ja stets die echte *Pseudofunktion* E_3, ist also keine *meßbare Funktion*.

Dieses Problem tritt bei $\partial E/\partial x$ schon nicht mehr auf. Allgemein können wir zeigen:

Satz 9.2 Sei $f=\partial g/\partial x$ für ein $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. Dann erfüllt

$$u = E * f = \frac{\partial E}{\partial x} * g$$

die Bedingungen (9.1),(9.2) für genügend kleines $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $g=0$ für $x>0$. Dann ist $\frac{\partial E_2}{\partial x} * g = 0$ für $x>0$, und wir können uns für $x>0$ auf die Betrachtung von

$$(H(x) \frac{\partial E_1}{\partial x}) * g = (H(x) \frac{\partial E}{\partial x}) * g$$

beschränken.

Um die $H^s(\mathbb{R}^1)$-Norm von $(H\partial E/\partial x)*g\ (x,\eta)$ zu berechnen, muß für diesen Ausdruck die y-Fouriertransformierte gebildet werden. Wir suchen also nach einer Abschätzung für

$$(\mathcal{F}_y\{H \frac{\partial E}{\partial x}\}) * (\mathcal{F}_y g)\ (x,\eta) \quad , \tag{9.5}$$

wobei hier nur noch über die erste Variable der beteiligten Distributionen zu falten ist. Da wir uns nur für den Fall $x>0$ interessieren, können wir $\mathcal{F}_y\{H\partial E/\partial x\}$ durch

$$e(x,\eta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2} \exp(-\xi_3 x)$$

ersetzen; denn für $x>0$ stimmt $\mathcal{F}_y\{H\partial E/\partial x\}$ mit dieser Funktion überein, und deshalb hat der hierbei begangene Fehler seinen Träger im Halbraum $x \leq 0$. (9.5) kann also durch

$$(e * \mathcal{F}_y g)\ (x,\eta) \tag{9.6}$$

ersetzt werden. Da e eine C^∞-Funktion ist, gilt

$$(e * \mathcal{F}_y g)\ (x,\eta) = \langle e(x-x',\eta), \mathcal{F}_y g(x',\eta) \rangle$$

und wegen der speziellen Gestalt von e haben wir sogar

$$(\mathcal{F}_y u)\ (x,\eta) = (e * \mathcal{F}_y g)\ (x,\eta) = \frac{1}{2} \frac{\exp(-\xi_3 x)}{\xi_1^2 + \xi_3^2} \langle \exp(\xi_3 x'), \mathcal{F}_y g(x',\eta) \rangle \tag{9.7}$$

für $x>0$. Damit wurde die Faltung bezüglich der ersten Variablen auf die Form "Anwendung einer Distribution auf eine C^∞-Funktion" gebracht. Dasselbe läßt sich bei der zweiten Operation, der Fouriertransformation bezüglich y, erreichen. Es gilt ja

$$(\mathcal{F}_y g)\ (x',\eta) = \langle \exp(-i\eta y), g(x',y) \rangle \quad , \tag{9.8}$$

da $g(x',\cdot) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$. Setzen wir das in (9.7) ein, so erhalten wir schließlich

$$(\mathcal{F}_y u)\ (x,\eta) = \frac{1}{2} \frac{\exp(-\xi_3 x)}{\xi_1^2 + \xi_3^2} \langle \exp(\xi_3 x') \exp(-i\eta y), g(x',y) \rangle \quad . \tag{9.9}$$

Während in (9.7) $\exp(\xi_3 x')$ und $\mathcal{F}_y g$ als Funktion bzw. Distribution in *einer* Variablen aufgefaßt wurden, ist in (9.9) das innere Produkt über beide Variablen zu

nehmen.

In der Form (9.9) ist $(\mathfrak{F}_y u)\ (x,\eta)$ für $x>0$ leicht abschätzbar. Da g in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ liegt, gibt es Konstanten C und N und ein Kompaktum A mit

$$|\langle g,\psi\rangle| \leq C \sum_{j+k\leq N} \sup_A \left| \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} \psi(x,y) \right|$$

für alle $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Da wir den Träger von g in die Halbebene $x\leq 0$ verlegen durften, können wir annehmen, daß auch A darin enthalten ist.

In (9.9) ist nun

$$\psi(x,y) = \exp(\xi_3 x)\ \exp(-i\eta y) \quad .$$

Da A in der Halbebene $x\leq 0$ liegt, sind sämtliche Ableitungen dieser Funktion auf A durch geeignete Polynome in η beschränkt. Es existieren deshalb Konstanten C und N, so daß

$$|(\mathfrak{F}_y u)\ (x,\eta)| \leq C\ (1+\eta^2)^N \exp(-\xi_3 x) \qquad (9.10)$$

für $x>0$.

Die Ungleichung (9.10) zeigt, daß die Funktion $\eta \longmapsto |(\mathfrak{F}_y u)\ (x,\eta)|^2$ für $x>0$ und genügend kleines $s\in\mathbb{R}$ bezüglich des Maßes $(1+\eta^2)^s d\eta$ integriert werden kann, und daß der Integrand für $x\to+\infty$ fast überall gegen 0 konvergiert. Der Grenzwert der H^s-Norm von $u(x,\cdot)$ ist also 0, nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Der Beweis für

$$\lim_{x\to+\infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}\ (x,\cdot) \right\|_{H^{s-1/2}} = 0$$

verläuft nach demselben Schema. Damit ist dann auch (9.2) gezeigt.

Um das Eindeutigkeitskriterium auch für die Lösung

$$u = K * f$$

der *Randwertaufgabe* nachzuweisen, benutzen wir die Darstellung

$$\mathfrak{F}_y\{K * f\}\ (x,\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\xi+i\alpha|\xi|,\eta)\ \exp(i(\xi+i\alpha|\xi|)x)}{-(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\sqrt{(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\eta^2}}\ (1+i\alpha\,\mathrm{sgn}\,\xi)\ d\xi$$

aus Anhang B (Lemma B.5). Sie gilt für $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\mathrm{supp}\ f \subset \{(x,y)|\ |x|<R\} \quad ,$$

wenn $x>R$, $\eta\neq 0$ und $1>\alpha>0$.

Wir wählen irgendein α, z.B. $\alpha=1/2$. Dann gilt *unabhängig von* η

$$|\sigma_p(\xi+i\alpha|\xi|,\eta)| = |(\xi+i\alpha|\xi|)^4 - (\xi+i\alpha|\xi|)^2 - \eta^2| \geq C\xi^2 \qquad (9.11)$$

für eine geeignete Konstante $C>0$. Denn es ist

$$|\mathrm{Im}\ \sigma_p| = |\alpha\xi(4|\xi|^3 - 4\alpha^2|\xi|^3 - 2|\xi|)|$$

$$= 2\alpha\xi^2(2\xi^2(1-\alpha^2) - 1) \geq \frac{1}{2}\xi^2$$

für $|\xi| \geq 1$, und

$$\mathrm{Re}\ \sigma_p \leq \xi^4(1 - 6\alpha^2 + \alpha^4) - \xi^2(1-\alpha^2) =$$

$$= -\xi^2(1-\xi^2)(1-\alpha^2) - \xi^4(5\alpha^2-\alpha^4)$$

$$\leq -\frac{1}{4}\xi^2$$

für $|\xi| \leq 1$.

Satz 9.3 Sei $f = \frac{\partial g}{\partial x}$ für ein $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. Dann erfüllt

$$u = K * f = \frac{\partial K}{\partial x} * g$$

die Bedingungen (9.3),(9.4) für genügend kleines $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir benutzen den Satz von Paley-Wiener; wegen

$$\text{supp } g \subset \{(x,y) \mid |x| < R\}$$

für ein geeignetes R gibt es $N \in \mathbb{N}$ und $C>0$, so daß

$$|\hat{g}(\xi+i\alpha|\xi|,\eta)| \leq C\ (1+\xi^2+\eta^2)^N \exp(\alpha R|\xi|)$$

$$\leq C\ (1+\xi^2)^N (1+\eta^2)^N \exp(\alpha R|\xi|) \quad .$$

Wegen (9.11) haben wir

$$\left| \frac{1}{-(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\sqrt{(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\eta^2}} \right| = \left| \frac{-(\xi+i\alpha|\xi|)^2-\sqrt{(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\eta^2}}{\sigma_P(\xi+i\alpha|\xi|,\eta)} \right|$$

$$\leq C\ \frac{1+|\xi|}{|\xi|}$$

und deshalb

$$|(\mathcal{F}_y u)\ (x,\eta)| = |(\mathcal{F}_y\{K * \frac{\partial g}{\partial x}\})\ (x,\eta)|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\xi+i\alpha|\xi|)\ \hat{g}(\xi+i\alpha|\xi|,\eta)\ \exp(i(\xi+i\alpha|\xi|)x)}{-(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\sqrt{(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\eta^2}}\ (1+i\alpha\,\mathrm{sgn}\,\xi)d\xi \right|$$

$$\leq C\ (1+\eta^2)^N \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{N+1} \exp(-\alpha(x-R)|\xi|)\ d\xi$$

für $x>R$. Für genügend kleines $s \in \mathbb{R}$ ist dies wieder bezüglich des Maßes $(1+\eta^2)^s d\eta$ integrierbar, und

$$\lim_{x\to+\infty} \|u(x,\cdot)\|_{H^s} = \lim_{x\to+\infty} \|(\mathcal{F}_y u)(x,\eta)\ (1+\eta^2)^s\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = 0 \ .$$

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch wieder für $\partial u/\partial x$ durchführen. Daraus folgt dann (9.4) und damit die Behauptung.

§10 *Regularität*

Aus den Betrachtungen in §6 ergab sich, daß wir uns nicht auf die "normalen" Regularitätssätze für elliptische Randwertaufgaben berufen dürfen. Im Gegenteil: sie *müssen* sogar falsch sein, denn die Kriterien von *Agmon-Douglis-Nirenberg (1959)* bzw. *Hörmander (1958a)* sind nicht nur hinreichend, sondern sogar *notwendig* für das Bestehen derartiger Zusammenhänge zwischen der Differenzierbarkeit der Daten und der Lösungen der Randwertaufgabe.

Es ist mir bisher nicht gelungen, Regularitätsaussagen für die Lösungen der *Kelvin*schen Randwertaufgabe allein unter Benutzung der Fundamentallösung K herzuleiten. Erst auf dem Umweg über die tangentiale Differentialgleichung ergaben sich brauchbare Aussagen (das ist der wichtigste Grund für die systematische Verwendung der Fundamentallösung E dieses Problems in der vorliegenden Untersuchung).

Die Regularitätssätze beruhen auf den folgenden einfachen Tatsachen:

Lemma 10.1 Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$; für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ sei die Funktion

$$x \longmapsto f(x,\eta)$$

über $\mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

a)
$$\left| \int f(x',\eta)\, g_j(x-x',\eta)\, dx' \right| \leq \| f(\cdot,\eta) \|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \qquad (10.1)$$

für j = 1,2,3,4, wenn

$$g_1(x,\eta) = \exp(-\xi_3|x|) ,$$

$$g_2(x,\eta) = \operatorname{sgn} x \ \exp(-\xi_3|x|) ,$$

$$g_3(x,\eta) = H(-x)\, \sin(\xi_1 x) ,$$

$$g_4(x,\eta) = H(-x)\, \cos(\xi_1 x) ;$$

b)
$$\lim_{x \to \pm\infty} \int f(x',\eta)\, g_j(x-x',\eta)\, dx' = 0 \quad \text{für } j=1,2 \text{ und } \eta \neq 0 \qquad (10.2)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int f(x',\eta)\, g_j(x-x',\eta)\, dx' = 0 \quad \text{für } j=1,2 \text{ und alle } \eta \qquad (10.3)$$

c) die Abbildungen

$$x \longmapsto \int f(x',\eta)\, g_j(x-x',\eta)\, dx'$$

sind stetig (j=1,2,3,4).

Beweis: a) Die Funktionen g_j sind meßbar, und ihr Betrag ist durch die Konstante 1 beschränkt.

b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $x_1 \in \mathbb{R}$, so daß

$$\int_{x_1}^{\infty} |f(x',\eta)|\, dx' < \varepsilon .$$

Ferner gibt es $x_2 > x_1$, so daß

$$\exp(-\xi_3(x_2-x_1)) < \varepsilon ,$$

sofern $\eta \neq 0$. Demnach gilt für $x \geq x_2$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x',\eta)g_1(x-x',\eta)dx'\right| \leq \int_{-\infty}^{x} |f(x',\eta)|\exp(-\xi_3(x-x'))dx' + \int_{x}^{\infty} |f(x',\eta)|\exp(-\xi_3(x'-x)dx'$$

$$\leq \int_{-\infty}^{x_1} |f(x',\eta)|\exp(-\xi_3(x-x'))dx' + \int_{x_1}^{\infty} |f(x',\eta)|dx'$$

$$\leq \varepsilon(1 + \|f(\cdot,\eta)\|_{L^1(\mathbb{R}^1)})$$

Daraus folgt (10.2) für $x \to +\infty$ und $j=1$. Die anderen Fälle werden genauso bewiesen.

Zum Beweis von (10.3) brauchen wir nur zu beachten, daß für $x \geq x_1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x',\eta)|H(-(x-x'))dx' = \int_{x}^{\infty} |f(x',\eta)|dx' \leq \int_{x_1}^{\infty} |f(x',\eta)|dx' < \varepsilon \ .$$

Beim Grenzübergang $x \to -\infty$ konvergiert das Integral für $j=3,4$ *nicht* gegen 0, sondern es oszilliert asymptotisch wie

$$\alpha_j(\eta)\cos(\xi_1 x) + \beta_j(\eta)\sin(\xi_1 x) \ ,$$

mit den Amplituden

$$\alpha_3(\eta) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x',\eta)\sin(\xi_1 x')dx'$$

und

$$\beta_3(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x',\eta)\cos(\xi_1 x')\,dx' \ ,$$

sowie $\alpha_4 = \beta_3$, $\beta_4 = -\alpha_3$.

c) Die Voraussetzungen für die Anwendung eines Standardsatzes über parameterabhängige Integrale sind hier erfüllt (siehe etwa *Dieudonné (1970), (13.8.6)*).

Für die Formulierung der Regularitätssätze benötigen wir noch zwei Definitionen.

Definition 10.1 Sei $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Mit $V^{k,s}$ bezeichnen wir den Raum der meßbaren Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ ,$$

so daß $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und

$$\|f\|_{V^{k,s}} := \sum_{j=0}^{k} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f \right\|_{V^{0,s}} := \sum_{j=0}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x,\eta) \right|^2 (1+\eta^2)^s d\eta \right\}^{1/2} dx < \infty$$

Bemerkung Wir können auch sagen: $\partial^j f/\partial x^j \in L^1(\mathbb{R}^1_x, H^s(\mathbb{R}^1_y))$; $j=0,1,\ldots k$. Für $s \in \mathbb{N}$ ist, in der allgemeinen Terminologie von *Besov-Il'in-Nikol'skii (1978)*,

$$V^{k,s} = W_{\mathfrak{p}}^{\ell}(\mathbb{R}) \ ,$$

mit $(x_1,x_2) = (y,x)$ (man beachte die Reihenfolge!), $\ell = (\ell_1,\ell_2) = (s,k)$ und $\mathfrak{p} = (p_1,p_2) = (2,1)$ (siehe *Besov-Il'in-Nikol'skii (1978), §9*).

Mit der in Definition 10.1 angegebenen Norm ist $V^{k,s}$ ein separabler Banachraum, und $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ ist dicht in $V^{k,s}$ (übliche Beweise, vgl. *Besov-Il'in-Nikol'skii (1978), Theorem 9.1, Theorem 9.2*).

Definition 10.2 Sei $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $C^{k,s}$ den Raum der meßbaren Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \quad ,$$

so daß $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und für $0 \le j \le k$

$$x \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$$

eine stetige beschränkte Abbildung von $\mathbb{R}^1_x$ nach $H^s(\mathbb{R}^1_y)$ ist.
Als Norm wählen wir

$$\|f\|_{C^{k,s}} := \sum_{j=0}^{k} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f \right\|_{C^{0,s}} := \sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x,\eta) \right|^2 (1+\eta^2)^s d\eta \right\}^{1/2}$$

Auch $C^{k,s}$ ist ein Banachraum; wegen des globalen Supremums, das in der Norm von $C^{k,s}$ auftritt, ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ aber nicht mehr dicht in $C^{k,s}$.

Das erste Ergebnis dieses Abschnitts ist

Satz 10.2 Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$. Die für alle $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ definierte Abbildung

$$g \longmapsto E * \frac{\partial g}{\partial x}$$

läßt sich (auf genau eine Weise) zu einer stetigen Abbildung

$$V^{k,s} \longrightarrow \bigcap_{j=0,1,2} C^{k+j,s+1-j/2}$$

fortsetzen.

Beweis: Wir haben nachzuweisen, daß Konstanten C_j existieren, so daß

$$\left\| E * \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{C^{k+j,s+1-j/2}} \le C_j \|g\|_{V^{k,s}} \qquad (10.4)$$

für alle $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dann ist der Lösungsoperator eine stetige Abbildung von $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, versehen mit der durch $V^{k,s}$ induzierten Topologie, in die $C^{k+j,s+1-j/2}$, und er läßt sich, da $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dicht liegt, auf eindeutige Weise stetig nach $V^{k,s}$ fortsetzen (*Dieudonné (1960), 5.5.4*).

Aus der Struktur der Normen von $V^{k,s}$ und $C^{k,s}$ ersieht man, daß es genügt, die Ungleichung (10.4) für k=0 zu beweisen. Der allgemeine Fall ergibt sich dann durch Anwendung von (10.4) auf $\partial^\nu g/\partial x^\nu$, $\nu = 0,1,\ldots,k$, und Summation über ν.

Sei also k=0 und $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Nach Lemma 10.1 gilt

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}_y \left(E * \frac{\partial g}{\partial x} \right)(x,\eta) \right| &= \left| \mathcal{F}_y \left(\frac{\partial E}{\partial x} * g \right)(x,\eta) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2 + 2g_4}{\xi_1^2 + \xi_3^2}(x-x',\eta)\, \mathcal{F}_y g(x',\eta)\, dx' \right| \\ &\le \frac{3/2}{\xi_1^2+\xi_3^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}_y g(x',\eta) \right| dx' \end{aligned}$$

Für die Vertauschung der Integrationsreihenfolge gilt die Ungleichung

$$\left(\int \left(\int |\psi(u,v)|^\mu du \right)^{\nu/\mu} dv \right)^{1/\nu} \le \left(\int \left(\int |\psi(u,v)|^\nu dv \right)^{\mu/\nu} \right)^{1/\mu} ,$$

sofern $1 \le \mu \le \nu \le \infty$ (siehe etwa *Besov-Il'in-Nikol'skii (1978), 2.11*), also

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathfrak{F}_y\big(E * \frac{\partial g}{\partial x}\big)(x,\eta)\big|^2 (1+\eta^2)^{s+1} d\eta\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{3}{2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2}\int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathfrak{F}_y g(x',\eta)\big|\,dx'\Big)^2 (1+\eta^2)^{s+1} d\eta\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \big|\mathfrak{F}_y g(x',\eta)\big| \frac{(1+\eta^2)^{s+1}}{(\xi_1^2+\xi_3^2)^2} d\eta\Big)^{1/2} dx' . \qquad (10.5)$$

Wegen

$$\frac{(1+\eta^2)^{s+1}}{(\xi_1^2+\xi_3^2)^2} \le (1+\eta^2)^s$$

folgt aus (10.5) sofort

$$\Big\|E * \frac{\partial g}{\partial x}\Big\|_{C^{0,s+1}} \le \frac{3}{2}\|g\|_{V^{0,s}} .$$

Die *Stetigkeit* der Abbildung

$$x \longmapsto (E * \frac{\partial g}{\partial x})(x,\eta)$$

folgt wie in Lemma 10.1[c], unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Integrand zusätzlich stetig von η abhängt.

Damit ist (10.4) für (k=0 und) j=0 gezeigt worden. Der Beweis der übrigen Ungleichungen mit j=1 und j=2 verläuft im Prinzip genauso. Die Ableitungen nach x werden sämtlich auf E abgewälzt, und man hat nur noch die davon herrührenden zusätzlichen Faktoren (Potenzen von ξ_1 bzw. ξ_3) zu berücksichtigen, die das Abklingverhalten für $|\eta| \to \infty$ jeweils um eine halbe η-Potenz verschlechtern.

