

471 | Januar 1987

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

D. Nikolakis und H. Streckwall

**Eine Methode zur Berechnung der
Druckverteilung an Schiffspropellern
mit Hilfe der Instationären
Tragflächentheorie und zur
Kavitationsvorhersage nach einer
Quasistationären Theorie**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Eine Methode zur Berechnung der Druckverteilung an Schiffspropellern mit Hilfe der Instationären Tragflächentheorie und zur Kavitationsvorhersage nach einer Quasistationären Theorie

D. Nikolakis, H.Streckwall, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1987

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 471

Eine Methode zur Berechnung der Druckverteilung
an Schiffspropellern mit Hilfe der
Instationären Tragflächentheorie und zur
Kavitationsvorhersage nach einer
Quasistationären Theorie

D. Nikolakis, H. Streckwall

Januar 1987

ISBN 3 - 89220 - 471 - 3

Copyright Institut für Schiffbau
 Universität Hamburg
 Lämmersieth 90
 D-2000 Hamburg 60

VORWORT

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützten Forschungsprogramms erstellt.

Teile dieses Berichts stammen von der an die TU Hamburg-Harburg als Dissertation vorgelegten Arbeit von H.Streckwall.

Die Autoren sind Herrn Prof.-Dr.-Ing. W.-H. Isay für seine Hilfe und unermüdliche Diskussionsbereitschaft, sowie auch den Herren Dr. K.-Y. Chao, Dr. E.-A. Weitendorf und Dipl.-Ing. J. Friesch aus der Hamburgischen Schiffbauversuchsanstalt für ihre freundliche Unterstützung zum Dank verpflichtet.

Inhalt

1	EINLEITUNG	2
2	FORMULIERUNG DES PROBLEMS	2
2.1	ANNAHMEN ZUR VEREINFACHUNG	2
2.2	PROPELLER GEOMETRIE UND ZUSTRÖMUNG	3
2.3	RANDBEDINGUNGEN IM KAVITATIONSFREIEN FALL	4
2.4	OFFENES MODELL DER KAVITATIONSSCHICHT	7
3	GESCHWINDIGKEITEN AUF DER TRAGENDEN FLÄCHE	8
3.1	GESCHWINDIGKEITSPOTENTIAL UND NORMALGESCHWINDIGKEIT EINER WIRBELBELEGUNG γ	8
3.2	GESCHWINDIGKEITSPOTENTIAL UND TAGENTIALGESCHWINDIGKEIT EINER QUELLENVERTEILUNG q	12
3.3	WIRBELINDUZIERTER RADIALGESCHWINDIGKEIT	13
4	DARSTELLUNG DER UNBEKANNTEN BELEGUNG UND AUFLÖSUNG DER RANDBEDINGUNGEN	14
4.1	REIHENANSATZ FÜR DIE WIRBELBELEGUNG IM KAVITATIONS- FREIEN FALL	14
4.2	REIHENANSÄTZE FÜR DIE ZUSÄTZLICHEN SINGULARITÄTEN γ_η UND q_η	15
4.3	BESTIMMUNG DER SCHICHTGRENZE χ_E DURCH VOLUMENMINIMALISIERUNG	19
5	RESULTATE UND DISKUSSION	21
5.1	RESULTATE	21
5.2	AUSBLICK	23
5.3	ABSCHLIESSENDE BEMERKUNG	24

Abbildungsverzeichnis

1	Koordinatensystem $0 - x r \varphi$	5
2	Begrenzungen des Blattes in der Projektion	5
3	Zylinderschnitt auf dem Radius r	5
4	Stromlinienbedingung	6
5	Freie Wirbel	6
6	Kavitationsschicht in der Projektion und im Zylinderschnitt	10
7	Die Koordinaten r, θ, Δ	10
8	Der Teilkavitationsbereich und der Superkavitationsbereich	20
9	Ein Beispiel für $q_\eta(r, \chi)$ auf einem bestimmten Radius zu Beginn und Ende der schrittweisen Verlängerung von $\chi_E(r)$	20

1 EINLEITUNG

Kavitation tritt am Propeller auf, wenn die Flügelbelastung in einigen Bereichen des Blattes so groß wird, daß der Druck dort den Dampfdruck erreicht oder unterschreitet. Eine ihrer Erscheinungsformen ist die Schichtkavitation. Es bildet sich dabei ein Gasvolumen aus, das einen Teil des Flügels schichtförmig bedeckt. Andere Arten sind Spitzenwirbelkavitation, Blasen kavitation und Wolken kavitation. In dieser Arbeit soll nur die Schichtkavitation behandelt werden.

Ein Schiffspropeller arbeitet in der Praxis stets in einer räumlich inhomogenen Zu strömung. Deshalb sind Lage, Ausdehnung und Gesamtvolumen einer Kavitations schicht von der Winkelstellung des betrachteten Flügels abhängig. Die Veränderlichkeit der Schicht verursacht Vibrationen am Hinterschiff. Die Außenhaut wird so zusätzlich belastet. Sollten die Vibrationen im hörbaren Bereich liegen, kann es zu erheblichen Lärmbelastungen innerhalb des Schiffes kommen. Zur Vermeidung dieser Effekte wäre es wünschenswert, die variable Geometrie und damit das variable Gesamtvolumen der Kavitationsschicht auch theoretisch zu erfassen.

Ausgangspunkt für die Propellerkavitationsrechnung ist die Berechnung des Druckfeldes im kavitationsfreien Zustand. Hierzu existieren eine Reihe praktikabler Verfahren /1,2,3,13/. In dieser Arbeit greifen wir auf eine Methode zurück, bei der die Flügelbelastung (Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite) durch eine kontinuierliche Verteilung von gebundenen Wirbeln auf der tragenden Fläche dargestellt wird /4/. Der Einfluß einer ausgebildeten Schichtkavitation auf das Strömungsfeld des Propellers wird durch eine zusätzliche Wirbel- und Quellenbelegung modelliert. Dieses Verfahren ist aus der linearisierten Profiltheorie wohl bekannt und wird auch bei Propellern angewendet. Bis auf wenige Ausnahmen /5/ wird in den meisten Ansätzen die 2-dimensionale Profilströmung mit Korrekturfaktoren zugrundegelegt. Eine Zusammenfassung dieser Verfahren findet man bei *Isay* /6/. Ob aber der so entstandene Flügel, bestehend aus Blatt und Schicht, einer 3-dimensionalen Kontrollrechnung standhält bleibt ungewiß. In dieser Arbeit soll eine Methode vorgestellt werden, die die durch Kavitation veränderten Auftriebseigenschaften nach der Tragflächentheorie berücksichtigt und nur die Verdrängungswirkung profilt heoretisch behandelt.

Hoshino hat derartige Gleichungen aufgestellt /16/. Bei der Beantwortung der Frage, welches Modell die reale Schicht in einer potentialtheoretischen Rechnung am geeignetsten repräsentiert, entschied sich *Hoshino* für das offene Kavitationsmodell von *Isay* und *Alward* /7/. Dieses wird auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

2 FORMULIERUNG DES PROBLEMS

2.1 ANNAHMEN ZUR VEREINFACHUNG

Die folgenden Rechnungen basieren ausschließlich auf der Potentialtheorie. Die Zähigkeit und Kompressibilität des Wassers sind vernachlässigt. Die Einflüsse von Propellernabe, Ruder und Wasseroberfläche bleiben unberücksichtigt. Die Gegenwart des Schiffsrumpfes ist insofern erfaßt, als eine in axialer Richtung inhomogene Zu strömung in die Rechnung eingeht. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Kavitationsschicht stets an der Vorderkante des Flügels beginnt und nur auf der Saugseite auftritt. Die zur Erfüllung

der Randbedingung eingeführten Singularitäten (Quellen und gebundene Wirbel) sind analog zur linearisierten Profiltheorie auf der tragenden Fläche angeordnet. Die tragende Fläche wird für jeden Flügel durch eine reguläre Schraubenfläche mit konstanter Steigung $2\pi h_0$ approximiert. Zudem legen wir auch die freien Wirbel näherungsweise in eine reguläre Schraubenfläche gleicher Steigung $2\pi h_0$. Eine Neigung (rake) der Flügel ist nicht erfaßt.

