

484 | Juli 1988

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Gerhard Jensen

**Berechnung der stationären
Potentialströmung um ein Schiff unter
Berücksichtigung der nichtlinearen
Randbedingungen an der
Wasseroberfläche**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Berechnung der stationären Potentialströmung um ein Schiff unter Berücksichtigung der nichtlinearen Randbedingungen an der Wasseroberfläche

Gerhard Jensen, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1988

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

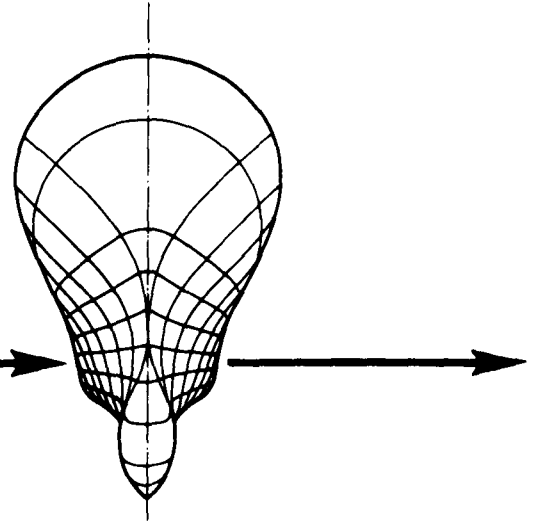
Bericht Nr. 484

Berechnung der stationären Potentialströmung um
ein Schiff unter Berücksichtigung der nichtlinearen
Randbedingung an der Wasseroberfläche

Gerhard Jensen

Juli 1988

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Berechnung der stationären Potentialströmung um
ein Schiff unter Berücksichtigung der nichtlinearen
Randbedingung an der Wasseroberfläche

Gerhard Jensen

Juli 1988

Bericht Nr. 484

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 484

Berechnung der stationären Potentialströmung um ein Schiff
unter Berücksichtigung der nichtlinearen Randbedingung
an der Wasseroberfläche

von

Gerhard Jensen

Juli 1988

ISBN 3 - 89220 - 484 - 5

Copyright Institut für Schiffbau
 Universität Hamburg
 Lammerssieth 90
 D-2000 Hamburg 60

Inhalt

1	Einführung	5
2	Verzeichnis der benutzten Symbole	8
3	Aufgabenstellung	10
4	Erfüllung der Randbedingung an der Wasseroberfläche	12
4.1	Linearisierung der Oberflächenbedingung	12
4.2	Vergleich mit anderen Oberflächenbedingungen	13
4.3	Diskretisierung	14
4.4	Erfüllung der Strahlungsbedingung	16
4.5	Vergleich mit der analytischen Lösung für einen Dipol	20
4.6	Erfüllung der nichtlinearen Oberflächenbedingung für einen getauchten Dipol	22
4.7	Überprüfung der Methode durch Wellenanalyse	23
5	Eine Panelmethode mit einfacher numerischer Integration	27
5.1	Prinzip	27
5.1.1	Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit auf der Körperoberfläche für ebene Strömung	29
5.1.2	Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit auf der Körperoberfläche für räumliche Strömung	29
5.2	Diskretisierung	30
5.2.1	Bestimmung der Quellstärken	30
5.2.2	Bestimmung der Geschwindigkeit an Punkten auf der Körperoberfläche	31
5.3	Berechnung der Geschwindigkeit an Punkten außerhalb des Körpers	32
5.4	Programm für die Panelmethode	32
5.5	Testrechnungen	33
5.5.1	Umströmung einer Kugel	33
5.5.2	Wigley-Schiff	35
5.5.3	Vergleich mit anderen Panelmethoden	39

6	Körper an der freien Wasseroberfläche	43
6.1	Prinzip	43
6.1.1	Aufbau des Gleichungssystems	44
6.1.2	Bestimmung der Geschwindigkeiten und der Wasserspiegelerhebung	45
6.1.3	Integration der Druckkräfte	46
6.1.4	Abschätzung der zusätzlichen Strömungskräfte	46
6.1.5	Iteration der Gleichgewichtslage	47
6.1.6	Regeln für den Aufbau der Netze	48
6.2	Beispielrechnungen und Vergleich mit Messungen	49
6.2.1	Parabolisches Wigley-Schiff	50
6.2.2	Series-60 Schiff mit $C_B = 0.60$	58
6.2.3	HSVA-Tanker	71
7	Zusammenfassung und Ausblick	74
8	Literatur	75
A	Grenzwerte der Integranden bei $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$	78
A.1	Ebene Strömung	78
A.2	Räumliche Strömung	79
B	Programme	83
B.1	Programm zur Berechnung der stationären Potentialströmung um Körper in unbeschränkter Flüssigkeit, PAMENI	83
B.2	Programme zur Panelierung der Schiffsform	84
B.3	Hilfsprogramme zur Aufbereitung von Netzen an der Körperoberfläche .	85
B.4	Hilfsprogramme zur Generierung von Netzen an der freien Wasseroberfläche	86
B.5	Programm zur Berechnung der Strömung um Körper an der freien Was- seroberfläche, PAMFRO	87
B.6	PAMPLT	89

Bildverzeichnis

4-1	Relative Lage der Kollokations- und Quellpunkte	17
4-2	Determinante des Gleichungssystems für verschiedene Verschiebungen $\Delta \Xi$ und ΔH der Quellen relativ zu den Kollokationspunkten	18
4-3	Höhenlinien durch einen getauchten Dipol mit und ohne verschobene Quellen	19
4-4	Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 0.5$	20
4-5	Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 1.0$	21
4-6	Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 3.0$	21
4-7	Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 5.0$	22
4-8	Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, nichtlineare Rechnung	24
4-9	Widerstand aus Querschnitt für getauchten Dipol abhängig von der Lage des Querschnitts	25
5-1	Perspektivische Darstellung der berechneten Geschwindigkeiten am Wigley-Doppelmodell	36
5-2	Berechnete Geschwindigkeiten am Wigley-Modell für verschiedene Berechnungsnetze	37
5-3	Berechnete Geschwindigkeiten an Punkten außerhalb der Körperoberfläche für Wigley-Modell	38
5-4	Standardabweichung der berechneten Lösung von der analytischen Lösung für eine Kugel	39
5-5	Störgeschwindigkeiten am Wigley-Schiff berechnet nach Webster ohne Abrundung des Steven	41
6-1	Diskretisierte Teile von Körper- und Wasseroberfläche	43
6-2	Beispiele für mögliche Oberflächennetze	48
6-3	Wellenwiderstandsbeiwerte für Wigley-Schiff	51
6-4	Tauchung für Wigley-Schiff	52
6-5	Trimm für Wigley-Schiff	52
6-6	Wellenerhebung für Wigley-Schiff, $F_N = 0.266$	52
6-7	Wellenerhebung für Wigley-Schiff, $F_N = 0.348$	53
6-8	Wellenerhebung für Wigley-Schiff, $F_N = 0.452$	53
6-9	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.22$	54
6-10	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.279$	55

6-11	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.319$	56
6-12	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.40$	57
6-13	Spantenriß und Stevenkonturen für Series-60 Schiff mit $C_B=0.60$	59
6-14	Wellenwiderstandsbeiwerte für Series-60, $C_B = 0.60$	60
6-15	Tauchung für Series-60, $C_B = 0.60$	60
6-16	Trimm für Series-60, $C_B = 0.60$	61
6-17	Wellenerhebung für Series-60, $C_B = 0.60$, $F_N = 0.25$	61
6-18	Wellenerhebung für Series-60, $C_B = 0.60$, $F_N = 0.28$	62
6-19	Wellenerhebung für Series-60, $C_B = 0.60$, $F_N = 0.30$	62
6-20	Wellenerhebung für Series-60, $C_B = 0.60$, $F_N = 0.34$	63
6-21	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.22$	64
6-22	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.25$	65
6-23	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.28$	66
6-24	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.30$	67
6-25	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.34$	68
6-26	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.364$	69
6-27	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.39$	70
6-28	Spantenriß des HSVA-Tankers	71
6-29	Stevenkonturen des HSVA-Tankers	72
6-30	Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für HSVA-Tanker, $F_n = 0.18$	73

1 Einführung

Für die Formgebung von Schiffen, die Bemessung ihrer Antriebsanlage und die Beurteilung des Seeverhaltens und der Manövrierfähigkeit ist es hilfreich, die Strömung um ein an der Wasseroberfläche fahrendes Schiff zu kennen. Zur Zeit ist es nicht möglich, alle mit dieser instationären zähen Strömung mit freier Wasseroberfläche verbundenen physikalischen Effekte bei einer Berechnung zu berücksichtigen.

Es werden daher Teilprobleme behandelt und für diese Vereinfachungen der physikalischen Wirklichkeit vorgenommen, von denen man annehmen kann, daß sie das Ergebnis der Berechnung nicht wesentlich verfälschen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Strömung um ein stationär an der freien Wasseroberfläche fahrendes Schiff. Dabei wird die Zähigkeit nicht berücksichtigt, also gibt es keine Grenzschicht und keine Strömungsablösung. Der Propeller wird ebenfalls nicht berücksichtigt. Brechende Wellen, Spritzer, Bugwirbel und andere Strömungsdetails werden auch vernachlässigt. Es gelten also die Voraussetzungen für Potentialströmung.

Dieses Problem ist schon von vielen Autoren bearbeitet worden. Bei den meisten Methoden wird das Schiff in seiner hydrodynamischen Wirkung durch eine Verteilung von Singularitäten (Quellen und Senken oder Dipole) ersetzt, deren Teilbeitrag zum Strömungsfeld durch geschlossene analytische Ausdrücke (Greenfunktionen) vorgegeben ist. Wenn die Greenfunktion den Einfluß der freien Oberfläche schon erfaßt (Havelock-Quellen), ist ihre numerische Auswertung im allgemeinen sehr aufwendig; anderenfalls werden Rankine-Quellen verwendet, und das numerische Verfahren zur Bestimmung der Singularitätenverteilung muß auch für die Erfüllung der Randbedingungen an der freien Wasseroberfläche sorgen.

Zu den ersteren Verfahren gehören die "Theorie des dünnen Schiffes" von Michell [21]¹ und die "Theorie des schlanken Schiffes" von Noblesse [23], bei denen Havelock-Quellen auf der Mittschiffsebene bzw. der Mittellinie angeordnet sind, und die "Theorie des langsamen Schiffes" von Baba [1], bei der die Intensität der Singularitäten proportional der Froude-Zahl ist, sowie die Methode von Guilloton [13] und Lösungen des Neumann-Kelvin Problems z.B. von Brard [7]. Wegen der Anwendung des Überlagerungsprinzips sind Methoden, bei denen die Randbedingungen an der freien Wasseroberfläche durch Verwendung entsprechender Singularitäten erfüllt werden, auf linearisierte Oberflächenbedingungen beschränkt.

Methoden, die Rankine-Quellen verwenden, sind: Die Methode von Gadd [11] mit einer speziellen Oberflächenbedingung, Dawsons Methode [9], die eine angenäherte Doppelkörperlinearisierung der Oberflächenbedingung verwendet und in Variationen weite Verbreitung gefunden hat, sowie die Methode von Maruo und Ogiwara [19] und die Weiterentwicklung von Masuko und Ogiwara [20], die versuchen die nichtlinearen Randbedingungen an der Wasseroberfläche iterativ zu erfüllen. Dabei traten Konvergenzschwierigkeiten auf, die nur durch örtliche Abschwächung der nichtlinearen Terme be-

¹Literaturangaben in eckigen Klammern sind in Abschnitt 8 zusammengefaßt

seitigt werden konnten. Daneben ist die Methode auch deshalb nicht exakt, weil die Körperwandbedingung im Bereich unter der Ruhewasserlinie und nicht auf dem wirklich benetzten Teil der Schiffsoberfläche erfüllt wird. Ein prinzipielles Problem der Methoden mit Rankine-Quellen liegt in der Erfüllung der Strahlungsbedingung, die besagt, daß Wellen nur in einem Sektor hinter dem Schiff auftreten. Dawson und die von vielen Autoren vorgestellten ähnlichen Methoden erfüllen die Strahlungsbedingung, indem sie die in der Randbedingung an der Wasseroberfläche vorkommenden Ableitungen der Geschwindigkeit mit einem einseitigen Finite-Differenzen-Operator berechnen.

Daneben gibt es noch Methoden, die keine Fundamentallösungen der Differentialgleichung verwenden, sondern diese direkt mittels einer Finite-Differenzen- oder Finite-Elemente-Methode lösen. Dabei muß der gesamte Flüssigkeitsraum in einer ausreichenden Umgebung um das Schiff diskretisiert werden. Dabei treten Probleme an den offenen Rändern des Berechnungsgebiets auf. Hier sollen nur zwei Beispiele erwähnt werden: Das Finite-Differenzen-Verfahren von Ohring und Telste [26], die das Anfahrproblem behandeln und so keine numerische Strahlungsbedingung benötigen, die aber Probleme haben, einen stationären Zustand zu erreichen; und die Methode von Bai [2] für ebene Strömung und später für Strömungen in einem Kanal [3], bei der eine Finite-Elemente-Lösung in Körperrandnähe mit einer analytischen Fernfeldlösung gekoppelt wird, um die Schwierigkeiten mit offenen Rändern und mit der Strahlungsbedingung zu bewältigen.

Diese Arbeit zeigt eine Methode, bei der die Randbedingung an der berechneten benetzten Körperoberfläche und die nichtlineare Randbedingung am berechneten Ort der Wasseroberfläche näherungsweise erfüllt werden. Absenkung und Vertrimmung des Schiffes können berücksichtigt werden. Für die gegebene Aufgabenstellung gibt es keinen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung; es wird auch kein Konvergenzbeweis für den Lösungsalgorithmus angegeben. Praktische Berechnungen zeigen jedoch, daß mit der angegebenen Methode in physikalisch interessierenden Fällen Lösungen gefunden werden können, die allen Randbedingungen im Rahmen der Diskretisierungsgenauigkeit genügen.

Zunächst wird die Erfüllung der Randbedingungen an der Wasser- und an der Körperoberfläche getrennt voneinander beschrieben, bevor beide Bedingungen gemeinsam erfüllt werden.

Zur Erfüllung der Randbedingungen an der freien Wasseroberfläche werden in diskreten Punkten konzentrierte Rankine-Quellen über einem Bereich um den Körper verteilt und die Randbedingungen an Kollokationspunkten auf der Wasseroberfläche iterativ erfüllt. Die Einhaltung der Strahlungsbedingung wird nicht mit einem Finite-Differenzen-Operator erzwungen, sondern durch eine zusätzliche Reihe von Kollokationspunkten am vorderen Rand des Netzes und eine zusätzliche Reihe von Quellen am hinteren Rand des Netzes erreicht.

Zur Erfüllung der Körperwandbedingung wird ein neues Panelverfahren mit einfacher numerischer Integration vorgestellt, bei dem die Singularitäten auf dem Körperwand angeordnet sind.

Abschließend werden Beispielrechnungen für das mathematisch beschreibbare Wigley-Schiff, ein Series-60-Schiff und für den "HSVA-Tanker" vorgelegt. Hierbei zeigt sich auch der Einfluß der Diskretisierung auf die Rechenergebnisse.

2 Verzeichnis der benutzten Symbole

Im folgenden sind die meisten verwendeten Symbole aufgeführt. Weitere Symbole, die nur an einzelnen Textstellen verwendet werden, sind bei ihrem ersten Auftreten im laufenden Text erklärt. Einzelne Symbole haben an verschiedenen Textstellen unterschiedliche Bedeutung; die gültige Bedeutung sollte aus dem Zusammenhang stets klar sein.

\vec{a}	Vektor der Teilchenbeschleunigungen
B	Hilfsgröße, siehe Gleichung (4-15)
oder	Breite des Schiffs
C	Koeffizient des Gleichungssystems
D	Tiefgang
D_0	Tiefgang in Ruhelage
c_F	Reibungswiderstandsbeiwert
c_w	Wellenwiderstandsbeiwert
\vec{e}_Z	Einheitsvektor in Richtung der Wirkungslinie der Zugkraft
\vec{F}	Druckkraft auf den Körper
f	Panelfläche
oder	Tauchung des Dipols
F	$= gf/U^2$, dimensionsloser Parameter für Dipolplumströmung
\vec{F}_A	zusätzliche äußere Kraft auf den Körper
\vec{F}_n	$= U^2/\sqrt{gL_P P}$, Frodezahl
g	Erdbeschleunigung
G	Gewicht
\vec{G}	$= (0, 0, G)$
$G(\vec{p}, \vec{q})$	Potential bei \vec{q} durch Einheitsquelle bei \vec{p} ; $G = -(4\pi \vec{q} - \vec{p})^{-1}$
i	Aufpunkt
k	Kollokationspunkt
\vec{k}	Punkt auf tangierender Kugel
L_{PP}	Länge zwischen den Loten
M	Quellstärke
N	Anzahl der Kollokations- bzw. Aufpunkte
\vec{n}	Normaleneinheitsvektor (in den Körper weisend)
\vec{o}	Mittelpunkt der tangierenden Kugel
\vec{p}	Ortsvektor eines Punkts
P	Projektion eines Körperpunktes auf die tangierende Kugel
p	Druck
\vec{q}	Ortsvektor eines Punkts
r	Faktor für Projektion eines Flächenelements auf die Kugel
R	Abstand zweier Punkte
oder	Radius der tangierenden Kugel
oder	rechte Seite (Konstante) in einer linearen Gleichung
R_w	Wellenwiderstand

S	benetzte Oberfläche des Körpers oder Körperperrand
S_0	benetzte Oberfläche des Körpers in Ruhelage
\vec{s}, \vec{t}	Tangentenvektor an die Körperoberfläche
\vec{T}	Moment durch Druck auf den Körper
\vec{T}_A	zusätzliches äußeres Moment auf den Körper
U	Anströmgeschwindigkeit
v_n	Normalgeschwindigkeit
v_s, v_t	Komponenten der Tangentialgeschwindigkeit
\vec{x}	Punkt auf der Oberfläche
x, y, z	rechtshändiges Koordinatensystem. x und y liegen in der ungestörten Wasseroberfläche; x zeigt stromauf, z vertikal nach unten
\vec{x}_Z	Angriffspunkts der Zugkraft
\vec{x}_G	Gewichtsschwerpunkt
\vec{Z}	Zugkraft
ε	Fehler
θ	Trimmwinkel (vorlicher Trimm ist positiv)
θ_0	Trimmwinkel in Ruhelage
ϕ	Geschwindigkeitspotential
Φ	Näherung für das Geschwindigkeitspotential
φ	Abweichung von der Parallelströmung
$\bar{\varphi}$	Korrekturpotential
ψ	Störpotential
ρ	Wasserdichte
ζ	z -Koordinate der freien Oberfläche
\mathbf{Z}	Näherung für ζ

Indizes:

1,2,3	Vektorkomponente in Richtung der x -, y - bzw. z -Achse
F	bezieht sich auf Punkt oder Quelle an der freien Wasseroberfläche
i	Quellpunktnummer
k	Kollokationspunktnummer oder Bezug auf Punkt \vec{k}
K	bezieht sich auf Körperpunkt- oder Quelle
ℓ	partielle Ableitungen in Richtung einer Stromlinie von Φ
n	Komponente in Richtung des Normalenvektors
p	bezieht sich auf Punkt \vec{p}
q	bezieht sich auf Punkt \vec{q}
s, t	Komponente in Richtung eines Tangentenvektors
x, y, z	partielle Ableitungen

3 Aufgabenstellung

Es soll die stationäre, symmetrische Strömung einer inkompressiblen, rotationsfreien, seitlich, nach vorn und hinten und nach unten unbegrenzten Flüssigkeit um einen ruhenden Körper an oder in der Nähe der freien Flüssigkeitsoberfläche bei paralleler, horizontaler Anströmung mit der Geschwindigkeit U bestimmt werden. Das Geschwindigkeitspotential ϕ genügt der Laplacegleichung:

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{für } z > \zeta \text{ und außerhalb des Körpers.} \quad (3-1)$$

Der Druck in der Flüssigkeit läßt sich nach der Bernoulli-Gleichung bestimmen:

$$p = \rho \left(-\frac{(\nabla\phi)^2}{2} + gz + C \right). \quad (3-2)$$

Wird der Druck an der freien Wasseroberfläche mit Null angesetzt, so ergibt sich die Konstante zu $C = U^2/2$.

Das Geschwindigkeitspotential muß die folgenden Randbedingungen erfüllen:
Nichts strömt durch den Körper (Neumannbedingung):

$$\vec{n}\nabla\phi = 0 \quad \text{auf der benetzten Oberfläche.} \quad (3-3)$$

Der Druck auf der freien Wasseroberfläche ist konstant (3-2):

$$\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - g\zeta = \frac{1}{2}U^2 \quad \text{bei } z = \zeta. \quad (3-4)$$

Nichts strömt durch die Wasseroberfläche:

$$\nabla\phi\nabla\zeta = \phi_z \quad \text{bei } z = \zeta. \quad (3-5)$$

(Zur Vereinfachung schreibe ich $\zeta(x, y, z)$ mit $\zeta_z = 0$.)

Abklingen der Störung der Parallelströmung bei großer Entfernung vom Körper:

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \nabla\phi = (-U, 0, 0). \quad (3-6)$$

Strahlungsbedingung: Wellen treten in großer Entfernung nur in einem Sektor hinter dem Körper auf.

Aus den Randbedingungen (3-4) und (3-5) an der freien Wasseroberfläche läßt sich das unbekannte ζ eliminieren:

$$\frac{1}{2}\nabla\phi\nabla(\nabla\phi)^2 - g\phi_z = 0 \quad \text{bei } z = \zeta. \quad (3-7)$$

Die auf den Körper wirkende Druckkraft ergibt sich als Druckintegral über die benetzte Außenhaut:

$$\vec{F} = \int_S p \vec{n} dS. \quad (3-8)$$

Das auf den Körper wirkende Moment durch den Wasserdruck ist:

$$\vec{T} = \int_S p \vec{x} \times \vec{n} dS. \quad (3-9)$$

Die Lage des Körpers muß so bestimmt werden, daß die resultierende Kraft und das resultierende Moment auf den Körper Null sind. Dabei soll neben dem Schiffsgewicht G und der momentenfrei bei \vec{x}_Z angreifenden Schleppkraft \vec{Z} auch eine zusätzliche äußere Kraft \vec{F}_A und ein zusätzliches äußeres Moment \vec{T}_A berücksichtigt werden können, weil für die Gleichgewichtslage in manchen Fällen das Moment durch Zähigkeitskräfte bedeutend sein kann und daher wenigstens grob beachtet werden muß. Die Schwimmlage stellt sich also so ein, daß

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{Z} + \vec{F}_A = 0 \quad (3-10)$$

und

$$\vec{T} + \vec{x}_G \times \vec{G} + \vec{x}_Z \times \vec{Z} + \vec{T}_A = 0. \quad (3-11)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Gewichts- und Zugkraft im allgemeinen an körperfesten Punkten angreifen. \vec{x}_G und \vec{x}_Z hängen daher von der Schwimmlage ab.

Der Wellenwiderstands-Beiwert c_w ist:

$$c_w = -\frac{F_1}{\frac{\rho}{2} U^2 S_0}. \quad (3-12)$$

S_0 ist die benetzte Oberfläche bis zur Ruhewasserlinie.

4 Erfüllung der Randbedingung an der Wasseroberfläche

Die Randbedingung an der freien Wasseroberfläche (3-7) ist nichtlinear; sie gilt am zunächst unbekanntem Ort der Wasseroberfläche. Deshalb soll sie iterativ durch eine Folge von Lösungen mit einer in [15] vorgestellten linearisierten Oberflächenbedingung erfüllt werden. Konvergiert dieser Algorithmus so, ist eine Lösung gefunden, die der nichtlinearen Oberflächenbedingung (3-7) genügt.

Zur Einhaltung der Strahlungsbedingung wurde ein in [15] für ebene Strömung gezeigtes Verfahren, bei dem die Kollokationspunkte relativ zu den Quellen verschoben sind, auf die räumliche Strömung übertragen.

4.1 Linearisierung der Oberflächenbedingung

Gleichung (3-7) soll um Näherungen Φ und \mathbf{Z} für ϕ und ζ linearisiert werden. Dazu substituiere ich $\phi = \Phi + \bar{\varphi}$ und vernachlässige Terme, die nichtlinear in Ableitungen von $\bar{\varphi}$ sind. Das ergibt die Randbedingung:

$$\nabla\Phi\nabla\left(\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \nabla\Phi\nabla\bar{\varphi}\right) + \nabla\bar{\varphi}\nabla\left(\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right) - g(\Phi_z + \bar{\varphi}_z) = 0 \quad (4-1)$$

bei $z = \zeta$.

Φ und $\bar{\varphi}$ werden in eine Taylorreihe um \mathbf{Z} entwickelt, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird; Produkte von $\zeta - \mathbf{Z}$ mit Ableitungen von $\bar{\varphi}$ werden vernachlässigt. Damit wird (4-1)

$$\begin{aligned} & \nabla\Phi\nabla\left(\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \nabla\Phi\nabla\bar{\varphi}\right) + \nabla\bar{\varphi}\nabla\left(\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right) \\ & - g(\Phi_z + \bar{\varphi}_z) + \left[\frac{1}{2}\nabla\Phi\nabla(\nabla\Phi)^2 - g\Phi_z\right]_z (\zeta - \mathbf{Z}) = 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

bei $z = \mathbf{Z}$. Für eine konsistente Linearisierung bezüglich Φ und \mathbf{Z} muß ζ durch einen nur von \mathbf{Z} , $\Phi(\mathbf{Z})$ und $\bar{\varphi}(\mathbf{Z})$ abhängigen Ausdruck ersetzt werden. Dazu wird (3-4) ebenfalls in eine abgebrochene Taylorreihe entwickelt und linearisiert:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2g} [(\nabla\phi)^2 - U^2]_{z=\zeta} \\ &= \frac{1}{2g} [(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\bar{\varphi} - U^2]_{z=\zeta} \\ &= \frac{1}{2g} [(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\bar{\varphi} + 2\nabla\Phi\nabla\Phi_z (\zeta - \mathbf{Z}) - U^2]_{z=\mathbf{Z}}. \end{aligned} \quad (4-3)$$

Es ergibt sich also

$$\zeta - \mathbf{Z} = \frac{\frac{1}{2} [(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\bar{\varphi} - U^2] - g\mathbf{Z}}{g - \nabla\Phi\nabla\Phi_z}, \quad (4-4)$$

wobei Φ und $\bar{\varphi}$ bei $z = \mathbf{Z}$ zu bestimmen sind.

Setzt man (4-4) in (4-2) ein und ersetzt $\bar{\varphi}$ wieder durch $\phi - \Phi$, so erhält man die linearisierte Oberflächenbedingung:

$$\nabla\Phi\nabla\left[-(\nabla\Phi)^2 + \nabla\Phi\nabla\phi\right] + \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla(\nabla\Phi)^2 - g\phi_z \quad (4-5)$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\nabla\Phi\nabla(\nabla\Phi)^2 - g\Phi_z\right]_z \frac{\frac{1}{2}\left[-(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\phi - U^2\right] - g\mathbf{Z}}{g - \nabla\Phi\nabla\Phi_z} = 0$$

bei $z = \mathbf{Z}$. Der Nenner im letzten Term ist 0, wenn die Vertikalkomponente der Teilchenbeschleunigung $\nabla\Phi\nabla\Phi_z$ gleich der Erdbeschleunigung g ist, das heißt, wenn die Näherungsströmung instabil wird.

4.2 Vergleich mit anderen Oberflächenbedingungen

Wird als Näherung das Potential der Parallelströmung und die ungestörte Wasseroberfläche, $\Phi = -Ux$ und $\mathbf{Z} = 0$, verwendet, so erhält man aus (4-5) die klassische Kelvinbedingung,

$$U^2\phi_{xx} - g\phi_z = 0. \quad (4-6)$$

Dawson [9] schlägt als bessere Näherung das Potential der Doppelkörperströmung und die ungestörte freie Wasseroberfläche vor ($\mathbf{Z} = 0$ und $\Phi = \text{Doppelkörperpotential}$). Damit ist $\Phi_z = 0$, und (4-5) vereinfacht sich zu:

$$\nabla\Phi\nabla\left(-(\nabla\Phi)^2 + \nabla\Phi\nabla\phi\right) + \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla(\nabla\Phi)^2 - g\phi_z - \frac{1}{2}\Phi_{zz}\left(-(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\phi - U^2\right) = 0. \quad (4-7)$$

Wie Dawson bezeichne ich mit dem Index ℓ Ableitungen in Richtung der Doppelkörperströmung. Es gilt dann für skalare und vektorielle Felder H :

$$(\nabla\Phi\nabla)H = \Phi_\ell H_\ell. \quad (4-8)$$

Mit dieser Schreibweise wird (4-7) zu:

$$\Phi_\ell\left(-(\nabla\Phi)^2 + \nabla\Phi\nabla\phi\right)_\ell + \Phi_\ell\nabla\phi(\nabla\Phi)_\ell - g\phi_z - \frac{1}{2}\Phi_{zz}\left(-(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\phi - U^2\right) = 0. \quad (4-9)$$

Mit $H = \Phi$ ergibt sich aus (4-8): $\Phi_\ell = |\nabla\Phi|$.

Es ergibt sich die Doppelkörperlinearisierung für die Oberflächenbedingung:

$$\begin{aligned} &|\nabla\Phi|\left(-(\nabla\Phi)^2 + \nabla\Phi\nabla\phi\right)_\ell + |\nabla\Phi|\nabla\phi(\nabla\Phi)_\ell - g\phi_z \\ &- \frac{1}{2}\Phi_{zz}\left(-(\nabla\Phi)^2 + 2\nabla\Phi\nabla\phi - U^2\right) = 0. \end{aligned} \quad (4-10)$$

Um diese Oberflächenbedingung mit der von Dawson zu vergleichen, schreibe ich (4-9) um:

$$\Phi_\ell \left(-\Phi_\ell^2 + \Phi_\ell \phi_\ell \right)_\ell + \Phi_\ell \nabla \phi \nabla \Phi_\ell - g \phi_z - \frac{1}{2} \Phi_{zz} \left(-\Phi_\ell^2 + 2\Phi_\ell \phi_\ell - U^2 \right) = 0. \quad (4-11)$$

Setzt man im zweiten Term in (4-11), wie Dawson, $\nabla \phi \nabla \Phi_\ell = \phi_\ell \Phi_{\ell\ell}$, ergibt sich²:

$$\Phi_\ell \left(-\Phi_\ell^2 + \Phi_\ell \phi_\ell \right)_\ell + \Phi_{\ell\ell} \Phi_\ell \phi_\ell - g \phi_z - \frac{1}{2} \Phi_{zz} \left(-\Phi_\ell^2 + 2\Phi_\ell \phi_\ell - U^2 \right) = 0. \quad (4-12)$$

Auch dieser Ausdruck unterscheidet sich noch von Dawsons Gleichung

$$\left(\Phi_\ell^2 \phi_\ell \right)_\ell - g \phi_z = 2\Phi_\ell^2 \Phi_{\ell\ell} \quad (4-13)$$

um den Term $\frac{1}{2} \Phi_{zz} \left(-\Phi_\ell^2 + 2\Phi_\ell \phi_\ell - U^2 \right)$. Er stammt aus der Taylorentwicklung für das Näherungspotential. Dawsons Randbedingung ist keine konsistente Linearisierung im Sinne einer abgebrochenen Taylorentwicklung.

4.3 Diskretisierung

Gleichung (4-5) soll nun so umgeformt werden, daß die unbekanntes von den bekannten Termen getrennt werden, und die Terme sollen so umgestaltet werden, daß sie einer

²Eigentlich gilt $\nabla \phi \nabla \Phi_\ell = \phi_\ell \Phi_{\ell\ell}$ nicht:

Ich betrachte

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi \nabla \phi)_\ell &= (\Phi_\ell \phi_\ell)_\ell = \Phi_{\ell\ell} \phi_\ell + \Phi_\ell \phi_{\ell\ell} \\ (\nabla \Phi \nabla \phi)_\ell &= \nabla \Phi_\ell \nabla \phi + \nabla \Phi (\nabla \phi)_\ell. \end{aligned}$$

Soll, wie Dawson annimmt, $\nabla \Phi_\ell \nabla \phi = \Phi_{\ell\ell} \phi_\ell$ gelten, so muß auch $\nabla \Phi (\nabla \phi)_\ell = \Phi_\ell \phi_{\ell\ell}$ sein. Es gilt $\nabla \Phi \nabla (\phi_\ell) = \Phi_\ell \phi_{\ell\ell}$, also gilt Dawsons Umformung nur, wenn $\nabla(\phi_\ell) = (\nabla \phi)_\ell$.

Mit (4-8) gilt

$$\phi_\ell = \frac{\phi_x \Phi_x + \phi_y \Phi_y}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}.$$

Die erste Komponente von $\nabla(\phi_\ell)$ ist also

$$(\phi_\ell)_x = \frac{\phi_{xx} \Phi_x + \phi_x \Phi_{xx} + \phi_{xy} \Phi_y + \phi_y \Phi_{xy}}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}} - \frac{(\phi_x \Phi_x + \phi_y \Phi_y)(\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_y \Phi_{xy})}{\left(\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2} \right)^3}$$

oder, wenn die andere Ableitung zuerst gebildet wird:

$$(\phi_x)_\ell = \frac{\phi_{xx} \Phi_x + \phi_{xy} \Phi_y}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}}.$$

Diese beiden Ausdrücke sind offensichtlich verschieden, also gilt Dawsons Umformung nicht.

numerischen Berechnung zugänglich sind. Dazu führe ich den Vektor der Teilchenbeschleunigungen der Näherungslösung,

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi)^2 = (\nabla \Phi \nabla) \nabla \Phi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi \nabla \Phi_x \\ \nabla \Phi \nabla \Phi_y \\ \nabla \Phi \nabla \Phi_z \end{pmatrix}, \quad (4-14)$$

sowie

$$B = \frac{\nabla \Phi \vec{a}_z + \nabla \Phi_z \vec{a} - g \Phi_{zz}}{g - a_3} \quad (4-15)$$

ein. Damit schreibe ich (4-5) neu:

$$(2\vec{a} + B \nabla \Phi) \nabla \phi + \nabla \Phi \begin{pmatrix} \nabla \Phi \nabla \phi_x \\ \nabla \Phi \nabla \phi_y \\ \nabla \Phi \nabla \phi_z \end{pmatrix} - g \phi_z = 2\vec{a} \nabla \Phi + B \left(\frac{1}{2} ((\nabla \Phi)^2 + U^2) + g \mathbf{Z} \right). \quad (4-16)$$

Das Potential ϕ wird in das (zunächst unbekannte) Potential φ einer Quellverteilung über einem Stück der freien Wasseroberfläche, das Potential der Parallelströmung $-Ux$ und ein bekannt angenommenes Störpotential ψ zerlegt:

$$\phi = \varphi - Ux + \psi. \quad (4-17)$$

Damit wird (4-16)

$$\begin{aligned} & (2\vec{a} + B \nabla \Phi) \nabla \varphi + \nabla \Phi \begin{pmatrix} \nabla \Phi \nabla \varphi_x \\ \nabla \Phi \nabla \varphi_y \\ \nabla \Phi \nabla \varphi_z \end{pmatrix} - g \varphi_z \\ &= 2\vec{a} \nabla \Phi + B \left(\frac{1}{2} ((\nabla \Phi)^2 + U^2) + g \mathbf{Z} \right) + (2a_1 + B \Phi_x) U \\ & - (2\vec{a} + B \nabla \Phi) \nabla \psi - \nabla \Phi \begin{pmatrix} \nabla \Phi \nabla \psi_x \\ \nabla \Phi \nabla \psi_y \\ \nabla \Phi \nabla \psi_z \end{pmatrix} + g \psi_z. \end{aligned} \quad (4-18)$$

Das Potential der Quellschicht oberhalb der freien Wasseroberfläche soll durch das Potential von $i = 1 \dots N$ Punktquellen angenähert werden:

$$\varphi(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N M_i G(\vec{p}_i, \vec{x}_k). \quad (4-19)$$

Hierin ist \vec{p}_i der Ort und M_i die Ergiebigkeit der Quelle.