Der Regularitätssatz für die Randwertaufgabe ergibt sich aus Satz 10.2 durch folgende Zwischenüberlegung:

Wir können schreiben

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_2 K &= (\mathfrak{F}_2 E)\cdot(-\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \\ &= (\mathfrak{F}_2 E)\cdot(-2\xi^2+(\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2})) \\ &= 2\mathfrak{F}_2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}E\Big) + \frac{1}{\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}} ,\end{aligned}$$

also

$$K = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}E + \mathfrak{F}_2^{-1}\Big(\frac{1}{\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\Big) . \qquad (10.6)$$

Man beachte, daß dies nicht nur formale Manipulationen sind: die Identifizierung von $\mathfrak{F}_2(\partial E/\partial z)$ mit $\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,\mathfrak{F}_2 E$ wurde in Satz 7.5 gerechtfertigt, und

$$\frac{1}{\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

ist als lokal integrierbare und außerhalb einer Nullumgebung beschränkte und stetige Funktion eine wohldefinierte temperierte Distribution.

Satz 10.3 Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $r,s \in \mathbb{R}$. Die für $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ definierte Abbildung

$$g \longmapsto K * \frac{\partial g}{\partial x}$$

läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung

$$V^{k,s} \cap H^r(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C^{k,s} + H^r(\mathbb{R}^2)$$

fortsetzen.

Beweis: Wegen (10.6) haben wir

$$u = K * \frac{\partial g}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(E * \frac{\partial g}{\partial x}) + \mathfrak{F}_2^{-1}\left(\frac{i\xi}{\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \hat{g}(\xi,\eta)\right) =: u_1 + u_2$$

Satz 10.2 zeigt

$$\|u_1\|_{C^{k,s}} \leq C \|g\|_{V^{k,s}} \quad . \tag{10.7}$$

Für den Multiplikator in $\mathfrak{F}_2 u_2$ gilt die triviale Abschätzung

$$\left| \frac{i\xi}{\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \right| \leq 1 \quad . \tag{10.8}$$

Bezüglich der H^r-Räume ist (10.8) aber schon optimal, denn für kein $\alpha>0$ läßt sich eine Abschätzung vom Typ

$$\left| \frac{i\xi}{\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \right| \leq C\ (1+\xi^2+\eta^2)^{-\alpha}$$

beweisen. Aus (10.8) folgt

$$\|u_2\|_{H^r} \leq \|g\|_{H^r} \quad . \tag{10.9}$$

(10.7) und (10.9) ergeben die Behauptung, denn $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist dicht in $V^{k,s} \cap H^r(\mathbb{R}^2)$.

§11 *Wellenfront, singulärer Träger und Analytizität der Fundamentallösung E*

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Differenzierbarkeit der in §7 konstruierten Fundamentallösung E: wo ist E beliebig oft differenzierbar bzw. analytisch? Dazu benötigen wir einige Sätze und Begriffe, die zwar schon seit längerer Zeit (siehe etwa *Hörmander (1971)*) in der Literatur verwendet werden, aber vielleicht noch nicht so allgemein verbreitet sind wie die Distributionen von *L. Schwartz*.

Von nun an sei X immer eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$.

Definition 11.1 * Sei $T \in \mathcal{D}'(X)$. Der Punkt $(w,\theta) \in X\times\mathbb{R}^n$ heißt *regulär gerichteter Punkt für* T, wenn es Umgebungen U von w in X und U' von θ in $\mathbb{R}^n$ gibt, so daß für alle $g \in C_0^\infty(U)$ und alle natürlichen Zahlen m eine Konstante $C = C(m,g)$ existiert mit

$$|(\hat{gT})\ (t\lambda)| \leq C\,(1+t)^{-m} \qquad (11.1)$$

für alle $\lambda \in U'$ und alle $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.
Die *Wellenfront von* T, WF(T), ist das Komplement in $X\times(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ der Menge der regulär gerichteten Punkte für T.

Bemerkungen a) Man vergleiche die Abklingbedingung (11.1) mit der sehr ähnlich gebauten Bedingung im Satz von *Paley-Wiener*! Der Satz liefert gerade die Aussage, daß die C^∞-Funktionen auch dadurch charakterisiert werden können, daß ihre Wellenfront die leere Menge ist.

b) Die Projektion $pr_1\colon X\times\mathbb{R}^n \longrightarrow X$ bildet WF(T) auf den singulären Träger von T ab. Insofern handelt es sich bei der Wellenfront um eine Verfeinerung des Begriffes "singulärer Träger".

Definition 11.2 ** Sei $a\colon X\times\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar (nicht notwendig p=n). a heißt *Symbol der Ordnung* m *vom Typ* (ρ,δ) *auf* $X\times\mathbb{R}^p$, wenn es zu jedem Kompaktum $H \subset X$ und zu jedem Paar (α,β) von Multiindices eine Konstante $C(H,\alpha,\beta)$ gibt mit

$$|(D_w^\alpha D_\theta^\beta a)(w,\theta)| \leq C\,(1+|\theta|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} \qquad (11.2)$$

für alle $w \in H$ und alle $\theta \in \mathbb{R}^p$. Die Menge aller derartigen Abbildungen bezeichnen wir mit

$$S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^p) \quad .$$

Beispiel Sei

$$Q(w,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(w)\, D^\alpha$$

ein Differentialoperator mit Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(X)$. Dann läßt sich Q das Symbol

$$\sigma_Q(w,\theta) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(w)\, \theta^\alpha \qquad (11.3)$$

der Ordnung m vom Typ (1,0) zuordnen. σ_Q ist sozusagen die "Fouriertransformierte" von Q, denn

$$Q(w,D)\ u(w) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_Q(w,\theta)\ \hat{u}(\theta)\ \exp(iw\theta)\ d\theta \qquad (11.4)$$

für $u \in C_0^\infty(X)$. Man beachte p=n.

In vielen Untersuchungen genügt es, sich mit solchen Symbolen vom Typ $(\rho,\delta)=(1,0)$

* vgl. *Reed-Simon (1975), S.92; Dieudonné (1978a), S.76.*

** vgl. *Reed-Simon (1975), S.83; Dieudonné (1978a), S.121*

und dem Fall p=n zu beschäftigen. Hier brauchen wir aber den allgemeinen Fall.

Definition 11.2 verallgemeinert die durch Differentialoperatoren definierten Symbole; die entsprechende Verallgemeinerung der Funktion $\phi(w,\theta) = w\cdot\theta$ im Exponentialfaktor des Fourier-Integrals (11.4) enthält die nun folgende

Definition 11.3 Eine stetige *reellwertige* Funktion $\phi \in C^\infty(X\times(\mathbb{R}^p\setminus\{0\}))$ heißt eine *Phasenfunktion*, wenn gilt

1) ϕ ist positiv-homogen vom Grade 1 bezüglich $\theta\in\mathbb{R}^p$, d.h.

$$\phi(w,t\theta) = t\,\phi(w,\theta)$$

für alle $(w,\theta)\in X\times\mathbb{R}^p$ und alle $t>0$.

2) die partiellen Ableitungen von ϕ nach allen Variablen verschwinden nirgends in $X\times\mathbb{R}^p$ gleichzeitig.

Satz 11.1. Jeder Phasenfunktion ϕ und jedem Symbol $a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^p)$ mit $\rho>0$ und $\delta<1$ läßt sich auf genau eine Weise eine Distribution $M_{a,\phi}\in\mathcal{D}'(X)$ zuordnen, so daß

$$\langle M_{a,\phi},u\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^p}\int_X \exp(i\phi(w,\theta))\; a(w,\theta)\chi(\varepsilon\theta)\; u(w)\; dw\; d\theta \qquad (11.5)$$

für jedes $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ mit $\chi(0)=0$ und alle $u\in C_0^\infty(X)$. Für $m<-p$ ist $M_{a,\phi}$ als Distribution identisch mit der stetigen Funktion

$$A_{a,\phi}(w) = \int \exp(i\phi(w,\theta))\; a(w,\theta)\; d\theta \quad . \qquad (11.6)$$

Man nennt $\langle M_{a,\phi},u\rangle$ ein *oszillatorisches Integral* und schreibt

$$\langle M_{a,\phi},u\rangle = \widetilde{\int\int}_{X\times\mathbb{R}^p} \exp(i\phi(w,\theta))a(w,\theta)\; u(w)\; dw\; d\theta$$

Beweis: Siehe *Dieudonné, 23.17.7; Hörmander (1971), Prop.1.2.2.*

Satz 11.2 Sei L ein Differentialoperator auf $X\times\mathbb{R}^p$ mit Koeffizienten aus $S^0_{0,0}$, so daß

$$L\exp(i\phi) = \exp(i\phi)$$

für die Phasenfunktion ϕ. Dann gilt

$$\langle M_{a,\phi},u\rangle = \widetilde{\int\int}_{X\times\mathbb{R}^p} \exp(i\phi(w,\theta))\,({}^tL(a(w,\theta)\; u(w)))\; dw\; d\theta$$

für jedes $u\in C_0^\infty(X)$.

Beweis: Dieser Satz ergibt sich aus den üblichen Beweisen für Satz 11.1.

Bemerkung Satz 11.2 besagt, daß wir partiell integrieren dürfen, auch wenn keine absolut konvergenten, sondern nur (im Sinne von Satz 11.1) oszillatorisch konvergente Integrale vorliegen.

Definition 11.4 Sei ϕ eine Phasenfunktion auf $X\times\mathbb{R}^p$. Wir setzen

$$M(\phi) = \{(w,\theta)\in X\times(\mathbb{R}^p\setminus\{0\}) \mid \nabla_\theta\phi(w,\theta) = 0\}$$

und

$$SP(\phi) = \{(w,(\nabla_w\phi)(w,\theta)) \mid (w,\theta)\in M(\phi)\} \subset X\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$$

$SP(\phi)$ heißt *Mannigfaltigkeit der stationären Phase* von ϕ.

Satz 11.3 Für alle $a \in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^p)$ gilt

$$WF(M_{a,\phi}) \subset SP(\phi)$$

Insbesondere hat man

$$\text{sing supp } M_{a,\phi} \subset \text{pr}_1 SP(\phi)$$

Beweis: Siehe *Dieudonné (1978a), 23.17.9; Hörmander (1971), Prop.2.5.7.*

Mit Hilfe dieser Sätze läßt sich jetzt die Wellenfront und damit auch der singuläre Träger der in §7 definierten Fundamentallösung E relativ einfach bestimmen.

Lemma 11.4 $E_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\})$, $E_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Beweis: Wegen des exponentiellen Abklingens kann man in E_1 für $x\neq 0$ offenbar beliebig oft nach x und y unter dem Integral differenzieren und erhält stets eine absolut integrierbare Funktion. Die Aussage über E_3 ergibt sich aus (7.29).

Wir setzen jetzt

$$X^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$$

und

$$X^- = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\} \quad .$$

Auf X^+ verschwindet E_2, ist also insbesondere in $C^\infty(X^+)$.

Lemma 11.5 Sei n=2, p=1, w=(x,y) und $\theta=\eta$. Dann gehört

$$a(w,\theta) = \frac{\sin(\xi_1(\eta)x)}{(\xi_1^2(\eta)+\xi_3^2(\eta))\xi_1(\eta)} \tag{11.7}$$

zu $S^{-3/2}_{1/2,1/2}(X^-\times\mathbb{R}^p)$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß $a\in C^\infty(X^-\times\mathbb{R}^1)$, da sowohl ξ_1 als auch $\xi_1^2+\xi_3^2$ beliebig oft differenzierbar sind und nirgends verschwinden. Sämtliche Ableitungen von a lassen sich als Summen von Ausdrücken der Form

$$\frac{\text{trig}(\xi_1 x)\ Q(\eta,\xi_1,x)}{R(\xi_1^2+\xi_3^2,\xi_1)}$$

darstellen, wobei Q und R Monome mit ganzzahligen Koeffizienten sind und trig eine der trigonometrischen Funktionen sin und cos sein kann. Z.B. ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta}\left(\frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1}\right) = -\frac{\sin(\xi_1 x)\cdot(\eta x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)^2\xi_1} - \frac{\cos(\xi_1 x)\cdot 4\eta}{(\xi_1^2+\xi_3^2)^3}$$

(siehe Lemma 6.2).

Beim Differenzieren des Terms Q/R nach x ändert sich am Wachstumsverhalten für $|\eta|\to\infty$ gar nichts; beim Differenzieren nach η *verbessert* sich das Abklingen um eine ganze η-Potenz. Differenziert man die trigonometrische Funktion nach x, so erscheint ein Faktor ξ_1, was das Abklingen um eine halbe η-Potenz verschlechtert, während es sich beim Differenzieren nach η um einen Faktor $x\partial\xi_1/\partial\eta$, abschätzbar durch eine halbe negative η-Potenz, verbessert. (x bleibt ja - siehe Definition 11.2 - in einem festen Kompaktum). Insgesamt:

$$\left|\frac{\mathrm{trig}(\xi_1 x)Q(\eta,\xi_1,x)}{R(\xi_1^2+\xi_3^2,\xi_1)}\right| \le C(1+|\eta|)^s \Longrightarrow \begin{cases} \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{trig}(\xi_1 x)Q(\eta,\xi_1,x)}{R(\xi_1^2+\xi_3^2,\xi_1)}\right| \le C(1+|\eta|)^{s+1/2} \\ \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\mathrm{trig}(\xi_1 x)Q(\eta,\xi_1,x)}{R(\xi_1^2+\xi_3^2,\xi_1)}\right| \le C(1+|\eta|)^{s-1/2} \end{cases}$$

Damit haben wir $\rho = 1/2$, $\delta = 1/2$ gezeigt; $m = -3/2$ ist wohl klar ((6.7),(6.8)).

Lemma 11.6 Sei wieder $w=(x,y)$ und $\theta=\eta$. Die Funktion

$$\phi(w,\theta) = y\eta \tag{11.8}$$

ist eine Phasenfunktion auf $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1$.

Beweis: Homogenität liegt offenbar vor. Die Ableitung von ϕ ist

$$(\nabla_w\phi, \nabla_\theta\phi) = (0,\eta,y) \quad ,$$

und dies verschwindet nirgends auf $\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^1\setminus\{0\})$, da η dort nicht verschwindet.

Satz 11.7 Die Restriktion von E_2 auf X^- ist eine für $y\neq 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion. Genauer gesagt ist

$$WF(E_2|_{X^-}) \subset \{((x,0);(0,\eta)) \mid x<0, \eta\neq 0\}$$

Außerhalb der x-Achse sind die Ableitungen von E_2 darstellbar als absolut konvergente Fourier-Integrale:

$$\left(\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} E_2\right)(x,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}\left\{\left(\frac{-1}{iy}\right)^{j+2k+\ell} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^j}{\partial x^j}\frac{\partial^{j+2k+\ell}}{\partial \eta^{j+2k+\ell}}\left(\frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1}\right)\right\}\exp(i\eta y)\, d\eta\right\} \tag{11.9}$$

wobei $\ell\geq 0$ eine beliebige natürliche Zahl sein kann.

Beweis: In X^- definiert E_2 als stetige, also insbesondere lokal integrierbare Funktion in kanonischer Weise eine Distribution, nämlich

$$\langle E_2, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^1}\int_{X^-} \exp(i\phi(w,\theta))\, a(w,\theta)\, u(w)\, dw\, d\theta$$

für $u\in C_0^\infty(X^-)$. Die Funktionen a (11.7) und ϕ (11.8) wurden oben als Symbol bzw. als Phasenfunktion erkannt; in X^- gilt also

$$E_2 = M_{a,\phi}$$

Wir können deshalb Satz 11.3 anwenden. Daraus folgt wegen

$$M(\phi) = \{(x,0,\eta) \mid x<0, \eta\neq 0\}$$

und

$$SP(\phi) = \{((x,0);(0,\eta)) \mid x<0, \eta\neq 0\}$$

sofort die Behauptung über Wellenfront und singulären Träger von $E_2|_{X^-}$.

Sei jetzt $X = X^-\setminus\{(x,0) \mid x<0\}$. Wir setzen

$$L(x,y,\eta,\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial\eta) = \frac{1}{iy}\frac{\partial}{\partial\eta} \quad \left(= \frac{1}{iw_2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)$$

Dann ist

$$L\exp(i\phi) = \exp(i\phi)$$

auf $X\times\mathbb{R}^1$, und die Koeffizienten von L gehören zu $S^0_{0,0}(X\times\mathbb{R}^1)$. Nach Satz 11.2 gilt dann

$$\langle M_{a,\phi},u\rangle = \int\int \exp(i\phi(w,\theta))({}^tL(a(w,\theta)\ u(w))\ dw\ d\theta \quad .$$

Nun ist

$${}^tL(x,y,\eta,\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial\eta) = -\frac{1}{iy}\frac{\partial}{\partial\eta} \quad \left(=\frac{-1}{iw_2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right),$$

also

$$\langle M_{a,\phi},u\rangle = \int\int \exp(i\phi(w,\theta))\ \left(\frac{-1}{iw_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ a(w,\theta)\right)\ u(w)\ dw\ d\theta \quad ,$$

da u gar nicht von θ abhängt. Durch r-faches Anwenden dieser Prozedur erhält man sogar

$$\langle M_{a,\phi},u\rangle = \int\int \exp(i\phi(w,\theta))\ \left(\frac{-1}{iw_2}\right)^r\left(\frac{\partial^r}{\partial\theta_1^r}\ a(w,\theta)\right)u(w)\ dw\ d\theta \quad .$$

Nach Definition 11.2 ist aber das Symbol

$$\left(\frac{-1}{iw_2}\right)^r \frac{\partial^r}{\partial\theta_1^r}\ a(w,\theta)$$

in $S^{m-r\rho}_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^p)$, wenn das Symbol a zu $S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^p)$ gehört und w_2 in X nirgends verschwindet. Mit Satz 11.1 gilt deshalb für $y\neq 0$ und $x<0$

$$E_2(x,y) = \left(\frac{-1}{iy}\right)^r \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^r}{\partial\eta^r}\ \frac{\sin(\xi_1 x)}{(\xi_1^2+\xi_3^2)\xi_1}\right)\exp(i\eta y)\ d\eta$$

für beliebiges natürliches r, da das Fourier-Integral immer absolut konvergiert. Ist jetzt $r\geq j+2k$, so darf man rechts unter dem Integral j-mal nach x und k-mal nach y differenzieren und erhält immer noch absolut konvergente Integranden. Damit ist auch die zweite Behauptung des Satzes bewiesen, und die erste Behauptung - jedenfalls was den singulären Träger von $E_2|_X$ betrifft - noch einmal direkt gezeigt worden.

Bemerkung Die Darstellung (11.9) erlaubt im Prinzip die Auswertung beliebiger Ableitungen von E mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation.

Mit Lemma 11.4 und Satz 11.7 haben wir uns über die Differenzierbarkeit von E für $x\neq 0$ schon recht gut informiert. Eine ganz anders geartete Methode führt für $y\neq 0$ zu noch präziseren Aussagen über E.

Definition 11.4 Sei $d\in\mathbb{R}^n$, $d_i\geq 1$ für $i=1,\ldots,n$; $U\subset\mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion u aus $C^\infty(U)$ gehört zur *Gevrey-Klasse* $G^d(U)$, wenn zu jedem Kompaktum $H\subset U$ eine Konstante $C = C(H,u)$ existiert, so daß

$$|D^\alpha u| \leq C^{|\alpha|+1}\prod_{i=1}^n(\alpha_i!)^{d_i}$$

Bemerkung Für $d_i=1$, $i=1,\ldots,n$, ist $G^d(U)$ gerade die Menge der *reell-analytischen* Funktionen auf U.

Satz 11.8 Auf $U = \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ ist $E\in G^d$ mit $d=(1,2)$.

Der etwas mühsame *Beweis* dieses Satzes befindet sich in Anhang A. Wesentliches Hilfsmittel ist ein Satz von *Andersson (1971)*.

Einen Beweis dafür, daß man sogar $d=(1,1)$ nehmen kann, d.h. daß E für $y\neq 0$ *reell-analytisch* ist, habe ich mit dieser Methode nicht erbringen können. Ein Kriterium von *Trèves-Zerner (1967)* (Lemme 2, S.160) führt höchstwahrscheinlich zu demselben Ergebnis $d=(1,2)$.

Andererseits gibt es Hinweise darauf, daß die Fundamentallösung K der *Randwertaufgabe* für $y \neq 0$ analytisch sein müßte. 1977 wies mich Prof. Eggers darauf hin, daß man die Fortsetzbarkeit von K in den Halbraum $z>0$ aus einer Integraldarstellung von *Bessho (1964)* (siehe auch Anhang C) erschließen kann. Danach müßte K wenigstens für $y \neq 0$ analytisch sein. Die notwendigen Rechnungen zur Rechtfertigung dieser Fortsetzung habe ich damals in einem unveröffentlichten Manuskript im wesentlichen durchgeführt.

