

401 | Oktober 1980

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Peter Kaleff

Berechnung hydroelastischer Probleme mit der Singularitäten-/Finite-Elemente- Methode

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Berechnung hydroelastischer Probleme mit der Singularitäten/Finite-Elemente-Methode

P. Kaleff, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1980

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 401

Berechnung hydroelastischer Probleme
mit der
Singularitäten-/Finite-Elemente-Methode

Peter Kaleff

Hamburg, Oktober 1980

**Berechnung hydroelastischer Probleme
mit der
Singularitäten-/Finite-Elemente-Methode**

Von der Fakultät für Maschinenwesen
der Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

genehmigte

Dissertation

von

Peter Kaleff,
geb. am 9.6.1945 in Sofia

1980

Referent: Prof. Dr. Ing. H. Söding

Korreferent: Prof. Dr. Ing. E. Lehmann

Tag der Promotion: 30.10.1980

VORWORT

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis meiner Forschungstätigkeit als Assistenz-Professor an der Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Brasilien und entstand in ihrem wesentlichen Teil während meines Aufenthaltes am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg und beim Germanischen Lloyd (GL).

Die finanziellen Mittel zu meinem Unterhalt wurden während der gesamten Dauer meines Aufenthaltes in Hamburg von der UFRJ zur Verfügung gestellt, ergänzt durch ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes in den Jahren 1976 bis 1978 und der Coordenacao do Aperfeicoamento de Pessoal de Nivel Superior des brasilianischen Kultusministeriums in den Jahren 1979 und 1980.

Rechnerkosten und weitere Forschungsmittel wurden vom Germanischen Lloyd in Verbindung mit dem Sonderforschungsbereich 98, Teilprojekt F3 ("Elastomechanische Aspekte der Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller") finanziert.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. O. Grim für seine Aufmerksamkeit und freundliche Betreuung in den Anfangsstadien der Arbeit.

Herrn Professor Dr.-Ing. H. Söding danke ich herzlichst für die Übernahme der Betreuung, die stetige Beratung und die tatkräftige Unterstützung.

Auch Herrn Professor Dr.-Ing. E. Lehmann bin ich für das entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Mitberichtes dankbar.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. E. Pleß für seine großzügige Einstellung und Befürwortung meiner Forschungstätigkeiten beim Germanischen Lloyd. Meine Arbeiten wurden befruchtet durch Diskussion mit den Herren Dr. Matthies und Dr. Payer, die meiner Arbeit viel schöpferisches Interesse entgegengebracht haben. Die Programmierarbeiten wurden von mehreren Herren der Forschungsabteilung des Germanischen Lloyd unterstützt, wobei ich besonders die Herren Nath und Kreimann erwähnen möchte. Nicht zuletzt gilt mein Dank Frau Rohmann und Herrn Hamann, ohne deren aufopfernden Einsatz das Manuskript nicht in dieser Form und termingerecht abgeschlossen worden wäre.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
0. EINLEITUNG	1
1. FORMULIERUNG DES HYDROELASTISCHEN VERHALTENS	7
1.1 Idealisierung des hydroelastischen Systems	8
1.2 Das Hamiltonsche Prinzip	9
1.3 Aufbau des Wirkungsintegrals	10
2. LÖSUNGSWEG	15
2.1 Annahmen zur Zeitabhängigkeit	15
2.2 Die Näherungsreihen für \bar{u} und $\bar{\varphi}$	17
2.3 Bestimmung des Extremwertes der Wirkung	19
3. LÖSUNGSANSÄTZE FÜR DIE KONSTRUKTION	21
3.1 Ansatzfunktionen nach der F.E.M.	22
3.2 Gestalt der Matrizen \underline{M} und \underline{K} nach der F.E.M.	23
3.3 Berechnung von Matrix \underline{E}	25
4. LÖSUNG DER HYDRODYNAMISCHEN PROBLEME	33
4.1 Allgemeine Formulierung der Singularitätenmethode	34
4.2 Aufbau der Ansatzfunktionen	38
4.3 Einzelheiten des Lösungsvorganges	46
4.3.1 Ebene Dreiecke, konstante Quellverteilung, Kollokationsmethode	46
4.3.2 Ebene Dreiecke, konstante Quellverteilung, Variationsmethode	48
4.4 Numerische Aspekte beim Einsatz von ebenen Dreieckselementen	49
4.5 Beispiele	50
4.5.1 Platte mit vorgegebenen Verformungen..	50
4.5.2 Starre umströmte Kugel	51

	Seite
5. PRAKTISCHE DURCHFÜHRUNG VON BERECHNUNGEN	57
5.1 Eingabedaten	59
5.2 Aufbau der Transformationseigenschaften der Flüssigkeitselemente	60
5.3 Bestimmung und Reduktion von A	60
5.4 Bestimmung von E	62
5.5 Lösung des Eigenwertproblems	63
6. BEISPIELRECHNUNGEN	65
6.1 Rechtecksplatte nach den Versuchen von Lindholm et al.	66
6.2 Rechtecksplatte nach Volcy et al. [35]	78
6.3 Prismatischer Kasten nach Chowdhury [10]	81
6.4 Ro-Ro-Schiff nach [36]	93
6.5 Beurteilung der Einsatzfähigkeit der S.F.E.M.	105
7. ZUSAMMENFASSUNG	109
 SCHRIFTTUM	 111
LISTE DER SYMBOLE	115

0. EINLEITUNG

Der Begriff Hydroelastizität ist eine Kurzbezeichnung der dynamischen Wechselwirkung eines elastischen Systems mit einer umgebenden oder von der Konstruktion eingeschlossenen Flüssigkeit.

Der bewegungshemmende Effekt einer idealen Flüssigkeit auf einen eingetauchten beschleunigten Starrkörper ist seit langem bekannt, Lamb [1], und kann durch eine von der Geometrie und Bewegungsrichtung des Körpers abhängige konstante Zusatzmasse vollständig beschrieben werden. Als zusätzliche konstante Massenbelegung der benetzten Oberfläche kann auch die Einwirkung einer idealen Flüssigkeit auf gewisse elastische Körper mit Spezialgeometrien beschrieben werden, z.B. auf unendlich ausgedehnte Platten oder unendlich lange Kreiszyinderschalen, Grim [2]. Allgemein ist die Idealisierung der Flüssigkeit als feste Massenbelegung für die Konstruktion nur dann möglich, wenn feststeht, daß die Anwesenheit der Flüssigkeit die Schwingungsformen des elastischen Systems nicht verändert. Trifft dies nicht zu, wie es schon bei einer einseitig eingespannten Rechtecksplatte, Lindholm [3], der Fall ist, muß der Energieaustausch zwischen Flüssigkeit und Festkörper im einzelnen erfaßt und bearbeitet werden.

Ein besonderer Bedarf an vollständigen Lösungsverfahren für das hydroelastische Verhalten von Konstruktionen kam erst mit den Problemen der Flüssigkeitsbewegung in den sehr dünnwandigen Treibstofftanks von Raketen auf. Bis dahin beschränkten sich die behandelten Fälle von Schwingungen benetzter Konstruktionen weitgehend auf Schiffskörperschwingungen.

Das Schwingungsverhalten der relativ starren, mit kleinen Ladeluken versehenen Schiffskörper konnte gut mit dem Modell eines elastischen Balkens beschrieben werden. Dies rechtfertigte die Anwendung der Streifenmethode, Lewis [4],

Taylor [5]. Darin wurde angenommen, daß der Effekt der Flüssigkeit als zusätzliche Masse für jeden Querschnitt betrachtet werden kann. Diese wurde errechnet aus der zweidimensionalen Umströmung des Querschnittes mit einer nachträglichen Längskorrektur (J-Faktor) aus der dreidimensionalen Umströmung eines Ellipsoids mit vorgegebener zwei- oder dreiknotiger Biegeschwingsform. Für den auf diese Weise mit zusätzlichen Massen behafteten und als Balken idealisierten Schiffskörper wurden dann mit den seinerzeit üblichen grafischen Integrationsmethoden iterativ die niedrigsten Eigenfrequenzen bestimmt.

Mehrfach sind in der Literatur Erweiterungen dieses Grundverfahrens zu finden: Etwa für die Flüssigkeit, die verbesserte Abbildung der Schiffsquerschnitte, die Berücksichtigung eines begrenzten Tiefganges oder die Bestimmung von J-Faktoren für höhere Schwingungsgrade; von der Konstruktion her die Miteinbeziehung der Schubverformungen, der verminderten mittragenden Breiten der Decks bei höheren Schwingungsgraden und letztlich - mit Anwendung der Finite-Elemente-Methode (F.E.M.) - die Unterteilung des Schiffskörpers in Balkenelemente oder die globale Idealisierung des Schiffskörpers mit Scheibenelementen. Unverändert blieb aber die getrennte Behandlung von Flüssigkeit und Konstruktion und die Annahme, daß der Effekt der Flüssigkeit durch den Zusatz festgelegter Massenverteilungen zu beschreiben ist. Damit wurden hydrodynamische Effekte, wie die hydrodynamische Kopplung benachbarter Querschnitte, vernachlässigt, was bei höheren Schwingungsgraden des Schiffskörpers zu verfälschten Ergebnissen führen kann.

Mit der verbreiteten Anwendung der F.E.M., die eine verbesserte Darstellung komplexer Bauwerke ermöglicht, haben sich auch die Ansprüche an die Genauigkeit von Schwingungsberechnungen gesteigert. So möchte man gern das lokale

Verhalten der Konstruktion, wie z.B. Schwingungen von Doppelböden oder Tankschotten, und die durch eine mögliche Kopplung dieser lokalen Schwingungen mit Schiffskörperschwingungen entstehende Verschiebung der Grundfrequenzen des Schiffskörpers ermitteln. Dazu ist aber eine genauere Beschreibung des Verhaltens der Flüssigkeit nötig, also der zu den jeweiligen Schwingungsformen der Konstruktion passenden Umströmungen.

Der erste Vorschlag zur Bestimmung der Umströmung verformbarer Körper kam 1966 von Zienkiewicz et al. [7]. Darin wurde der Druck als unbekannte Funktion angenommen, die der Laplaceschen Gleichung und einer Beschleunigungsrandbedingung an der benetzten Körperoberfläche in einem begrenzten Flüssigkeitsraum genügen mußte. Der Flüssigkeitsraum wurde nach der F.E.M. in Volumenelemente unterteilt. Für jeden Freiheitsgrad der Konstruktion wurde die Druckverteilung bestimmt. Sinngemäß wurde der Effekt der Flüssigkeit für die verschiedenen Freiheitsgrade der Konstruktion als äußere Belastung idealisiert, welche - da beschleunigungsabhängig - zur Massenmatrix der Konstruktion addiert wurde.

Dieses - im Sinne der Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Flüssigkeit - erste allgemeine hydroelastische Verfahren wurde 1969 von Zienkiewicz und Newton [8] auf kompressible Flüssigkeiten erweitert und diente so als Grundlage der meisten Weiterentwicklungen. Es wurde 1972 von Chowdhury [9] zur Bestimmung der Eigenfrequenzen eingetauchter Platten angewandt. 1974 bestimmte Chowdhury [10] auf diese Weise die Eigenfrequenzen und Eigenformen eines rechteckigen halbeingetauchten dünnwandigen Kastens. Dabei stellte er explizite Wechselwirkungsmatrizen mehrknotiger Flüssigkeitselemente vor. Orsero und Armand [11] berechneten 1978 die Eigenschwingungen eines benetzten Pontons. Dazu führten sie Untersuchungen über die Anzahl der benötigten Schichten

weiterentwickelter, mehrknotiger isoparametrischer Flüssigkeitselemente durch, verglichen die Ergebnisse mit der Lewisschen Streifenmethode und ermittelten den Einfluß der hydrodynamischen Kopplung der Querschnitte. Weiter untersuchten Armand und Orsero [12] 1979 das Verhalten eines 130 000-t-Gastankers und erhielten gute Übereinstimmung mit Meßergebnissen bei Schwingungserregerversuchen.

Die Anwendung dieses Verfahrens ist für komplexe Konstruktionen mit mehreren tausend Freiheitsgraden möglich. Der Aufwand für die Idealisierung der Flüssigkeit durch dreidimensionale finite Elemente, die an die Konstruktionselemente angepaßt sein müssen, steigt aber in solchen Fällen erheblich, selbst, wenn man automatisierte Datengenerierung anwendet. Dazu kommt die Ungewißheit über den Abstand von der Körperoberfläche, bei dem die Aufteilung der Flüssigkeit in Elemente ohne erhebliche Fehler abgebrochen werden darf. Versuche, diese Fragen zu beantworten, sind bei Armand und Orsero [12] mit den von Zienkiewicz und Bettis [13] vorgeschlagenen sogenannten "unendlichen Elementen" unternommen worden; die Ergebnisse sind für einfache Körperformen gut, praktische Beispiele wurden nicht gerechnet.

Schwierigkeiten dieser Art können mit dem Gebrauch von Singularitätenmethoden vermieden werden. Singularitäten - das heißt Grundlösungen der Laplaceschen Gleichung - wurden erstmals 1964 von Hess und Smith [6] zum Aufbau einer effektiven Rechenmethode zur genauen Ermittlung der Umströmung tiefgetauchter Starrkörper beliebiger Formen benutzt. Dabei wird die Körperoberfläche in Viereckelemente unterteilt, auf denen Quellen konstanter Stärke angesetzt werden. Diese werden bestimmt, indem an den Mittelpunkten der Vierecke Randbedingungen eingehalten werden, die der Körperbewegung entsprechen. Dieses

anfangs für Starrkörper entwickelte Verfahren kann auch zur Behandlung verformbarer Konstruktionen angewandt werden. Deruntz und Geers [20] zeigten 1978, wie für eine allgemeine finite Elemente Idealisierung einer Konstruktion und Quellvierecke nach Hess und Smith eine Zusatzmassenmatrix - in der Art von Zienkiewicz [7] - aufgebaut werden kann, die die Wechselwirkung zwischen Konstruktion und Flüssigkeit darstellt.

Auch in dieser Arbeit wird die Singularitätenmethode zur Darstellung der Flüssigkeit benutzt. Jedoch wird alternativ zu den auf der F.E.M. basierenden Verfahren, hydroelastische Probleme zu behandeln, nicht von einer F.E.M.-Idealisierung der Konstruktion ausgegangen. Es wird gezeigt, wie mit dem Hamiltonschen Prinzip ein Energiefunktional für Konstruktion und Flüssigkeit aufgebaut werden kann, das mit dem Ritz-Verfahren und ganz allgemeinen Lösungsansätzen eine Eigenwertaufgabe liefert, deren Lösung die Eigenfrequenzen und -formen der benetzten Konstruktion sind. Dabei ist der Weg offen, verschiedene Lösungsansätze zu verwenden, die für Flüssigkeit und Konstruktion unterschiedlich sein können.

Zur Darstellung der Konstruktion werden F.E.M.-Ansätze als die noch beste Alternative gewählt. Die Flüssigkeit wird mit Singularitäten-Ansätzen dargestellt. Damit soll erreicht werden, daß der Idealisierungsaufwand für die Flüssigkeit gering bleibt - da lediglich eine Singularitätenverteilung an der benetzten Oberfläche zu bestimmen ist - und daß die Unendlichkeit des Flüssigkeitsraums automatisch berücksichtigt wird. Zur numerischen Behandlung der Eigenwertaufgabe können herkömmliche F.E.M.-Programme mit geringfügigen Veränderungen benutzt werden.

Anhand von Beispielen wird die Einsatzfähigkeit der Singularitätenmethode zur Darstellung der Umströmung

verformbarer Körper beurteilt. Ergebnisse der Singularitäten-/Finite-Elemente-Methode (S.F.E.M.) bei der Behandlung von hydroelastischen Problemen werden mit Rechenergebnissen nach der herkömmlichen F.E.M. verglichen.

1. FORMULIERUNG DES HYDROELASTISCHEN VERHALTENS

In den meisten Untersuchungen wird das Verhalten allgemeiner elastischer Systeme mit der Methode der virtuellen Arbeit formuliert, wie es auch bei der F.E.M. der Fall ist.

Zum Aufbau der Ausdrücke der virtuellen Arbeiten müssen die mitwirkenden Kräfte explizit in Vektorform berücksichtigt und bei dynamischen Systemen nach dem d'Alambertschen Prinzip die Trägheitskräfte in die Arbeitsbilanz miteinbezogen werden. Bei hydroelastischen Systemen müssen zusätzliche, aus den hydrodynamischen Drücken durch Integration über die gesamte benetzte Oberfläche entstehende Arbeitsanteile berücksichtigt werden, siehe z.B. Volcy [34].

Um den Vorteil zu nutzen, ausschließlich mit skalaren Größen - kinetische und potentielle Energien - zu arbeiten und zusätzlich keine speziellen Überlegungen über die Wechselwirkungskräfte zwischen Flüssigkeit und Konstruktion aufstellen zu müssen, wird hier das Hamiltonsche Prinzip zur Formulierung des hydroelastischen Verhaltens angesetzt. Als Lösungsverfahren wird dabei die direkte Minimierung des Energiefunktional verwendet. Dadurch ist kein Bezug auf die Differentialgleichungen des Systems nötig, was die Übersichtlichkeit des gesamten Lösungsvorganges verbessern soll.

Energiebezogene Methoden wurden mehrfach zur Behandlung vereinfachter hydroelastischer Systeme verwendet.

Landweber [15] behandelt das hydroelastische Verhalten tiefgetauchter Kreiszyylinder. Er verwendet Energien von Flüssigkeit und Konstruktion zum Aufstellen der Lagrangeschen Gleichungen, die auf herkömmliche Weise gelöst werden. In [16] erweitert Landweber dieses Verfahren auf allgemeine, sich als Timoshenko-Balken

verhaltende Rotationskörper. Sowohl für die Flüssigkeit als auch für die Konstruktion werden geschlossene Lösungsansätze verwendet. Matsumoto [17] benutzt im wesentlichen dieselbe Methode, stellt aber die Flüssigkeit mit finiten Elementen dar und untersucht auch das Verhalten von benetzten Platten.

Misra [18] macht von der alternativen Möglichkeit Gebrauch, die Energieanteile eines hydroelastischen Systems zum Aufbau und zur direkten Minimierung des Hamiltonschen Wirkungsintegrals zu verwenden. Er untersucht dabei tiefgetauchte Rotationsellipsoide, deren elastisches Verhalten einem Timoshenko-Balken entspricht. Für die Flüssigkeit werden harmonische Lösungsansätze in Ellipsenkoordinaten verwendet; die Verformungen der Körper werden mit Potenzreihen angenähert.

In der vorliegenden Arbeit wird der gleiche Weg verfolgt. Die Verformungsenergie der Konstruktion wird aber zur Behandlung ganz allgemeiner elastischer Systeme gestaltet. Die Flüssigkeit wird mit Singularitätenverteilungen an der benetzten Oberfläche dargestellt.

1.1 Idealisierung des hydroelastischen Systems

Untersucht werden elastische Konstruktionen beliebiger Gestalt, die von einer idealen Flüssigkeit teilweise oder ganz benetzt harmonische Schwingungen ausführen. Die Flüssigkeit wird als wirbelfrei und inkompressibel angenommen und Energieabwanderung durch Oberflächenwellen wird vernachlässigt. Bei Systemen, in denen freie Flüssigkeitsoberflächen vorhanden sind, ist diese Idealisierung also für den Frequenzbereich gedacht, in dem einerseits der Einfluß von Oberflächenwellen vernachlässigbar ist und andererseits akustische Effekte noch keine Rolle spielen. Dies ist z.B. bei den unteren Graden der

elastischen Schwingungen von Schiffskörpern, Tankwänden, Doppelböden, etc. der Fall. Mit den genannten Voraussetzungen kann die Flüssigkeitsbewegung - nach Milne Thomson [19] Punkt 3.77 - als azyklisch und eindeutig angenommen werden, das heißt, Flüssigkeitsbewegung entsteht durch Bewegung der benetzten Körperoberfläche, und einer gegebenen Bewegung der Körperoberfläche entspricht eine eindeutig bestimmte Bewegung der Flüssigkeit. Diese beiden Tatsachen sind für die weitere Behandlung des Systems sehr wichtig, denn dadurch ist es zulässig, die Bewegungen der Flüssigkeit in Abhängigkeit von den Bewegungen der Konstruktion zu definieren. Wenn die Bewegung der Konstruktion als Linearkombination von Ansatzfunktionen dargestellt wird, ermöglicht dies die Darstellung der Flüssigkeitsbewegungen ebenfalls als Linearkombination von Ansatzfunktionen - allerdings anderer Art, aber mit denselben Koeffizienten. Dabei muß für jede der Ansatzfunktionen der Konstruktion die entsprechende Ansatzfunktion der Strömung bestimmt werden, z.B. das Geschwindigkeitspotential oder die Druckverteilung.

1.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, daß unter allen möglichen Bewegungen eines konservativen Systems diejenige stattfinden wird, die einem Extremwert (lokales Minimum) der Wirkung

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad (1.1)$$

entspricht (siehe z.B. Langhaar [14]), wobei

T die kinetische Energie des Systems und
V die potentielle Energie sind.

A ist ein Funktional, das von den Unbekannten des zu analysierenden Systems - z.B. Verschiebungen - abhängt.

Die Lösung, die den Extremwert liefert, kann auf zwei Wegen bestimmt werden: Durch Herleitung und nachträgliche Auflösung der Euler-Lagrange-Gleichungen der Wirkung oder durch direkte Minimierung der Wirkung. Letzterer wird in Kapitel 2 ausführlich beschrieben.

1.3 Aufbau des Wirkungsintegrals

Im Folgenden werden die Energieanteile von Konstruktion und Flüssigkeit aufgestellt und kommentiert.

Kinetische Energie der Konstruktion

$$T_K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_K \cdot \dot{u}^2 d\Omega \quad (1.2)$$

wobei

Ω	der dreidimensionale Definitionsbereich der Konstruktion ist,
$\rho_K(x, y, z, t)$	die Dichte der Konstruktion,
$\dot{u}^2(x, y, z, t) = \dot{\underline{u}} ^2$	das skalare Geschwindigkeitsfeld, mit
$\underline{u}(x, y, z, t)$	als Vektorfeld der Verschiebungen und
$\dot{\underline{u}} = \partial \underline{u} / \partial t$	als Vektorfeld der Geschwindigkeiten.

Potentielle Energie der Konstruktion

$$V_K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(\underline{u}) \nu(\underline{u}) d\Omega \quad (1.3)$$

wobei

$\xi(x, y, z, t)$ das Tensorfeld der Verzerrungen ist,
 $\sigma(x, y, z, t)$ das Tensorfeld der Spannungen,
 \mathcal{V} der Verzerrungsoperator und
 \mathcal{S} der Spannungsoperator.

Der Verzerrungsoperator ist ein Differentialoperator, der aus dem Verschiebungsfeld das Verzerrungsfeld erzeugt. Für ein dreidimensionales Kontinuum und Kartesische Koordinaten hat \mathcal{V} - z.B. nach Timoshenko [31] - folgende Form:

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

wobei \underline{u} die Komponenten u, v und w in x -, y - und z -Richtung hat.

Der Spannungsoperator kann als Komposition des Verformungsoperators mit dem Materialgesetzoperator des Werkstoffes der Konstruktion dargestellt werden

$$\mathcal{S} = \mathcal{C} \cdot \mathcal{V} \quad (1.5)$$

Für ein linearelastisches isotropes Material z.B. nimmt C die Form

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

symmetrisch

an, wobei E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl des Werkstoffes sind.

Kinetische Energie der Flüssigkeit

$$T_F = \frac{1}{2} \rho_F \int_{\mathcal{V}} (\nabla\varphi)^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \rho_F \int_S \varphi \cdot \underline{u} \cdot \underline{n} dS \quad (1.7)$$

wobei

ρ_F	die Dichte der Flüssigkeit ist,
$\varphi(x, y, z, t)$	das Geschwindigkeitspotential,
$\nabla\varphi(x, y, z, t)$	das Geschwindigkeitsfeld
\mathcal{V}	der dreidimensionale Flüssigkeitsraum,
S	die benetzte Körperoberfläche,
\underline{n}	der Normalvektor zur Oberfläche S .

Da einerseits die Flüssigkeit als ideal und wirbelfrei angenommen ist, läßt sich ein Geschwindigkeitspotential φ finden, dessen Gradient $\nabla\varphi$ das Geschwindigkeitsfeld $\underline{q}(x, y, z, t) = -\nabla\varphi(x, y, z, t)$ ist. Dies rechtfertigt die erste Form der Kinetischen Energie in (1.7), siehe auch Milne Thomson [19] Punkt 3.72.

Da andererseits hydroelastische Probleme behandelt werden, darf das Geschwindigkeitspotential nicht als unabhängiges Feld betrachtet werden, sondern als Lösung des folgenden hydrodynamischen Problems

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{in } \mathcal{V}, \quad (1.8a)$$

da für eine inkompressible Flüssigkeit $\nabla\cdot\underline{q} = 0$ gilt, und

$$-\nabla\varphi \cdot \underline{n} = \dot{\underline{u}} \cdot \underline{n} \quad \text{auf } S, \quad (1.8b)$$

da die Geschwindigkeitskomponenten normal zur benetzten Oberfläche S für Flüssigkeit und Konstruktion gleich sein müssen.

Wenn der Normalvektor \underline{n} in die Flüssigkeit zeigt, gilt nach dem Greenschen Satz

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla\varphi)^2 d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{V}} \varphi \nabla^2\varphi d\mathcal{V} - \int_S \varphi \nabla\varphi \cdot \underline{n} dS \quad (1.9)$$

was, nach Berücksichtigung von (1.8a) und (1.8b),

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla\varphi)^2 d\mathcal{V} = -\int_S \varphi \nabla\varphi \cdot \underline{n} dS = \int_S \varphi \dot{\underline{u}} \cdot \underline{n} dS \quad (1.10)$$

ergibt und die zweite Form der Kinetischen Energie in Gl. (1.7) rechtfertigt. Es wurde dabei angenommen, daß die benetzte Oberfläche S der Konstruktion auch die Grenzoberfläche des betrachteten Flüssigkeitsraumes ist. Diese

Annahme ist aber keine Beschränkung, da alle hier behandelten Probleme auf diese Konfiguration zurückgeführt werden können (siehe dazu Abschnitt 4.2).

Mit den oben stehenden Energieansätzen nimmt das Wirkungsintegral folgende Form an:

$$A(\underline{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho_K \int_{\Omega} \dot{\underline{u}}^2 d\Omega + \frac{1}{2} \rho_F \int_S \varphi(\dot{\underline{u}}) \dot{\underline{u}} \underline{n} dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{V}(\underline{u}) \mathcal{S}(\underline{u}) d\Omega \right\} dt \quad (1.11)$$

wobei zu bemerken ist, daß A ausschließlich vom Verschiebungsfeld $\underline{u}(x, y, z, t)$ abhängig ist, soweit $\varphi(\dot{\underline{u}})$ die Lösung der Randwertaufgabe (1.8) darstellt.

Zur Lösung des hydroelastischen Verhaltens muß das Verschiebungsfeld $\underline{u}(x, y, z, t)$ gefunden werden, das der Wirkung einen Minimalwert erteilt. Ansätze und Bedingungen zur direkten Minimierung von A werden im Folgenden erläutert.

2. LÖSUNGSWEG

Die Eigenfrequenzen und Eigenformen der in Kapitel 1 idealisierten hydroelastischen Systeme sollen durch direkte Minimierung der Wirkung (1.11) bestimmt werden. Dazu wird zuerst die Zeitabhängigkeit des Wirkungsintegrals untersucht, danach werden allgemeine Näherungsreihen für die unbekanntes Felder vorgeschlagen und in das Wirkungsintegral eingesetzt. Die Minimierung durch Variation der unbekanntes Koeffizienten führt zu einer verallgemeinerten Matrizen-Eigenwertaufgabe, womit Eigenfrequenzen und Eigenformen zu bestimmen sind.

2.1 Annahmen zur Zeitabhängigkeit

Für das Verschiebungsfeld der Konstruktion wird eine harmonische Zeitabhängigkeit angesetzt:

$$\underline{u}(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z) \cdot \cos \omega t, \quad (2.1)$$

wobei ω die zu bestimmende Frequenz des harmonischen Vorganges ist. Da sich die Bewegung der Flüssigkeit nach (1.8) zwangsläufig aus der Bewegung der Konstruktion ergibt, muß die Zeitabhängigkeit für das Geschwindigkeitspotential entsprechend angesetzt werden:

$$\varphi(x, y, z, t) = \bar{\varphi}(x, y, z) \cdot f(t). \quad (2.2)$$

Die Randbedingung (1.8b) kann jetzt in der Form

$$-\nabla \bar{\varphi} \cdot \underline{n} \cdot f(t) = \dot{u}_n = -\omega (\bar{u}_n) \cdot \sin \omega t \quad (2.3)$$

geschrieben werden, woraus sich

$$f(t) = \omega \cdot \sin \omega t$$

ergibt. Daraus folgt für das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi(x, y, z, t) = \omega \cdot \bar{\varphi}(x, y, z) \cdot \sin \omega t. \quad (2.4)$$

Die Randwertaufgabe (1.8) kann dadurch in zeitunabhängiger Form als

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = 0 \quad \text{in } V \quad (2.5a)$$

$$-\nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n} = \bar{u} \cdot \bar{n} \quad \text{auf } S \quad (2.5b)$$

geschrieben werden.

Wenn (2.1) und (2.4) in das Aktionsintegral (1.11) eingesetzt werden, erhält man

$$A(\bar{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho_K \int_{\Omega} \omega^2 \bar{u}^2 \sin^2 \omega t \, d\Omega + \frac{1}{2} \rho_F \int_S (-\omega \bar{\varphi} \sin \omega t)(-\omega \bar{u} \sin \omega t) \bar{n} \, dS \dots \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{V}(\bar{u}) \mathcal{S}(\bar{u}) \cos^2 \omega t \, d\Omega \right\} dt, \quad (2.7)$$

da \mathcal{V} und \mathcal{S} nur räumliche Ableitungen enthalten. Dank der Trennbarkeit von Raum- und Zeitabhängigkeit kann die Zeitintegration geschlossen durchgeführt werden.

Wenn A für die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ einer Eigenschwingung bestimmt wird, erhält man mit

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \omega t \\ \cos^2 \omega t \end{array} \right\} dt = \frac{\pi}{\omega} , \quad (2.8)$$

die zeitunabhängige Form des Aktionsintegrals:

$$A(\underline{u}) = \frac{\pi}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} \varrho_K \omega^2 \int_{\Omega} \bar{u}^2 d\Omega + \frac{1}{2} \varrho_F \omega^2 \int_S \bar{\varphi} \bar{u} \bar{n} dS - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{V}(\bar{u}) \mathcal{A}(\bar{u}) d\Omega \right\} . \quad (2.9)$$

Zur Minimierung müssen jetzt nur von den Ortskoordinaten abhängige Näherungsreihen verwendet werden.