Fordert man die Erfüllung der Oberflächenbedingung (4-18) an $k = 1 \dots N$ Kollokationspunkten \vec{x}_k auf der angenäherten Oberfläche \mathbf{Z} , so erhält man mit (4-19) aus (4-18) ein lineares Gleichungssystem mit vollbesetzter Koeffizientenmatrix für die M_i .

Nach Lösen des Gleichungssystems kann dann mit der linearisierten Bernoulli Gleichung (4-4) die Wasserspiegellage an den Punkten \vec{x}_k bestimmt werden. Soll die so gewonnene Lösung weiter verwendet werden, kann nun $\varphi - Ux + \psi$ als Näherungspotential Φ verwendet werden³, und wieder mit (4-18) weitergearbeitet werden.

In jedem Iterationsschritt wird der maximale Fehler ε in der nichtlinearen Oberflächenbedingung (3-7) an allen Kollokationspunkten bestimmt:

$$\varepsilon(\phi) = \max_k \left| \left(\frac{1}{2} \nabla \phi(\vec{x}_k) \nabla (\nabla \phi(\vec{x}_k))^2 - g\phi(\vec{x}_k)_z \right) \right|, k = 1 \dots N. \quad (4 - 20)$$

Geht dieser Fehler im Laufe der Iteration gegen Null, so ist an den Kollokationspunkten \vec{x}_k , die auf der berechneten Wasseroberfläche liegen, die nichtlineare Oberflächenbedingung (3-7) erfüllt.

Bei Wellen von mäßiger Steilheit ist dies meist der Fall; ist jedoch örtlich die vertikale Teilchenbeschleunigung größer als etwa $0.25g$, so divergiert die Iteration häufig. In diesem Fall wird das Iterationsverfahren etwas modifiziert:

Falls in einem Iterationsschritt der Fehler ε größer ist als im vorhergehenden, wird ein gewichtetes Mittel der Quellstärken und damit des Potentials verwendet:

$$M_k^{\text{neu}} = \frac{\varepsilon(\Phi) 2^{-\nu} M_k^{\text{LGS}} + (1 - 2^{-\nu}) \varepsilon(\phi) M_k^{\text{alt}}}{\varepsilon(\Phi) + \varepsilon(\phi)}. \quad (4 - 21)$$

und dann ϕ mit den so zwischen der Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) und den Quellstärken des vorhergehenden Iterationsschritts (alt) gemittelten Quellstärken bestimmt. Zunächst ist $\nu = 1$; falls der Fehler damit immer noch nicht kleiner ist als $\varepsilon(\Phi)$ wird, wird $\nu = 2$ gewählt, usw. Dieser Mittelungsstrategie liegt die Annahme zugrunde, daß die Lösung der linearisierten Oberflächenbedingung eine Korrektur der Quellverteilung mit dem richtigen Vorzeichen ergibt, möglicherweise aber eine zu starke Veränderung verursacht. Mit dieser Mittelung kann tatsächlich in vielen Fällen, die sonst divergieren, Konvergenz erreicht werden. Für getauchte Körper sind so nichtlineare Lösungen mit einer maximalen vertikalen Teilchenbeschleunigung von $0.65g$ berechnet worden.

4.4 Erfüllung der Strahlungsbedingung

Dawson [9] benutzt einen speziellen Finite-Differenzen-Operator für zweite Ableitungen in Strömungsrichtung zur Erfüllung der Strahlungsbedingung. Diese vielfach bewährte Methode ist aber recht kompliziert in der Anwendung und erfordert z.B. die Berechnung von Stromlinien der Näherungslösung und eine Anpassung des Berechnungsnetzes an die Stromlinien. Für eine Anwendung auf (4-5) ist auch zunächst unklar, welche Ableitungen mit dem Finite-Differenzen-Operator gebildet werden müssen. Daneben

³Zur Verminderung des Rechenaufwands verwende ich die berechneten Ableitungen von $\varphi - Ux + \psi$ am Wasserspiegel der vorhergehenden Näherung als Ableitungen von Φ ; das Konvergenzverhalten wird hierdurch nicht verschlechtert.

ist bekannt, daß bei grober Diskretisierung die Wellenlänge zu kurz berechnet wird und die Wellen gedämpft sind, während es bei feiner Diskretisierung häufig zu Punkt-zu-Punkt-Oszillationen der Lösung kommt. Einzelheiten der Methode kann man auch [5] entnehmen.

Bei zweidimensionalen Strömungen führte eine einfache Technik, bei der über einem Teil der freien Wasseroberfläche angeordnete Quellen verschoben zu den Kollokationspunkten angeordnet werden, ebenfalls zur Einhaltung der Strahlungsbedingung [15]. Analog wurde versucht, die Strahlungsbedingung für räumliche Strömungen zu erfüllen [16].

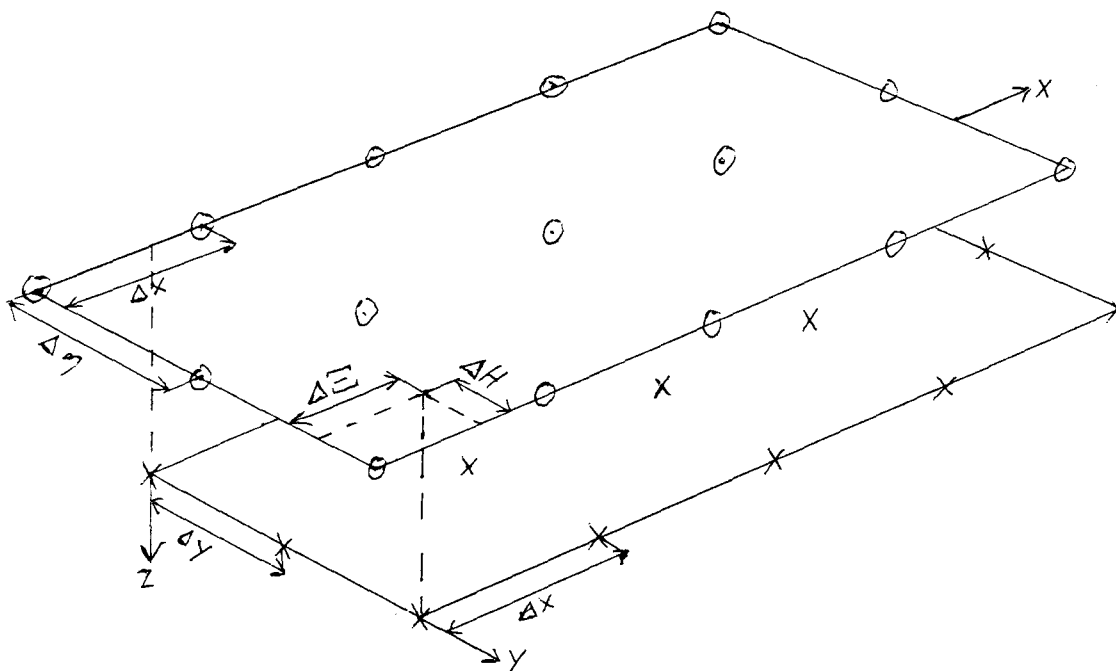


Bild 4-1: Relative Lage der Kollokations- und Quellpunkte

Dies wurde zunächst mit der linearisierten Oberflächenbedingung (4-6)

$$U^2 \phi_{xx} - g\phi_z = 0 \quad \text{bei } z = 0$$

für einen Dipol unter einer freien Oberfläche an der Stelle $(x_D, 0, z_D)$ untersucht. Hierbei wurden die Quellpunkte um $\Delta\Xi$ gegen die x -Achse und um $\Delta\eta$ in Richtung der y -Achse verschoben. Während $\Delta\Xi$ überall gleich angesetzt wird, wird $\Delta\eta$ proportional zu y so angesetzt, daß $\Delta\eta$ auf der Symmetrielinie 0 ist und am Rand des diskretisierten Oberflächenbereichs den Wert ΔH erreicht (Bild 4-1).

Das Potential wird als Summe des Potentials der Parallelströmung, des Dipols und der $i = 1 \dots N$ Quellen oberhalb der Wasseroberfläche angenähert:

$$\phi(\vec{x}) = -Ux + \phi_D + \sum_{i=1}^N M_i G(\vec{p}_i, \vec{x}). \quad (4-22)$$

Die Quellstärken M_i werden so bestimmt, daß (4-6) an $k = 1 \dots N$ Kollokationspunkten an der Ebene $z = 0$ erfüllt ist. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\sum_{i=1}^N M_i \left(U^2 G_{xx}(\vec{p}_i, \vec{x}_k) - g G_z(\vec{p}_i, \vec{x}_k) \right) = -U^2 \phi_{Dxx} + g \phi_{Dz}. \quad (4-23)$$

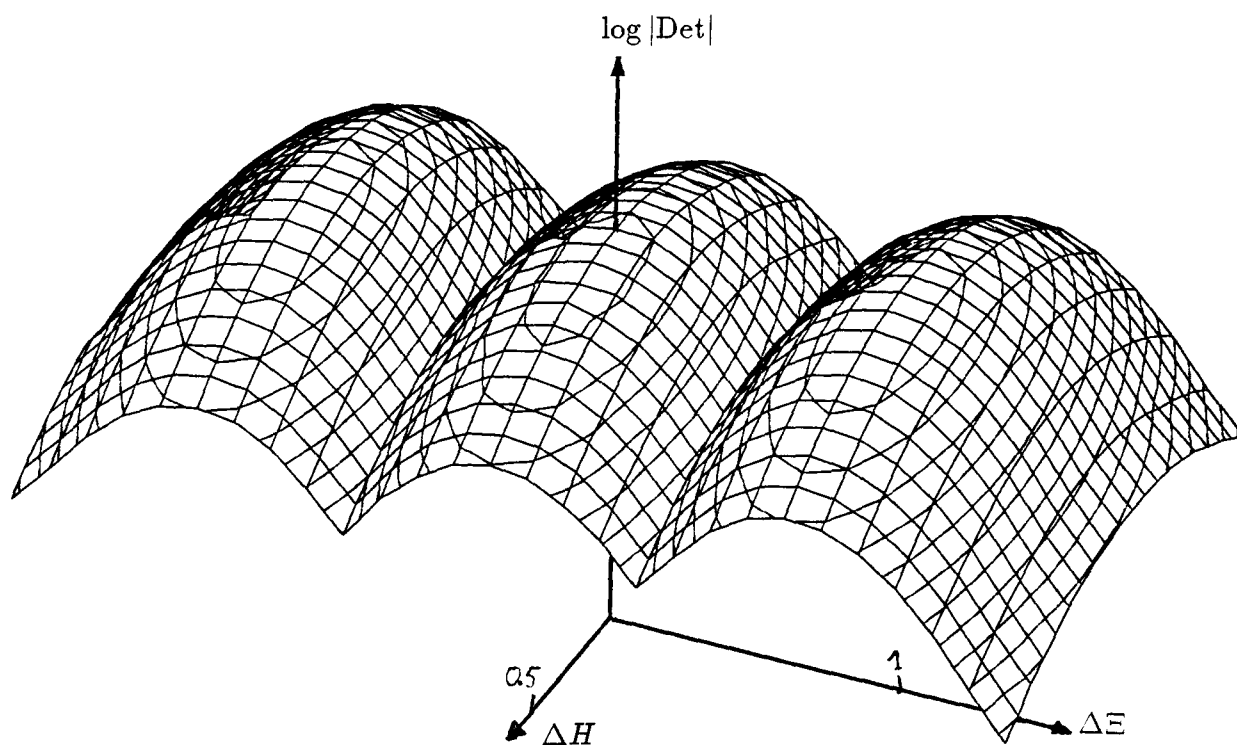


Bild 4-2: Determinante des Gleichungssystems für verschiedene Verschiebungen ΔE und ΔH der Quellen relativ zu den Kollokationspunkten

Bild 4-2 zeigt den Betrag der Determinante des Gleichungssystems für verschiedene Verschiebungen ΔE und ΔH . Bei der Diskretisierung eines linearen Problems zeigt die Größe des Betrags der Determinante des Gleichungssystems an, wie gut die gewählte Diskretisierung die Bedingungen beschreibt. Es ergeben sich Maxima bei $\Delta E = 0, \Delta H = 0.2\Delta y$ und bei $\Delta E = \pm\Delta x, \Delta H = 0.25\Delta y$. Dieses Verhalten des Gleichungssystems hängt kaum von der Maschenweite (bzw. der Geschwindigkeit) und dem vertikalen Abstand der Quellen von den Kollokationspunkten ab.

Die Testrechnungen für den getauchten Dipol zeigen, daß ohne Verschiebung vor und hinter dem Dipol Wellen auftreten. Bei einer Verschiebung $\Delta E = -\Delta x, \Delta H = 0.25\Delta y$

wird die Strahlungsbedingung erfüllt, und die Wellenlänge in den Querwellen stimmt sehr gut mit der analytischen Lösung überein (Bild 4-3). Die Verschiebung in y -Richtung ist von untergeordneter Bedeutung.

Testrechnungen mit unregelmäßigen Netzen zeigen, daß man für örtliche Verfeinerungen die zusätzlichen Quellpunkte senkrecht über den zusätzlichen Kollokationspunkten anordnen muß. Die allgemeine Regel für das Erstellen von Netzen, die die Strahlungsbedingung erfüllen lautet also: Die Quellen werden senkrecht über den Kollokationspunkten angeordnet. Die am weitesten stromauf liegende Reihe von Quellpunkten wird fortgelassen und dafür stromab eine zusätzliche Reihe von Quellpunkten angeordnet.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems hat leider keine starke Hauptdiagonale. Daher kann zur Lösung kein einfacher Iterationsalgorithmus benutzt werden. In den für dieses Kapitel erstellten Programmen wurde daher Gaußsche Elimination verwendet.

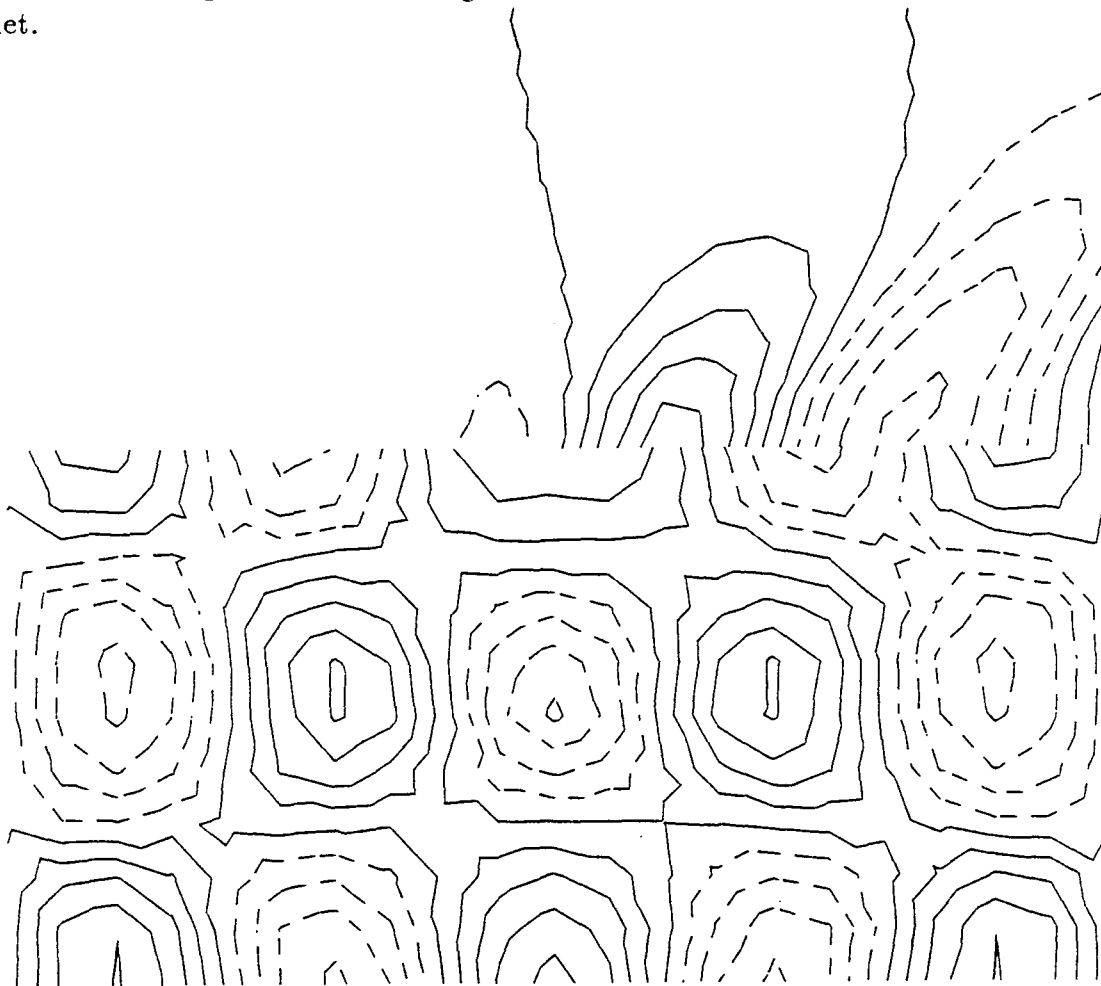


Bild 4-3: Höhenlinien durch einen getauchten Dipol.

Oben $\Delta E = \Delta H = 0$,

unten $\Delta E = \Delta x$, $\Delta H = 0.2\Delta y$

4.5 Vergleich mit der analytischen Lösung für einen Dipol

Zur Überprüfung der Genauigkeit der numerischen Ergebnisse mit dieser Methode habe ich analytische Lösungen von Nakatake [22] für die stationäre Umströmung eines Dipols unter einer freien Oberfläche bei linearisierter Randbedingung an der Oberfläche nachgerechnet (Bilder 4-4 bis 4-7). Mit U = Anströmgeschwindigkeit, und f = Tauchung ist der an den Bildern angegebene Parameter $F = gf/U^2$. Die an den Höhenlinien angegebenen Zahlen sind Werte von $\zeta gf^3/(4\pi U\mu)$. μ ist das Dipolmoment. Die Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen ist sehr gut.

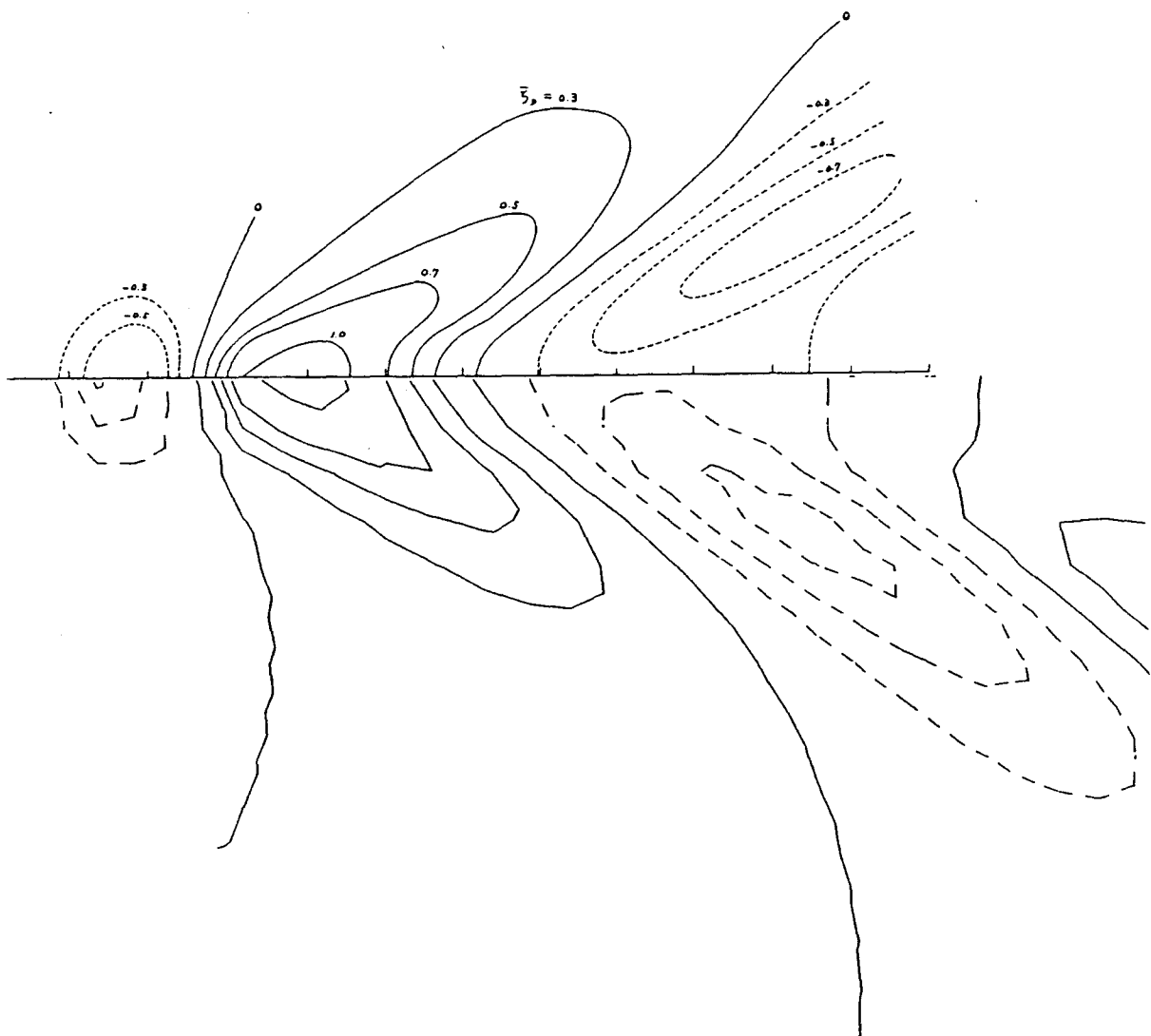


Bild 4-4: Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 0.5$.
Oben analytische Lösung nach Nakatake [22], unten numerische Lösung.

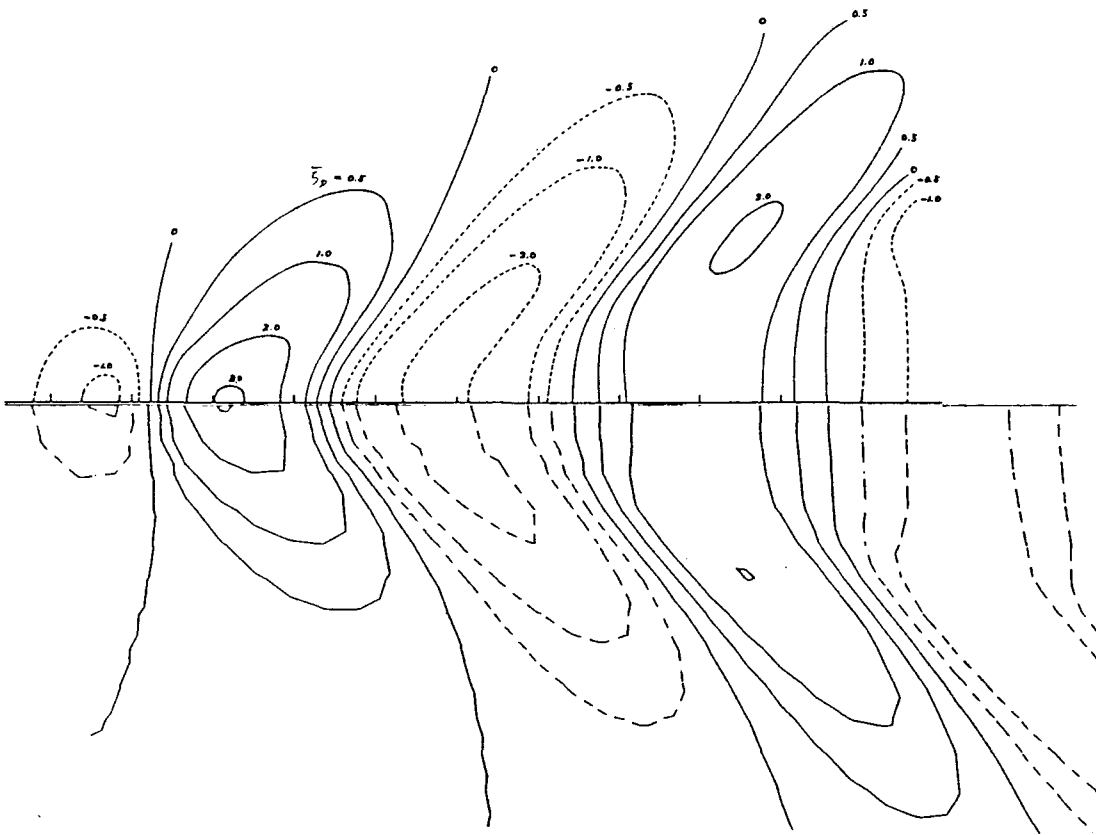


Bild 4-5: Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 1.0$.
 Oben analytische Lösung nach Nakatake [22], unten numerische Lösung.

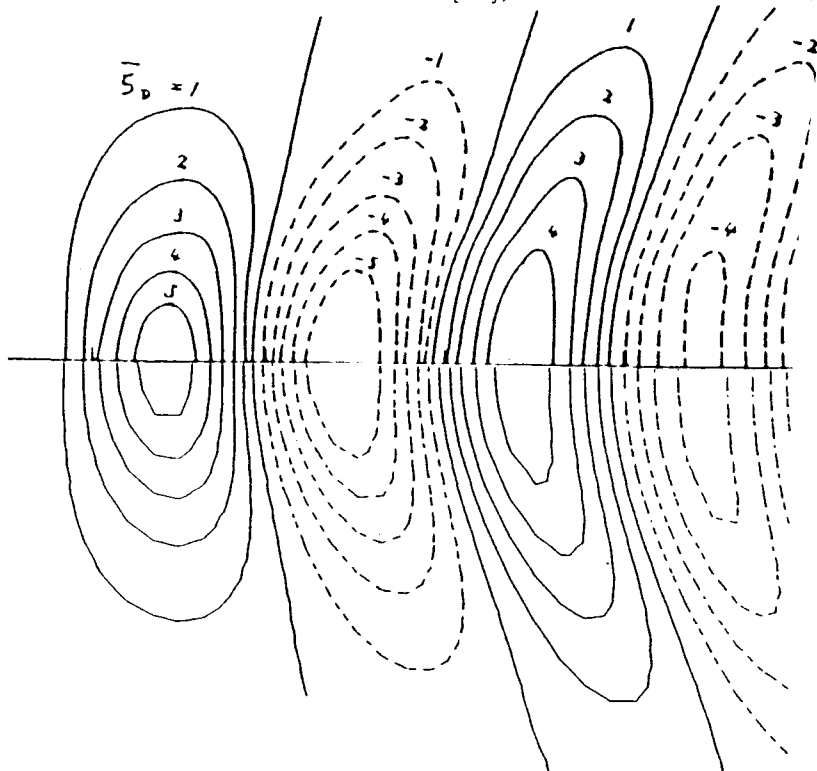


Bild 4-6: Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 3.0$.
 Oben analytische Lösung nach Nakatake [22], unten numerische Lösung.

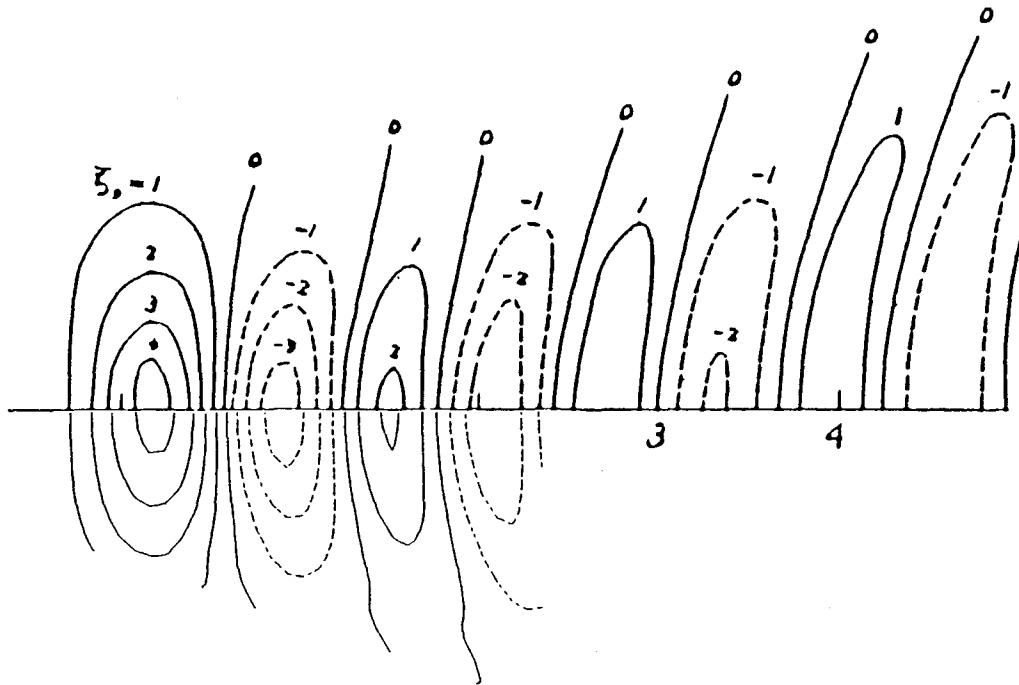


Bild 4-7: Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, $F = 5.0$.
 Oben analytische Lösung nach Nakatake [22], unten numerische Lösung.

4.6 Erfüllung der nichtlinearen Oberflächenbedingung für einen getauchten Dipol

Die nichtlineare Oberflächenbedingung der Umströmung eines getauchten Dipols soll durch iterative Anwendung von Gleichung (4-18) erfüllt werden. Ich zeige hier einen Testfall mit $f = 2\text{m}$, $U = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Dipolstärke wurde simultan in jedem Iterationsschritt so bestimmt, daß am Punkt $(1.076\text{m}, 0, f)$ vor dem Dipol die x -Komponente der Geschwindigkeit Null ist. Der maximale Fehler an den Kollokationspunkten in der nichtlinearen Oberflächenbedingung (3-7) wurde in 10 Iterationsschritten um den Faktor 10^{-5} gegenüber der Kelvinlösung vermindert. Die größte Wellenamplitude ist 0.052·Wellenlänge der Querwellen (linearisiert $= 2\pi U^2/g$), die maximale vertikale Teilchenbeschleunigung ist $0.53g$. Die Höhenlinien zeigt Bild 4-8.

Im folgenden wird ein kleiner Ausschnitt aus der Ausgabedatei für den letzten Iterationsschritt gezeigt:

```
Lage des Dipols:  0.0000000E+00  0.0000000E+00  2.000000
Geschwindigkeit  4.000000
Nummer|      Koordinaten      | Quellst. | Geschwindigkeit
.....
21 | -3.0  0.0  0.331253 |  0.5466 | -4.6113  0.0000 -1.1115 |
22 | -3.5  0.0  0.189286 | -3.4971 | -4.2278  0.0000 -1.3562 |
23 | -4.0  0.0  0.017703 | -1.5311 | -3.8077  0.0000 -1.3597 |
24 | -4.5  0.0 -0.159111 | -0.1687 | -3.3960  0.0000 -1.1600 |
```

25	-5.0	0.0	-0.314212	0.2122	-3.0337	0.0000	-0.7950	
.....								
81	-3.0	0.5	0.349056	-1.7883	-4.6656	-0.4204	-0.9506	
82	-3.5	0.5	0.224853	7.8766	-4.3144	-0.3368	-1.2976	
83	-4.0	0.5	0.063335	2.8993	-3.9063	-0.1384	-1.4016	
84	-4.5	0.5	-0.119832	-0.1927	-3.4722	0.1064	-1.2576	
85	-5.0	0.5	-0.288953	-0.7117	-3.0709	0.2534	-0.9144	
.....								
141	-3.0	1.0	0.347923	-8.5003	-4.7181	-0.6037	-0.4489	
142	-3.5	1.0	0.276014	-17.4131	-4.5049	-0.6106	-0.8649	
143	-4.0	1.0	0.162002	-6.1715	-4.1821	-0.4966	-1.2007	
144	-4.5	1.0	0.005722	-0.2884	-3.7581	-0.2511	-1.3877	
145	-5.0	1.0	-0.188874	1.2456	-3.2459	0.1510	-1.3174	
.....								
200	-3.0	1.5	0.303576	6.7935	-4.6597	-0.4769	-0.1260	
201	-3.5	1.5	0.267342	13.1459	-4.5499	-0.5879	-0.4450	
202	-4.0	1.5	0.199346	0.4098	-4.3592	-0.6012	-0.7395	
203	-4.5	1.5	0.100363	-5.3276	-4.0876	-0.4928	-1.0090	
204	-5.0	1.5	-0.035583	-3.9669	-3.7060	-0.2581	-1.2249	

Man kann sich leicht durch numerisches Differenzieren der Höhenkoordinaten der angegebenen, auf der Oberfläche liegenden Punkte, in Verbindung mit dem Geschwindigkeitsvektor überzeugen, daß sowohl die kinematische Oberflächenbedingung (3-5), als auch auch die dynamische Oberflächenbedingung (3-4) erfüllt sind.

Wird die Tauchung des Dipols bei gleicher Stärke vermindert, konvergiert das Verfahren nicht.