In der letzten Bemerkung des Abschnitts 3 wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Analytizität der Fundamentallösung nicht nur von innermathematischem Interesse ist, sondern die Zulässigkeit der zugrundeliegenden Störungsentwicklung betrifft. Das folgende Lemma zeigt, daß E auf der Achse $y=0$ *nirgends* analytisch ist.

Lemma 11.9 Die Taylorreihe der Funktionen e_x, definiert durch

$$e_x(y) = \frac{\partial}{\partial x} E_1(x,y)$$

besitzt für alle $x \neq 0$ bei $y=0$ den Konvergenzradius 0.

Beweis: Wegen der Symmetrie von E_1 genügt es, die Behauptung für $x>0$ zu beweisen. Es sei daran erinnert, daß dann

$$\frac{\partial E_1}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\xi_3 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2} \exp(i\eta y)\, d\eta$$

Wir haben also

$$b_j := \frac{\partial^j}{\partial y^j} e_x(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\eta)^j \frac{\exp(-\xi_3 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\, d\eta$$

und damit

$$b_{2j-1} = 0$$

sowie

$$|b_{2j}| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{2j} \exp(-\xi_3 x)}{\xi_1^2 + \xi_3^2}\, d\eta$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Für $\eta \geq 0$ war

$$\eta = \xi_1\, \xi_3$$

(Lemma 6.2), und deshalb gilt für $j \geq 1$

$$\eta^{2j} = \xi_1^{2j}\, \xi_3^{2j} \geq \xi_1\, \xi_3^{4j-1} \quad .$$

Mit der neuen Integrationsvariablen $\xi = \xi_3(\eta)$ kommen wir auf

$$\begin{aligned} |b_{2j}| &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \xi_3^{4j-1} \exp(-\xi_3 x) \frac{\xi_1}{\xi_1^2+\xi_3^2}\, d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \xi^{4j-1} \exp(-\xi x)\, d\xi \\ &= \frac{(4j-1)!}{2\pi\, x^{4j-1}} \quad . \end{aligned}$$

Der j-te Koeffizient der Taylorreihe von $e_x(y)$ bei $y=0$ hat natürlich die Form

$$b_j/j! \quad .$$

Es ergibt sich nun

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{b_j/j!} = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[2j]{b_{2j}/(2j)!} = \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{x^2} \sqrt[2j]{\frac{(4j-1)!}{(2j)!}\, x} = \infty$$

und damit ist der Konvergenzradius, wie behauptet, 0.

Die Erkenntnisse über E seien noch einmal in einem einzigen Satz zusammengefaßt.

Satz 11.10 Die in Abschnitt 7 konstruierte Fundamentallösung E hat die folgenden Eigenschaften:

a) $WF(E) = \{((x,0);(0,\eta))\,|\; x<0, \eta\neq 0\} \cup \{((0,0);(\xi,\eta))\,|\; \xi^2+\eta^2>0\}$

b) $\operatorname{sing\,supp} E = \{(x,0)\,|\; x\leq 0\}$

c) $E \in G^{(1,2)}$ für $y\neq 0$.

Beweis: c) Das ist Satz 11.8.

a) Nach c) ist $\operatorname{sing\,supp} E \subset \{(x,0)\,|\; x\in\mathbb{R}\}$, nach Lemma 11.4 sogar

$$\operatorname{sing\,supp} E \subset \{(x,0)\,|\; x<0\}$$

Für beliebige Distributionen T und beliebige lineare Differentialoperatoren mit C^∞- Koeffizienten hat man

$$WF(QT) \subset WF(T) \quad .$$

Wegen $WF(\delta) = \{((0,0);(\xi,\eta))\,|\; \xi^2+\eta^2>0\}$ und $PE = \delta$ gilt also sicherlich

$$\{((0,0);(\xi,\eta))\,|\; \xi^2+\eta^2>0\} \subset WF(E) \quad .$$

Wir müssen deshalb nur noch zeigen, daß E tatsächlich für *kein* $x<0$ bei $y=0$ unendlich oft differenzierbar ist. Dann ist nämlich $(x,0)$ für jedes $x<0$ im singulären Träger von E, so daß ein Paar (ξ,η) mit $((x,0);(\xi,\eta)) \in WF(E)$ existiert. Nach Satz 11.7 kann aber der Fall $\xi\neq 0$ nicht auftreten. Also gibt es dann ein $\eta\neq 0$ mit

$$((x,0);(0,\eta)) \in WF(E) \quad .$$

Nun ist E symmetrisch bezüglich y; also gehört auch $((x,0);(0,-\eta))$ zu WF(E). Schließlich ist mit (w,θ) stets auch $(w,t\theta)$ für alle $t>0$ in WF(T) - das folgt unmittelbar aus der Definition. Also gehört sogar für *alle* $\eta\neq 0$ der Punkt $((x,0);(0,\eta))$ zu WF(E), was die behauptete Identität beweist.

Wir werden jetzt zeigen, daß $\partial E_2/\partial x$ für beliebiges $x<0$ als Funktion von y bei $y=0$ nicht stetig differenzierbar sein kann.

Die Fouriertransformierte von $\partial E_2/\partial x$ bezüglich y hat für $x<0$ die Form

$$\mathcal{F}_y \frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{\cos(\xi_1 x)}{\xi_1^2 + \xi_3^2}$$

und ist deshalb quadratisch integrierbar. Dagegen ist

$$(1+\eta^2)\left|\mathcal{F}_y(\partial E_2/\partial x)\right|^2$$

nicht mehr integrierbar. $\partial E_2/\partial x$ gehört darum zwar zu $L^2(\mathbb{R}^1) = H^0(\mathbb{R}^1)$, aber nicht mehr zu $H^1(\mathbb{R}^1)$ (für jedes feste $x<0$).

Sei jetzt wieder $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ eine Hilfsfunktion mit $\phi=1$ für $|y|\leq 1$ und $\phi=0$ für $|y|\geq 2$. Dann ist mindestens eine der Funktionen

$$g_1(y) = (1-\phi(y))\, \frac{\partial E}{\partial x}\,(x,y)$$

und

$$g_2(x,y) = \phi(y)\,\frac{\partial E_2}{\partial x}(x,y)$$

nicht aus $H^1(\mathbb{R}^1)$, denn sonst müßte auch $\partial E_2/\partial x$ dazu gehören. Nun gilt aber für genügend großes $k\in\mathbb{N}$

$$y^k\,\frac{\partial}{\partial x}\,E_2(x,\cdot) = \mathcal{F}_\eta^{-1}\{(-i\,\frac{\partial}{\partial\eta})^k\,\frac{\cos(\xi_1 x)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\}\in H^1(\mathbb{R}^1)\quad,$$

da sich das Abklingverhalten für $|\eta|\to\infty$ durch Differenzieren nach η um eine halbe η-Potenz verbessert (siehe Beweis von Lemma 11.5). Dann gehört aber auch $y^k g_1$ zu $H^1(\mathbb{R}^1)$ (siehe etwa *Hörmander (1976), Theorem 2.2.5*), und damit sogar

$$g_1 = \frac{1}{y^k}\,(1-\phi)\{y^k\,\frac{\partial E_2}{\partial x}(x,\cdot)\}\in H^1(\mathbb{R}^1)\quad,$$

denn die Ableitungen von $1/y^k$ bleiben auf dem Träger von $1-\phi$ beschränkt.

Damit ist $g_1\notin H^1(\mathbb{R}^1)$ gezeigt. Da diese Funktion eine kompakten Träger hat, kann sie erst recht nicht zu C^1 gehören. Andererseits wissen wir bereits, daß sie für $y\neq 0$ beliebig oft differenzierbar ist. Also kann sie bei $y=0$ nicht stetig differenzierbar sein. Das war noch zu zeigen.

b) ist eine Folgerung aus a).

Aus Satz 11.10 lassen sich auch Aussagen über K gewinnen:

Satz 11.11. Die Restriktion K der Distribution $\tilde{K}$ auf $z=0$ hat den singulären Träger

$$\text{sing supp } K = \{(x,0)\mid x\leq 0\}$$

K gehört für $y\neq 0$ zu $G^{(2,2)}$.

Beweis: Aus den allgemeinen Regularitätssätzen für elliptische Randwertaufgaben (hier: Dirichletproblem) ergibt sich, daß

$$\text{sing supp } K\subset \text{sing supp } E$$

gelten muß. Die Regularitätssätze für Gevrey-Klassen liefern

$$K\in G^{(2,2)} \quad \text{für } y\neq 0$$

(Corollary 1.1, *Lions-Magenes (1973), S. 29*). So bleibt noch nachzuweisen, daß auch

$$\text{sing supp } E\subset \text{sing supp } K$$

gilt. Dies folgt aus dem Ergebnis von *Hörmander (1958a)*, daß der Randoperator B' in Verbindung mit der Potentialgleichung im unteren Halbraum ein *hypoelliptisches* Randwertproblem definiert (siehe Satz 6.1). Wäre jetzt eine Umgebung von (x,0) mit $x<0$ nicht in sing supp K, so müßte auch E, (lokale) Lösung von

$$B'E = K\quad,$$

in einer Umgebung von (x,0) glatt sein, was den Ergebnissen von Satz 11.10 widerspricht.

Bemerkung *Lions-Magenes (1973)* untersuchen nur *isotrope* Gevrey-Klassen, so daß die Aussage für K etwas unschärfer ausfällt. Da B' kein *elliptisches* Problem definiert, kann es durchaus möglich sein, daß $K = B'E$ für $y\neq 0$ (und möglicherweise auch für $y=0$ und $x\ 0$) analytisch ist, auch wenn E selbst definitiv *nicht* analytisch ist.

Anhang A: Beweis von Satz 11.8

Wie ich bereits in Abschnitt 11 erwähnte, beruht der Beweis von Satz 11.8 vor allem auf einem Ergebnis von *Andersson(1971)* (Theorem 1). Wir benötigen zunächst einige Definitionen.

Sei Q ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf $\mathbb{R}^n$ und σ_Q sein *Symbol*, also

$$Q \exp(i\theta w) = \sigma_Q(\theta) \exp(i\theta w)$$

für alle $w \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in \mathbb{C}^n$.

Definition A.1 Wir bezeichnen mit V(Q) die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit den Eigenschaften:

1) g und grad g sind global beschränkt;

2) es gibt positive Konstanten c,k,α, so daß

$$|\sigma_Q(\theta + g(\theta))| \geq k|\theta|^{-\alpha} \qquad (A.1)$$

für alle θ mit $|\theta| \geq c$.

Den Anlaß zu dieser Begriffsbildung liefert

Lemma A.1 Ist $g \in V(Q)$, so definiert

$$E_{g,c} : \begin{cases} C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{|\theta| \geq c} \frac{\hat{\phi}(\theta + g(\theta))}{\sigma_Q(\theta + g(\theta))} \det(id + g(\theta))\, d\theta \end{cases} \qquad (A.2)$$

eine Distribution, die sich von einer Fundamentallösung für Q nur um eine ganze analytische Funktion unterscheidet.

Beweis: Siehe *Trèves-Zerner (1967), Lemme 1.*

Definition A.2 Seien g_1 und g_2 Elemente aus V(Q). Wir sagen, daß g_1 und g_2 *äquivalent* sind und schreiben

$$g_1 \sim g_2 \quad ,$$

wenn gilt: es gibt eine Abbildung

$$G: [0,1] \longrightarrow V(Q) \quad ,$$

stetig bezüglich der gleichmäßigen C^1-Konvergenz auf V(Q), mit $G(0) = g_1$ und $G(1) = g_2$, so daß die Bedingungen 1) und 2) in Definition A.1 *gleichmäßig* in $\tau \in [0,1]$ für $g = G(\tau)$ erfüllt sind.

Lemma A.2 Seien g_1, g_2 aus V(Q), und es gelte $g_1 \sim g_2$. Dann ist

$$E_{g_1,c_1} - E_{g_2,c_2}$$

eine ganze analytische Funktion.

Beweis: Siehe *Andersson (1971).*

Definition A.3 Sei $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i \geq 1$, und

$$|\theta|_d = \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^{1/d_i} \quad . \qquad (A.3)$$

Wir sagen, daß $g \in V(Q)$ zur Klasse $W^d(Q)$ gehört, wenn es positive Konstanten c,k, α und ρ gibt, so daß

$$|\sigma_Q(\theta + \tau g(\theta))| \geq k|\theta|^{-\alpha} \tag{A.4}$$

für alle θ mit $|\theta| \geq c$ und alle τ mit $1 \leq \tau \leq \rho|\theta|_d$ gilt.

Das Hauptergebnis von *Andersson* lautet dann:

Satz A.3 Ist $g \in V(Q)$, $g \sim g_1 \in W^d(Q)$, und gibt es ε und c mit

$$w \cdot \mathrm{Im}\, g_1(\theta) \geq \varepsilon > 0 \tag{A.5}$$

für $|\theta| \geq c$, so gehört die durch (A.2) definierte Distribution $E_{g,c}$ in einer Umgebung U von w zu $G^d(U)$.

Beweis: Siehe *Andersson (1971)*.

Um diesen Satz auf unsere Fundamentallösung E anwenden zu können, werden wir das folgende Programm durchlaufen:

1) Wir zeigen, daß E sich "im wesentlichen", d.h. bis auf eine ganze analytische Funktion, nach dem Rezept (A.2) gewinnen läßt.

2) Das zugehörige g gehört zu V(P).

3) Es wird ein $g_1 \in V(P)$ definiert und $g \sim g_1$ gezeigt.

4) Dies g_1 gehört zu $W^d(P)$ für $d = (1,2)$.

5) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\delta > 0$ gibt es $C = C(\delta,x) > 0$, so daß (A.5) für alle $w=(x,y)$ mit $y \geq \delta$ erfüllt ist.

Da die Fundamentallösung E bezüglich y symmetrisch ist, haben wir dann Satz 11.8 bewiesen.

Programmschritt 1 erledigt das

Lemma A.4 Sei

$$v_0(t) := \begin{cases} 0\,, & |t| \geq 1/2 \\ (t^2 - \frac{1}{4})^2\,, & |t| < 1/2 \end{cases} \tag{A.6}$$

sowie

$$v(\xi,\eta) := -\frac{1}{\xi_1(\eta)}\, v_0(|\xi| - \xi_1(\eta)) \quad . \tag{A.7}$$

Das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$

$$g(\xi,\eta) := (iv(\xi,\eta),\, 0) \tag{A.8}$$

gehört zu V(P), und für $c>0$ ist $E - E_{g,c}$, E definiert durch (7.24) und $E_{g,c}$ durch (A.8) und (A.2), eine ganze analytische Funktion.

Beweis: Sei $\chi = \chi_c$ die charakteristische Funktion der Menge $\{\, \theta=(\xi,\eta) \mid |\theta| \leq c \,\}$. Wir zerlegen $\hat{E}$ und schreiben

$$\hat{E} = \chi\hat{E} + (1-\chi)\hat{E} \quad . \tag{A.9}$$

Dann ist $\chi\hat{E}$ eine Distribution mit kompaktem Träger, so daß ihr Beitrag zu E eine ganze analytische Funktion ist. In Abschnitt 7 haben wir gezeigt, daß für den zweiten Term in (A.9) die folgende Darstellung gilt:

$$(1-\chi)\hat{E} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (1-\chi)\, \frac{1}{\xi_1^2+\xi_3^2} \left\{ \frac{-1}{\xi^2+\xi_3^2} + \frac{1}{2\xi_1} \left(\frac{1}{\xi - \xi_1 + i\varepsilon} - \frac{1}{\xi + \xi_1 + i\varepsilon} \right) \right\}, \tag{A.10}$$

d.h. für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathfrak{F}_2^{-1}\{(1-\chi)\hat{E}\},\phi\rangle = \langle (1-\chi)E, \mathfrak{F}_2^{-1}\phi\rangle \\
&\quad = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint_{\xi^2+\eta^2\geq c^2} \frac{\hat{\phi}(-\xi,-\eta)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\Big\{\frac{-1}{\xi^2+\xi_1^2} + \frac{1}{2\xi_1}\Big(\frac{1}{\xi-\xi_1+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1+i\varepsilon}\Big)\Big\}d\xi d\eta \\
&\quad = \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint_{\xi^2+\eta^2\geq c^2} \frac{\hat{\phi}(\xi,\eta)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\Big\{\frac{-1}{\xi^2+\xi_1^2} + \frac{1}{2\xi_1}\Big(\frac{1}{\xi-\xi_1-i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1-i\varepsilon}\Big)\Big\}d\xi d\eta
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

Der Satz von *Paley-Wiener* garantiert hier für jedes $\varepsilon>0$ die absolute Konvergenz dieses Integrals; deshalb können wir den Satz von Fubini anwenden und zunächst nur die Integration über ξ betrachten. Die Ergebnisse von Abschnitt B erlauben dann eine Deformation des Integrationsweges über ξ (die reelle ξ-Achse) ins Komplexe, sofern wir keine Nullstellen der Nennerfunktionen überqueren. In diesem Fall ($\varepsilon>0$) liegen die Nullstellen in der *oberen* Halbebene, so daß wir von ξ nach $\xi+iv(\xi,\eta)$ deformieren können (Vorzeichen von v in (A.7)!). Danach dürfen wir den Grenzübergang $\varepsilon\downarrow 0$ durchführen: der Satz von *Paley-Wiener* liefert ein schnelles Abklingen von ϕ; im nächsten Lemma werden wir die Abschätzung (A.1) für das Vektorfeld (A.6)-(A.8) beweisen; mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz ergibt sich daraus die Konvergenz des Ausdrucks (A.11) gegen

$$
\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\xi^2+\eta^2\geq c^2} \frac{\hat{\phi}(\xi,\eta)}{\xi_1^2+\xi_3^2}\Big(\frac{-1}{(\xi+iv)^2+\xi_3^2} + \frac{1}{2\xi_1}\Big(\frac{1}{\xi+iv-\xi_1} - \frac{1}{\xi+iv+\xi_1}\Big)\Big)\Big(1+i\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big)d\xi d\eta
$$

$$
= \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\xi^2+\eta^2\geq c^2} \frac{\hat{\phi}(\xi,\eta)}{\sigma_P(\xi+iv,\eta)}\det(id+g)\,d\xi d\eta \quad . \tag{A.12}
$$

Man beachte noch, daß $v \in C_b^1$;

$$
\Big|\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big| \leq \Big|\frac{\partial v}{\partial t}\Big| < C \ ,
$$

$$
\Big|\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big| \leq \Big|\frac{\partial v_0}{\partial t}\Big|\,\Big|\frac{\partial \xi_1}{\partial \eta}\Big|\cdot\frac{1}{\xi_1} + \Big|\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{\xi_1}\Big|\,|v_0| \ ;
$$

$$
\frac{1}{\xi_1} \leq 1 \ ,
$$

$$
\Big|\frac{\partial}{\partial \eta}\xi_1\Big| \leq 1 \ ,
$$

$$
\Big|\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{\xi_1}\Big| \leq 1 \ ;
$$

damit erfüllt g aus (A.8) die Bedingung 1) der Definition A.1. (A.12) zeigt

$$
\mathfrak{F}_2^{-1}\{(1-\chi)\hat{E}\} = E_{g,c} \ .
$$

Die noch fehlende Abschätzung (A.2) ergibt sich aus dem nächsten Lemma, das die Programmschritte 2 und 3 umfaßt.

Lemma A.5 Sei g wie in Lemma A.4, und

$$
g_1(\xi,\eta) = (iv(\xi,\eta), i\gamma) \tag{A.13}
$$

für ein festes und genügend kleines $\gamma>0$. Dann gehören g und g_1 zu V(P), und es gilt

$$g \sim g_1 .$$

Beweis: Wir wählen die Homotopie

$$G(\tau): (\xi,\eta) \longmapsto (iv(\xi,\eta), i\tau\gamma) .$$

Da γ konstant ist, bleibt die Bedingung 1) aus Definition A.1 trivialerweise gleichmäßig in $\tau\in[0,1]$ erfüllt.