2.2 Die Näherungsreihen für \bar{u} und $\bar{\varphi}$

Im Folgenden werden unter \bar{u} und $\bar{\varphi}$ statt der exakten Lösung des Problems $\delta A = 0$ die Reihen

$$\sum_{i=1}^n a_i h_i(x, y, z) \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x, y, z) \quad (2.11)$$

eingesetzt, die diese Lösung annähern sollen.

Die Ansatzfunktionen $h_i(x, y, z)$ sind im Gebiet Ω definiert, sollen aber vorerst nicht näher beschrieben werden. Die unbekanntenen Koeffizienten a_i werden für beide Näherungsreihen gleich angesetzt. Dazu müssen die Φ_i folgende Bedingungen erfüllen:

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \quad \text{in } \mathcal{V} \quad (2.12a)$$

$$-\nabla \phi_i \cdot \underline{n} = \underline{h}_i \cdot \underline{n} \quad \text{auf } S, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12b)$$

Die Reihen (2.10) und (2.11) können in das Funktional (2.9) eingesetzt werden und liefern

$$\begin{aligned} A(a_i) = & \frac{\pi}{\omega} \left\{ \frac{\omega^2}{2} \varrho_K \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i \underline{h}_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \underline{h}_j \, d\Omega + \frac{\omega^2}{2} \varrho_F \int_S \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \underline{h}_j \cdot \underline{n} \, dS \dots \right. \\ & \left. \dots - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{V} \left(\sum_{i=1}^n a_i \underline{h}_i \right) \mathcal{S} \left(\sum_{j=1}^n a_j \underline{h}_j \right) \, d\Omega \right\} \quad (2.13) \end{aligned}$$

oder, da die Koeffizienten a_i von den Ortskoordinaten unabhängig und die Operatoren \mathcal{V} und \mathcal{S} linear sind:

$$\begin{aligned} A(a_i) = & \frac{\pi}{\omega} \left\{ \frac{\omega^2}{2} \varrho_K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \int_{\Omega} \underline{h}_i \cdot \underline{h}_j \, d\Omega + \frac{\omega^2}{2} \varrho_F \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \int_S \phi_i \underline{h}_j \cdot \underline{n} \, dS \dots \right. \\ & \left. \dots - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \int_{\Omega} \mathcal{V}(\underline{h}_i) \mathcal{S}(\underline{h}_j) \, d\Omega \right\} . \quad (2.14) \end{aligned}$$

Einige Abkürzungen der Schreibweise sind im Folgenden von Vorteil:

$$M_{ij} = \varrho_K \int_{\Omega} \underline{h}_i \cdot \underline{h}_j \, d\Omega, \quad F_{ij} = \varrho_F \int_S \phi_i \underline{h}_j \cdot \underline{n} \, dS, \quad K_{ij} = \int_{\Omega} \mathcal{V}(\underline{h}_i) \mathcal{S}(\underline{h}_j) \, d\Omega, \quad (2.15)$$

wobei $M_{ij} = M_{ji}$, $K_{ij} = K_{ji}$, weil im Folgenden ausschließlich symmetrische C -Operatoren verwendet werden und $F_{ij} = F_{ji}$, wie sich durch Anwendung des Greenschen Satzes in Verbindung mit (2.12) zeigen läßt.

$$\int_S \phi_i h_j \bar{n} \, dS = \int_S \phi_i (-\nabla \phi_j) \bar{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, d\Omega \quad (2.16)$$

2.3 Bestimmung des Extremwertes der Wirkung

Die Koeffizienten α_j in (2.14) sind so zu wählen, daß A ein Minimum erreicht, d.h. die α_j müssen den Bedingungen

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

genügen.

Die Ableitung von (2.14) nach den unbekanntem Koeffizienten α_j liefert n Gleichungen der Art

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_j} = \frac{\pi}{\omega} \left\{ \omega^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i M_{ij} + \omega^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i F_{ij} - \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{ij} \right\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

welche als homogenes Gleichungssystem in Matrixform geschrieben werden können:

$$[\omega^2(\underline{M} + \underline{F}) - \underline{K}]\{\underline{\alpha}\} = 0 \quad (2.19)$$

Die Bestimmung des Extremwertes der Wirkung führt also zur verallgemeinerten Eigenwertaufgabe (2.19).

Gleichung (2.19) muß immer in Zusammenhang mit (2.12) betrachtet werden, da die Matrix \underline{F} nur nach der Lösung von (2.12) berechnet werden kann.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die Wechselwirkung zwischen Konstruktion und Flüssigkeit lediglich durch Addition der Matrix \underline{E} zur Massenmatrix der Konstruktion erfaßt wird.

3. LÖSUNGSANSÄTZE FÜR DIE KONSTRUKTION

Zur Herleitung der Eigenwertaufgabe (2.19) wurden keine Annahmen über die Gestalt der Lösungsansätze (2.10) gemacht. Die Ansatzfunktionen h_i , $i=1, 2, \dots, n$ müssen den Voraussetzungen des Ritz-Verfahrens genügen, d.h. sie müssen über das Gebiet Ω definiert, linear unabhängig und bis zur Ordnung der im Funktional auftretenden Ableitungen differenzierbar sein. Weiter müssen sie den kinematischen Randbedingungen (auch erzwungene Randbedingungen genannt) an der Berandung von Ω genügen.

In der klassischen Form des Ritz-Verfahrens sind die Ansatzfunktionen im gesamten Gebiet Ω von Null verschieden. Die unbekanntenen Koeffizienten der Ansätze haben keine spezielle Bedeutung. Sie sind lediglich die Wichtungsparemeter, die den Beitrag jeder der Ansatzfunktionen zur gesuchten Lösung bestimmen.

Beispiele zur Anwendung klassischer Ritz-Ansätze sind in Matsumoto [17] und Misra [18] zu finden. Darin wird das hydroelastische Verhalten relativ einfacher Konstruktionen - Platten und Balken - behandelt. Zur Behandlung allgemeiner Konstruktionen sind klassische Ritz-Ansätze schwer einsetzbar. Dazu sind Finite-Elemente-Ansätze besser geeignet.

Nach der F.E.M. wird die Konstruktion auf systematische Weise durch eine Anzahl von Linien oder Flächen in Untergebiete unterteilt. Jedes dieser Untergebiete wird Element genannt. Weiter wird eine Anzahl von Punkten gewählt, an denen die Verschiebungen und Rotationen der Konstruktion zu bestimmen sind. Diese Punkte - auch Knoten genannt - liegen zum größten Teil auf den Schnittpunkten oder -linien der Unterteilung.

Jedem Knoten der Unterteilung werden F.E.-Ansätze zugeordnet. Diese sind nur auf der Vereinigung der Elemente von Null verschieden, die diesen Knoten besitzen, und verschwinden auf allen übrigen.

Jede Ansatzfunktion nimmt den Wert Eins an einem bestimmten Knoten der Unterteilung an und hat den Wert Null an allen anderen Knoten. Dadurch entsprechen die unbekanntenen Koeffizienten der F.E.-Ansätze den Werten der Ansatzfunktionen an den Knoten. Der Aufbau der Ansatzfunktionen wird in Abschnitt 3.1 beschrieben.

Inwieweit F.E.-Ansätze als Ritz-Ansätze verwendet werden können, ist in Texten über die mathematische Behandlung der F.E.M. beschrieben, siehe dazu Strang und Fix [29] oder Oden [30]. Hier wird lediglich angenommen, daß F.E.-Ansätze eine Spezialform von Ritz-Ansätzen sind und damit an Stelle der h_j in (2.10) eingesetzt werden können.

3.1 Ansatzfunktionen nach der F.E.M.

Nach der F.E.M. wird für jedes Element ein unabhängiges Verschiebungsfeld definiert. Die Werte der Verschiebungen innerhalb des Elementes werden in Abhängigkeit von den Verschiebungen an den Elementknoten l bestimmt:

$$u^e(x, y, z) = \sum_{l=1}^q N_l^e(x, y, z) u_l^e \quad e = 1, 2, \dots, n_e \quad (3.1)$$

wobei $u^e(x, y, z)$ die Verschiebung an Stelle (x, y, z) in x-, y- oder z-Richtung ist,

u_l^e die x-, y- oder z-Verschiebung des Knotens l

$N_l^e(x, y, z)$ eine Funktion, die außerhalb des Elementes e identisch Null ist und innerhalb von e gleich Eins an Knoten l und gleich Null an allen anderen Knoten von e .

q die Knotenzahl des Elementes e ,
 n_e die Anzahl der Elemente der Konstruktion.

Ausdruck (3.1) gilt für ein-, zwei- oder dreidimensionale Kontinua.

Jede Ansatzfunktion der Konstruktion kann durch Vereinigung der Funktionen N_l der zu ihrem Knoten angehörigen Elemente aufgebaut werden:

$$\underline{h}_i(x, y, z) = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^q N_l(x, y, z) \delta_{il}^e \underline{l} \quad i = 1, 2, \dots, n_V \quad (3.2)$$

wobei δ_{il}^e ein Zuordnungsfaktor ist: $\delta_{il}^e = 1$, wenn die Verschiebung h_i am Knoten l des Elementes gleich 1 ist, sonst $\delta_{il}^e = 0$

\underline{l} der Vektor in Richtung des globalen Freiheitsgrades i der Konstruktion,

$\underline{N}_l = N_l \underline{I}$ mit \underline{I} als Identitätsmatrix, deren Ordnung der Dimension des Problems gleicht und

n_V die Anzahl der Knotenverschiebungen der Konstruktion.

In (3.2) stellen die Ansatzfunktionen h_i das Verschiebungsfeld der Konstruktion dar.

3.2 Gestalt der Matrizen \underline{M} und \underline{K} nach der F.E.M.

Die in (2.15) angegebenen Ausdrücke für die Elemente der Matrizen \underline{M} und \underline{K} können mit den in (3.2) gezeigten Ansätzen nach der F.E.M. geschrieben werden. Da das Definitionsgebiet Ω als Vereinigung der Elemente der Unterteilung dargestellt werden kann

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e, \quad (3.3)$$

können die Integrale über das Gebiet Ω als Summe der Teilintegrale über die Elemente geschrieben werden

$$\int_{\Omega} S d\Omega = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} S d\Omega_e, \quad (3.4)$$

wobei S einen allgemeinen Integranden darstellt.

Die Elemente von \underline{M} und \underline{K} können als

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \varrho_K \int_{\Omega} h_i h_j d\Omega = \\ &= \varrho_K \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \underline{N}_l \underline{i} \underline{N}_m \underline{j} \delta_{il}^e \delta_{jm}^e d\Omega_e \quad i, j = 1, 2, \dots, n_V \end{aligned} \quad (3.5)$$

und

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega} \mathcal{V}(h_i) \mathcal{A}(h_j) d\Omega = \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \mathcal{V}(\underline{N}_l \underline{i}) \mathcal{A}(\underline{N}_m \underline{j}) \delta_{il}^e \delta_{jm}^e d\Omega_e \quad i, j = 1, 2, \dots, n_V \end{aligned} \quad (3.6)$$

geschrieben werden. Auf das Transpositionssymbol wird in (3.5) verzichtet, da \underline{N} eine Diagonalmatrix ist und daher $\underline{N}^T = \underline{N}$.

Werden die Ausdrücke (3.5) und (3.6) auf das Knotenpaar l, m eines einzigen Elementes bezogen und wird zusätzlich die Beschränkung auf die Freiheitsgrade i und j behoben, d.h. \underline{N}_l und \underline{N}_m werden nicht in Richtung von \underline{i} und \underline{j} projiziert, ergeben sich die Ausdrücke:

$$\underline{M}_{lm}^e = \varrho_K \int_{\Omega_e} \underline{N}_l \underline{N}_m d\Omega_e \quad l, m = 1, 2, \dots, q \quad (3.7)$$

und

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega_e} \mathcal{V}(N_l) \mathcal{S}(N_m) d\Omega_e \quad l, m = 1, 2, \dots, q \quad (3.8)$$

M_{lm}^e kann sofort als Elementmassenuntermatrix für Knoten l und m nach der F.E.M. erkannt werden, z.B. Zienkiewicz [28], Gl. (20.15).

Werden in Gl. (3.8) die Operatoren \mathcal{V} und \mathcal{S} in der Gestalt von (1.4) und (1.5) interpretiert, so läßt sich K_{lm}^e als Elementsteifigkeitsuntermatrix für Knoten l und m nach der F.E.M., z.B. Zienkiewicz [28] Gl. (6.15) für ein dreidimensionales Kontinuum mit linearer Verschiebungsverteilung, erkennen, da \mathcal{V} und \mathcal{S} identisch zu \underline{L} und \underline{D} nach Zienkiewicz (6.9) und (6.14) sind, und Matrix \underline{B} nach Zienkiewicz (6.11) dem Produkt $\underline{L} \underline{N}$ entspricht. Entsprechend sind die Matrizen \underline{M} und \underline{K} , deren Elemente in Gl. (3.5) und (3.6) gezeigt werden, als globale Massen- und Steifigkeitsmatrizen der Konstruktion zu erkennen.

Wird also in Formulierung (1.11) der Flüssigkeitsbeitrag weggelassen, kann die entsprechende Eigenwertaufgabe - Gl. (2.19), wobei \underline{E} weggelassen wird - mit herkömmlichen F.E.-Programmen gelöst werden. Sollen hydroelastische Probleme mit F.E.-Programmen behandelt werden, so muß nur die herkömmliche Massenmatrix durch die Summe $\underline{M} + \underline{E}$ ersetzt werden.

3.3 Berechnung von Matrix \underline{E}

Wie die Matrizen \underline{M} und \underline{K} kann auch die Matrix \underline{E} mit F.E.M.-Ansätzen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 F_{ij} &= Q_F \int_S \phi_i h_j n \, dS = \\
 &= Q_F \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_i \sum_{m=1}^q N_m^e j \delta_{jm}^{be} n^e \, d\Omega_e \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

In Gl. (3.9) ist der neu definierte Zuordnungsfaktor δ_{jm}^{be} nur für benetzte Flächenelemente von Null verschieden, für die h_j am Knoten m des Elementes e gleich Eins ist. Zur Berechnung von ϕ_i wird die benetzte Körperoberfläche durch eine von der Unterteilung der Konstruktion vorerst unabhängige Vereinigung von Teilgebieten (fortan Flüssigkeitselemente genannt) dargestellt. Die Werte der Geschwindigkeitspotentiale werden an sogenannten Auswertungspunkten bestimmt. Zur Lösung von (2.12) muß das Verschiebungsfeld der Konstruktion an den Auswertungspunkten bekannt sein. Es muß also eine Zuordnung zwischen Konstruktions- und Flüssigkeitselementen bestehen. Dazu wird folgendes festgelegt: Jedes benetzte Flächenelement der Konstruktion muß Flüssigkeitselemente enthalten, die sich nicht überschneiden, die von den Knoten der Konstruktion definiert werden und die die benetzte Oberfläche lückenlos bedecken.

Da die Auswertungspunkte innerhalb der Flüssigkeitselemente wegen der Eigenschaften der Flüssigkeitsansätze nicht beliebig gewählt werden können, wird hier weiter festgelegt, daß zur Bestimmung von \underline{F} numerische Integrationsmethoden verwendet werden, in die nur Funktionswerte an den Auswertungspunkten eingehen.

Dadurch kann Gl. (3.9) wie folgt geschrieben werden:

$$F_{ij} = q_F \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{m=1}^q \sum_{f=1}^{n_{fe}} \sum_{i_p=1}^{N_{IP}} c_{i_p}^f \phi_{i_p i}^f N_{i_q m} \underline{\eta}_{i_q}^f \delta_{jm}^{be} S_f \quad i, j = 1, 2, \dots, n_V \quad (3.10)$$

wobei

- n_{fe} die maximale Anzahl der Flüssigkeitselemente, die das Konstruktionselement e überdecken,
- N_{IP} die Anzahl der Integrationspunkte innerhalb eines Flüssigkeitselementes,
- $c_{i_p}^f$ die Integrationskoeffizienten für Flüssigkeitselement f nach Abschnitt 4.3,
- $\phi_{i_p i}^f$ die Werte der Potentialfunktion ϕ_i an den Integrationspunkten i_p des Flüssigkeitselementes f nach Abschnitt 4.3,
- $N_{i_q m}$ die Konstruktionsverschiebungen an den Integrationspunkten i_p des Flüssigkeitselementes f , die durch eine Einheitsverschiebung an Knoten m von Element e in Richtung des globalen Freiheitsgrades j verursacht werden,
- $\underline{\eta}_{i_q}^f$ der Normalvektor zu Flüssigkeitselement f an den Integrationspunkten i_p nach Abschnitt 4.3 und
- S_f der Flächeninhalt von Flüssigkeitselement f .

Für $\underline{\eta}$ und \underline{N} in (3.10) wurden die Integrationspunkte mit Index i_q bezeichnet, da jedes Konstruktionselement e eine Anzahl n_{fe} Flüssigkeitselemente enthält. Dadurch ist ein Mehrfaches an Auswertungspunkten ($N_{IP} \cdot n_{fe}$) in jedem Konstruktionselement zu berücksichtigen. Es muß für zweckmäßige Zuordnung dieser Punkte gesorgt werden.

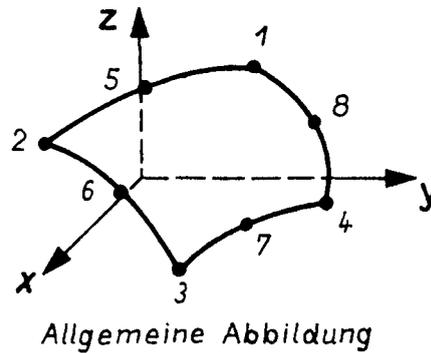
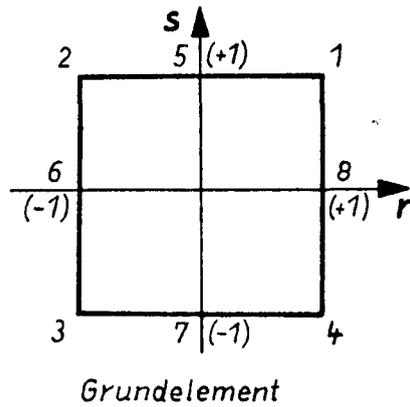
Um das Verschiebungsfeld der Konstruktion an den Auswertungspunkten bestimmen zu können, müssen die im verwendeten F.E.M.-Programm auftretenden Ansatzfunktionen \underline{N} der Flächenelemente bekannt sein.

In Abbildung 3.1 werden die Ansatzfunktionen eines isoparametrischen Flächenelementes mit vier bis acht Knoten gezeigt, das u.a. auch im F.E.M.-Programm ADINA [32] verwendet wird. Kennzeichnend für die isoparametrische Formulierung ist es, daß Form und Verschiebungsfeld des Elementes mit den gleichen Ansätzen dargestellt werden. Dazu werden ein Grundelement und ein natürliches Koordinatensystem r, s definiert. Punkte des Grundelementes können mit den Interpolationsformeln der Koordinaten auf eine allgemeine Form abgebildet werden, wenn die Knotenkoordinaten $x_l, y_l, z_l, l = 1, 2, \dots, q$ bekannt sind. In gleicher Weise können die Verschiebungen eines Punktes der Abbildung - mit bekannten Koordinaten r, s im Grundelement - aus den Verschiebungen an den Knoten - u_l, v_l, w_l - mit denselben Interpolationsformeln bestimmt werden. Wichtige Eigenschaften dieser Formulierung sind: Die Form des abgebildeten Grundelementes und die Verschiebungsverteilung sind voneinander unabhängig; die Anzahl der zur Abbildung verwendeten Punkte kann zwischen einem Minimum und einem Maximum frei gewählt werden; einfache Formen - etwa Dreiecke - können mit denselben Ansätzen dargestellt werden.

In Abb. 3.1 wird ein Element mit quadratischen Ansätzen gezeigt. Entsprechend können auch isoparametrische Elemente höherer Ordnung formuliert werden. Weiteres über die numerische Ausführung wird in Kapitel 5 dargestellt.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden ausschließlich isoparametrische Ansätze behandelt, da die meisten modernen F.E.M.-Programme isoparametrische Elemente enthalten und weil mit diesen Elementen gekrümmte Formen dargestellt werden können, was für Strömungsprobleme wichtig ist.

Die in Abb. 3.1 gezeigten Formeln zur Interpolation der Verschiebungen erfüllen die unter Gl. (3.1) erläuterten Voraussetzungen für die Ansatzfunktionen N_l , sind aber



Ansatzfunktionen	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_8$
$N_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$
$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$
$N_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$	$-\frac{1}{2}N_7$
$N_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$				
$N_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$				
$N_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$				
$N_8 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$				

Die oben abgebildeten Teilausdrücke sind nur zu berücksichtigen, wenn der entsprechende Knoten vorhanden ist.

Interpolation der Koordinaten

$$x = \sum_{l=1}^8 N_l x_l$$

$$y = \sum_{l=1}^8 N_l y_l$$

$$z = \sum_{l=1}^8 N_l z_l$$

Interpolation der Verschiebungen

$$u = \sum_{l=1}^8 N_l u_l$$

$$v = \sum_{l=1}^8 N_l v_l$$

$$w = \sum_{l=1}^8 N_l w_l$$

Abb. 3.1 - Vier- bis achtknotiges isoparametrisches Element nach Bathe [33]

von den natürlichen Koordinaten (r, s) des Grundelementes abhängig. Die gesuchten Verschiebungen der Konstruktion an den Auswertungspunkten der Flüssigkeitselemente können auf folgende Weise bestimmt werden: Die Zuordnung zwischen Flüssigkeits- und Konstruktionselementen wird im Grundelement vorgenommen, und die entsprechenden Auswertungspunkte werden im natürlichen Koordinatensystem des Grundelementes bestimmt. Die Verschiebungen an den Auswertungspunkten sind nach den Formeln der Ansätze direkt zu bestimmen.

Die Ansatzfunktionen der Konstruktion zur Lösung der hydrodynamischen Aufgabe können jetzt an den Auswertungspunkten berechnet werden:

$$h_{i_{rs}i} = N_l(r_r, s_r) \dot{u}_i \quad (3.11)$$

wobei i den Freiheitsgrad der Konstruktion angibt, in dessen Richtung eine Einheitsverschiebung das gesuchte Umströmungspotential Φ_i verursacht,

i_{rs} einen Auswertungspunkt der gesamten Flüssigkeitselementbelegung bezeichnet,

l der Knoten des Grundelementes ist, dessen Abbildung den Freiheitsgrad i enthält,

r_r, s_r die natürlichen Koordinaten des Punktes sind, der auf den Auswertungspunkt i_{rs} abgebildet wird.

Die Vektornotation wurde bei N weggelassen, da dieselben Ansätze in allen Richtungen verwendet werden (Abb. 3.1).

In gleicher Weise werden die Konstruktionsverschiebungen zur Auswertung von $\underline{\underline{E}}$ bestimmt:

$$\underline{\underline{N}}_{i_r l j} \delta_{j l}^{be} = N_l(r_{i_r}, s_{i_r}) \underline{\underline{1}}. \quad (3.12)$$

Zu (3.11) und (3.12) ist zu bemerken, daß es sich insgesamt um dieselben Verschiebungen handelt (rechte Seiten), die einerseits den Auswertungspunkten der Flüssigkeit (3.11) und andererseits den Auswertungspunkten der in Element e der Konstruktion enthaltenen Flüssigkeitselementen (3.12) zugeordnet sind.

Allgemeine Bemerkung zu den getroffenen Annahmen:

Bei Belegung jedes isoparametrischen Elementes mit mehreren Flüssigkeitselementen stimmt die Form des Konstruktions-elementes und der Flüssigkeitselemente im allgemeinen nicht exakt überein. In Abschnitt 4.5 wird am Beispiel einer Kugel gezeigt, daß bei mäßigen Abweichungen gute Ergebnisse erzielt werden.

4. LÖSUNG DER HYDRODYNAMISCHEN PROBLEME

Zur Lösung der Eigenwertaufgabe (2.19) muß die hydrodynamische Matrix \underline{E} bekannt sein. Dies setzt die Lösung der Randwertaufgaben (2.12) voraus.

Für gewisse Formen der Grenzoberfläche S und bei geschlossener Darstellbarkeit der Verschiebungsansätze können sogar geschlossene Lösungen von (2.12) gefunden werden - das Beispiel einer Kugel wird in [20] gezeigt. Meistens hat aber S eine allgemeine Form - z.B. Schiffsaußenhaut -, und die Verschiebungsansätze sind auf S nur gebietsweise definiert - z.B. nach der F.E.M. Hier müssen allgemeine, für die unterschiedlichsten Körperformen und Verschiebungen geeignete Näherungsmethoden verwendet werden.

Neben der F.E.M., deren Gebrauch für äußere Strömungen im dreidimensionalen Raum wegen der unendlichen Ausdehnung schlecht geeignet ist, steht die Singularitätenmethode als allgemein einsetzbares Verfahren zur Berechnung der Umströmung allgemeiner Körper zur Verfügung. Als Folge der Grundannahme, daß alle verwendeten Ansätze der Laplaceschen Gleichung genügen, ist die Singularitätenmethode Mitglied einer allgemeinen Klasse von Verfahren, die Trefftzsche Verfahren genannt werden. Bei diesen werden die Unbekannten durch Linearkombinationen von Ansatzfunktionen ersetzt, die bereits Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen sind, so daß sich das Näherungsverfahren auf die Erfüllung der Randbedingungen beschränkt. Bei Hess und Smith [6] z.B. können die Potentiale der Quellverteilungen, nach der Integration über die Elementfläche, als Trefftzsche Ansatzfunktionen betrachtet werden. Im Folgenden wird die Umströmung allgemeiner Körper nach dem Trefftzschen Verfahren formuliert. Danach werden die Voraussetzungen zur Elementunterteilung und zum Aufbau der entsprechenden Ansatzfunktionen

behandelt. Die Lösung der hydrodynamischen Probleme wird für dreieckige Unterteilungselemente mit konstanten Quellstärkenverteilungen gezeigt, und es werden numerische Aspekte im Einsatz der entsprechenden Formeln behandelt. Anhand von Beispielen werden Konvergenzüberlegungen angestellt.

4.1 Allgemeine Formulierung der Singularitätenmethode

Das Randwertproblem (2.12) für den Freiheitsgrad i der benetzten Oberfläche S

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \quad \text{in } \mathcal{V} \quad (2.12a)$$

$$-\nabla \phi_i \cdot \underline{n} = b_i \underline{n} \quad \text{auf } S \quad (2.12b)$$

kann auch als Variationsprinzip formuliert werden. Nach Mihlin [23], § 18; Anmerkung 2, entspricht dem Randwertproblem (2.12) die Suche des stationären Wertes des Funktionals

$$F(\phi_i) = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \phi_i)^2 d\mathcal{V} - 2 \int_S \phi_i b_i \underline{n} dS. \quad (4.1)$$

Nach der Grundannahme des Trefftz'schen Verfahrens wird eine angenäherte Lösung der Randwertaufgabe (2.12) - oder ein angenähertes Minimum des Funktionals (4.1) - gesucht, indem das unbekannte Feld ϕ_i durch eine Reihe

$$\phi_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} f_k \quad (4.2)$$

angenähert wird, deren Ansatzfunktionen f_k der Laplace'schen Gleichung genügen, also

$$\nabla^2 f_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

Die angenäherte Lösung von (2.12) kann mit der Methode der gewichteten Residuen bestimmt werden. In dieser Methode wird der Fehler bei der Näherung einer Randwertaufgabe mit bestimmten Wichtungsfunktionen w_l über das ganze Definitionsgebiet V - einschließlich Berandung S - gemittelt und gleich Null gesetzt. Für (2.12) ergibt sich:

$$\int_V \nabla^2 \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} f_k \right) w_l \, dV + \int_S \left\{ -\nabla \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} f_k \right) \eta - h_i \eta \right\} w_l \, dS = 0. \quad (4.4)$$

Wird die Bedingung (4.3) der Trefftzschen Lösungsansätze berücksichtigt, so ist das erste Integral in (4.4) immer gleich Null. Dadurch entsteht die vereinfachte Form

$$-\sum_{k=1}^m a_{ik} \int_S \nabla f_k \eta \, w_l \, dS = \int_S h_i \eta \, w_l \, dS, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (4.5)$$

Dies stellt ein Gleichungssystem dar, dessen Lösung die unbekanntenen Koeffizienten a_{ik} liefert.

Je nach Wahl der Wichtungsfunktionen w_l werden bekannte Lösungsverfahren erhalten (siehe z.B. Zienkiewicz [28]). Sind z.B. die Wichtungsfunktionen den Ansatzfunktionen gleich, so entspricht (4.5) dem Galerkinschen Verfahren. Für den Spezialfall

$$w_l = \delta_l, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

wobei δ_l der Gestalt ist, daß für $x \neq x_l$, $y \neq y_l$ und $z \neq z_l$, $w_l = 0$, aber $\int_S w_l \, dS = 1$, nimmt das Gleichungssystem (4.5) folgende Form an:

$$-\sum_{k=1}^m a_{ik} \nabla f_{lk} \varrho_l = h_{li} \varrho_l, \quad l=1, 2, \dots, m \quad (4.7)$$

wobei

$\nabla f_{lk} = \nabla f_k(x_l, y_l, z_l)$ ist,

ϱ_l der Normalvektor zu S auf Punkt (x_l, y_l, z_l)

h_{li} der Wert der Ansatzfunktion des Freiheitsgrades i der Konstruktion auf Punkt (x_l, y_l, z_l) der benetzten Oberfläche.

Das Gleichungssystem (4.7) entspricht der Näherung nach der Kollokationsmethode. x_l, y_l, z_l sind die Kollokationspunkte.

Die Trefftzschen Ansatzfunktionen können auch zur näherungsweise Lösung des (2.12) zugeordneten Variationsproblems (4.1) benutzt werden. Wird in dem Funktional (4.1) das Feld Φ_i durch (4.2) ersetzt, wird

$$F(a_{ik}) = \int_{\Psi} \sum_{k=1}^m a_{ik} \nabla f_k \sum_{l=1}^m a_{il} \nabla f_l d\Psi - 2 \int_S \sum_{k=1}^m a_{ik} f_k h_i \varrho dS. \quad (4.8)$$

Das erste Integral kann, nach Berücksichtigung des Greenschen Satzes und der Eigenschaft (4.3) der Trefftzschen Ansatzfunktionen, umgeformt werden zu

$$F(a_{ik}) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{ik} a_{il} \int_S f_k \nabla f_l \varrho dS - 2 \sum_{k=1}^m a_{ik} \int_S f_k h_i \varrho dS. \quad (4.9)$$

Diese Form des Funktionals ist nur von den unbekanntem Koeffizienten a_{ik} abhängig. Der Extremwert von (4.9) kann nach Art des Ritzschen Verfahrens bestimmt werden, in dem die Ableitungen nach den unbekanntem Koeffizienten auf Null gesetzt werden:

$$\frac{\partial F(a_{ik})}{\partial a_{il}} = 2 \sum_{k=1}^m a_{ik} \int_S f_l \nabla f_k \underline{n} \, dS - 2 \int_S f_l h_i \underline{n} \, dS = 0, \quad l=1, 2, \dots, m. \quad (4.10)$$

Das Gleichungssystem (4.10) läßt sich zur Bestimmung der Koeffizienten verwenden. Zu bemerken ist, daß (4.10) genau mit der Gleichung übereinstimmt, die durch Einsetzen der Galerkinschen Wichtungsfunktionen $w_l = f_l$ in (4.5) zu erhalten ist.