2.2 PROPELLER GEOMETRIE UND ZUSTRÖMUNG

Der Propeller bestehe aus N gleichartigen Flügeln. Er rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω . Wir führen ein nichtrotierendes Zylinderkoordinatensystem $0 - x r \varphi$ ein, das mit dem Propeller fortschreitet. Die Richtung der x -Achse sei mit der Richtung der Zuströmung identisch. Die Zuströmung wird als ausschließlich axial angenommen und in der Propellerebene $x = 0$ betrachtet. Die Winkelkoordinate φ wird im Uhrzeigersinn um die positive x -Achse gerechnet. Die 12 Uhr-Stellung (vertikale Achse im Schiffskordinatensystem) entspricht $\varphi = 0$. Der Propeller rotiere in negative φ -Richtung. Die Flügel seien im Uhrzeigersinn mit Nummern $1, \dots, N$ versehen. Nun werde die Projektion des n -ten Flügels in die Propellerebene ($x = 0$) auf dem Radius s durch

$$R_b \leq s \leq R \quad \theta_v(s) \leq \theta' \leq \theta_h(s) \quad (1)$$

begrenzt (Abb.2). Verwenden wir die im Abschnitt 2.1 eingeführte mittlere Steigung $2\pi h_0$, so gilt für Punkte auf der tragenden Fläche des n -ten

$$x = h_0 \theta' \quad (2)$$

wobei die zulässigen s - und θ -Werte aus (2.1) zu entnehmen sind. Eine Transformation der Variablen θ' auf die Variable χ' aus dem Interval $[0,1]$ durch

$$\bar{\theta}(s) = \theta_h(s) - \theta_v(s) \quad \chi' = \frac{\theta' - \theta_v(s)}{\bar{\theta}(s)} \quad (3)$$

und die Einführung der Sehnenlänge $l(s)$ sowie des Winkels δ'

$$l(s) = \bar{\theta} \sqrt{h_0^2 + s^2} \quad \tan \delta' = \frac{h_0}{s} \quad (4)$$

erweisen sich als vorteilhaft.

Um von der tragenden Fläche auf die Saugseite (+) und auf die Druckseite (-) des n -ten Flügels zu gelangen, muß man zur Wölbungslinie $y_s(s, \chi')$ die Dickenlinie $y_d(s, \chi')$ addieren bzw. subtrahieren (Abb.3.). Mit

$$y(s, \chi') = y_s(s, \chi') \pm y_d(s, \chi') \quad (5)$$

und

$$\varphi_n = \theta' + \frac{2\pi(n-1)}{N} - \Omega t \quad (6)$$

als Umrechnung der Winkelkoordinaten lautet die Parameterscheibweise der Oberfläche in nichtrotierendem Koordinatensystem $0 - xr\varphi / 8/$

$$\begin{aligned} x &= h_0 \theta' - y(s, \chi') \cos \delta' \\ \varphi &= \theta' + \frac{2\pi(n-1)}{N} - \Omega t + \frac{y(s, \chi') \sin \delta'}{s} \\ r &= s \end{aligned} \quad (7)$$

Damit ist die Geometrie des Propellers erfaßt. Als Bezeichnung für die axiale Zuströmung verwenden wir $u(r, \varphi)$. U_{SH} steht für die Schiffsgeschwindigkeit. Ist u von φ abhängig so spricht man von inhomogener Zuströmung.

2.3 RANDBEDINGUNGEN IM KAVITATIONSFREIEN FALL

Bei der Berechnung der Umströmung eines kavitationsfreien Propellerflügels ist die

- *kinematische Strömungsrandbedingung* an der Flügeloberfläche zu erfüllen. Sie besagt, daß Flüssigkeitsteilchen, die einmal die Flügeloberfläche erreicht haben, dieser nun tangential folgen müssen. Für hinreichend dünne Flügel läßt sich die Strömungsrandbedingung bekanntlich in einen Dicken- und einen Wölbungsanteil zerlegen. In diesem Fall ist es möglich, die Umströmung des kavitationsfreien Flügels durch Singularitäten q_0 (Quellen) und γ_0 (radial gerichtete gebundene Wirbel) zu simulieren, die auf der tragenden Fläche angeordnet sind. q_0 simuliert die Verdrängungseigenschaften des Flügels und ist

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{2} &= \frac{U_0}{l(s)} \frac{\partial y_d}{\partial \chi'} \\ U_0 &= \Omega s \cos \delta' + \bar{u}_0 \sin \delta' \end{aligned} \quad (8)$$

mit \bar{u}_0 als der in Umfangsrichtung gemittelten Anströmgeschwindigkeit zu errechnen. γ_0 macht mit stetiger Normalgeschwindigkeit auf der tragenden Fläche V_{γ_0} die Wölbungslinie zur Stromlinie.

$$\begin{aligned} V_{\gamma_0} + V_0 &= \frac{U_0}{l(s)} \frac{\partial y_s}{\partial \chi'} \\ V_0 &= \Omega s \sin \delta' - \bar{u}_0 \cos \delta' \end{aligned} \quad (9)$$

Mit den Gleichungen (8) und (9) liegt die übliche Zerlegung der Strömungsrandbedingung vor. Sie enthalten insofern noch eine weitere Näherung, als in U_0 und V_0 keine Geschwindigkeiten eingehen, die von Singularitäten induziert sind.

- Die *Kuttasche Abflußbedingung* erfordert

$$\gamma_0(s, \chi' = 1, \Omega t) = 0 \quad (10)$$

d.h. das Verschwinden der gebundenen Wirbeldichte an der Hinterkante.

- In einer Potentialströmung können gebundene Wirbel, nach den Wirbelsätzen von *Kelwin*, *Helmholz* nicht ohne ein System von freien Wirbeln existieren. Diese sind in dem Geschwindigkeitspotential enthalten. In der linearen Theorie werden die freien Wirbeln auf regulären Schraubenflächen der Steigung $2\pi h_0$ angeordnet.