Wir müssen noch Bedingung 2) nachprüfen, also beweisen, daß

$$|\sigma_p(\xi+iv,\eta+it)| \geq k(\xi^2+\eta^2)^{-\alpha}$$

für alle (ξ,η) mit $\xi^2+\eta^2\geq c^2$ und alle t zwischen 0 und γ gilt. Dabei ist

$$\sigma_p(\zeta_1,\zeta_2) = \zeta_1^4 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 .$$

Wir schreiben dazu

$$\sigma_p(\xi+iv,\eta+it) = (\xi+iv)^4 - (\xi+iv)^2 - (\eta+it)^2$$

$$= \xi^4 + 4i\xi^3v - 6\xi^2v^2 - 4i\xi v^3 + v^4 - \xi^2 - 2i\xi v + v^2 - \eta^2 - 2i\xi t + t^2$$

$$= R_1(\xi,\eta) + R_2(\xi,\eta) + R_3 + i(I_1(\xi,\eta) + I_2(\eta)) ,$$

wobei

$$R_1(\xi,\eta) = \xi^4 - \xi^2 - \eta^2 = (\xi^4 - \xi_1^4) - (\xi^2 - \xi_1^2)$$

$$= (\xi - \xi_1)(\xi + \xi_1)(\xi^2 + \xi_1^2 - 1) ,$$

$$R_2(\xi,\eta) = - v^2(6\xi^2 - v^2 - 1) ,$$

$$R_3 = t^2,$$

$$I_1(\xi,\eta) = \xi v(4\xi^2 - 4v^2 - 2) ,$$

$$I_2(\eta) = - 2\eta t .$$

Es ist nun

$$\mathrm{Re}\ \sigma_p(\xi+iv(\xi,\eta),\eta+it) = \mathrm{Re}\ \sigma_p(-\xi+iv(-\xi,\eta),\eta+it) ,$$

so daß alle Abschätzungen, in denen der Realteil von σ_p benutzt wird, nur für $\xi\geq 0$ gezeigt werden müssen.

Wir definieren noch die Zahl

$$c_0 = \xi_1^2(\tfrac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4/4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

und setzen von nun an voraus, daß $\xi^2+\eta^2 \geq 1$ (d.h. c=1).

α) Sei $0 \leq \xi \leq \xi_1 - \frac{1}{2}$.

Dann ist v=0 und damit

$$\mathrm{Re}\ \sigma_p = R_1 + R_3 ,$$

also

$$\text{Re } \sigma_p \leq -\frac{1}{2}(\xi + \xi_1)(\xi^2 + \xi_1^2 - 1) + t^2 \leq -\frac{1}{2}\xi^2 + t^2 \ .$$

Für $\xi \geq 1/2$ und $t < 1/4$ haben wir also

$$\text{Re } \sigma_p \leq -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = -\frac{1}{16} \quad ;$$

für $\xi \leq 1/2$ ist dagegen $\eta \geq 1/2$, und es gilt

$$R_1 \leq -\frac{1}{2} c_0 \ ,$$

also für $t^2 \leq c_0/4$

$$\text{Re } \sigma_p \leq -\frac{1}{4} c_0 \ .$$

β) $\xi_1 - \frac{1}{2} \leq \xi \leq \xi_1 - \frac{1}{4}$.

Dann gilt

$$R_1 \leq -\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\xi^2 \leq -\frac{3}{8}\cdot\xi^2,$$

$$R_2 \leq 0$$

(wegen $\xi^2 \geq 1/4$, also $6\xi^2 - v^2 - 1 \geq 2\xi^2 - v^2 \geq 0$), also

$$\text{Re } \sigma_p \leq -\frac{3}{8}\xi^2 + t^2 \leq -\frac{3}{32} + \frac{1}{16} \leq -\frac{1}{32}$$

für $t \leq 1/4$.

γ) $\xi_1 - \frac{1}{4} \leq \xi \leq \xi_1 + \frac{1}{4}$.

Dann gilt auch

$$\xi \geq \xi_1 \cdot \frac{3}{4} \ ,$$

also

$$|v\cdot\xi| \geq \frac{3}{4} v_0(\tfrac{1}{4}) \ .$$

Weiter ist

$$4\xi^2 - 4v^2 - 2 \geq \frac{1}{4}\xi^2$$

und

$$|\eta| \leq \xi_1^2 \leq 2\xi^2 \ ,$$

also

$$\begin{aligned} |\text{Im } \sigma_p| &\geq |I_1| - |I_2| \\ &\geq \frac{3}{4} v_0(\tfrac{1}{4})\cdot\frac{1}{4}\xi^2 - 2t|\eta| \\ &\geq \xi^2(\frac{3}{16} v_0(\tfrac{1}{4}) - 4t) \ . \end{aligned}$$

Für

$$t \leq \frac{1}{64} v_0(\tfrac{1}{4})$$

haben wir dann

$$|\text{Im } \sigma_p| \geq \xi^2\cdot\frac{1}{32} v_0(\tfrac{1}{4}) \geq \frac{1}{64} v_0(\tfrac{1}{4})$$

Dies ist die einzige Abschätzung, in der wir den Imaginärteil benutzen, aber auch hier ist die Überlegung offensichtlich vom Vorzeichen von ξ unabhängig und gilt deshalb auch für $-\xi$.

δ) $\xi_1 + \frac{1}{4} \leq \xi$.

Dann benutzen wir

$$\text{Re } \sigma_p \geq R_1 + R_2 \geq \frac{1}{4} \cdot 2\xi_1 \cdot \xi^2 - 6v^2\xi^2$$

$$\geq \xi^2(\tfrac{1}{2} - 6v^2) \geq \frac{1}{4}$$

($v_0 \leq \frac{1}{16}$).

Insgesamt haben wir damit gezeigt

$$|\sigma_p(\xi+iv,\eta+it)| \geq \text{Min}\{\tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{4}c_0, \tfrac{1}{32}, \tfrac{1}{64}v_0(\tfrac{1}{4}), \tfrac{1}{4}\}$$

$$= \frac{1}{64} v_0(\tfrac{1}{4})$$

für $\xi^2+\eta^2 \geq 1$ und

$$t \leq \text{Min}\{\tfrac{1}{2} c_0^{1/2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{64}v_0(\tfrac{1}{4})\} = \frac{1}{64} v_0(\tfrac{1}{4})$$

Daraus folgt für jedes $\alpha>0$ eine Abschätzung vom Typ (A.2), und zwar gleichmäßig bezüglich t.

Damit ist Lemma A.5 bewiesen, und auch der Beweis von Lemma A.4 abgeschlossen.

Der wichtigste Schritt in unserem Programm ist

Lemma A.6 $g_1 \in W^d(P)$ für d=(1,2).

Beweis: Für $\theta = (\xi,\eta)$ haben wir

$$|\theta|_d = |\xi| + |\eta|^{1/2}$$

und deshalb gilt wegen

$$|\eta| = |\xi_1\sqrt{\xi_1^2 - 1}| \leq \xi_1^2$$

und

$$\xi_1 \leq 2\xi_1 - 1 \leq |\xi| \qquad \text{wenn} \quad \xi_1 - \tfrac{1}{2} \leq |\xi|$$

auch

$$|\theta|_d \leq 3|\xi| \qquad \text{wenn} \quad \xi_1 - \tfrac{1}{2} \leq |\xi| \quad . \qquad \text{(A.14)}$$

Diese Ungleichung ist das wichtigste Hilfsmittel für die meisten der nun folgenden Abschätzungen.

Gegenstand unserer Untersuchung ist jetzt

$$\sigma_p(\xi+itv,\eta+it\gamma) = R_1 + R_2 + R_3 + i(I_1 + I_2)$$

mit

$$R_1 = (\xi - \xi_1)(\xi + \xi_1)(\xi^2 + \xi_1^2 - 1)$$

$$R_2 = - t^2v^2(6\xi^2 - t^2v^2 - 1)$$

$$R_3 = t^2\gamma^2$$

$$I_1 = tv\xi(4\xi^2 - 4t^2v^2 - 2)$$

$$I_2 = - 2t\gamma\eta$$

und (z.B.)

$$\gamma = \frac{1}{64}\, v_0(\tfrac{1}{4}) \quad ,$$

wobei $1 \le t \le \rho|\theta|_d$, $\xi^2 + \eta^2 \ge c$. Über ρ und c dürfen wir noch verfügen; es genügt,

$$c \ge 1$$

und

$$\rho \ge 1/3$$

anzunehmen.

α) $0 \le |\xi| \le \xi_1 - \frac{1}{2}$.

Dann verschwindet v, und deshalb

$$|\mathrm{Im}\ \sigma_p| = |I_2| \ge 2\gamma|\eta| \quad ,$$

$$\mathrm{Re}\ \sigma_p = R_1 + R_3 \le -\frac{1}{2}\xi^2 + t^2\gamma^2 \quad .$$

Entweder ist nun $|\eta| \ge 1/4$; dann haben wir

$$|\mathrm{Im}\ \sigma_p| \ge \gamma/2 \quad ;$$

oder $|\eta| < 1/4$; dann ist wegen $c \ge 1$ aber $\xi^2 \ge 1/2 > |\eta|$, und deshalb

$$\mathrm{Re}\ \sigma_p \le -\frac{1}{2}\xi^2 + t^2\gamma^2 \le -\frac{1}{2}\xi^2 + \rho^2(2|\xi|)^2\gamma^2$$
$$\le -\xi^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{9}\gamma^2) \le -\xi^2/4 \le -\frac{1}{8} \quad .$$

β) $\xi_1 - \frac{1}{2} \le \xi \le \xi_1 - \frac{1}{4}$.

Wegen $\rho \le 1/3$ hat man

$$R_3 = \gamma^2 t^2 \le \frac{1}{8}\xi^2$$

sowie

$$v^2 t^2 \le \frac{1}{2}\xi^2$$

und damit

$$R_2 = -v^2t^2(6\xi^2 - v^2t^2 - 1) \le -v^2t^2(5\xi^2 - 1) \le 0 \quad ,$$

also

$$\mathrm{Re}\ \sigma_p \le -\frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^2 = -\frac{1}{8}\xi^2 \le -\frac{1}{32} \quad .$$

γ) $\xi_1 - \frac{1}{4} \le \xi \le \xi_1 + \frac{1}{4}$.

Wir benutzen wieder (siehe Beweis von Lemma A.5)

$$|v\cdot\xi| \ge \frac{3}{4}\, v_0(\tfrac{1}{4}) \quad ;$$

ferner gilt

$$4\xi^2 - 4t^2v^2 - 2 \ge \frac{1}{4}\xi^2$$

(das folgt aus

$$4\xi^2 = \frac{4}{9}\xi^2 + \frac{32}{9}\xi^2 \ge \frac{4}{9}\xi^2 + 2 \quad ,$$

$$4t^2v^2 \le 4\rho^2|\theta|_d^2 v^2 \le \frac{4}{9}(3|\xi|)^2v^2 \le 4\xi^2v^2 \le \frac{1}{9}\xi^2 \ ) \quad ,$$

und deshalb

$$|\mathrm{Im}\ \sigma_p| \ge |I_1| - |I_2| \ge t(\frac{3}{4}\, v_0(\tfrac{1}{4})\, \frac{1}{4}\xi^2 - 2\gamma|\eta|)$$
$$\ge t\xi^2(\frac{3}{16}\, v_0(\tfrac{1}{4}) - 4\gamma) \ge t\xi^2 \cdot \frac{1}{8}\, v_0(\tfrac{1}{4})$$
$$\ge \frac{1}{16}\, v_0(\tfrac{1}{4}) \quad .$$

δ) $\xi_1 + 1/4 \leq |\xi| \leq \xi_1 + 1/2$.

Dann ist

$$v^2t^2 \leq \xi^2 \cdot v_0^2/\xi_1^2 \leq \frac{1}{256}\frac{1}{\xi_1^2}\cdot\frac{9}{4}\xi_1^2 \leq \frac{1}{24} \quad ,$$

also

$$R_2 \geq -\frac{1}{4}\xi^2 ,$$

$$R_1 + R_2 \geq \frac{1}{4}(\xi + 1)\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^2 \geq 0 \quad ,$$

und damit

$$\text{Re } \sigma_p \geq R_3 \geq \gamma^2 \quad .$$

ε) $\xi_1 + 1/2 \leq \xi$.

Dann verschwindet v, und

$$\text{Re } \sigma_p \geq R_1 \geq \xi^2 \geq 2 \quad .$$

Damit ist auch Lemma A.6 bewiesen.

Bemerkung Die Ungleichung (A.14) wurde in den Abschätzungen für β), γ) und δ) an ent scheidender Stelle benutzt. Der Fall d=(1,1) - also E *analytisch* - erlaubt keine derartige Ungleichung. Nach mehreren erfolglosen Versuchen, den Fall d=(1,1) zu beweisen, halte ich es inzwischen für sehr wahrscheinlich, daß E *nirgends* analytisch ist (siehe Lemma 11.9).

Sei jetzt $w = (x,y)$ und $y \geq \delta > 0$. Dann ist

$$w \cdot \text{Im } g_1(\theta) = x\,v(\xi,\eta) + y\gamma \geq \delta\cdot\gamma - |x||v(\xi,\eta)| \quad .$$

Für $\xi^2 + \eta^2 \longrightarrow \infty$ konvergiert v gegen 0; es gibt also ein $C = C(x,\delta)$ mit

$$|x||v(\xi,\eta)| \leq \frac{1}{2}\delta\cdot\gamma$$

für $\xi^2 + \eta^2 \geq C$, so daß dann

$$w \cdot \text{Im } g_1(\theta) \geq \frac{1}{2}\delta\cdot\gamma > 0$$

für $|\theta| \geq C$. Nach Satz A.3 ist deshalb

$$E \in G^d(U)$$

für eine Umgebung U von $w = (x,y)$. Wegen der Symmetrie von E bezüglich y gilt dann allgemein

$$E \in G^d(U)$$

für eine Umgebung U von $w = (x,y)$, sofern nur $y \neq 0$.

Damit ist Satz 11.8 bewiesen.

Anhang B Konturdeformationen

Der Bequemlichkeit halber leiten wir zuerst ein wohlbekanntes Prinzip erneut her.

Lemma B.1 Sei $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<\beta$. Die Funktion g sei für $|\zeta-\xi_0|<\beta$ komplex-analytisch; C sei ein Weg, der die Punkte $\xi_0-\alpha$ und $\xi_0+\alpha$ in $\{\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0\} \cap \{|\zeta-\xi_0|<\beta\}$ verbindet, den Punkt $\zeta=\xi_0$ jedoch vermeidet. Dann gilt

$$\mathrm{PV}\int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} \frac{g(\xi)}{\xi-\xi_0}\,d\xi - i\pi g(\xi_0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} \frac{g(\xi)}{\xi-\xi_0+i\varepsilon}\,d\xi = \int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi_0}\,d\zeta$$

Bemerkung PV steht für den Cauchyschen Hauptwert.

Beweis: Im Fall $g(\xi_0) = 0$ ist

$$h(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi_0}$$

für $|\zeta-\xi_0|<\beta$ analytisch, und alle drei Größen stimmen dann überein mit

$$\int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} h(\xi)\,d\xi \quad .$$

Wegen

$$g(\zeta) = g(\zeta) - g(\xi_0) + g(\xi_0)$$

genügt es also, den Fall $g=1$ zu betrachten.

Dann verschwindet aber der Cauchysche Hauptwert, und die beiden verbleibenden Integrale lassen sich jeweils zu einem Integral über einen Halbkreis in der oberen Halbebene deformieren, der die Punkte $\xi_0-\alpha$ und $\xi_0+\alpha$ verbindet. Das Integral von $1/(\zeta-\xi_0)$ über diesen Halbkreis liefert bekanntlich gerade $-i\pi$.

Bemerkung Entsprechend gilt auch

$$\mathrm{PV}\int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} \frac{g(\xi)}{\xi-\xi_0}\,d\xi + i\pi g(\xi_0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} \frac{g(\xi)}{\xi-\xi_0-i\varepsilon}\,d\xi = \int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta-\xi_0}\,d\zeta \quad ,$$

wenn diesmal C den Punkt $\zeta=\xi_0$ durch Ausweichen in die *untere* Halbebene vermeidet.

Lemma B.2 Sei g komplex-analytisch in $U = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta-\xi_0|<\gamma\}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$ und

$$g(\zeta) = h(\zeta)\,(\zeta-\xi_0)$$

mit $h \neq 0$ auf U.

Ferner sei $(g_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ eine Schar auf U analytischer Funktionen mit

$$|g_\varepsilon(\zeta) - g(\zeta)| = O(\varepsilon) \qquad \text{(B.1)}$$

gleichmäßig auf U, so daß ein $c>0$ existiert mit

$$\mathrm{Im}\{g_\varepsilon(\xi)/h(\xi)\} > c\varepsilon \qquad \text{für alle } \xi \in U \cap \mathbb{R} \ . \qquad \text{(B.2)}$$

Dann ist

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{g_\varepsilon(\xi)} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{h(\xi)}\,\frac{1}{\xi-\xi_0+i\varepsilon} \quad ,$$

wenn wir beide Seiten als Distributionen auf $U \cap \mathbb{R}$ auffassen.

Beweis: Sei $\phi \in C_0^\infty(U \cap \mathbb{R})$. Zu zeigen ist

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi(\xi)}{g_\varepsilon(\xi)}\, d\xi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi(\xi)\, d\xi}{h(\xi)(\xi-\xi_0+i\varepsilon)}$$

Sei $\beta<\gamma$ und $\psi \in C_0^\infty(U \cap \mathbb{R})$ eine Hilfsfunktion mit $\psi=1$ auf $[\xi_0-\beta, \xi_0+\beta]$. Wir zerlegen

$$\phi = \phi(\xi_0)\psi + (\phi - \phi(\xi_0)\psi) =: \phi_1 + \phi_2$$

Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi_2(\xi)}{g_\varepsilon(\xi)}\, d\xi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big\{ \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi_2(\xi)}{g(\xi)} \Big(\frac{g(\xi)-g_\varepsilon(\xi)}{g_\varepsilon(\xi)} \Big)\, d\xi + \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi_2(\xi)}{g(\xi)}\, d\xi \Big\} ,$$

wobei das letzte Integral existiert, da ϕ_2 in ξ_0 eine einfache Nullstelle hat.

Das erste Integral konvergiert aber gegen 0, da der Integrand nach Voraussetzung (B.1) für $\varepsilon \downarrow 0$ fast überall gegen 0 konvergiert und wegen (B.1) und (B.2) überall beschränkt bleibt. Insgesamt ergibt sich so

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi_2(\xi)}{g_\varepsilon(\xi)}\, d\xi = \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi_2(\xi)}{g(\xi)}\, d\xi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\xi_0-\gamma}^{\xi_0+\gamma} \frac{\phi_2(\xi)\, d\xi}{h(\xi)(\xi-\xi_0+i\varepsilon)} .$$

Damit können wir uns der Funktion ϕ_1 zuwenden. Sei $0<\alpha<\beta$; dann zerlegen wir das Integral über $[\xi_0-\gamma, \xi_0+\gamma]$ in Integrale über $[\xi_0-\gamma, \xi_0-\alpha]$, $[\xi_0-\alpha, \xi_0+\alpha]$ und $[\xi_0+\alpha, \xi_0+\gamma]$. Die Integrale über die beiden äußeren Intervalle sind dabei für $\varepsilon \downarrow 0$ jeweils äquivalent. Auf dem inneren Intervall haben wir aber *analytische* Integranden; nach Lemma B.1 dürfen wir deshalb bei

$$\int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} \frac{\phi_1(\xi)\, d\xi}{h(\xi)(\xi-\xi_0+i\varepsilon)} = \phi(\xi_0) \cdot \int_{\xi_0-\alpha}^{\xi_0+\alpha} \frac{d\xi}{h(\xi)(\xi-\xi_0+i\varepsilon)}$$

den Integrationsweg in die obere Halbebene deformieren und dann ε gegen 0 gehen lassen. Es ist deshalb wegen (B.1) nur noch zu zeigen, daß diese Deformation auch bei dem anderen Integral zulässig ist, und dazu genügt es nachzuweisen, daß g_ε für genügend kleines ε in der oberen Halbebene keine Nullstelle hat. Das ist aber äquivalent zu

$$f_\varepsilon(\zeta) := \frac{g_\varepsilon(\zeta)}{h(\zeta)} \neq 0 \qquad \text{für } \{\operatorname{Im}\zeta \geq 0\} \cap U$$

und ε genügend klein.

Nun konvergiert $f_\varepsilon(\zeta)$ nach Voraussetzung (B.1) auf U gleichmäßig gegen

$$\frac{g(\zeta)}{h(\zeta)} = \zeta - \xi_0 .$$

Da es sich um analytische Funktionen handelt, konvergieren auch die Ableitungen gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen der Grenzfunktion. Es gibt deshalb ein $\varepsilon_1>0$, so daß

$$|f_\varepsilon(\xi+i\eta) - f_\varepsilon(\xi) - i\eta| < \tfrac{1}{2}|\eta|$$

für alle $\zeta=\xi+i\eta$ mit $|\zeta-\xi_0| < \alpha$ und alle $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_\varepsilon(\xi+i\eta) &= \operatorname{Im} f_\varepsilon(\xi) + \eta + \operatorname{Im}\{f_\varepsilon(\xi+i\eta) - f_\varepsilon(\xi) - i\eta\} \\ &\geq \operatorname{Im} f_\varepsilon(\xi) + \eta - \frac{\eta}{2} > 0 \end{aligned}$$

für $\eta \geq 0$, so daß g_ε keine Nullstellen in der oberen Halbebene hat.