Sowohl (4.7) als auch (4.10) liefern Näherungslösungen der Randwertaufgabe (2.12). Bei der Kollokationsmethode sind die Koeffizienten des Gleichungssystems lediglich die Normalgeschwindigkeiten auf der Fläche S an den gewählten Kollokationspunkten; das Gleichungssystem ist asymmetrisch. Bei der Variationsformulierung ist das Gleichungssystem symmetrisch, jedoch sind die Integrationen über S , die meistens numerisch durchgeführt werden müssen, rechenaufwendiger.

Gleichung (4.7) wie Gleichung (4.10) können allgemein als

$$\underline{A} \underline{a}_i = \underline{b}_i \quad (4.11)$$

geschrieben werden, wobei i wiederum einen bestimmten Konstruktionsfreiheitsgrad an der benetzten Oberfläche darstellt. Matrix \underline{A} stellt die Eigenschaften der Flüssigkeit dar und bleibt für alle Freiheitsgrade der Konstruktion gleich.

4.2 Aufbau der Ansatzfunktionen

Es werden für beliebige Formen der Oberfläche S Lösungsansätze gesucht, die der Bedingung (4.3) genügen.

Nach Lamb [1], Punkt 58, kann jedes Geschwindigkeitspotential, das im Raum \mathcal{V} die Bedingung $\nabla^2 \varphi = 0$ erfüllt, durch eine stetige Quellverteilung an der Oberfläche S exakt und eindeutig in der Form

$$\varphi(P) = \int_S \frac{\sigma(Q)}{r(P,Q)} dS$$

dargestellt werden, wobei

$\sigma(Q)$ die Quellstärke an Punkt Q der Oberfläche S ist,
 $r(P,Q)$ der Abstand zwischen den Punkten P und Q und
 $\varphi(P)$ das Geschwindigkeitspotential am beliebigen Punkt P im Flüssigkeitsraum \mathcal{V} .

Daher sind flächenverteilte Quellen die natürliche Wahl zum Aufbau der hydrodynamischen Lösungsansätze.

Die Schwierigkeiten, über ein Gebiet S zu integrieren, das nicht analytisch darstellbar ist, können überwunden werden, indem S durch eine Anordnung von einfach geformten Untergebieten S_i mit vorgegebenen Quellverteilungen ersetzt wird, die den Verlauf von S angenähert darstellen. Damit ist eine analytische Integration möglich. Es muß aber beachtet werden, daß an den Rändern der einzelnen Untergebiete S_i die Geschwindigkeit womöglich unendlich ist, und daß sich diese Unendlichkeiten nur aufheben, wenn die Elementbelegung von S knickfrei und die Quellverteilung überall stetig ist. Um eine knickfreie Belegung von S zu erreichen, müssen allgemein gekrümmte Untergebiete eingesetzt werden, die jedoch schwer darstellbar und für die wiederum die analytischen Integrationen schwer durchführbar sind. So kommt es, daß meistens einfach darstellbare

Untergebiete eingesetzt werden. Zur Bestimmung der Quellverteilung wird jedoch die Auswertung von Potentialen und Geschwindigkeiten an den Rändern dieser Untergebiete gemieden.

Von Hess und Smith [6] werden für die S_i ebene Viereckselemente mit konstanter Quellstärke benutzt, die also weder der Glättebedingung noch der Bedingung der Stetigkeit der Quellstärken genügen. Die Auswertungen werden nur an den Elementmittelpunkten vorgenommen.

Webster [25] benutzt ebene Dreieckselemente mit linear veränderlichen Quellstärkenverteilungen, die zwar für ebene Randflächen S die Glätte- und Kontinuitätsbedingung erfüllen können, aber z.B. für alle geschlossenen Flächen nicht den Glättebedingungen genügen. Auch da werden die Elementgrenzen gemieden, indem die Auswertungspunkte außerhalb der Ebenen der Elemente genommen werden.

Im Folgenden werden Dreieckselemente mit konstanter Quellstärkenverteilung benutzt; die Auswertungen erfolgen an den Mittelpunkten dieser Elemente. Es wird von einer lückenlosen Belegung von S mit Dreieckselementen ausgegangen, deren Ecken, die Knoten der Unterteilung, exakt auf S liegen. Es werden ein globales Koordinatensystem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ für S und ein lokales Koordinatensystem (x, y, z) für jedes der Dreiecke definiert.

Die durch ein Dreieckselement mit konstanter Quellstärke Q generierten Potentiale und Geschwindigkeitskomponenten im lokalen Koordinatensystem des Elementes können aus Formeln im Anhang von Webster [25] entnommen werden, wobei die verwendeten Bezeichnungen in Abb. 4.1 dargestellt sind.

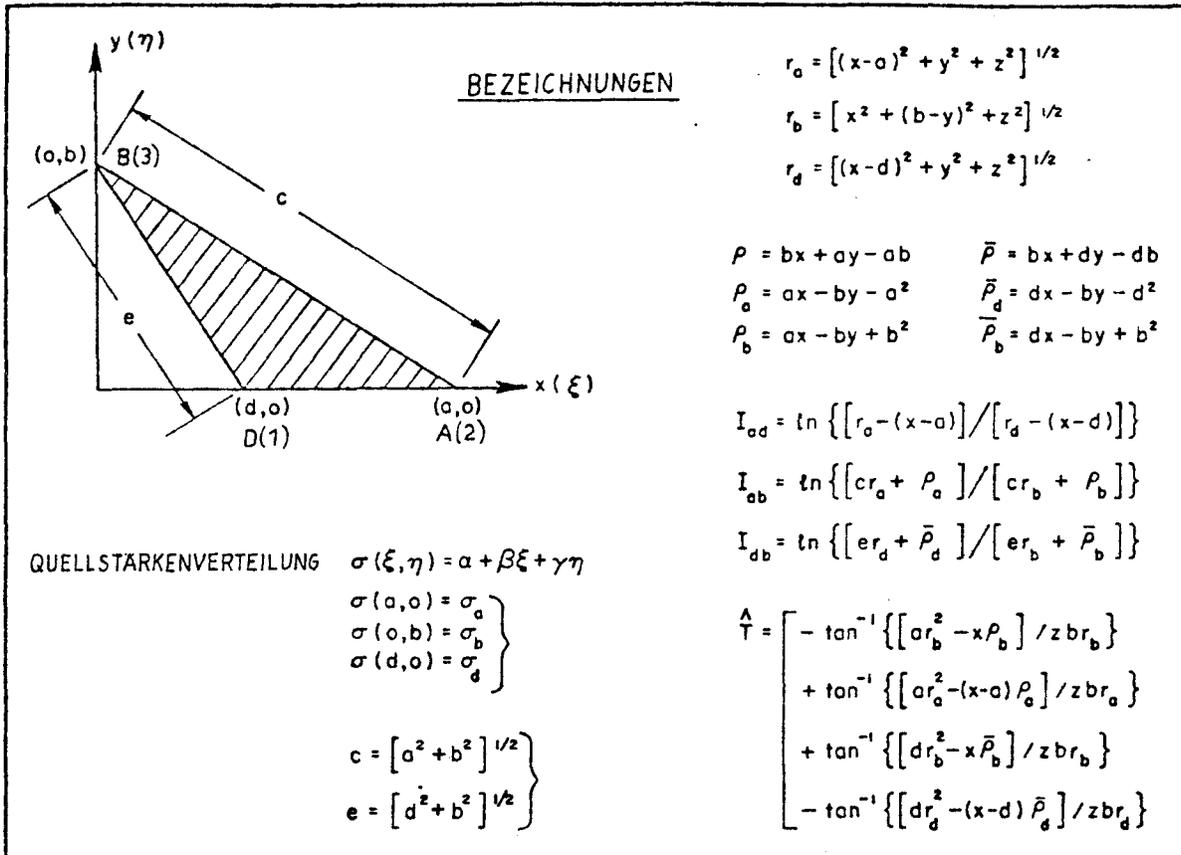


Abb. 4.1 - Definition der Bezeichnungen und Grundfunktionen für ebenes Queldreieck aus [25]

Die Potentialfunktion entspricht der Formel (69) von Webster:

$$\varphi = yI_{ad} + q \frac{I_{ab}}{c} - \bar{q} \frac{I_{db}}{e} + z \hat{T}, \quad (4.12)$$

die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung der Formel (37)

$$\varphi_x = b \frac{I_{ab}}{c} - b \frac{I_{db}}{e} \quad (4.13)$$

die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung der Formel (41)

$$\varphi_y = a \frac{I_{ab}}{c} - d \frac{I_{db}}{e} + I_{ad} \quad (4.14)$$

und die Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung der Formel (51)

$$\varphi_z = \hat{T} . \quad (4.15)$$

Die gesuchten Ansatzfunktionen sind die Potentiale, die von jedem Dreieckselement erzeugt werden. Die Unbekannten - d.h. die Koeffizienten aus (4.2) sind die zu bestimmenden konstanten Quellstärken der Elemente.

Um die Näherungsmethode in der Form (4.7) oder (4.10) durchzuführen, müssen die Werte der Ansatzfunktionen und deren Gradienten an einer Anzahl von Auswertungspunkten (Kollokations- bzw. Integrationspunkten) und bezogen auf ein gemeinsames Koordinatensystem bestimmt werden. Dazu sind zwei Schritte nötig:

- Die Auswertungspunkte müssen in das lokale Koordinatensystem jedes der Elemente transformiert werden.
- Die Geschwindigkeiten müssen in das globale Koordinatensystem zurücktransformiert werden.

Die erwähnten Koordinatentransformationen können mit der Rotationsmatrix und den globalen Koordinaten des Koordinatenursprungs des lokalen Koordinatensystems durchgeführt werden.

Wenn mit $\underline{i}_x, \underline{i}_y$ und \underline{i}_z die Einheitsvektoren der lokalen Koordinatenachsen bezeichnet werden, kann die Rotationsmatrix als

$$R = [\underline{i}_x, \underline{i}_y, \underline{i}_z] = \begin{bmatrix} \lambda_{x\bar{x}} & \lambda_{y\bar{x}} & \lambda_{z\bar{x}} \\ \lambda_{x\bar{y}} & \lambda_{y\bar{y}} & \lambda_{z\bar{y}} \\ \lambda_{x\bar{z}} & \lambda_{y\bar{z}} & \lambda_{z\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

geschrieben werden, wobei $\lambda_{\alpha\beta}$ allgemein der Cosinus des Winkels zwischen einer lokalen Koordinatenachse α und einer globalen Koordinatenachse β ist.

Die Koordinatentransformation vom globalen in das lokale Koordinatensystem kann geschrieben werden

$$\bar{\underline{x}} = R \underline{x} + \bar{\underline{x}}_0 \quad (4.17)$$

wobei

$$\bar{\underline{x}} = \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \text{ ist, } \underline{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \text{ und } \underline{x}_0 = \begin{Bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{Bmatrix} \cdot$$

Die erwähnte Transformation vom globalen in das lokale Koordinatensystem wird infolgedessen als

$$\underline{x} = R^T(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (4.18)$$

geschrieben.

Die Einheitsvektoren \underline{i}_x , \underline{i}_y und \underline{i}_z werden mit Bezug auf Abbildung 4.1 bestimmt. Angenommen, daß die Ortsvektoren \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 der drei Ecken eines Dreiecks bekannt sind, so ist Vektor \underline{i}_x unmittelbar als

$$\underline{i}_x = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|} \quad (4.19a)$$

zu bestimmen. Für \underline{i}_y muß der Ursprung des lokalen Koordinatensystems bekannt sein; dazu kann die Projektion des Seitenvektors 13 in Abb. 4.1 auf \underline{i}_x verwendet werden:

$$\bar{x}_0 = \bar{x}_1 + \{(\bar{x}_3 - \bar{x}_1) \cdot \underline{i}_x\} \underline{i}_x \quad (4.19d)$$

Vektor \underline{i}_y ist als

$$\underline{i}_y = \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_0}{|\bar{x}_3 - \bar{x}_0|} \quad (4.19b)$$

zu schreiben. Und Vektor \underline{i}_z ist das Kreuzprodukt von \underline{i}_x und \underline{i}_y

$$\underline{i}_z = \underline{i}_x \times \underline{i}_y \quad (4.19c)$$

Mit den oben gezeigten Koordinatentransformationen können f_k und ∇f_k an gegebenen Punkten, die allgemein mit \bar{x} bezeichnet werden, durch

$$f_k(\bar{x}) = \varphi^k[R] \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.20)$$

wobei φ^k die Potentialfunktion nach (4.12) ist und m die Anzahl der Elemente, und

$$R = R_k^T(\bar{x} - \bar{x}_0^k)$$

und

$$\nabla f_k(\bar{x}) = R_k \left\{ \varphi_x^k[R] \quad \varphi_y^k[R] \quad \varphi_z^k[R] \right\}^T \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.21)$$

wobei

$\varphi_x^k, \varphi_y^k, \varphi_z^k$ die Geschwindigkeitskomponenten nach (4.13), (4.14) und (4.15) für Dreieckselement k sind, und

$$R = R_k^T(\bar{x} - \bar{x}_0^k)$$

bestimmt werden.

Die oben hergeleiteten Formeln (4.20) und (4.21) können zur Lösung praktischer Probleme nach (4.11) eingesetzt werden unter der Voraussetzung, daß S eine geschlossene Fläche in oder um den Flüssigkeitsraum V ist.

In gewissen Fällen werden Körper mit Symmetrieebenen betrachtet, relativ zu denen die Umströmung symmetrisch oder antisymmetrisch verlaufen kann. Für diese Fälle genügt es, eine Hälfte - bzw. ein Viertel oder ein Achtel, wenn

zwei oder drei senkrecht zueinander stehende Symmetrieebenen vorhanden sind - von S zu betrachten. Lediglich dieser aktive Teil von S muß mit Flüssigkeitselementen belegt werden. Die Symmetrie - bzw. Antisymmetriebedingungen an den Spiegelungsebenen - d.h. $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ oder $\phi = 0$ - werden erzwungen, indem zu den Ansatzfunktionen f_k bzw. ∇f_k eines aktiven Elements die Beiträge der an den betreffenden Ebenen gespiegelten Flüssigkeitselemente mit gleichen bzw. umgekehrten Vorzeichen addiert werden. Dadurch entspricht die Anzahl m der Unbekannten lediglich der des aktiven Teils von S.

Halbgetauchte Körper können auch auf diese Weise behandelt werden, da bekanntlich $\phi = 0$ an der freien Wasseroberfläche angenommen werden kann, wenn der Parameter $\omega^2 g / B$ (B ist eine charakteristische Länge des Körpers) gegen Unendlich geht.

Im Folgenden werden nur die Hauptkoordinatenachsen des globalen Koordinatensystems - $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{y}\bar{z}$ und $\bar{z}\bar{x}$ - zur Spiegelung verwendet. Es werden auch keine speziellen Formeln zur Berechnung der erweiterten Ansatzfunktionen aufgestellt, sondern es wird erklärt, wie die Gleichungen (4.20) und (4.21) in unveränderter Form verwendet werden können:

- a) Ist eine Symmetrieebene vorhanden, werden die Positionsvektoren \bar{x} der Auswertungspunkte - und nicht die Grundelemente - an dieser Ebene gespiegelt, bevor sie in die lokalen Koordinatensysteme der aktiven Dreiecke transformiert werden.
- b) Lediglich die Vorzeichen der normal zur Spiegelungsebene stehenden Komponenten der errechneten Geschwindigkeiten ∇f_k müssen umgekehrt werden, da in a) die Spiegelung der Auswertungspunkte und nicht die der aktiven Flüssigkeitselemente durchgeführt wurde.

- c) Bei mehrfachen Spiegelungen sind die Beiträge aller durch die Spiegelung generierten Auswertungspunkte zu denen der ursprünglichen Auswertungspunkte zu addieren, wobei das Vorzeichen jedes Beitrages der Art der Spiegelung entsprechend individuell zu betrachten ist.

4.3 Einzelheiten des Lösungsvorganges

Das Gleichungssystem (4.11) kann sowohl mit der Kollokationsmethode nach (4.7) als auch mit der Variationsmethode nach (4.10) aufgebaut werden. Der Vollständigkeit halber werden die Elemente der Matrix A und des unabhängigen Vektors b_i für die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Ansatzfunktionen nach beiden Lösungsmethoden gezeigt. Zusätzlich wird die Ermittlung der Werte betrachtet, die zum Aufbau der Matrix F nach (3.10) benötigt werden.

Überlegungen zur numerischen Durchführbarkeit, Eignung der vorgeschlagenen Lösungsmethoden und Konvergenz der Ergebnisse bei Verfeinerung der Elementeteilung werden in den Abschnitten 4.4 und 4.6 angestellt.

4.3.1 Ebene Dreiecke, konstante Quellverteilung, Kollokationsmethode

Die Kollokationspunkte werden auf die Mittelpunkte der Dreiecke gelegt.

Die Elemente der Matrix A können allgemein als

$$A_{lk} = \nabla f_{lk} \cdot \underline{n}_l \quad l, k = 1, 2, \dots, m \quad (4.22)$$

geschrieben werden, wobei m die Anzahl der Kollokationspunkte - und damit auch der Elemente - ist. Die Werte von $\nabla f_{lk} = \nabla f_k(\bar{x}_l)$ sind an den Mittelpunkten der Elemente $\bar{x}_l = \{\bar{x}_l, \bar{y}_l, \bar{z}_l\}^T$ nach (4.21) zu bestimmen. Die Normalvektoren \underline{n}_l sind gleich den \underline{i}_z -Vektoren der Dreieckselemente.

Die Elemente des Rechte-Seiten-Vektors \underline{b}_j sind als

$$b_{li} = h_{li} \underline{n}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (4.23)$$

zu schreiben, wobei h_{li} der Wert der Ansatzfunktion h_j der Konstruktion an Kollokationspunkt l ist.

Die Werte h_{li} werden aus (3.11) bestimmt mit den lokalen Koordinaten (r_{lr}, s_{lr}) der Punkte des Grundelements, welche auf die Mittelpunkte der Dreiecke l abgebildet werden.

Zum Aufbau der Elemente der Matrix \underline{E} ist folgendes zu beachten:

- Die Anzahl der Integrationspunkte innerhalb jedes der Elemente ist $N_{ip} = 1$.
- Der entsprechende einzige Integrationskoeffizient nimmt den Wert Eins an.
- Die Werte des Potentials sind aus

$$\phi_{ip}^f = \sum_{k=1}^m a_{ik} f_{lk}$$

nach der Ermittlung der a_{ik} durch Auflösung von (4.11) zu bestimmen, wobei m die Anzahl der Kollokations- aber auch der Integrationspunkte ist, und dadurch für jedes Element an Stelle von Index l der Wert von Hochindex f einzusetzen ist.

- Die Normalvektoren \underline{n}_{ip}^f sind gleich den Normalvektoren \underline{n}_l , wobei auch der Wert von Hochindex f an Stelle von Index l einzusetzen ist.

4.3.2 Ebene Dreiecke, konstante Quellverteilung, Variationsmethode

Die Integrale in (4.10) werden numerisch berechnet, da eine geschlossene Lösung mit f_k und ∇f_k wegen der dazu nötigen Koordinatentransformationen nicht praktikabel ist.

Es werden bei Einpunktintegration die Mittelpunkte der Elemente als Integrationspunkte verwendet.

Die Elemente der Matrix \underline{A} nehmen die Form

$$A_{lk} = \int_S f_l \nabla f_k \eta \, dS = \sum_{p=1}^{N_E} f_{pl} \nabla f_{pk} \eta_p S_p, \quad l, k = 1, 2, \dots, N_E \quad (4.24)$$

an, wobei folgende Beziehungen verwendet wurden

($\bar{x}_p = \{\bar{x}_p, \bar{y}_p, \bar{z}_p\}^T$ ist der Positionsvektor des Mittelpunktes des Dreiecks p):

$$\begin{aligned} f_{pl} &= f_l(\bar{x}_p) && \text{aus (4.15)} \\ \nabla f_{pk} &= \nabla f_k(\bar{x}_p) && \text{aus (4.16)} \\ \eta_p & \text{ Normalvektor (gleich } \underline{i}_z \text{ Vektor) des Dreiecks } p, \\ S_p & \text{ Flächeninhalt des Dreiecks } p, \\ N_E & \text{ Anzahl der Dreiecke.} \end{aligned}$$

Die Elemente des Rechte-Seiten-Vektors \underline{b}_i sind:

$$b_{li} = \int_S f_l h_i \eta \, dS = \sum_{p=1}^{N_E} f_{pl} h_{pi} \eta_p S_p, \quad l = 1, 2, \dots, N_E \quad (4.25)$$

Die Werte h_{pi} sind in gleicher Weise wie in 4.3.1 zu bestimmen. Gleiche Bemerkungen wie in 4.3.1 sind auch für die zur Bestimmung der Matrix \underline{F} benötigten Werte gültig.

4.4 Numerische Aspekte beim Einsatz von ebenen Dreieckselementen

Die in Abb. 4.1 und Gl. (4.12) bis (4.15) vorgestellten Formeln sind für ebene Dreieckselemente konstanter Quellstärke gültig. Da zur Ableitung dieser Formeln ein einziges Dreieck betrachtet wurde, entstehen unendliche Geschwindigkeitswerte in der Elementebene an den Seiten des Dreiecks. Für diese unendlichen Geschwindigkeiten sind die Logarithmusglieder in Abb. 4.1 verantwortlich, wie es am Beispiel des Ausdruckes zu sehen ist. Je näher ein Auswertungspunkt der Seite AD kommt, desto kleiner wird der Faktor $y^2 + z^2$. Sobald dieser einen numerischen Wert kleiner als die Rechengenauigkeit des verwendeten Rechners erreicht, nimmt der Operand des Logarithmus die Form

$$\frac{|x-a| - (x-a)}{|x-d| - (x-d)}$$

an, womit er nicht mehr auswertbar ist. Der Rechner gibt eine Fehlermeldung an. Dies ist auch bei Auswertungspunkten der Fall, die auf den Verlängerungen der Seiten liegen.

Da bei gewissen Quelldreiecksbelegungen der Mittelpunkt eines Dreiecks durchaus auf der Verlängerung der Seite eines anderen Dreiecks liegen kann (z.B. bei ebenen Problemen) müssen Mindestwertabfragen der Logarithmus-Operanden im Rechnerprogramm vorgesehen werden. Eine Art dies durchzuführen ist die Abfrage auf die Seitenparameter y, ρ und $\bar{\rho}$ (den Seiten AD, AB und DB entsprechend) zu richten. Unterschreitet einer dieser Parameter einen vorgegebenen Mindestwert, ist es sinnvoll das entsprechende Log-Glied auf Null zu setzen. Dies ist folgendermaßen zu rechtfertigen:

Im Grenzfall, d.h. bei einer Belegung mit unendlich vielen Elementen sorgt die Anwesenheit eines benachbarten Quelldreiecks mit gleicher Quellstärke für die gegenseitige Aufhebung der auf die gemeinsame Seite bezogenen Log-Glieder.

Auch die Arcus-Tangens-Glieder erfordern besondere Behandlung. Da die Operanden dieser Glieder die z-Koordinate des Auswertungspunktes im Nenner haben, ist eine Mindestwertabfrage auch hier erforderlich. Wie in Bai und Yeung [26] vorgeschlagen, ist eine Abfrage auf die Lage des Auswertungspunktes am günstigsten. Liegt der Auswertungspunkt innerhalb des Dreiecks, d.h.

$0 < y < b$, $\rho < 0$ und $\bar{\rho} > 0$ ist

$$\hat{T} = -2\pi.$$

Außerhalb des Dreiecks ist $\hat{T} = 0$.

4.5 Beispiele

Zur Beurteilung des Verhaltens von Dreiecken konstanter Quellstärke wurden zwei klassische Beispiele gewählt:

- Eine endliche elastische Platte in einer unendlich ausgedehnten starren Wand, an den Enden drehbar gelagert und einseitig benetzt.
- Eine starre Kugel in beschleunigter Bewegung.

Es werden mehrere Elementbelegungen beider Körper untersucht. Die Umströmung wird nach Gl. (4.7) bestimmt. Zum Vergleich mit Ergebnissen bestehender theoretischer Untersuchungen wird das Integral F_{ij} nach Gl. (2.15) benutzt. Da die Verformungen der Körperoberfläche vorgegeben werden, beschränkt sich die Matrix F auf ein Element, das sinngemäß auch als hydrodynamische Masse bezeichnet wird.

4.5.1 Platte mit vorgegebenen Verformungen

Es wird eine Platte mit Länge-zu-Breite-Verhältnis $a/b = 1$ untersucht. Die vorgegebene Verformung entspricht einer Doppelsinusfläche

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} .$$

Aus [2] hat der Proportionalitätsfaktor zwischen der sogenannten konstanten effektiven hydrodynamischen Masse und der hydrodynamischen Masse des entsprechenden Ausschnittes einer unendlichen Platte den Wert 1.77. Die hydrodynamische Masse nach F_{ij} Gl. (2.15) entspricht der definierten konstanten effektiven hydrodynamischen Masse. So genügt es, um einen Proportionalitätsfaktor vergleichbarer Bedeutung zu erhalten, die Werte F_{ij} durch die hydrodynamische Masse des gleichen Ausschnittes einer unendlichen Platte (z.B. Gl. (55) und (23) aus [2] zu teilen.

Die Werte der errechneten Faktoren für die Unterteilungen aus Abb. (4.2) werden in Abb. (4.4) gezeigt.

4.5.2 Starre umströmte Kugel

Für eine gleichmäßig angeströmte Kugel ergibt sich eine sinusoidale Geschwindigkeitsverteilung $\sin \theta$ in Umfangsrichtung, wobei θ der Winkel zwischen der Anströmungsrichtung und dem Normalvektor zur Kugeloberfläche ist.

In diesem Beispiel wird der Wert der hydrodynamischen Masse F_{ij} nach (2.15) mit dem theoretischen Wert verglichen. Zur Vereinfachung werden die hydrodynamischen Massen in dimensionsloser Form und für ein achtel der Kugel als

$$M = m'' / 8 \rho_f r^3$$

dargestellt, wobei r der Radius der Kugel ist und m'' die theoretische bzw. errechnete hydrodynamische Masse.

In Abb. (4.5) sind die Werte von M für die in Abb. (4.3) gezeigten Elementbelegungen aufgeführt. Der theoretische Wert von M ist $\pi/12$.

Aus Abb. (4.4) ist eine Konvergenz zu dem Wert 1.77 zu erkennen, wobei der Fehler bei den feineren Einteilungen kleiner als 3% ist.

Für die Kugel Abb. (4.5) treten zwei entgegengesetzte Fehler auf:

Das Kugelvolumen wird durch die Elementbelegung unterschätzt, da die Eckpunkte der Dreiecke auf die Kugeloberfläche gelegt wurden. Die Geschwindigkeiten werden, wie bei der Platte, überschätzt. Dadurch wird bei den groben Einteilungen die hydrodynamische Masse unterschätzt. Bei den feinen Einteilungen prägt sich das Konvergenzverhalten in gleicher Weise wie bei der Platte aus, indem der theoretische Wert eine untere Grenze darstellt. Der Fehler liegt bei 2%.

Die zum Vergleich des Rechenaufwandes durchgeführten Berechnungen nach der Variationsmethode ergaben neben gleichen Ergebnissen fast doppelte Rechenzeiten. Dies ist auf die längere Aufbauzeit der Koeffizienten des Gleichungssystems (4.11) zurückzuführen. Es ist aber zu beachten, daß die Aufbauzeit der Koeffizienten mit m^2 steigt, wobei m die Ordnung des Gleichungssystems ist, die Lösungszeit aber proportional zu m^3 steigt. Bei der Variationsmethode ist die Koeffizienten Matrix A symmetrisch und dadurch die Lösungszeit halb so groß wie bei der Kollokationsmethode. Bei starkem Überwiegen der Lösungszeit, d.h. bei großen Werten von m ist zu erwarten, daß die Variationsmethode sich als schneller erweist. Der Wert von m , bei dem diese Kehre entsteht, wurde nicht ermittelt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden Dreiecke mit konstanter Quellstärke nach der Kollokationsmethode eingesetzt.