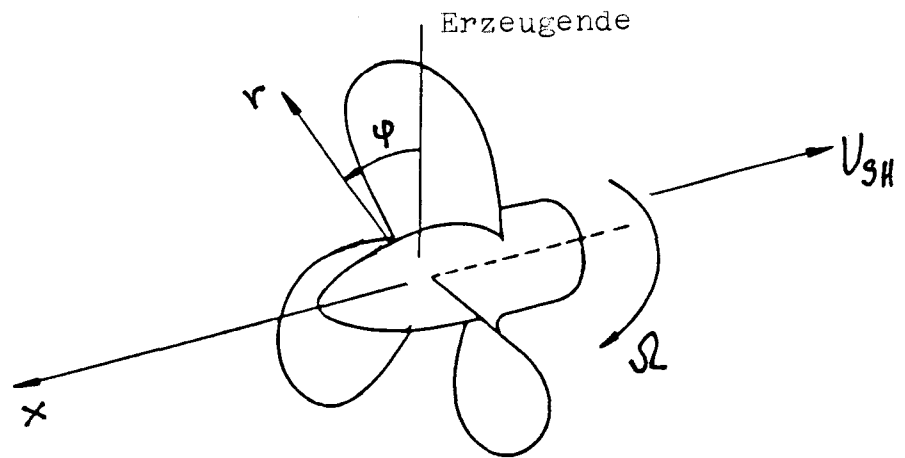


Abb. 1: Koordinatensystem $0 - x r \varphi$

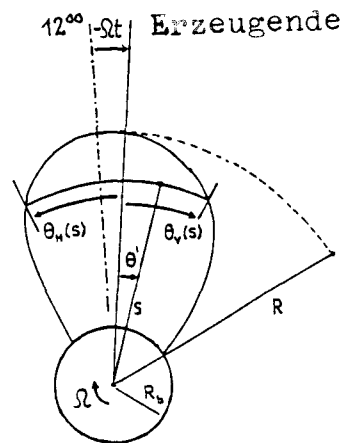


Abb. 2: Begrenzungen des Blattes in der Projektion

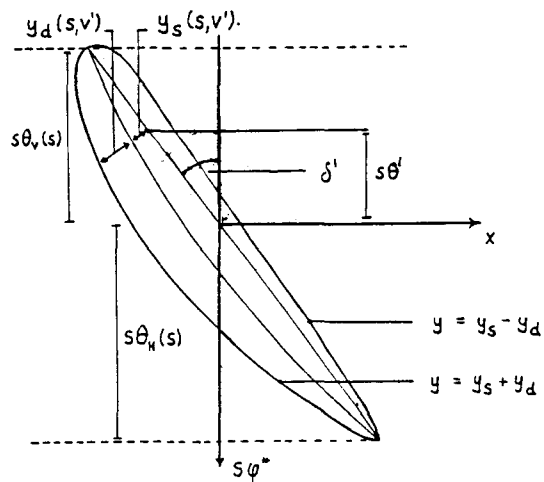


Abb. 3: Zylinderschnitt auf dem Radius r

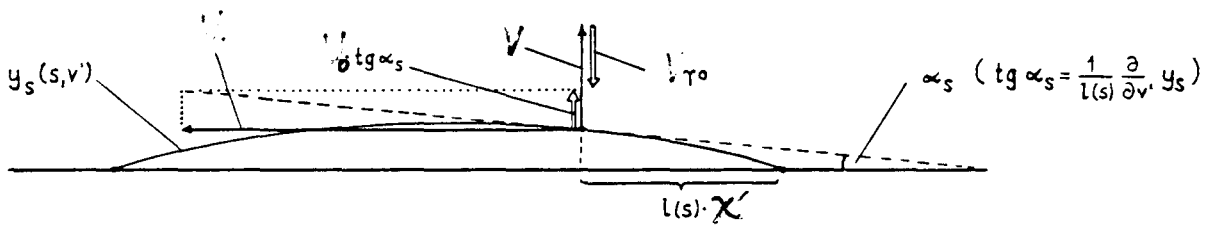


Abb. 4: Stromlinienbedingung

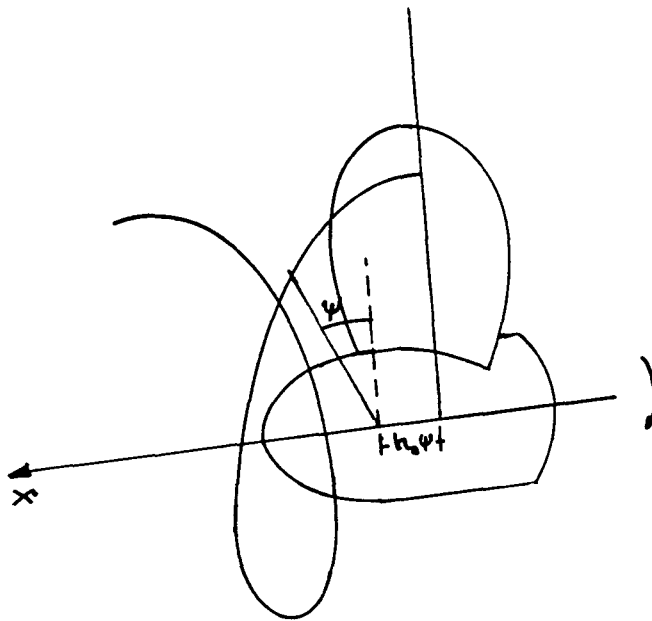


Abb. 5: Freie Wirbel

2.4 OFFENES MODELL DER KAVITATIONSSCHICHT

Zur potentialtheoretischen Erfassung der Kavitation legen wir auf die Saugseite (Druckseitenkavitation wird nicht berücksichtigt) eine Modellschicht der Dicke 2η (Abb. 6). 2η repräsentiert von der Vorderkante bis zu einer Tiefe $\chi' = \chi_E(s, \Omega t)$ die Dicke der Kavitationsschicht. Wir nehmen an, daß die Kavitationsschicht bei χ_E zusammenfällt, sodaß die Schicht jenseits χ_E keine Verdrängungswirkung haben darf. Werte $\chi_E > 1$ beschreiben Punkte hinter der tragenden Fläche (Superkavitation). Die Dicke 2η unterliegt keiner Schließungsbedingung, d.h. die Modellschicht darf hinten offen sein (offenes Modell). Für den mit der Schicht 2η versehenen Flügel muß die Strömungsrandbedingung neu formuliert werden. Die nun zu berücksichtigende Dickenlinie lautet $y_d(s, \chi') + \eta(s, \chi', \Omega t)$ und die Wölbung ist jetzt $y_s(s, \chi') + \eta(s, \chi', \Omega t)$. Neben q_0 erfordert die veränderte Dickenlinie zusätzliche Quellen q_η , um die grössere Verdrängung des kavitierenden Flügels zu beschreiben. Für eine zeitabhängige Dickenlinie η lautet die zur Gleichung (8) analoge Beziehung /8/

$$\frac{q_\eta}{2} = \left(\frac{U_0}{l(s)} \frac{\partial}{\partial \chi'} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta(s, \chi', \Omega t) \quad 0 \leq \chi' \leq \infty \quad (11)$$

Weiter sind zusätzliche Wirbel γ_η einzuführen, deren Normalgeschwindigkeit auf der tragenden Fläche V_{γ_η} der Stromlinienbedingung

$$V_{\gamma_\eta} = \left(\frac{U_0}{l(s)} \frac{\partial}{\partial \chi'} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \eta(s, \chi', \Omega t) \quad 0 \leq \chi' \leq 1 \quad (12)$$

genügen muß. Es ist in den folgenden Beziehungen vorteilhaft, wenn diese für die unbekannte Quellenverteilung q_η statt die Dicke 2η formuliert werden. Wir fassen also q_η als die zu bestimmende unbekannte Funktion auf und errechnen später aus q_η mit Hilfe von (11) den Dickenverlauf 2η .

Aus (11) und (12) ergibt sich unmittelbar der Zusammenhang

$$V_{\gamma_\eta}(s, \theta', \Omega t) = \frac{q_\eta(s, \chi', \Omega t)}{2} \quad 0 \leq \chi' \leq 1 \quad (13)$$

Im Gegensatz zu kavitierenden Flügel ist die rechte Seite dieser Stromlinienbedingung unbestimmt. Man beachte, daß (13) auf den Bereich der tragenden Fläche beschränkt ist.

Da die Modellschicht ab $\chi_E(s, \Omega t)$ keine Verdrängungswirkung haben soll, ist ferner die Beziehung

$$q_\eta(s, \chi', \Omega t) = 0 \quad \chi_E(s, \Omega t) \leq \chi' \leq \infty \quad (14)$$

vorhanden. Diese Forderung an die Quellenverteilung q_η wollen wir als Nullverdrängungsbedingung bezeichnen.

Schließlich erhalten wir neben den kinematischen Aussagen noch eine dynamische Relation, indem wir den Druck in der Strömung direkt oberhalb der Kavitationsschicht betrachten. Über der Kavitationsschicht, also im Bereich $0 \leq \chi' \leq \chi_E(s, \Omega t)$ der Saugseite muß der Dampfdruck p_v herrschen. Man formuliert diese Bedingung am besten mit Hilfe des Dampfdruckbeiwerts σ_v und des Saugseitenbeiwerts im kavitationsfreien Zustand

$c_{p0}(+)$. Sei $p_0(+)$ die Bezeichnung für den Saugseitendruck ohne Kavitationseinfluß. Mit p_∞ und U_∞ als hydrostatischen Druck und zugehörige Strömungsgeschwindigkeit in großer Entfernung stromaufwärts ($U_\infty = \sqrt{(\Omega s)^2 + \bar{u}_0^2}$) definieren wir

$$c_{p0}(+) = \frac{p_\infty - p_0(+)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (15)$$

Die Bernulli-Gleichung ergibt (Anhang D)

$$c_{p0}(+) = -1 + \frac{1}{U_\infty^2}((U_{\gamma_0} + U_{q_0} + U_0)R_F)^2 + \frac{1}{U_\infty^2}W_{\gamma_0}^2 + \frac{2}{U_\infty^2}\Phi_\gamma\left[\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right] \quad (16)$$