Anwendung Nach Konstruktion (siehe Satz 7.6) hat die Fouriertransformierte von $\tilde{K}$ die Form

$$(\mathfrak{F}_2(\tilde{K}(z)))(\xi,\eta) = \exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)\, \frac{-\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi_1^2+\xi_3^2} \Big(\frac{-1}{\xi^2+\xi_3^2} + \frac{1}{2\xi_1} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big(\frac{1}{\xi-\xi_1+i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+\xi_1+i\varepsilon} \Big) \Big)$$

In einer Umgebung von $\xi=\xi_1$ können wir dann schreiben

$$(\mathfrak{F}_2(\tilde{K}(z)))(\xi,\eta) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{g_\varepsilon(\xi,\eta)} \quad ,$$

wobei

$$g_\varepsilon(\xi,\eta) = - \frac{\xi_1^2+\xi_3^2}{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)(\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2})} \Big\{ \frac{(\xi^2+\xi_3^2)(\xi-\xi_1+i\varepsilon)(\xi+\xi_1+i\varepsilon)}{-(\xi-\xi_1+i\varepsilon)(\xi+\xi_1+i\varepsilon)+\xi^2+\xi_3^2} \Big\}$$

Der Nenner des Klammerausdrucks ist dabei in einer Umgebung von $\xi=\xi_1$ von 0 verschieden, und

$$|g_\varepsilon(\xi,\eta) - g(\xi,\eta)| = O(\varepsilon)$$

für

$$g(\xi,\eta) = \frac{-\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)} = - \frac{\xi_1^2+\xi_3^2}{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)(\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2})} \Big\{ \frac{(\xi^2+\xi_3^2)(\xi^2-\xi_1^2)}{\xi_1^2+\xi_3^2} \Big\}$$

(bei festem η). Als Funktionen von ξ sind alle beteiligten Funktionen in einer Umgebung von $\xi=\xi_1$ analytisch. Für $\xi=\xi_1$ gilt

$$g_\varepsilon(\xi,\eta) = i\varepsilon \cdot a_1(\xi,\eta) \cdot a_2(\xi,\eta) \quad ,$$

wobei

$$a_1(\xi,\eta) = - \frac{\xi_1^2+\xi_3^2}{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\, z)(\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2})}$$

reell und negativ ist, während

$$a_2(\xi,\eta) = \frac{(\xi^2+\xi_3^2)(\xi+\xi_1+i\varepsilon)}{-i\varepsilon(\xi+\xi_1+i\varepsilon)+\xi^2+\xi_3^2}$$

für $\varepsilon \downarrow 0$ den reellen positiven Grenzwert

$$\frac{(\xi^2+\xi_3^2)(\xi+\xi_1)}{\xi_1^2+\xi_3^2}$$

annimmt. Also gibt es $c>0$ mit

$$\operatorname{Im}\{ g_\varepsilon(\xi,\eta) \} < -c\varepsilon \quad ,$$

sobald ε genügend klein wird, in einer Umgebung von $\xi=\xi_1$ (bei festem η).

Dasselbe gilt nun für die Funktion

$$g'_\varepsilon(\xi,\eta) = -\frac{\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i\varepsilon\xi}{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}z)} \quad .$$

Weiter kann man sich auf dieselbe Weise überlegen, daß die Imaginärteile von g_ε und g'_ε in einer Umgebung von $\xi=-\xi_1$ gleiches Vorzeichen tragen. Lemma B.2 zeigt

$$(\mathfrak{F}_2(\tilde{K}(z)))(\xi,\eta) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} -\frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z)}{\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i\varepsilon\xi} \quad ,$$

denn beide Seiten stimmen bei $\xi=\alpha\xi_1$ mit der Distribution

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} -\frac{\exp(\sqrt{\xi^2+\eta^2}z)(\xi^2+\sqrt{\xi^2+\eta^2})}{(\xi^2+\xi_3^2)(\xi_1^2+\xi_3^2)(\xi+\alpha\xi_1)} \cdot \frac{1}{\xi-\alpha\xi_1+i\varepsilon}$$

überein ($\alpha=\pm 1$).

Im nächsten Schritt soll der Integrationsweg, den wir bisher nur in der Umgebung von $\xi=\pm\xi_1$ ein wenig verändert haben, weit in die obere Halbebene hinein deformiert werden. Grundlage dieser Operation ist

Lemma B.3 Sei $\mathrm{Re}\,\zeta \geq 0$, $0 \leq \mathrm{Im}\,\zeta \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\zeta$ und $|\zeta-\xi_1| \geq c_0 > 0$. Dann gibt es $c_1 > 0$ mit

$$|\sigma_p(\zeta,\eta)| \geq c_1(|\zeta|^2 + \inf(|\eta|^2,|\eta|))$$

für alle $\eta\in\mathbb{R}$.

Beweis: Nach Lemma 6.2 haben wir

$$\sigma_p(\xi,\eta) = (\zeta-\xi_1)(\zeta+\xi_1)(\zeta^2+\xi_3^2)$$

Für die Faktoren gilt

$$|\zeta-\xi_1| \geq c_0 \ ,$$

$$|\zeta+\xi_1| \geq |\mathrm{Re}(\zeta+\xi_1)| \geq |\xi_1| \geq 1 \quad ,$$

und wegen

$$\xi_3^2 \geq c_2 \inf(|\eta|^2,|\eta|)$$

gibt es c_3 mit

$$|\zeta^2+\xi_3^2| \geq |\mathrm{Re}(\zeta^2+\xi_3^2)| = |\mathrm{Re}\,\zeta^2| + |\xi_3^2| \geq c_3(|\zeta^2| + \inf(|\eta|^2,|\eta|)).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Lemma B.4 Sei $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{supp}\,\phi\subset\{(x,y)|\ |x|<R\}$. Für $x>R$, $\eta\neq 0$ und $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ gilt

$$(\mathfrak{F}_y(K * \phi))(x,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\phi}(\xi+i\alpha|\xi|,\eta)\,\exp(ix(\xi+i\alpha|\xi|))}{(\xi+i\alpha|\xi|)^2-\sqrt{(\xi+i\alpha|\xi|)^2+\eta^2}}\,(1+i\alpha\,\mathrm{sgn}\,\xi)\,d\xi$$

Beweis: Sei C_1 ein Weg in der komplexen ξ-Ebene, der im wesentlichen auf der reellen Achse verläuft und lediglich die Punkte $\xi=\pm\xi_1$ durch Ausweichen in die obere Halbebene vermeidet. Dann ist

$$(\mathfrak{F}_y(K * \phi))(x,\eta) = (\mathfrak{F}_x^{-1}(\hat{K}\cdot\hat{\phi}))(x,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \frac{\hat{\phi}(\zeta,\eta)\,\exp(i\zeta x)}{\zeta^2-\sqrt{\zeta^2+\eta^2}}\,d\zeta$$

(sinngemäße Anwendung von Lemma B.1 und Lemma B.2).

Da der Integrand analytisch ist (für $\hat{\phi}$ berufen wir uns dabei auf den Satz von Paley-Wiener, für den Nenner auf Lemma B.3 und

$$\frac{1}{\zeta^2-\sqrt{\zeta^2+\eta^2}} = \frac{\zeta^2+\sqrt{\zeta^2+\eta^2}}{\zeta^4-\zeta^2-\eta^2} \quad),$$

läßt sich das Integral über C_1 in jedem *endlichen* Bereich zu einem Integral über den Weg C_2, der durch die Bedingung

$$\mathrm{Im}\,\zeta = \alpha|\mathrm{Re}\,\zeta|$$

beschrieben wird, deformieren. Daß die Deformation sogar "bis ins Unendliche" zulässig ist, bleibt noch zu zeigen.

Die Restintegrale sind - für $\mathrm{Re}\,\zeta$ positiv - von der Form

$$I_1 = \int_N^\infty \frac{\hat{\phi}(\xi,\eta)\,\exp(i\xi x)}{\xi^2-\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,d\xi \quad ,$$

$$I_2 = \int_0^N \frac{\hat{\phi}(N+it,\eta)\,\exp(ix(N+it))}{(N+it)^2-\sqrt{(N+it)^2+\eta^2}}\,idt \quad ,$$

$$I_3 = \int_N^\infty \frac{\hat{\phi}(\xi+i\alpha\xi,\eta)\,\exp(ix(\xi+i\alpha\xi))}{(\xi+i\alpha\xi)^2-\sqrt{(\xi+i\alpha\xi)^2+\eta^2}}\,(1+i\alpha)\,d\xi \quad .$$

Entsprechende Integrale ergeben sich für $\mathrm{Re}\,\zeta$ negativ. Der Satz von Paley-Wiener und die Voraussetzung über den Träger von ϕ liefern die Abschätzung

$$|\hat{\phi}(\zeta,\eta)| \leq C_k\,(1+|\zeta|^2+|\eta|^2)^{-k}\,\exp(R\cdot\mathrm{Im}\,\zeta) \quad .$$

Der Nenner aller Integranden kann nach Lemma B.3 durch eine (von η abhängige) Konstante abgeschätzt werden:

$$|\zeta^2-\sqrt{\zeta^2+\eta^2}| \geq C \quad .$$

Da wir $x>R$ vorausgesetzt haben, konvergieren die Integrale I_1, I_2, I_3 und die entsprechenden Integrale für $\mathrm{Re}\,\zeta$ negativ für $N\to\infty$ gegen 0. Also

$$(\mathfrak{F}_y(K * \phi))(x,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_2} \frac{\hat{\phi}(\zeta,\eta)\,\exp(i\zeta x)}{\zeta^2-\sqrt{\zeta^2+\eta^2}}\,d\zeta$$

Die Behauptung ergibt sich daraus durch Wechsel der Integrationsvariablen.

Lemma B.5 Sei $g\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{supp}\,g\subset\{(x,y)|\ |x|<R\}$. Für $x>R$, $\eta\neq0$ und $0<\alpha<\frac{1}{2}$ gilt

$$(\mathfrak{F}_y(K * g))(x,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_2} \frac{\hat{g}(\zeta,\eta)\,\exp(i\zeta x)}{\zeta^2-\sqrt{\zeta^2+\eta^2}}\,d\zeta \quad .$$

Beweis: Wir wählen $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\iint\phi(x,y)\,dx\,dy = 1 \ ;$$

dann konvergiert die Schar $(\phi_\varepsilon)_{0<\varepsilon}$, definiert durch

$$\phi_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\phi\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

für $\varepsilon\downarrow 0$ gegen das Diracmaß $\delta(x,y)$. Wir haben dann

$$K * g = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{(K * g) * \phi_\varepsilon\} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\{K * (g * \phi_\varepsilon)\} \quad .$$

Für genügend kleines ε gilt

$$\operatorname{supp}(g * \phi_\varepsilon) \subset \{(x,y) \mid |x|<R\} \quad .$$

Die Fouriertransformierte von ϕ_ε ist nun $\phi(\varepsilon\xi,\varepsilon\eta)$; nach Lemma B.4 haben wir wegen $g * \phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathfrak{F}_y(K * (g * \phi_\varepsilon)))(x,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_2} \frac{\hat{g}(\zeta,\eta)\,\hat{\phi}(\varepsilon\zeta,\varepsilon\eta)}{\zeta^2-\sqrt{\zeta^2+\eta^2}}\exp(i\zeta x)\,d\zeta$$

Hierin können wir den Grenzübergang $\varepsilon\downarrow 0$ durchführen; denn wegen des Satzes von Paley-Wiener gibt es k und C_k mit

$$|g(\zeta,\eta)| \le C_k\,(1 + |\zeta|^2 + |\eta|^2)^k \exp(R\cdot|\operatorname{Im}\zeta|) \ ,$$

so daß der Faktor $\exp(i\zeta x)$ wegen $x>R$ die Konvergenz des Integrals auch für $\varepsilon=0$ bewirkt.

Anhang C: Historische Anmerkungen

Die Geschichte der Fundamentallösung $\tilde{K}$ (7.44) beginnt im Jahre 1886. Auf der Sitzung der Royal Society in Edinburgh am 20. Dezember jenes Jahres ("Sir William Thomson, President, in the Chair") wird ein Beitrag von *Thomson* mit dem Titel "On the Waves produced by a Ship advancing uniformly into Smooth Water" verlesen. Den Text dieses Beitrages finden wir in den Proceedings nicht, aber er soll laut Ankündigung im Januar 1887 im *Philosophical Magazine* erscheinen. Leider ist dies nie geschehen. Über die ursprüngliche Form, in der *Thomson* sich seine Ergebnisse herleitete, kann man also nur spekulieren.

Das einzige Zeugnis, das wir heute aus dieser Zeit haben, ist *Thomson's* populärwissenschaftlicher Vortrag "On Ship Waves" vor der Institution of Mechanical Engineers at Edinburgh im nachfolgenden Jahr (*Thomson (1887)*). In diesem Vortrag verzichtet er auf jede mathematische Begründung seiner Ergebnisse - vermutlich "because of its great difficulty" (*Thomson (1887),S.423*). Er nennt jedoch die folgenden charakteristischen Eigenschaften des Wellensystems hinter einem Druckpunkt:

a) alle Wellenerscheinungen sind beschränkt auf ein kegelförmiges Gebiet hinter dem Druckpunkt;

b) der halbe Öffnungswinkel dieses Kegels ist etwa $19^{o}28'$;

c) auch außerhalb des Kegels findet man eine geringfügige Störung der Oberfläche - sogar in beliebig großer Entfernung vor dem "Schiff" -, aber für praktische Betrachtungen kann man diesen Teil der Störung vernachlässigen;

c) das Wellenbild ergibt sich durch Überlagerung zweier einfacher Wellensysteme, deren Maxima und Minima auf gewissen algebraischen Kurven liegen*;

d) die Formeln für die Wellenhöhe dieser beiden Systeme liefern eine unendliche Amplitude auf dem Rande des Wellenkegels.

Der veröffentlichte Text enthält ein Bild, auf dem Linien gleicher Phase der beiden Wellensysteme gezeigt werden (es entspricht im wesentlichen dem Bild in *Lamb (1975),S.434*). Aus dem Text geht ferner hervor, daß *Thomson* seinen Zuhörern das Wellenbild an einem Modell veranschaulichte.

Die genannten Fakten zeigen mit ziemlicher Sicherheit, daß *Thomson* sich ein Integral der freien Wellen hinter der Störung hergeleitet haben muß, das er dann mit Hilfe der von ihm weiterentwickelten *Methode der stationären Phase* von *Stokes* ** in ihrer einfachsten Form asymptotisch auswertete.

Im Jahre 1898 erscheint im *Philosophical Magazine* die bahnbrechende Arbeit "The Wave Resistance of Ships" des Australiers *J.H.Michell*. Seine erstaunlich eleganten Integraldarstellungen für die Lösung des Problems des "dünnen Schiffs"

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{für } z<0,\ y\neq 0 \ ;$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{für } z=0 \ ;$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \mp f \qquad \text{für } y=\pm 0$$

* die Gleichungen dieser Kurven sind übrigens die einzigen Formeln, die im Vortragstext erscheinen.

** siehe dazu *Lamb (1975), Nr.241*. Befriedigende Beweise für die Methode der stationären Phase findet man z.B. bei *Erdélyi (1956)* oder *Dieudonné (1968)*.

blieben jedoch lange Jahre ohne jeden Einfluß auf die Entwicklung dieses Gebiets (erst 1923 wird die Arbeit wieder von *Havelock* zitiert). *Michell* verweist den Leser "for the discussion of wave patterns" auf *Lamb's* "Hydrodynamics" und den Vortrag von *Thomson*. Er selbst beschränkt sich im wesentlichen auf die Herleitung und erste Interpretation seiner Formel für den Wellenwiderstand.

Verglichen mit der manchmal etwas "blumigen" Darstellungsweise von *Thomson* wirkt der Text von *Michell* äußerst konzentriert. Typisch für seine lakonische Kürze ist die Behandlung der Eindeutigkeitsfrage:"...it is evident that the solution is to a certain extent indeterminate with those conditions, for we may superpose any system of free waves symmetrical with respect to y=0 on a particular solution satisfying them. The form of the factor in question is chosen in order to make the elementary diverging waves trail aft; in other words, to satisfy the condition that the ship advances into still water" (*Michell (1898), S.113*). Die oben in §7 angegebene Konstruktion der Funktion F kann als Präzisierung dieser Auffassung angesehen werden; vom heutigen Standpunkt ist daneben trotzdem noch ein Eindeutigkeitsbeweis wie der in §10 notwendig.

Erst im Jahre 1905 gibt der inzwischen zum Baron *Kelvin* ernannte *Thomson* eine ziemlich vollständige Begründung seiner Ergebnisse (*Kelvin (1905)*). Hierbei erzeugt er das Wellensystem durch Überlagerung zweidimensionaler Wellen, unter Benutzung anschaulich-geometrischer Argumente. Er gelangt zu dem Integral für die Wellenerhebung

$$d(x,y) = d(r\cos\theta, r\sin\theta) = 4\pi^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta}^{\pi/2} \frac{k(\psi)}{\lambda\cos^2\psi} \sin \frac{2\pi r\cos(\psi-\theta)}{\lambda\cos^2\psi}\, d\psi \; ; \qquad (C.1)$$

dabei ist $\lambda = 2\pi U^2/g$ die "Fundamentalwellenlänge" zur Geschwindigkeit U, und die Größen b und k definieren die Druckverteilung Π über

$$\frac{1}{g}\Pi(x,y) = \int_0^{\pi} \frac{b^2 k(\psi)\, d\psi}{(x\cos\psi + y\sin\psi)^2 + b^2} \; . \qquad (C.2)$$

Bei radialsymmetrischen Druckverteilungen ist k konstant. Das Integral (C.1) wird nun mit der Methode der stationären Phase für $r\to\infty$ bei festem θ asymptotisch ausgewertet. Für $|\tan\theta| < 1/\sqrt{8}$, also $|\theta| < 19^{\circ}28'$, hat $du/d\psi$,

$$u = \frac{\cos(\psi-\theta)}{\cos^2\psi} \; ,$$

zwei einfache Nullstellen bei ψ_1, ψ_2, und es ist $\frac{d^2}{d\psi^2}u(\psi_1)<0$ sowie $\frac{d^2}{d\psi^2}u(\psi_2)>0$, so daß dann

$$d(x,y) = d(r\cos\theta, r\sin\theta) \sim \frac{4\pi^2 b}{\sqrt{\lambda r}} \Big\{ \frac{k(\psi_1)\sec^2(\psi_1)}{\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\psi^2}u(\psi_1)\right|}} \sin\Big(\frac{2\pi}{\lambda}(ru(\psi_1) - \frac{\lambda}{8})\Big)$$

$$(C.3) \qquad + \frac{k(\psi_2)\sec^2(\psi_2)}{\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\psi^2}u(\psi_2)\right|}} \sin\Big(\frac{2\pi}{\lambda}(ru(\psi_2) + \frac{\lambda}{8})\Big) \Big\}$$

(*Kelvin (1905), Formel (130)*).

Für $|\tan\theta| > 1/\sqrt{8}$ wird u nicht mehr stationär. Die Aussagen des Vortrags von 1887 ergeben sich jetzt aus (C.3). *Kelvin* fügt ihnen zwei weitere Beobachtungen hinzu:

e) innerhalb des Kegels klingen die Amplituden wie $r^{-1/2}$ ab;

f) am Rande des Kegels findet man einen *Phasensprung* von 1/4 Periode zwischen den beiden Hauptwellensystemen (d.h. den beiden Summanden in (C.3)).

Für $\theta \sim 19^{\circ}28'$ hat $du/d\psi$ eine *doppelte* Nullstelle; deshalb verschwindet dort auch $d^2u/d\psi^2$, und die Amplituden in (C.3) werden unendlich groß. *Kelvin* schreibt dies irrtümlicherweise der Tatsache zu, daß er mit einer unendlich konzentrierten Druckverteilung gearbeitet hat. Die unendlichen Amplituden des zweiten Wellensystems bei $\theta=0$ (wo $\sec\psi_2$ singulär wird) erwähnt er nicht. Die *Eindeutigkeit* seiner Lösung steht für *Kelvin* außer Frage; dabei bleibt es leider etwas unklar, welches Problem eigentlich gelöst wurde.