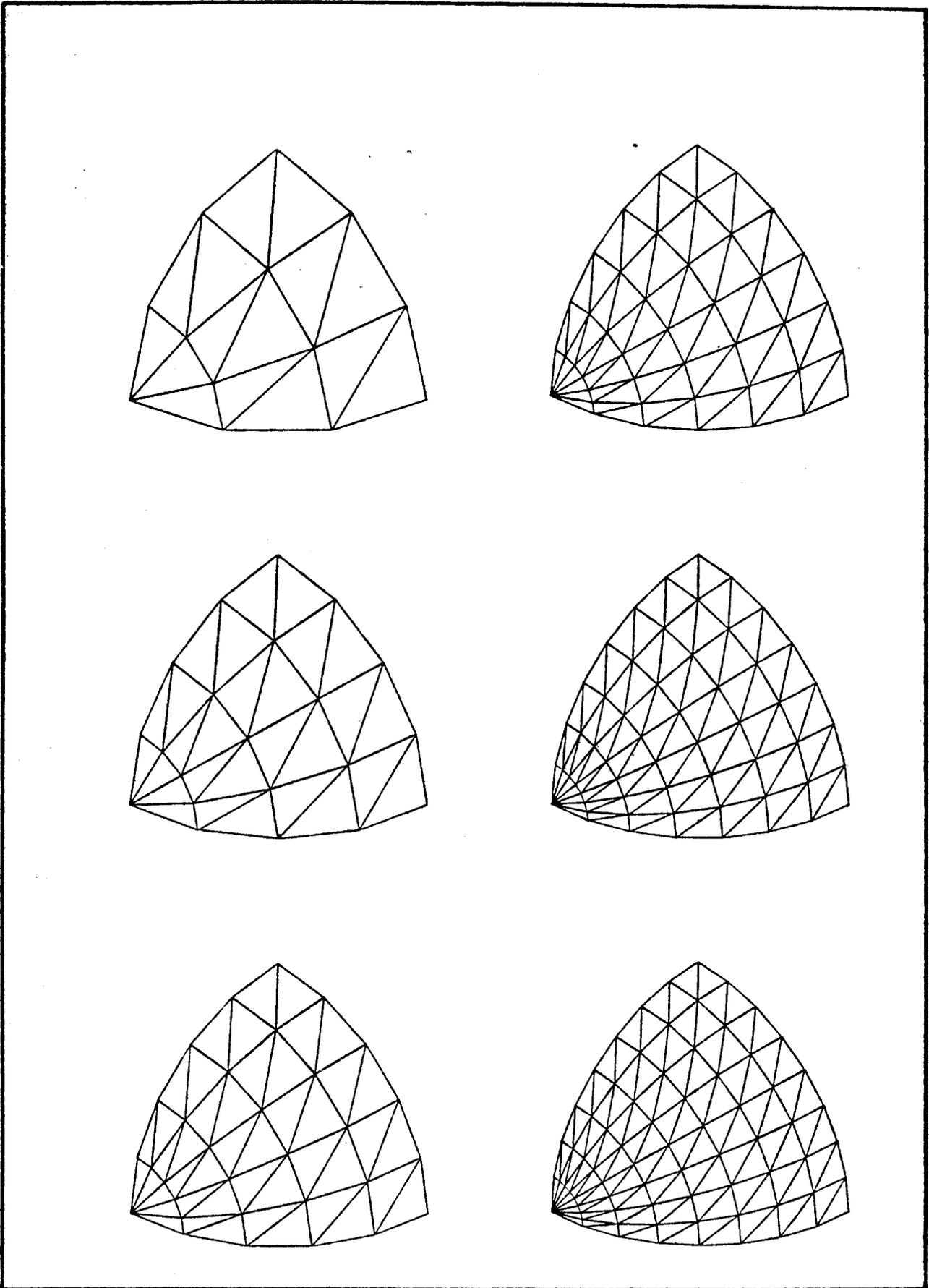


Abb. 4.3 - Verschiedene Elementunterteilungen - eines achtels einer Kugel

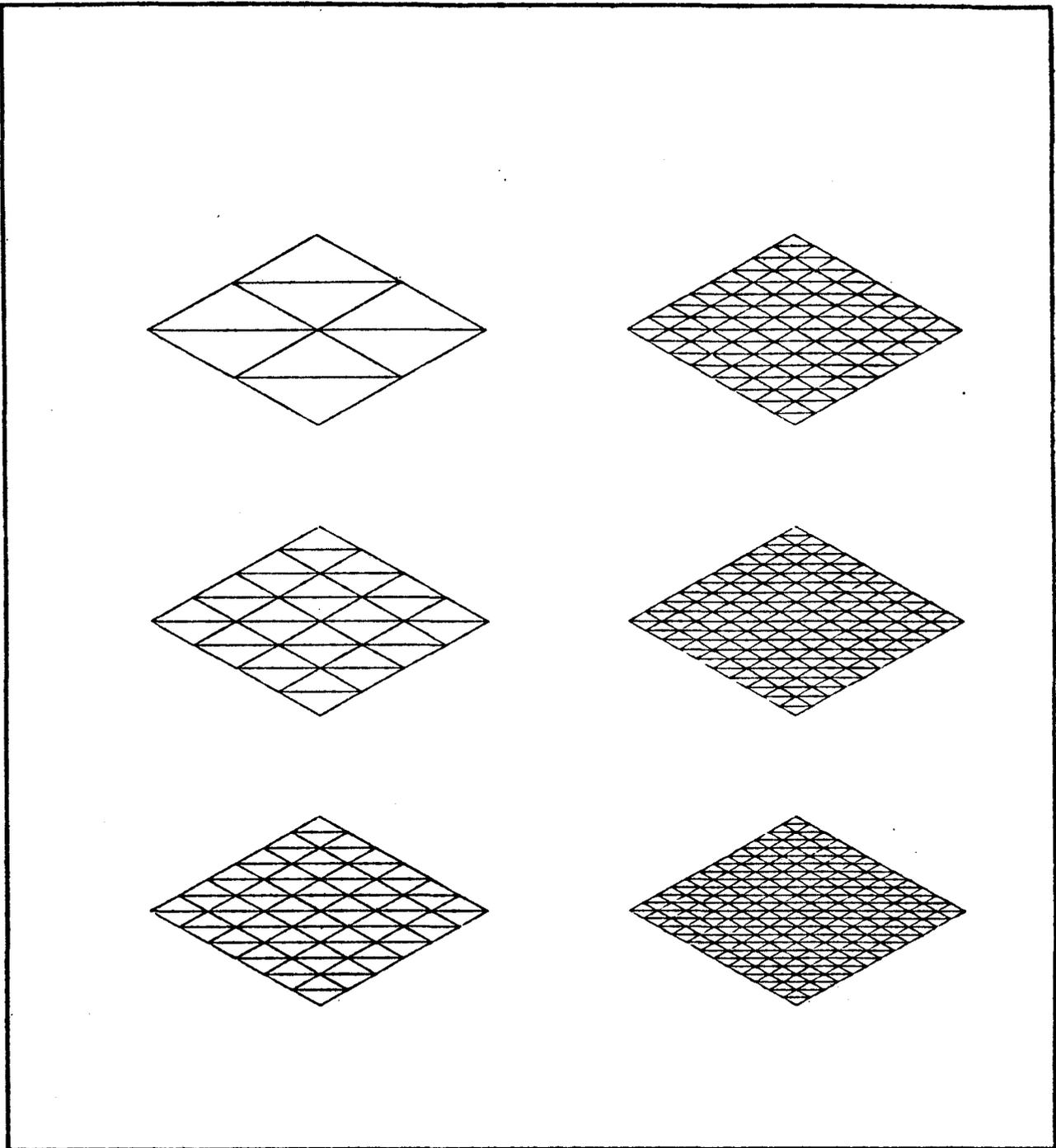
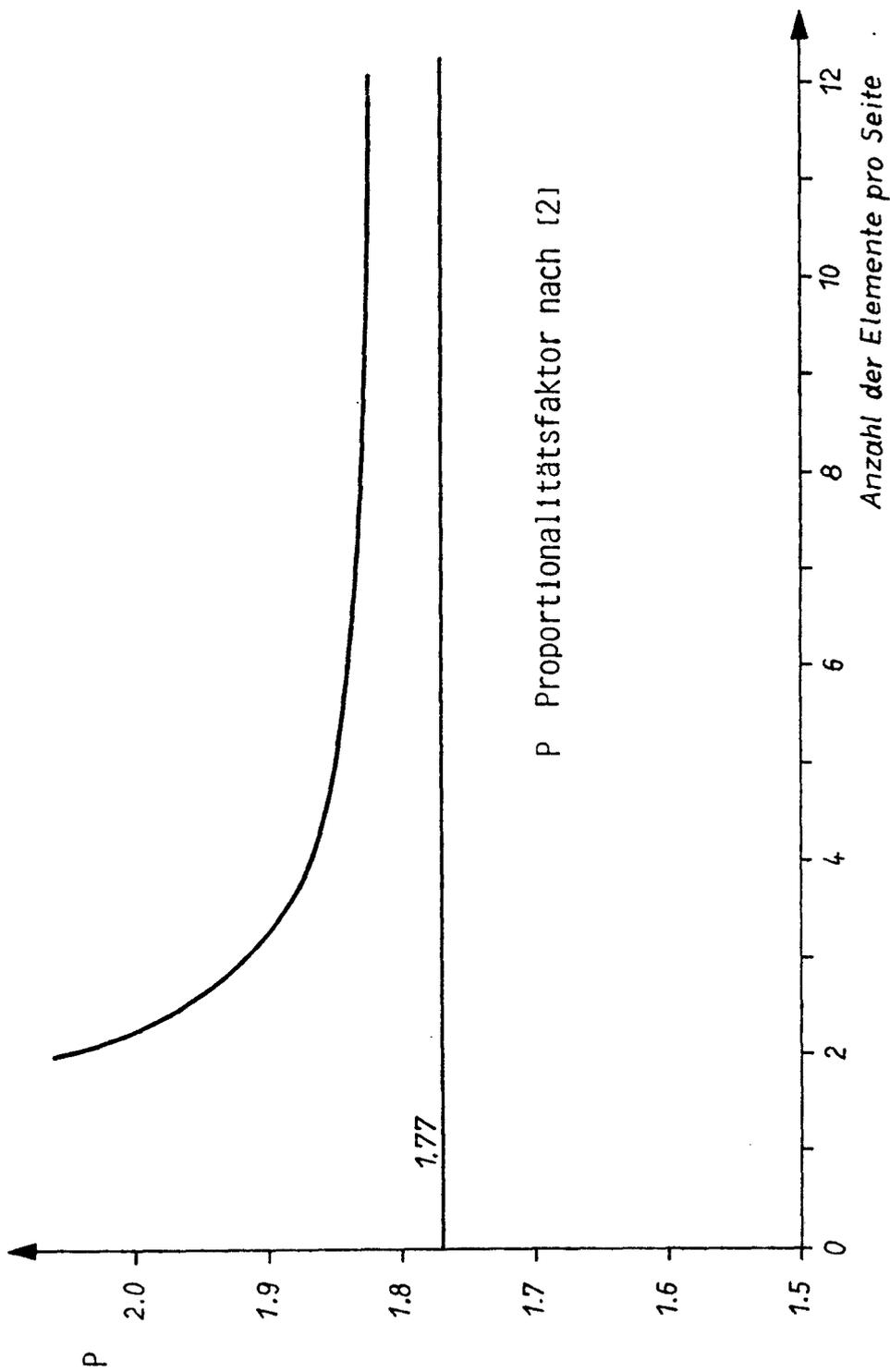


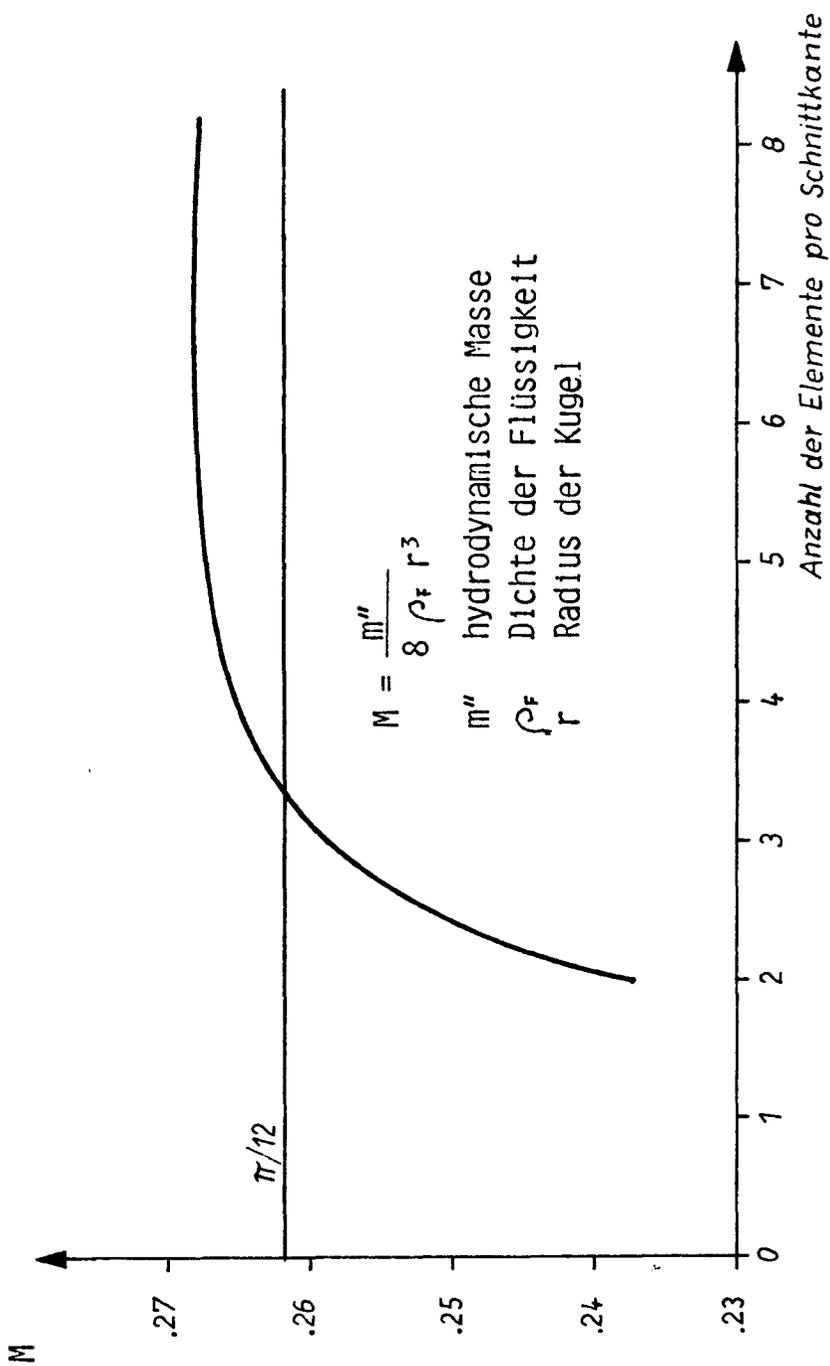
Abb. 4.2 - Verschiedene Elementunterteilungen einer quadratischen Platte



P Proportionalitätsfaktor nach [2]

Element pro Seite	Proportionalitätsfaktor
2	2.062
4	1.867
6	1.839
8	1.830
10	1.826
12	1.824

Abb. 4.4 - Konvergenzverhalten von Quelldreiecken (konstante Quellstärken, Kollokationsmethode) bei einer Platte mit vorgegebene Verformung



Elemente pro Schnittkante	M
2	.23738
3	.25877
4	.26516
5	.26732
6	.26799
7	.26810
8	.26796

Abb. 4.5 - Konvergenzverhalten von Queldreiecken (konstante Quellstärken, Kollokationsmethode) bei einer starren umströmten Kugel.

5. PRAKTISCHE DURCHFÜHRUNG VON BERECHNUNGEN

Zur Lösung der Eigenwertaufgabe (2.19) können alle F.E.M.-Programme für dynamische Probleme verwendet werden, die zur Bearbeitung voller Massenmatrizen geeignet sind.

Wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, muß zur Massenmatrix der Konstruktion die Matrix \underline{F} der hydrodynamischen Massen addiert werden. Zur Bestimmung von \underline{F} wird für jeden Freiheitsgrad an der benetzten Oberfläche ein hydrodynamisches Problem nach Kapitel 4 gelöst. Mit dem Umströmungspotential ϕ_i , das man für jeden Freiheitsgrad erhält und dem Verschiebungsfeld h_j jedes Freiheitsgrades können die Elemente von \underline{F} nach Abschnitt 3.3 bestimmt werden. Der beschriebene Vorgang ist im Blockdiagramm - Abb. 5.1 - im Hauptblock FLÜSSIGKEIT dargestellt.

In diesem Kapitel werden die Voraussetzungen zur Ausführung der einzelnen Schritte aus Abb. 5.1 behandelt. Zusätzlich werden spezielle Aspekte beim Einsatz des F.E.M.-Programmes ADINA [32] gezeigt, wobei auf die Namen von Variablen, Feldern und Unterprogrammen dieses Programmes Bezug genommen wird.

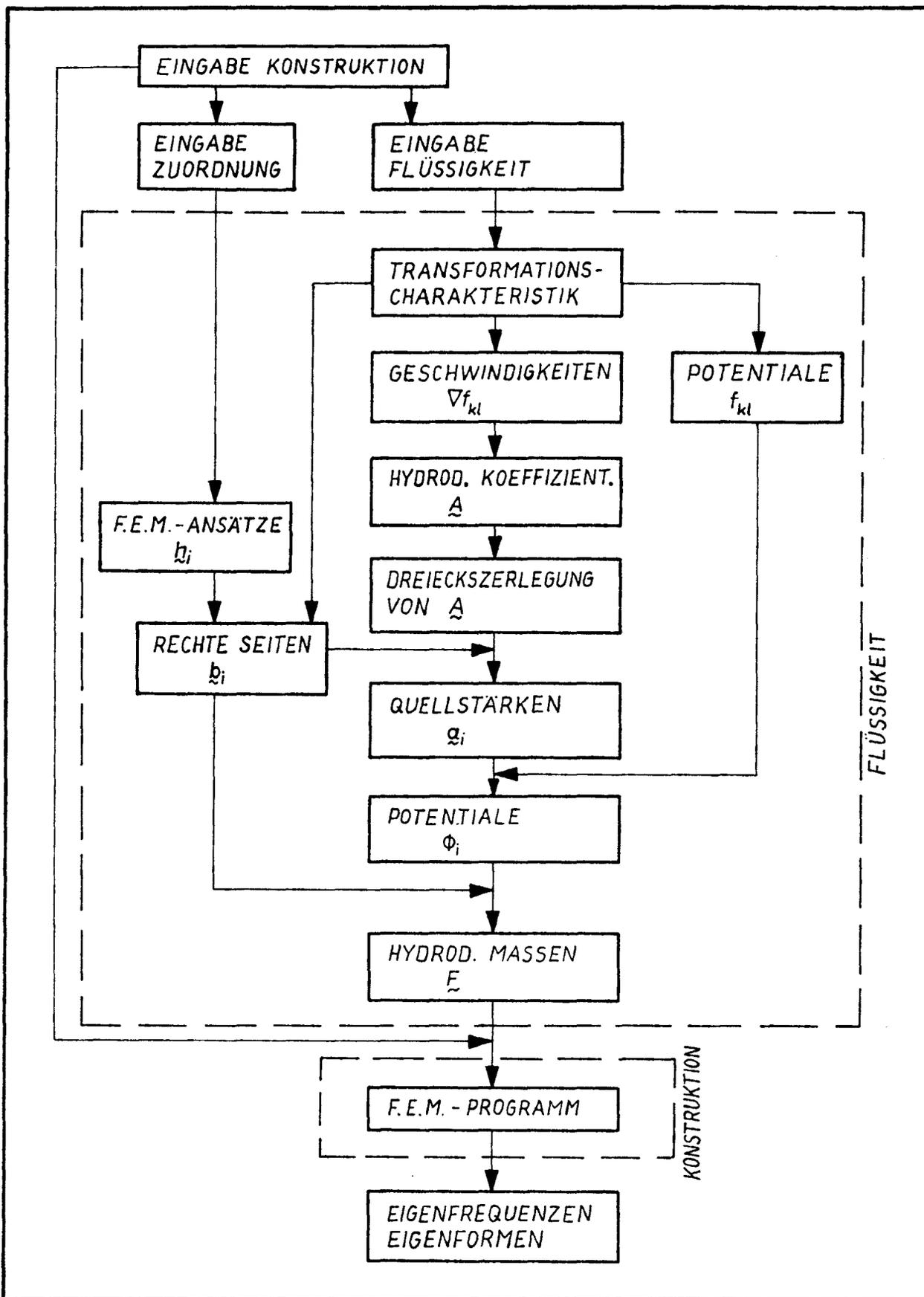


Abb. 5.1 - Flußdiagramm für hydroelastische Berechnungen

5.1 Eingabedaten

Bei Gebrauch der Singularitätenmethode, wie in Kapitel 4 beschrieben, ist, im Gegensatz zur Beschreibung des hydrodynamischen Problems mit finiten Elementen, lediglich die benetzte Oberfläche in Quelldreiecke zu unterteilen. Zur Beschreibung der Unterteilung genügt es, die Koordinaten der Knoten relativ zu einem globalen Koordinatensystem für die Flüssigkeit anzugeben und jedes der Elemente durch seine Ecken zu identifizieren. Das Koordinatensystem der Flüssigkeit kann unabhängig von dem der Konstruktion gewählt werden, muß aber so angeordnet werden, daß Symmetrieebenen der benetzten Oberfläche mit den Koordinatenebenen $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{y}\bar{z}$ und $\bar{z}\bar{x}$ übereinstimmen.

Wie in Abschnitt 3.3 festgelegt, muß die benetzte Oberfläche der Konstruktion eine vollständige Belegung von Flächenelementen aufweisen. In Sonderfällen, bei denen solche Belegung nicht vorhanden ist, etwa, wenn ein Paneel als Trägerrost idealisiert wird, müssen zusätzliche Flächenelemente geringer Steifigkeit eingeführt werden, durch welche die Steifigkeit der Konstruktion nicht wesentlich beeinflusst wird, z.B.: Scheibenelemente mit geringer Dicke. Dadurch bietet sich die Möglichkeit, daß die Eingabe für die Flüssigkeit aus den Eingabedaten der Konstruktion automatisch generiert werden kann. Zusätzlich muß die Zuordnung zwischen Quelldreiecken und benetzten Flächenelementen der Konstruktion festgelegt und eingegeben werden.

Spezielle Gegebenheiten bei Gebrauch des F.E.-Programms ADINA

Im Programm ADINA sind zwei Typen von Flächenelementen enthalten: Ein vier- bis achtknotiges isoparametrisches Scheibenelement und ein vier- bis sechszehnknotiges Schalenelement.

In der bestehenden Konfiguration des in dieser Arbeit entwickelten Rechnerprogrammes wurden die in Abb. 5.2 gezeigten Unterteilungen beider Elemente in Quelldreiecke festgelegt.

5.2 Aufbau der Transformationsdaten der Flüssigkeitselemente

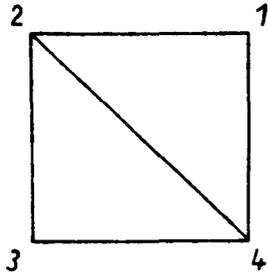
Aus den Eingabedaten für die Flüssigkeit können die lokalen Koordinatensysteme der Quelldreiecke nach (4.14a) bis (4.14c) und die Rotationsmatrizen nach (4.12) bestimmt werden. Damit sind die erforderlichen Koordinatentransformationen zur Bestimmung der Geschwindigkeiten und Potentiale festgelegt.

Zum späteren Aufbau der Rechte-Seite-Vektoren \underline{b}_i nach Abschnitt 4.3 müssen die Normalvektoren der Elemente - d.h. die \underline{l}_2 -Vektoren der Elemente - gespeichert werden.

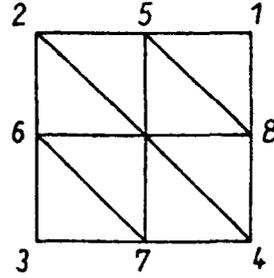
5.3 Bestimmung und Reduktion von \underline{A}

Wie in Abschnitt 4.6 angegeben, werden bei der Behandlung der hydroelastischen Probleme nur Dreiecke mit konstanter Quellstärke und die Kollokationsmethode zur Berechnung der Umströmungen nach (4.7) verwendet. Entsprechend sind folgende Schritte zur Bestimmung und Reduktion der Matrix \underline{A} nötig:

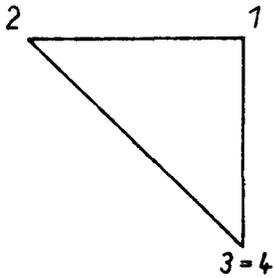
Scheibenelement



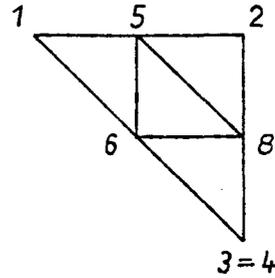
*vierknotig
2 Queldreiecke*



*achtknotig
8 Queldreiecke*

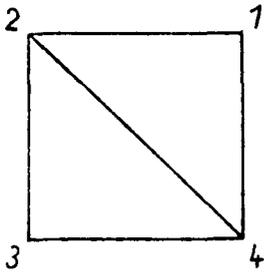


*dreiknotig
1 Queldreieck*

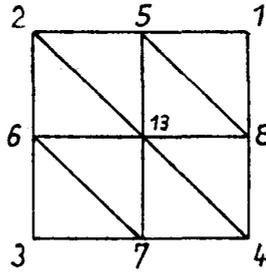


*sechsknotig
4 Queldreiecke*

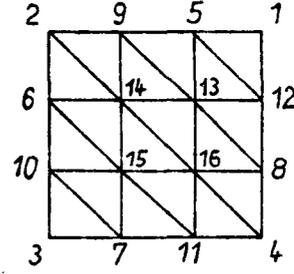
Plattenelement



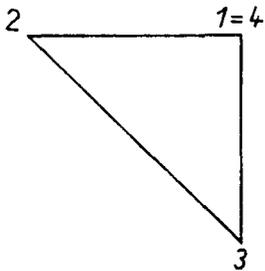
*vierknotig
2 Queldreiecke*



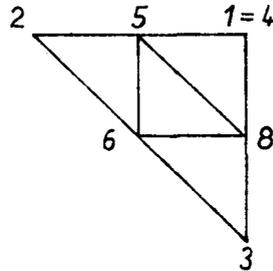
*neunknotig
8 Queldreiecke*



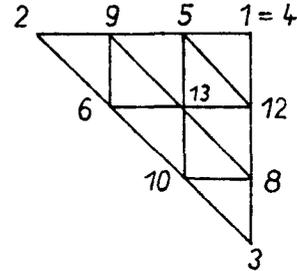
*sechzehnknötig
18 Queldreiecke*



*dreiknotig
1 Queldreieck*



*sechsknotig
4 Queldreiecke*



*neunknotig
9 Queldreiecke*

Abb. 5.2 - Erlaubte Einsatzkonfigurationen der ADINA-Platten- und -Scheibenelemente bei Behandlung hydroelastischer Probleme und deren entsprechende Unterteilungen in Queldreiecke

- Jeder Auswertungspunkt, d.h. der Mittelpunkt jedes Quelldreiecks, wird mit (4.13) in das globale Koordinatensystem der Flüssigkeit transformiert.
- Potential und Geschwindigkeit, die an jedem Auswertungspunkt durch jedes der Quelldreiecke induziert werden, werden aus (4.21) und (4.22) bestimmt.
- Die Elemente der Koeffizientenmatrix A werden aus (4.23) ermittelt.
- Zur Triangularisation von A muß berücksichtigt werden, daß A asymmetrisch ist. Es wurde dazu das Unterprogramm UACTCL aus Zienkiewicz [28], Kapitel 24, S. 746, benutzt.

5.4 Bestimmung von \underline{F}

Nach Abb.5.1 sind zum Aufbau von \underline{F} die Rechte-Seiten-Vektoren \underline{b}_i und die Potentiale ϕ_i nötig.

Bei Gebrauch der Kollokationsmethode und konstanten Quellstärken innerhalb eines Dreiecks handelt es sich bei dem Rechte-Seiten-Vektor \underline{b}_i nach (4.24) und bei den Ansätzen $N_{iqm}^e \Omega_{iq}^f \delta_{jm}^{be}$ aus (3.10) um ein und dasselbe Feld, wobei lediglich verschiedene Zuordnungen einzuhalten sind. Dies rechtfertigt die Gestaltung des Blockdiagramms Abb. 5.1.

Die Potentiale ϕ_i sind nach den Bemerkungen zum Aufbau von \underline{F} in Unterabschnitt 4.3.1 zu bestimmen.

Zum Aufbau von \underline{F} muß zusätzlich zu \underline{b}_i und ϕ_i auch der Flächeninhalt aller Flüssigkeitselemente verfügbar sein. Dieser ist im Block TRANSFORMATIONSSCHARAKTERISTIK in Abb. 5.1 vorhanden. Auf eine Verbindungslinie wurde der Übersichtlichkeit wegen verzichtet.

Bemerkungen zum Gebrauch des F.E.-Programms ADINA

- Zum Aufbau der Rechte-Seiten-Vektoren \underline{b}_i werden die Routinen TODMFE und SHFUNT (für Scheiben- und Schalen-elemente) des F.E.-Programms ADINA nach geringfügiger Umgestaltung verwendet.
- Zum Aufbau von \underline{F} werden entsprechend dem Zuordnungsfaktor σ_{ji}^{be} aus (3.10) die Element-Identifikationsmatrizen LM (I,J) verwendet. Für jede Elementgruppe enthält LM zeilenweise die globalen Gleichungsnummern des F.E.-Modells, die den Freiheitsgraden des Elements entsprechen. Die LM-Matrizen werden mit einem Vorlauf des Programms erstellt und auf externen Datenträgern gespeichert. Zum Aufbau von \underline{F} werden sie wieder abgerufen.

5.5 Lösung des Eigenwertproblems

Zur Lösung des Eigenwertproblems (2.19) wird das F.E.-Programm ADINA [32] in fast unveränderter Form eingesetzt.

Im ADINA-Programm werden Steifigkeits- und Massenmatrix als Vektor gespeichert, siehe [33], Abschnitt 6.2.2. Die Matrixelemente an der Hauptdiagonale können durch einen Adressenvektor (MAXA-Vektor) identifiziert werden. Diese Art des Speicherns ermöglicht es, daß nur ein

Profil der Matrizen berücksichtigt wird ("sky-line") außerhalb dessen die Matrizen lediglich Nullen enthalten, die nicht gespeichert werden.

Im Laufe der Bestimmung der Matrix \underline{F} zeigt es sich, welche Freiheitsgrade der Konstruktion hydrodynamisch beeinflusst sind. Damit, und mit dem Profil von Steifigkeits- und Massenmatrix der trockenen Konstruktion, kann ein neues Profil (durch einen entsprechend veränderten MAXA-Vektor) bestimmt werden, das die hydrodynamischen Einflüsse berücksichtigt. Danach genügt es, die Matrix \underline{F} auf die Gestalt der erweiterten Massenmatrix umzuformen, damit beide Matrizen addiert werden können. Diese Umgestaltung von \underline{F} gehört in Abb. 5.1 zum Block HYDRODYNAMISCHE KOPPLUNG.

Das ADINA-Programm bestimmt den MAXA-Vektor im Anfangsstadium der Berechnung, vor dem Aufbau der globalen Matrizen. Wird der erweiterte MAXA-Vektor zu dieser Gelegenheit eingelesen, so kann der Aufbau der Matrizen der Konstruktion schon mit Berücksichtigung des erweiterten Profils geschehen. Eine nachträgliche, zeitaufwendige Umnummerierung des Speichervektors der Matrizen wird dadurch vermieden.

Die auf Vektorspeicherung umgestaltete Matrix \underline{F} wird auch vor dem Aufbau der globalen Matrizen eingelesen, und zwar unmittelbar nachdem die Elemente der Massenmatrix zur Aufnahme der Massenbeiträge der Konstruktionselemente auf Null gesetzt werden.

Danach läuft das ADINA-Programm in gewohnter Weise durch die erforderlichen Schritte zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und -formen nach der Subspace-Iterations-Methode, siehe Bathe [33]. Der Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit, große Eigenwertprobleme lösen zu können, ohne die Anzahl der dynamischen Freiheitsgrade zu reduzieren.

6. BEISPIELRECHNUNGEN

Die Einsatzfähigkeit des in Kapitel 5 beschriebenen Auswertungsverfahrens wird bezüglich Genauigkeit, Konvergenz, Rechenzeiten und Idealisierungsaufwand anhand gezielter Beispiele beurteilt, die mit Rechen- oder Versuchsergebnissen verglichen werden.