4.7 Überprüfung der Methode durch Wellenanalyse

Eine als Kontrolle geeignete Eigenschaft der Lösung ist, daß die Wellenenergie, die durch einen beliebigen Querschnitt stromab der Störung fließt, unabhängig von der Lage des Querschnitts ist. Zur Überprüfung kann die Wellenanalyse dienen: Der aus einem Querschnitt bestimmte Wellenwiderstand muß unabhängig von der Lage des Querschnitts sein. Es werden hier Querschnitte nach Eggers, Sharma und Ward [10] untersucht. Voraussetzung ist, daß am Ort des Querschnitts die lokalen Wellen bereits abgeklungen sind und die Wellenhöhen so klein sind, daß die Kelvinbedingung (4-6) eine gute Näherung darstellt. Die numerische Bearbeitung wird erheblich vereinfacht, wenn man von einer endliche Tankbreite ausgeht, weil dann an Stelle einer kontinuierlichen Fouriertransformation der Oberflächenverformung eine diskrete Fouriertransformation tritt. Die letztere kann auch für unbeschränkte Breite verwendet werden, wenn eine beliebige Tankbreite $2b$ so angenommen wird, daß die Tankwände außerhalb des gestörten Bereichs liegen. Der Wellenwiderstand ist dann nach [10], Gleichung (32), für symmetrische

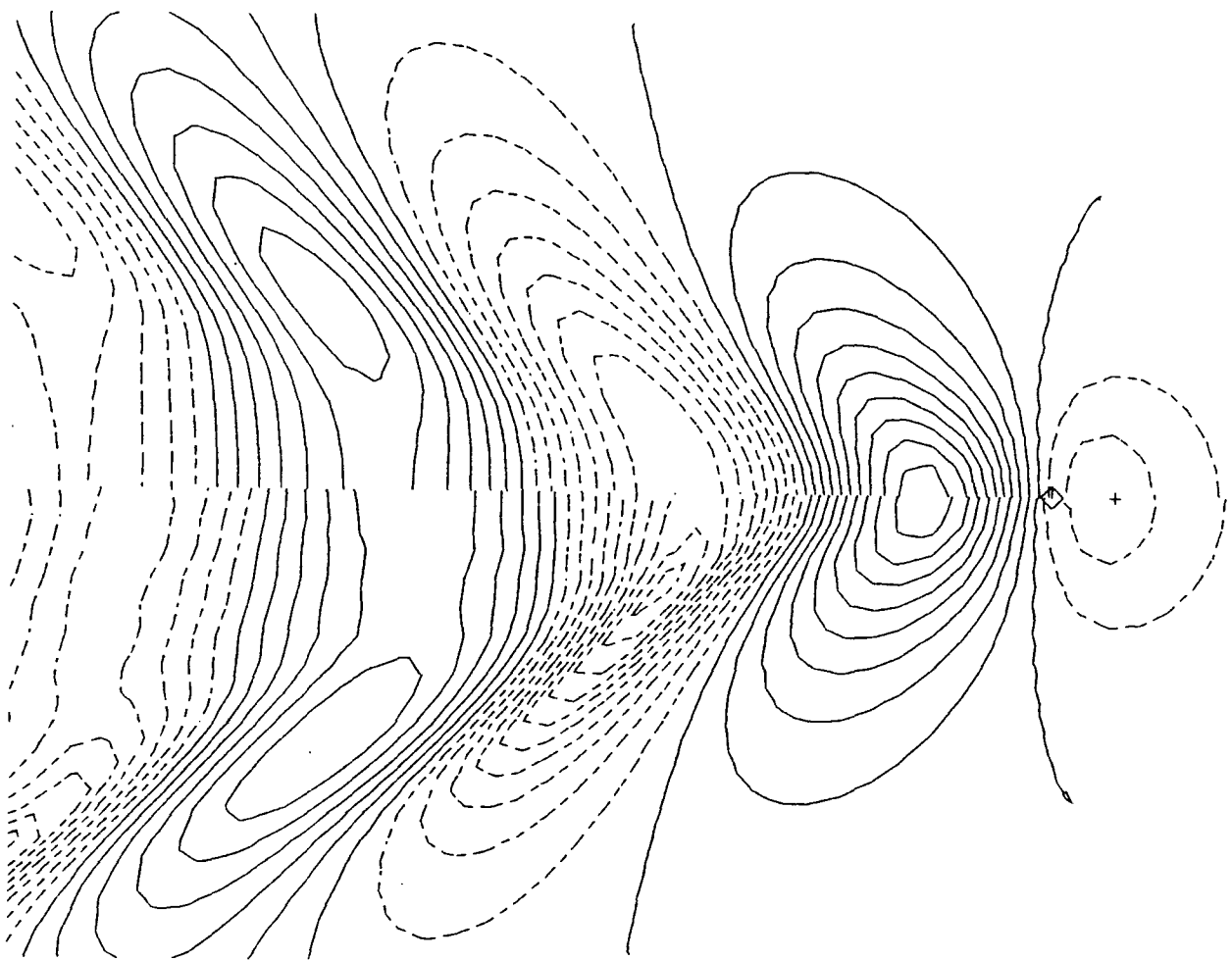


Bild 4-8: Höhenlinien durch einen getauchten Dipol, nichtlineare Rechnung
Oben lineare Lösung, unten nichtlineare Lösung.

Strömung:

$$R_w = \frac{\rho U^2 k_0}{4b} \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon_{\nu} [F_e^2(u_{\nu}) + G_e^2(u_{\nu})] \frac{\sqrt{1 + 4u_{\nu}^2/k_0^2}}{1 + \sqrt{1 + 4u_{\nu}^2/k_0^2}} \quad (4-24)$$

mit $\epsilon_{\nu} = \frac{1}{2}$ für $\nu = 0$, sonst $\epsilon_{\nu} = 1$. Darin sind $u_{\nu} = \pi\nu/b$ und $k_0 = g/U^2$. F_e und G_e sind die Sinus- und die Cosinuskomponenten des freien Wellenspektrums (für symmetrische Strömung sind dies gerade Funktionen). Sie lassen sich durch Fourieranalyse der Wellenerhebung ζ und ihrer Ableitung in x -Richtung in dem Querschnitt, x =konstant, bestimmen:

$$C(u_{\nu}, x) = 2 \int_0^b \zeta(x, y) \cos(u_{\nu}y) dy, \quad (4-25)$$

$$C_x(u_{\nu}, x) = 2 \int_0^b \zeta_x(x, y) \cos(u_{\nu}y) dy. \quad (4-26)$$

Die Komponenten des Wellenspektrums ergeben sich dann aus

$$F_e(u_{\nu}) \sin(sx) + G_e(u_{\nu}) \cos(sx) = 2C(u_{\nu}, x) \quad (4-27)$$

$$F_e(u_{\nu}) \cos(sx) - G_e(u_{\nu}) \sin(sx) = \frac{2}{s} C_x(u_{\nu}, x) \quad (4-28)$$

mit $s = k_0[(1 + \sqrt{1 + 4u_{\nu}^2/k_0^2})/2]^{\frac{1}{2}}$. Die Details der Ableitung können [10] entnommen werden.

Die Integrale (4-25) und (4-26) werden ausgewertet, indem ζ zwischen den Gitterpunkten des Netzes linear interpoliert wird. Es steht nur eine begrenzte Anzahl von Punkten in y -Richtung zur Verfügung, meist weniger als 20, höchstens 40. Daher können so natürlich keine sehr kurzen Querwellenkomponenten erfaßt werden.

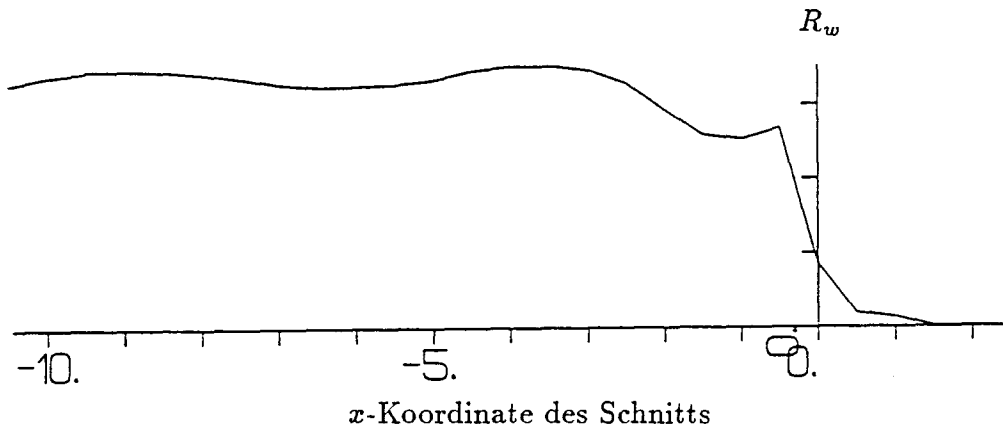


Bild 4-9: Widerstand aus Querschnitt für getauchten Dipol abhängig von der Lage des Querschnitts

Am Beispiel eines getauchten Dipols mit $f = 2\text{m}$, $U = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und Stärke so, daß die x -Komponente der Geschwindigkeit 0.5m vor dem Dipol Null wird, wird der aus dem Querschnitt berechnete Widerstand abhängig von der Lage des Schnitts in Bild 4-9

gezeigt. Die berechneten Widerstandsbeiwerte schwanken nur geringfügig. Man erkennt hieran, daß durch die gewählte Diskretisierung und die numerische Erfüllung der Strahlungsbedingung die Energie gut erhalten wird.

5 Eine Panelmethode mit einfacher numerischer Integration

Bei der Berechnung der Umströmung eines getauchten Körpers ist an der Körperoberfläche die Neumann-Bedingung (3-3) zu erfüllen. Für Potentialströmung wird hierzu meistens auf oder innerhalb der Körperoberfläche eine Singularitätenverteilung so bestimmt, daß diese Bedingung an einzelnen Körperpunkten, den Kollokationspunkten, erfüllt ist. Bei einer glatten Körperoberfläche und einer glatten Quellverteilung ist dann auch an den übrigen Körperpunkten die Neumann-Bedingung näherungsweise erfüllt. Zur Annäherung der Quellverteilung wird die Oberfläche durch eine Anzahl von Panels angenähert. Bei dem bekannten Verfahren von Hess und Smith [14] werden z.B. ebene Vierecke verwendet, bei denen der Kollokationspunkt in der Mitte liegt. Als angenäherte Körperrnormale wird die Normale auf das Panel verwendet. Für die Quellstärke wird ein Polynom niedrigen Grades angesetzt, bei Hess und Smith z.B. die konstante Funktion. Dadurch kann das Integral der Greenfunktion der Quelle über ein Panel analytisch gebildet werden. Eine Schwierigkeit ist dabei, daß der Integrand bei Annäherung des Quellpunkts an den Aufpunkt nicht endlich bleibt. Die analytisch auszuwertenden Integrale sind komplizierte Ausdrücke, die transzendente Funktionen enthalten (z.B. den Arcustangens bei dem Verfahren nach Hess und Smith). Ihre Auswertung erfordert relativ viel Rechenzeit.

Im folgenden zeige ich eine Möglichkeit, wie man das Integral über die Quellverteilung auch durch einfache numerische Integration berechnen kann. Hierzu wird, wo erforderlich, der Integrand so transformiert, daß für ebene Panel mit konstanter Quellstärke der Integrand bei Annäherung des Aufpunkts an den Quellpunkt Null wird.

5.1 Prinzip

$$\phi(\vec{q}) = \int_S M(\vec{p}) G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p \quad (5-1)$$

ist das Potential durch eine (zunächst unbekannte) Quellverteilung auf der Körperoberfläche, G ist die Greenfunktion der Einheitsquelle: $G = -(4\pi R)^{-1}$ für räumliche Strömung und $G = (2\pi)^{-1} \log R$ für ebene Strömung, mit $R = |\vec{p} - \vec{q}|$. Daraus ergibt sich die von der Quellverteilung induzierte Normalgeschwindigkeit auf S ,

$$v_n(\vec{q}) = \vec{n}(\vec{q}) \nabla_q \phi(\vec{q}) = \oint_S M(\vec{p}) \vec{n}(\vec{q}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p - \frac{1}{2} M(\vec{q}). \quad (5-2)$$

Wenn die Normalgeschwindigkeit als Randbedingung vorgegeben ist, ist der wesentliche Teil der Lösung die Tangentialgeschwindigkeit auf S :

$$v_t = \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q \phi(\vec{q}) = \oint_S M(\vec{p}) \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p. \quad (5-3)$$

Für ebene Strömung und endliche Krümmung geht der Integrand in (5-2) für $R \rightarrow 0$ gegen eine Konstante⁴; (5-3) ist singular.

Für räumliche Strömung ist der Integrand in (5-2) für gekrümmte Flächen singular; im Inneren von ebenen Panels geht er jedoch gegen Null. Der Integrand in (5-3) ist auch für ebene Panel mit konstanter Quellstärke singular. Es ergeben sich also keine prinzipiellen Schwierigkeiten bei einfacher numerischer Integration von (5-2), aber (5-3) muß für eine numerische Integration so verändert werden, daß der Integrand überall endlich bleibt.

Zunächst soll versucht werden durch weitere Terme die Eigenschaften des Integranden in (5-2) für die numerische Integration zu verbessern. Dazu nutzt man die folgenden Sätze:

$G(\vec{p}, \vec{q})$ kann auch als Potential an der Stelle \vec{p} durch eine Einheitsquelle bei \vec{q} interpretiert werden:

$$\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = -\nabla_p G(\vec{p}, \vec{q}). \quad (5-4)$$

Der Fluß durch eine geschlossene Fläche (2-dimensional Kontur) aufgrund einer Einheitsquelle auf ihrem (glatten) Rand ist die halbe Ergiebigkeit:

$$\oint_S \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) \vec{n}(\vec{p}) dS_p = -\oint_S \nabla_p G(\vec{p}, \vec{q}) \vec{n}(\vec{p}) dS_p = \frac{1}{2}. \quad (5-5)$$

- Addiert man, einem Vorschlag von Miloh folgend, $M(\vec{q})$ mal (5-5) zu (5-2), so erhält man mit

$$v_n(\vec{q}) = \oint_S [M(\vec{p}) \vec{n}(\vec{q}) + M(\vec{q}) \vec{n}(\vec{p})] \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p - M(\vec{q}) \quad (5-6)$$

einen Ausdruck, dessen Integrand für ebene Strömung bei glatter Kontur für $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ verschwindet.

- Subtrahiert man $M(\vec{q})$ mal (5-5) von (5-2), so erhält man

$$v_n(\vec{q}) = \oint_S [M(\vec{p}) \vec{n}(\vec{q}) - M(\vec{q}) \vec{n}(\vec{p})] \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p. \quad (5-7)$$

Anhang A zeigt das Verhalten der Integranden, wenn sich \vec{p} an \vec{q} annähert. Bei $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ gehen die Integranden in (5-2) und (5-7) für ebene Strömung gegen eine Konstante und in (5-6) sogar gegen 0. Alle drei Integrale können also mit einfacher numerischer Integration berechnet werden, nach dem Vorschlag von Miloh (5-6) sogar bei gekrümmten Panels.

Im Falle der räumlichen Strömung ist das Verhalten anders. Die Integranden in (5-2) und (5-7) sind für $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ singular, der Integrand in (5-6) geht gegen eine von der Richtung der Annäherung abhängige Konstante. Führt man jedoch ebene Panel zur Diskretisierung des Körpers ein, so gehen die Integranden in allen drei Gleichungen gegen 0. Testberechnungen mit räumlicher Strömung zeigen, daß (5-2), (5-6) oder (5-7) verwendet werden können. Bei gleicher Diskretisierung erhält man aber mit (5-2) oder (5-7) meist genauere Ergebnisse (siehe unten).

⁴Die Grenzübergänge sind in Anhang A abgeleitet.

5.1.1 Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit auf der Körperoberfläche für ebene Strömung

Die Zirkulation in einer durch Quellen erzeugten Strömung ist Null:

$$\oint_s \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) \vec{t}(\vec{p}) dS_p = - \oint_s \nabla_p G(\vec{p}, \vec{q}) \vec{t}(\vec{p}) dS_p = 0. \quad (5-8)$$

Damit kann (5-3) in

$$\nabla_q \phi(\vec{q}) \vec{t}(\vec{q}) = \oint_s [M(\vec{p}) \vec{t}(\vec{q}) - M(\vec{q}) \vec{t}(\vec{p})] \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p \quad (5-9)$$

umgeformt werden. Der Integrand in (5-9) bleibt endlich, wenn $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ (siehe Anhang A). Werden Panel mit konstanter Quellstärke verwendet, geht der Integrand gegen Null. Man kann diese Gleichung also numerisch integrieren, wobei nur die Bogenlänge ΔS von Konturstücken und erste Ableitungen des Quellpotentials für jede \vec{p} - \vec{q} -Kombination benötigt werden.

5.1.2 Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit auf der Körperoberfläche für räumliche Strömung

Ist eine Kugel mit einer Quellverteilung konstanter Stärke belegt, induziert diese auf der Kugeloberfläche keine Tangentialgeschwindigkeit:

$$\int_{\text{Kugel}} \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q G(\vec{k}, \vec{q}) dS_k = 0. \quad (5-10)$$

Die Kugel wird so gelegt, daß sie die Körperoberfläche bei \vec{q} tangiert und daß ihr Mittelpunkt innerhalb des Körpers liegt. Dann gibt es für jeden Punkt \vec{k} auf der Kugeloberfläche einen Punkt \vec{p} auf der Körperoberfläche derart, daß die Gerade durch \vec{p} und \vec{k} durch den Mittelpunkt geht. Die dadurch beschriebene Projektion werde mit $\vec{k} = P(\vec{p})$ bezeichnet. Bei dieser Projektion werden Flächenstücke S_k auf der Kugel in Flächenstücke S_p auf dem Körper projiziert. r sei die relative Größe der Flächenstücke: $S_k = r S_p$. r hat das Vorzeichen des Skalarprodukts der entsprechenden Normalenvektoren auf der Körper- und der Kugeloberfläche. Damit kann (5-10) in ein Integral über die Körperoberfläche verwandelt werden:

$$\oint_s \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q G(P(\vec{p}), \vec{q}) r dS_p = 0. \quad (5-11)$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $M(\vec{q})$ und subtrahiert ihn von (5-3) so erhält man

$$v_t = \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q \phi(\vec{q}) = \oint_s [M(\vec{p}) \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) - M(\vec{q}) \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q G(P(\vec{p}), \vec{q}) r] dS_p. \quad (5-12)$$

Bei Annäherung von \vec{p} an \vec{q} ist der Integrand immer noch singulär (Anhang A); er geht jedoch im Inneren von Panels gegen Null, wenn man Panel mit konstanter Quellstärke verwendet.

5.2 Diskretisierung

Nach der oben angegebenen Methode können das Potential und seine Ableitungen berechnet werden, ohne daß komplizierte Ausdrücke, die transzendente Funktionen enthalten, berechnet werden müssen. Im folgenden beschreibe ich die Methode nur für räumliche Strömung.

Die Oberfläche eines geschlossenen Körpers wird in N Panel eingeteilt. Für alle Panel werden die Fläche f_i , die Koordinaten des Mittelpunkts \vec{x}_i , der Einheitsnormalenvektor \vec{n}_i sowie zwei etwa orthogonale Tangentenvektoren \vec{s}_i und \vec{t}_i bestimmt und der Radius einer tangierenden Kugel R_i festgelegt. An jedem Punkt \vec{x} der Oberfläche sei die Normalgeschwindigkeit v_n gegeben (z.B. $v_n = U n_x$ für einen Körper in Parallelanströmung gegen die x -Achse).

Die Mittelpunkte \vec{x}_i werden sowohl als Stützstellen für die numerische Integration über die Körperoberfläche als auch als Kollokationspunkte (Punkte, an denen die Randbedingung numerisch erfüllt wird) benutzt. Die Integration wird durch einfache Summation ersetzt.

5.2.1 Bestimmung der Quellstärken

Zur Bestimmung der Quellstärken können die diskretisierten Formen von (5-2),(5-6) oder (5-7) verwendet werden. So ergibt sich aus

- Gleichung (5-2):

$$v_n(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N M_i \vec{n}_k \cdot \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i (1 - \delta_{ik}) - \frac{1}{2} M_k + I_k \quad (5-13)$$

für $k = 1, \dots, N$, $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ und $= 1$ für $i = k$. I_k ist der Teil des Integrals über die Fläche des k -ten Panels. Der Integrand wird für ebene Panel Null, daher setze ich $I_k = 0$.

(5-13) ist ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die unbekanntenen $M_i = M$ an den Orten \vec{x}_i :

$$v_n(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N C_{ki} M_i, \quad (5-14)$$

$$\begin{aligned} C_{ki} &= \vec{n}_k \cdot \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i \quad \text{wenn } i \neq k \\ C_{kk} &= -0.5 \end{aligned}$$

- Gleichung (5-6):

$$v_n(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N [M_i \vec{n}_k \cdot \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) + M_k \vec{n}_i \cdot \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k)] f_i (1 - \delta_{ik}) - M_k + I_k \quad (5-15)$$

für $k = 1, \dots, N$. Der Integrand geht für gekrümmte Panel gegen eine Konstante. Man kann daher versuchen, I_k durch den Mittelwert des Integranden an den $j = 1 \dots m$ Nachbarpanels anzunähern:

$$I_k = \frac{f_k}{m} \sum_{j=1}^m [M_j \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{x}_j, \vec{x}_k) + M_k \vec{n}_j \nabla_k G(\vec{x}_j, \vec{x}_k)]. \quad (5-16)$$

(5-15) ist ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die unbekanntenen $M_i = M$ an den Orten \vec{x}_i .

$$v_n(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N C_{ki} M_i, \quad (5-17)$$

$$\begin{aligned} C_{ki} &= \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i && \text{wenn } i \neq k \\ &+ \frac{1}{m} \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_k && \text{wenn } i \text{ Nachbar von } k \\ C_{kk} &= -1 + \sum_{i=1}^N \vec{n}_i \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i (1 - \delta_{ik}) + \frac{f_k}{m} \sum_{j=1}^m \vec{n}_j \nabla_k G(\vec{x}_j, \vec{x}_k) \end{aligned}$$

- Gleichung (5-7):

$$v_n(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N [M_i \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) - M_k \vec{n}_i \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k)] f_i (1 - \delta_{ik}) + I_k \quad (5-18)$$

für $k = 1, \dots, N$. Für ebene Panel wird der Integrand Null. Ich setze daher $I_k = 0$. (5-18) ist ein lineares algebraisches Gleichungssystem für die unbekanntenen $M_i = M$ an den Orten \vec{x}_i .

$$v_n(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^N C_{ki} M_i, \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} C_{ki} &= \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i && \text{wenn } i \neq k \\ C_{kk} &= - \sum_{i=1}^N \vec{n}_i \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i (1 - \delta_{ik}) \end{aligned}$$

In jedem Fall entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix eine starke Hauptdiagonale hat und das daher mit einem einfachen Gauß-Seidel-Iterationsalgorithmus mit wenigen Iterationen gelöst werden kann.

5.2.2 Bestimmung der Geschwindigkeit an Punkten auf der Körperoberfläche

Nach Lösen des Gleichungssystems können die Tangentialgeschwindigkeiten an den Kollationspunkten nach Gleichung (5-12) bestimmt werden. In diskreter Form lautet (5-12)

$$v_t(\vec{x}_k) = \vec{t}_k \nabla_k \phi = \sum_{i=1}^N \vec{t}_k [M_i \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) - M_k \nabla_k G(\vec{p}_k(\vec{x}_i), \vec{x}_k) r_k(\vec{x}_i)] f_i (1 - \delta_{ik}) + J_k. \quad (5-20)$$

J_k ist der Anteil des Integrals aus dem Panel k . Für Panel mit konstanter Quellstärke wird der Integrand bei Annäherung des Quell- an den Aufpunkt Null. Ich setze daher $J_k = 0$.

Die Projektion \vec{p}_k von \vec{x}_i auf die bei \vec{x}_k tangierende Kugel mit dem Radius R_k und dem Mittelpunkt $\vec{o}_k = \vec{x}_k + R_k \vec{n}_k$ ergibt sich aus:

$$\vec{p}_k(\vec{x}_i) = \frac{\vec{x}_i - \vec{o}_k}{|\vec{x}_i - \vec{o}_k|} R_k + \vec{o}_k. \quad (5 - 21)$$

Der Flächenfaktor r_k ergibt sich zu

$$r_k(\vec{x}_i) = \frac{\vec{n}_i(\vec{x}_i - \vec{o}_k)}{|\vec{x}_i - \vec{o}_k|} \left(\frac{R_k}{|\vec{x}_i - \vec{o}_k|} \right)^2. \quad (5 - 22)$$

Für die Bestimmung der Geschwindigkeitskomponente v_s in Richtung des anderen Tangentenvektors \vec{s}_k geht man entsprechend vor.

Sind beide Komponenten der Tangentialgeschwindigkeit und die Normalgeschwindigkeit bekannt, kann man den von der Quellverteilung induzierten Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_k aus den folgenden Bedingungen bestimmen:

$$\vec{v}_k \vec{n}_k = v_n, \quad \vec{v}_k \vec{s}_k = v_s, \quad \vec{v}_k \vec{t}_k = v_t. \quad (5 - 23)$$

5.3 Berechnung der Geschwindigkeit an Punkten außerhalb des Körpers

Die Geschwindigkeit an einem Punkt \vec{q} in der Strömung ergibt sich aus (5-1) zu

$$\nabla \phi(\vec{q}) = \int_S M(\vec{p}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) dS_p. \quad (5 - 24)$$

Der Integrand ist hier nicht singulär.

In diskretisierter Form ist (5-24)

$$\nabla \phi(\vec{q}) = \sum_{i=1}^N M_i \nabla_q G(\vec{x}_i, \vec{q}) f_i. \quad (5 - 25)$$

Diese einfache Berechnung ist bei Punkten nahe an der Körperoberfläche nicht sehr genau.

5.4 Programm für die Panelmethode

Zur Untersuchung der Eigenschaften der Panelmethode mit einfacher numerischer Integration habe ich das Programm PAMENI geschrieben. Die Oberfläche muß vollständig mit Panels bedeckt sein. Symmetrien zu den Koordinatenebenen können ausgenutzt

werden. Randbedingung ist die Normalenbedingung (3-3) für Parallelanströmung gegen die x -Achse.

Zur Vereinfachung der Dateneingabe habe ich ein Vorprogramm geschrieben, das die Panelflächen, Normalen, Tangenten und die Radien der tangierenden Kugeln bestimmt. Es verwendet ein Netz von Dreiecken auf der Körperoberfläche.

Die Programme sind in Anhang B beschrieben.

5.5 Testrechnungen

5.5.1 Umströmung einer Kugel

Für den Fall der Umströmung einer Kugel wurden Testrechnungen durchgeführt, um die Genauigkeit und das Konvergenzverhalten der Methode zu prüfen. Wenn N die Anzahl der Panel auf der Kugeloberfläche ist, so ist $h = N^{-\frac{1}{2}}$ ein Maß für die Maschenweite des Netzes. Es wurde nur ein Achtel der Kugeloberfläche mit Panels belegt.

Ich habe verschiedene Diskretisierungen und Normalenbedingungen untersucht, die bei Netzverfeinerungen alle zur analytischen Lösung konvergieren. Es wird stets eine größere Genauigkeit erzielt, wenn die Kollokationspunkte, wie bei den folgenden Berechnungen, auf der Kugeloberfläche, nicht auf dem ebenen Dreieck liegen. Zur Bestimmung der Tangentialgeschwindigkeit auf S muß stets mit (5-20) gerechnet werden; wird eine direkte Diskretisierung von (5-3) verwendet, vermindert sich der Fehler bei Netzverfeinerung nicht.

Die Zeilen der folgenden Tabellen entsprechen verschiedenen Formeln für die Bestimmung der Quellstärke:

- A** Gleichung (5-14),
- B** Gleichung (5-17) ohne Mittelung der Nachbarknoten,
- C** Gleichung (5-17) mit Mittelung der Nachbarknoten,
- D** Gleichung (5-19).

In den folgenden Tabellen sind die auf die Anströmgeschwindigkeit bezogenen größten Fehler E in irgendeiner Komponente der Geschwindigkeit an den Kollokationspunkten in % angegeben.

N	1	4	16	64	256
A	19.7	13.5	8.05	4.69	2.47
B	25.0	22.6	10.4	5.61	2.81
C	25.2	22.7	10.2	5.57	2.79
D	8.21	16.4	9.25	4.82	2.45

1. Panelfläche ist die Fläche des ebenen Dreiecks; Normale und Tangente des Dreiecks.

N	1	4	16	64	256
A	13.5	10.8	8.36	4.65	2.47
B	19.8	15.7	8.09	4.90	2.63
C	20.3	15.8	7.99	4.85	2.62
D	8.21	16.4	9.24	4.82	2.45

2. Wie 1., jedoch verbesserte Flächenberechnung für gekrümmtes Dreieck.

N	1	4	16	64	256
A	19.7	9.78	3.76	1.57	0.77
B	25.0	18.0	8.45	3.57	1.63
C	25.2	18.2	8.50	3.58	1.63
D	8.21	6.45	3.44	1.84	0.94

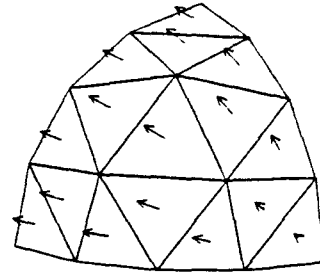
3. Wie 1., jedoch Kugelnormalen und -tangente.

N	1	4	16	64	256
A	13.5	5.50	3.17	1.57	0.78
B	19.8	11.5	5.70	2.76	1.42
C	20.3	11.7	5.75	2.77	1.42
D	8.21	6.40	3.41	1.87	0.95

5. Wie 4., jedoch Radius der tangierenden Kugeln bei der Tangentialkomponentenberechnung ist nur der halbe Kugelradius.

N	1	4	16	64	256	1024
A	13.5	5.62	3.19	1.58	0.78	0.39
B	19.8	11.3	5.73	2.77	1.42	0.71
C	20.3	11.6	5.78	2.77	1.42	0.71
D	8.21	6.55	3.43	1.86	0.94	0.47

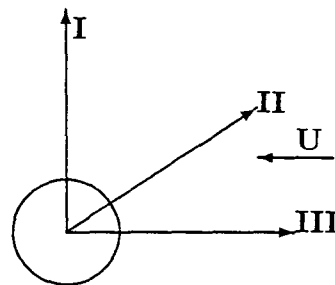
4. Wie 3., jedoch verbesserte Flächenberechnung.



Netz und berechnete Geschwindigkeiten mit 16 Panels; A.

Die obigen Tabellen zeigen: Unabhängig von den Details der Berechnung wird bei einer Halbierung der Maschenweite auch der Fehler halbiert: $E \sim h$. Bei gleicher Panelzahl sind (5-19) und (5-14) besser als (5-17). Bei feiner Diskretisierung ist (5-14) meist am besten und am einfachsten. Die genaue Berechnung der Normalen und Tangente bringt stets eine Verbesserung. Die Ergebnisse mit (5-19) scheinen kaum von der Genauigkeit der Flächenberechnung abzuhängen. Bei den beiden anderen Gleichungen erzielt man mit besserer Flächenberechnung auch kleinere Fehler. Durch Annäherung des Integranden auf dem Panel, auf dem auch der Kollokationspunkt liegt, durch das Mittel seines Wertes an den drei Nachbarpanels erreicht man für (5-17) keine Verbesserung. Generell ist für räumliche Strömung durch die von Miloh vorgeschlagenen Maßnahmen keine Verbesserung zu erzielen, so daß für die weiteren Untersuchungen stets (5-14) verwendet wird.

Zur Untersuchung der berechneten Strömungsgeschwindigkeiten an Punkten außerhalb des Körpers wurden Punkte in den Richtungen $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ und $(1,0,0)$ betrachtet. Sie werden im folgenden mit I, II und III bezeichnet. Bei der verwendeten Diskretisierung einer Achtel-Kugel liegen die Punkte I immer gegenüber einem Kollokationspunkt, während II und III immer vor einer Panelecke liegen.



N		5%	1%	0.1%
1	I	0.2	-	-
	II	0.2	1.2	-
	III	1	1.2	-
4	I	<0.02	0.4	1.8
	II	0.8	2	-
	III	0.4	1.4	-
16	I	<0.02	0.02	0.5
	II	0.4	1.2	-
	III	0.08	0.8	-
64	I	<0.2	<0.02	0.3
	II	0.06	0.8	-
	III	<0.02	0.4	2

Relativer Radius der Fehlerschranken.

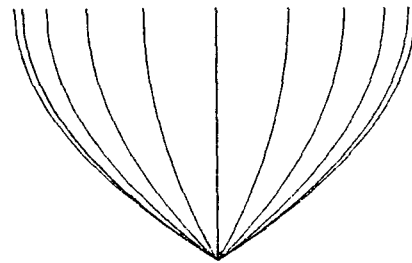
Als übersichtliches Kriterium für die erreichte Genauigkeit habe ich den Abstand von der Kugeloberfläche gewählt, von dem ab der größte Fehler in den Komponenten der Geschwindigkeit stets kleiner ist als eine Schranke. Der Abstand ist auf den Radius bezogen.

5.5.2 Wigley-Schiff

Die Methode wurde weiter an einer schiffsähnlichen Form erprobt: dem Wigley-Schiff, das durch

$$Y = .8(1 - Z^2)\left(1 - \frac{X^2}{64}\right) \quad (5-26)$$

beschrieben wird [18].



Spantenriß des Wigley-Schiff

Diese Schiffsform hat scharfe, senkrechte Steven. Wegen des damit verbundenen starken Anstiegs der Quellstärke in einem sehr kurzen Bereich und der unstetigen Normalen erfüllen mit Panelmethoden berechnete Strömungen die Randbedingungen an oder in der Nähe der Ecke nicht. Dennoch können praktisch brauchbare Lösungen gefunden werden, wenn sich die Verletzung der Randbedingungen auf einen kleinen Bereich beschränkt und nicht die Strömung in einem einigem Abstand wesentlich beeinflusst. Panelmethoden mit Kollokations- und Aufpunkten an den Panelecken bereiten Körperecken besondere Schwierigkeiten. Beim Panelverfahren nach Webster muß das Schiff z.B. abgerundet werden, um keine stark schwankende Lösung mit unplausiblen Geschwindigkeiten zu erhalten [4,5]. Natürlich wird bei Lösungen mit Kollokationspunkten in den Panelmitten die Körperrandbedingung in der Nähe von Ecken ebenfalls verletzt, jedoch geht hiervon keine Störung der Gesamtlösung aus.

Es wurde die Symmetrie zum Hauptspant ausgenutzt und nur ein Achtel des Doppelkörpermodells diskretisiert. Die hier gezeigten Ergebnisse wurden mit (5-14) berechnet. Mit den anderen Gleichungen ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede.

Der Geschwindigkeitsverlauf entlang der Oberfläche ist glatt. Da aber bei dieser schlanken Form die Abweichungen von der Parallelströmung klein sind, wurden in den Bildern

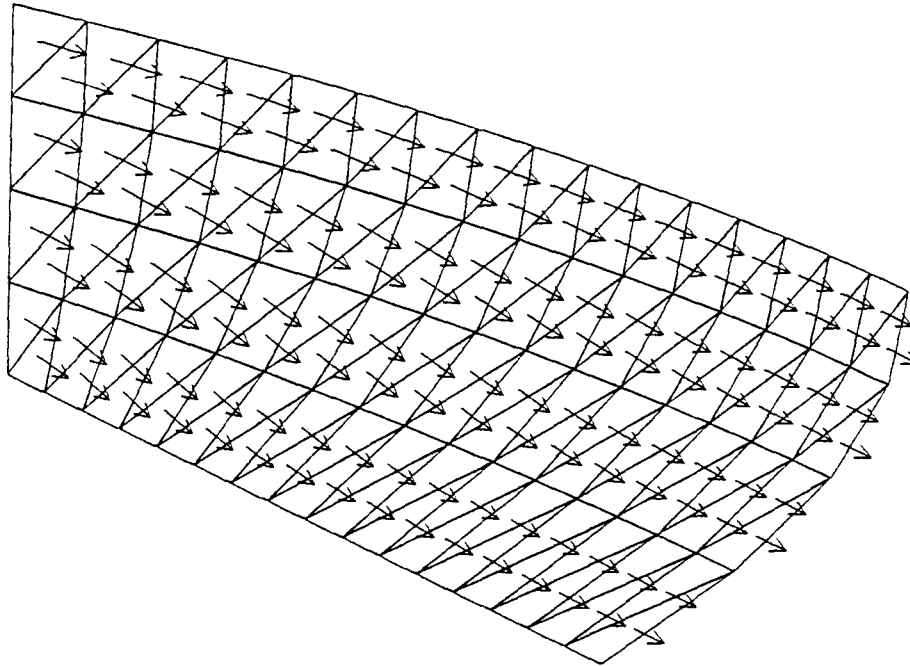


Bild 5-1: Perspektivische Darstellung des Netzes und der berechneten Geschwindigkeiten an den Kollokationspunkten für ein Netz mit 128 Panels auf $1/8$ der Oberfläche des Doppelkörpermodells in Parallelanströmung

(5-2) und (5-3) zum besseren Vergleich nur die durch die berechnete Quellverteilung induzierten Geschwindigkeiten gezeichnet, so daß Unterschiede besser zu erkennen sind.

Es sind also auch schlanke, schiffsähnliche Formen nach dieser Methode berechenbar. Örtliche Verfeinerung bringt auch bessere Ergebnisse (Bild 5-2).

Bild (5-3) zeigt Geschwindigkeiten in der Ebene $z = 0$ an Punkten, die auch als Kollokationspunkte an der freien Wasseroberfläche verwendet werden könnten.