Kurz nach *Kelvin's* erster ausführlicher Darstellung seiner Theorie erscheinen im *Arkiv för matematik, astronomi och fysik* zwei Aufsätze von *Ekman* zu unserem Thema (*Ekman (1906), (1907)*). In den quantitativen Ergebnissen gehen sie eigentlich nicht wesentlich über *Kelvin's* Arbeit hinaus, wenn man einmal davon absieht, daß sie auch den Fall endlicher Wassertiefe sowie den eines Buckels am Bachboden behandeln. Die *Methode* von *Ekman* ist jedoch sehr viel direkter und übersichtlicher. *Ekman* beginnt jeweils mit dem Aufstellen der Gleichungen des Randwertproblems und diskutiert dann ausführlich Fourier-Integrale, wobei er zu rudimentären Formen des Satzes von *Paley-Wiener* gelangt. Er gewinnt so im zweiten Aufsatz eine vollständige Fourier-Doppelintegral-Darstellung einer echten Lösung (*Kelvin* betrachtete ja lediglich den Anteil der freien Wellen). Im ersten Aufsatz, der vermutlich noch ganz unabhängig von *Kelvin's* Arbeit von 1905 entstand * , führt er außerdem eine asymptotische Auswertung des Wellenintegrals durch und findet ebenfalls den Phasensprung. Die Arbeit enthält auch das erste Bild mit dem korrekten Verlauf der Phasenlinien (sogar *Kelvin (1905)* zeigt noch ein Bild mit "Isophasal Lines", die sich am Rande des Kegels treffen). Die scheinbar unendlichen Amplituden am Grenzwinkel sind für *Ekman* nicht das Ergebnis einer unangemessenen asymptotischen Auswertungsmethode, sondern eher Folge der hier unzulässigen Linearisierung:"They would be infinitely high ..... if our calculations were not invalid for waves of great height"(*Ekman(1906), S.29/30*). Das Eindeutigkeitsproblem wird kurz gestreift; nach einer sehr ausführlichen Begründung dafür, daß er an den Nullstellen des Nenners seines Integranden den Cauchyschen Hauptwert auswählt, fährt *Ekman* fort: "Actually we will assume that the water is initially waveless before reaching the hump V; and this condition can be realized by adding a proper system of free stationary waves"(*Ekman (1906), S.12*).

1908 veröffentlicht *Havelock* seinen ersten großen Beitrag zu unserem Gegenstand. Er gelangt durch Integration über die Zeit zu einem recht kompliziert gebauten Dreifach-Integral für die Wellenerhebung (vgl. auch die Darstellung bei *Stoker (1957), S.219ff*). Dies wird durch verschiedene Überlegungen auf ein Einfach-Integral reduziert, das schließlich mit der Methode der stationären Phase asymptotisch ausgewertet wird. *Havelock* führt dabei die heute noch üblichen Bezeichnungen "transverse" und "diverging wave system" für die beiden Hauptbestandteile des Wellenbildes ein. Er übersieht allerdings den zwischen ihnen bestehenden Phasensprung am Rande des *Kelvin*schen Kegels. Dies ist umso erstaunlicher, als er die Fallunterscheidung bei der Methode der stationären Phase zwischen einfachen Minima und Maxima durchaus kennt (Gleichungen (14),(15),(17),(18) in *Havelock (1908)*). Hier kann es sich eigentlich nur um einen Flüchtigkeitsfehler handeln (wenn ein derartiger Ausdruck bei einem solchen Mann gestattet ist) - eine differenzierbare Funktion mit zwei Minima ohne ein dazwischenliegendes Maximum ist ja schlecht denkbar.

Der wichtigste neue Beitrag, den *Havelock* in dieser Arbeit zur Struktur der Fundamentallösung leistet, ist zweifellos die Herleitung einer asymptotischen Formel für die Wellenerhebung am Rande des *Kelvin*-Kegels. Wegen der doppelten Nullstelle der Ableitung der Phasenfunktion muß er hierfür die Methode der stationären Phase weiterentwickeln. Die Amplitude nimmt dann wie die dritte Wurzel von $1/r$ ab. *Havelock* bemerkt auch den jetzt zutage tretenden Phasenunterschied zu den inneren Entwicklungen und weist auf Parallelen in der Optik hin (das hatte bereits *Kelvin*

* *Ekman (1906)* wurde am 14. März 1906 eingereicht; es ist sehr wahrscheinlich, daß dem Autor damals das Januarheft 1906 des *Philosophical Magazine* noch nicht vorlag. In *Ekman (1907)* wird *Kelvin (1905)* jedoch zitiert.

(1905) getan). Die Arbeit von *Kelvin* aus dem Jahre 1905 kennt er jedoch merkwürdigerweise nicht, denn er zitiert nur den Vortrag von 1887, und man darf annehmen, daß ihm der Irrtum hinsichtlich des Phasensprungs zwischen den transversalen und divergenten Wellen kaum unterlaufen wäre, wenn er *Kelvin's* Aufsatz von 1905 zuvor bereits gelesen hätte. Die Arbeiten von *Ekman* sind ihm offensichtlich ebenfalls nicht bekannt.

Ein weiteres Phänomen, das *Havelock* anscheinend als erster bemerkt, ist das Anwachsen der Amplitude beim divergenten Wellensystem für $|\theta| \to 0$ (bei *Havelock* α). Da er jedoch asymptotisch nach dem Phasenwinkel entwickelt und die Phasenlinien des divergenten Systems alle in den Ursprung laufen, kommt er zu der Auffassung, daß diese Singularität nur mit der Annäherung an den Ursprung zusammenhängt. Er "behebt" sie deshalb durch "Verschmieren" der Druckverteilung. Man kann also annehmen, daß ihm damals die Tatsache nicht bewußt wurde, daß das divergente Wellensystem an der gesamten Halbgerade hinter dem Druckpunkt singulär wird.

Lamb (1916) greift das Thema erneut auf. Mit einer ganz neuen und (im Vergleich mit *Kelvin* und *Havelock*) angenehm kurzen Herleitung, unter Benutzung *Rayleigh*scher "small dissipative forces" und Integration über die Zeit gelangt er zu einer kompakten Doppelintegraldarstellung für die Wellenhöhe, die im wesentlichen Elemente heute üblicher Formeln enthält. Trotzdem ist die Herleitung (vor allem im Vergleich mit *Ekman's* Arbeiten) noch unbefriedigend. Bei der asymptotischen Auswertung des Wellenanteils gelangt *Lamb* zu einer Synthese der Ergebnisse von *Kelvin (1905)* und *Havelock (1908)*. Er weist auf den Phasensprung am Rande hin und kennt die asymptotische Auswertung für den Grenzwinkel. Da auch *Lamb* entlang der Phasenlinien entwickelt, hält er genauso wie *Havelock* die unendlichen Amplituden bei $\theta=0$ lediglich für eine Erscheinung in der Umgebung des Nullpunktes.

Der unterschlagene Phasensprung führt übrigens ein zähes Eigenleben bis in die heutige Zeit. *Green* veröffentlicht 1918 in demselben *Philosophical Magazine*, wo zwei Jahre zuvor *Lamb's* Arbeit erschienen war, eine Untersuchung, in der beide Wellensysteme sich wieder mit gleicher Phase am Rande des Kegels treffen (*Green (1918), (52) und (53)*; in der Darstellung der Methode der stationären Phase bei *Green* wird übrigens nicht zwischen $d^2u/d\psi^2 < 0$ und $d^2u/d\psi^2 > 0$ unterschieden). *Kostyukov (1968)* referiert *Havelock's* Ergebnisse von 1908 (S.141ff) ohne Hinweis auf Fehler und zeigt (S.139) ein eigenes Bild, auf dem sich Linien gleicher Phase am Rande des *Kelvin*-Winkels treffen * . Und noch in der neuesten Ausgabe der "Hydrodynamics" von *Lamb* prangt auf S.434 das bekannte Bild der "curves of uniform phase", auf dem sich die Kurven wieder am Rande des *Kelvin*-Kegels verbinden. Erst in einer Anmerkung erfährt der Leser:"... that there is a difference of phase between the two branches meeting at a cusp, so that the drawing does not represent quite accurately the configuration of the wave-ridges". Leider werden wohl die meisten Leser eher das Bild im Gedächtnis behalten als die kleingedruckte Anmerkung.

Ein Bild mit den "richtigen"Phasenlinien finden wir erstmals wieder in dem nach *Kelvin* wohl wichtigsten Beitrag zum Wellensystem des Druckpunktes, geliefert von *Hogner* im Jahre 1923. Ebenso wie *Michell* und *Ekman* fixiert *Hogner* gleich zu Beginn seiner Untersuchung die Gleichungen des stationären Randwertproblems, und ohne jeden Umweg erhält er durch systematische Anwendung allein der Fouriertransformation als Darstellung für das Geschwindigkeitspotential

$$\phi(x,y,z) = -\frac{iU}{4\rho\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha e^{i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}}{U^2\alpha^2 - g\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \, d\alpha \, d\beta \qquad (C.4)$$

(vgl. (7.43)). Dazu notiert er:"The value of the integral is indeterminate" und

* Das Umschlagbild des Buches von *Kostyukov* (amerikanische Ausgabe) zeigt dieselben Eigenschaften; vermutlich handelt es sich um eine vergröberte Wiedergabe der Zeichnung aus *Lamb's* "Hydrodynamics".

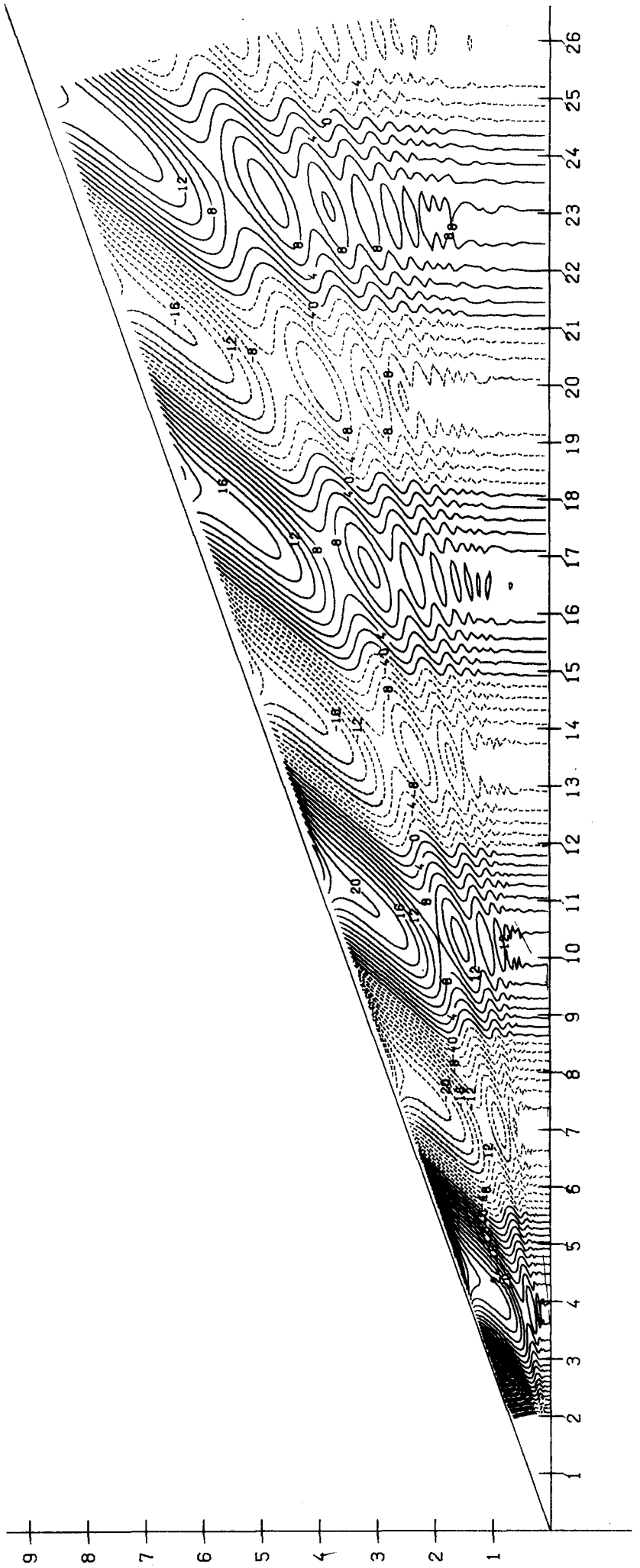

Fig.4 Höhenlinien für die Approximation an $E_2 \times 10^2$
nach der Methode der stationären Phase
im Inneren des Kelvin-Kegels (vgl. Fig.3).

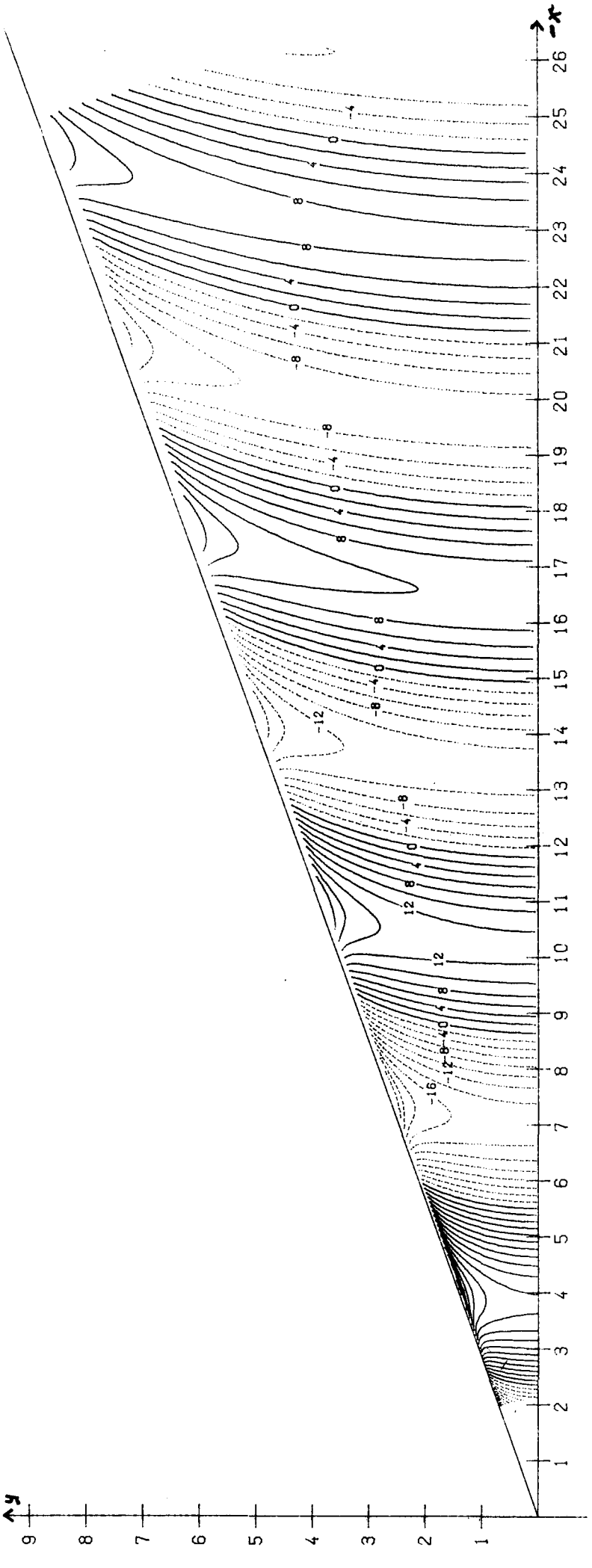

Fig.5 Methode der stationären Phase für E_2: das System der transversalen Wellen.

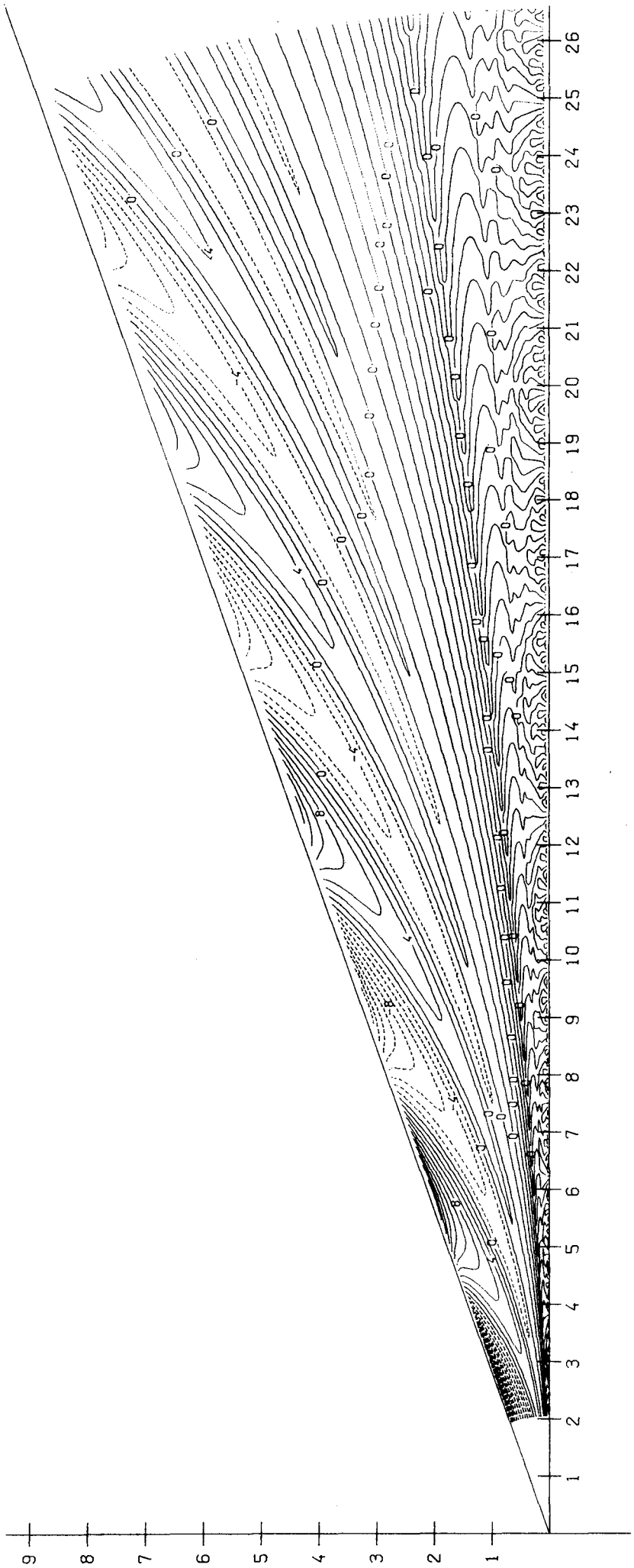

Fig.5 Methode der stationären Phase für E_2: das System der divergenten Wellen.

Die Häufung der Phasenlinien an der Geraden y = 0 kann wegen des der Zeichnung zugrundeliegenden diskreten Punkttrasters nicht richtig wiedergegeben werden.

und legt dann einen geeigneten komplexen Integrationsweg fest, der die Nennernullstelle vermeidet. "Thus one value of the indeterminate integral is selected, this value, as seen below, corresponding to the case of motionless water at great distances in front of the ship". Seine Wahl des Integrationsweges entspricht natürlich genau dem Grenzwert $\varepsilon \to 0$ in (7.43) (siehe Anhang B).

Hogner ist dann vor allem bemüht, die scharfen Sprünge zu glätten, die durch die älteren Arbeiten (er zitiert unter anderem *Kelvin (1905), Ekman (1906),(1907), Havelock (1908),Green (1918)*) mit ihren ganz abrupt wechselnden asymptotischen Entwicklungen innerhalb, auf dem Rande und außerhalb des *Kelvin*-Kegels suggeriert werden. Dies gelingt ihm unter Einsatz einer eigens von ihm für diesen Zweck entwickelten asymptotischen Methode, mit der er alle bisher erzielten Ergebnisse neu herleiten und darüberhinaus zeigen kann, daß die Übergänge sich stetig vollziehen. Diese Methode ist jedoch recht kompliziert und z.B. nicht zur Wiedergabe in Vorlesungen geeignet.

Hogner's Arbeit unterscheidet sich von ihren englischen Vorgängern durch die direkte Bearbeitung des Randwertproblems (kein Umweg über das instationäre Problem) und die sauberen Begründungen bezüglich Konvergenz gewisser Integrale und Größenordnungen vernachlässigter Beiträge. Hierin folgt er seinem skandinavischen Vorgänger *Ekman*. *Hogner* erreicht eine einheitliche asymptotische Theorie vor allem in einer ganzen Umgebung des Randes des Wellenkegels, und er veröffentlicht als erster umfangreiche Berechnungen, die den stetigen Charakter der Wellen in diesem Bereich verdeutlichen. Dies war natürlich auf der Grundlage vorheriger Theorien gar nicht möglich.