Dabei sind U_{q_0} und W_{γ_0} Geschwindigkeiten auf der tragenden Fläche. U_{q_0} ist tangential zu dieser Fläche gerichtet und von q_0 erzeugt, W_{γ_0} ist radial gerichtet und wirbelinduziert. R_F ist der aus der 2-dimensionalen Profilttheorie bekannter Riegelfaktor. Obwohl die Radialgeschwindigkeit nur quadratisch in den Druckbeiwert c_{p0} eingeht, ist sie auf den äußeren Radien ($\frac{s}{R} > 0.9$) von großer Bedeutung. Eine Formel für W_{γ_0} ist im Anhang A hergeleitet. Eine Näherung der Bernulli Gleichung für den Druckbeiwert am kavitierenden Flügel (Anhang D) ergibt

$$c_{p\eta}(+) = c_{p0}(+) + \frac{1}{U_\infty}(\gamma_\eta(s, \chi', \Omega t) + 2U_{q\eta}(s, \chi', \Omega t) + \frac{1}{U_\infty}(W_{\gamma\eta}(s, \chi', \Omega t))^2 + \frac{2}{U_\infty}W_{\gamma_0}W_{\gamma\eta}) \quad (17)$$

wobei die von den Zusatzbelegungen induzierten Geschwindigkeiten $U_{q\eta}$ und $W_{\gamma\eta}$ wie U_{q_0} bzw. W_{γ_0} zu verstehen sind. Um der oben formulierten Druckbedingung zu genügen, muß $c_{p\eta}(+)$ in dem Bereich, wo die Saugseite mit einer Kavitationsschicht versehen ist, dem Dampfdruckbeiwert

$$\sigma_v = \frac{p_\infty - p_v(+)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (18)$$

entsprechen. Als dritte Gleichung zur Bestimmung der Belegung γ_η und q_η erhalten wir also

$$\sigma_v - c_{p0}(+) = \frac{1}{U_\infty}(\gamma_\eta + 2U_{q\eta} + \frac{1}{U_\infty}W_{\gamma\eta}^2 + \frac{2}{U_\infty}W_{\gamma\eta}W_{\gamma_0}) \quad 0 \leq \chi' \leq \chi_E(s, \Omega t) \quad (19)$$

3 GESCHWINDIGKEITEN AUF DER TRAGENDEN FLÄCHE

3.1 GESCHWINDIGKEITSPOTENTIAL UND NORMALGESCHWINDIGKEIT EINER WIRBELBELEGUNG γ

Die zeitabhängigen Normalgeschwindigkeiten V_{γ_0} und $V_{\gamma\eta}$ aus (9) erfordern auch zeitabhängige γ_0 bzw. γ_η . Stellvertretend für γ_0 und γ_η soll das Potential einer Dichte gebundener radial gerichteter Wirbel

$$\gamma = \gamma(s, \chi', \Omega t - \frac{2\pi(n-1)}{N}) \quad (20)$$

ausgerechnet werden. Mit der oben erwähnten Beschreibung der tragenden Fläche durch einen einzigen Parameter h_0 ist

$$\vec{r}' = s\hat{e}'_r + x'_f\hat{e}'_x \quad x'_f = h_0\theta'_f \quad \varphi'_{fn} = \theta'_f + \frac{2\pi(n-1)}{N} - \Omega t \quad (21)$$

für

$$\theta'_f = \theta' \quad \theta_v(s) \leq \theta' \leq \theta_h(s) \quad (22)$$

auf der tragenden Fläche gelegen und für

$$\theta'_f = \theta' + \psi \quad 0 \leq \psi \leq \infty \quad \theta_v(s) \leq \theta' \leq \theta_h(s) \quad (23)$$

auf einer freien Wirbelfläche angeordnet. Die Variable ψ berücksichtigt sozusagen die Vergangenheit des Propellers. Durch sie werden die quer zur radialen Richtung abgehenden freien Wirbel erfaßt (Abb.4). Bei instationärer Strömung bleiben auch noch freie Längswirbel (gerichtet wie die gebundenen Wirbel) zurück. Man kann den Einfluß dieses Wirbelsystems auf die Umströmung des Propellers mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes beschreiben /4/. Für die Methode der kontinuierlichen Wirbelverteilung γ scheint die Auswertung des Potentials geeigneter.

Der Vektor

$$\vec{r} = r\hat{e}_r + x\hat{e}_x \quad (24)$$

beschreibt den Aufpunkt im Raum.

Die Einheitsvektoren \hat{e}_s und \hat{e}_r sind von φ'_{fn} bzw φ abhängig. Das Geschwindigkeitspotential des Systems bestehend aus gebundenen und freien Wirbeln lautet dann /16/.

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{R_b}^R l(s) \int_0^1 \int_0^\infty \gamma(s, \chi', \Omega t - \frac{2\pi(n-1)}{N} - \psi) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial n'_f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_f|} d\psi d\chi' ds \quad (25) \\ \frac{\partial}{\partial n'_f} &= \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + s^2}} \left(\frac{h_0}{s} \frac{\partial}{\partial \theta'_f} - s \frac{\partial}{\partial x'_f} \right) \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeiten $V_{\gamma 0}$ und $V_{\gamma n}$ aus den Stromlinienbedingungen (9) und (13) haben die Richtung der Flächennormalen und sind direkt auf der tragenden Fläche zu berechnen. Zu diesem Zweck muß das Potential in Normalenrichtung differenziert werden. Dabei ist Vorsicht geboten. Wir führen zunächst durch

$$\begin{aligned} \varphi &= \theta - \Omega t + \frac{\Delta}{r} \sin \delta \\ x &= h_0\theta - \Delta \cos \delta \\ r &= s \quad \tan \delta = \frac{h_0}{r} \end{aligned} \quad (26)$$

die neuen Koordinaten r, θ, Δ ein (Abb. 7). Für $\Delta = 0$ endet so der Vektor \vec{r} aus (24) auf der Schraubenfläche, in der auch die tragende Fläche des ersten Flügels liegt. Die

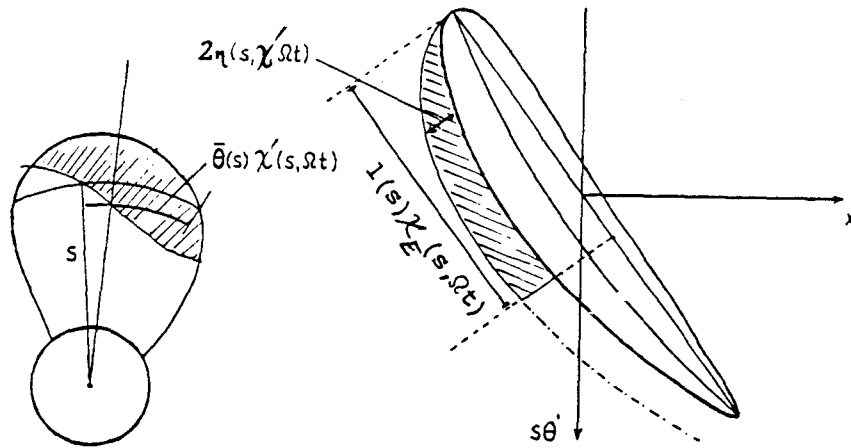


Abb. 6: Kavitationsschicht in der Projektion und im Zylinderschnitt

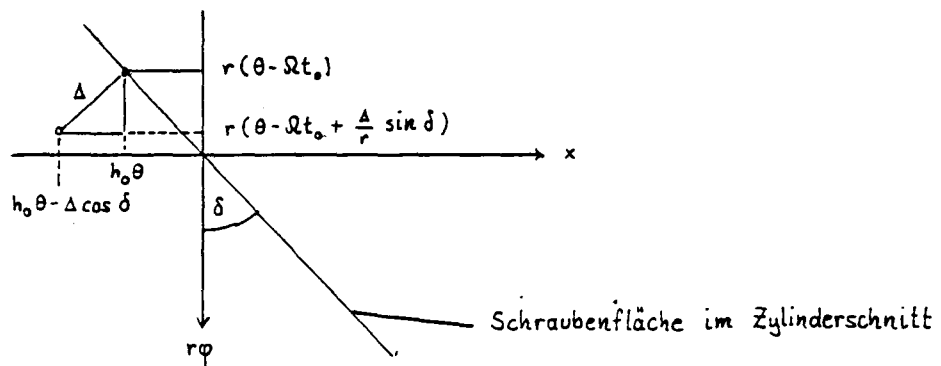


Abb. 7: Die Koordinaten r, θ, Δ

gesuchte Normalgeschwindigkeit V_γ kann einerseits aus dem Grenzübergang

$$V_\gamma(r, \theta, \Omega t) = \lim_{x \rightarrow h_0, \theta, \varphi \rightarrow \theta - \Omega t} \left(\frac{1}{r} \sin \delta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \delta \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_\gamma(x, r, \varphi, t) \quad (27)$$

ermittelt werden /4/. Mit (26) und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \Delta} = \cos \delta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} + h_0 \cos \delta \frac{\partial}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \Delta} = \frac{\sin \delta^2}{h_0} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \delta \frac{\partial}{\partial \Delta} \end{aligned} \quad (28)$$

ist die Normalgeschwindigkeit auch folgende Limesbildung bestimmbar

$$V_\gamma(r, \theta, \Omega t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta} \Phi_\gamma(r, \theta, \Delta, t) \quad (29)$$