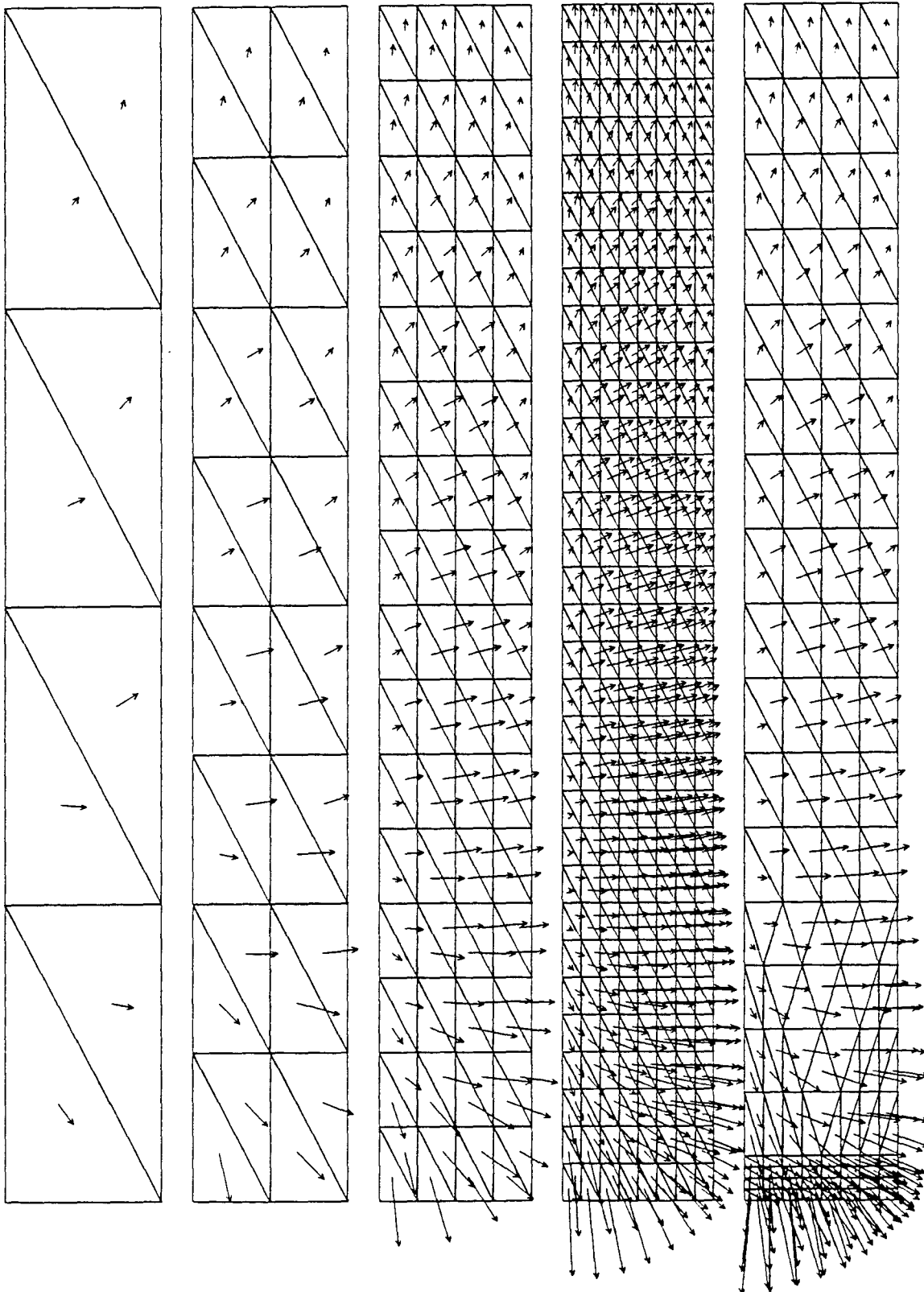


Bild 5-2: Blick in Richtung der y -Achse auf eine Wigley-Schiffsform in Parallelanströmung. Abweichungen von der Parallelströmung für 8, 32, 128 und 512 Panel auf der Schiffsoberfläche und mit 208 Panels, die durch örtliche Verfeinerung des Netzes mit 128 Panels am Vorsteven erzeugt wurden

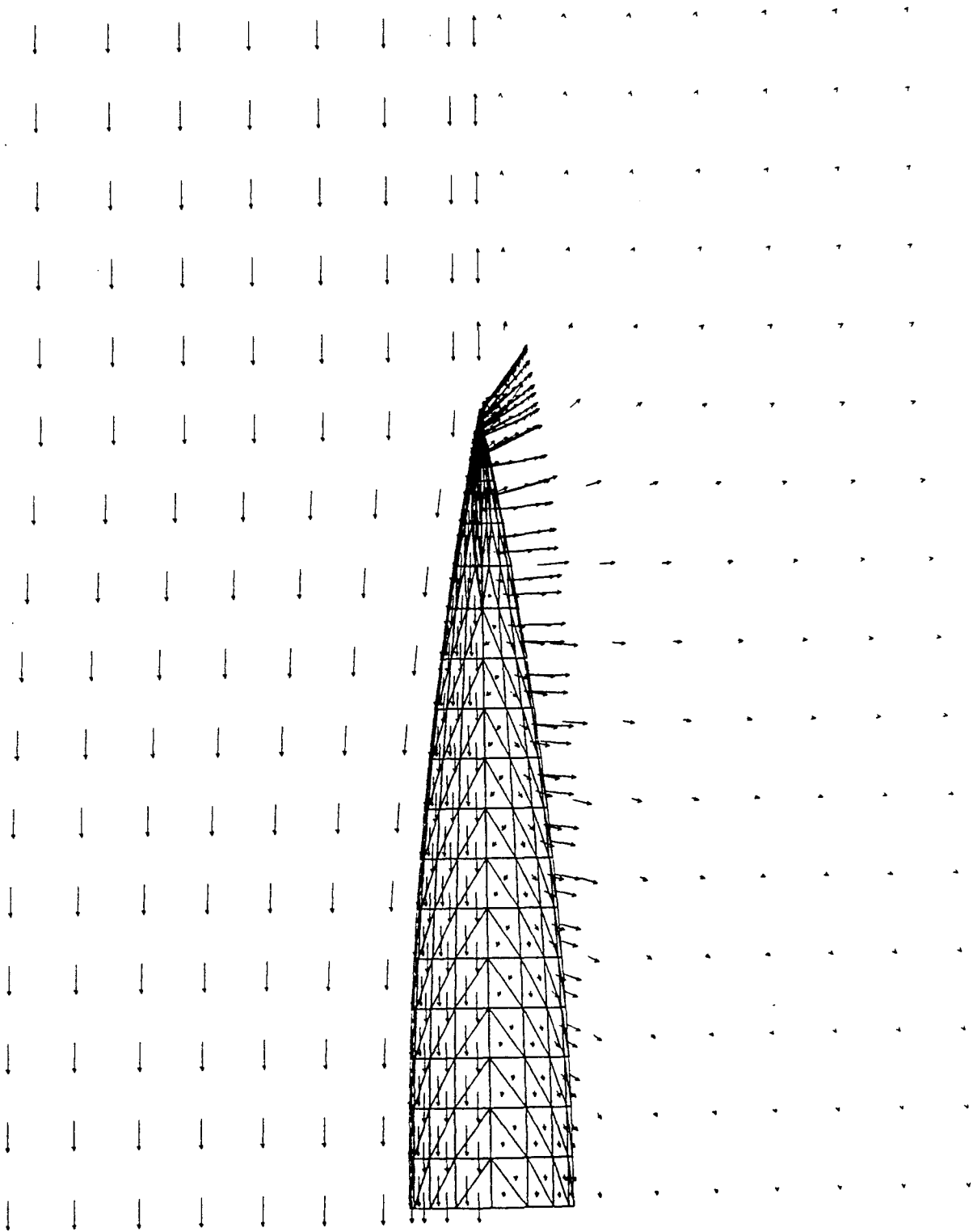


Bild 5-3: Blick in Richtung der z -Achse. Netz mit 208 Panels. Geschwindigkeiten an den Kollokationspunkten und an Punkten in der Ebene $z = 0$. Links Gesamtgeschwindigkeit, rechts Abweichung von der Parallelströmung (Pfeile zur Verdeutlichung 10-fach verlängert).

5.5.3 Vergleich mit anderen Panelmethoden

Anhand der Kugelumströmung soll das Verfahren mit anderen Panelmethoden verglichen werden. Es werden die folgenden Ergebnisse zum Vergleich herangezogen:

Eigene Ergebnisse eines Panelverfahrens nach Webster [28], bei dem ebene, innerhalb des Körpers (statt an der Oberfläche S) angeordnete Panel mit linear-veränderlicher Quellstärke verwendet werden.

Ergebnisse mit der Panel-Methode nach Hess und Smith [14], bei der viereckige, ebene, auf S angeordnete Panel mit konstanter Quellstärke verwendet werden. Für die Rechnungen danke ich Herrn Denker im Institut für Schiffbau der Universität Hamburg.

Ergebnisse einer Randintegralmethode höherer Ordnung von Nowak [24], bei der dreieckige, gekrümmte Panel mit linear veränderlicher Quellstärke verwendet werden.

Es wurde jeweils eine Achtel-Kugel diskretisiert; die berechneten Geschwindigkeiten an den Kollokationspunkten werden mit analytischen Werten verglichen. Bild 5-4 zeigt die Standardabweichung von $|\vec{v}_{\text{Panel}} - \vec{v}_{\text{analytisch}}|$ in doppelt-logarithmischer Auftragung.

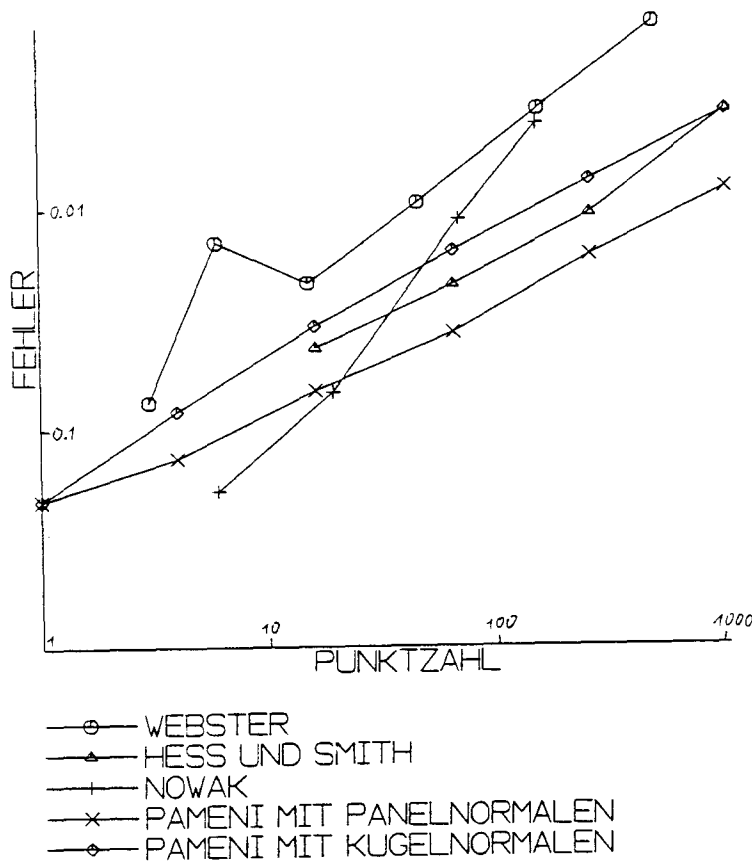


Bild 5-4: Standardabweichung der berechneten Lösung von der analytischen Lösung für eine Kugel

Es wird deutlich, daß Hess und Smith und PAMENI Verfahren erster Ordnung sind:

Eine Halbierung der Maschenweite h (vierfache Punktzahl) sorgt auch für eine Halbierung des Fehlers. Bei der Methode von Webster ist der Fehler sogar proportional zu $h^{\frac{3}{2}}$, bei der von Nowak proportional zu h^2 .

Bei den hauptsächlich interessierenden Punktzahlen sind die Fehler der Rechnung nach Webster am geringsten. PAMENI ist offensichtlich genauer als Hess und Smith, wenn die Normalen exakt genommen werden; wenn die Normale auf dem ebenen Panel gebildet wird, ist PAMENI ungenauer. Das Verfahren von Nowak wird erst bei höheren Kollokationspunktzahlen günstiger.

Die Rechenzeiten der einzelnen Verfahren können leider nicht miteinander verglichen werden, da sie bei den Verfahren von Nowak und Hess und Smith nicht bekannt sind und weil unsere Implementation der Methode von Webster die Gauß-Elimination zur Lösung des linearen Gleichungssystems verwendet, während PAMENI einen wesentlich schnelleren iterativen Löser verwendet.

Zur Beurteilung der Eignung verschiedener Panelverfahren für die Berechnung der Umströmung von Schiffen ist das Beispiel der Kugelumströmung leider ohnehin schlecht geeignet. Praktische Schiffsformen haben vorn und achtern oft spitze Steven. Panelverfahren sind aber eigentlich nur für glatte Körper geeignet. An oder in der Nähe der Spitzen werden stets Fehler gemacht. Dennoch können sinnvolle Lösungen auch für solche Körper bestimmt werden. Wichtig ist hierfür, daß die örtlichen Fehler an den Spitzen nur geringen Einfluß in anderen Bereichen haben. Gerade in dieser Hinsicht ist das für den Fall der Kugel sehr erfolgreiche Verfahren von Webster besonders schlecht: Wird die Spitze nicht sehr sorgfältig abgerundet und fein paneliert, so ergeben sich stark schwankende Quellstärken an den Nachbarpunkten mit entsprechend völlig falschen Geschwindigkeiten und Drücken (Bild 5-5). Diese Eigenschaft hat sich in der praktischen Anwendung als sehr ungünstig erwiesen, so daß nur mit einiger Erfahrung und mehrfachen Korrekturen brauchbare Netze gefunden werden. Panelverfahren mit Kollokationspunkten in der Panelmitte sind weniger empfindlich, wie für die hier benutzte Methode im vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde.

Ein weiteres wichtiges Kriterium zur Beurteilung von Panelmethoden ist die Einfachheit der Implementation. Verfahren höherer Ordnung wie das von Nowak erfordern sehr aufwendige Programme und komplizierte Datenstrukturen. Bei der Methode von Webster hat es sich als nachteilig erwiesen, daß bei der Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten für jede Quell-Aufpunkt Kombination mehrere Queldreiecke Beiträge liefern. Wegen der hohen Anzahl dieser Geschwindigkeitskomponenten ($3N^2$) können diese aber auf kleineren Rechnern nicht im Arbeitsspeicher gehalten werden, so daß eine aufwendige Verwaltung in Direktzugriffsdateien erforderlich ist. Wird die Quellverteilung wie bei Hess und Smith und PAMENI mit Panels konstanter Quellstärke diskretisiert, liefert jeweils nur ein Panel einen Beitrag, und die Daten können während der Berechnung der Koeffizienten des Gleichungssystems in eine sequentielle Datei geschrieben und nach Bestimmung der Quellstärken zur Geschwindigkeitsberechnung wieder eingelesen werden.

Mit dreieckigen Panels (Webster, PAMENI) lassen sich praktische Formen erheblich

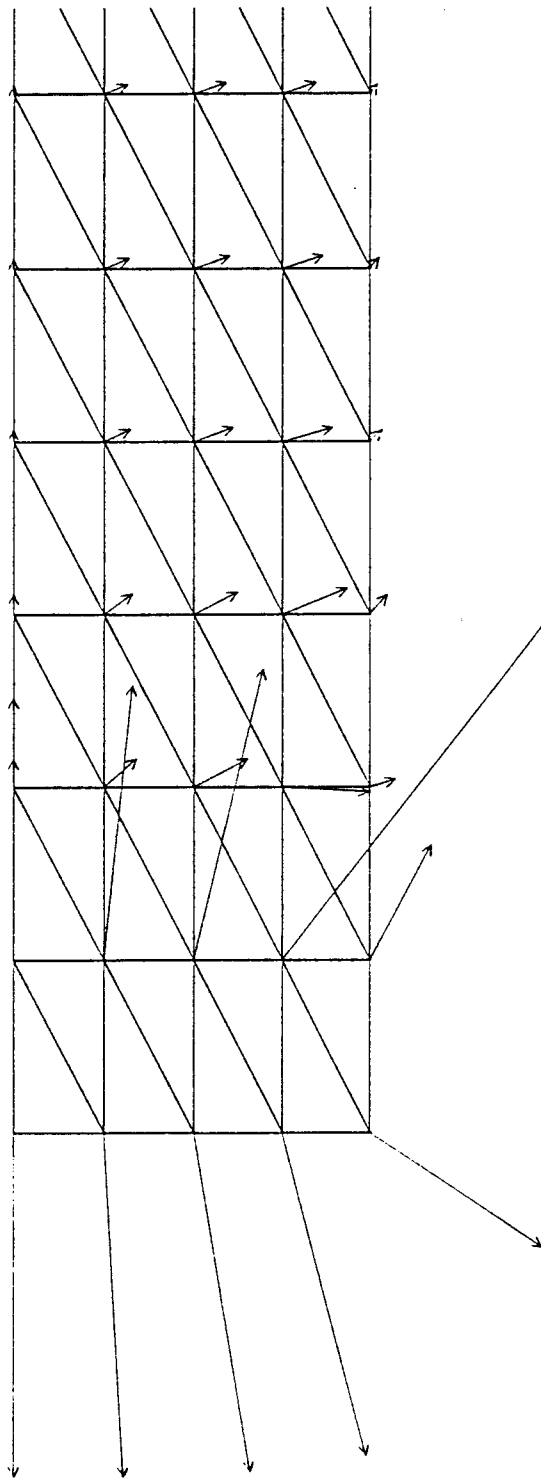


Bild 5-5: Störgeschwindigkeiten am Wigley-Schiff berechnet nach Webster ohne Abrundung des Steven

einfacher diskretisieren als mit viereckigen (Hess und Smith). Auch lassen sich örtliche Verfeinerungen problemlos verwirklichen.

Nach Meinung des Autors sind also PAMENI und Hess und Smith für den praktischen Einsatz an Schiffskörpern am besten geeignet. Hess und Smith hat den Nachteil, daß zur Integration der Greenfunktionen transzendente Funktionen mit großer Genauigkeit berechnet werden müssen. Demgegenüber erfordert PAMENI die Bestimmung der tangierenden Kugeln und die möglichst genaue Bestimmung der Panelmitten und der Oberflächennormalen an diesen Punkten.

6 Körper an der freien Wasseroberfläche

6.1 Prinzip

Zur Berechnung der stationären Strömung um einen Körper an der freien Wasseroberfläche werden die in den beiden vorhergehenden Kapiteln angegebenen Methoden zur Erfüllung der Körperrandbedingung und der Randbedingung an der Wasseroberfläche miteinander kombiniert. Es wird ein Teil der Wasseroberfläche um den Körper mit Kollokationspunkten für die Oberflächenbedingung belegt. Darüber befindet sich eine Schicht von Quellpunkten. Die Quellen werden an der Ebene $y = 0$ gespiegelt. Die innerste Reihe von Kollokationspunkten befindet sich in einem kleinen Abstand vom Körperrand.

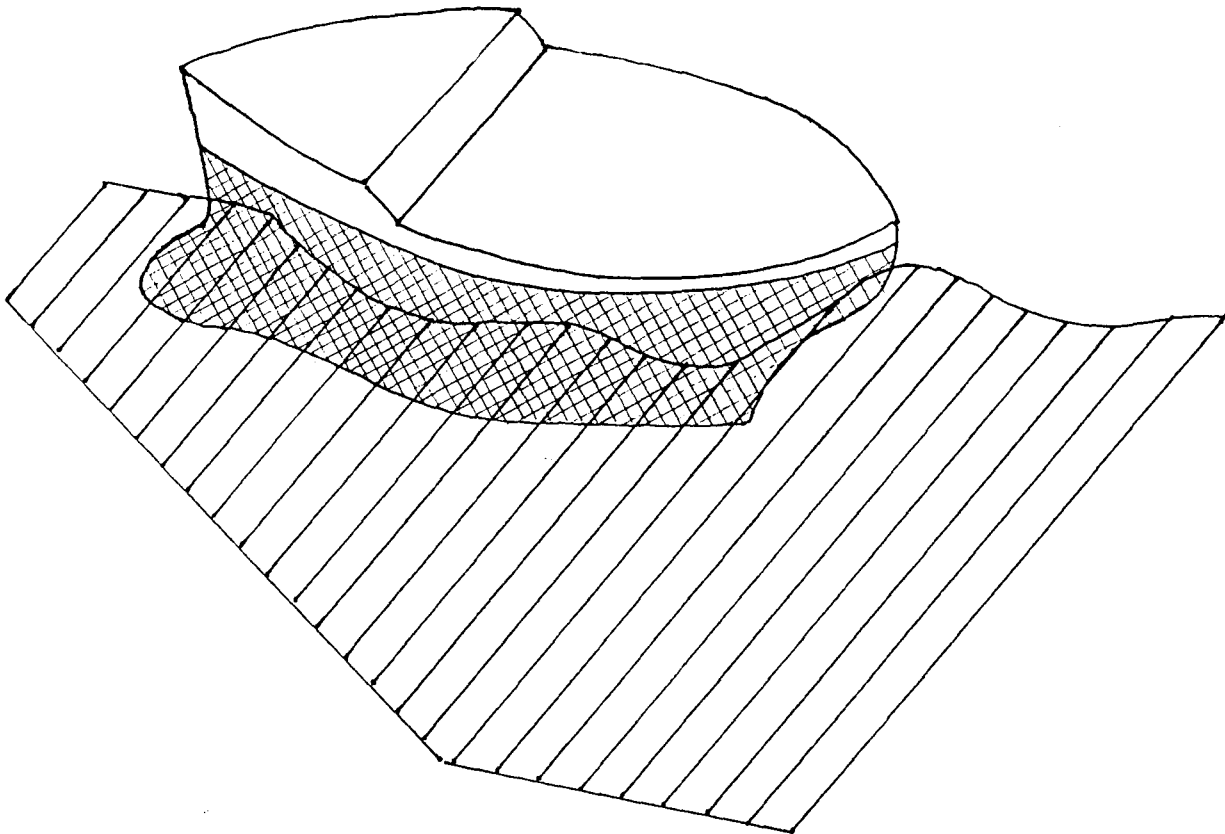


Bild 6-1: Diskretisierte Teile von Körper- und Wasseroberfläche

Die Körperoberfläche wird bis zu einer etwa horizontalen Ebene oberhalb der Wasseroberfläche diskretisiert. An dieser Ebene (und an der Mittschiffsebene) werden die Quellen auf der Körperoberfläche gespiegelt. Damit ergibt sich, wie zur Anwendung der Panelmethode mit einfacher numerischer Integration erforderlich, ein geschlossener Körper. Die Quellen auf dem oberen Spiegelbild des Körpers verringern die von den Körperquellen insgesamt induzierten Vertikalgeschwindigkeiten. Aus Versuchen mit

anderen Panelmethoden, bei denen die Schließung des Körpers nicht obligatorisch ist, ist bekannt, daß das Berechnungsnetz an der freien Oberfläche kleiner sein kann als ohne Spiegelung.

Die Normalenbedingung (3-3) auf dem diskretisierten Teil der Körperoberfläche und die linearisierte Oberflächenbedingung (4-5) werden nun gleichzeitig numerisch erfüllt. Anschließend wird die Lage des Wasserspiegels nach der linearisierten Bernoulli-Gleichung an den Kollokationspunkten auf der Wasseroberfläche berechnet, und es werden die Druckkräfte auf den benetzten Teil des Körpers bestimmt. Mit diesen wird eine Korrektur der Schwimmelage vorgenommen, d.h. das Körpernetz, die Spiegelebene, der Gewichtsschwerpunkt und der Angriffspunkt der Zugkraft werden verschoben und gedreht.

Im nächsten Iterationsschritt werden wieder die Randbedingungen an den veränderten Randflächen erfüllt. Konvergiert dieses Verfahren, ist die nichtlineare Randbedingung an der Wasseroberfläche und die Normalenbedingung am benetzten Teil der Körperoberfläche an den Kollokationspunkten erfüllt; die Schwimmelage hat sich so eingestellt, daß die Kräfte und Momente auf den Körper im Gleichgewicht sind.

Im folgenden werden noch einige Details der Methode beschrieben, die nicht aus den beiden vorigen Kapiteln ersichtlich sind.

6.1.1 Aufbau des Gleichungssystems

Es entsteht wieder ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntes Quellstärken M_i mit vollbesetzter Koeffizientenmatrix. Mit N_K Kollokationspunkten und ebensovielen Quellpanels auf dem Körper und N_F Kollokations- und Quellpunkten entlang der freien Wasseroberfläche werden die Koeffizienten des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{N_K+N_F} C_{ki} M_i = R_k \quad (6-1)$$

für die einzelnen Bereiche wie folgt bestimmt:

Für $k \leq N_K$ und $i \leq N_K$ (Quellen und Kollokationspunkte auf dem Körper) wird (5-14) angewandt:

$$\begin{aligned} C_{ki} &= \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i \quad \text{wenn } i \neq k, \\ C_{kk} &= -0.5 \end{aligned} \quad (6-2)$$

für $k \leq N_K$ und $N_K < i \leq N_K + N_F$ (Kollokationspunkte auf dem Körper und Quellpunkte entlang der Wasseroberfläche):

$$C_{ki} = \vec{n}_k \nabla_k G(\vec{p}_i, \vec{x}_k); \quad (6-3)$$

für $N_K < k \leq N_K + N_F$ und $i \leq N_K$ (Kollokationspunkte auf der Wasseroberfläche, Quellen auf der Körperoberfläche) entsprechend (4-18) und (4-19):

$$C_{ki} = \left[(2\vec{a} + B\nabla\Phi)\nabla G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) + \nabla\Phi \begin{pmatrix} \nabla\Phi\nabla G(\vec{x}_i, \vec{x}_k)_x \\ \nabla\Phi\nabla G(\vec{x}_i, \vec{x}_k)_y \\ \nabla\Phi\nabla G(\vec{x}_i, \vec{x}_k)_z \end{pmatrix} - gG(\vec{x}_i, \vec{x}_k)_z \right] f_i; \quad (6-4)$$

für $N_k < k \leq N_K + N_F$ und $N_K < i \leq N_K + N_F$ (Kollokationspunkte auf der Wasseroberfläche und Quellen entlang der Wasseroberfläche) entsprechend (4-18) und (4-19):

$$C_{ki} = \left[(2\vec{a} + B\nabla\Phi)\nabla G(\vec{p}_i, \vec{x}_k) + \nabla\Phi \begin{pmatrix} \nabla\Phi\nabla G(\vec{p}_i, \vec{x}_k)_x \\ \nabla\Phi\nabla G(\vec{p}_i, \vec{x}_k)_y \\ \nabla\Phi\nabla G(\vec{p}_i, \vec{x}_k)_z \end{pmatrix} - gG(\vec{p}_i, \vec{x}_k)_z \right] f_i. \quad (6-5)$$

Die rechten Seiten ergeben sich wie folgt:

Für $k \leq N_K$ ist entsprechend (3-3)

$$R_k = U n_1 \quad (6-6)$$

und für $N_K < k \leq N_K + N_F$ ist entsprechend (4-18)

$$R_k = 2\vec{a}\nabla\Phi + B \left(\frac{1}{2} ((\nabla\Phi)^2 + U^2) + g\mathbf{Z} \right) + (2a_1 + B\Phi_x)U. \quad (6-7)$$

Leider ist in dem mit (6-5) bestimmten Teil der Koeffizientenmatrix die Hauptdiagonale schwach, so daß das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Iterationsverfahren zur Lösung des Gleichungssystems nicht konvergieren.

6.1.2 Bestimmung der Geschwindigkeiten und der Wasserspiegelerhebung

Zur Berechnung der Geschwindigkeit an den Kollokationspunkten auf der Körperoberfläche ($k \leq N_K$) werden entsprechend (5-20) und (4-19) zunächst zwei Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit bestimmt:

$$v_t(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^{N_K} \vec{t}_k [M_i \nabla_k G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) - M_k \nabla_k G(\vec{p}_k(\vec{x}_i), \vec{x}_k) r_k(\vec{x}_i)] f_i (1 - \delta_{ik}) + \sum_{i=N_K+1}^{N_K+N_F} \vec{t}_k M_i \nabla_k G(\vec{p}_i, \vec{x}_k) \quad (6-8)$$

und entsprechend eine zweite Komponente in Richtung eines anderen Tangentenvektors \vec{s}_k . Damit kann der Geschwindigkeitsvektor nach (5-23) bestimmt werden.

An den Punkten an der Wasseroberfläche ($N_K < k \leq N_K + N_F$) wird das Potential entsprechend (4-19) bestimmt:

$$\phi(\vec{x}_k) = \sum_{i=1}^{N_K} M_i G(\vec{x}_i, \vec{x}_k) f_i + \sum_{i=1+N_K}^{N_K+N_F} M_i G(\vec{p}_i, \vec{x}_k). \quad (6-9)$$

Die Geschwindigkeiten und höhere Ableitungen des Potentials werden entsprechend durch Einsetzen von Ableitungen von G statt der Greenfunktion G in (6-9) bestimmt.

Zur Bestimmung der Wasserspiegelerhebung an den Kollokationspunkten auf der Wasseroberfläche wird die linearisierte Bernoulli Gleichung (4-4) verwendet:

$$\zeta = \frac{\nabla\Phi\nabla\phi - \frac{1}{2} [U^2 + (\nabla\Phi)^2] - g\mathbf{Z}}{g - \nabla\Phi\nabla\Phi_z} + \mathbf{Z}. \quad (6-10)$$

6.1.3 Integration der Druckkräfte

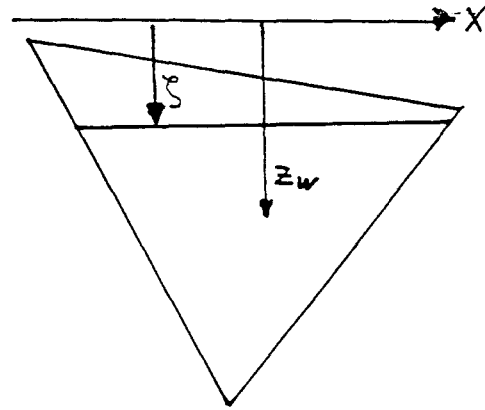
Zur Bestimmung der Kräfte auf den Körper wird der Druck an den Dreiecksmitten nach der Bernoulli-Gleichung (3-2) bestimmt. Zur Bestimmung der Druckkräfte und -momente nach (3-8) und (3-9) wird die Integration durch einfache Summation ersetzt. Dabei werden die Normalen und der dynamische Druck, $\frac{\rho}{2}((\nabla\phi)^2 - U^2)$, als konstant über der Fläche angenommen:

$$\vec{F} = \rho \sum_{k=1}^{N_K} \vec{n} \left[\frac{1}{2}((\nabla\phi)^2 - U^2) + gz_w \right] f_k f_w, \quad (6-11)$$

$$\vec{T} = \rho \sum_{k=1}^{N_K} \vec{x} \times \vec{n} \left[\frac{1}{2}((\nabla\phi)^2 - U^2) + gz_w \right] f_k f_w. \quad (6-12)$$

Hierin ist f_w das Verhältnis von benetzter Panelfläche zu getauchter Panelfläche, z_w ist die Höhe des Flächenschwerpunkts der benetzten Fläche. Sie werden auf dem ebenen Dreieckspanel bestimmt, wobei die Wasserspiegelhöhe an dem Panel aus dem Druck auf der Panelmitte angenähert wird:

$$\zeta = \frac{(\nabla\phi)^2 - U^2}{2g}. \quad (6-13)$$



6.1.4 Abschätzung der zusätzlichen Strömungskräfte

Wenn Absenkung und Vertrimmung berechnet werden sollen, können in manchen Fällen andere Strömungskräfte als die mit der Potentialtheorie berechneten Druckkräfte einen bedeutenden Einfluß haben. Dies sind insbesondere die Reibungskraft und deren Moment am benetzten Unterwasserschiff und der viskose Druckwiderstand und sein Moment. Sie können durch Vorgabe eines Reibungswiderstandsbeiwerts c_F abgeschätzt werden:

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{2} c_F U^2 S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6-14)$$

Das zugehörige Moment wird aus der Annahme bestimmt, daß F_A am Schwerpunkt der benetzten Oberfläche \vec{x}_S angreift:

$$\vec{T}_A = \vec{x}_S \times \vec{F}_A. \quad (6-15)$$

c_F kann nach einer der üblichen Reibungslinien abgeschätzt werden.

Bei normalen Schiffen ist der Einfluß der Reibungskraft gering, wenn die Zugkraft in Höhe und Richtung der Propellerwelle wirkt.

6.1.5 Iteration der Gleichgewichtslage

Die Schwimmlage wird iterativ so bestimmt, daß die Kräfte und Momente im Gleichgewicht sind. Bei symmetrischen Schiffen sind das die Kräfte in Längsrichtung (Widerstand und Schleppkraft) und in vertikaler Richtung (Auftrieb und Gewicht), sowie die durch Gewicht, Auftrieb, Widerstand und Zugkraft um die Querachse erzeugten Momente. Dabei wird von der Ruheschwimmlage ausgegangen. Für diese werden zunächst die hydrostatischen Kräfte und Momente sowie deren Ableitungen nach Tauchung und Vertrimmung bestimmt.

$$\vec{F}_{\text{stat}} = \rho g \sum_{k=1}^{N_K} \vec{n} z_w f_k f_w \quad (6-16)$$

$$\vec{T}_{\text{stat}} = \rho g \sum_{k=1}^{N_K} \vec{x} \times \vec{n} z_w f_k f_w \quad (6-17)$$

wobei zur Bestimmung von z_w und f_w $\zeta = 0$ gesetzt wird. $F_{3\text{stat}}$ ist die Auftriebskraft; sie entspricht für die Gleichgewichtslage dem Gewicht des Körpers, $G = -F_{3\text{stat}}$. $F_{2\text{stat}}$ ist aus Symmetriegründen 0. $F_{1\text{stat}}$ sollte sich für den ruhenden Körper zu 0 ergeben, die berechnete, von Null verschiedene Kraft gibt einen Hinweis auf die Qualität der Diskretisierung. $T_{2\text{stat}}/F_{3\text{stat}}$ ist die x -Koordinate des Verdrängungsschwerpunkts; sie entspricht in der Gleichgewichtslage der Längslage des Gewichtsschwerpunkts, $x_{G1} = T_{2\text{stat}}/F_{3\text{stat}}$. $T_{1\text{stat}}$ und $T_{2\text{stat}}$ sind aus Symmetriegründen Null. Die Höhenkoordinate des Gewichtsschwerpunkts x_{G3} wird zusätzlich angegeben. x_{G2} ist aus Symmetriegründen Null.