Hogner vernachlässigt allerdings bei seinem Bemühen um die Klärung der Verhältnisse am Rande des *Kelvin*-Kegels die Halbgerade hinter dem Druckpunkt. Wir finden dazu lediglich die Anmerkung "Because $u_2=\infty$ and $F''(u_2)=0$ at the midway plane, formulae (82) and (86) in case the forcive has an infinite intensity give infinite values of the amplitudes of the diverging waves at this plane. For a forcive of finite intensity, on the contrary ...., the amplitudes in question become zero." (*Hogner (1923),S.45*). Das ist zwar eine sehr zutreffende Beschreibung der Verhältnisse, aber es bleibt letztlich offen, ob dies nun eine Eigenschaft der asymptotischen Näherungen oder des vollständigen Wellenintegrals ist.

Mit der Arbeit von *Hogner* kommt die Erforschung der Eigenschaften der Fundamentallösung zu einem vorläufigen Abschluß. Danach bleiben hauptsächlich noch zwei Fragen zu klären:

1) Was passiert an der Halbgeraden hinter dem Druckpunkt?

2) Durch welche Eigenschaften läßt sich die gefundene Lösung eindeutig charakterisieren?

Ein gutes Vierteljahrhundert lang kommt es hier zu keinem größeren Fortschritt. *Havelock* konzentriert sich vor allem auf die Weiterentwicklung der Theorie des Wellenwiderstandes; daneben behandelt er auch das Wellenbild eines eingetauchten Dipols und verwandte Fragen, wobei er unter anderem auf Darstellungen durch Bessel- und Struvefunktionen stößt (*Havelock (1931),S.4ff;* einen allgemeinen Überblick über seine Beiträge vermitteln "The Collected Papers of Sir Thomas Havelock on Hydrodynamics", *C.Wigley, editor, ONR 1963*). Die Eindeutigkeitsfrage spricht er zwar bisweilen an, aber sie bleibt letztlich ungelöst *.

---

* Als Beispiel sei zitiert: "... it may be necessary to examine expressions for the surface elevation with more care, as they are not quite determinate; any suitable free disturbance may be superposed upon the forced waves. For instance, it is well known that in a frictionless liquid a possible solution is one which gives waves in advance as well as in the rear of the ship, and the practical solution is obtained by superposing free waves which annul those in advance, or by some equivalent artifice. This process is simple and definite for an ideal point disturbance, but for a body of finite size or a distributed disturbance

Erst 1949 erscheint mit einer Arbeit von *Peters* wieder ein Aufsatz, der sich allein mit den Eigenschaften der Fundamentallösung beschäftigt, mit dem definitiven Ziel, die Herleitungen von *Hogner* zu vereinfachungen und seine Ergebnisse zu vertiefen. *Peters* gelangt darin zu einigen neuen Integraldarstellungen und gibt für alle asymptotischen Entwicklungen auch die zweiten Glieder an. Ferner erhält er wie *Havelock (1931)* auf der Linie y=0 Darstellungen durch Bessel- und Struve-Funktionen. Seine Arbeit hat aber auch einige Schwächen. So zitiert er eine falsche Arbeit von *Kelvin*, formuliert eine unzureichende Bedingung für die Eindeutigkeit und gelangt zu dem unzutreffenden Ergebnis, daß an der Halbgeraden hinter dem Druckpunkt keine Singularitäten auftreten. Seine asymptotischen Entwicklungen zeigen außerdem wieder die "vor-*Hogner*schen" Sprünge bei $|\theta| = 19^{\circ}28'$, so daß sie letzten Endes zur Berechnung eines gesamten Wellenbildes nicht geeignet sind, da sie nicht gleichmäßig gelten.

Seit der Arbeit von *Peters* beginnt man mit dem Formulieren von Eindeutigkeitsbedingungen ("Abstrahlungsbedingungen"). Bei *Peters* finden wir sie in der Form

$$\text{" } \phi_x = 0 \quad \text{at} \quad x = -\infty \text{ "}$$

(die Bewegungsrichtung ist der unseren entgegengesetzt), was mindestens unklar ist. Liest man diese Bedingung als

$$\lim_{x \to -\infty} \phi_x(x,y,z) = 0 \qquad \text{für alle } y \text{ und } z$$

(punktweise oder gleichmäßig, das ist hier unerheblich), was ein normaler Leser wohl tun würde, so ist die Bedingung *nicht* hinreichend für Eindeutigkeit *. Eine gleichartige Bedingung formulieren auch *Timman-Vossers (1955)* und behaupten:"The condition that, at infinity ahead of the ship, the disturbance vanishes, is sufficient to determine the solution uniquely". *Peters-Stoker(1957)* beschäftigen sich zwar an mehreren Stellen mit Abstrahlungsbedingungen, aber man kann nicht sagen, daß sie ein explizites Kriterium für Eindeutigkeit aufstellen und auch nachweisen, daß die üblichen Lösungen genau diesem Kriterium genügen. In *Wehausen-Laitone (1960)* heißt es ebenfalls:"..5. $\lim_{x \to +\infty} \text{grad}\,\phi = 0$ ..... Without condition 5, demanding vanishing of the motion far ahead of the source, the solution would not be unique".

Die Bedingungen von *Peters (1949), Timman-Vossers (1955)* und *Wehausen-Laitone (1960)* werden erst dann hinreichend für die Eindeutigkeit, wenn man sie wie in §9 im Sinne geeigneter Integralnormen interpretiert (vgl. insbesondere das Eindeutigkeitskriterium Satz 9.1). Daß man bei falscher Interpretation der Bedingung $\nabla\phi \to 0$ für $x \to \infty$ zu widersinnigen Resultaten gelangen kann, zeigt ein Aufsatz von *Zwick (1967)*, in dem Lösungen erhalten werden, bei denen Wellen sowohl nach vorn als auch nach hinten laufen. *Zwick* erhält dadurch stets verschwindenden Wellenwiderstand "für kleine *Froude*sche Zahlen" (siehe dazu auch den klärenden Beitrag von *Eggers (1968)*).

Ursell (1960) gelingt es, wichtige und in den Arbeiten von *Hogner* und *Peters* noch offengebliebene Fragen zu klären. Vor allem beschreibt er als erster die genauen Verhältnisse an der Halbgeraden hinter dem Druckpunkt:"The limits are non-uniform: we shall see by applying the method of steepest descents that the amplitude tends to ∞ as θ tends to 0 on z=0 (but on θ=0 it is finite as z tends to 0)." Etwas ausführlicher heißt es zum Verhalten bei $\theta \to 0$ in der Ebene z=0:"... the free surface oscillates with infinitely increasing amplitude and infinitely decreasing wave-

---

the complete surface elevation in the neighbourhood of the body requires more careful specification as regards the local part due to each element".(*Havelock (1928), S.515*).

* Sie geht auch bei der Fouriertransformation bezüglich y nicht in sich selbst über, wie *Peters* anscheinend annimmt (*Peters (1949), S.135*).

length as $\theta \to 0$".

Ferner findet *Ursell* mit Hilfe von Airy-Funktionen neue asymptotische Darstellungen, die sogar in einer ganzen Umgebung der Grenzgeraden $|\theta| \sim 19^{\circ}28'$ gelten .Mit ihrer Hilfe berechnet er dann das Wellenbild auch in sehr großer Entfernung vom Druckpunkt.

Mit der Arbeit von *Ursell* ist wohl die Erforschung der wichtigsten Eigenschaften der Fundamentallösung, insbesondere ihres Wellensystems, als abgeschlossen zu betrachten.

Einen Beitrag ganz anderer Art liefert die schwierige und zu Unrecht wenig beachtete Arbeit von *Bessho (1964)*. Dem Autor gelingt es darin, die allgemein als ein Doppelintegral dargestellte Fundamentallösung in ein Einfachintegral über elementare Funktionen umzuformen. Sein Ergebnis hat die Gestalt

$$O_{-2}^{(1)}(x,\rho\sin\alpha,\rho\cos\alpha) = -\frac{1}{2}\int_{L_1+L_2} \exp\{(\rho\sinh(u-i\alpha)-x)\sinh u\}\sinh u \; du$$

L_1 und L_2 sind hier gewisse Wege in der komplexen u-Ebene, und $O_{-2}^{(1)}$ ist bis auf eine rationale Funktion die Fundamentallösung. Ein verwandtes Ergebnis findet man übrigens in einer noch weniger bekannten Arbeit von *Simmgen (1968)*.

In den sechziger Jahren wurde es allgemein deutlich, daß die älteren Eindeutigkeitsbedingungen nicht ausreichend waren. *Eggers-Sharma-Ward (1967)* fordern deshalb von der Fundamentallösung $K = o(\sqrt{1/r})$ für $r \to \infty$ bei $x>0$, was als hinreichend angesehen werden darf. Sehr ähnlich ist auch die Bedingung bei *Wehausen (1973)*: $\phi = O(\sqrt{1/r})$ für $r \to \infty$ bei $x>0$, $\phi = o(1)$ für $r \to \infty$ bei $x<0$. Prof. *Eggers* wies mich allerdings darauf hin, daß man hier noch ein System freier Wellen überlagern könnte, dessen Spektralfunktion an der Stelle, die für das Abklingen von der Form $r^{-1/3}$ am Rande des *Kelvin*-Winkels "verantwortlich" ist, von genügend hoher Ordnung verschwindet. Ein derartiges Wellensystem, das z.B. allein aus echt divergenten oder echt transversalen Wellen bestehen könnte, würde dann nach vorn und nach hinten das Abklingverhalten $O(\sqrt{1/r})$ zeigen.

Newman (1976) fordert denn auch wieder $\nabla\phi = o(r^{-1/2})$ für $r \to \infty$ und $x>0$. Die Bedingung bei *Dern (1977)* ist eher mit der von *Wehausen (1973)* zu vergleichen.

Die genannten Bedingungen erscheinen mir aber, auch wenn sie zur Charakterisierung der Fundamentallösung hinreichend sind, noch nicht ganz befriedigend. Denn gesucht sind ja ursprünglich Lösungen, die vor der Störung keine Wellen haben, und nicht Lösungen mit einem *a priori* noch gar nicht bekannten Abklingverhalten (daß die Bedingung vernünftig ist, wissen wir erst *nach* der Konstruktion der Fundamentallösung). Im Prinzip zeigt man hier nicht die Eindeutigkeit einer vorne wellenfreien Fundamentallösung, sondern die Eindeutigkeit einer Fundamentallösung mit einem bestimmten Abklingverhalten - wobei man zusätzlich weiß, daß diese Lösung vorne wellenfrei ist. Es sei ferner darauf hingewiesen, daß diese Beweise nie wirklich vollständig durchgeführt werden.

Dagegen ist der Eindeutigkeitsbeweis in §9 allgemein und vollständig, und er stützt sich allein auf eine Erhaltungsgröße der freien Wellen.Damit illustriert er die Auffassung von *John*:"In addition to the boundary conditions on Φ and the dynamic equations for B, there can be prescribed the initial positions and velocities of all particles, and the 'primary' waves coming in from infinity. From energy considerations it can be shown that all these conditions and data uniquely determine the motion of the liquid and body in linearized theory"(*John (1949)*,*S.15*).

Die *Regularität* von Lösungen des *Kelvin*schen Randwertproblems ist nach meiner Kenntnis bisher nicht untersucht worden. Eine gewisse Ausnahme bildet der Vortrag von *Dern (1977)*, der unter anderem auch die Regularität bei einer nahe verwandten Aufgabe behandelt. Die veröffentlichten Beweise müssen jedoch als unzureichend angesehen werden (siehe Abschnitt 6).

Anhang D: Hilfsmittel aus der Theorie der Distributionen

a) Motivation

Die Theorie der Distributionen liefert eine exakte Rechtfertigung für viele Operationen, die auf gut differenzier- und integrierbare Funktionen "schon immer" angewandt werden durften, aber in vielen Fällen auch für unschönere Objekte notwendig werden. Als Beispiel nennen wir die Differentialgleichung

$$u_{xy} = 0 \quad , \tag{D.1}$$

deren Lösungen die Form

$$u(x,y) = f(x) + g(y) \tag{D.2}$$

haben. Dabei müßte f nach klassischer Auffassung differenzierbar sein, während von g diesbezüglich nichts verlangt zu werden braucht. Schreibt man dagegen (D.1) um in

$$u_{yx} = 0 \quad , \tag{D.3}$$

so müßte g differenzierbar sein, f jedoch nicht mehr. Derartige Ungereimtheiten (es handelt sich keineswegs nur um "mathematische Spitzfindigkeiten"!) werden durch die Theorie der Distributionen in eleganter *und* exakter Weise aufgelöst.

Die Standardreferenz ist immer noch das klassische Werk von *Laurent Schwartz (1973)*, erstmalig 1951 erschienen. In ähnlicher Breite kann der Stoff z.B. auch bei *Treves (1967)* nachgeschlagen werden. Daneben empfiehlt sich die sehr lesbare Darstellung in *Reed-Simon (1972),(1975)* sowie die komprimierte Form, die der Stoff bei *Hörmander (1976)* annimmt. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, habe ich hier auf die Angabe von Beweisen verzichtet.

b) Distributionen

Zu Beginn dieser Zusammenfassung müssen wir die "Wüste der Definitionen" durchqueren. Unter dem *Träger* (support) einer stetigen Funktion $f:A \longrightarrow \mathbb{C}$ verstehen wir die Menge

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{\, x \in A \mid f(x) \neq 0 \,\}} \quad , \tag{D.4}$$

also den Abschluß der Teilmenge von A, auf der f von 0 verschieden ist. Wir können auch schreiben

$$\operatorname{supp} f = A \setminus \{\, x \in A \mid \text{es ex. Umgebung U von x mit } f=0 \text{ auf U} \,\} \; .$$

Das Komplement von supp f in A ist dann die größte offene Teilmenge von A, auf der f verschwindet.

Wir betrachten von nun an stets den Fall $A=\mathbb{R}^n$. Der wichtigste Raum von *Testfunktionen* ist

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\, \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \mid \phi \text{ beliebig oft differenzierbar, supp } \phi \text{ kompakt} \} \tag{D.5}$$

Die Existenz nicht identisch verschwindender derartiger Funtionen ist nicht völlig trivial. Das Standardbeispiel ist die Funktion (n=1)

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 \; , & |x| \geq 1 \\ \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) \; , & |x| < 1 \end{cases} \tag{D.6}$$

Wesentlich an diesem Beispiel ist, daß ϕ in den Punkten $x=\pm 1$ zwar beliebig oft stetig differenzierbar ist, aber keine konvergente Taylorreihe besitzt - analytische Funktionen, die außerhalb kompakter Teilmengen verschwinden, müssen ja

überall verschwinden.

Ganz allgemein gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ und jeder offenen Menge $U \supset K$ ein $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi = 1$ auf K, $\phi \geq 0$ und supp $\phi \subset U$.

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$; die etwas komplizierte Topologie auf diesem Vektorraum braucht uns hier nicht direkt zu interessieren.

Eine *Distribution* (auf $\mathbb{R}^n$) ist nun eine stetige lineare Abbildung

$$T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \quad . \tag{D.7}$$

Linearität bedeutet dabei wie üblich

$$T(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda T(\phi) + \mu T(\psi) \tag{D.8}$$

für alle $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Die Stetigkeit von T bedeutet, daß T folgendem Kriterium genügt: zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt es Konstanten C und m, so daß

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi| \tag{D.9}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit supp $\phi \subset K$.

Wir schreiben in Zukunft auch

$$\langle T, \phi \rangle \tag{D.10}$$

für $T(\phi)$.

Jede *lokal integrierbare* (d.h. über jedes Kompaktum integrierbare) Funktion f definiert in kanonischer Weise eine Distribution T_f über die Vorschrift

$$\langle T_f, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx \tag{D.11}$$

Hier ist

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \left(\int_{\text{supp}\,\phi} |f(x)|\,dx \right) \sup_{\text{supp}\,\phi} |\phi(x)| \quad , \tag{D.12}$$

also (D.9) erfüllt mit

$$C = \int_K |f(x)|\,dx \tag{D.13}$$

und m=0.

In der Regel braucht man zwischen (der Äquivalenzklasse von) f und T_f nicht zu unterscheiden und sagt deshalb gern, daß f eine Distribution *ist*. Ein typisches Beispiel für eine Distribution, die *nicht* durch eine lokal integrierbare Funktion erzeugt wird, ist das *Diracmaß* (Delta-"Funktion") δ:

$$\langle \delta, \phi \rangle := \phi(0) \quad . \tag{D.14}$$

Die Distributionen bilden wieder einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, den man üblicherweise mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet (*Schwartz* benutzt die Bezeichnung $\mathcal{D}$ für C_0^∞).

c) *Differentiation*

Der größte Vorteil in der Einführung der Distributionen liegt wohl in der Möglichkeit, diese höchst singulären Objekte unbeschränkt differenzieren zu können. Ist nämlich $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und f z.B. einmal stetig differenzierbar, so gilt ja

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ \phi(x)\ dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\ dx = - \langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle \qquad (D.15)$$

da ϕ außerhalb eines Kompaktums verschwindet. Diese Beziehung wird dann einfach, für *beliebiges* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, als *Definition* der Ableitung von T nach x_j benutzt:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \rangle := - \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle \quad . \qquad (D.16)$$

Es ist aus der Definition der Stetigkeit leicht ersichtlich, daß dieses neue Objekt $\partial T/\partial x_j$ tatsächlich wieder zu $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gehört. Allgemein bekommt man dann beliebig hohe Ableitungen von T nach der Regel

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle \quad . \qquad (D.17)$$

Es zeigt sich zum Beispiel, daß das Diracmaß $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ die Ableitung der (lokal integrierbaren) *Heavisidefunktion*

$$H(x) := \begin{cases} 1\ , & x>0 \\ \\ 0\ , & x<0 \end{cases} \qquad (D.18)$$

ist.

d) Distributionen mit kompaktem Träger

Der Grundraum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist nicht für alle Probleme der angemessene Rahmen. Daneben spielt der Raum $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (oder $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, nach *Schwartz*) eine große Rolle. Er umfaßt *alle* unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Ein lineares Funktional auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ soll stetig heißen, wenn es ein Kompaktum K und Konstanten C und m gibt, so daß

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi| \qquad (D.19)$$

für alle $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (man beachte die gegenüber (D.9) veränderte Rolle von K in dieser Definition!). Der Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wird mit $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Durch Einschränkung von $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ auf den Unterraum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhält man wieder eine Distribution; es gilt also, etwas ungenau formuliert,

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad . \qquad (D.20)$$

Damit ist auch die Ableitung für Elemente aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ erklärt.

Distributionen lassen sich nun durch ihr *lokales* Verhalten eindeutig charakterisieren. Das soll heißen: ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ (d.h. eine Familie offener Mengen, deren Vereinigung der $\mathbb{R}^n$ ist) und die Wirkung von T für jedes $i \in I$ auf alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \phi \subset U_i$ bekannt, so ist T bereits eindeutig bestimmt. Deshalb hat es Sinn, davon zu reden, daß T auf einer offenen Menge U *verschwindet*; damit ist gemeint, daß

$$\langle T, \phi \rangle = 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp} \phi \subset U\ . \qquad (D.21)$$

Der *Träger* von $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ wird nun definiert als

$$\operatorname{supp} T := \mathbb{R}^n \setminus U_0 \quad , \qquad (D.22)$$

wobei U_0 die Vereinigung aller offenen Mengen ist, auf denen T verschwindet .

Die beiden Definitionen des Trägers liefern für stetige Funktionen dasselbe Ergebnis.

Man kann nun zeigen, daß $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gerade die Menge der *Distributionen mit kompaktem Träger* ist (das ergibt sich direkt aus (D.19)).

Die *Distributionen mit Träger im Ursprung* sind genau die endlichen Linearkombinationen von Ableitungen des Diracmaßes.

e) Temperierte Distributionen

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Lösung partieller Differentialgleichungen ist die Fouriertransformation. Für deren Anwendung benötigen wir ein drittes Paar von Räumen. Der Grundraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht hier aus den unendlich oft differenzierbaren Funktionen ϕ: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, so daß

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty \qquad \text{(D.23)}$$

für jedes Paar von Multiindices α, β. Offenbar gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ein typisches Beispiel für eine Funktion $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, die *nicht* zu $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ gehört, ist

$$\phi(x) = \exp(-x^2) \quad . \qquad \text{(D.24)}$$

Die Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ müssen mit allen Ableitungen für $|x| \longrightarrow \infty$ "sehr schnell" gegen 0 konvergieren.