Im stationären Fall, d.h. bei Zeitunabhängiger Belegung

$$\gamma = \gamma(s, \chi') \quad (30)$$

erweist es sich als nützlich, eine Approximation $\Phi_{\gamma w}$ des Potentials abzuspalten und getrennt zu betrachten (Anhang A).

$$\Phi_{\gamma w} = \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \frac{\Delta}{(s-r)^2 + \Delta^2} G(s, \Delta) ds \quad (31)$$

$$G(s, \Delta) = l(s) \sqrt{\frac{h_0^2 + rs}{h_0^2 + r^2}} \int_0^1 \gamma(s, \chi') \left(1 + \frac{(\theta - \theta') \sqrt{h_0^2 + rs}}{\sqrt{(s-r)^2 + (h_0^2 + rs)(\theta - \theta')^2 + \Delta^2}} \right) d\chi'$$

Wie *Truckenbrodt* gezeigt hat /9/, bedarf der Grenzübergang

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta} \Phi_{\gamma, w}(r, \theta, \Delta) \quad (32)$$

einer genaueren Untersuchung. Wenn wir *Trukenbrodt* folgen und noch weitere Abspaltungen zur besseren Behandlung von Aufpunkten in der Nähe der Vorderkante vornehmen, erhalten wir mit $\theta = \theta_v(r) + \bar{\theta}(r)\chi$ die zeitunabhängige Normalgeschwindigkeit (Anhang A)

$$\begin{aligned} V_\gamma(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \Delta} (\Phi_\gamma(r, \theta, \Delta) - \Phi_{\gamma w}(r, \theta, \Delta)) |_{\Delta=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{R_b}^R \frac{\frac{\partial}{\partial s} (G(s, 0) - G_a(s))}{r-s} - \frac{G_a(R)}{R-r} - \frac{G_a(R_b)}{r-R_b} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + c^2(v)} \int_0^1 \gamma(r, \chi') \left(\frac{f_-(R-r, \chi') + f_+(r-R_b, \chi')}{2} - 1 \right) \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + c^2(v)} \int_0^1 \gamma(r, \chi') \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \\ c(v) &= \sqrt{h_0^2 + r^2} \frac{\partial}{\partial r} \theta(r, \chi) \end{aligned} \quad (33)$$

Es gelingt also aus dem 3-dimensionalen Potential einen profiltheoretischen Beitrag (letzter Summant) auszuklammern. Die Funktionen G_a, f_{\pm} sind wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}
G_a(s) &= l(r) \int_0^1 \gamma(r, \chi') \frac{\delta l}{\sqrt{(s-r)^2 + (\delta l)^2}} d\chi' \\
\delta l &= l(r)(\chi - \chi') - c(\chi')(s-r) \\
f_{\pm}(r_{\pm}, \chi') &= \frac{\sqrt{1 + (l(r) \frac{(\chi - \chi')}{r_{\pm}} \pm c(\chi'))^2}}{\sqrt{1 + c(\chi)^2}} \quad r_+ = r - R_b \quad r_- = R - r
\end{aligned} \tag{34}$$

Wir haben in (33) angenommen, daß $G(R, 0) = G(R - b, 0) = 0$ ist, was dann der Fall ist, wenn die Zirkulation

$$\Gamma = l(s) \int_0^1 \gamma(s, \chi') d\chi' \tag{35}$$

für $s = R$ und $s = R_b$ verschwindet. Die Auswertung des Potentials mit zeitabhängiger Wirbeldichte (instationäre Anströmung) ist im Anhang A erläutert.

3.2 GESCHWINDIGKEITSPOTENTIAL UND TANGENTIALGESCHWINDIGKEIT EINER QUELLENVERTEILUNG q

Die auf der tragenden Fläche von Quellen und Senken hervorgerufenen Tangentialgeschwindigkeiten sind gemäß (16) und (17) wichtig für den Druckverlauf auf der Flügeloberfläche. Das Geschwindigkeitspotential Φ_q einer zeitunabhängigen Quellenverteilung $q(s, \chi')$ lautet, wenn wir von unserer vereinfachten Darstellung der tragenden Fläche Gebrauch machen /16/

$$\Phi_q = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{R_b}^R l(s) \int_0^1 q(s, \chi') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_q|} d\chi' ds \tag{36}$$

wobei $\vec{r} = \vec{r}(x, r, \varphi)$ in (24) definiert ist und \vec{r}'_q aus dem Vektor $\vec{r}'_f(s, \theta' + \psi, \Omega t)$ (Gleichung (25)) hervorgeht, wenn man $\psi = 0$ setzt. Die von den Quellen und Senken induzierte Tangentialgeschwindigkeit U_q wird mit \vec{r} aus (26) zeitunabhängig.

$$\begin{aligned}
U_q &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_q(r, \theta, \Delta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi_q(r, \theta, \Delta)
\end{aligned} \tag{37}$$

Es ist vorteilhaft, einen Term

$$\Phi_{qw} = -\frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R l(s) \int_0^1 q(s, \chi') \frac{1}{\sqrt{(h_0^2 + rs)(\theta - \theta')^2 + (r - s)^2}} d\chi' ds \tag{38}$$

abzuspalten und weiter analytisch zu behandeln. Man erhält somit (Anhang B)

$$c(\chi') = \sqrt{h_0^2 + r^2} \frac{\partial \theta'(r, \chi')}{\partial r} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
U_q &= \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_q(r, \theta, \Delta = 0) - \Phi_{qw}(r, \theta)) + \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R (F(s) - F_a(s)) ds \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{q(r, \chi')}{\sqrt{1 + c^2(\chi')}} (t_-(R - r, \chi') + t_+(r - R_b, \chi') - 2) \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(r, \chi')}{\sqrt{1 + c^2(\chi')}} \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \tag{40}
\end{aligned}$$

also neben einer Reihe von Termen auch einen Beitrag, der für $c(\chi') = 0$ so lautet, wie die profiltheoretische Tangentialgeschwindigkeit (letzter Summand). Dabei sind die Funktionen F, F_a und t_{\pm} wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
t_{\pm}(r_{\pm}, \chi) &= \frac{\sqrt{1 + c^2(\chi')}}{\sqrt{1 + (l(r) \frac{\chi - \chi'}{r_{\pm}} \pm c^2(\chi'))^2}} \\
F(s) &= l(s) \sqrt{\frac{h_0^2 + rs}{h_0^2 + r^2}} \int_0^1 q(s, \chi') \frac{\sqrt{(h_0^2 + rs)(\theta - \theta')}}{\sqrt{(h_0^2 + rs)(\theta - \theta')^2 + (s - r)^2}} d\chi' \tag{41} \\
F(a) &= l(r) \int_0^1 q(r, \chi') \frac{\delta l}{\sqrt{(\delta l)^2 + (s - r)^2}} d\chi'
\end{aligned}$$

Als Approximation der Tangentialgeschwindigkeit U_q benutzen wir in den Druckbeiwerten $c_{p0}(+)$ und $c_{p\eta}(+)$ stets das profiltheoretische Integral, wir setzen also wie üblich

$$U_q \cong \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(r, \chi')}{\sqrt{1 + c^2(\chi')}} \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \tag{42}$$

ein. Abb.10 zeigt den Verlauf der approximierten (42) und nicht approximierten (40) Tangentialgeschwindigkeit. Der durch diese Approximation entstandene Fehler beträgt etwa 8% bei den inneren und steigt bis 25% bei den äußeren Radien, wo der Dickeneinfluß für den Druckbeiwert von geringer Bedeutung ist. Eine geeignete Darstellung der Quellenverteilung q_0 ist im Anhang C beschrieben.

3.3 WIRBELINDUZIERTER RADIALGESCHWINDIGKEIT

Nach der linearisierten Theorie wird die radiale Komponente der wirbelinduzierten Geschwindigkeit bei der Erfüllung der Strömungsrandbedingung nicht berücksichtigt. Sie hat aber im Flügelaußenbereich $0.9 \leq r \leq 1.0$ entscheidenden Einfluß auf die Druckverteilung und auf die an den Außenradien meist auftretende Schichtkavitation und wird daher bei den entsprechenden Berechnungen mitberücksichtigt.