Die Matrix der Ableitungen bestimmt sich zu:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{\text{stat}} = \rho g \sum_{k=1}^{N_K} f_k f_w \begin{pmatrix} n_3 & x_1 n_3 \\ n_3 x_1 & n_3 x_1^2 \end{pmatrix}_k \quad (6-18)$$

wobei zur Bestimmung von z_w und f_w wieder $\zeta = 0$ gesetzt wird. Die Elemente der Ableitungsmatrix entsprechen bekannten hydrostatischen Größen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{\text{stat}} = -\rho g \begin{pmatrix} A_W & A_W X_F \\ A_W X_F & I_X \end{pmatrix}_{\text{stat}}. \quad (6-19)$$

Sind nun die Kräfte in dem aktuellen Iterationsschritt bestimmt, so werden die Korrekturen für Tiefgang und Trimm aus der folgenden Gleichung bestimmt:

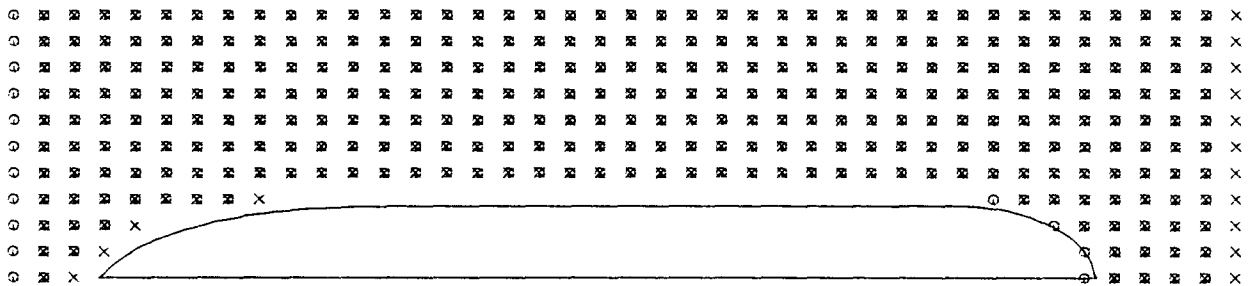
$$\begin{pmatrix} -G - F_3 - F_{A3} - Z_3 \\ -G x_{G1} - T_2 - T_{A2} - Z_1 x_{Z3} + Z_3 x_{Z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{\text{stat}} \begin{pmatrix} \Delta D \\ \Delta \theta \end{pmatrix}. \quad (6-20)$$

Um diese Korrekturen wird nun der Körper, einschließlich der Spiegelebene für die Körperquellen, des Gewichtsschwerpunkts \vec{x}_G und des Angriffspunkts der Zugkraft, verschoben und gedreht.

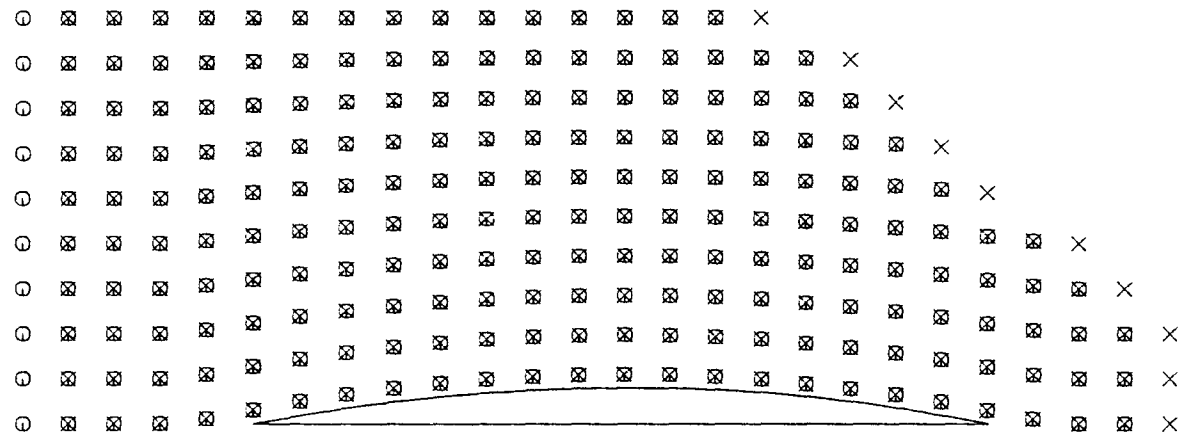
6.1.6 Regeln für den Aufbau der Netze

Der Körper sollte bis zu einer Ebene oberhalb der zu erwartenden Wasseroberfläche diskretisiert werden (0.3-fache Staudruckhöhe hat sich bewährt). Diese Ebene sollte so niedrig wie möglich gewählt werden, da sie die Spiegelebene für die Körperquellen ist, und da durch die Abweichung von der Symmetrie zu $z = 0$ stärkere Vertikalgeschwindigkeiten am Rand des diskretisierten Teils der Wasseroberfläche induziert werden, so daß dieses größer ausgeführt werden muß.

× Kollokationspunkte, ○ Quellen



Oberflächennetz, aus dem die Wasserlinie ausgespart wurde,



Oberflächennetz, das um die Wasserlinie herumgeführt wurde.

Bild 6-2: Beispiele für mögliche Oberflächennetze

Das Netz an der freien Wasseroberfläche kann für getauchte Störungen ein gleichmäßiges Raster sein. Bei aufgetauchten Körpern kann entweder ein gleichmäßiges Raster verwendet werden, aus dem Kollokationspunkte und zugehörigen Quellen, die innerhalb der Wasserlinien und eines Streifens rundherum liegen, ausgenommen sind, oder es wird ein Netz verwendet, das der Wasserlinienkontur folgend in gewissem Abstand um den Körper herumführt. Ersteres bietet sich für völlige Formen an, letzteres für schlanke.

Bild 6-2 zeigt Beispiele für beide Fälle.

In jedem Falle dürfen keine Kollokationspunkte dicht an der Wasserlinie liegen. An den Staupunkten nicht, weil sich dann dort eine örtlich eng begrenzte Welle von Staudruckhöhe bildet, die von einem zulässigen Netz örtlich nicht aufgelöst werden kann und die normalerweise durch Reibung und Oberflächenspannung vermindert wird oder bricht und zu Spritzern führt. Aber auch außerhalb der Staupunkte muß ein gewisser Abstand der Kollokationspunkte von der Wasserlinie eingehalten werden, weil die von den Quellpanels auf der Körperoberfläche induzierten Geschwindigkeiten nach der für Punkte an der Wasserlinie benutzten Formel (6-9) erst in einigem Abstand von der Körperoberfläche ausreichend genau berechnet werden. Die Körpermaschenweite sollte daher in der Nähe der Wasserlinie kleiner sein als die Oberflächenmaschenweite. Durch den Abstand vom Körper bleiben die Kollokationspunkte auf der Wasseroberfläche bei der vertikalen Verschiebung während der Iteration auch bei nicht senkrechtem Verlauf der Körperoberfläche ausserhalb des Körpers. Die Größe dieses Abstands hat natürlich Einfluß auf die Lösung. In den folgenden Beispielen zeige ich jedoch, daß dieser Einfluß in einem gewissen Bereich von Abständen gering ist. Bewährt hat sich der halbe Abstand der Kollokationspunkte an der Wasseroberfläche. Der erforderliche Kollokationspunktabstand hängt mit der Wellenlänge zusammen. Es sollten mindestens 7 Punkte pro Wellenlänge vorhanden sein. In Querrichtung kann man eine ähnliche Maschenweite wählen. Vor und hinter dem Schiff sollte das Netz etwa eine viertel Schiffslänge reichen. Bei hohen Froudezahlen sollte das Netz mindestens eine halbe Wellenlänge hinter das Schiff reichen. Für die Breite des Netzes hat sich etwa ein Drittel seiner Länge bewährt. Vorn außerhalb des Kelvinwinkels können zur Verminderung der Kollokationspunktzahl dreieckige Stücke abgeschnitten werden. Grundsätzlich gilt: Je größer und feiner das Netz, desto besser ist die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der Ergebnisse. Allerdings steigen die Rechenzeit für das Lösen der Gleichungssysteme etwa mit der dritten und der Speicherbedarf und die Rechenzeit für das Aufstellen der Koeffizientenmatrix mit der zweiten Potenz der Kollokationspunktanzahl an, so daß man auf mittleren Rechnern schnell an praktische Grenzen stößt. Der vertikale Abstand der Oberflächenquellen von den Kollokationspunkten sollte etwa zwei mittlere Kollokationspunktabstände betragen.

6.2 Beispielrechnungen und Vergleich mit Messungen

Anhand von Beispielrechnungen sollen die Möglichkeiten und Grenzen dieser Methode gezeigt werden. Die Ergebnisse sind dimensionslos dargestellt. Dabei werden neben den im Schiffbau üblichen dimensionslosen Zahlen ($F_n = U/\sqrt{gL_{PP}}$, $c_w = -F_1/(\frac{1}{2}\rho U^2 S_0)$) die dimensionslose Tauchung (Austauchen ist positiv)

$$\sigma = \frac{2}{F_n^2} \frac{D_0 - D}{L} \quad (6 - 21)$$

und der dimensionslose Trimm (achterliche Vertrimmung ist positiv)

$$\tau = \frac{2}{F_n^2} (\theta_0 - \theta) \quad (6 - 22)$$

verwendet.

6.2.1 Parabolisches Wigley-Schiff

Diese Form wurde gewählt, weil sie eine der beim “International Workshop on Ship Wave-Resistance Computations” [18] verglichenen Formen ist und seither von den meisten Autoren für erste Tests ihrer Methoden verwendet wird. Daher liegen zahlreiche Mess- und Rechenergebnisse für diese Schiffsform vor.

Die Oberfläche wird durch

$$y = 0.8(1 - z^2)\left(1 - \frac{x^2}{64}\right) \quad \text{für } z > 0 \quad (6 - 23)$$

beschrieben. Oberhalb der Ruhewasserlinie habe ich die Form durch senkrechte Seitenwände ergänzt. Die Hauptverhältniswerte des Wigley-Schiffs sind:

$$\frac{L_{PP}}{B} = 10; \quad \frac{L_{PP}}{D} = 16; \quad C_B = 0.444; \quad \frac{L_{PP}^2}{S_0} = 6.724.$$

Damit auch einschließlich Absenkung und Vertrimmung und lokalen Wellen stets die gesamte benetzte Außenhaut mit Panels bedeckt ist, wurde das Schiff bis zu einer Höhe $0.4D$ über der Ruhewasserlinie diskretisiert. Auf einer Schiffshälfte sind 448 Panels angeordnet. Für die in [17] und [18] veröffentlichten Meßergebnissen ist der Angriffspunkt der Schleppkraft nicht angegeben. Für die Rechnung wurde die Schleppkraft daher am Hauptspant in Höhe der Ruhewasserlinie angebracht, und es wurde angenommen, daß sie in Richtung der x -Achse wirkt. Reibungskräfte wurden bei diesen Berechnungen vernachlässigt, obwohl angenommen werden muß, daß sie einen Einfluß auf die sich einstellende Vertrimmung haben.

Zunächst wurden vier verschiedene Netze an der freien Wasseroberfläche erprobt um die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Oberflächendiskretisierung zu untersuchen. Es wurde jeweils ein Bereich von $0.375L_{PP}$ vor dem Schiff bis $0.375L_{PP}$ hinter dem Schiff diskretisiert. Die Breite der Netze ist $0.56L_{PP}$. Der Abstand h der Kollokationspunkte voneinander ist konstant und in Längs- und Querrichtung etwa gleich: Netz 1 mit $h = 0.0625L_{PP}$; Netz 2 mit $h = 0.05L_{PP}$; Netz 3 mit $h = 0.0375L_{PP}$; Netz 4 mit $h = 0.025L_{PP}$ ist etwas kleiner als oben angegeben. Der Abstand der innersten Reihe von Kollokationspunkten von der Außenhaut ist jeweils $0.5h$. Mit diesen Netzen wurde für Froudezahl $F_n = 0.24$ gerechnet.

	Netz 1	Netz 2	Netz 3	Netz 4
h/L_{PP}	0.0625	0.05	0.0375	0.025
N_F	257	371	586	973
λ_0/h	5.76	7.2	9.6	14.4
c_w	$7.46 \cdot 10^{-4}$	$1.027 \cdot 10^{-3}$	$9.51 \cdot 10^{-4}$	$9.81 \cdot 10^{-4}$
σ	0.041	0.042	0.042	0.040

Berechnungsergebnisse für verschiedene Netze an der Wasseroberfläche mit $F_n = 0.24$.

Der mit Netz 1 berechnete Wellenwiderstandsbeiwert weicht von den anderen deutlich ab: Netz 1 ist offensichtlich zu grob. Die Ergebnisse mit den anderen Netzen sind etwa gleich.

Die weiteren Ergebnisse sind alle mit Netz 3 berechnet worden.

Bild 6-3 zeigt die berechneten Wellenwiderstandsbeiwerte im Vergleich zu Messungen, die von Kajitani[17] veröffentlicht wurden. Die Übereinstimmung ist gut.

Die Bilder 6-4 und 6-5 zeigen die Schwimmlage in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

Die Bilder 6-6 bis 6-8 zeigen die berechneten Wellenerhebungen an der innersten Kollationspunktreihe im Vergleich zur gemessenen Wellenerhebung an der Außenhaut [18]. Der seitliche Versatz der berechneten Punkte gegen die Meßpunkte erklärt die leichte Phasenverschiebung zwischen Rechnung und Messung und wohl auch die flachere Bugwelle.

Die Bilder 6-9 bis 6-12 zeigen die berechneten Oberflächenverformungen für verschiedene Geschwindigkeiten sowohl nach dem ersten Iterationsschritt (Kelvin-Bedingung an der Wasseroberfläche) als auch zum Ende der Iteration (nichtlineare Lösung). Man erkennt teils recht große Unterschiede zwischen der linearisierten und der nichtlinearen Lösung.

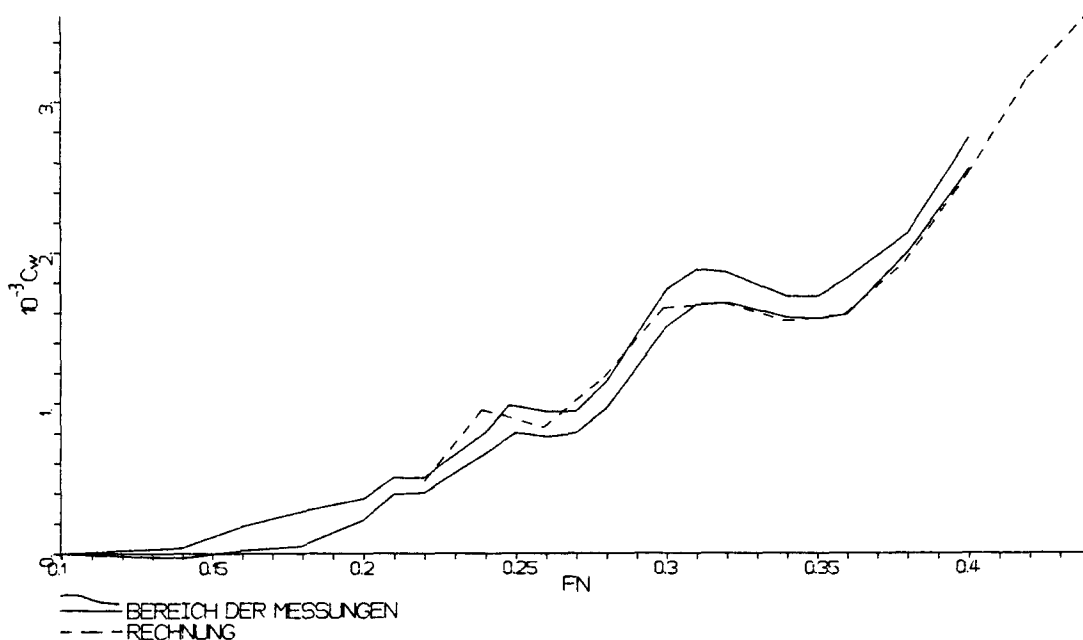


Bild 6-3: Wellenwiderstandsbeiwerte für Wigley-Schiff im Vergleich zu von Kajitani [17] veröffentlichten Messungen

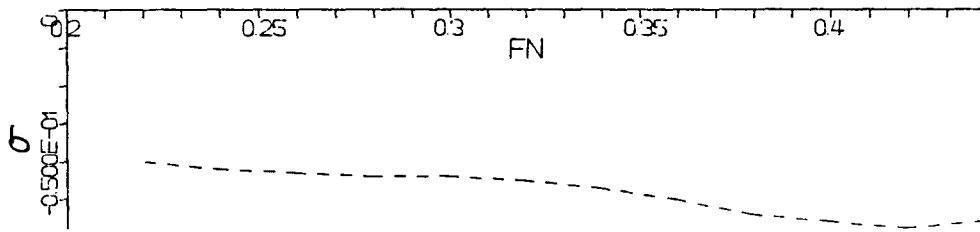


Bild 6-4: Berechnete Tauchung σ für Wigley-Schiff

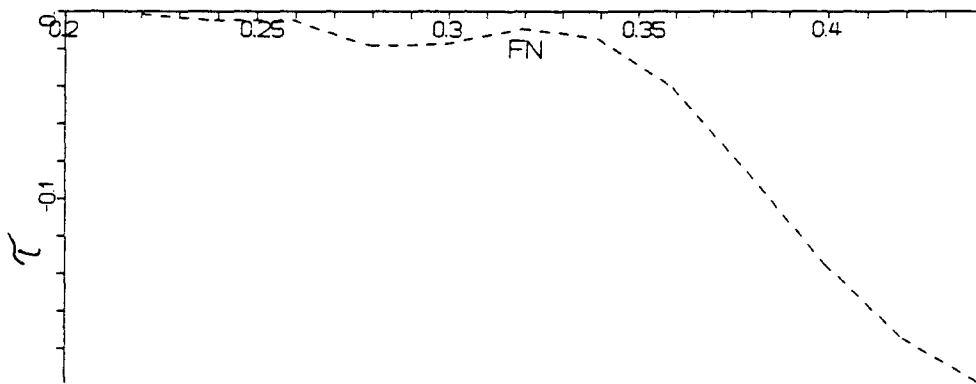


Bild 6-5: Berechnete Vertrimmung τ für Wigley-Schiff

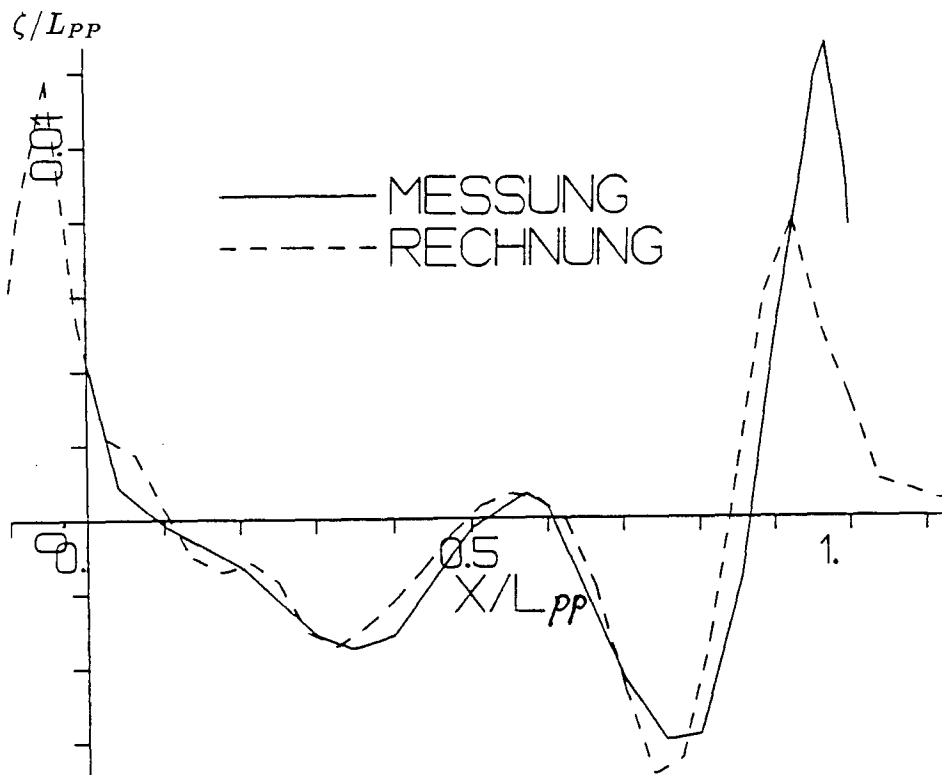


Bild 6-6: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut [18] für $F_N = 0.266$

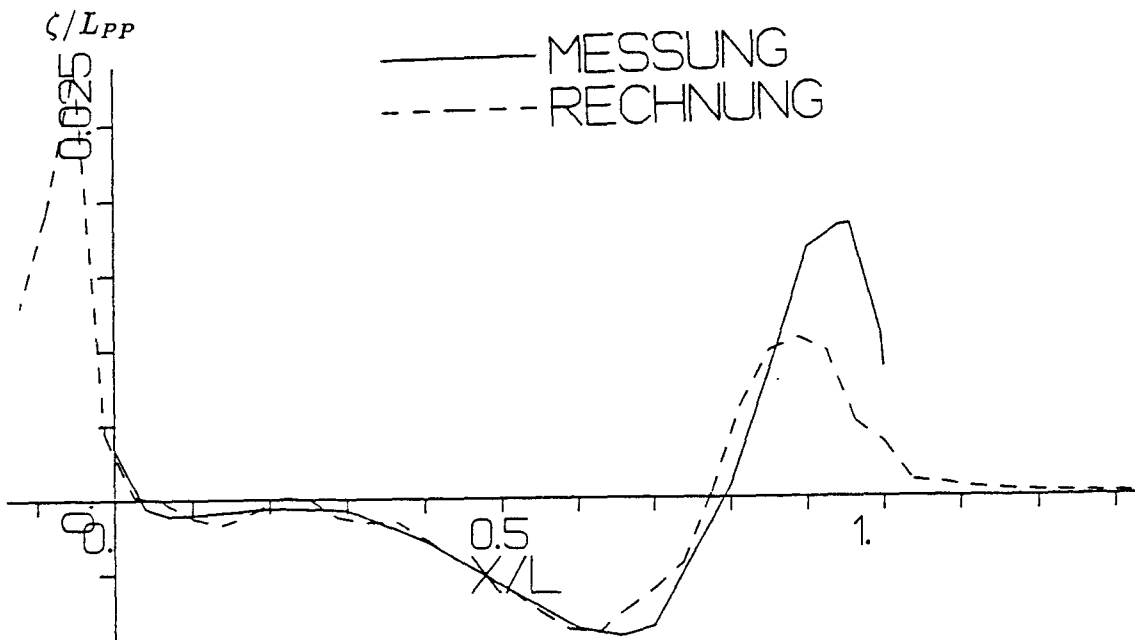


Bild 6-7: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut [18] für $F_N = 0.348$

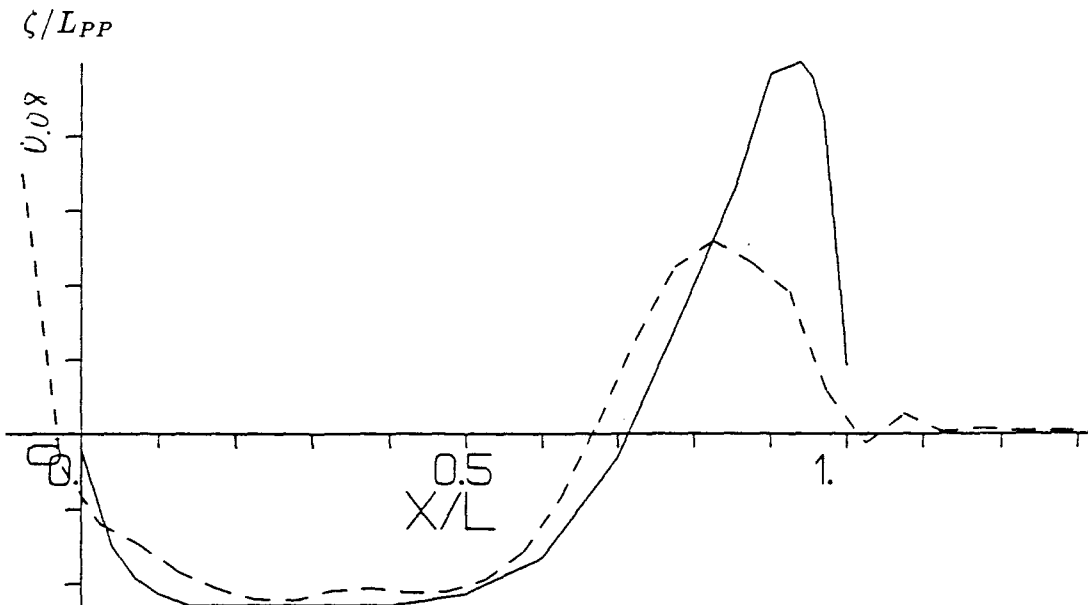


Bild 6-8: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut [18] für $F_N = 0.452$

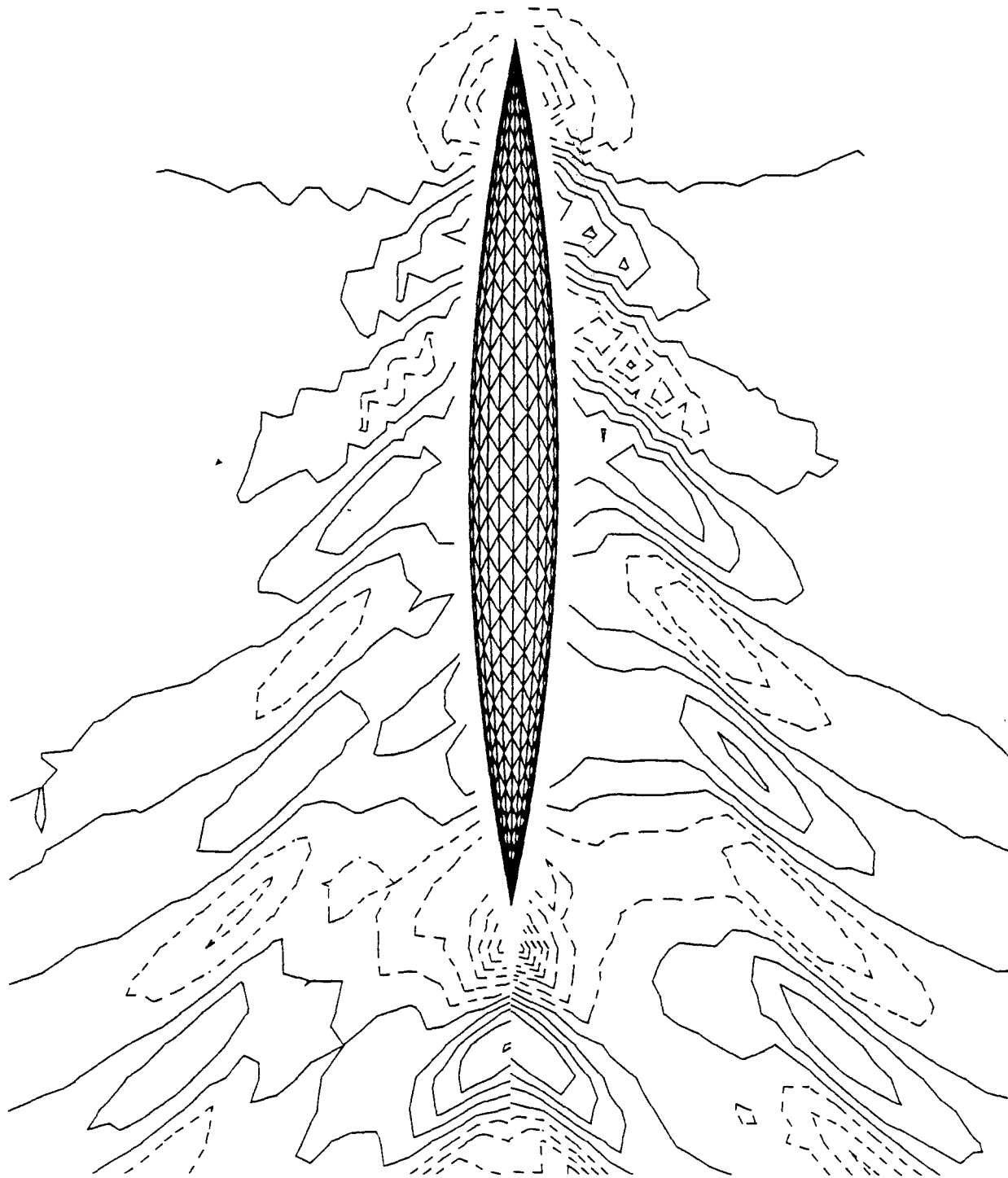


Bild 6-9: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.22$
 Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare
 Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $10^{-3}L_{PP}$.

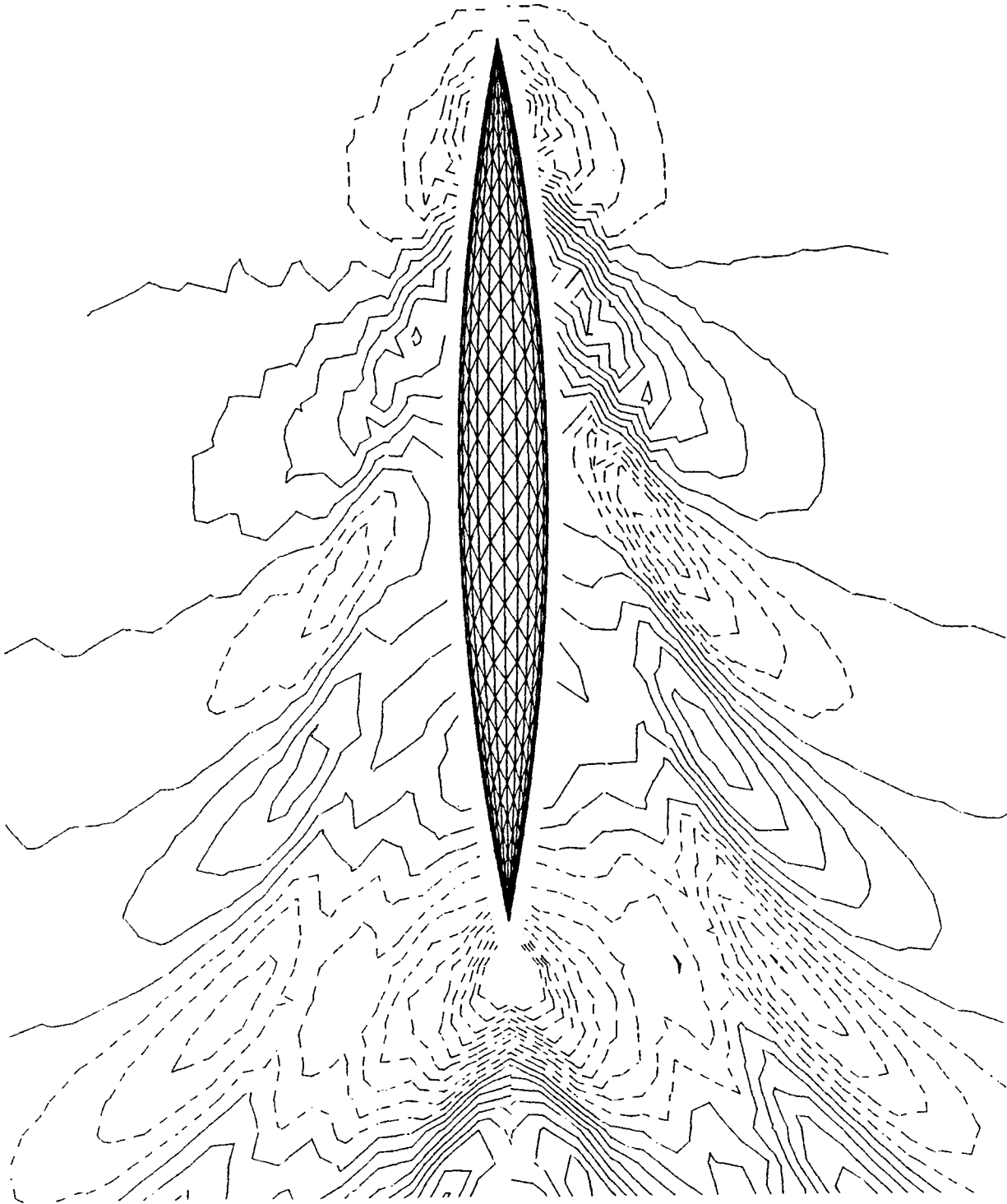


Bild 6-10: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.279$
 Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare
 Lösung.
 Der Abstand der Höhenlinien ist $10^{-3} L_{PP}$.