Ein lineares Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, wenn es natürliche Zahlen k und m und eine reelle Konstante C gibt, so daß

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} \{(1 + |x|)^k \, |D^\alpha \phi(x)|\} \qquad \text{(D.25)}$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Solche stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißen dann *temperierte Distributionen*. Der Vektorraum aller temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Es gelten dann die Inklusionen

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(D.26)}$$

und, dual dazu,

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad . \qquad \text{(D.27)}$$

Eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert in der *schwachen* Topologie von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gegen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle \qquad \text{(D.28)}$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Daneben ist auch die starke Topologie auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von Bedeutung; Konvergenz von Folgen (und damit z.B. auch Differenzierbarkeit von Abbildungen $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist jedoch in beiden Topologien dasselbe.

f) Multiplikation von Distributionen

Im allgemeinen ist das Produkt zweier Distributionen miteinander nicht erklärt. Als Beispiel sei das Produkt

$$\delta \cdot \delta$$

des Diracmaßes mit sich selbst genannt, dem sich kein vernünftiger Sinn zuordnen läßt. Das Produkt einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit einer Funktion $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist jedoch immer sinnvoll und wird gegeben durch

$$\langle \alpha T, \phi \rangle := \langle T, \alpha\phi \rangle \qquad (D.29)$$

Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist dieses αT nicht notwendig wieder eine *temperierte* Distribution (man nehme etwa $\alpha(x) = \cosh(x)$). Die Menge der $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für die $\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für *alle* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt, nennen wir $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ (opérateurs de multiplication). Hier gilt der einleuchtende

Satz D.1 Die folgenden Eigenschaften von $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

1) Die Multiplikation $T \longmapsto \alpha T$ definiert eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in sich;

2) die Multiplikation $\phi \longmapsto \alpha\phi$ definiert eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sich;

3) α und seine Ableitungen wachsen höchstens polynomial.

Insbesondere gehören damit alle Polynome und ganz $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.

g) Fouriertransformation

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_n: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird definiert durch

$$(\mathcal{F}_n\phi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi x)\, \phi(x)\, dx \quad . \qquad (D.30)$$

Daß $\mathcal{F}_n\phi$ tatsächlich wieder zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gehört, muß man natürlich nachrechnen; den Schlüssel dafür liefern die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\mathcal{F}_n\phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) \exp(-i\xi x)\, \phi(x)\, dx = (\mathcal{F}_n(-ix_j\phi))(\xi) \qquad (D.31)$$

und

$$\begin{aligned}(\xi_j(\mathcal{F}_n\phi))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j \exp(-i\xi x)\, \phi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (i\frac{\partial}{\partial x_j} \exp(-i\xi x))\, \phi(x)\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi x)\, (i\frac{\partial}{\partial x_j}\phi)(x)\, dx \\ &= (\mathcal{F}_n(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\phi))(\xi) \qquad (D.32)\end{aligned}$$

Die Fouriertransformation bildet nun $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sogar (stetig) *auf* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ab, und die inverse Abbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_n^{-1}\phi)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\xi x)\, \phi(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F}_n\phi)(-x) \quad . \qquad (D.33)\end{aligned}$$

Für $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt ferner

$$\langle \mathcal{F}_n\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \mathcal{F}_n\psi \rangle \quad . \qquad (D.34)$$

Dies erweitern wir zu der *Definition*: die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_n T$ der *temperierten Distribution* T wird gegeben durch

$$\langle \mathcal{F}_n T, \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}_n\phi \rangle \qquad (D.35)$$

$(\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. Für diese Abbildung $\mathcal{F}_n: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gelten dann wieder die Rechenregeln

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (\mathcal{F}_n T) = \mathcal{F}_n(-ix_j T) \quad , \tag{D.36}$$

$$\xi_j \mathcal{F}_n T = \mathcal{F}_n(-i\frac{\partial}{\partial x_j} T) \tag{D.37}$$

und

$$\mathcal{F}_n^{-1} T = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}_n \check{T} \quad , \tag{D.38}$$

(siehe (D.33)), wobei $\check{T}$ definiert wird durch

$$\langle \check{T}, \phi \rangle := \langle T, \check{\phi} \rangle \tag{D.39}$$

und

$$\check{\phi}(x) := \phi(-x) \quad . \tag{D.40}$$

Beispiel: Die Fouriertransformierte des Diracmaßes δ ist die konstante Funktion **1**. Allgemein ist die Fouriertransformierte einer Linearkombination von Ableitungen von δ (also einer Distribution mit Träger im Ursprung) ein Polynom, und umgekehrt.

Eine Tabelle von Fouriertransformierten von Distributionen auf $\mathbb{R}^1$ findet man bei *Lavoine (1963)*.

h) Faltung (convolution)

Integrierbare Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ besitzen ein *Faltungsprodukt*

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy \quad ,\end{aligned} \tag{D.41}$$

das wieder zu $L^1(\mathbb{R}^n)$ gehört. Ist $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und T eine Distribution, so definieren wir in Analogie zu (D.41) die Faltung von T mit ϕ durch

$$(T * \phi)(x) := \langle T_y, \phi(x-y) \rangle \quad . \tag{D.42}$$

Die Schreibweise soll andeuten, daß T auf die Funktion $\phi(x-y)$ der Variablen y wirkt, wobei x fest bleibt. (D.42) kann genauso zur Definition der Faltung von $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ benutzt werden. In beiden Fällen gilt $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ferner hat man

$$\operatorname{supp}(T*\phi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \phi \quad . \tag{D.43}$$

Die Faltung zweier Distributionen T_1 und T_2 ist erklärt, wenn mindestens eine der Beiden einen kompakten Träger hat. Es ist diejenige (eindeutig bestimmte) Distribution T_3, die die Identität

$$T_3 * \phi = T_1 * (T_2 * \phi) \tag{D.44}$$

für jedes $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ erfüllt. Dann gelten die Regeln

$$T_1 * T_2 = T_2 * T_1 \quad , \tag{D.45}$$

$$\operatorname{supp}(T_1 * T_2) \subset \operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2 \quad . \tag{D.46}$$

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. In Analogie zur Definition des Trägers bezeichnen wir als den *singulären Träger* von T (sing supp T) das Komplement der Vereinigung aller offenen Mengen, auf denen T mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion übereinstimmt. Der Träger der Heaviside-Funktion (D.18) ist z.B. die Halbgerade

$x \geq 0$, ihr singulärer Träger der Ursprung.

Ist dann $T_1 * T_2$ erklärt, so gilt in Analogie zu (D.46) auch

$$\text{sing supp}(T_1 * T_2) \subset \text{sing supp } T_1 + \text{sing supp } T_2 \quad . \tag{D.47}$$

Sind ferner T_1, T_2, T_3 Distributionen, von denen höchstens eine *keinen* kompakten Träger hat, so folgt

$$(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3) \quad . \tag{D.48}$$

Für die Differentiation von Faltungsprodukten gilt die schöne Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T_1 * T_2) = (\frac{\partial T_1}{\partial x_j}) * T_2 = T_1 * (\frac{\partial T_2}{\partial x_j}) \quad . \tag{D.49}$$

Beispiel: Einselement der Faltungsalgebra $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ist das Diracmaß:

$$\delta * T = T \tag{D.50}$$

für alle $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Da δ kompakten Träger hat, gilt diese Identität sogar für beliebiges $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ist P ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, so kann man die Differentialgleichung

$$P\,u = f \tag{D.51}$$

wegen (D.49) und (D.50) auch als Faltungsgleichung

$$T * u = f \tag{D.52}$$

schreiben, wenn

$$T = P\,\delta \quad . \tag{D.53}$$

Die Distribution T hat dann kompakten Träger.

Sei jetzt T eine *beliebige* Distribution mit kompaktem Träger. Eine *Fundamentallösung* der Faltungsgleichung

$$T * u = f \tag{D.54}$$

ist eine Distribution E, welche die Gleichung

$$T * E = \delta \tag{D.55}$$

erfüllt. Ist ein solches E einmal bestimmt, so hat jede Lösung der Gleichung (D.54) für $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ die Form

$$u = E * f + u_0 \quad , \tag{D.56}$$

wobei u_0 Lösung der *homogenen* Gleichung ist:

$$T * u_0 = 0 \quad . \tag{D.57}$$

Die Fouriertransformation übersetzt nun die Faltung in Multiplikation: ist T_1 aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und T_2 temperiert, so gilt

$$\mathcal{F}_n(T_1 * T_2) = (\mathcal{F}_n T_1) \cdot (\mathcal{F}_n T_2) \quad . \tag{D.58}$$

Die rechte Seite ist definiert, da $\mathcal{F}_n T_1$ zu $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ gehört (siehe unten). Formal haben wir durch (D.58) die Gleichung (D.51) auf die *Division* von $\mathcal{F}_n f$

durch das *Polynom* $\mathfrak{F}_n P\delta$ reduziert. An den Nullstellen von $\mathfrak{F}_n P\delta$ treten aber Schwierigkeiten auf; ich verweise auf die angegebene Literatur.

i) Verschiedenes

Die Regularität von Lösungen von Differentialgleichungen wird häufig durch Zugehörigkeit zu einem der folgenden Räume von Distributionen ausgedrückt: zu $s \in \mathbb{R}$ setzt man

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{ u ist meßbare Funktion mit } \int_{\mathbb{R}^n} |\mathfrak{F}_n u|^2 \, (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \} \tag{D.60}$$

Beispiele: 1) $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ (Parsevalsche Gleichung) ;

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ für alle $s \in \mathbb{R}$;

3) $\delta \in H^{-n/2 - \varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\varepsilon > 0$;

4) $f \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff (1 - \Delta) f \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$;

5) $1 \notin H^s(\mathbb{R}^n)$ für alle $s \in \mathbb{R}$; denn die Fouriertransformierte dieser Funktion ist $(2\pi)^n \delta$, also keine meßbare Funktion.

Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ stimmt die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}_n T$ mit der *Funktion*

$$\xi \longmapsto \langle T_x, \exp(-i\xi x) \rangle \tag{D.61}$$

überein. Die rechte Seite ist nun auch für beliebiges $\xi \in \mathbb{C}^n$ erklärt. Hier gilt der wichtige Satz von *Paley* und *Wiener:*

Satz D.2 (Satz von *Paley-Wiener* für Funktionen). Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, und $\operatorname{supp} \phi \subset K_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \leq r_j\}$

2) $\mathfrak{F}_n \phi$ ist fortsetzbar zu einer auf $\mathbb{C}^n$ analytischen Funktion, und es gibt zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante C mit

$$|\mathfrak{F}_n \phi(\zeta)| \leq C \, (1 + |\zeta|)^{-m} \exp(\sum_{j=1}^n |\operatorname{Im} \zeta_j| \, r_j) \tag{D.62}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

Satz D.3 (Satz von *Paley-Wiener* für Distributionen). Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, und $\operatorname{supp} T \subset K_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \leq r_j\}$

2) $\mathfrak{F}_n T$ ist fortsetzbar zu einer auf $\mathbb{C}^n$ analytischen Funktion, und es gibt eine ganze Zahl m und eine Konstante C, so daß für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$|\mathfrak{F}_n T(\zeta)| \leq C \, (1 + |\zeta|)^m \exp(\sum_{j=1}^n |\operatorname{Im} \zeta_j| \, r_j) \tag{D.63}$$

Insbesondere gehören deshalb die Fouriertransformierten von Distributionen mit kompaktem Träger zu $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.

L i t e r a t u r

Abramowitz,M.; Stegun,I.A. (1965): Handbook of Mathematical Functions
Dover, New York 1965

Agmon,S.; Douglis,A.; Nirenberg,L. (1959): Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I
Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727

Andersson,K.G. (1971): Analyticity of Fundamental Solutions
Arkiv för Matematik 8 (1971), 73-81

Besov,O.V.; Il'in,V.P.; Nikol'skiĭ,S.M. (1978): Integral Representation of Functions and Imbedding Theorems. Vol. I
V.H. Winston & Sons, Washington 1978

Bessho,M. (1964): On the Fundamental Function in the Theory of the Wavemaking Resistance of Ships
Memoirs of the Defense Academy 4, Yokosuka 1964

Boussinesq,J. (1885): Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques
Lille 1885

Brigham,E.O. (1974): The Fast Fourier Transform
Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1974

Cauchy,A. (1815): Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie
Œuvres complètes,1er série,tome I, 5-318

Corwin,L.; Greenleaf,F.P. (1978): Singular Fourier Integral Operators and Representations of Nilpotent Lie Groups
Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 681-705

Courant,R.; Hilbert,D. (1968): Methoden der mathematischen Physik II
2. Aufl.,Springer-Verlag, Berlin 1968

Dern,J.-C. (1977): Existence, Uniqueness and Regularity of the Solutions of Neumann-Kelvin Problem for Two or Three Dimensional Submerged Bodies
Proc. 2nd Int. Conf. Num. Ship Hydrodyn., Berkeley 1977

Dieudonné,J. (1960): Foundations of Modern Analysis
Academic Press, New York 1960

Dieudonné,J. (1968): Calcul Infinitésimal
Collection Méthodes, Hermann, Paris 1968

Dieudonné,J. (1970): Treatise on Analysis, vol. II
Academic Press, New York 1970

Dieudonné,J. (1978a): Eléments d'analyse, tome VII
Gauthier-Villars, Paris 1978

Dieudonné,J. (1978b): Eléments d'analyse, tome VIII
Gauthier-Villars, Paris 1978

Eggers,K. (1968): Über die Eindeutigkeit des Wellenfeldes getauchter Körper in stationärer Horizontalbewegung
ZAMM 48 (1968), 283-284

Eggers,K.; Gamst,A. (1978): An Evaluation of Mapping Methods for the Stationary Ship Wave Problem
Bericht Nr. 373, Institut für Schiffbau, Hamburg 1978 (auch in Schiffstechn. 26 (1979), 125-170)

Eggers,K.; Sharma,S.D.; Ward,L.W. (1967): An Assessment of Some Experimental Methods for Determining the Wavemaking Characteristics of a Ship Form
Trans. SNAME 75 (1967), 112-157

Ekman,V.W. (1906): On Stationary Waves in Running Water
Arkiv för matematik, astronomi och fysik 3 (1906),N:o 2

Ekman,V.W. (1907): On the Waves produced by a given distribution of Pressure, which travels over the Surface of Water
Arkiv för matematik, astronomi och fysik 3 (1907),N:o 11

Erdélyi,A. (1956): Asymptotic Expansions
Dover, New York 1956

Friedman,A.; Shinbrot,M. (1967): The Initial Value Problem for the Linearized Equations of Water Waves
J. Math. Mech. 17 (1967), 107-180

Friedman,A.; Shinbrot,M. (1969): The Initial Value Problem for the Linearized Equations of Water Waves, II
J. Math. Mech. 18 (1969), 1177-1193

Garipov,R.M. (1967): On the Linear Theory of Gravity Waves: the Theorem of Existence and Uniqueness
Arch. Rat. Mech. Anal. 24 (1967), 352-362

Green,G. (1918): On Ship Waves, and on Waves in Deep Water due to the Motion of Submerged Bodies
Phil. Mag.(6) 36 (1918), 48-63

Harband,J. (1976): Three Dimensional Flow Over a Submerged Object
J. Eng. Math. 10 (1976), 1-21

Havelock,T.H. (1908): The Propagation of Waves in Dispersive Media, with Application to Waves on Water produced by a Travelling Disturbance
Proc. Roy. Soc. London 81 (1908), Ser. A, 398-430

Havelock,T.H. (1928): The Wave Pattern of a Doublet in a Stream
Proc. Roy. Soc. London 121 (1928), Ser. A, 515-523

Havelock,T.H. (1931): Ship Waves: the Calculation of Wave Profiles
Proc. Roy. Soc. London 135 (1931), Ser. A, 1-13

Hörmander,L. (1958a): On the Regularity of the Solutions of Boundary Problems
Acta Math. 99 (1958), 225-264

Hörmander,L. (1958b): On the Division of Distributions by Polynomials
Arkiv för Matematik 3 (1958), 555-568

Hörmander,L. (1971): Fourier Integral Operators. I
Acta Math. 127 (1971), 79-183

Hörmander,L. (1976): Linear Partial Differential Operators
4th printing, Springer-Verlag, Berlin 1976

Hogner,E. (1923): A Contribution to the Theory of Ship Waves
Arkiv för matematik, astrnomi och fysik 17 (1923),N:o 12

Jeffreys,H.; Swirles,B. (1956): Methods of Mathematical Physics
3rd edition,University Press, Cambridge 1956

John,F. (1949): On the Motion of Floating Bodies I
Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949), 13-57

Joseph,D.D. (1973): Domain Perturbations: the Higher Order Theory of Infinitesimal Water Waves
Arch. Rat. Mech. Anal. 51 (1973), 295-303

Kampé de Fériet,J.; Kotik,J. (1953): Surface Waves of Finite Energy
J. Rat. Mech. Anal. 2 (1953), 577-585

Kelvin,Lord (William Thomson) (1905): Deep Sea Ship Waves
Proc. Roy. Soc. Edin. 1905 (auch in Phil. Mag.(6) 11 (1906), 1-25, sowie
Math. and Phys. Papers, Vol. III, 394-418)

Kostyukov,A.A. (1968): Theory of Ship Waves and Wave Resistance
Effective Communications Inc., Iowa City 1968

Kotik,J. (1952): Existence and Uniqueness Theorems for Linear Water Waves
Thesis, MIT 1952

Lamb,H. (1916): On Wave-Patterns due to a Travelling Disturbance
Phil. Mag.(6) 31 (1916), 539-648

Lamb,H. (1975): Hydrodynamics
6th edition, University Press, Cambridge 1975

Lau,B. (1972): The Linearized Equations of Water waves
Indiana Univ. Math. J. 22 (1972), 233-266

Lavoine,J. (1963): Transformation de Fourier des pseudo-fonctions
CNRS, Paris 1963

Lions,J.-L.; Magenes,E. (1973): Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications III
Springer-Verlag, Berlin 1973

Miyata,H.; Inui,T.; Kajitani,H. (1979): Experimental Investigations on the Wave Making in the Near-Field of Ships
Research Report 1978, International Joint Research "Study on Local Non-Linear Effect in Ship Waves", Tokyo 1979

Michell,J.H. (1898): The Wave-Resistance of a Ship
Phil. Mag.(5) 45 (1898), 106-123

Newman,J.N. (1976): Linearized Wave Resistance Theory
Proc. Int. Sem. Wave Res., Tokyo 1976

Peters,A.S. (1949): A New Treatment of the Ship Wave Problem
Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949), 123-148

Peters,A.S.; Stoker,J.J. (1957): The Motion of a Ship, as a Floating Rigid Body, in a Seaway
Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), 399-490

Reed,M.; Simon,B. (1972): Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I
Academic Press, New York 1972

Reed,M.; Simon,B. (1975): Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II
Academic Press, New York 1975

Schwartz,L. (1973): Théorie des distributions
Nouvelle édition, Hermann, Paris 1973

Shinbrot,M. (1976): The Initial Value Problem for Surface Waves Under Gravity,I: The Simplest Case
Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 281-300

Simmgen,M. (1968): Ein Beitrag zur linearisierten Theorie des periodisch instationär angeströmten Unterwassertragflügels
ZAMM 48 (1968), 255-264

Svensson,S.L. (1971): Necessary and Sufficient Conditions for the Hyperbolicity of Polynomials With Hyperbolic Principal Part
Arkiv för Matematik 8 (1971), 145-162

Thomson,W. (1887): On Ship Waves
Proc. Inst. Mech. Eng. 1887, 409-433 (auch in Popular Lectures and Addresses, Vol. III, 450-500)

Timman,R.; Vossers,G. (1955): On Michell's Expression for the Velocity Potential of the Flow Around a Ship
Int. Shipb. Progr. 2 (1955), 96-102

Treves,F. (1967): Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels
Academic Press, New York 1967

Treves,F. (1975): Basic Linear Partial Differential Equations
Academic Press, New York 1975

Trèves,F.; Zerner,M. (1967): Zones d'analyticité des solutions élémentaires
Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 155-191

Ursell,F. (1960): On Kelvin's Ship-Wave Pattern
J. Fluid Mech. 8 (1960), 418-431

Wehausen,J.V.; Laitone,E.L. (1960): Surface Waves
Handbuch der Physik, Band IX, Springer-Verlag, Berlin 1960

Wehausen,J.V. (1973): The Wave Resistance of Ships
Advances in Applied Mechanics,Vol. 13, Academic Press, New York 1973

Zwick,W. (1967): Zur nichtlinearen Theorie des Wellenwiderstandes für kleine *Froude*sche Zahlen
ZAMM 47 (1967), 121-130