Die radiale Komponente der wirbelinduzierten Geschwindigkeit erhalten wir nach Ableitung des Geschwindigkeitspotentials (25).

$$W(r, \theta^*, \varphi) = \frac{d}{dr} \Phi((r, \theta^*, \varphi)) \tag{43}$$

Die rechte Seite der Formel (43) wird in einen stetigen und einen unstetigen Anteil zerlegt (Anhang A)

$$W(r, \theta^*, \varphi) = \pm \frac{1}{2} \int_{\theta_v(r)}^{\theta^*} \frac{\partial [\sqrt{h_0^2 + r^2} \gamma(r, \theta', \varphi)]}{\partial r} d\theta' +$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{R_b}^R \int_{\theta_v(s)}^{\theta_h(s)} \int_{\psi=0}^{\infty} h_0 \sqrt{h_0^2 + r^2} \gamma(r, \theta', \varphi) \text{Kern} d\psi d\theta' ds \right) \quad (44)$$

$$\text{Kern} = \frac{s(\theta^* - \theta' - \psi) - r \sin \theta^* - \theta' - \psi - \frac{2\pi(n-1)}{N}}{\sqrt{h_0^2(\theta^* - \theta' - \psi)^2 + (r-s)^2 + 2rs(1 - \cos \theta^* - \theta' - \psi - \frac{2\pi(n-1)}{N})^3}}$$

Das vor dem unstetigen Anteil + b.z.w. - Zeichen gilt für die Saug- b.z.w. Druckseite entsprechend. Der Kern des dreifachen Integrals wird für $n = 1, r = s, \theta^* - \theta' - \psi = 0$ singularär, hat aber einen Grenzwert

$$\lim_{\theta^* - \theta' - \psi \rightarrow 0} \text{Kern} |_{(n=1, r=s)} = \pm \frac{1}{3\sqrt{h_0^2 + r^2}} \quad (45)$$

und seine Auswertung bereitet so keine Schwierigkeit mehr (Anhang A).

4 DARSTELLUNG DER UNBEKANNTEN BELEGUNG UND AUFLÖSUNG DER RANDBEDINGUNGEN

4.1 REIHENANSATZ FÜR DIE WIRBELBELEGUNG IM KAVITATIONS- FREIEN FALL

Die Quellenverteilung der geometrischen Dicke ist gemäß (8) schon bekannt. Für eine korrekte theoretische Behandlung eines Propellers im Schiffsnachstrom ist die Abhängigkeit der Wirbeldichte γ_0 von der momentanen Winkelstellung $-\Omega t$ wichtig. Wir geben γ_0 auf den N Flügeln wie folgt vor

$$\gamma_0(s, \chi', \Omega t - \frac{2\pi(n-1)}{N}) = \frac{2\Omega R^2}{l(s)} \sum_{j,i,m} B_{0jim} G_j(s) H_{0i}(\chi') \psi_m(\Omega t - \frac{2\pi(n-1)}{N}) \quad (46)$$

Die Funktionen G_j (für die Variation der Wirbelbelegung in radialer Richtung), H_{0i} (Variation in Tiefenrichtung) und ψ_m (Abhängigkeit von der Winkelstellung) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} G_j(s) &= \sin j\lambda' & j &= 1, \dots, J & s &= R_b + \frac{(R - R_b)}{2}(1 - \cos \lambda') \\ H_{0i}(\chi') &= \cot \frac{\tau'}{2} & i &= 0 \\ H_{0i}(\chi') &= \sin i\tau' & i &= 1, \dots, I & \chi' &= \frac{(1 - \cos \tau')}{2} \\ \psi_m(\Omega t - \frac{2\pi(n-1)}{N}) &= e^{im(\frac{2\pi(n-1)}{N} - \Omega t)} & & & -M &\leq m \leq M \end{aligned} \quad (47)$$

Wir verwenden also für die Veränderlichkeit von γ_0 in Tiefenrichtung χ' die aus der Profiltheorie bekannte Birnbaumreihe. Wenn man den axialen Nachstrom mit U_{SH} als Schiffsgeschwindigkeit durch

$$\frac{\bar{u}_0(r, \varphi)}{U_{SH}} = \left(1 + \sum_{m=-M}^M \Lambda_m(r) e^{im\varphi} \right) \quad (48)$$

harmonisch analysiert, lassen sich aus der Stromlinienbedingung (9) $M + 1$ lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der komplexen Koeffizienten B_{0jim} herleiten, jeweils eins für das Paar $-m, m$ (vergleiche Anhang E). Dabei wurde U_{SH} so variiert daß der für den jeweiligen Propeller vorgegebene Schubbeiwert K_T eingehalten wurde.

$$K_T = \sum_{n=1}^N \frac{\pi^2 l(s)}{64\Omega R^2} \left(1 - \left(\frac{R}{R_b}\right)^2\right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma_0(s, \chi', \Omega t - \frac{2\pi(n-1)}{N}) d\chi' d\Omega t \quad (49)$$

4.2 REIHENANSÄTZE FÜR DIE ZUSÄTZLICHEN SINGULARITÄTEN γ_η UND q_η

Wir berechnen die zur Winkelstellung $-\Omega t$ gehörige Dicke $2\eta(s, \chi', \Omega t)$ quasistationär, d.h. wir dehnen den für die Winkelstellung $-\Omega t$ gültigen Beiwert $c_{p0}(+)(s, \chi, \Omega t)$ auf alle Winkel aus. Da sich ein Kavitationsvolumen insbesondere bei seiner Entstehung nicht augenblicklich einer Veränderung des Druckfeldes anpassen, kann, erscheint der Vorteil einer instationären Rechnung ohne Erfassung der Dynamik des Aufweitens und Zusammenfallens fragwürdig. Die Wirkung der Quellenverteilung q_η auf den Saugseitenbeiwert wird durch das profiltheoretische Integral (42) approximiert.

Das gekoppelte System (13), (14) und (19), das zur Berechnung der Schichtdicke 2η aufgestellt wurde, ist im Grenzfall eines ebenen Tragflügels unendlicher Streckung exakt lösbar (Hanaoka /14/, Isay und Alwardt /7/). Die Methode von Isay und Alwardt behandelt Teilkavitation am Profil. Sie beruht auf Inversion der Stromlinienbedingung (13) unter Berücksichtigung der Nullverdrängungs-Bedingung (14) mit anschließender Inversion der Druckbedingung (19). Gasau /10/ behandelte später auch Superkavitation exakt, indem er die Inversionsreihenfolge vertauschte. Da das System aus Stromlinien- und Druckbedingung keine Aussage über die Schichtlänge macht (das gilt sowohl für den 3-dimensionalen als auch für den 2-dimensionalen Fall), berechneten die oben genannten Autoren v_E aus einer empirischen Beziehung zwischen dem Anstellwinkel und der Schichtdicke. Diese empirische Relation stammt von Nishiyama /11/.

Die Inversion der Gleichung (13) nach q_η ist mit (33) als Normalgeschwindigkeit aus der Tragflächentheorie nicht möglich. Dies trifft ja auch für die Berechnung der Belegung γ_0 aus der Stromlinienbedingung (9) zu. In diesem Fall wird die Wirbelbelegung in Form einer Reihe mit unbestimmten Koeffizienten vorgegeben (Gleichung (47)) und der Beitrag der einzelnen Reihenglieder zur Normalgeschwindigkeit ermittelt. Die Koeffizienten sind dann so zu wählen, daß die Bedingung (9) an einer Vielzahl von Aufpunkten möglichst gut erfüllt ist (etwa mit einem Fehlerquadratverfahren).

Wir wählen für die Wirbeldichte γ_η erneut einen Produktansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$\gamma_\eta(s, \chi') = \frac{2\Omega R^2}{l(s)} = \sum_{ji} B_{\eta ji}^1 G_j(s) H_{\eta i}^1(\chi') \quad (50)$$

Passende Funktionen $H_{\eta i}^1$ werden später eingeführt. Zunächst soll verfolgt werden, wie sich aus dem System (13), (14) und (19) mit Hilfe dieses Ansatzes die gesuchte Quellenverteilung q_η bestimmen läßt. Wenn γ_η gemäß (50) vorgegeben wird, dann ist (im Bereich der tragenden Fläche) auch q_η durch die $B_{\eta ji}^1$ darstellbar. Wir können mit (13)

und (33) schreiben

$$q_\eta(r, \chi) = \frac{2\Omega R^2}{\pi l(r)} \sqrt{1 + c^2(\chi)} \sum_{ji} B_{\eta ji}^1 G_j(r) \int_0^1 H_{\eta i}^1(\chi') \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} + \sum_{ji} B_{\eta ji}^1 S_{ji}(r, \chi) \quad (51)$$

wobei die Funktionen S_{ji} alle nicht-zweidimensionalen Beiträge zu q_η enthalten d.h. die ersten 3 Summanden der Gleichung (33) für eine stationäre wirbelinduzierte Normalgeschwindigkeit zusammenfassen. Diese Funktionen sind stetig, solange die G_j^1 integrale sind (das muß für den ersten Summand auf der rechten Seite von (51) nicht unbedingt zutreffen). Da (51) hinter der tragenden Fläche nicht mehr gilt, ist die Quellenverteilung q_η hier nicht aus γ_η errechenbar. Wir geben q_η in diesem Gebiet (Superkavitationsbereich) wie folgt vor

$$q_\eta(r, \chi) = \frac{2\Omega R^2}{l(r)} \sqrt{1 + c^2(\chi)} \sum_{ji} B_{\eta ji}^2 G_j(r) H_{\eta i}^2(\chi') \quad 1 \leq \chi \leq \chi_{ma} \quad (52)$$