Begonnen wird mit den klassischen Versuchen von Lindholm et al. [3] zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen eingetauchter Rechtecksplatten. Die von Morel [34] durchgeführten Versuche und von Volcy et al. [35] mit einem auf Newton und Zienkiewicz [8] gestützten Verfahren berechneten Eigenfrequenzen eingetauchter Platten werden zum Vergleich herangezogen. Zum gleichen Zweck werden die von Chowdhury [10] durchgeführten Versuche und Berechnungen zur Ermittlung der Eigenfrequenzen eines Kastens benutzt. An dem Beispiel eines Ro-Ro-Schiffes [36] wird schließlich der Einsatz der herkömmlichen Lewis-F.E.-Methode zur Bestimmung von Schiffskörperschwingungen mit dem des vorgestellten hydroelastischen Verfahrens verglichen. Die Rechenergebnisse werden mit Versuchsergebnissen [37] verglichen.

6.1 Rechtecksplatte nach den Versuchen von Lindholm et al.

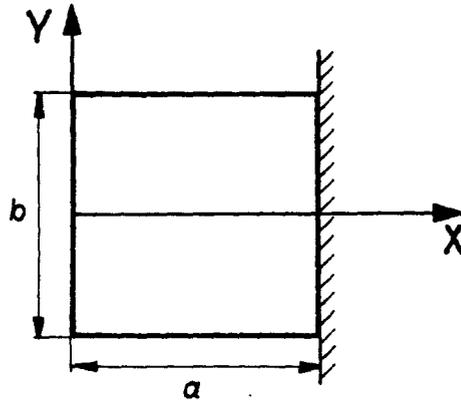
Die Versuche von Lindholm et al. [3] wurden mit einer Reihe unterschiedlicher Platten durchgeführt. Hier wird nur die Platte untersucht, die in [3] unter der Nummer 10 aufgeführt wird. Für diese Platte werden die Knotenlinien der Eigenformen gezeigt (Abb. 9 aus [3]).

Die charakteristischen Daten der zu untersuchenden Platte werden in Abb. 6.1 gezeigt. Zur Vereinfachung wurden die Abmessungen und Materialeigenschaften im englischen Maßsystem beibehalten.

Zur F.E.-Idealisierung werden neunknotige ADINA-Plattenelemente verwendet. Es werden drei verschiedene F.E.-Unterteilungen (U_1 , U_2 und U_3) untersucht (siehe Abb. 6.2), wobei dicke Linien die Elementgrenzen darstellen und jedem Kreuzungspunkt der gezeigten Linien ein Knoten entspricht. Es wurde nur eine Hälfte der Platte idealisiert, da relativ zur Ebene XZ Symmetrie besteht. Es werden zwei unabhängige Rechnungen durchgeführt, eine mit Symmetriestandbedingungen an der Symmetrieebene zur Ermittlung der symmetrischen Eigenformen, die andere mit Antisymmetriestandbedingungen an der Mittelebene. Die ersten fünf Eigenfrequenzen der trockenen Platte werden neben denen der Versuchsergebnisse in Tabelle 6.1 aufgelistet. Die entsprechenden Eigenformen werden in Abb. 6.3 gezeigt.

Eigenfrequenz	gemessen [3]	gerechnet [3]	U_1	U_2	U_3
1	52,9	55,6	55,3	55,3	55,3
2	129,0	136,0	135,4	135,4	135,3
3	326,0	341,0	353,3	339,7	339,1
4	423,0	437,0	449,0	432,0	432,5
5	476,0	496,0	493,8	493,7	491,9

Tabelle 6.1 - gemessene und berechnete Eigenfrequenzen
in Hz der Platte 10 aus [3] - trocken



Abmessungen	$a = 8 \text{ in}$, $b = 8 \text{ in}$
Dicke der Platte	$t = .1048 \text{ in}$
Dichte der Platte	$\rho_K = 7.3240 \times 10^{-4} \text{ lbf. sec}^2/\text{in}^4$
Elastizitätsmodul	$E = 30 \times 10^6 \text{ lbf}/\text{in}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu = .3$
Dichte der Flüssigkeit	$\rho_F = 9.3168 \times 10^{-5} \text{ lbf. sec}^2/\text{in}^4$

Abb. 6.1 - Charakteristische Daten der Platte 10 aus Lindholm [3]

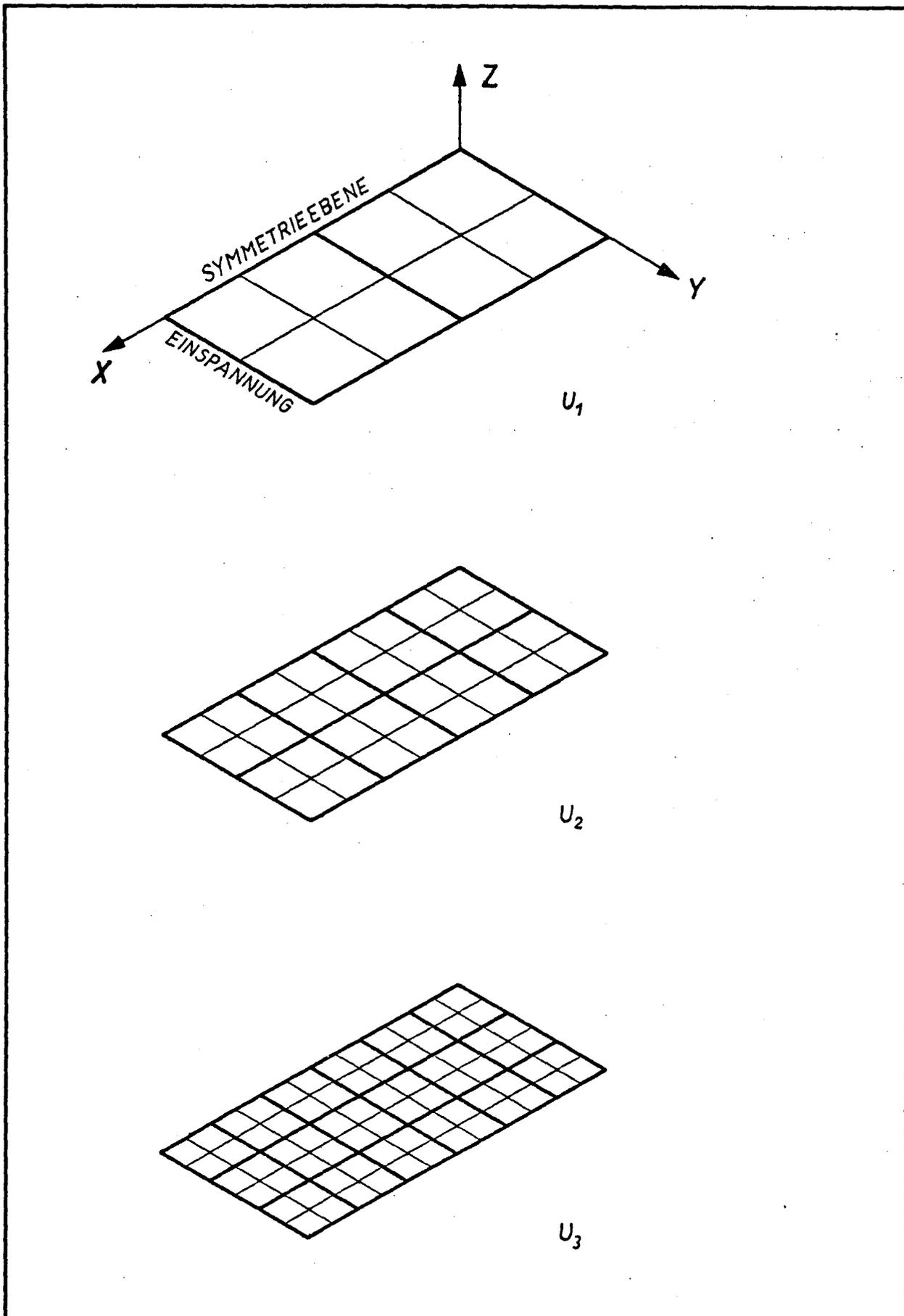


Abb. 6.2 - Verwendete F.E.-Unterteilungen der Platte 10 aus Lindholm [3]

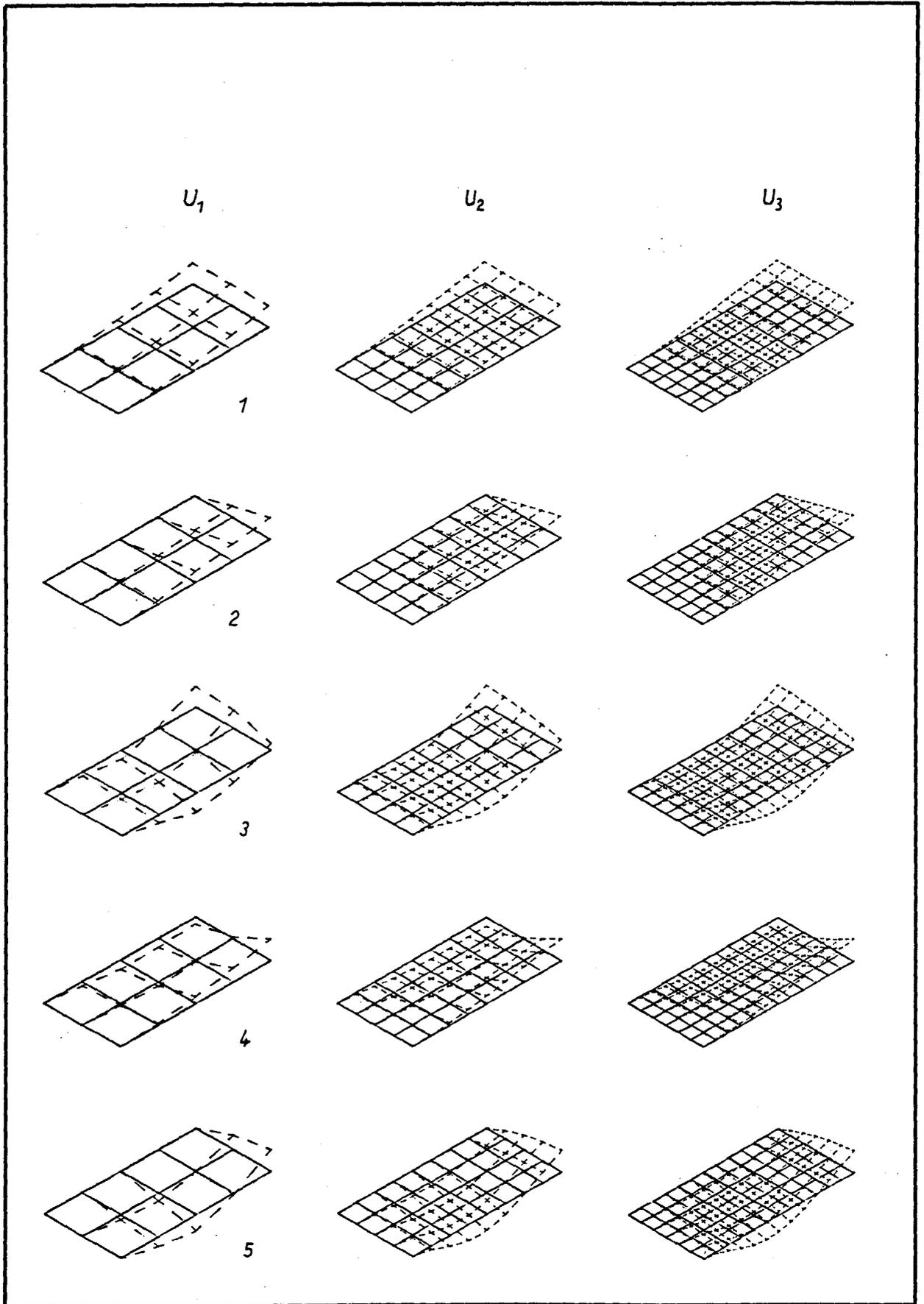


Abb. 6.3 - Eigenformen der trockenen Platte 10 nach Lindholm [3] für die Elementunterteilungen U_1 , U_2 , und U_3 aus Abb. 6.2

Zur Behandlung des hydroelastischen Verhaltens wurde jedes der drei F.E.-Modelle in Quelldreiecke unterteilt; jedes Plattenelement enthält dabei 8 Quallelelemente (siehe Abb. 6.4). Die dicken Linien entsprechen den Grenzen der Plattenelemente.

Es wurde folgende Annahmen zur Umströmung der Platte gemacht:

- Die Grundebene der Platte (globale Ebene $\bar{x}\bar{y}$) wird für den hydrodynamischen Teil des Problems als Antisymmetrieebene betrachtet. Damit genügt es, eine der Seiten der Platte mit Quelldreiecken zu belegen. Da jedoch die Platte mit voller Plattenstärke im elast. Modell enthalten ist, wurde die Dichte der Flüssigkeit ρ_f mit doppeltem Wert genommen.
- Die Ebene $\bar{z}\bar{x}$ wurde als Symmetrie- bzw. Antisymmetrieebene betrachtet, entsprechend den Symmetrie- bzw. Antisymmetriebedingungen des F.E.-Modells.

Die Eigenfrequenzen der benetzten Platte sind in Tabelle 6.2 den entsprechenden Versuchsergebnissen aus [3] gegenübergestellt. Zusätzlich ist die prozentuale Verminderung der Eigenfrequenzen der eingetauchten Platte relativ zu den entsprechenden "trockenen" Eigenfrequenzen aufgelistet.

Die Eigenformen der benetzten Platten werden in Abb. 6.5 gezeigt.

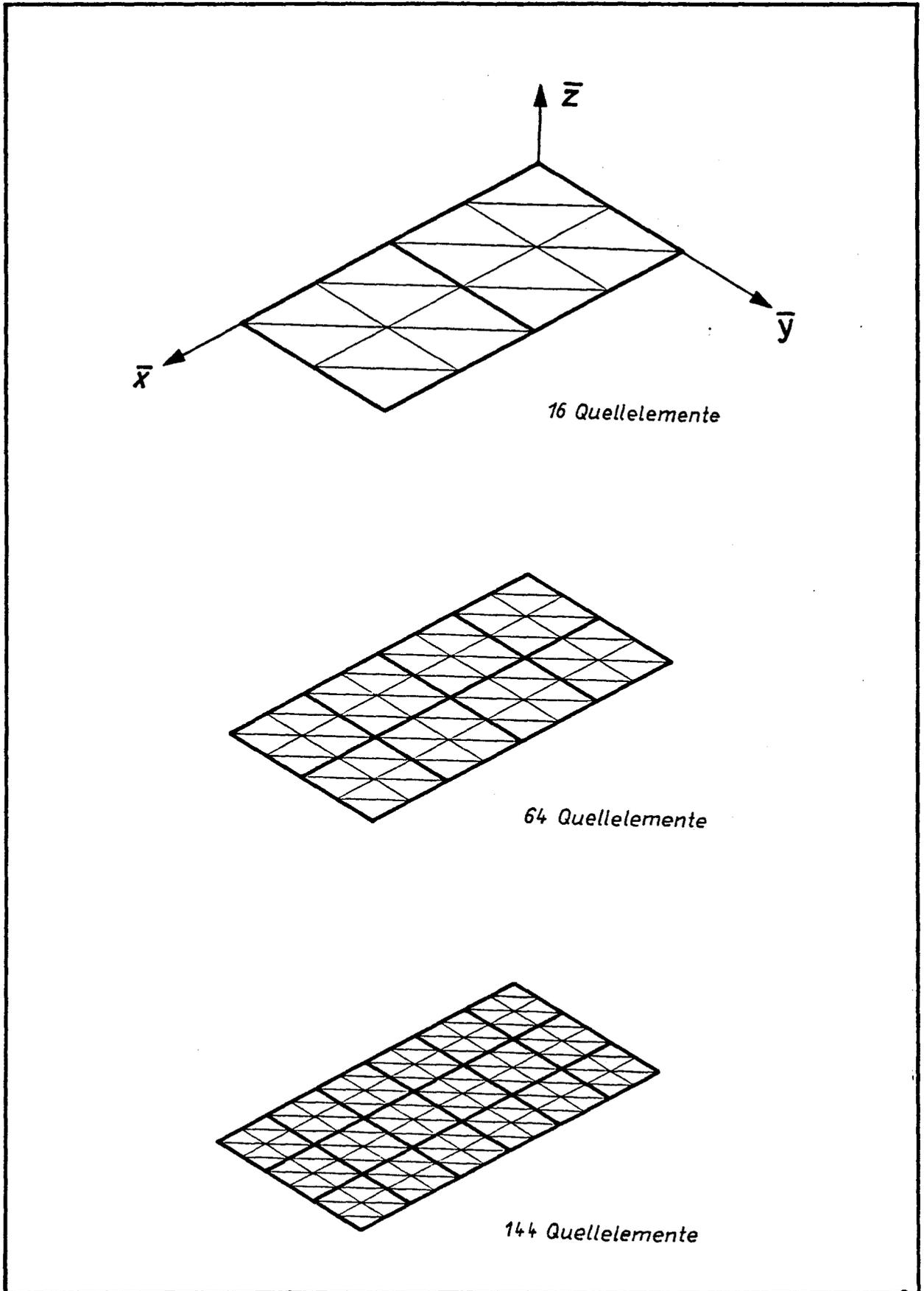


Abb. 6.4 - Quelldreiecksbelegungen der F.E.-Unterteilungen U_1 , U_2 und U_3 der Platte 10 aus Lindholm [3]

Eigen- frequenz (Hz)	gemessen	Verringerung in %	U_1	Verringerung in %	U_2	Verringerung in %	U_3	Verringerung in %
1	23,3	56	23,3	58	24,6	56	25,1	55
2	68,7	47	68,7	49	71,6	47	72,8	46
3	158,0	52	176,4	50	171,9	49	173,6	49
4	234,0	45	257,2	43	247,8	43	251,1	42
5	267,0	46	289,6	41	279,3	43	282,0	43

Tabelle 6.2 - Gemessene und berechnete Eigenfrequenzen in Hz der Platte 10 - benetzt -
und prozentuale Verringerung der Frequenzen gegenüber der Version - trocken .

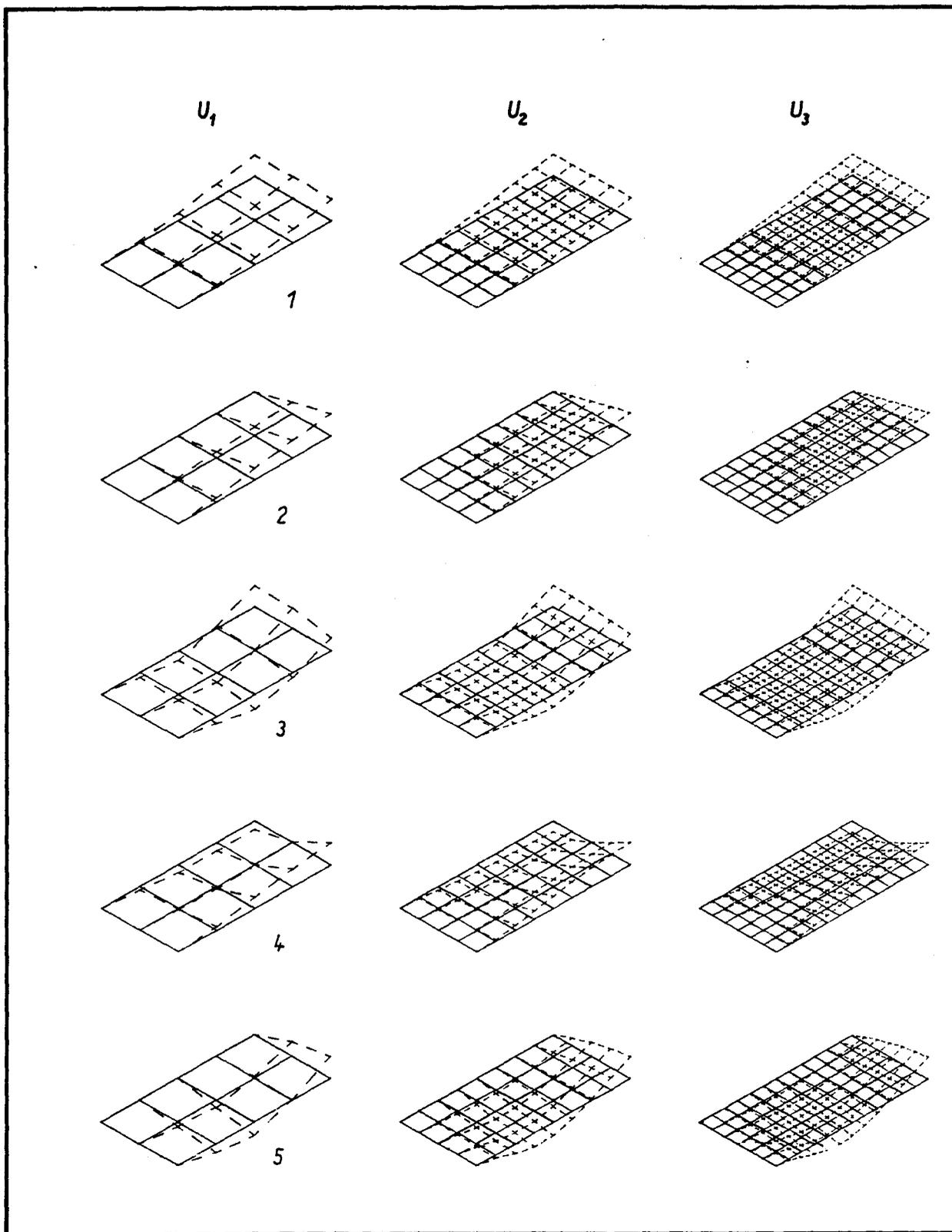


Abb. 6.5 - Eigenformen der benetzten Platte 10 nach Lindholm [3] für die Elementunterteilungen U_1 , U_2 und U_3 aus Abb. 6.2

Um die Knotenlinien der verschiedenen Eigenformen besser erkennen zu können, wurden zusätzliche Bilder mit ausgewählten Blickrichtungen erstellt. Die Platten werden aus Richtung X für die Eigenformen 3 und 4 oder aus Richtung Y für die Eigenform 5 betrachtet. Bei diesen Blickrichtungen werden die Abmessungen $b/2$ bzw. a nicht verzerrt dargestellt. In Abb. 6.6 und 6.7 werden die Knotenlinien der Eigenschwingungsformen (dick) für das trockene bzw. hydroelastische Verhalten gezeigt. Lediglich Eigenformen 3, 4 und 5 sind abgebildet, da sich bei Eigenformen 1 und 2 die Knotenlinien durch die Anwesenheit der Flüssigkeit nicht verschieben.

Interpretation der Ergebnisse

Aus dem Vergleich zwischen Abb. 6.6 und 6.7 und Abb. 9 aus [3] sind für die F.E.-Unterteilung U_1 gewisse Unterschiede im Verlauf der Knotenlinien zu erkennen. Die Übereinstimmung verbessert sich bei F.E.-Unterteilung U_2 für die Knotenlinien der trockenen Platten. Unterschiede sind aber noch bemerkbar für die benetzte Platte. Für die feine F.E.-Unterteilung U_3 bestehen schließlich keine meßbaren Unterschiede im Verlauf der Knotenlinien.

Aus Tabelle 6.1 kann man ersehen, daß die Eigenfrequenzen der F.E.-Idealisierungen auch bei Verfeinerung der Unterteilung fast unverändert bleiben, aber immer höher als die entsprechenden Meßwerte liegen. Dafür ist die Übereinstimmung mit den nach [3] gerechneten Werten sehr gut. Dies weist darauf hin, daß die Rechenmodelle den Versuchsaufbau nicht vollständig erfassen. Wegen der Unterschiede zwischen gemessenen und gerechneten Eigenfrequenzen werden in Tabelle 6.2 nicht nur die absoluten Werte der Eigenfrequenzen der benetzten Platten, sondern auch deren Verringerungen relativ zu den entsprechenden Frequenzwerten der trockenen Platten gezeigt.

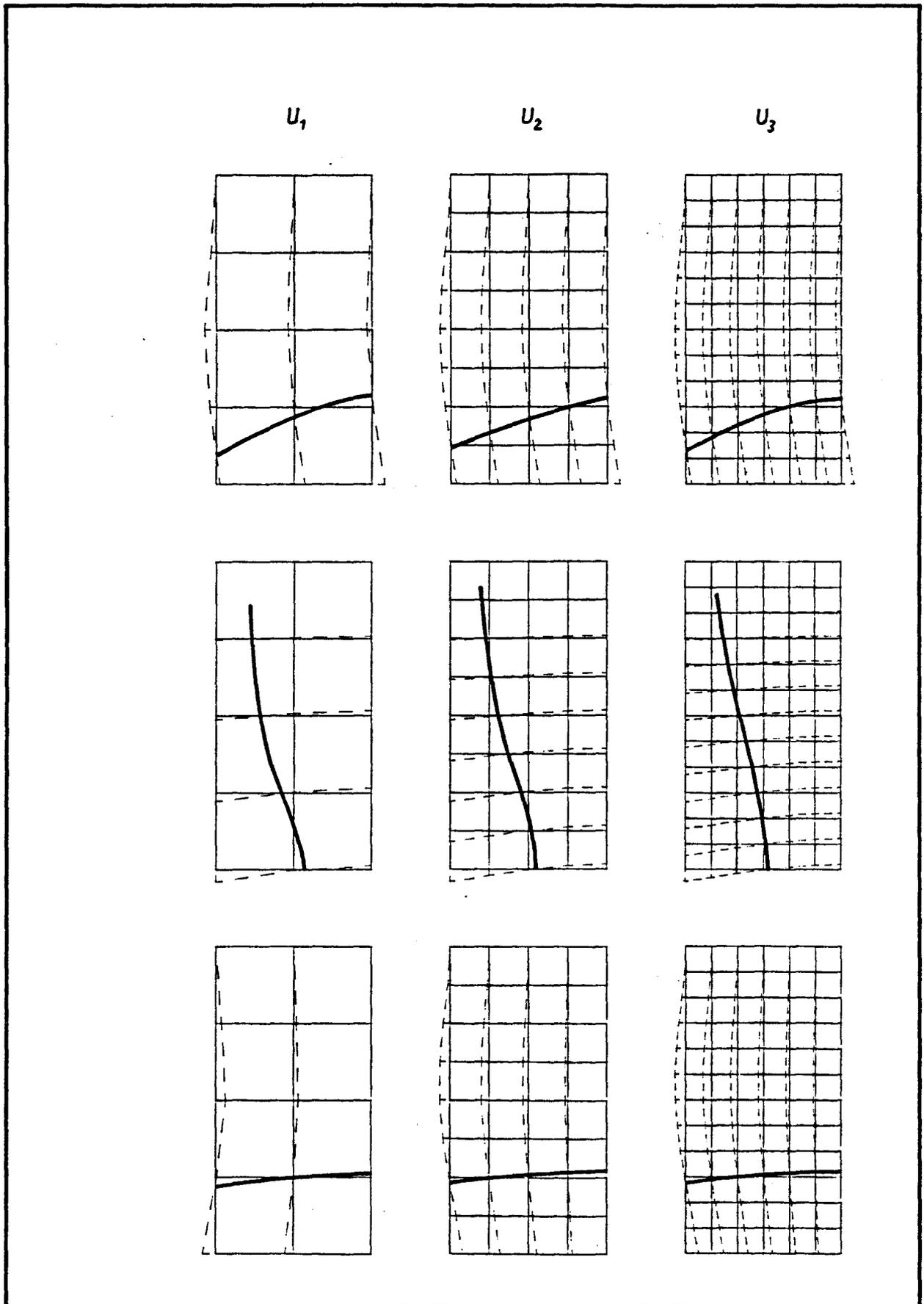


Abb. 6.6 - Knotenlinien der Eigenformen der trockenen Platte 10 nach Lindholm [3] für die F.E.-Unterteilungen U_1 , U_2 und U_3 .

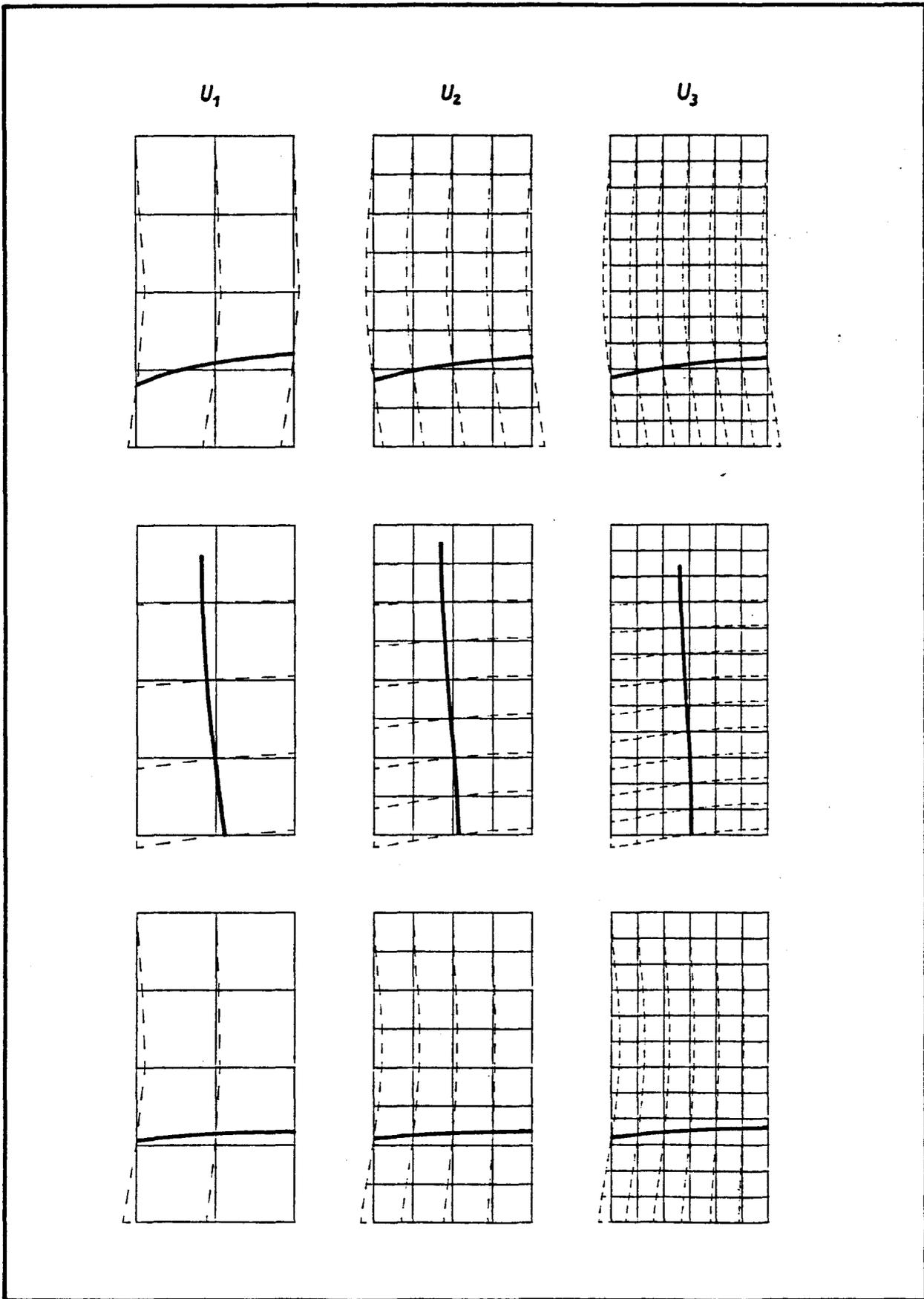


Abb. 6.7 - Knotenlinien der Eigenformen der benetzten Platte 10 nach Lindholm [3] für die F.E.-Unterteilungen U_1 , U_2 und U_3 .