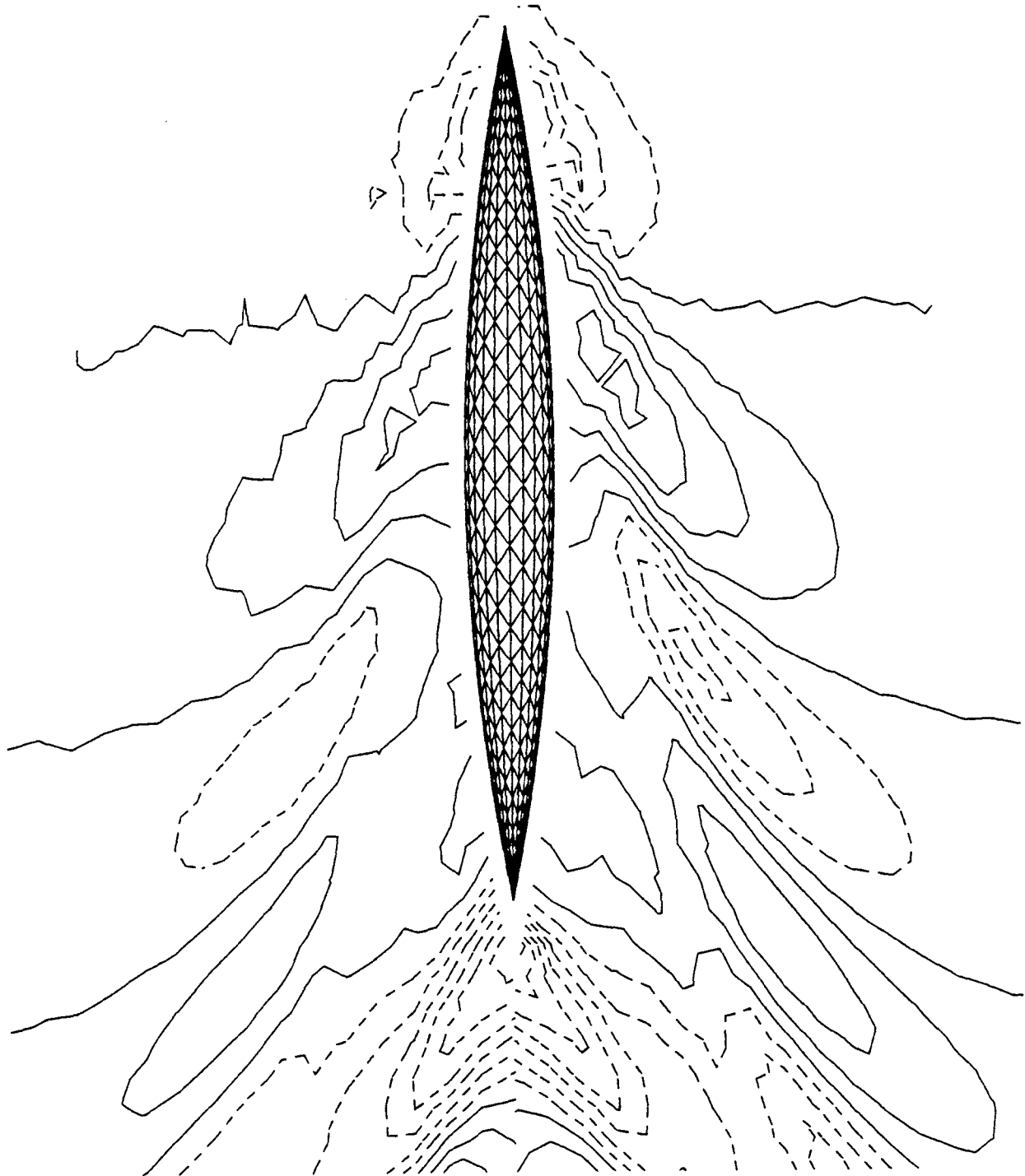


Bild 6-11: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.319$
 Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare
 Lösung.
 Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

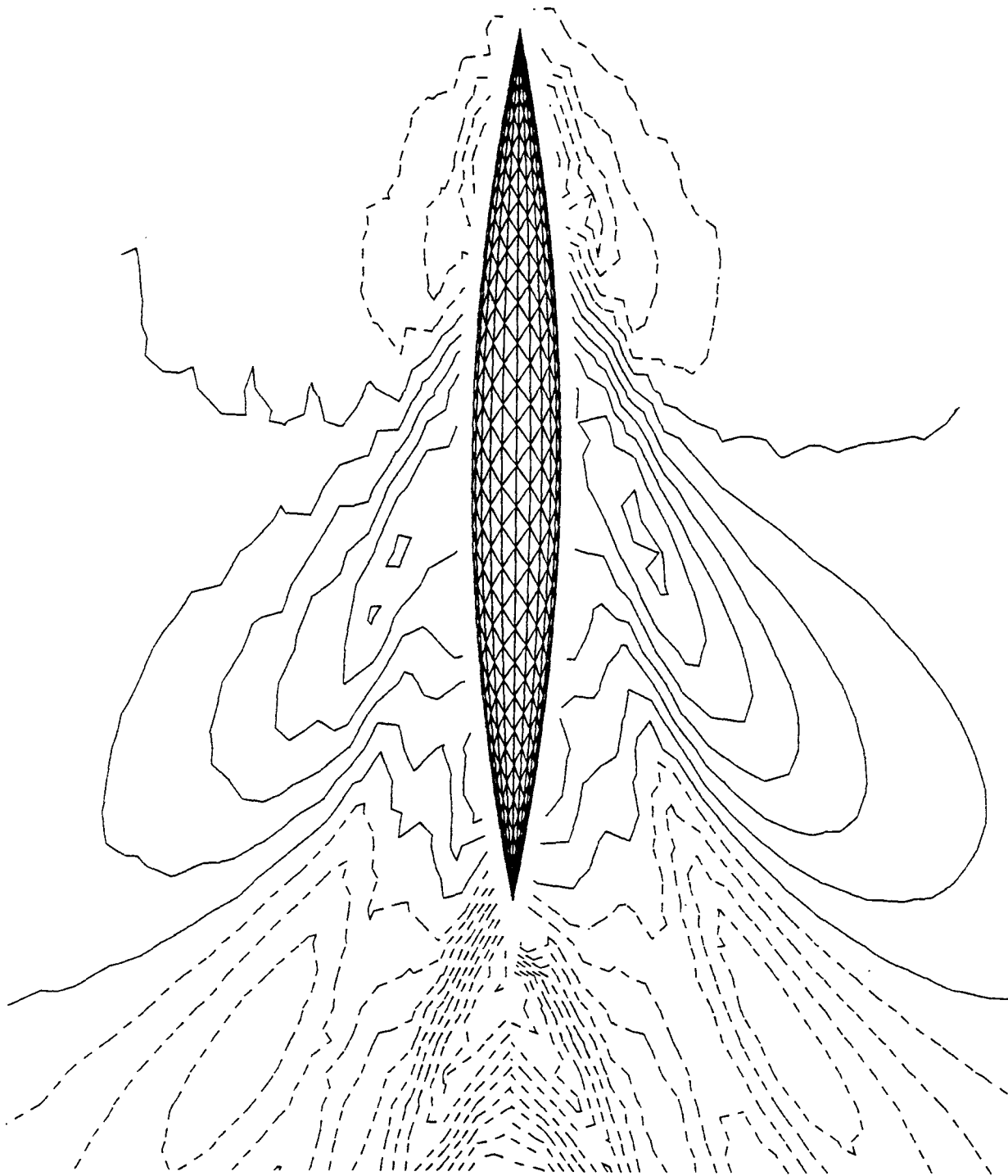


Bild 6-12: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Wigley-Schiff, $F_n = 0.40$
 Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare
 Lösung.
 Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

6.2.2 Series-60 Schiff mit $C_B = 0.60$

Diese Form wurde gewählt, weil hierfür besonders ausführliche Meßergebnisse von Ogiwara [25] an einem Modell mit $L_{PP} = 4\text{m}$ gewonnen wurden. Hier noch einmal die Hauptverhältniswerte:

$$\frac{L_{PP}}{B} = 7.5; \quad \frac{L_{PP}}{D} = 18.75; \quad C_B = 0.6; \quad \frac{L_{PP}^2}{S_0} = 5.8685.$$

Bild 6-13 zeigt Spantenriß und Stevenkonturen.

Damit auch nach Absenkung und Vertrimmung stets die ganze benetzte Außenhaut mit Panels bedeckt ist, wurde die Oberfläche bis zu einer Höhe von $0.3125D$ über der Ruheschwimmwasserlinie paneliert. Es wurde 453 Panel auf einer Schiffsseite angeordnet. Entsprechend den Experimenten von Ogiwara wurde die horizontale Zugkraft bei $0.485L_{PP}$ vor dem hinteren Lot $0.461D$ unter der Ruhewasserlinie angebracht. Für alle Geschwindigkeiten wurde zur Abschätzung der Reibungskräfte der gleiche Reibungswiderstandsbeiwert $c_F = 3.5 \cdot 10^{-3}$ verwendet. Die Reibungskräfte haben nur bei der Bestimmung der trimmenden Momente einen kleinen Einfluß. Die Höhe des Gewichtsschwerpunkts ist von Ogiwara nicht angegeben. Für die folgenden Berechnungen wurde angenommen, daß der Gewichtsschwerpunkt in Höhe der Ruhewasserlinie liegt.

An der freien Wasseroberfläche wurden verschiedene Netze benutzt:

Netz 1 mit 58 Punkten in Längsrichtung von $0.545L_{PP}$ hinter dem Schiff bis $0.45L_{PP}$ vor dem Schiff und mit 21 Punkten in Querrichtung bis zu einer Breite von $0.7L_{PP}$. Vorn wurde außen ein dreieckiger Bereich abgeschnitten, so daß Netz 1 insgesamt 889 Kollokationspunkte an der Wasseroberfläche hat.

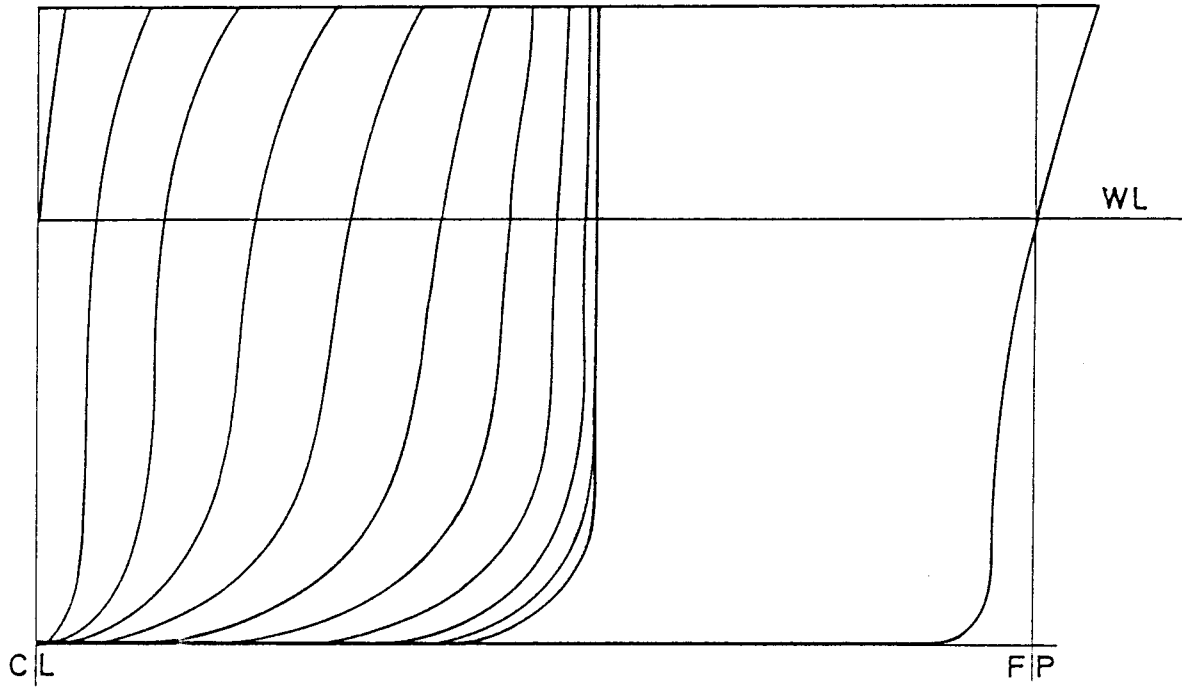
Netz 2 mit 51 Punkten in Längsrichtung von $0.5L_{PP}$ hinter dem Schiff bis $0.5L_{PP}$ vor dem Schiff und mit 18 Punkten in Querrichtung bis zu einer Breite von $0.7L_{PP}$. Vorn wurde außen ein dreieckiger Bereich abgeschnitten, so daß Netz 2 insgesamt 706 Kollokationspunkte an der Wasseroberfläche hat.

Netz 1 wurde für $F_n < 0.36$ verwendet, Netz 2 für die größeren Geschwindigkeiten.

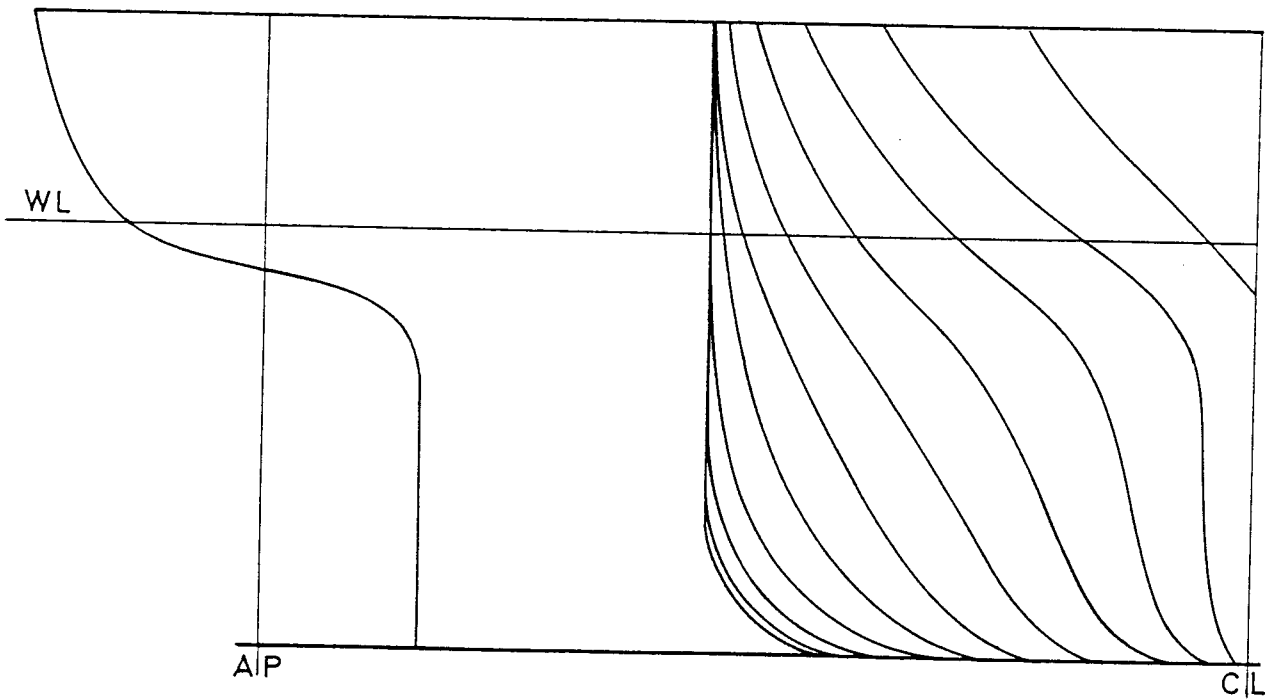
Bild 6-14 zeigt die berechneten Widerstandsbeiwerte im Vergleich zu den Messungen von Ogiwara [25], die er mit der ITTC-Reibungslinie und einem Formfaktor von 1.090 ausgewertet hat. Die Übereinstimmung ist recht gut.

Die Bilder 6-15 und 6-16 zeigen die Schwimmlage in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Bei der Tauchung ist die Übereinstimmung bei kleineren Froudezahlen gut, bei sehr großen Froudezahlen ergeben sich jedoch große Abweichungen. Die Vertrimmung ist im Verlauf durchaus ähnlich, in der Größe ergeben sich jedoch starke Abweichungen.

Die Bilder 6-17 bis 6-20 zeigen die berechneten Wellenerhebungen an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur gemessenen Wellenerhebung an der Außenhaut. Der seitliche Versatz der berechneten Punkte gegen die Meßpunkte erklärt die leichte Phasenverschiebung zwischen Rechnung und Messung. Im übrigen ist die Übereinstimmung gut, außer bei $F_n = 0.25$ wo die Rechnung an der vorderen Schiffshälfte stärkere Schwankungen ergeben hat als die Messung.



Vorschiff



Hinterschiff

Bild 6-13: Spantenriß und Stevenkonturen für Series-60 Schiff mit $C_B=0.60$

Die Bilder 6-21 bis 6-27 zeigen die berechneten Oberflächenverformungen für verschiedene Geschwindigkeiten sowohl nach dem ersten Iterationsschritt (Kelvin-Bedingung an der Wasseroberfläche) als auch zum Ende der Iteration (nichtlineare Lösung). Man erkennt teils recht große Unterschiede zwischen der linearisierten und der nichtlinearen Lösung.

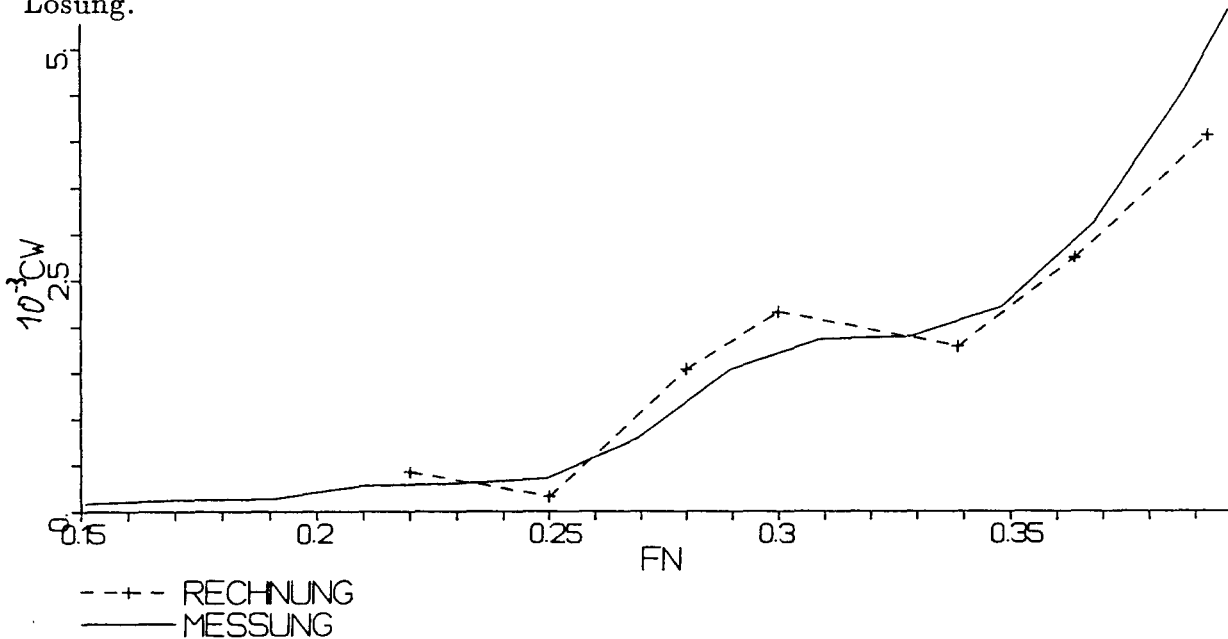


Bild 6-14: Berechnete Wellenwiderstandsbeiwerte für Series-60 mit $C_B = 0.60$ im Vergleich zu Messungen von Ogiwara [25]

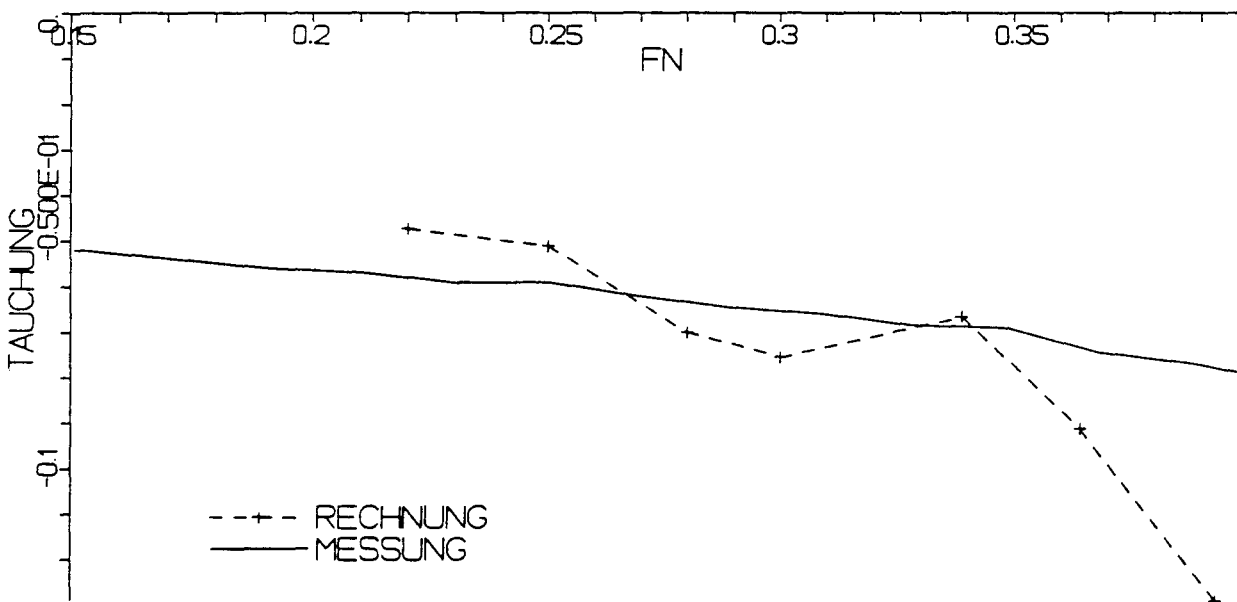


Bild 6-15: Berechnete Tauchung σ für Series-60 mit $C_B = 0.60$ im Vergleich zu Messungen von Ogiwara [25]

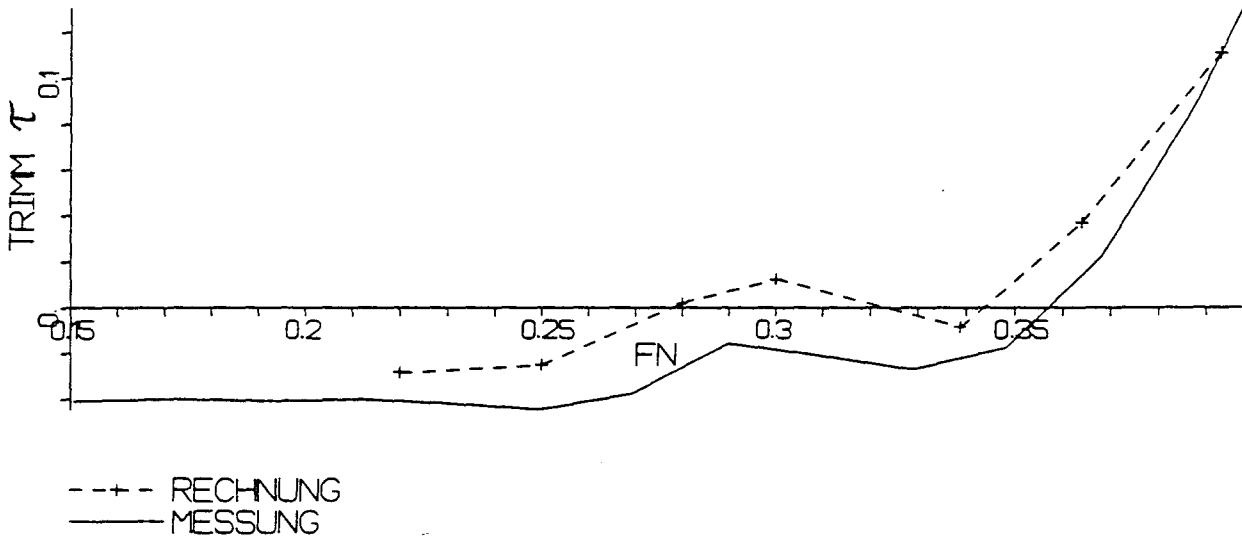


Bild 6-16: Berechnete Vertrimmung τ für Series-60 mit $C_B = 0.60$ im Vergleich zu Messungen von Ogiwara [25]

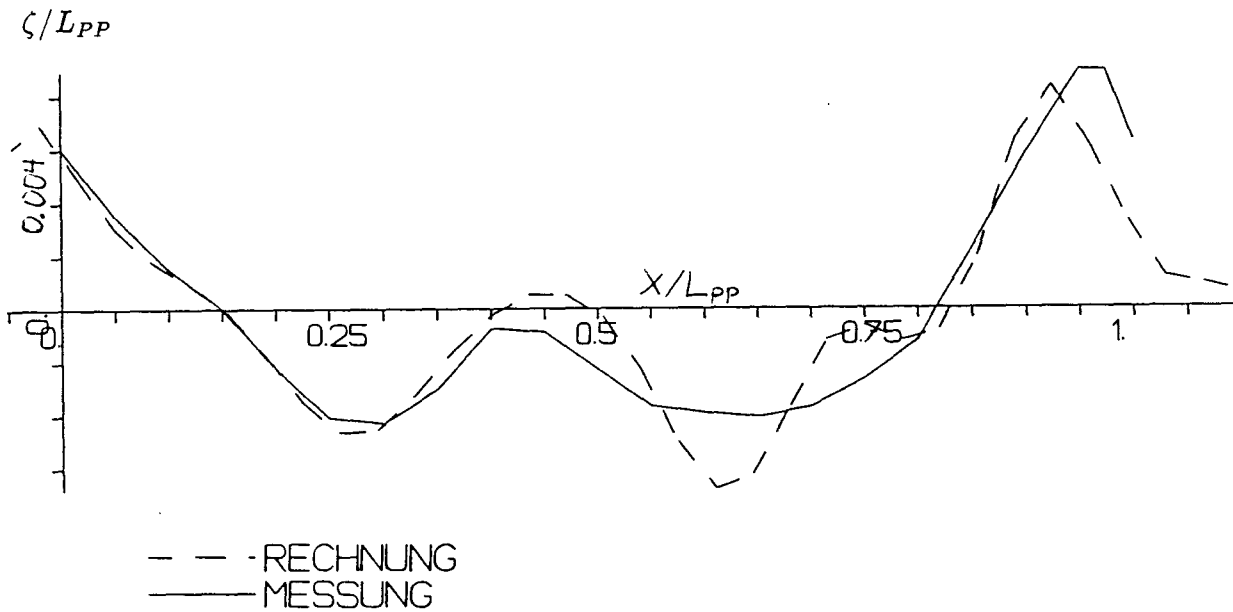


Bild 6-17: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut (Ogiwara [25]) für $F_N = 0.25$

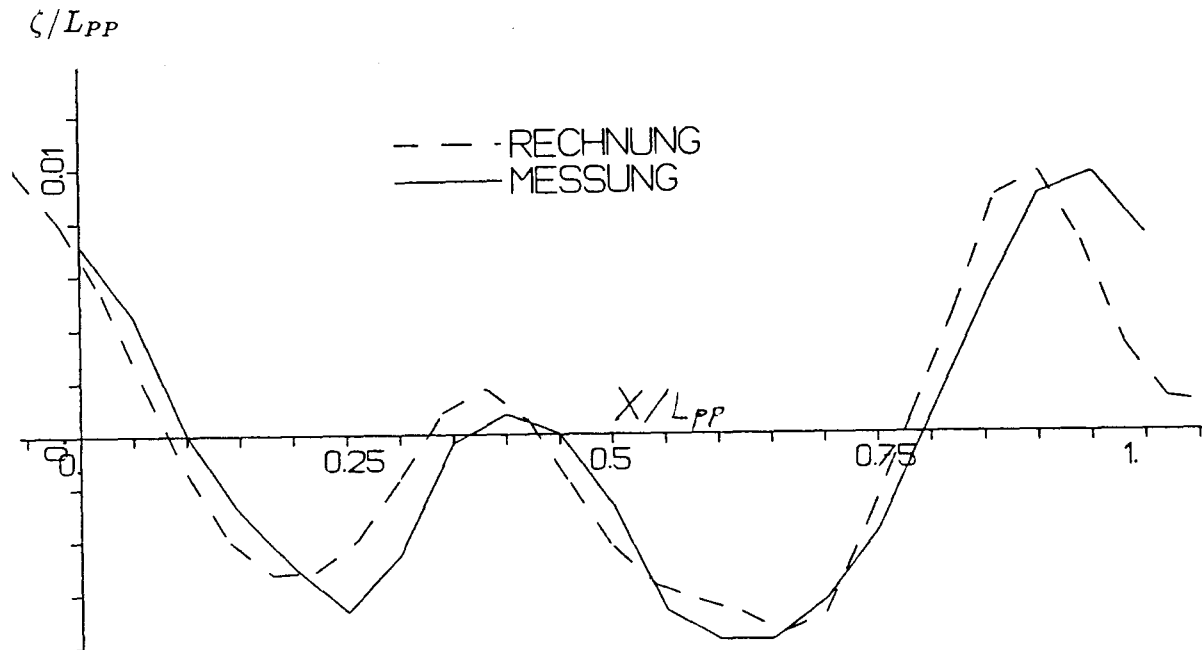


Bild 6-18: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut (Ogiwara [25]) für $F_N = 0.28$

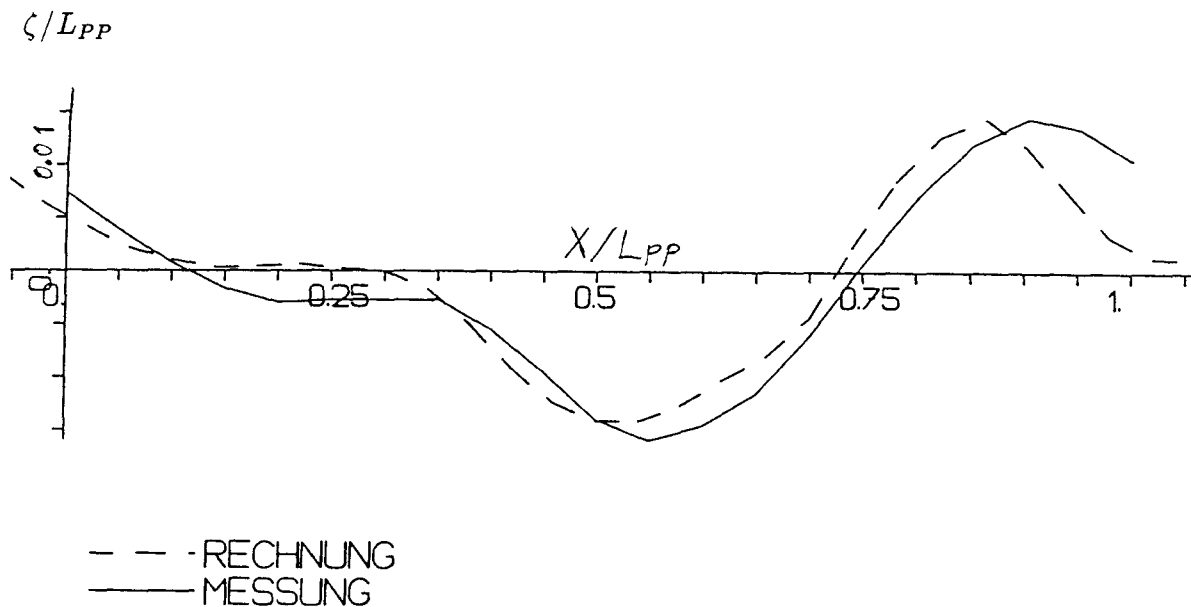


Bild 6-19: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut (Ogiwara [25]) für $F_N = 0.30$

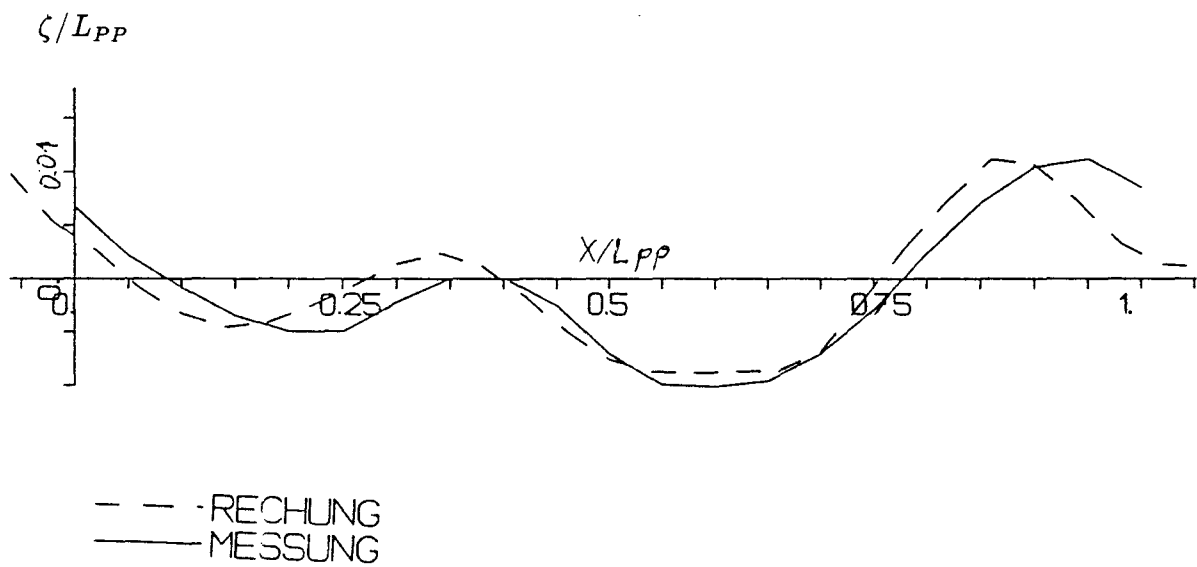


Bild 6-20: Berechnete Wellenerhebung an der innersten Kollokationspunktreihe im Vergleich zur Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut (Ogiwara [25]) für $F_N = 0.34$

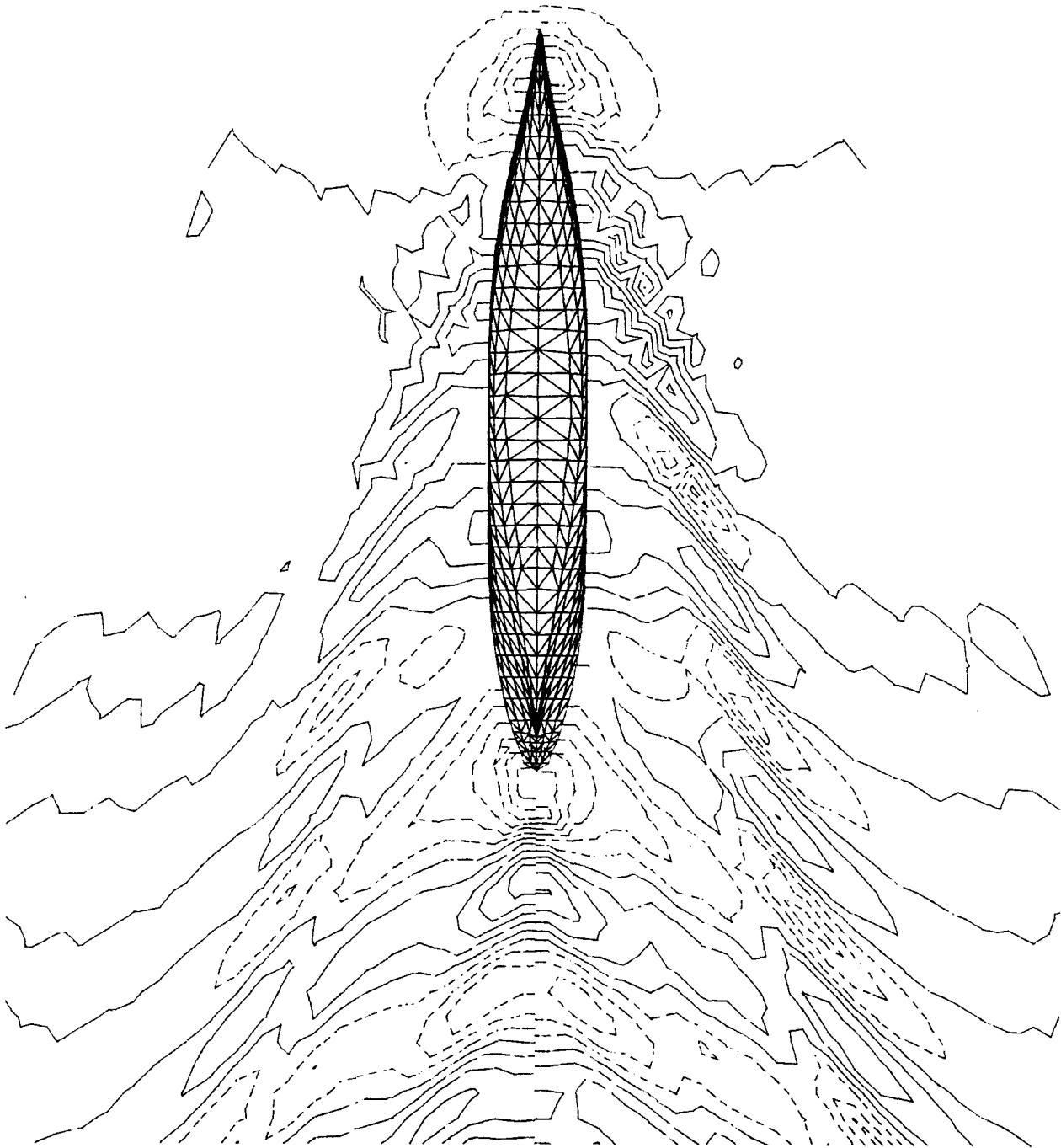


Bild 6-21: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.22$

Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $10^{-3}L_{PP}$.