Der Parameter χ_{ma} beschreibt eine obere Grenze für die Erstreckung der Superkavitation. Setzt man z.B. $\chi_{ma} = 2$ (siehe auch letzten Absatz des Kapitels), so geht man davon aus, daß die Superkavitation auf allen Radien unter der doppelten Profiltiefe bleibt. Mit der Näherungsformel (42) für eine quelleninduzierten Tangentialgeschwindigkeit lautet die endgültige form der Druckbedingung bei Vernachlässigung der radialen Komponenten $W_{\gamma\eta}$

$$\begin{aligned} \sigma v - c_{p0}(+) &= \frac{\Omega R}{U_\infty} \sum_{ji} B_{\eta ji}^1 \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{S_{ji}(r, \chi')}{\sqrt{(1 + c^2(\chi'))}} \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \\ &+ \frac{2\Omega R^2}{U_\infty l(r)} \sum_j G_j(r) \left[\sum_j B_{\eta ji}^1 (H_{\eta i}^1(\chi) - P_{\eta i}(\chi)) + \sum_j B_{\eta ji}^2 \frac{1}{\pi} \int_1^{\chi_{ma}} H_{\eta i}^2 \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \right] \quad (53) \\ P_{\eta i}(\chi) &\equiv \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 H_{\eta i}^1(\chi'') \frac{d\chi''}{\chi' - \chi''} \frac{d\chi''}{\chi - \chi''} \end{aligned}$$

wobei für $\chi > 1$ gilt $c_{p0}(+) = \frac{W_{\gamma 0}}{U_\infty}$. Zusammen mit der Nullverdrängungsbedingung

$$q_\eta(r, \chi) = 0 \quad \chi \geq \chi_E(r) \quad (54)$$

bestimmt die Druckbedingung (53) die Singularitäten γ_η und q_η und damit letztlich den Dickenverlauf 2η , wenn $\chi_E(r)$ bekannt ist.

Man beachte, daß der Unterschied zu einer rein profiltheoretischen Betrachtung in der Berücksichtigung der Funktionen $S_{ji}(s, \chi')$ besteht. Diese Funktionen geben an, inwieweit die Normalgeschwindigkeit eines Reihengliedes mit der Indexkombination j, i von der profiltheoretischen Näherung abweicht. Die S_{ji} müssen numerisch errechnet werden. Um die Integration mit dem Kern $\frac{1}{\chi - \chi'}$ in (53) durchführen zu können, ermitteln wir den Wert von $S_{ji}(s, \chi')$ auf N_s Radien s_n in M_v Aufpunkten $\chi'_m = \frac{1 - \cos \tau'_m}{2}$, $\tau'_m = \frac{\pi}{(M_v + 1)}$. Dann entwickeln wir in eine Sinusreihe

$$\frac{S_{ji}(s_n, \chi')}{\sqrt{1 + c^2(\chi')}} = \sum_{m=1}^{M_v} b_{jim}(s_n) \sin(m\tau'_m) \quad (55)$$

Eine geeignete Wahl der Funktionen $H_{\eta i}^1(\chi')$ und $H_{\eta i}^2(\chi')$ steht noch aus. Wie Isay und Alwardt /7/ gezeigt haben, weisen die Lösungen für die Belegung q_η und γ_η im Grenzfall eines Tragflügels unendlicher Streckung an der Vorderkante stets eine $\frac{3}{4}$ -Singularität auf ($q_\eta, \gamma_\eta \sim \chi'^{-\frac{3}{4}}$). Dieses Verhalten der exakten Lösung soll bei der Wahl der $H_{\eta i}^1(\chi')$ als Variation der Wirbeldichte γ_η in Tiefenrichtung berücksichtigt werden. Weiter enthält die linke Seite der Druckbedingung (53) gemäß Ansatz (47) für γ_0 stets eine Wurzelsingularität an der Vorderkante ($\gamma_0 \sim \chi'^{-\frac{1}{2}}$), jedoch keine andersartigen Singularitäten. Somit sollte auch die Kombination

$$\sum_j B_{\eta j i}^1 (H_{\eta j i}^1(\chi) - P_{\eta i}(\chi)) + \sum_j B_{\eta j i}^2 \frac{1}{\pi} \int_1^{\chi_{mu}} H_{\eta i}^2 \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \quad (56)$$

aus (53) außer dieser Wurzelsingularität nur stetige Terme enthalten. Wir wählen folgende Funktionen (ABB.10) mit $\frac{3}{4}$ -, $\frac{1}{2}$ - und $\frac{1}{4}$ -Singularitäten an der Vorderkante

$$H_{\eta i}^1(\chi) = \begin{cases} f_3(\chi) - f_1(\chi) & , i = 0 \\ (1 - 2\chi)(f_3(\chi) - f_1(\chi)) - \frac{(1-2\chi)}{\sqrt{2}} f_2(\chi) & , i = 1 \\ (1 - 2\chi)^2(f_3(\chi) - f_1(\chi)) - 2\sqrt{2} f_2(\chi) & , i = 2 \\ 2(1 - 2\chi)(f_1^{-1}(\chi) + f_1(\chi)) - \frac{(1-2\chi)}{\sqrt{2}} f_2(\chi) & , i = -1 \\ 4(1 - \chi)(1 - 2\chi)(f_1^{-1} + f_1(\chi)) - 2\sqrt{2} f_2(\chi) & , i = -2 \end{cases} \quad (57)$$

$0 \leq \chi \leq 1$

$$f_k(\chi) = \left| \frac{(1 - \chi)}{\chi} \right|^{\frac{k}{4}}, \quad k = 1, 2, 3$$

Versuchsweise wurden auch Rechnungen mit nur 4 Reihenglieder (ohne $\Phi_{\eta-1}$) durchgeführt und die so erhaltenen Ergebnisse unterschieden sich nur geringfügig von denen mit 5 Reihenglieder. Bei dem Doppelintegral $P_{\eta i}$ aus (56) kann zunächst die innere und danach die äußere Integration exakt ausgeführt werden (Anhang F). Die erste Integration ergibt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 H_{\eta i}^1(\chi') \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} = \begin{cases} f_3(\chi) + f_1(\chi) & , i = 0 \\ (1 - 2\chi)(f_3(\chi) + f_1(\chi)) + \sqrt{2}\chi & , i = 1 \\ (1 - 2\chi)^2(f_3(\chi) + f_1(\chi)) - 2\sqrt{2}\chi & , i = 2 \\ 2(1 - 2\chi)(f_1^{-1}(\chi) - f_1(\chi)) + \sqrt{2}\chi & , i = -1 \\ 4(1 - \chi)(1 - 2\chi)(f_1^{-1} - f_1(\chi)) - 4\sqrt{2}\chi & , i = -2 \end{cases} \quad (58)$$