An den prozentualen Verringerungen der Frequenzen aus Tabelle 6.2 kann ersehen werden, daß unter Verfeinerung der Elementunterteilung Konvergenzverhalten besteht. Die gerechneten Verringerungen der Frequenzen niedriger Schwingungsgrade sind den gemessenen näher als die der höheren Schwingungsgrade. Dies ist dadurch zu erklären, daß für die komplexeren Eigenformen der höheren Schwingungsgrade die Belegung mit Flüssigkeitselementen noch nicht ausreichend fein ist. Sowohl an den prozentualen Verringerungen der Eigenfrequenzen als auch an den Verschiebungen der Eigenformen zeigt sich, daß die Singularitäten-/F.E.-Methode sehr genaue Ergebnisse liefert.

6.2 Rechtecksplatte nach Volcy et al. [35]

Volcy et al. [35] führten Untersuchungen und Berechnungen mit der Methode der Flüssigkeits-Finite-Elemente-Methode (Fluid Finite Element Method), kurz F.F.E.M., durch. In diesem Abschnitt wird der Vergleich mit dem Beispiel der in [35], Abb. 5, gezeigten Platte beschrieben.

In Abb. 6.8 (a) werden die charakteristischen Daten dieser Platte gezeigt. Die halbe Platte wurde in fünf neunknotige ADINA-Plattenelemente unterteilt. Jedes Plattenelement wurde mit acht Flüssigkeitselementen belegt, wodurch vierzig zu bestimmende Quellstärken entstanden (siehe Abb. 6.8 (b)).

Die Idealisierung der Flüssigkeit, ebenfalls für eine Darstellung der halben Platte mit fünf Plattenelementen, wird für die F.F.E.M.-Untersuchungen von Volcy et al. [35] in Abb. 6.8 (c) wiedergegeben.

Zum Vergleich wurde die trockene und die vollgetauchte Version der Platte gerechnet. In Tabelle 6.3 sind die Versuchs- und Rechenergebnisse nach Volcy et al. [35] wie auch die Rechenergebnisse nach der Singularitäten-/F.E.-Methode aufgeführt:

	trocken	benetzt	Verringerung in %
gemessen [35]	12,8	5,3	59
F.F.E.M. [35]	13,91	6,42	54
S.F.E.M.	13,84	5,49	60

Tabelle 6.3 - Erste Eigenfrequenz einer in Abb. 6.8 gezeigten Rechtecksplatte nach Volcy et al. [35]

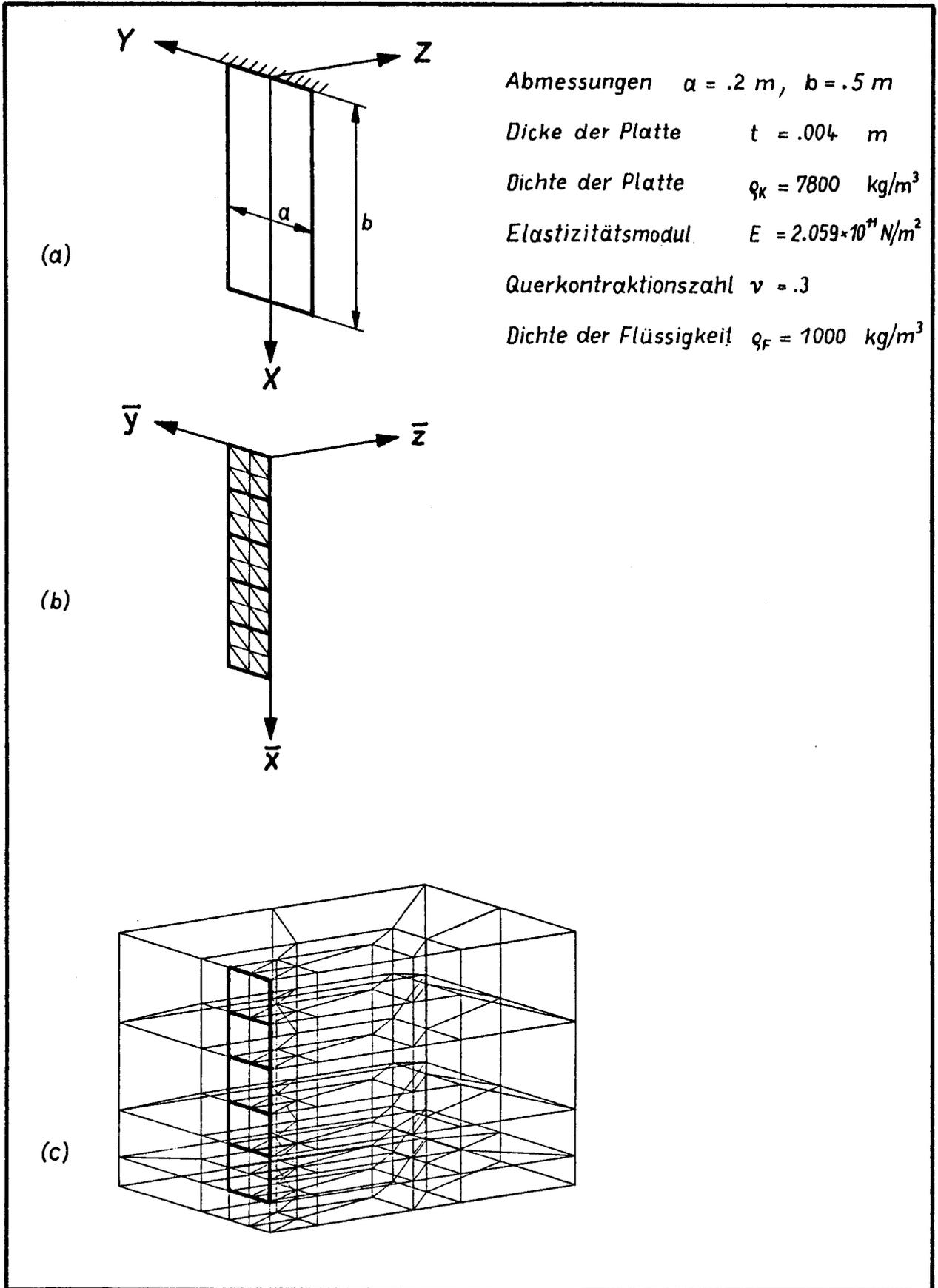


Abb. 6.8 - Eingespannte Rechtecksplatte nach Volcy [35]
a) charakteristische Daten
b) Idealisierung der Flüssigkeit nach der Singularitäten-/ F.E.-Methode
c) Idealisierung der Flüssigkeit nach der F.F.E.M. [35]
Abb. 9

Interpretation der Ergebnisse

Der geringere Idealisierungsaufwand bei der S.F.E.M. ist bei Vergleich von Abb. 6.8 (b) und (c) offensichtlich.

An den prozentualen Verringerungen aus Tabelle 6.3 ist bei der S.F.E.M. eine bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Ergebnissen festzustellen als bei der F.F.E.M.

Die (geringfügige) Überschätzung der Verringerung bei der S.F.E.M. bezogen auf die gemessenen Ergebnisse kann dadurch erklärt werden, daß bei der Kollokationsmethode die hydrodynamischen Massen überschätzt werden, wie es in Abschnitt 4.5 zu sehen ist.

Bei der F.F.E.M. werden die Verringerungen unterschätzt. Eine Erklärung dafür ist schwierig zu finden, weil zwei entgegengesetzte Effekte eine Rolle spielen: Einerseits bewirkt der begrenzte Flüssigkeitsraum der F.F.E.M.-Idealisierung eine Erhöhung der hydrodynamischen Masse, andererseits beruht die F.F.E.M. auf einer Variationsformulierung und muß deshalb eine obere Grenze zur gesuchten Lösung liefern.

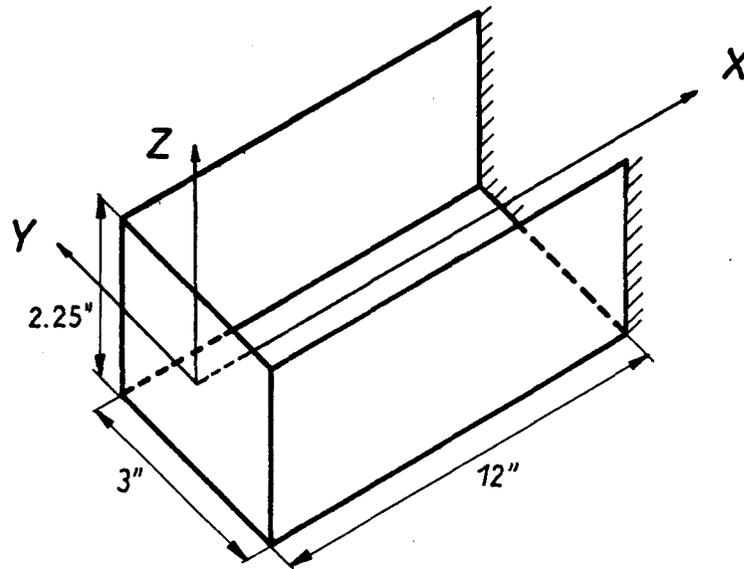
6.3 Prismatischer Kasten nach Chowdhury [10]

Chowdhury [10] führte Berechnungen und Untersuchungen mit einem frei schwimmenden und einem einseitig eingespannten, halbgetauchten prismatischen, oben offenen Kasten durch.

Zum Vergleich des von Chowdhury verwendeten hydroelastischen Verfahrens mit dem hier entwickelten wurde das Beispiel des eingespannten Kastens bevorzugt. Die charakteristischen Daten dieses Kastens werden in Abb. 6.9 gezeigt, wobei wieder zur Vereinfachung des Vergleichs das englische Maßsystem beibehalten wurde.

Zur F.E.-Idealisierung wurden das neunknotige ADINA-Plattenelement und das SAP-Plattenelement benutzt. Dank der Symmetrie relativ zur XZ-Ebene war nur eine Hälfte des Kastens zu idealisieren. Die entsprechenden Elementunterteilungen werden in Abb. 6.10 für den halben Kasten gezeigt. Der Übersichtlichkeit wegen wurde eine von Abb. 6.9 verschiedene Blickrichtung gewählt. Die Unterteilung U_1 wurde mit SAP-Elementen, die Unterteilungen U_2 und U_3 wurden mit ADINA-Elementen dargestellt.

Die Eigenfrequenzen des trockenen Kastens werden in Tabelle 6.4 neben den gerechneten und gemessenen Werten von Chowdhury [10] aufgeführt. Die Bezeichnungen S und A beziehen sich auf die Gestalt der Eigenform (symmetrisch und antisymmetrisch relativ zur Ebene ZX).



Plattendicke	$t = .0625$	in
Dichte der Konstruktion	$q_k = 7.3240 \times 10^{-4}$	lbf. sec ² /in ⁴
Elastizitätsmodul	$E = 30 \times 10^6$	lbf/in ²
Querkontraktionszahl	$\nu = .3$	
Dichte der Flüssigkeit	$q_f = 9.3168 \times 10^{-5}$	lbf. sec ² /in ⁴

Abb. 6.9 - Charakteristische Daten eines eingespannten prismatischen offenen Kastens nach Chowdhury [10]

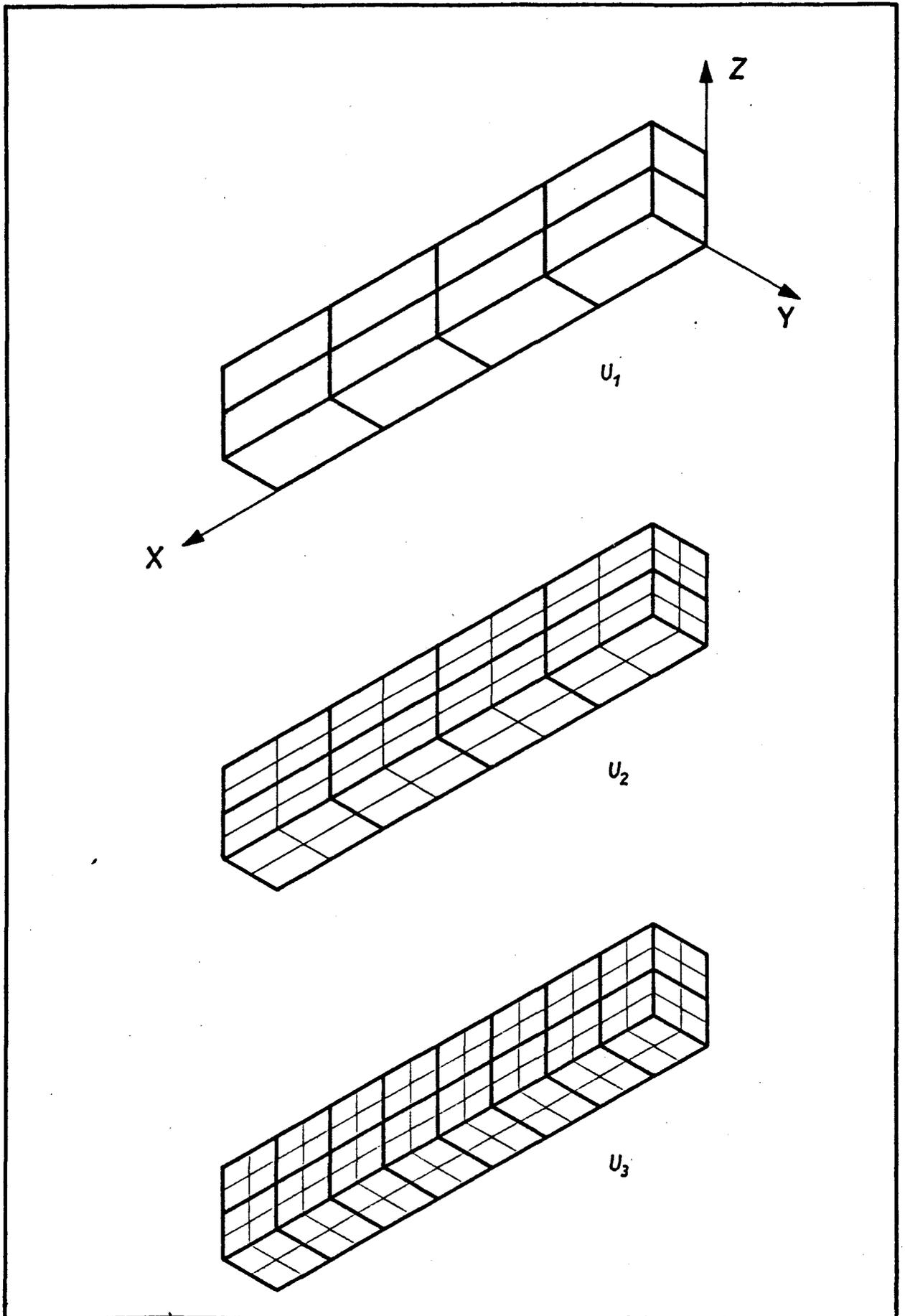


Abb. 6.10 - Verwendete F.E.-Unterteilungen des prismatischen Kastens nach Chowdhury [10]

Eigenfrequenz [Hz]	gemessen [10]	gerechnet [10]	SAP U_1	ADINA U_2	ADINA U_3	neue Zuordnung der Meßwerte
1	272	273 S	281 S	251 A	251 A	-
2	-	286 A	297 A	280 S	280 S	272
3	403	410 A	436 A	410 A	410 A	403
4	445	430 S	454 S	450 S	447 S	445
5	558	529	552 A	487 S	486 S	-
6	-	547	576 S	561 A	557 A	558
7	691	672	624 S	729 S	695 S	691
8	757	757	676 A	819 A	775 A	757
9	-	827	1063 S	1063 S	997 S	992
10	992	887	1132 A	1129 A	1087 A	1058

Tabelle 6.4 - Eigenfrequenzen in Hz eines trockenen prismatischen Kastens [10]

S = Symmetrische Eigenform

A = Antisymmetrische Eigenform

Die ersten vier Eigenformen werden in Abb. 6.11 für die Unterteilungen U_1 und U_3 gezeigt. Die Eigenformen der Unterteilung U_2 sind denen der Unterteilung U_3 sehr ähnlich und werden deswegen nicht gezeigt.

Aus Tabelle 6.4 ist zu erkennen, daß die Rechenergebnisse von Chowdhury [10] und Unterteilung U_1 in den ersten Frequenzen weitgehend übereinstimmen, was auch durch Vergleich von Abb. 6.11 und Abb. 12, 13, 14 und 15 aus [10] bestätigt wird. Dies gilt jedoch nicht für die Ergebnisse der Unterteilungen U_2 und U_3 . Die mit diesen Systemen berechnete niedrigste Frequenz entspricht einer antisymmetrischen Eigenform. Aus den sehr ähnlichen Ergebnissen der Unterteilungen U_2 und U_3 ist zu schließen, daß das von Chowdhury benutzte F.E.-Modell ähnlich wie das Modell U_1 zu grob war. Es wird vermutet, daß Chowdhury die Meßergebnisse seinen Rechenergebnissen zuzuordnen versuchte, da gemessene Eigenformen von ihm nicht angegeben werden. Die genaue Messung von Schwingungsformen erfordert eine aufwendige Erfassung der phasengerechten Zuordnung von Schwingungsamplituden an verschiedenen Stellen des Meßkörpers. Die Beschreibung der Versuche in [10] gibt darauf keinen Hinweis. Daher wird angenommen, daß die angegebene Zuordnung nicht korrekt ist. Der Versuch einer neuen Zuordnung ist in der letzten Spalte auf der rechten Seite von Tabelle 6.4 zu finden. Es wurde darauf geachtet, daß die Rechenwerte erwartungsgemäß höher als die entsprechenden Meßwerte sein sollten; in Chowdhury's Zuordnung war dies nicht immer der Fall (siehe Frequenzen 4, 5, 7, 10). Diese neue Zuordnung ist für Unterteilung U_3 geeignet und zeigt sehr gute Übereinstimmung. Bei Unterteilung U_2 sind noch Abweichungen festzustellen.

Daraus ist zu entnehmen, daß Unterteilung U_3 fein genug zur Ermittlung der ersten 10 Eigenfrequenzen ist und Unterteilung U_1 wie auch Chowdhury's F.E.-Modell zu grob sind. Für einen relativ einfachen Kasten ist also ein F.E.-Modell

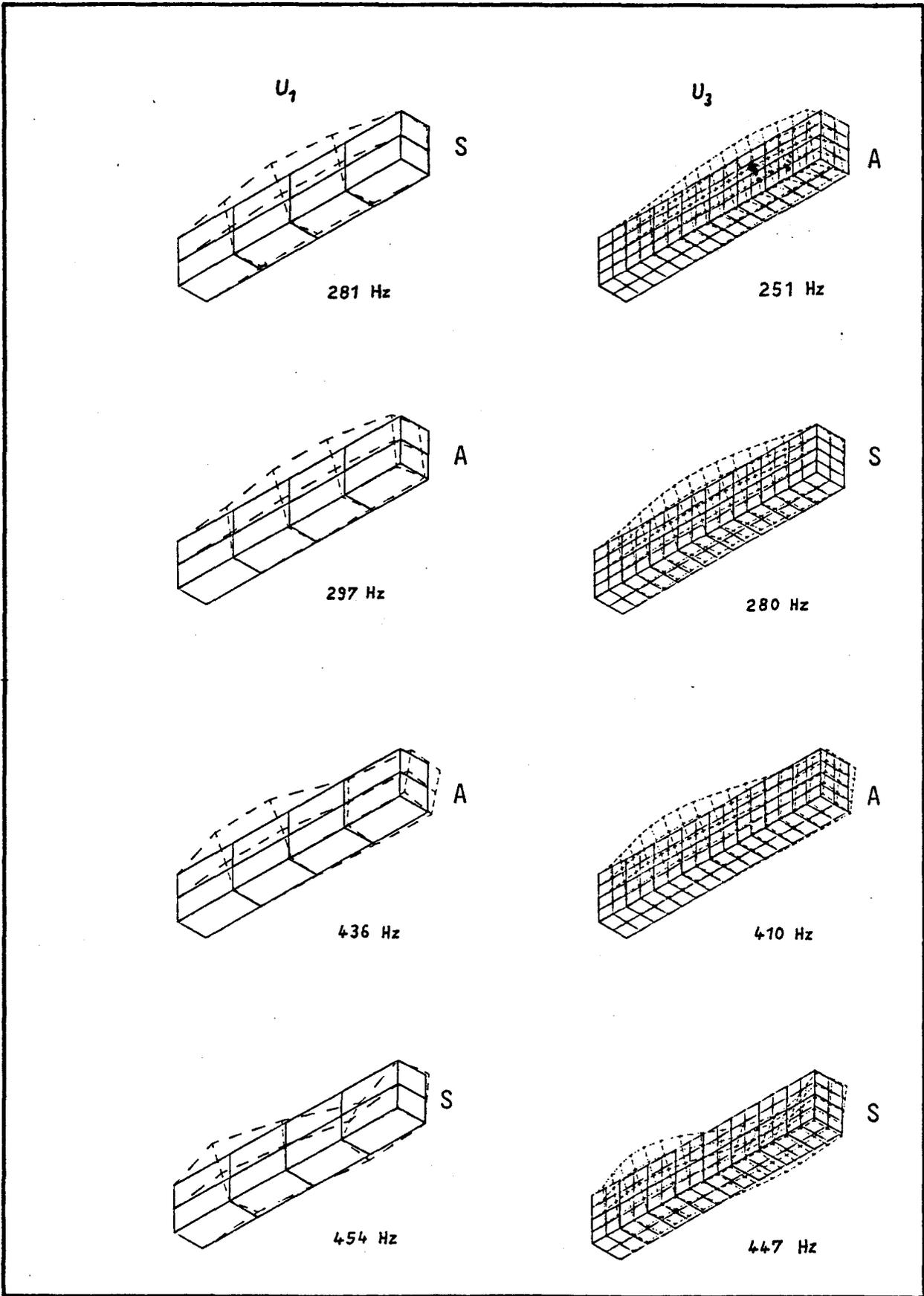


Abb. 6.11 - Erste von vier Eigenformen des trockenen prismatischen Kastens nach Chowdhury [10] für Idealisierung und

mit über 500 Freiheitsgraden erforderlich, um die ersten 10 Eigenfrequenzen genau berechnen zu können.

Zur Bestimmung des hydroelastischen Verhaltens wurden nur die F.E.-Modelle mit den Unterteilungen U_2 und U_3 benutzt. Die zur Darstellung der Umströmung benötigten Queldreiecke werden für F.E.-Unterteilungen U_2 und U_3 in Abb. 6.12 gezeigt. Die Koordinatenachsen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ des globalen Koordinatensystems der Flüssigkeit sind ebenfalls dargestellt.

Da bei den Versuchen der Kasten an einer Wand des Flüssigkeitsbehälters eingespannt war, wurde eine Spiegelung (Symmetrie) der Umströmung an der Einspannebene (Ebene $\bar{y}\bar{z}$ in Abb. 6.12) angenommen. Sinngemäß zu den erlaubten Bewegungen der Konstruktion wird an der Symmetrieebene $\bar{x}\bar{z}$ Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Umströmung angenommen. Zusätzlich wurde Antisymmetrie relativ zur freien Wasseroberfläche (Ebene $\bar{x}\bar{y}$) angesetzt.

Die Eigenfrequenzen des benetzten Kastens werden in Tabelle 6.5 wiederum den Meßergebnissen aus [10] gegenübergestellt. Da in [10] keine Angaben über Eigenformen gemacht wurden, muß der Versuch einer Zuordnung zwischen Meß- und Rechenergebnissen über eine Anpassung der gefundenen Eigenfrequenzen erfolgen. Dazu wurde wieder überlegt, daß die gerechneten Eigenfrequenzen etwas über den ihnen entsprechenden Versuchswerten liegen müssen. Die erhaltene Zuordnung scheint zufriedenstellend zu sein.

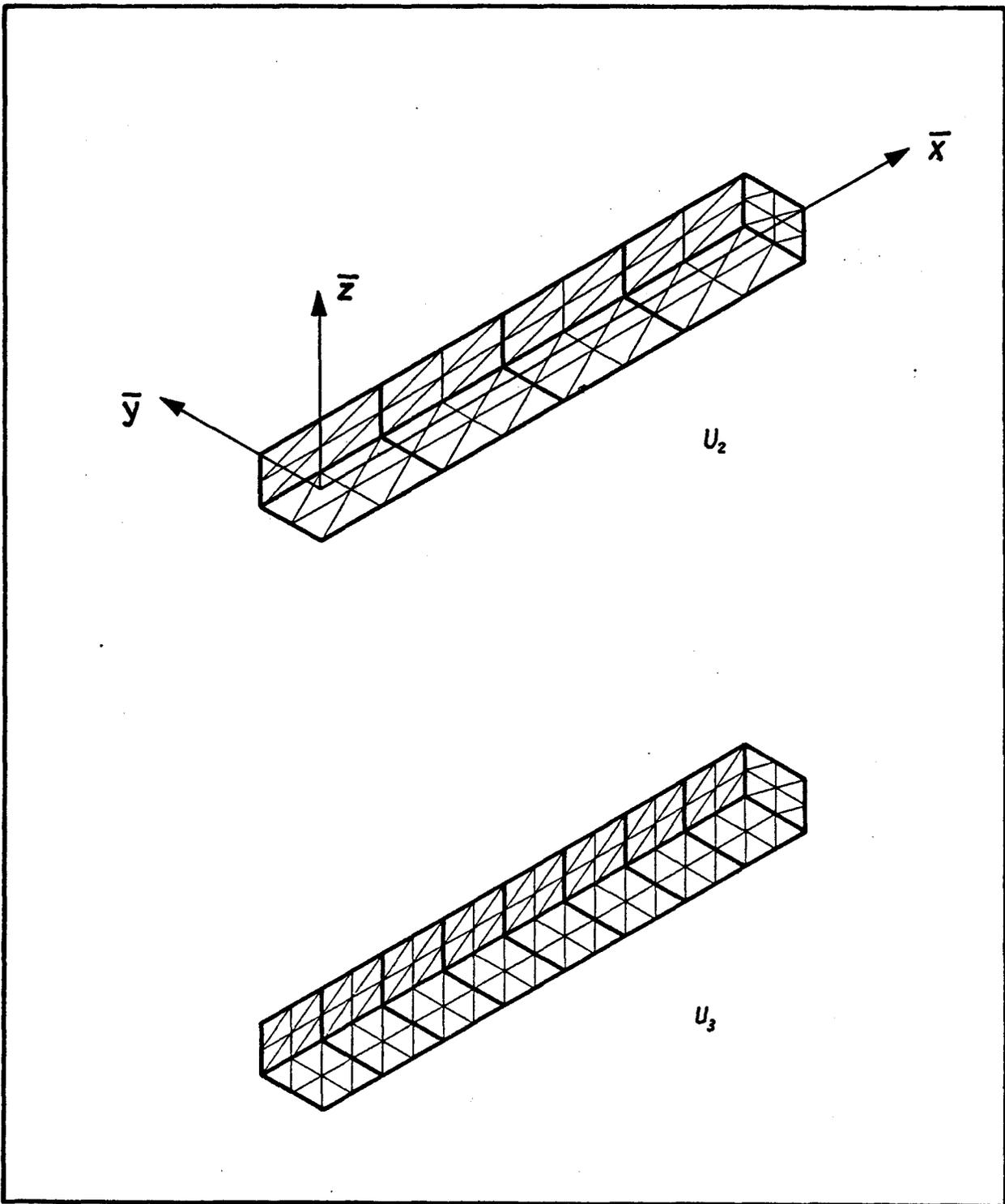


Abb. 6.12 - Quelldreiecksbelegung der F.E.-Unterteilungen U_2 und U_3 des Kastens nach Chowdhury [10]

Eigenfrequenz	U ₂	U ₃	Meßergebnisse [10]	Verringerung in % U ₂	Verringerung in % U ₃	Verringerung in % Meßergebnisse
1	221	234 A	235	12	7	-
2	245	245 S	-	13	13	-
3	357	353 S	361	27	27	-
4	383	396 A	391	7	3	3
5	432	419 S	409	4	6	8
6	525	538 A	538	7	10	-
7	666	633 S	630	9	9	9
8	686	683 S	-	-	-	-
9	768	750 A	738	6	3	3
10	972	1031 A	884	14	5	-

Tabelle 6.5 - Eigenfrequenzen (Hz) des benetzten Kastens nach [10]

In Abb. 6.13 und 6.14 werden auf der linken Seite die Eigenformen des trockenen Kastens und auf der rechten Seite die des benetzten Kastens gezeigt. Dabei wurde versucht, Eigenformen vergleichbaren Charakters für trockene und benetzte Konstruktion einander zuzuordnen.

Der fünfte Schwingungsgrad des trockenen Kastens entspricht nur angenähert dem dritten Schwingungsgrad des benetzten Kastens, wobei der erste Grad der Kragarmverformung (erkennbar an der vertikalen Verschiebung der Kante Längswand/Boden) bei beiden Eigenformen überwiegt. Für eine Schwingungsform dieser Art ist die hydrodynamische Masse größer, was die im Vergleich zu den anderen Eigenformen unverhältnismäßig starke Verringerung der Eigenfrequenz vom trockenen zum benetzten Kasten erklärt. Für die höheren Schwingungsgrade wird eine eindeutige Zuordnung der Schwingungsformen schwieriger.

Um die relative Genauigkeit der Flüssigkeitsidealisierung beurteilen zu können, werden in Tabelle 6.5 drei zusätzliche Spalten für die prozentuale Verringerung der Frequenzen durch den Einfluß der umgebenden Flüssigkeiten vergleichbarer Eigenformen angegeben. Sowohl für Unterteilung U_2 als auch - entsprechend besser - für U_3 sind gute Übereinstimmungen mit den Verringerungen der Eigenfrequenzen der Versuchsergebnisse festzustellen. Es wird aber noch einmal darauf hingewiesen, daß die Eigenformen der Versuchsergebnisse nicht angegeben wurden, wodurch die vorgenommenen Zuordnungen zu den Ergebnissen aus [10] Mutmaßungen darstellen.