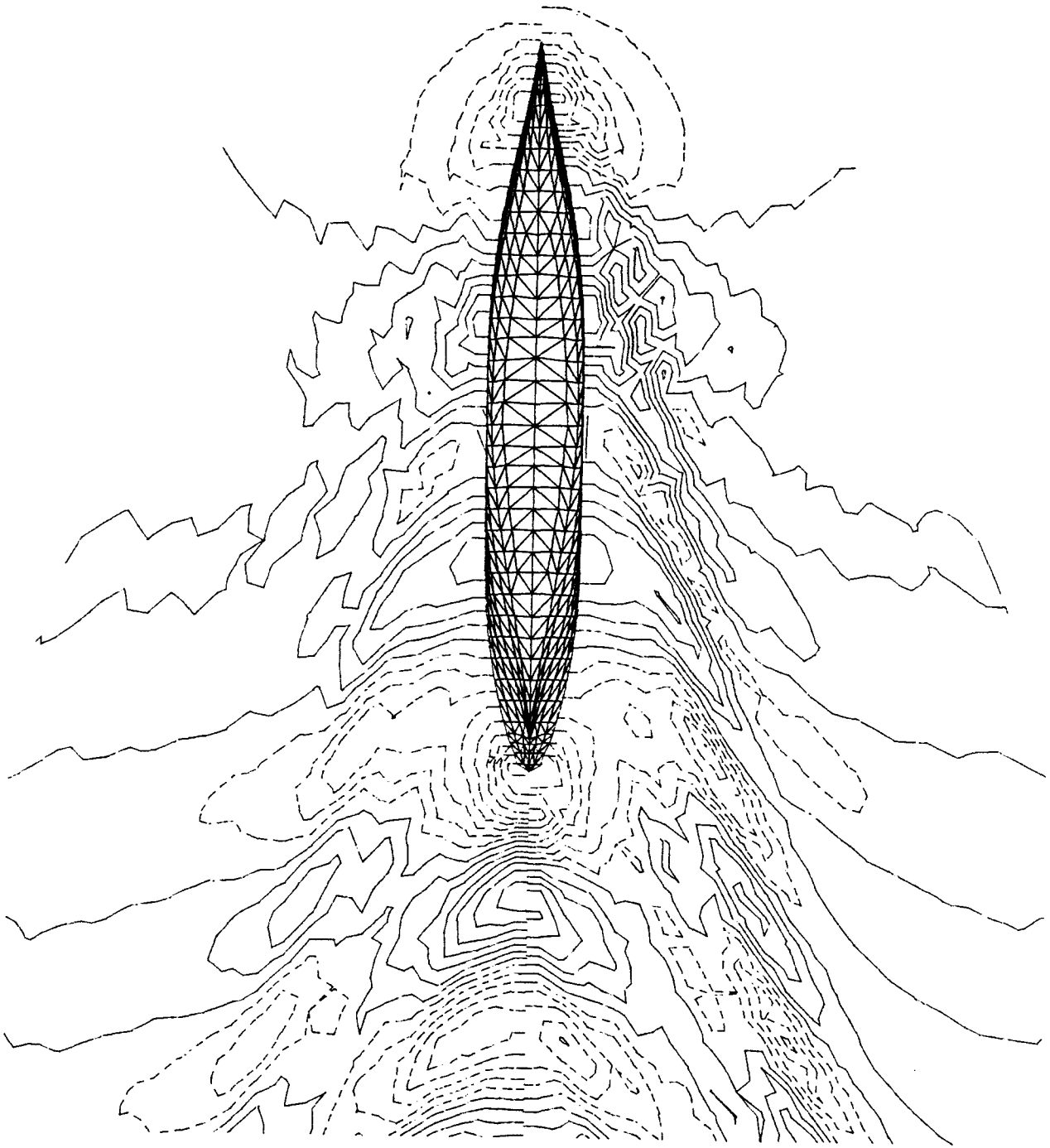


Bild 6-22: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.25$

Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $10^{-3} L_{PP}$.

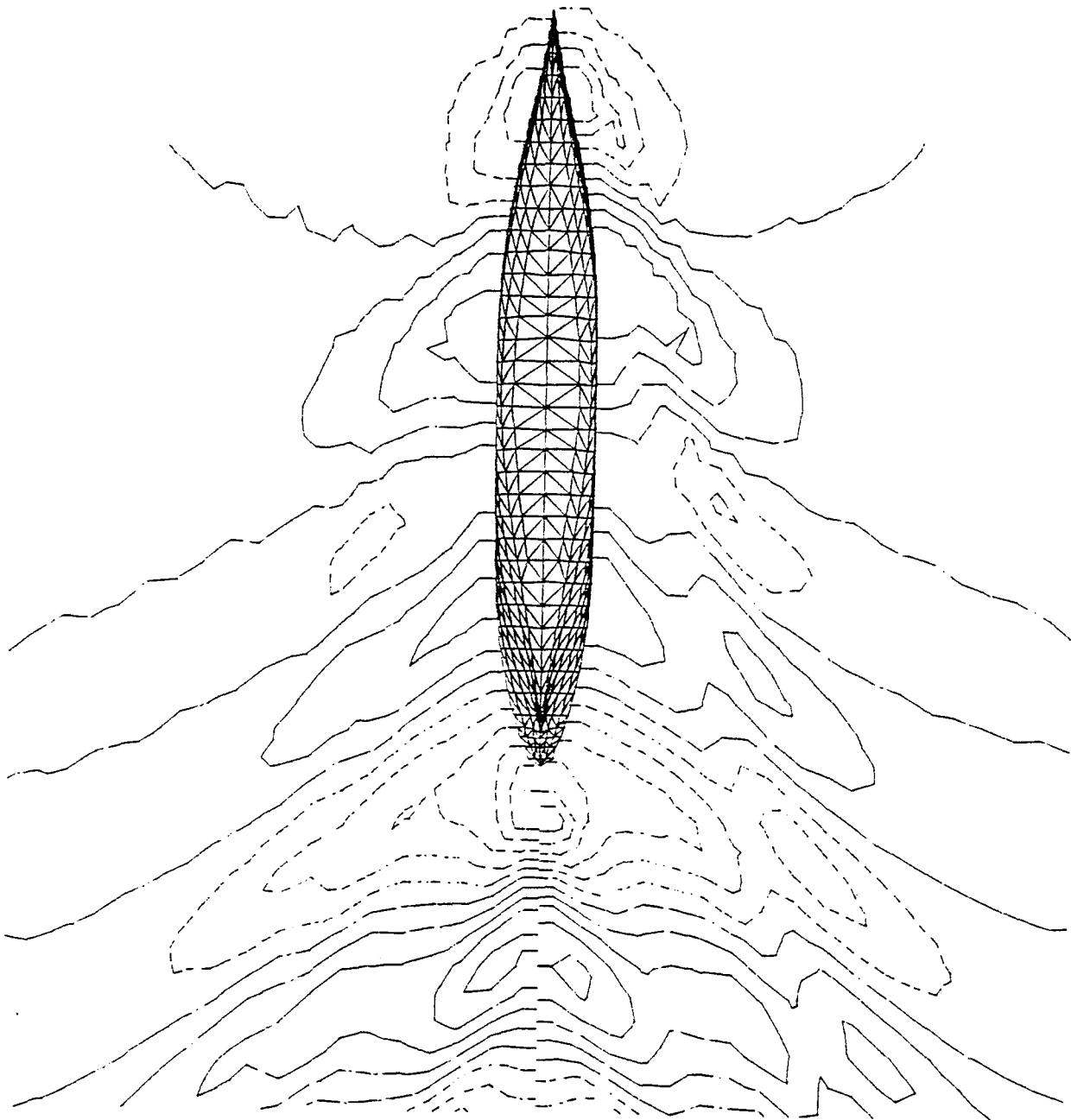


Bild 6-23: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.28$

Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

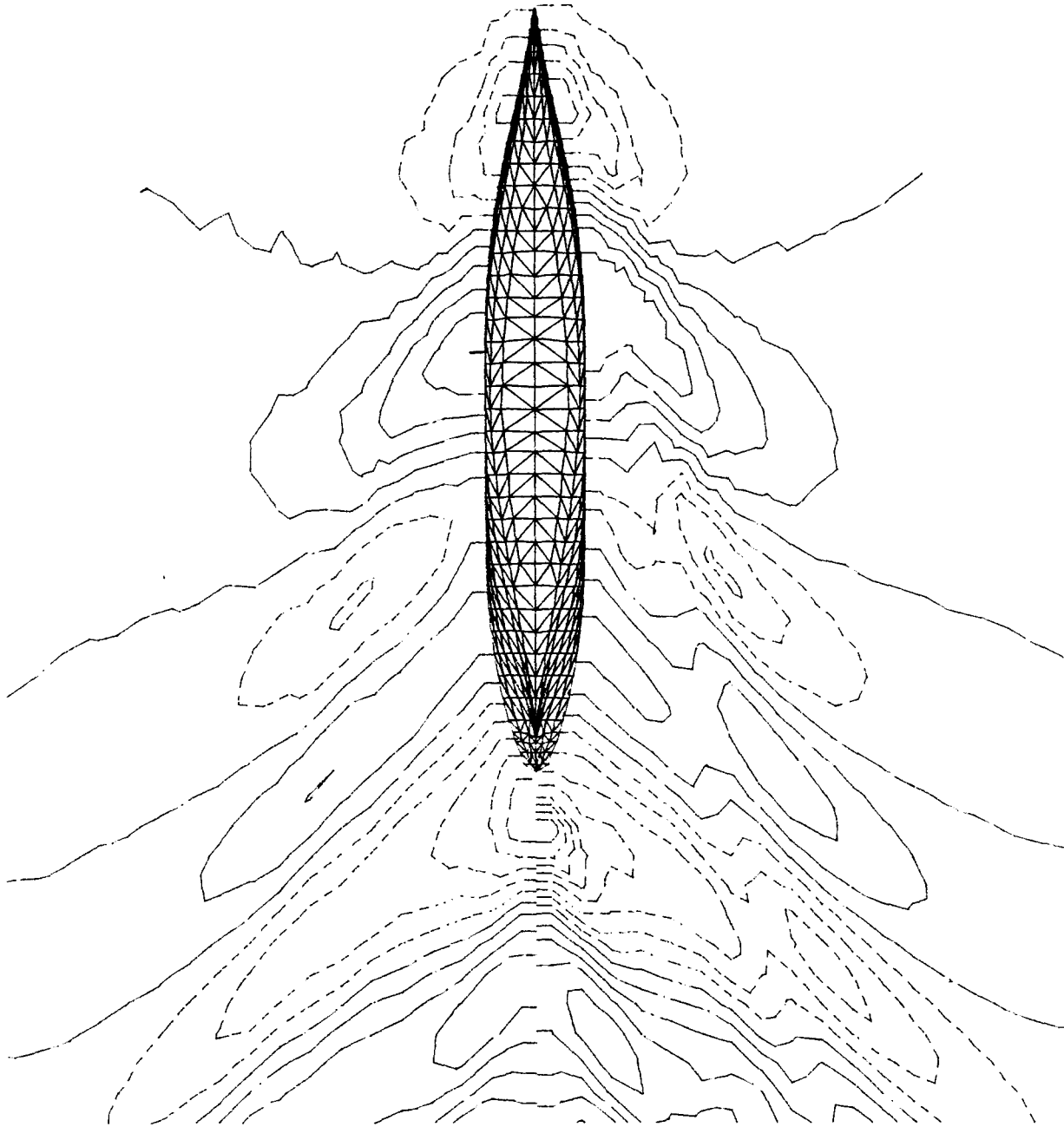


Bild 6-24: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.30$

Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

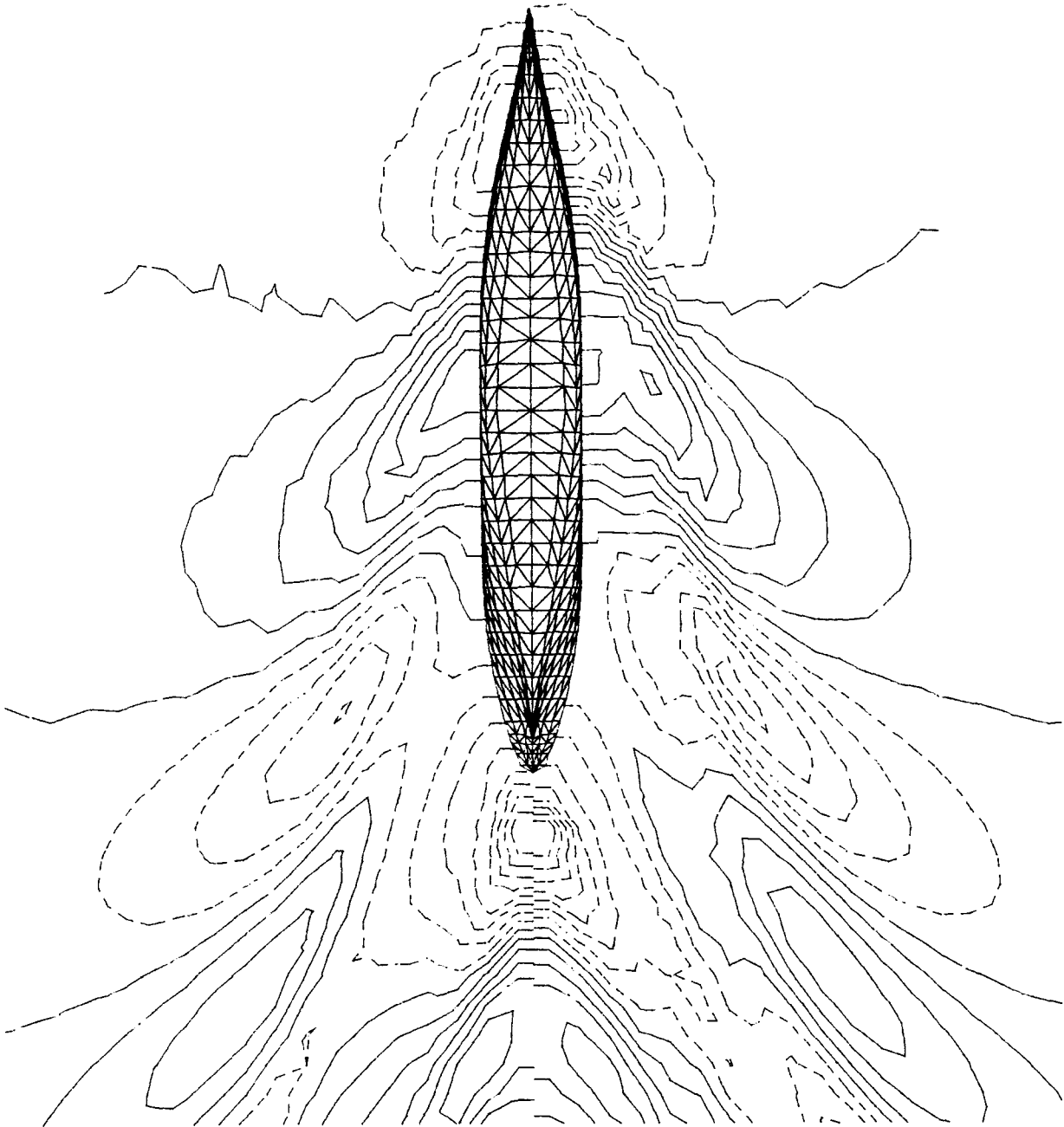


Bild 6-25: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.34$ Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

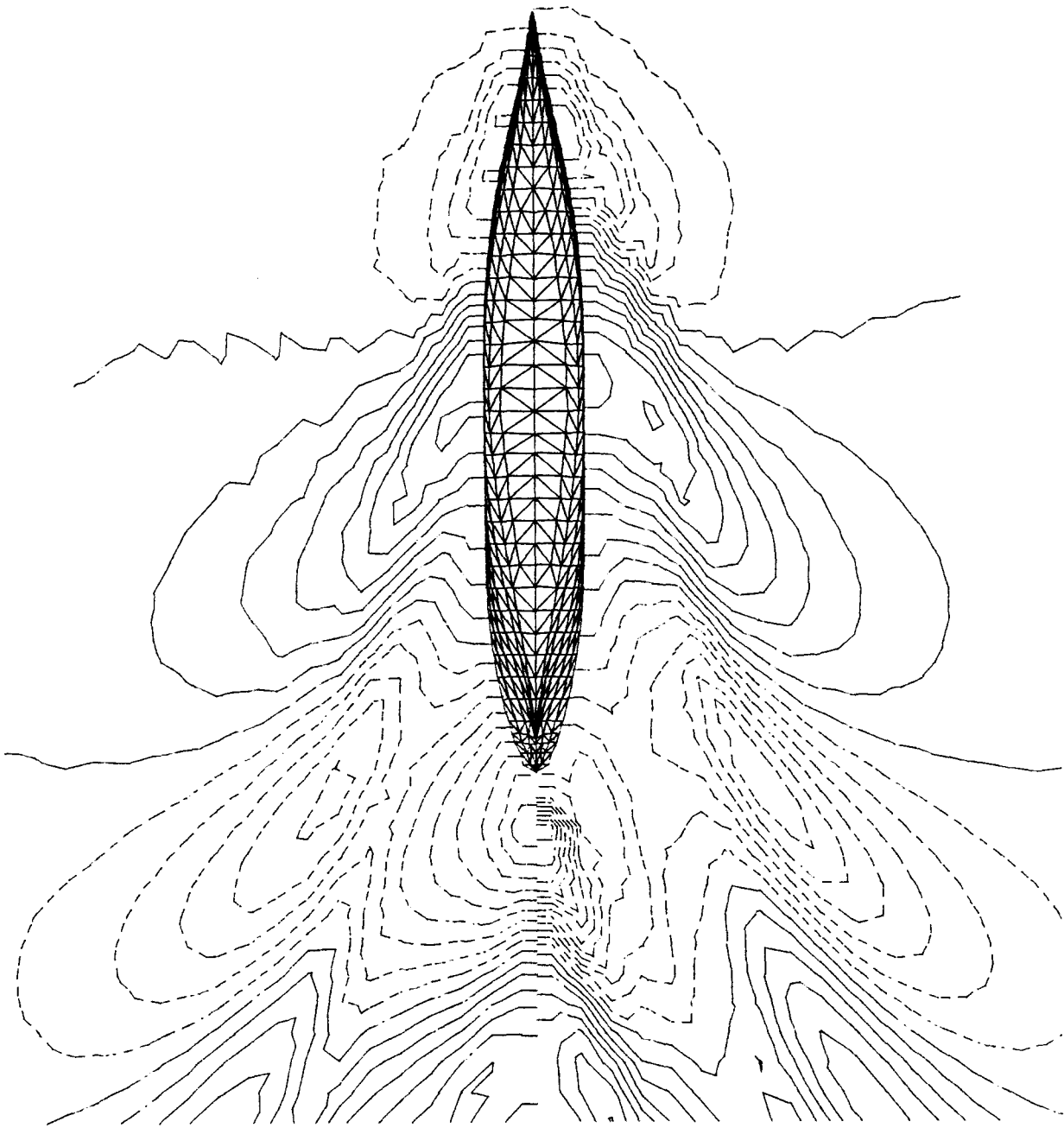


Bild 6-26: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.364$
 Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.
 Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

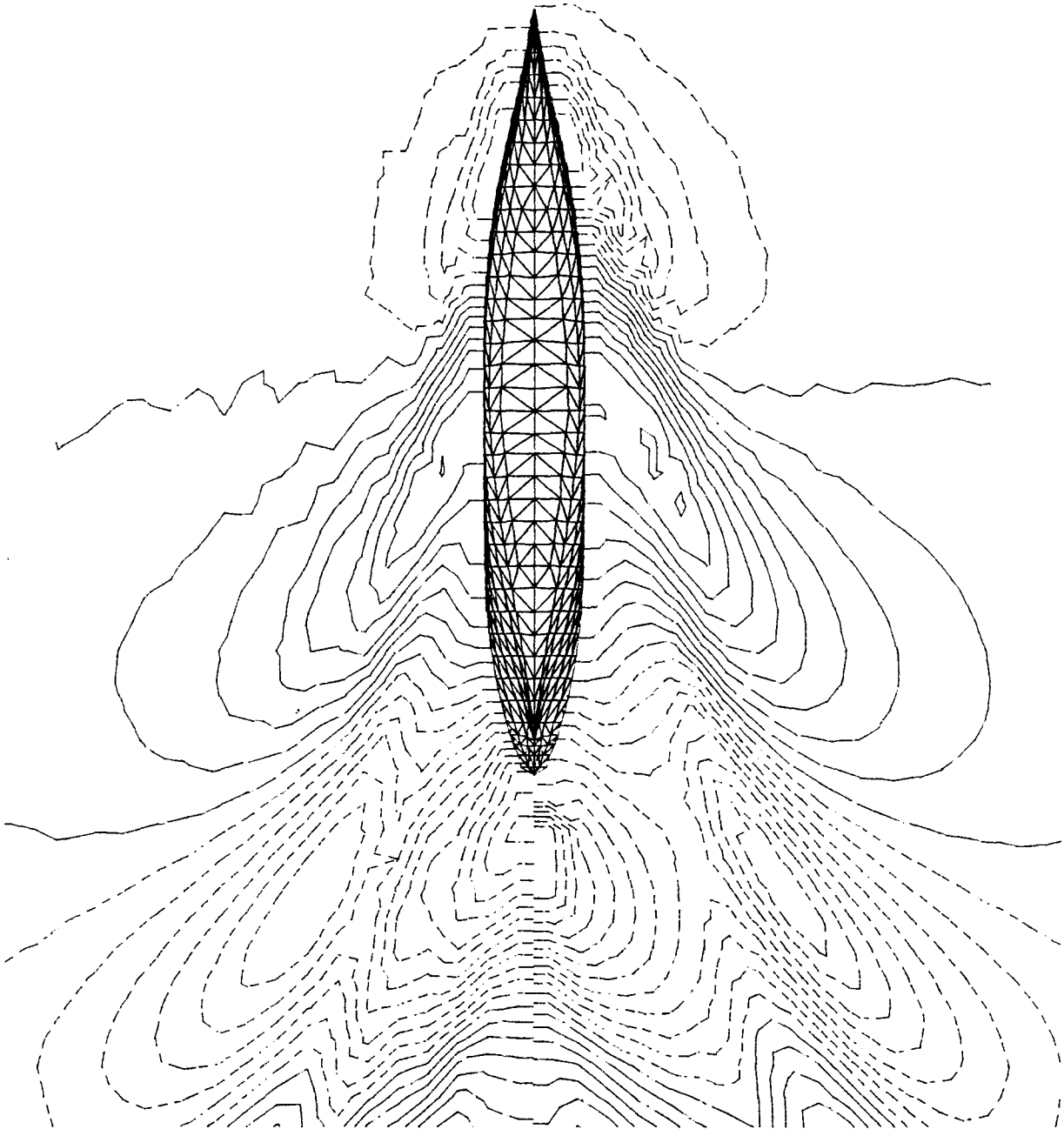


Bild 6-27: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für Series-60, $C_B = 0.60$ bei $F_n = 0.39$

Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die nichtlineare Lösung.

Der Abstand der Höhenlinien ist $2 \cdot 10^{-3} L_{PP}$.

6.2.3 HSVA-Tanker

Als Beispiel für eine völlige Schiffsförm mit stumpfem Wasserlinieneintrittswinkel wurde die von Collatz [8] verwendete Schiffsförm gewählt, die in der Literatur häufig als "HSVA-Tanker" oder "Hoffmann-Tanker" bezeichnet wird. Die Hauptverhältniswerte dieser Schiffsförm sind:

$$\frac{L_{PP}}{B} = 6.6; \quad \frac{L_{PP}}{D} = 17.83; \quad C_B = 0.85; \quad \frac{L_{PP}^2}{S_0} = 3.792.$$

Bild 6-28 zeigt den Spantenriß und Bild 6-29 die Stevenkonturen.

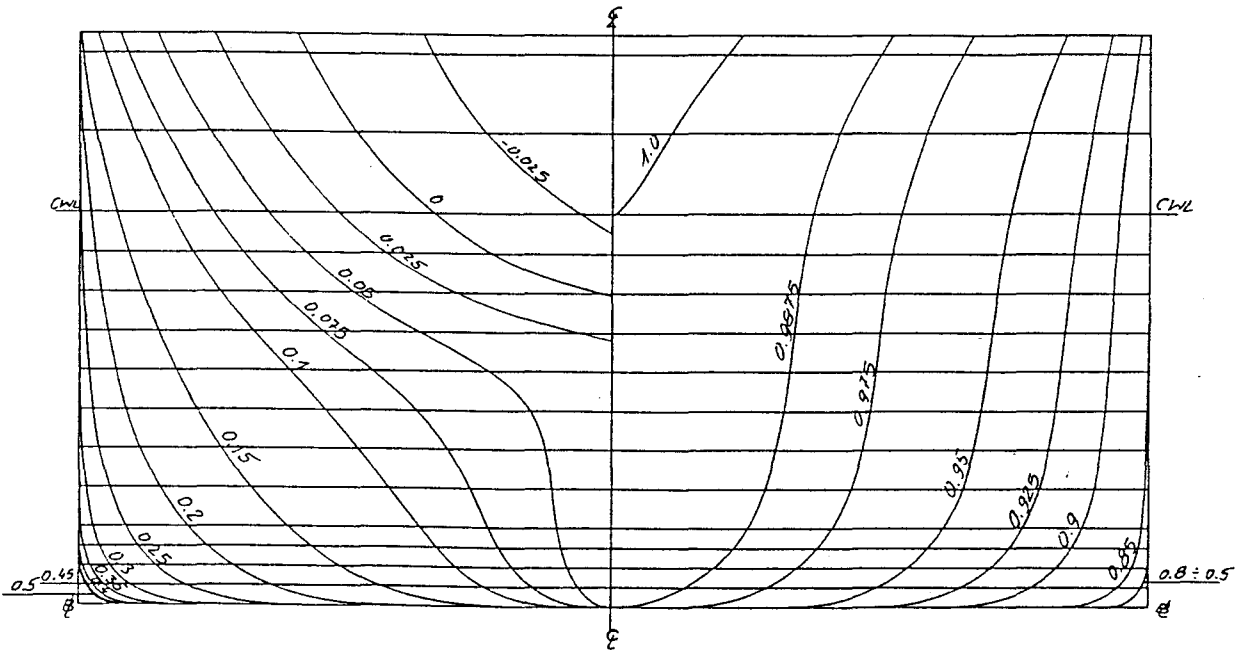


Bild 6-28: Spantenriß des HSVA-Tankers

Die Schiffsoberfläche wurde in 453 Panels bis zu einer Ebene $0.0032L_{PP}$ über der Konstruktionswasserlinie eingeteilt. Für die Iteration der Schwimmelage wurden Reibungskräfte vernachlässigt. Der Gewichtsschwerpunkt und der Angriffspunkt der Schleppkraft wurden in Höhe der Ruhewasserlinie angenommen.

Es wurden verschiedene Netze an der Wasseroberfläche erprobt. Mit keinem der Netze konnte Konvergenz bei der Iteration der nichtlinearen Randbedingung an der freien Wasseroberfläche erzielt werden, weil sich der Fehler ε (4-20) an einigen Punkten in der Nähe des Bugs spätestens im vierten Iterationsschritt nicht mehr vermindern ließ.

Es stellte sich heraus, daß es für diesen Fall erforderlich ist, die Wasseroberfläche bis relativ weit vor dem Schiff zu diskretisieren, anderenfalls ergeben sich bereits beim ersten Iterationsschritt (Kelvin-Bedingung) starke vom Rand ausgehende Störungen.

Die im folgenden dargestellten Ergebnisse sind mit einem regelmäßigen Rechteckraster berechnet worden, das die Wasseroberfläche von $0.4L_{PP}$ vor dem Schiff bis $0.233L_{PP}$

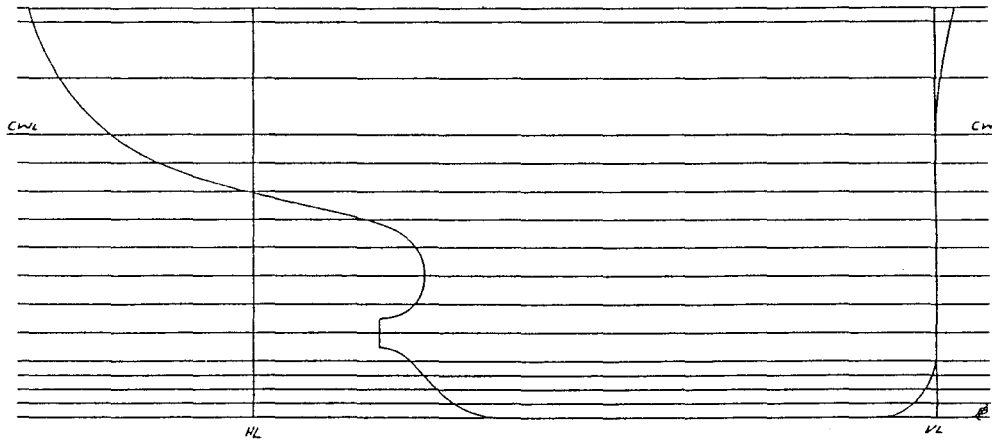


Bild 6-29: Stevenkonturen des HSVA-Tankers

hinter dem Schiff in einer Breite von $0.5L_{PP}$ bedeckt. Aus diesem Raster wurden die Kollokationspunkte und die zugehörigen (verschobenen) Quellen ausgespart, die innerhalb der Ruhewasserlinie oder näher als $0.016L_{PP}$ an der Ruhewasserlinie lagen. Die Maschenweite in Längsrichtung beträgt $0.032L_{PP}$ und in Querrichtung $0.028L_{PP}$, so daß das Oberflächennetz 853 Kollokationspunkte und Quellen hat.

Die folgende Tabelle zeigt für $F_n = 0.18$ die Berechnungsergebnisse für die ersten drei Iterationsschritte:

Iterationsschritt	1	2	3
$\varepsilon/\varepsilon^{(1)}$	1	.072	.052
c_w	$5.08 \cdot 10^{-3}$	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$0.84 \cdot 10^{-3}$

Danach konnte der Fehler nicht mehr verringert werden. Collatz [8] hat unter Berücksichtigung eines viskosen Druckwiderstandsbeiwertes von $0.77 \cdot 10^{-3}$ einen Wellenwiderstandsbeiwert $c_w = 0.55 \cdot 10^{-3}$ gemessen.

Bild 6-30 zeigt die verformte Wasseroberfläche nach dem ersten und dem dritten Iterationsschritt.

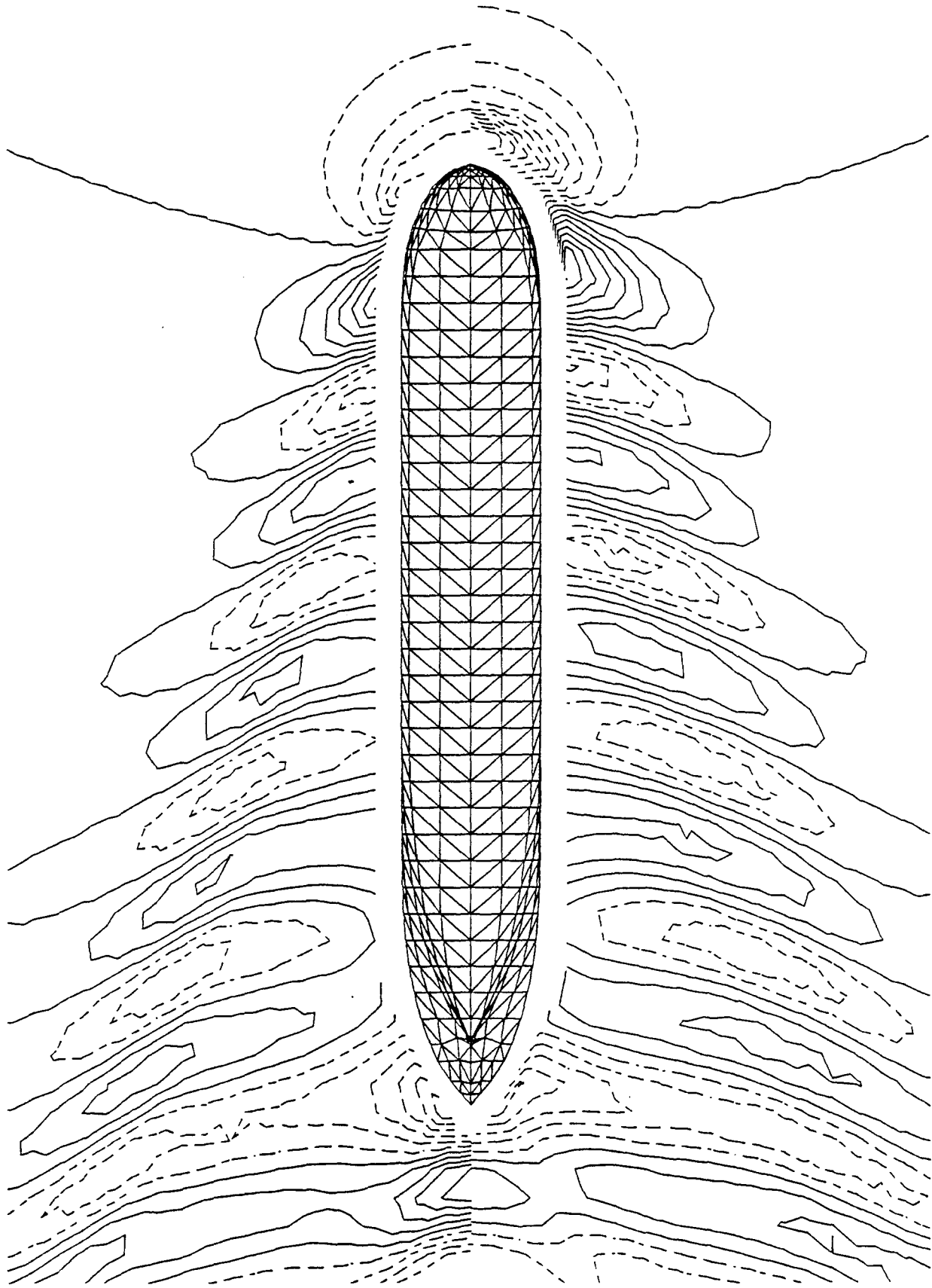


Bild 6-30: Höhenlinien der verformten Wasseroberfläche für den HSVA-Tanker bei $F_n = 0.18$

Links die Lösung mit linearisierter Oberflächenbedingung (4-6), rechts die Lösung nach dem dritten Iterationsschritt.

Der Abstand der Höhenlinien ist $10^{-3} L_{PP}$.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Es wird ein numerisches Verfahren zur Berechnung der stationären Potentialströmung um einen Körper an der freien Wasseroberfläche beschrieben, bei dem die Strömung durch das Potential von Rankinequellen dargestellt wird. Die nichtlineare Randbedingung an der freien Wasseroberfläche wird iterativ erfüllt. Die Körperoberfläche wird am wirklich benetzten Teil des Körpers erfüllt. Zur Berechnung der Druckkräfte wird der Druck über den wirklich benetzten Teil der Körperoberfläche integriert. Die Schwimmlage wird iterativ so bestimmt, daß Kräftegleichgewicht herrscht.

Die numerischen Untersuchungen zeigen für das parabolische Wigley-Schiff und das Series-60 Schiff mit $C_B = 0.60$ gute Übereinstimmung mit Messungen, während es bei dem völligen und langsamen Hoffmann-Tanker schwierig war, Konvergenz zu erzielen. Da der numerische Aufwand mit sinkender Froudezahl erheblich wächst (der Speicherbedarf ist etwa proportional zu F_n^{-8} und der Rechenzeitbedarf des linearen Gleichungslösers ist sogar proportional zu F_n^{-12}) konnte für den Hoffmann-Tanker auf dem größten zur Verfügung stehenden Rechner (VAX 8550) ohnehin nur für die größte gemessene Froudezahl ($F_n = 0.18$) gerechnet werden, so daß sich keine fundierten Aussagen über die Anwendbarkeit der Methode auf sehr völlige Schiffsförmigkeiten machen lassen. Es ist aber zu erwarten, daß sich bei stumpfen Wasserlinien-Winkeln prinzipielle Schwierigkeiten ergeben.

Es erscheint sinnvoll, sich um eine Verminderung des numerischen Aufwands zu bemühen. Dazu könnte man z.B. die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems so modifizieren, daß ein iterativer Löser benutzt werden kann. Möglicherweise läßt sich der Ansatz von Piers [27] für die zwei-dimensionale Dawson-Methode auf das hier benutzte Verfahren übertragen. Außerdem sollte versucht werden, durch Bildung von Panelclustern für die Berechnung der Einflußfunktionen an weiter entfernt liegenden Punkten den Rechen- und Speicheraufwand zu senken.

Daneben sollte der Strömungsabriß an einem Spiegelheck berücksichtigt werden können. Möglicherweise genügt es hierzu, die Randbedingungen an Kollokationspunkten auf dem Spiegel zu verändern.

8 Literatur

- [1] Baba, E. und M. Hara
Numerical Evaluation of a Wave-Resistance Theory for Slow Ships
Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, University of California, Berkeley 1977
- [2] Bai, K.J.
A Localized Finite-Element Method for Two-Dimensional Steady Potential Flows with a Free Surface
Journal of Ship Research, Vol. 22, Seite 216ff, 1978
- [3] Bai, K.J.
Blockage Correction with a Free Surface
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 94, Seite 433ff, 1979
- [4] Bertram, V. und G. Jensen
Numerische Berechnung des Schiffswellenwiderstands
Institut für Schiffbau, Bericht Nr. 477 (1987)
- [5] Bertram, V. und G. Jensen
Programme zur numerische Berechnung des Schiffswellenwiderstands
Institut für Schiffbau, Schrift Nr. 2365 (1987)
- [6] Bertram, V. und G. Jensen
A New Approach to Non-Linear Waves Generated by a Body Moving at a Free Surface
IUTAM Symposium on Nonlinear Water Waves, Tokyo 1987
- [7] Brard, R.
The Representation of a Given Ship Form by Singularity Distributions When the Boundary Condition on the Free Surface is Linearized
Journal of Ship Research, März 1972
- [8] Collatz, G.
Maß-stabsuntersuchungen für ein Modell großer Völligkeit
Forschungszentrum des deutschen Schiffbaus, Bericht Nr. 28, Hamburg 1972
- [9] Dawson, C. W.
A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems
Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, University of California, Berkeley 1977
- [10] Eggers, K., S.D. Sharma und L.W. Ward
An Assessment of Some Experimental Methods for Determining the Wavemaking Characteristics of a Ship Form
SNAME, Transactions Vol. 75, 1967

- [11] Gadd, G.E.
A Method of Computing the Flow and Surface Wave Pattern Around Full Forms
RINA, Vol. 118, 1976
- [12] Gerlach, E. und H. Söding
Benutzerhandbuch für das Programm EUMEDES
Institut für Schiffbau, Schrift Nr. 2362 (1987)
- [13] Guilloton, R.
Potential Theory of Wave Resistance of Ships with Tables for its Calculation
SNAME, Transactions Vol. 59, 1951
- [14] Hess, J.L. und A.M.O. Smith
Calculation of Non-lifting Potential Flow about Arbitrary Three-dimensional Bodies
Douglas Aircraft Division Report No. E.S.40622, 1962
- [15] Jensen, G., Z.-X. Mi und H. Söding
Rankine Methods for Numerical Solutions of the Steady Wave Resistance Problem
Sixteenth Symposium on Naval Hydrodynamics, University of California, Berkeley
(1986)
- [16] Jensen, G.
Rankine-Methoden zur Berechnung von stationären Potentialströmungen mit freier
Oberfläche
Institut für Schiffbau, Kolloquium 86/87
- [17] Kajitani, H.
A Wandering in Some Ship Resistance Components and Flow
Schiffstechnik, Band 34, Heft 3 1987
- [18] Landweber, L.
Wigley Parabolic Hull Group Discussion
Proceedings of the Workshop on Ship Wave-Resistance Computations, Vol.1
David Taylor Naval Ship Research and Development Center Bethesda, Maryland,
U.S.A. (1979)
- [19] Maruo, H. und S. Ogiwara
A Method of Computation for Steady Ship-Waves with Non-Linear Free Surface
Conditions
Fourth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Washington
1985
- [20] Masuko, A. und S. Ogiwara
A Method of Computation for Steady Ship Wave by Means of Rankine Sources and
its Application to Hull Form Design

International Conference on Computer Aided Design, Manufacturing and Operation in the Offshore Industries (CADMO86), Washington D.C., 1986

- [21] Michell, J.H.
The Wave Resistance of a Ship
Phil.Mag. Vol 45, 1898
- [22] Nakatake, K.
On the Wave Pattern Created by Singular points
Journal of Seibu Zosen Kai West Japan , No. 31, (1966)
- [23] Noblesse, F.
A Slender-Ship Theory of Wave-Resistance
Journal of Ship Research, Vol. 27, März 1983
- [24] Nowak, Z.P.
Efficient multi-level panel methods of high-order accuracy
Workshop on advanced panel methods, Universität der Bundeswehr, München, 1986
- [25] Ogiwara, S.
Tank Experiments and Numerical Works on Series 60 Model in IHI Ship Model Basin
Report to the Cooparative Experiment Program of 18th ITTC, Kobe, Japan, October 1987
- [26] Ohring, S. und J. Telste
Numerical Solution of Transient Three-Dimensional Ship-Wave Problems
Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, University of California, Berkeley 1977
- [27] Piers, W.J.
Discretization Schemes for the Modelling of Free Water Surface Effects in First-Order Panel Methods for Hydrodynamic Applications
Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, NLR TR 83093, 1983
- [28] Webster, W. C.
The Flow about Arbitrary Three-Dimensional Smooth Bodies
Journal of Ship Research Vol. 19, No. 4 (1975)

A Grenzwerte der Integranden bei $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$

Die Integrale über die Quellverteilungen in (5-2),(5-6),(5-7),(5-9) und (5-12) enthalten das Potential einer Quelle $G(\vec{p}, \vec{q})$. Für $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ bleiben G und seine Ableitungen nicht endlich. Es ist daher interessant, wie sich die Integranden der oben genannten Gleichungen verhalten.

A.1 Ebene Strömung

Ohne Verlust an Allgemeinheit kann das Koordinatensystem so gedreht und verschoben werden, daß die x -Achse den Körper am Punkt $\vec{q} = (0, 0)$ tangiert. In einer Umgebung von \vec{q} kann die Körperoberfläche dann durch eine abgebrochene Taylorentwicklung angenähert werden, die keine konstanten und linearen Glieder enthält:

$$z = ax^2 + \dots \quad (\text{A } - 1)$$

Eine Tangente ist

$$\vec{t} = (1, 2ax + \dots). \quad (\text{A } - 2)$$

Die Einheitsnormale ergibt sich dann als

$$\vec{n} = \frac{(-2ax + \dots, 1)}{\sqrt{(2ax + \dots)^2 + 1}}. \quad (\text{A } - 3)$$

Das Potential der Einheitsquelle ist mit $A = (2\pi)^{-1}$

$$G(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{A}{2} \log(r^2) \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + (ax^2 + \dots)^2. \quad (\text{A } - 4)$$

Daraus ergeben sich die Ableitungen des Quellpotentials zu

$$\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = A \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} x \\ ax^2 \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{A } - 5)$$

Auch die Quellstärke wird in eine Taylorreihe entwickelt:

$$M(\vec{p}) = M(\vec{q}) + Bx + \dots \quad (\text{A } - 6)$$

Der Integrand von (5-2) ist nun

$$M(\vec{p})\vec{n}(\vec{q})\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = (M(\vec{q}) + Bx + \dots)A \frac{ax^2 + \dots}{x^2 + (ax^2 + \dots)^2}. \quad (\text{A } - 7)$$

Läßt man $x \rightarrow 0$ gehen so erhält man $M(\vec{q})Aa$, also eine Konstante.

Die Integranden in (5-6) und (5-7) enthalten sowohl den Integranden von (5-2) als auch

$$M(\vec{q})\vec{n}(\vec{p})\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = M(\vec{q})A \frac{-2axx + ax^2 + \dots}{x^2 + (ax^2 + \dots)^2}. \quad (\text{A } - 8)$$

Läßt man $x \rightarrow 0$ gehen, so erhält man $-M(\vec{q})Aa$, also eine Konstante.

Der Integrand in (5-6) ist die Summe von (A-7) und (A-8), also geht er für $x \rightarrow 0$ gegen 0.

Der Integrand in (5-7) ist die Differenz von (A-7) und (A-8), mit $x \rightarrow 0$ wird er $2M(\vec{q})Aa$, also eine Konstante.

Der Integrand in Gleichung (5-3) zur Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit ist

$$M(\vec{p})\vec{t}(\vec{q})\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = (M(\vec{q}) + Bx + \dots)A \frac{x}{x^2 + (ax^2)^2}. \quad (\text{A} - 9)$$

Läßt man $x \rightarrow 0$ gehen, strebt der Ausdruck gegen ∞ :

$$M(\vec{q})\frac{A}{x} + AB + \dots \quad (\text{A} - 10)$$

Der Integrand in Gleichung (5-9) ist unterscheidet sich von (5-3) durch den weiteren Summanden

$$-M(\vec{q})\vec{t}(\vec{p})\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = -M(\vec{q})A \frac{x + 2ax(ax^2 + \dots)}{x^2 + (ax^2)^2}. \quad (\text{A} - 11)$$

Läßt man $x \rightarrow 0$ gehen, so bleibt

$$-M(\vec{q})A \frac{A}{x} + \dots \quad (\text{A} - 12)$$

Der Integrand von (5-9) geht also gegen die Konstante AB .

A.2 Räumliche Strömung

Ohne Verlust an Allgemeinheit kann das Koordinatensystem so gedreht und verschoben werden, daß die x, y -Ebene den Körper am Punkt $\vec{q} = (0, 0, 0)$ tangiert. In einer Umgebung von \vec{q} kann die Körperoberfläche dann durch eine abgebrochene Taylorentwicklung angenähert werden, die keine konstanten und linearen Glieder enthält:

$$z = ax^2 + by^2 + cxy + \dots \quad (\text{A} - 13)$$

Eine Tangente ist

$$\vec{t} = (1, 2ax, 0). \quad (\text{A} - 14)$$

Die Normale ergibt sich als

$$\vec{n} = \frac{(1, 0, z_x) \times (0, 1, z_y)}{|(1, 0, z_x) \times (0, 1, z_y)|} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} = \frac{(-2ax - cy, -2by - cx, 1)}{\sqrt{(2ax + cy)^2 + (2by + cx)^2 + 1}} \quad (\text{A} - 15)$$

Das Potential der Einheitsquelle ist

$$G(\vec{p}, \vec{q}) = A(r^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2 + cxy + \dots)^2. \quad (\text{A} - 16)$$

Daraus ergeben sich die Ableitungen des Quellpotentials zu

$$\nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{1}{2} A(r^2)^{-\frac{3}{2}} \nabla_q (r^2) = A(r^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax^2 + by^2 + cxy + \dots \end{pmatrix}. \quad (\text{A} - 17)$$

Auch die Quellstärke wird in eine Taylorreihe entwickelt:

$$M(\vec{p}) = M(\vec{q}) + Bx + Cy + \dots \quad (\text{A} - 18)$$

Der Integrand von (5-2) ist

$$\begin{aligned} M(\vec{p}) \vec{n}(\vec{q}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) &= M(\vec{p})(0, 0, 1) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = \\ & (M(\vec{q}) + Bx + Cy + \dots) A \frac{ax^2 + by^2 + cxy + \dots}{\sqrt{x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2 + cxy + \dots)^2}^3}. \end{aligned} \quad (\text{A} - 19)$$

Setzt man $y = 0$, so wird der Ausdruck

$$(M(\vec{q}) + Bx + \dots) A \frac{ax^2 + \dots}{\sqrt{x^2 + a^2x^4 + \dots}^3}. \quad (\text{A} - 20)$$

Läßt man $x \rightarrow 0$ streben, so erhält man

$$Aa \left(\frac{M(\vec{q})}{|x|} + B \frac{x}{|x|} \right). \quad (\text{A} - 21)$$

Setzt man umgekehrt erst $x = 0$ und läßt dann $y \rightarrow 0$ so ergibt sich

$$Ab \left(\frac{M(\vec{q})}{|y|} + C \frac{y}{|y|} \right). \quad (\text{A} - 22)$$

Der Integrand in (5-2) ist also singulär.

Die Integranden in (5-6) und (5-7) enthalten sowohl den Integranden von (5-2) als auch

$$\begin{aligned} M(\vec{q}) \vec{n}(\vec{p}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) &= \\ M(\vec{q}) A \frac{(-2ax - cy)x + (-2by - cx)y + ax^2 + by^2 + cxy + \dots}{\sqrt{(2ax + cy)^2 + (2by + cx)^2 + 1} \sqrt{x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2 + cxy + \dots)^2}^3}. \end{aligned} \quad (\text{A} - 23)$$

Setzt man hier $y = 0$, so erhält man

$$M(\vec{q}) A \frac{-ax^2 + \dots}{\sqrt{(2ax)^2 + (cx)^2 + 1} \sqrt{x^2 + a^2x^4 + \dots}^3}. \quad (\text{A} - 24)$$

Läßt man $x \rightarrow 0$ gehen, so ergibt sich daraus

$$-Aa \frac{M(\vec{q})}{|x|} + \dots \quad (\text{A} - 25)$$

Setzt man umgekehrt erst $x = 0$ und läßt dann $y \rightarrow 0$ so ergibt sich

$$- Ab \frac{M(\vec{q})}{|y|} + \dots \quad (\text{A} - 26)$$

Der Integrand in (5-6) ist die Summe von (A-19) und (A-23), also mit $y = 0$ und $x \rightarrow 0$ wird er AaB und mit $x = 0$ und $y \rightarrow 0$ wird er AbC . Er geht also gegen eine Konstante, die aber von der Richtung anhängt, aus der \vec{p} gegen \vec{q} strebt.

Der Integrand in (5-7) ist die Differenz von (A-19) und (A-23), also mit $y = 0$ und $x \rightarrow 0$ wird er

$$Aa \left(2 \frac{M(\vec{q})}{|x|} + B \right) \quad (\text{A} - 27)$$

mit $x = 0$ und $y \rightarrow 0$ wird er

$$Ab \left(2 \frac{M(\vec{q})}{|y|} + C \right). \quad (\text{A} - 28)$$

Er ist also singulär.

Ist die Fläche in einer Umgebung von \vec{q} eben, so sind a, b und c gleich Null. Dann gehen alle drei Integranden gegen Null.

Der Integrand in (5-3) ist

$$M(\vec{p}) \vec{t}(\vec{q}) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = M(\vec{p}) (1, 0, 0) \nabla_q G(\vec{p}, \vec{q}) = \quad (\text{A} - 29)$$

$$(M(\vec{q}) + Bx + Cy + \dots) A \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2 + cxy + \dots)^2}^3}.$$

Setzt man $y = 0$ erhält man:

$$M(\vec{q}) A \frac{1}{x|x| \sqrt{1 + (ax)^2}^3} + BA \frac{1}{|x| \sqrt{1 + (ax)^2}^3}. \quad (\text{A} - 30)$$

Läßt man $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ entsprechend $x \rightarrow 0$ gehen, so bleibt

$$M(\vec{q}) A \frac{1}{x|x|} + BA \frac{1}{|x|}. \quad (\text{A} - 31)$$

Setzt man zuerst $x = 0$ und läßt dann $y \rightarrow 0$ gehen, so ergibt sich

$$M(\vec{q}) A \frac{1}{y|y|} + BA \frac{1}{|y|}. \quad (\text{A} - 32)$$

Der Integrand ist also auch für eine ebene Fläche ($a = 0$) und konstante Quellstärke ($B = 0$) singulär.

Um den Integranden von (5-12) zu untersuchen, muß noch eine tangierende Kugel festgelegt werden. Ich wähle eine Kugel mit Mittelpunkt bei $(0,0,1)$ und Radius 1. Der

Flächenfaktor für die Projektion von $P = (x, y, ax^2 + by^2 + cxy\dots)$ auf die Kugeloberfläche ergibt sich aus (5-22) zu

$$r_k = \frac{(-2ax - cy, -2by - cx, 1)(x, y, ax^2 + by^2 + cxy\dots - 1)}{\sqrt{(2ax + cy)^2 + (2by + cx)^2 + 1}\sqrt{x^2 + y^2 + (ax^2 + by^2 + cxy\dots - 1)^2}}. \quad (\text{A} - 33)$$

Zur Verminderung der Anzahl der Terme setze ich hier bereits $y = 0$. Es ist dann

$$r_k = \frac{-ax^2 - 1}{\sqrt{(2ax)^2 + (cx)^2 + 1}\sqrt{x^2 + (ax^2 - 1)^2}}. \quad (\text{A} - 34)$$

Die Projektion von \vec{p} auf die Kugeloberfläche mit (5-21), wieder mit $y = 0$, ist

$$P(\vec{p}) = \frac{(x, 0, (1 - a)x^2 - a^2x^4)}{(1 - 2a)x^2 + a^2x^4 + 1}. \quad (\text{A} - 35)$$

Der zweite Teil des Integranden in (5-12) ist

$$M(\vec{q})\vec{t}(\vec{q})\nabla_q G(P(\vec{p}), \vec{q})r = \quad (\text{A} - 36)$$

$$M(\vec{q})A \frac{x\sqrt{(1 - 2a)x^2 + a^2x^4 + 1} \quad -ax^2 - 1}{\sqrt{x^2 + ((1 - a)x^2 - a^2x^4)^2}^3 \sqrt{(2ax)^2 + (cx)^2 + 1}\sqrt{x^2 + (ax^2 - 1)^2}}.$$

Läßt man nun $x \rightarrow 0$ gehen, so geht dieser Ausdruck gegen

$$-M(\vec{q})A \frac{1}{x|x|}. \quad (\text{A} - 37)$$

Setzt man erst $x = 0$ und läßt dann $y \rightarrow 0$ streben, ergibt sich

$$-M(\vec{q})A \frac{1}{y|y|}. \quad (\text{A} - 38)$$

Der Grenzwert des Integranden von (5-12) ist nun die Summe von (A-37) und des Grenzwerts von (A-31) bzw. die Summe von (A-38) und des Grenzwerts von (A-32), also:

$$BA \frac{1}{|x|} \quad \text{bzw.} \quad CA \frac{1}{|y|}. \quad (\text{A} - 39)$$

Der Ausdruck strebt für $p \rightarrow q$ gegen $\pm\infty$. Ist jedoch die Quellstärke in einer Umgebung um \vec{q} konstant ($B = C = 0$), so ist der Integrand Null.

B Programme

Neben den eigentlichen Rechenprogrammen sind weitere Programme geschrieben worden, die die Erstellung von Eingabedateien und die grafische Auswertung der Ergebnisse unterstützen. Nur mit diesen Hilfsprogrammen ist es möglich, mit vertretbarem Zeitaufwand (etwa 1-2 Wochen) Ergebnisse für eine durch einen Linienriß beschriebene Schiffsform zu erhalten.

Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

Aufmessen der Schiffsform für EUMEDES,
Kontrolle der aufgemessenen Form mit EUMEDES,
Generieren von Panels auf der Körperoberfläche mit EUMGEN,
interaktive Ergänzung und Verfeinerung der Panelierung mit EUMDIG,
Normalen-, Flächen- und Kugelradienberechnung mit SCHGEN,
Generierung eines Oberflächennetzes mit RUMGEN oder CUTGEN,
Berechnung der Strömung mit freier Oberfläche mit PAMFRO,
grafische Auswertung der Ergebnisse mit PAMPLT.

Soll nur die Doppelkörperströmung berechnet werden, wird kein Oberflächennetz generiert und PAMENI an Stelle von PAMFRO verwendet.

Alle Programme sind in FORTRAN-77 geschrieben und auf einer VAX unter VMS sowie auf einem Atari-St getestet. Ausnahme ist der interaktive grafische Netzgenerierer EUMDIG, der nur auf Atari-St läuft. Die folgenden Abschnitte enthalten kurze Beschreibungen der Programme. Das Programm EUMEDES ist von Gerlach und Söding in [12] beschrieben.

B.1 Programm zur Berechnung der stationären Potentialströmung um Körper in unbeschränkter Flüssigkeit, PAMENI

Das Programm PAMENI ist eine Implementation der Panelmethode mit einfacher numerischer Integration. Es liest eine unformatierte Eingabedatei, die mit den Programmen PAMGEN oder SCHGEN erzeugt wurde und die alle notwendigen Informationen wie Lage der Kollokations/Quellpunkte, zugehörige Normalen und Radien der tangierenden Kugeln, Informationen über Symmetrien und die Daten der Dreiecke enthält, die lediglich an das Plotprogramm weitergereicht werden. Außerdem kann es eine formatierte Datei einlesen, die die Koordinaten von Punkten außerhalb der Körperoberfläche enthält, an denen auch Geschwindigkeiten berechnet werden sollen. Die Datei muß folgende Informationen enthalten:

Erster Satz: *Anzahl der Punkte N*

N Sätze: x-,y-,z-Koordinaten des Punktes

Das Programm erzeugt eine formatierte und eine unformatierte Ergebnisdatei. Die unformatierte Ergebnisdatei kann von dem Programm PAMPLT zur grafischen Darstellung der Ergebnisse und des Netzes eingelesen werden.

B.2 Programme zur Panelierung der Schiffsform

B.2.1 Programm EUMGEN

EUMGEN generiert Dreiecke auf einer für die EUMEDES-Formbeschreibung beschriebenen Fläche. Dazu beschreibt man ein Raster aus Längslinien (von unten nach oben) und Spanten (von hinten nach vorn). In diesem Raster werden Dreiecke generiert. Die Punkte dieses Rasters werden mit dem EUMEDES Unterprogramm OBERF von Söding bestimmt. Punkte, die nicht auf der beschriebenen Fläche liegen, werden weggelassen und die entsprechenden Dreiecke werden elimiert. Die entstandene Datei kann mit dem Programm EUMDIG interaktiv bearbeitet werden.

Der Verlauf der Längsschnitte kann durch die vier Koeffizienten der Ebenengleichung $Ay + Bz = C + Dx$ definiert werden. Diese vier Koeffizienten sind für alle Längsschnitte anzugeben. $A = 0$, $B = 1$, $C = 2.7$ und $D = 0$ definiert z.B. eine Wasserlinie in 2.7m Höhe. $A = 1$, $B = 0$, $C = 5$ und $D = 0$ definiert einen Schnitt 5 m aus Mitte Schiff. Soll eine vertrimmte Wasserlinien definiert werden, so ist für D der Tangens des Trimmwinkels einzusetzen.

Das Programm kann nur in dem einigermaßen parallel verlaufenden Teil der Schiffsoberfläche Dreiecke generieren.

B.2.2 EUMDIG

EUMDIG ist ein Programm zur interaktiven Panelierung von Schiffsoberflächen. Es verwendet die EUMEDES-Formbeschreibung. Das Programm läuft auf Atari-Tischrechnern der St-Serie. Die Programmsteuerung erfolgt interaktiv mit der Maus und der Tastatur.

In einer perspektivischen Darstellung der Schiffsoberfläche markiert der Benutzer mit der Maus Punkte. Dabei berechnet das Programm aus den ausgewählten Bildkoordinaten, den Daten der Perspektive und den Formdaten die drei Koordinaten des Oberflächenpunkts. Es können zur Orientierungshilfe zusätzliche Längslinien geplottet werden. Insbesondere sollte die Ebene, die als obere Grenze für die Panelierung gewählt wird als erste Längslinie definiert werden. Das Programm kann so gesteuert werden, daß es automatisch den nächstgelegenen Oberflächenpunkt auf dieser Ebene sucht. Der Benutzer muß stets eine Perspektive wählen, in der die Rückrechnung eindeutig möglich ist. Durch Zeigen auf die markierten Punkte werden diese zu dreieckigen Panels verbunden. Das Programm berechnet auch für jedes dreieckige Panel den Mittelpunkt. Er wird so bestimmt, daß er auf dem Körper liegt und daß die drei Flächen der ebenen Dreiecke zwischen dem Mittelpunkt und je zwei der drei Panelecken gleich groß sind.

Das Programm bietet zahlreiche Möglichkeiten der Eingabe und Korrektur. Die Steuerung erfolgt interaktiv durch Drücken einer einzelnen Taste. Wird die "?"-Taste oder eine andere derzeit nicht definierte Taste gedrückt, werden in fast jedem Stadium der

Programmausführung alle derzeit möglichen Eingaben mit einem kurzen Hilfstext angezeigt, so daß das Programm weitgehend selbsterklärend ist.

Im folgenden werden die Auswahlmöglichkeiten des Hauptmenüs angegeben, um einen Überblick über die Möglichkeiten des Programms zu geben.

Taste "7" Panel loeschen
Taste "8" andere EUMEDES-Eingabe-Datei
Taste "9" grafische Ausgabe, Bild neu plotten
Taste "0" Punkt aendern
Taste "A" neuer Punkt
Taste "B" neues Panel
Taste "P" Andere Projektion
Taste "W" Anderer Bildausschnitt
Taste "N" Andere Punktzahl pro Panel
Taste "G" Andere Plotgenauigkeit
Taste "S" Eingabe speichern, STOP
Taste "L" Laengslinien definieren
Taste "M" Mitten der Dreiecke werden bestimmt

Bei der Auswahl der meisten Menüpunkte werden Untermenüs mit zugehörigen Hilfstexten erreicht oder Dialoge begonnen.

B.3 Hilfsprogramme zur Aufbereitung von Netzen an der Körperoberfläche

B.3.1 PAMGEN

Das Programm PAMGEN dient zur Erzeugung von Eingabedaten für PAMENI. Es liest ein Netz aus Dreiecken ein. Sind die Panelmitten nicht angegeben, werden sie für das ebene Dreieck berechnet. Die Normale wird als Normale auf das ebene Dreieck bestimmt. Es kann hier aber auch eine anderes Unterprogramm angebunden werden, das die Normale auf der wirklichen Körperform für den angegebenen Mittelpunkt bestimmt. Die Panelfläche wird als Summe der Flächen der drei Dreiecke zwischen den Kanten und der Panelmitte angenähert.

Zu allen Panels werden die drei Nachbarpanels herausgesucht. Es werden die Radien von Kugeln mit Mittelpunkt auf der Normale berechnet, die durch die Mittelpunkte der Nachbarpanels und den Mittelpunkt des betrachteten Panels gehen. Ist dabei der Radius unendlich (ebene Körperoberfläche in Richtung des Nachbarpanels) oder der Körper konkav, wird ein vom Benutzer vorzugebender Maximalwert gesetzt. Der Mittelwert der drei Kugelradien wird als Radius der tangierenden Kugel benutzt. Falls der so berechnete Mittelpunkt jenseits einer Symmetrieebene liegt, wird der Radius so verringert, daß der Mittelpunkt auf der Symmetrieebene liegt. Dies soll helfen, zu ver-

hindern, daß der Kreismittelpunkt außerhalb des Körpers liegt. Eine echte Kontrolle für diese wichtige Bedingung gibt es nicht!

Das Programm erzeugt eine unformatierte Datei als Eingabedatei für PAMENI oder PAMFRO und eine formatierte Protokolldatei.

Zuerst prüft das Programm auch die Orientierung aller Dreiecke. Hierzu sind die Koordinaten eines Punktes anzugeben, der alle Panel von innen sieht. Wird dabei eine falsche Orientierung festgestellt, werden in dem entsprechenden Panel zwei Ecken vertauscht. Im weiteren Verlauf prüft das Programm auch, ob jedes Panel wirklich drei und nur drei Nachbarn hat (Das eigene Spiegelbild kann auch Nachbar sein). Anderenfalls ist die Panelierung lückenhaft, oder es überlappen sich Panel. Solche Warnungen dürfen keinesfalls vernachlässigt werden.

Das Programm kann Symmetrieebenen bei $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ berücksichtigen.

Das Programm liest die Netzdaten von einer Datei mit folgendem Aufbau:

Erster Satz: *Drei logische Werte (.T oder .F); sie geben an, ob die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ Symmetrieebenen sind (.T) oder nicht (.F);*

Zweiter Satz: *Anzahl der Punkte N_P ;*

N_P Sätze: *3 Punktkoordinaten;*

Ein Satz: *Anzahl der Panel N ;*

N Sätze: *3 Nummern der Eckpunkte des Panels, 3 Koordinaten des Panelmittelpunkts.*

Ist die Lage eines Panelmittelpunkts nicht bekannt, muß für das entsprechende Panel die x -Koordinate seines Mittelpunkts größer als 10^{30} angegeben werden. Das Programm berechnet dann den Mittelpunkt des Panels als Mittelpunkt des ebenen Dreiecks.

B.3.2 SCHGEN

SCHGEN erzeugt eine unformatierte Eingabedatei mit den Daten des Körpernetzes für PAMFRO. Es entspricht weitgehend dem zuvor beschriebenen Programm PAMGEN. Als Eingabedatei werden von EUMGEN oder EUMDIG geschriebene Dateien erwartet, bei deren Erstellung meist das bei Schiffen üblichen Koordinatensystem mit z' -Achse vom Kiel nach oben benutzt wird. Es nimmt daher eine Transformation der z -Koordinaten vor: $z = D - z'$. Der Benutzer muß D so bestimmen, daß bei $z = 0$ die ungestörte Wasserlinie des Schiffes liegt. SCHGEN berücksichtigt stets Symmetrie an der Ebene $y = 0$ und an der durch $Ax + Bz = C$ definierten Ebene. Dies ist die Ebene, bis zu der die Schiffsoberfläche paneliert worden ist.

B.4 Hilfsprogramme zur Generierung von Netzen an der freien Wasseroberfläche

Es gibt zwei Programme zur Generierung von Netzen an der freien Wasseroberfläche: RUMGEN generiert ein regelmäßiges Netz, bei dem die innerste Reihe von Kollokations-

punkte in einem Abstand der Wasserlinienkontur folgt. Über den Kollokationspunkten werden Quellen angeordnet. Ausgenommen ist hiervon der vorderste Kollokationspunkt einer jeden Reihe. Eine zusätzliche Quelle wird im Kollokationspunktabstand hinter den letzten Punkt jeder Kollokationspunktreihe gesetzt.

CUTGEN generiert ein regelmäßiges Rechteckraster von Kollokationspunkten auf der ungestörten Wasseroberfläche mit Quellpunkten in einer Schicht darüber, bei dem die Quellpunkte um einen Kollokationspunktabstand nach hinten verschoben sind. Kollokationspunkte, die in die Wasserlinienfläche des Körpers und einen schmalen Bereich um den Körper fallen, werden mit ihren zugehörigen (verschobenen) Quellpunkten eliminiert.

Die Bedienung der beiden Programme ist gleich: Der Benutzer muß den Namen der Datei mit dem Körpernetz (Ausgabedatei von PAMGEN oder SCHGEN) und den Namen der Datei für das zu bestimmenden Oberflächennetz angeben. Danach fragt das Programm nach der x -Koordinate des vorderen Punktes des Netzes, nach der Maschenweite und der Anzahl der Punkte in Längs- und Querrichtung, nach dem einzuhaltenden Abstand von der Ruhewasserlinie des Körpers, sowie nach der z -Koordinate der Quellschicht.

Die Ausgabedatei ist formatiert, damit örtliche Verfeinerungen oder Änderungen von Hand durchgeführt werden können.

B.5 Programm zur Berechnung der Strömung um Körper an der freien Wasseroberfläche, PAMFRO

PAMFRO liest eine unformatierte Datei mit den Daten des Körpernetzes (Ausgabedatei von SCHGEN oder von PAMGEN) und eine formatierte Datei mit den Daten des Netzes an der freien Wasseroberfläche (Ausgabedatei von RUMGEN oder von CUTGEN) ein. Außer den Namen dieser Dateien muß der Benutzer die Schiffsgeschwindigkeit und die Anzahl der Iterationsschritte für die Erfüllung der nichtlinearen Oberflächenbedingung eingeben. Dann fragt das Programm den Benutzer, ob die Iteration der Gleichgewichtslage des Körpers gewünscht wird. Falls dies gewünscht wird, muß der Benutzer die z -Koordinate des Gewichtsschwerpunkts, den Angriffspunkt und die Richtung der Schleppkraft sowie einen Reibungswiderstandsbeiwert angeben. Im folgenden ist der Beginn eines typischen Programmlaufs protokolliert:

```
+-----+
| Panelmethode mit einfacher numerischer Integration |
|               und freier Oberflaeche               |
+-----+
```

Name der Eingabedatei fuer den Koerper?

wigley.x

Name der Datei mit den Oberflaechenpunkten?

wigley.zus
 Name der formatierten Ausgabedatei?
 wigley.a30
 Name der unformatierten Ausgabedatei?
 wigley.ax30
 448 Panel/Kollokationspunkte auf dem Koerper gelesen
 586 Punkte an der Wasseroberflaeche gelesen
 Anstroemgeschwindigkeit ?
 3.0
 Anzahl der Iterationschritte?
 5
 Schwimmlage iterieren? J/N
 j
 Hoehenkoordinate des Gewichtsschwerpunkts
 0.
 Reibungswiderstandsbeiwert?
 0.
 Angriffspunkt der Zugkraft x,z?
 0. 0.
 Richtung der Schleppkraft z.B. 1,0 fuer horizontalen Zug?
 1. 0.

Statische Kraefte und Momente:
 xk,zk,ym -5.2154064E-08 -110.7203 4.2915344E-06
 Benetzte Oberflaeche: 38.07588
 dzk/dz dym/dz -166.6300 0.0000000E+00
 dzk/dt dym/dt 3.0994415E-05 -2129.041
 Initialisierungen abgeschlossen
 1. Iterationschritt
 Koerper/Koerper Koeffizienten bestimmt
 Oberflaeche/Koerper Koeffizienten bestimmt
 Gleichungssystem fertig
 Gleichungssystem geloest
 Maximaler Fehler in der nichtlinearen Oberflaechenbedingung:
 0.8596725 bei Punkt 489
 Maximale Vertikalbeschleunigung: 2.106950 bei Punkt 487
 Kraefte und Momente aus Potentialstroemung:
 xk,zk,ym -0.1495111 -107.6907 0.9931059
 Wellenwiderstandsbeiwert: -8.7259139E-04
 Benetzte Oberflaeche: 37.84941
 Reibungskraft, Moment: 0.0000000E+00 0.0000000E+00
 Tauchung: 1.8181205E-02
 Vertrimmung: 4.6645501E-04

2. Iterationsschritt
Oberflaeche/Koerper Koeffizienten bestimmt
Gleichungssystem fertig
Gleichungssystem geloest
.....

B.6 PAMPLT

PAMPLT dient zur grafischen Darstellung der von PAMENI oder PAMFRO berechneten Strömung oder Oberflächenverformung. Es ist ein interaktives Programm, das Plotdateien in einem eigenen Format ausgibt. Im folgenden wird das Hauptmenü gezeigt:

Auswahlmenue:

```
"0" Dateiname:          WIGLEY.AX30
"1" Iterationsschritt      5
"2" Perspektive
"3" Faktor fuer Geschwindigkeitspfeile          0.5000
"4" Ueberhoehungsfaktor fuer Wasserspiegelverformung 10.0000
"5" Lage der Isolinien
"6" An Y=0 gespiegelte Darstellung  F
```

Erstelle Plotdatei fuer:

```
"N" Netz auf dem Koerper
"V" Geschwindigkeitspfeile an der Koerperoberflaeche
"P" Druckmarken an der Koerperoberflaeche
"S" Geschwindigkeiten ohne Parallelstroemung
"Z" Geschwindigkeitspfeile an den Zusatzpunkten
"W" Verformtes Netz an der freien Wasseroberflaeche
"D" Dreiecksraster der Kollokationspunkte an der W0
"I" Isolinien fuer verformte Wasseroberflaeche
"Z" Quellen oberhalb der freien Wasseroberflaeche
"G" Geschwindigkeitspfeile an der Wasseroberflaeche
"M" Wellenkontur an der innersten Linie
"L" Grenze der benetzt angenommenen Flaeche
"E" ENDE
```

Eingabe bitte:

Die einzelnen Menüpunkte werden durch Drücken der in " " angegebenen Taste und Drücken der "Return"-Taste ausgewählt. Wird eine der angegebenen Buchstabentasten gedrückt, entsteht jeweils eine Plotdatei in einem speziellen Format. Diese Plotdateien (auch mehrere gleichzeitig) können mittels des Programms GGT [4] auf Tektronix-kompatiblen Bildschirmen oder Plottern ausgegeben oder in das am Institut für Schiffbau übliche Plotdateiformat übersetzt werden.