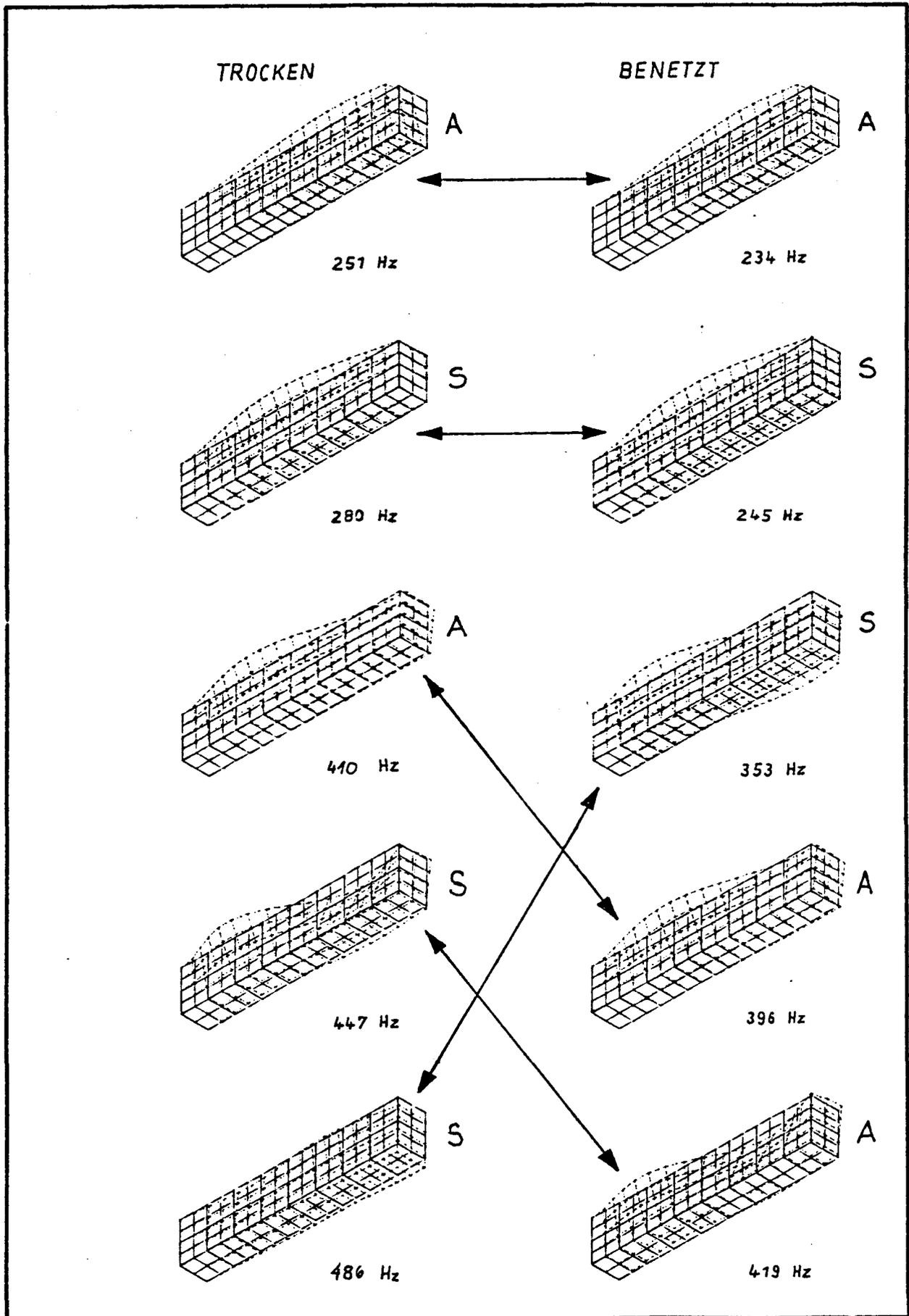


Abb. 6.13 - Eigenformen des benetzten und des trockenen Kastens für F.E.-Unterteilung U_3 nach Chowdhury [10]

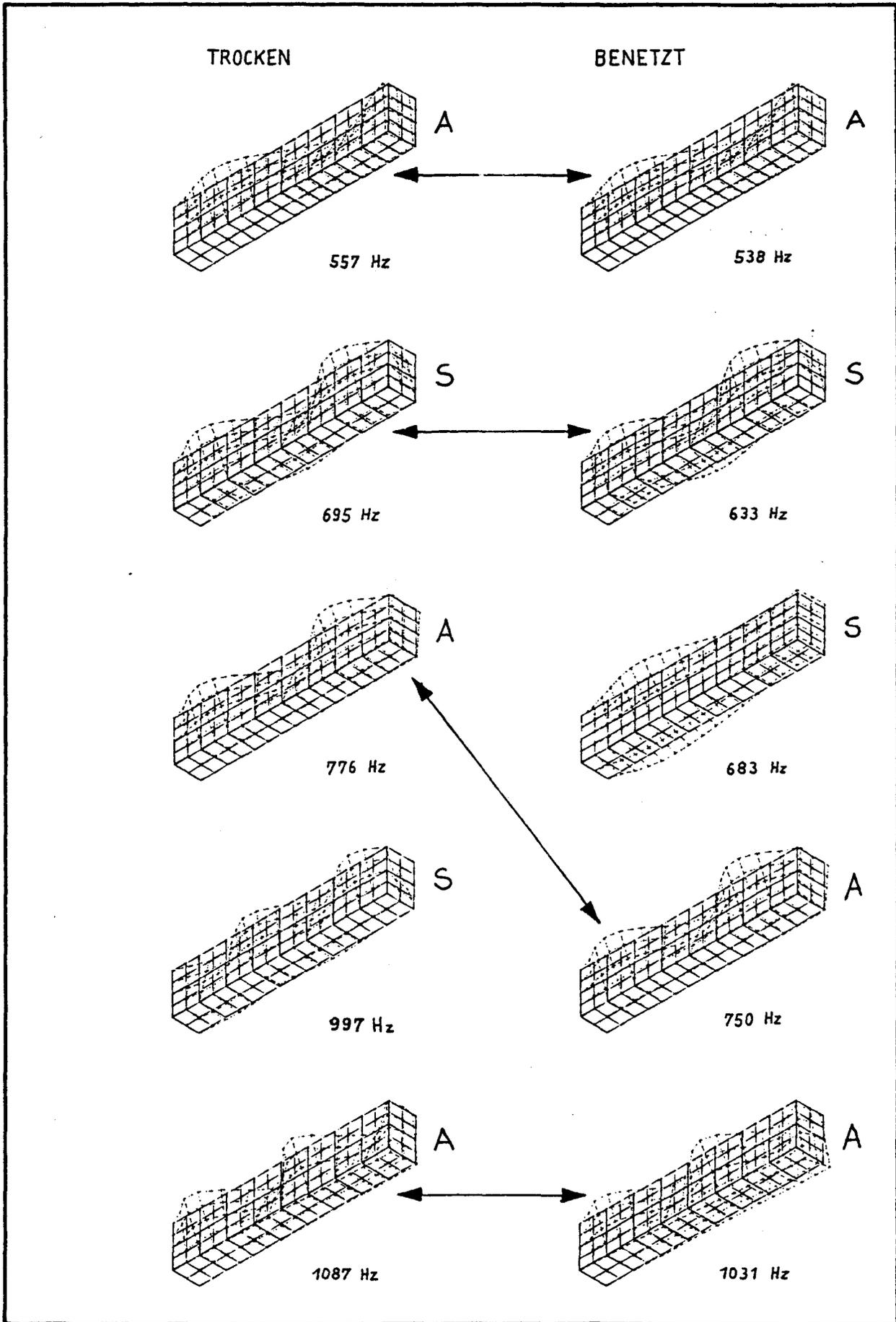


Abb. 6.14 - Eigenformen des benetzten und des trockenen Kastens für F.E.-Unterteilung U_3 nach Chowdhury [10]

6.4 Ro-Ro-Schiff nach [36]

Als Beispiel für die Anwendung der S.F.E.M. für die Berechnung von Schiffsschwingungen wurde das Ro-Ro-Schiff MS "Reichenfels" [36], für das bereits Rechen- und Versuchsergebnisse vorliegen, gewählt. Versuchsergebnisse sind in [37] beschrieben. Berechnungen mit den F.E.-Programmen GLSAP [38] und GLADINA [33] bei Ansatz hydrodynamischer Massen nach Lewis sind in [39] beschrieben.

Zur Bestimmung des hydroelastischen Verhaltens wurde das F.E.-Modell aus [39] verwendet. Dieses F.E.-Modell besteht ausschließlich aus Scheiben- und Stabelementen. Die Außenhaut wurde mit drei- und vierknotigen Scheibenelementen idealisiert. In Abb. 6.15 ist die F.E.-Idealisierung einer Hälfte der Außenhaut gezeigt. Dieses Bild gibt einen Eindruck von dem gewählten Unterteilungsgrad.

Zur Bestimmung der Umströmungen wurde die Außenhaut in Quelldreiecke unterteilt, siehe Abb. 6.16. Diese Unterteilung wurde automatisch mit einem Datengenerierungsprogramm aus den Eingabedaten des F.E.-Modells erstellt. Die benetzten Scheibenelemente wurden in ein oder zwei Quelldreiecke entsprechend Abb. 5.2 unterteilt. Die Zuordnung zwischen Konstruktions- und Flüssigkeitselementen geht automatisch aus der Datengenerierung hervor.

Die Bedingung $\phi = 0$ an der freien Wasseroberfläche wurde durch Annahme von Antisymmetrie der Umströmung relativ zur Ebene $\bar{x}\bar{y}$ erzwungen.

Die ersten 15 Eigenfrequenzen sind in Tabelle 6.6 neben denen der Berechnungen aus [39] und Versuchsergebnissen aus [37] gegenübergestellt.

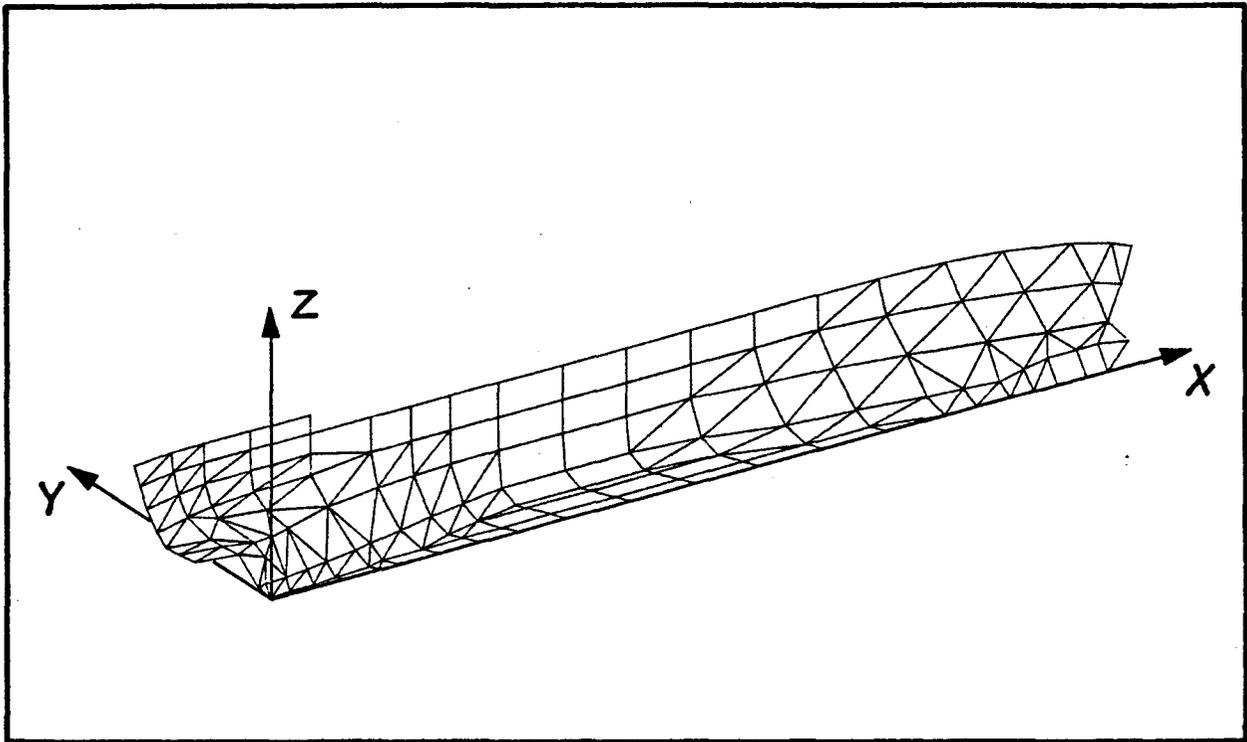


Abb. 6.15 - F.E.-Idealisierung (Hälfte) der Außenhaut der MS "Reichenfels" [36]

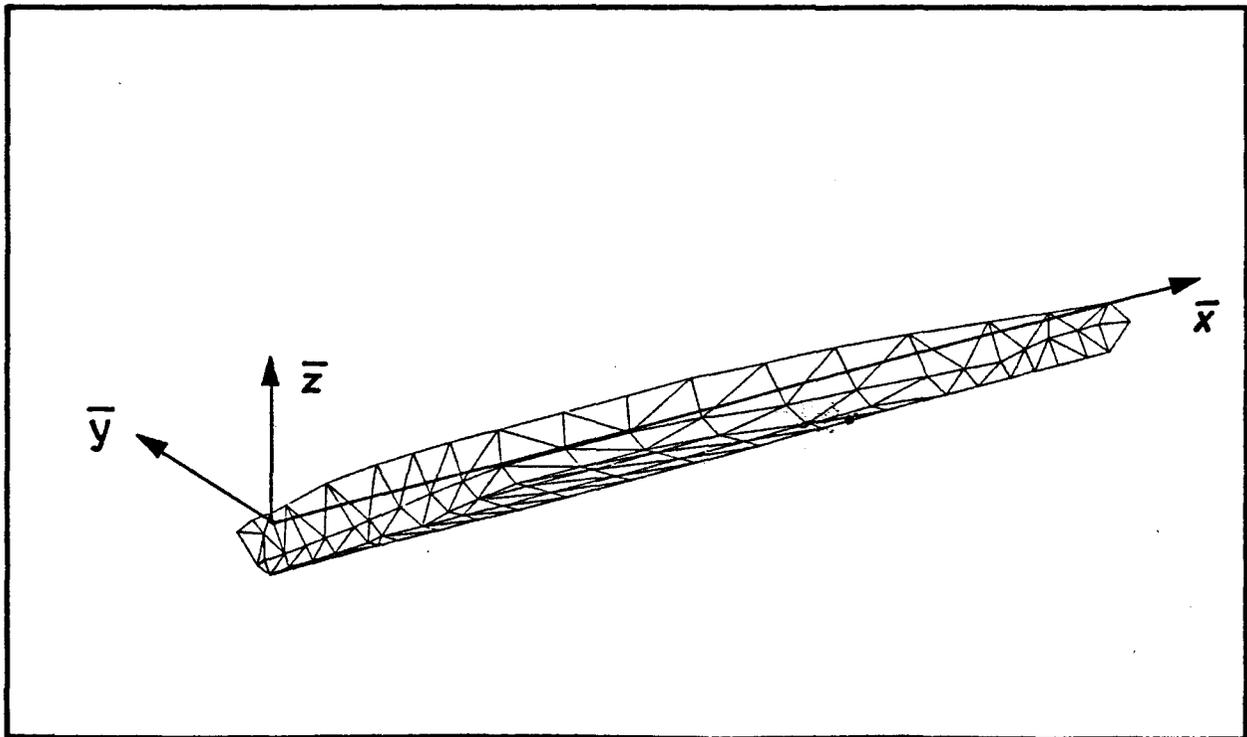


Abb. 6.16 - Quelldreieckbelegung der F.E.-Idealisierung der Außenhaut der MS "Reichenfels" [36]

Die in Tabelle 6.6 beschrifteten Eigenformen sind in Abb. 6.17 bis 6.23 dargestellt. Oben links ist der hinterste, unten rechts der vorderste Querschnitt dargestellt. Die Längsansichten und -schnitte sind in Abb. 6.17 beschriftet.

Die konventionellen Berechnungen mit GLSAP und GLADINA liefern weitgehend identische Ergebnisse. Die Analyse mit GLADINA wurde bei Ansatz gleicher Massenbelegung wie bei der GLSAP-Berechnung durchgeführt, um Einflüsse, die auf das Verhalten der unterschiedlichen Scheibenelementmodelle beider Programme zurückzuführen sind, zu beseitigen. Nennenswerte Unterschiede ergeben sich erst bei höheren Schwingungsgraden.

Eigenformen	FREQUENZEN in Hz			
	S.F.E.M.	GLSAP [39]	GLADINA	Versuch [37]
I.Gr. Vertikal	1,1	1,3	1,3	1,1
I.Gr. Horizontal	1,6	1,9	1,9	-
	2,2	2,2	2,2	-
II.Gr. Vertikal	2,2	2,4	2,4	2,2
I.Gr. Torsion	3,0	2,9	2,9	2,9
III.Gr. Vertikal	3,3	3,5	3,4	-
II.Gr. Horizontal	3,4	3,7	3,7	-
	4,3	4,1	4,1	-
IV. Gr. Vertikal	4,4	4,4	4,3	-
	4,6	4,7	4,7	-
	5,1	5,3	4,9	-
	5,7	5,4	5,5	-
	5,7	5,7	5,5	-
	5,8	5,9	5,9	-
	6,4	6,1	6,3	-

Tabelle 6.6

Vergleich der gerechneten mit gemessenen Eigenfrequenzen des MS - "Reichenfels"

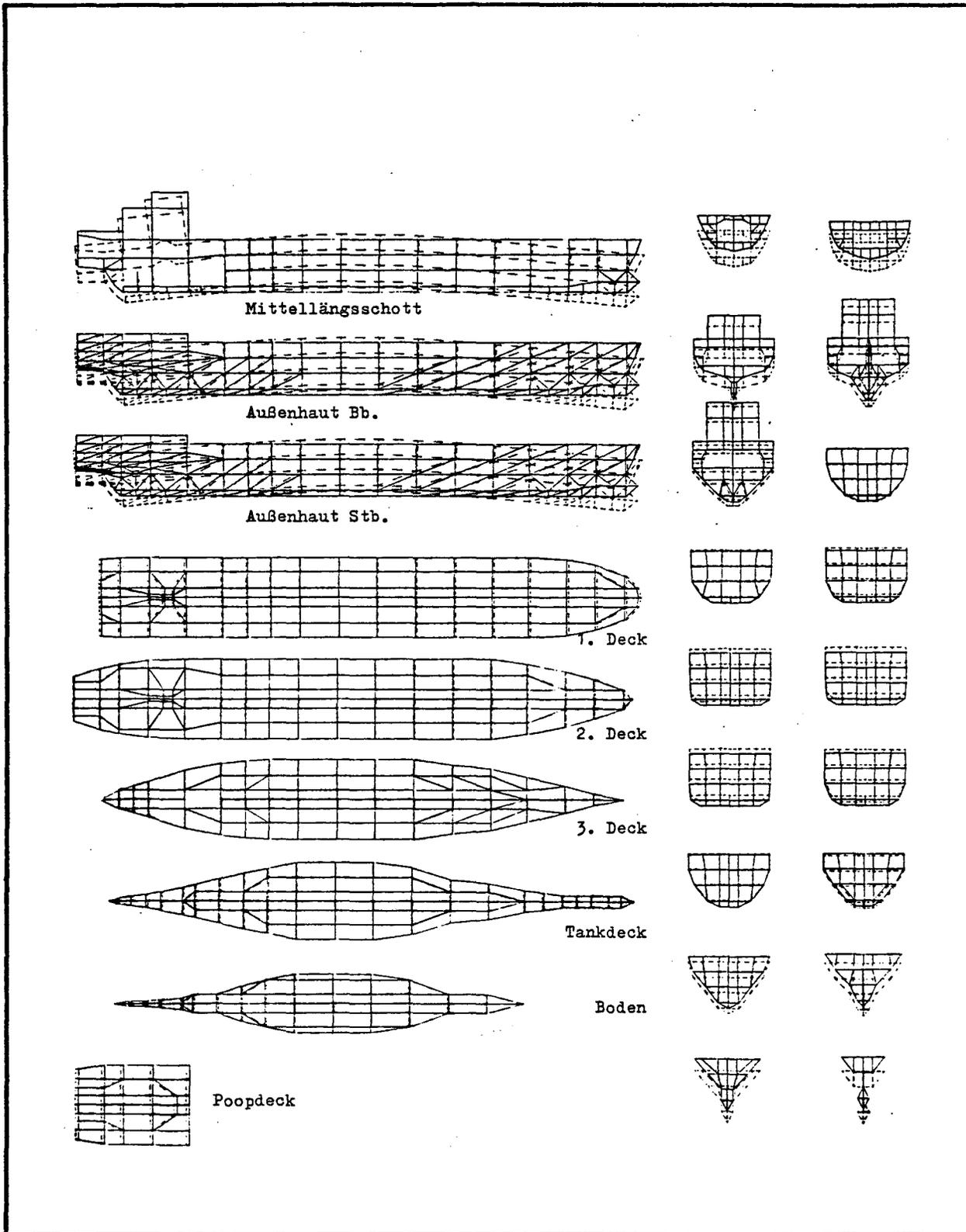


Abb. 6.17 - MS "Reichenfels" - I. Grad Vertikalschwingung
Frequenz 1,1 Hz

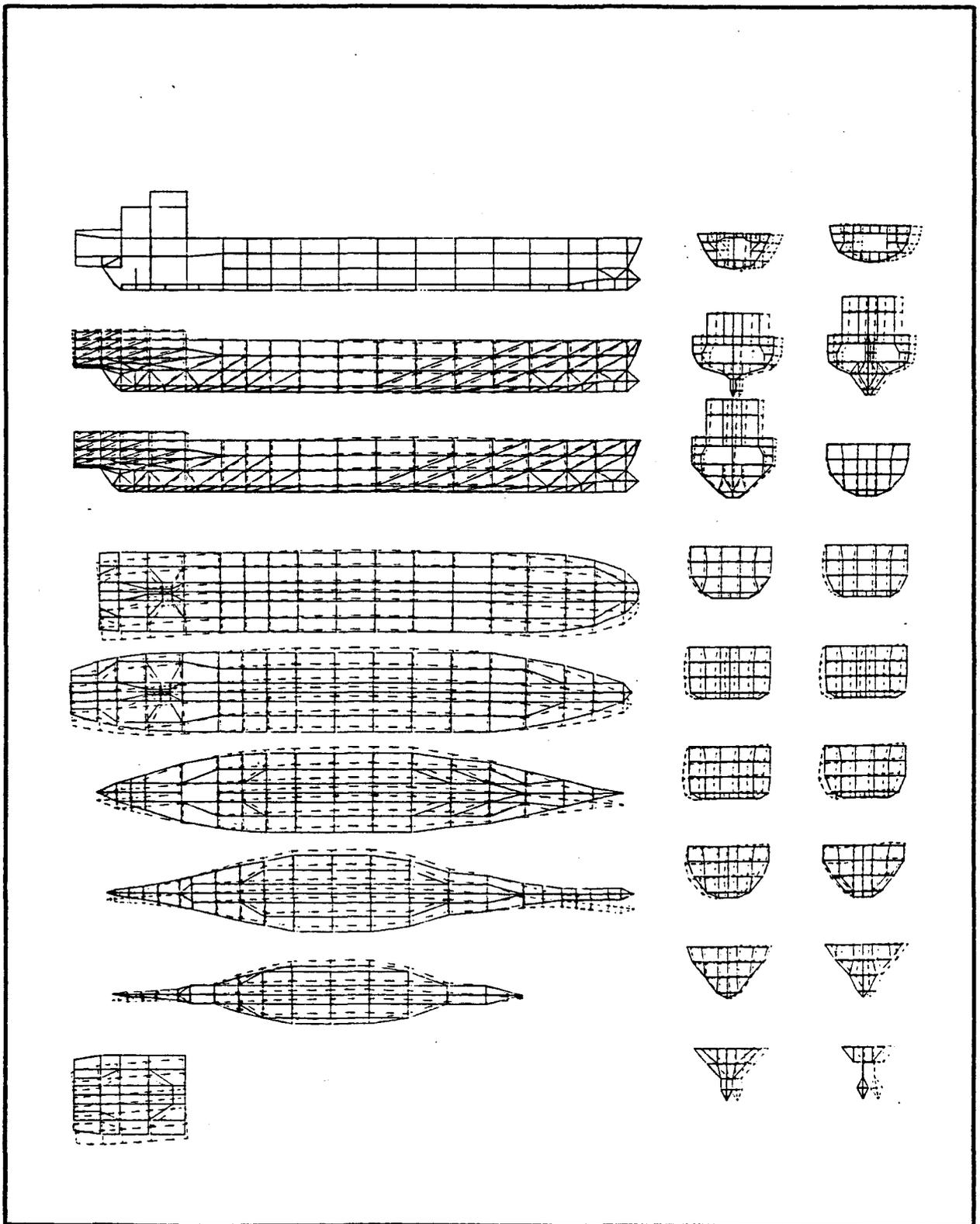


Abb. 6.18 - MS "Reichenfels" - I. Grad Horizontalschwingung
Frequenz 1,6 Hz

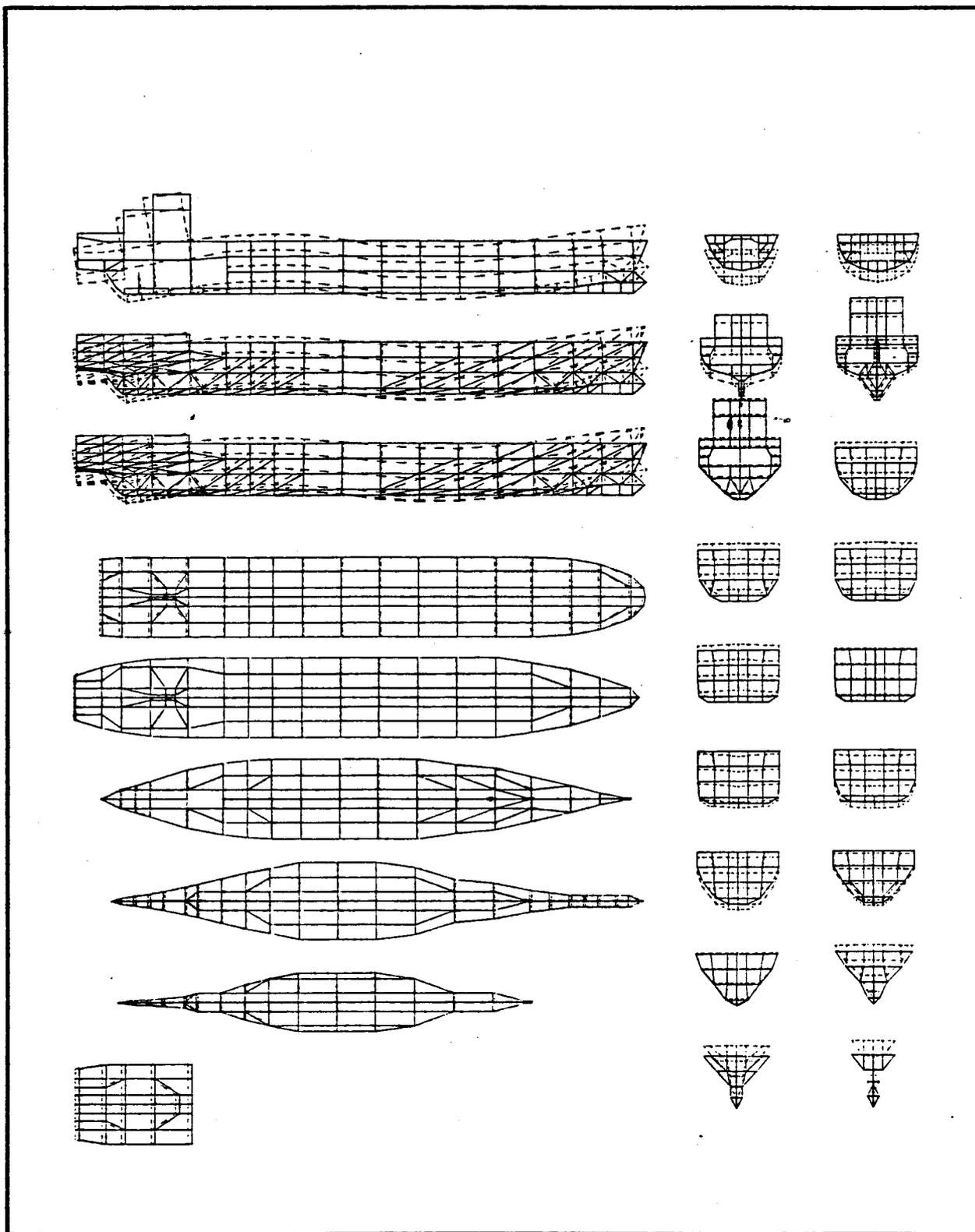


Abb. 6.19 - MS "Reichenfels" - II. Grad Vertikalschwingung
Frequenz 2,2 Hz

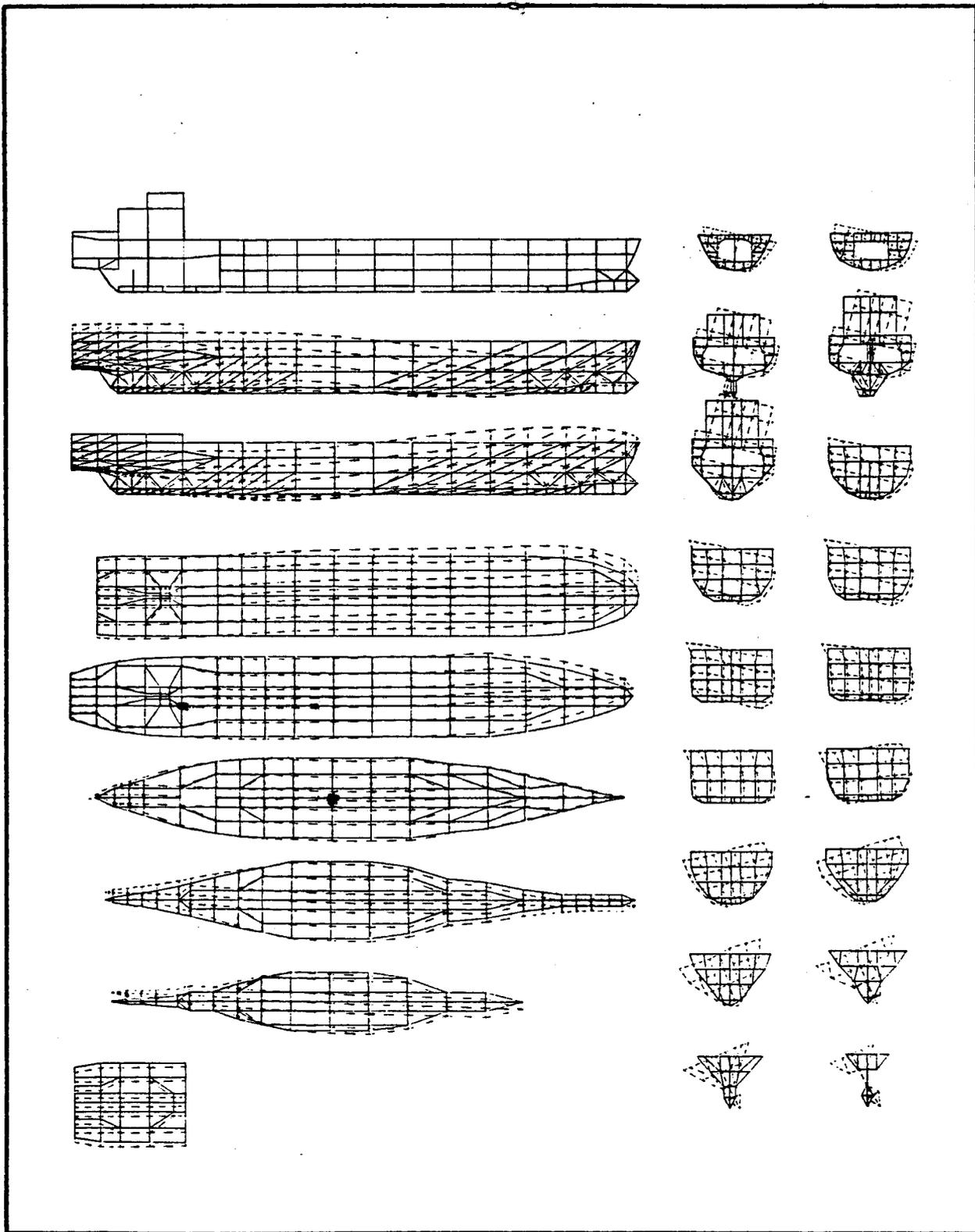


Abb. 6.20 - MS "Reichenfels" - I. Grad Torsionsschwingung
Frequenz 3,0 Hz

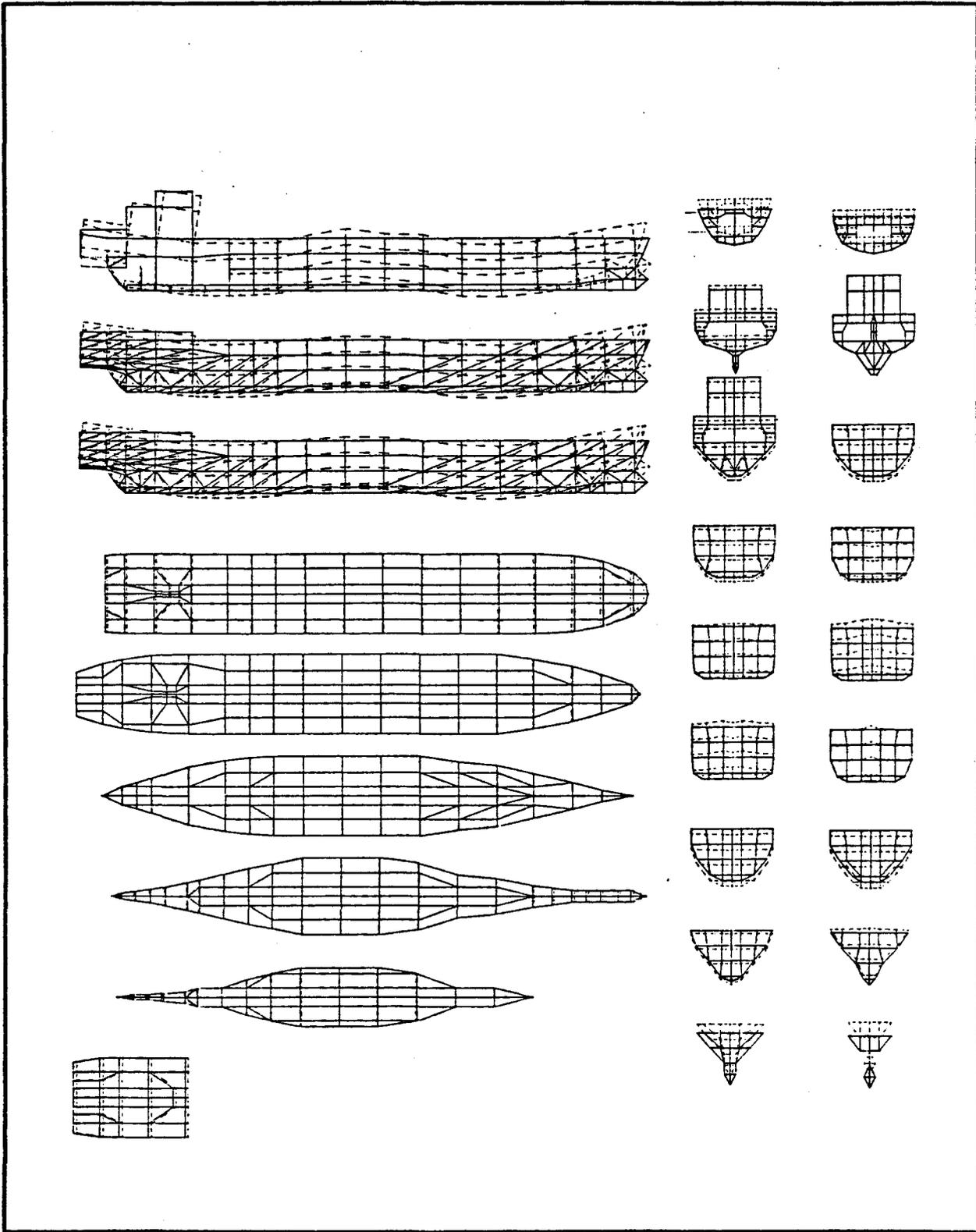


Abb. 6.21 - MS "Reichenfels" - III. Grad Vertikalschwingung
Frequenz 3,3 Hz

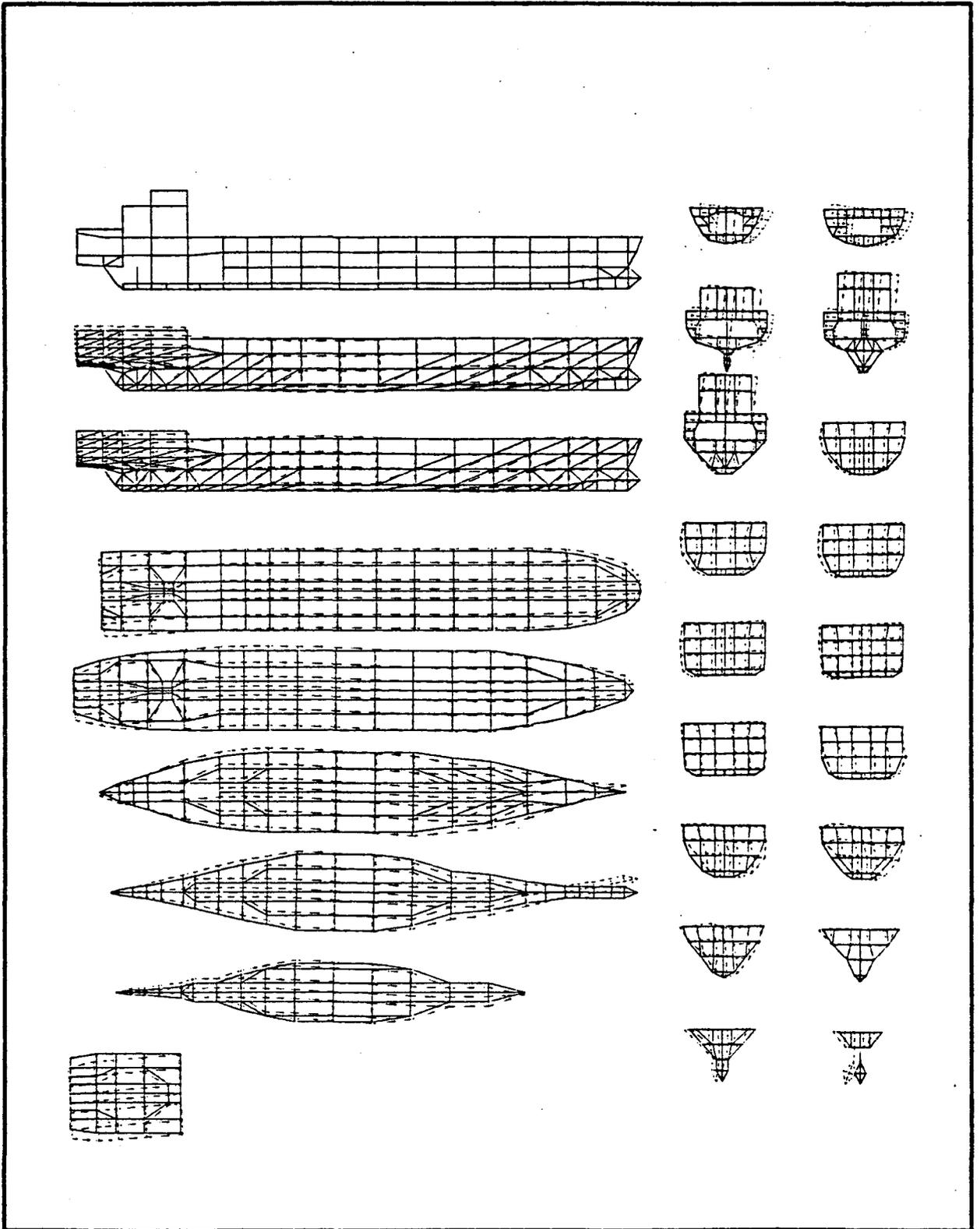


Abb. 6.22 - MS "Reichenfels" - II. Grad Horizontalschwingung
Frequenz 3,4 Hz

Aus Tabelle 6.6 ist folgendes hervorzuheben:

- Es besteht sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der hier geschilderten Berechnung und den gezeigten Versuchsergebnissen. Dabei ist hier auf den Unterschied in der Interpretation der Versuchsfrequenz 2,9 Hz hinzuweisen. In [37] wurde diese Frequenz dem dritten Grad vertikaler Schiffskörperschwingung zugeordnet. Eine nachträgliche, erneute Analyse der Meßwerte von Probefahrt und Messungen im Betrieb, die vom Germanischen Lloyd zur Verfügung gestellt wurden, zeigte nach genauer Betrachtung der Phasenwinkel der einzelnen Schwingungssignale, daß es sich um den ersten Torsionsschwingungsgrad handelte.

- Im Vergleich mit den Rechenergebnissen nach ADINA [33] ist zu bemerken, daß die in dieser Arbeit berechneten Frequenzen bis 4,4 Hz unter denen der ADINA-Rechnung liegen und oberhalb 4,4 Hz darüber. Die Übereinstimmung in der Umgebung von 4,4 Hz ist damit zu erklären, daß der Reduktionsfaktor (J-Faktor) zur Berücksichtigung der räumlichen Umströmung bei der Bestimmung der festen Lewis-Massen in der GLSAP- und GLADINA-Rechnung für eine fünfknotige Schwingungsform angesetzt wurde. Dadurch sind für niedrigere Schwingungsgrade die Zusatzmassen zu niedrig angesetzt und für höhere Schwingungsformen überschätzt.

In der hydroelastischen Lösung der Aufgabe tritt dieses Problem nicht auf, da in einem einzigen Rechengang die hydrodynamischen Effekte aller Frequenzen richtig ermittelt werden. Es ist zu betonen, daß der nicht geringe Aufwand bei der Aufbereitung und Einspeisung der Lewisschen Zusatzmassen völlig entfällt. Demgegenüber steht allerdings der höhere Rechenaufwand, der einerseits durch Erstellen der hydrodynamischen Massenmatrix und andererseits durch Lösen einer Eigenwertaufgabe mit erweiterten Matrizen

entsteht. Mit der Weiterentwicklung der Rechner fällt jedoch die Bedeutung des Rechenaufwandes weiter in den Hintergrund. Einige praktische Angaben zu den gezeigten Beispielen werden im Folgenden beschrieben.

6.5 Beurteilung der Einsatzfähigkeit der S.F.E.M.

Die Beispiele der Abschnitte 6.1 und 6.3 wurden zur Beurteilung der Einsatzfähigkeit der S.F.E.M. für die Behandlung des lokalen Verhaltens benetzter Bauwerke, das Beispiel in Abschnitt 6.4 für die Behandlung globaler Schwingungen benutzt. Daraus ergab sich, daß die verwendeten Unterteilungen der Konstruktionselemente in Quelldreiecke geeignet sind, lokale Schwingungsformen recht genau zu erfassen. Die von den Konstruktionselementen abhängige Idealisierung der Flüssigkeit ist der Darstellungsfähigkeit dieser Konstruktionselemente angepaßt.

Das Beispiel der MS "Reichenfels" wurde zur Beurteilung der praktischen Einsatzfähigkeit der S.F.E.M. für die Behandlung von Schiffsschwingungen benutzt. Es konnte gezeigt werden, daß die S.F.E.M. eine Alternative zur herkömmlichen F.E.-Methode mit hydrodynamischen Massen nach Lewis (Lewis-F.E.M.) ist, die sich durch einfachere Datenerstellung und zumindest nicht ungenaueren Ergebnissen auszeichnet, allerdings größeren Rechenaufwand erfordert.

Zum Vergleich der Rechenzeiten beider Methoden muß auf die Rechenweise des Subspace-Iterations-Algorithmus eingegangen werden (näheres siehe Bathe [33], Abschnitt 12.3).

Ein erster Schritt besteht dabei in der Faktorisierung der Steifigkeitsmatrix. Dabei steigt der Rechenaufwand quadratisch mit dem quadratischen Mittel (Root Mean Square, kurz R.M.S.) der in Abschnitt 5.5 erwähnten Spaltenhöhen und linear mit der Anzahl der Gleichungen. Danach werden die Iterationen durchgeführt. Für jede Iteration ist der Anstieg des Rechenaufwandes linear mit dem arithmetischen Mittel der

Spaltenhöhen und ebenfalls linear mit der Anzahl der Zeilen (Gleichungen).

Zum Vergleich werden in Tabelle 6.7 die Mittel der Spaltenhöhen für einen Lewis-F.E.M.-Lauf und S.F.E.M.-Lauf der MS "Reichenfels" gezeigt. Die Anzahl der Gleichungen hat sich dabei nicht erhöht.

Mittel der Spaltenhöhen	Lauf		Anstieg der Rechenzeit
	Lewis-F.E.M.	S.F.E.M.	
arithmetisch	114	275	2,4fach, pro Iteration
R.M.S.	125	339	7fach, einmalig f.Faktorisierung

Tabelle 6.7 - Vergleich des Rechenaufwandes zwischen der Lewis-F.E.M. und der S.F.E.M. bei MS "Reichenfels"

Dabei muß gesagt werden, daß die Werte für den S.F.E.M.-Lauf erst nach einer Bandbreitenoptimierung der Steifigkeitsmatrix bei Berücksichtigung der hydrodynamischen Kopplung erzielt werden konnten.

Bei der Lewis-F.E.M.-Rechnung waren die Rechenzeiten für die Faktorisierung und für die Iterationen etwa gleich. Bei einem Richtwert von acht Iterationen betrug die Rechenzeit mit der S.F.E.M. etwa das dreifache der der Lewis-F.E.M. Dabei gehören nur 382 der 1926 Freiheitsgrade der MS "Reichenfels" zur benetzten Oberfläche. Die Rechenzeit zum Erstellen der hydrodynamischen Massenmatrix betrug etwa ein Zehntel der Rechenzeit für die Bestimmung der Eigenwerte.

Obwohl, wie gezeigt, die S.F.E.M. eine gute und auch bequeme Alternative zur konventionellen Lewis-F.E.M. bei der Bestimmung der unteren Schwingungsgrade des Schiffskörpers darstellt, ist zu betonen, daß ihre Stärke in der Erfassung von Schwingungsvorgängen liegt, bei denen die Lewis-F.E.-Methode versagt. Dies ist etwa der Fall bei Schwingungen im Bereich des Hinterschiffes oder des Maschinenraumes sowie bei Körperschwingungen offener Schiffe.

Aus dem Beispiel der eingespannten Platte Abschnitt 6.2 ging hervor, daß sowohl vom Idealisierungsaufwand her als auch von der Genauigkeit die S.F.E.M. gegenüber der F.F.E.-Methode mit Darstellung auch der Flüssigkeit durch finite Elemente Vorteile bietet. Dabei sind beide Methoden vom Rechenaufwand her etwa gleich. In der F.F.E.M. muß zur Bestimmung der hydrodynamischen Kopplungsmatrix eine Kondensation der Flüssigkeitsfreiheitsgrade auf die Anzahl der Freiheitsgrade an der benetzten Oberfläche vorgenommen werden. Dieser Vorgang entfällt bei der Singularitäten-Methode, die dafür einen höheren Aufwand zur Bestimmung der einzelnen Elemente der Matrix A aufweist. Zur Bestimmung der Eigenwerte ist der Aufwand beider Methoden gleich.

7. ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen hydroelastischer Systeme, die Singularitäten-/Finite-Elemente-Methode (S.F.E.M.) vorgestellt. Sie bestimmt Eigenfrequenzen und -formen linear-elastischer Konstruktionen, die teilweise oder ganz in eine ideale Flüssigkeit eintauchen. Im Fall einer freien Oberfläche der Flüssigkeit wird nur der Grenzfall hoher Frequenzen erfaßt.

Im Gegensatz zu den schon seit längerem bestehenden Methoden, bei denen die Flüssigkeit mit finiten Elementen dargestellt wird, werden hier die Flüssigkeitseffekte durch eine Singularitätenbelegung der benetzten Körperoberfläche erfaßt. Die Konstruktion wird mit finiten Elementen dargestellt und der Einfluß der Flüssigkeit durch Erweiterung der Massenmatrix der Konstruktion mit einer Zusatzmatrix berücksichtigt. Diese Zusatzmatrix enthält die Information über die hydrodynamische Kopplung aller Freiheitsgrade an der benetzten Oberfläche. Jedes Element dieser Matrix wird bestimmt, indem das zu einer Einheitsbewegung des betrachteten Freiheitsgrades der benetzten Oberfläche entsprechende Geschwindigkeitspotential der Umströmung bestimmt, mit dem Verschiebungsfeld einer Einheitsbewegung in Richtung eines anderen Freiheitsgrades multipliziert und das Produkt über die benetzte Oberfläche integriert wird.

Die numerischen Schwierigkeiten bei einer allgemeinen Belegung der benetzten Oberfläche mit Singularitäten wurden überwunden, indem Quelldreiecke mit konstanter Quellstärke verwendet und Auswertungen nur an den Mittelpunkten dieser Elemente unternommen wurden. Die Elemente erwiesen sich als sehr gut zur Darstellung der zu untersuchenden Strömungen. Allerdings zeigte sich die Tendenz zur geringfügigen Überschätzung der kinetischen Energie der Flüssigkeit.

An Beispielen wurde die Einsatzfähigkeit der vorgestellten S.F.E.M. getestet. Die Methode erwies

sich als sehr genau. Die Tendenz, die Flüssigkeitswirkung zu überschätzen, liefert einen Ausgleich zur Überschätzung der potentiellen Energie der elastisch verformten Konstruktion bei allen F.E.-Programmen. Im Vergleich mit den bestehenden Methoden zur Behandlung hydroelastischer Probleme fällt hier auch die Einschränkung weg, daß der idealisierte Flüssigkeitsraum endlich ist.

Es wird gezeigt, daß der Idealisierungsaufwand für die Flüssigkeit bei der S.F.E.M. geringer ist als bei den herkömmlichen Methoden zur Berücksichtigung der Flüssigkeit mit F.E.-Rechnungen. Bei bestehenden F.E.-Modellen ist die Idealisierung der Flüssigkeit ein zweitrangiges Problem, das mit Hilfe eines sehr einfachen Datengenerierungsprogrammes leicht gelöst wird.

Anhand der Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen eines großen Ro-Ro-Schiffes wird gezeigt, daß die S.F.E.M. einerseits wegen des verschwindenden Idealisierungsaufwandes für die Flüssigkeit und andererseits dank der genaueren Ergebnisse eine verbesserte Alternative zur herkömmlichen Behandlung mit einem F.E.-Modell für die Konstruktion und festen Zusatzmassen darstellt.

Der erhöhte Rechenaufwand der S.F.E.M. ist bei den leistungsfähigen, modernen Rechenanlagen durchaus vertretbar.

SCHRIFTTUM:

- [1] **Lamb, H.**, "Hydrodynamics, 6th Ed., Dover Publications, 1945
- [2] **Grim, O.**, "Hydrodynamische Trägheits- und Dämpfungskräfte", Kontakt-Studium, IFS - Universität Hamburg - 1975
- [3] **Lindholm, U.S., Kana, D.D., Chu, W.-H.** "Elastic Vibration Characteristic of Cantilever Plates in Water", Journal of Ship Research, Vol. 9, No. 1, pp. 11-23, June 1965.
- [4] **Lewis, F.M.**, "The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship", Trans. S.N.A.M.E., Vol. 37, 1929.
- [5] **Taylor, J.L.**, "Some Hydrodynamical Inertial Coefficients", Philosophical Magazine, Series 7, Vol. 9, No. 55, 1930.
- [6] **Hess, H.L., Smith, A.M.O.**, "The Nonlifting Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Bodies", Journal of Ship Research, Vol. 8, pp. 22-24, 1964.
- [7] **Zienkiewicz, O.C., Irons, B.M., Nath, B.** "Natural Frequencies of Complex Free or Submerged Structures by the Finite Element Method", Symposium on Vibrations in Civil Engineering, London 1965.
- [8] **Zienkiewicz, O.C., Newton, R.E.**, "Coupled Vibrations in a Structure Submerged in a Compressible Fluid", Int. Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart 1969.
- [9] **Chowdhury, P.C.**, "Fluid Finite Elements for Added Mass Calculations", International Shipbuilding Progress, Vol. 19, 1972.
- [10] **Chowdhury, P.C.**, "Free Vibrations of Fluid-Borne Structures: Investigations on a Simple Model", North East Coast Institution of Engineers and Shipbuilders , Vol. 91, No. 1, November 1974.
- [11] **Orsero, P., Armand, J.-L.**, "A Numerical Determination of the Entrained Water in Ship Vibrations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1978.
- [12] **Armand, J.L., Orsero, P.**, "A Method for Evaluating the Hydrodynamic Added Mass in Ship Hull Vibrations", S.N.A.M.E. Transactions 1979.
- [13] **Zienkiewicz, O.C., Bettess, P.**, "Infinite Elements in the Study of Fluid-Structure Interaction Problems", Proceedings, 2. International Symposium on Computing Methods in Applied Science and Engineering, Versailles, Frankreich, Dezember 1975.
- [14] **Langhaar, H.L.**, "Energy Methods in Applied Mechanics", Jon Wiley & Sons, 1962.
- [15] **Landweber, L.**, "Vibration of a Flexible Cylinder in a Fluid", Journal of Ship Research, September 1979.

- [16] **Landweber, L.**, "Natural Frequencies of a Body of Revolution Vibrating Transversely in a Fluid", *Journal of Ship Research*, Juni 1971.
- [17] **Matsumoto, K.**, "Vibration of an Elastic Body Immersed in Fluid", *Advances in Computational Methods in Analysis and Design*, J.T. Oden, R.W. Clough, Y. Yamamoto, Eds., Alabama University Press, Hunstville, Ala., 1972.
- [18] **Misra, P.N.**, "Transverse Vibrations of a Ship Hull in Ideal Fluid Determined Through Variational Methods", *Journal of Ship Research*, Vol. 18, No. 3, Sept. 1974, pp. 185-202.
- [19] **Milne Thomson, L.M.**, "Theoretical Hydrodynamics", 5th Ed., MacMillon, London, 1968.
- [20] **Deruntz, J.A., Geers, T.L.**, "Added Mass Computation by the Boundary Integral Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 531-549, 1978.
- [21] **Hess, J.L.**, "Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-Flow Problems with Emphasis on the Surface Source Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 5, pp. 145-196, 1975.
- [22] **Meyerhoff, W.K.**, "Added Masses of Thin Rectangular Plates Calculated from Potential Theory", *Journal of Ship Research*, 1970, pp. 100-111.
- [23] **Michlin, S.G.**, "Variationsmethoden der mathematischen Physik", VEB Verlag Berlin, 1962.
- [24] **Schmid, G.**, "Anwendung der Methode auf Potentialströmungen", *Finite-Element-Methoden Seminar an der Ruhr-Universität Bochum, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 74-1, März 1974.*
- [25] **Webster, W.**, "The Flow About Arbitrary Three-Dimensional Smooth Bodies", *Journal of Ship Research*, Vol. 19, No. 4, Dec. 1975, pp. 206-218.
- [26] **Bai, K.J., Yeung, R.W.**, "Numerical Solution to Free Surface Flow Problems", *Tenth Symposium of Naval Hydrodynamics*, 1974.
- [27] **Cowper, G.R.**, "Gaussian Quadrature Formulas for Triangles", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 7, 405-8, 1973.
- [28] **Zienkiewicz, O.C.**, "The Finite Element Method", Third Edition, Mc Graw Hill (UK), 1977.
- [29] **Strang, G., Fix, G.J.**, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice Hall, 1972.
- [30] **Oden, J.T.** "The Mathematical Theory of Finite Elements", Mc Graw Hill, 1976.
- [31] **Timoshenko, S., Goodier, J.N.**, "Theory of Elasticity" - Mc Graw Hill, 1957.

- [32] **Bathe, K.J.,** "ADINA - A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis", M.I.T. Report 82448-1, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. 1975.
- [33] **Bathe, K.J., Wilson, E.L.,** "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.
- [34] **Morel, P.,** "Etudes expérimentelles sur la masse d'eau virtuelle intervenant dans les vibrations des structures d'un navire", Bulletin Technique du Bureau Veritas, Avril 1979.
- [35] **Volcy, G., Morel, P., Tanida, K.,** "Some Studies and Researches Related to the Hydroelasticity of Steel-Work", Proceedings of EURO-MECH Colloquium 122, Ecole Polytechnique, Paris, September 1979.
- [36] **Schidlowski, D.,** "Roll-on/Roll-off Motorschiff "Reichenfels", HANSA, 114. Jahrgang, Nr. 22 (Nov. 1977).
- [37] **Westram, A.,** "Experimentelle Schwingungsuntersuchungen auf MS Reichenfels", MTK 0058, Bericht Nr. 700/79, Germanischer Lloyd, Hamburg, 1979.
- [38] **GLSAP,** "Allgemeines lineares Finite-Elemente-Programm für statische und dynamische Berechnungen (SAP IV)", Germanischer Lloyd, Hamburg.
- [39] **Payer, H.G., Nath, C., Pleß, E.A., Westram, A.,** "Elastomechanische Aspekte der Wechselwirkung", Teilprojekt F 3, SFB 98, Sicherheit und Wirtschaftlichkeit schneller und/oder großer Handelsschiffe, Arbeitsbericht, Universität Hannover/IFS, Universität Hamburg, 1980.

Liste der Symbole

In der folgenden Liste werden die in dieser Arbeit verwendeten Symbole in zwei Klassen unterteilt angegeben: Vektor-Größen und Skalar-Größen. Neben einer Kurzbezeichnung wird die Stelle des Textes angegeben, in der das Symbol erstmals erscheint und definiert wird.

Vektor-Größen

- \underline{A} Matrix der hydrodynamischen Koeffizienten; Gl. (4.11)
- \underline{b}_i Rechte-Seiten-Vektor; Gl. (4.11)
- \underline{E} hydrodynamische Kopplungsmatrix; Gl. (2.19)
- \underline{h}_i Verschiebungsansätze; Gl. (2.10)
- $\underline{h}_{i r_s i}$ Wert von \underline{h}_i an Punkt $i r_s$; Gl. (3.10)
- \underline{j} Richtungsvektor des Freiheitsgrades i ; Gl. (3.2)
- $\underline{j}_x, \underline{j}_y, \underline{j}_z$ Richtungsvektoren der lokalen Koordinatenachsen; Gl. (4.14)
- \underline{j} siehe \underline{j}
- \underline{K} Steifigkeitsmatrix; Gl. (2.19)
- \underline{l} siehe \underline{j}
- \underline{M} Massenmatrix; Gl. (2.19)
- \underline{n} Normalvektor zu S; Gl. (1.7)
- \underline{n}_l Normalvektor zu S an Punkt l ; Gl. (4.24)
- $\underline{n}_{i p}^f$ Auswertung von \underline{n} an Punkt i_p von Element f; Gl. (3.10)
- \underline{N}_l^e Matrix der Formfunktionen; Gl. (3.2)
- \underline{N}_{kl}^e Wert von \underline{N}_l^e an Punkt k; Gl. (3.10)
- \underline{R}_k Rotationsmatrix von Element k; Gl. (4.12)
- \underline{u} Verschiebungsfeld; Gl. (1.2)
- $\dot{\underline{u}}$ Geschwindigkeitsfeld; Gl. (1.2)
- \underline{x}_l Positionsvektor von Punkt l ; Gl. (4.13)

Skalare Größen

- α_i $i=1, 2, \dots, n$ Unbekannte Koeffizienten der Konstruktion; Gl. (2.10)
- α_{ik} $k=1, 2, \dots, n$ Unbekannte Koeffizienten der Flüssigkeit; Gl. (4.2)
- b_{li} Komponente von \underline{b}_j für Punkt l ; Gl. (4.24)
- f_k Potentialansatz; Gl. (4.2)
- f_{lk} Wert von f_k auf Punkt l ; Gl. (4.25)
- m Anzahl der Ansatzfunktionen für die Flüssigkeit; Gl. (4.2)
- n_v Anzahl der Verschiebungen der Konstruktion; Gl. (3.2)
- n_e Anzahl der Elemente der Konstruktion; Gl. (3.1)
- N_E Anzahl der Queldreiecke; Gl. (4.16)
- N_{IP} Anzahl der Integrationspunkte; Gl. (3.10)
- N_l^e Formfunktionen; Gl. (3.1)
- q Anzahl der Knoten eines Elementes; Gl. (3.1)
- Δ Spannungsoperator; Gl. (1.3)
- S Benetzte Oberfläche; Gl. (1.7)
- \mathcal{U} Verzerrungsoperator; Gl. (1.3) und (1.4)
- \mathcal{V} Flüssigkeitsraum; Gl. (1.7)
- σ_{il}^{be} Zuordnungsfaktor; Gl. (3.2)
- σ_{jm}^{be} Zuordnungsfaktor; Gl. (3.9)
- φ Geschwindigkeitspotential; Gl. (1.7)
- Φ_i Potential für Freiheitsgrad i ; Gl. (2.11)
- Φ_{i,p_i} Wert von Φ_i an Punkt i_p ; Gl. (3.10)
- ∇ Gradientenoperator; Gl. (1.7)
- ρ_F Dichte der Flüssigkeit; Gl. (1.7)
- ρ_K Dichte der Konstruktion; Gl. (1.2)
- ω Kreisfrequenz; Gl. (2.1)
- Ω Definitionsgebiet der Konstruktion; Gl. (1.2)
- Ω_e Definitionsgebiet des Elementes e ; Gl. (3.3)