$0 \leq \chi \leq 1$

Nach der zweiten Integration erhalten wir für die Kombination $H_{\eta i}^1(\chi) - P_{\eta i}(\chi)$ im Bereich der tragenden Fläche ($0 \leq \chi \leq 1$)

$$H_{\eta i}^1(\chi) - P_{\eta i}(\chi) = \begin{cases} -2\sqrt{2} & , i = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2\chi)f_2(\chi) - 4\sqrt{2}(1 - \chi) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} f_{\log}(\chi) & , i = 1 \\ -2\sqrt{2}f_2(\chi) - 4\sqrt{2}(1 - \chi)(1 - 2\chi) - \sqrt{2}\frac{5}{4} & , i = 2 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} f_{\log}(\chi) & , i = -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2\chi)f_2(\chi) + 4\sqrt{2}(1 - \chi) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} f_{\log}(\chi) & , i = -1 \\ -4\sqrt{2}f_2(\chi) + 8\sqrt{2}(1 - \chi)(1 - 2\chi) + \frac{\sqrt{2}}{2} & , i = -1 \\ -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} f_{\log}(\chi) & , i = -2 \end{cases} \quad (59)$$

$$0 \leq \chi \leq 1$$

$$f_{log}(\chi) = \chi \ln \left| \frac{(1-\chi)}{\chi} \right| + 1$$

Damit besitzt auch die rechte Seite der Druckbedingung (53) die Wurzelsingularität an der Vorderkante. Andersartige Singularitäten liegen an der Vorderkante nicht vor. Der logarithmisch singuläre Verlauf in der Nähe der Hinterkante (f_{log}) verschwindet, wenn man die Stetigkeit von q_η bei $\chi = 1$ fordert. Zunächst soll noch $-P_{\eta i}$ im Gebiet $1 \leq \chi \leq \infty$ angegeben werden

$$-P_{\eta i} = \begin{cases} \sqrt{2}(f_3(\chi) + f_1(\chi)) - 2\sqrt{2} & , i = 0 \\ \sqrt{2}(1-2\chi)(f_3(\chi) + f_1(\chi)) - 4\sqrt{2}(1-\chi) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} f_{log}(\chi) & , i = 1 \\ \sqrt{2}(1-2\chi)^2(f_2(\chi) + f_1(\chi)) - 4\sqrt{2}(1-\chi)(1-2\chi) - \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} f_{log}(\chi) & , i = 2 \\ \sqrt{2}2(1-\chi)(-f_1(\chi) - f_1^{-1}(\chi)) + 4\sqrt{2}(1-\chi) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} f_{log}(\chi) & , i = -1 \\ \sqrt{2}4(1-\chi)(1-2\chi)(-f_1(\chi) - f_1^{-1}(\chi)) + 8\sqrt{2}(1-\chi)(1-2\chi) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 4\frac{\sqrt{2}}{\pi} f_{log}(\chi) & , i = -2 \end{cases} \quad (60)$$

$$1 \leq \chi \leq \infty$$

Die $H_{\eta i}^1(\chi)$ sind in diesem Bereich nicht definiert. Als Darstellung der Quell-Verteilung $P_{\eta i}^2$ wählen wir

$$H_{\eta i}^2(\chi) = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{(\chi_{ma} - \chi)}{\chi_{ma} - 1} & , i = 0 \\ \sin i\tau & , i = 1, \dots, 4 \end{cases} \quad (61)$$

$$1 \leq \chi \leq \chi_{ma} \quad , \chi = 1 + (\chi_{ma} - 1) \frac{(1 - \cos \tau)}{2}$$

und erhalten als Ergebnis der einfachen Integration in (56)

$$\frac{1}{\pi} \int_1^{\chi_{ma}} H_{\eta i}^2(\chi') \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\chi - \chi_{ma}}{\chi_{ma} - 1} \ln \left| \frac{\chi - \chi_{ma}}{\chi - 1} \right| + 1 \right) & , i = 0 & , 0 \leq \chi \leq \chi_{ma} \\ -e^{i\varphi} & , i = 1, \dots, 4 & , 0 \leq \chi \leq 1 \\ -\cos i\tau & , i = 1, \dots, 4 & , 1 \leq \chi \leq \chi_{ma} \end{cases} \quad (62)$$

$$\chi = 1 + (\chi_{ma} - 1) \frac{(1 - \cos \varphi)}{2} \quad 0 \leq \chi \leq 1$$

$$\chi = 1 + (\chi_{ma} - 1) \frac{(1 - \cos \tau)}{2} \quad 1 \leq \chi \leq \chi_{ma}$$

Die zusätzliche Quellenverteilung muß an der Nahtstelle $\chi = 1$ stetig sein. Dann sind die Koeffizienten $B_{\eta j 0}^2$ nicht mehr unabhängig. Mit (51) und (52) unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung (55) gilt vielmehr

$$B_{\eta i 0}^2 = -B_{\eta j 1}^1 + 2B_{\eta j 2}^1 - B_{\eta j, (-1)}^1 + 4B_{\eta j, (-2)}^1 \quad (63)$$

wodurch auch die schon erwähnten logarithmischen Singularitäten aus (60) in der Druckbedingung (53) nicht in Erscheinung treten.

4.3 BESTIMMUNG DER SCHICHTGRENZE χ_E DURCH VOLUMENMINIMALISIERUNG

Der Gültigkeitsbereich der Druckbedingung (53) ist $0 \leq \chi \leq \chi_e(r)$, während die Zusatzbedingung (54) in $\chi_E(r) \leq \chi \leq \chi_{ma}$ zu erfüllen ist. Die Funktion $\chi_E(r)$, die das hintere Ende der Kavitationsschicht beschreibt, ist den bisher aufgestellten Gleichungen nicht zu entnehmen. In der 2-dimensionalen Theorie liefert die Nishiyama-Beziehung gute Übereinstimmung mit dem Experiment /7/,/10/, jedoch erscheint diese für den Propeller ungeeignet. Insbesondere müßte der Begriff 'Anstellwinkel' durch eine geeignete Interpretation des Druckverlaufs neu definiert werden. Vor allem auf den äußeren Radien, wo der Druckverlauf wesentlich durch die Radialgeschwindigkeit beeinflusst ist, ist das nicht unproblematisch. In dieser Arbeit wurde das Schichtende χ_E bestimmt, in dem wir das Volumen

$$V_c = \int_{R_b}^R \int_0^{\chi_E(r)} 2\eta(r, \chi) d\chi dr \quad (64)$$

minimalisierten. Dies geschah unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$\eta(r, \chi) \geq 0 \quad 0 \leq \chi \leq \chi_E(r) \quad (65)$$

d.h. es dürfen bei der Minimalisierung keine negativen Schichtdicken entstehen. Die Bestimmung des Schichtendes unter Verwendung der Bedingung (64) und (65) wurde bereits in der 2-dimensionalen Kavitationsprofiltheorie erprobt (IFS Ber. 441). Es zeigte sich, daß eine Rechnung mit zu (64) und (65) analogen Bedingungen etwa die Resultate lieferte wie die Nishiyama- Bedingung /7/.

Zunächst sei bemerkt, daß man für jeden Verlauf $\chi_E^0(r)$ entsprechende Zusatzbelegung q_η^0 und γ_η^0 erhält, wenn man wie folgt vorgeht. Die Stetigkeitsbedingung (63) wird exakt berücksichtigt, wodurch sich die Zahl der unabhängigen Koeffizienten $B_{\eta ji}^1$ und $B_{\eta ji}^2$ um J reduziert. Dann erzeugen wir $N_r x N_\chi$ Gleichungen, indem wir auf N_r Radien linear von 0 bis χ_{ma} jeweils N_χ Aufpunkte in Tiefenrichtung anordnen und für $\chi \leq \chi_E^0(r)$ die Druckbedingung (53), hingegen für $\chi \leq \chi_E(r)$ die Nullverdrängungsbedingung (54) aufstellen. Anschließend wird das überbestimmte System aus $N_r x N_\chi$ Gleichungen mittels eines Fehlerquadratverfahrens gelöst. Die so errechnete Dicke $2\eta^0$ erfüllte möglicherweise auf einigen der N_r Radien die Bedingung (65) nicht. Sei r_i ein solcher Radius. Die Rechnungen zeigen, daß der Bereich in dem $\eta^0(r_i, \chi) < 0$ ist, stets an der Vorderkante beginnt. Verlängert man $\chi_E(r_i)^0$ um ein Stück $\Delta\chi$ und wertet die Bedingungen (53) und (54) erneut aus, so läßt sich folgendes Verhalten beobachten. Der χ -Bereich für den die neue Lösung $\eta^0(r_i, \chi)$ negativ ist wird kürzer und die Querschnittsfläche $\int_0^{\chi_E(r_i)^0 + \Delta\chi} 2\eta^1(r_i, \chi) d\chi$ größer.

Wir finden eine (65) genügende Funktion $\chi_E(r)$ aus einer Anfangsfunktion $\chi_E^0(r)$, indem wir diese auf den N_r Kontrollradien verkürzen oder verlängern, abhängig davon, ob (65) auf dem betrachteten Radius erfüllt ist oder nicht. Das Ergebniss ist ein Verlauf $\chi_E^1(r)$. Die Prozedur wiederholt sich, bis keine Änderung um mehr als $\Delta\chi$ erfolgt, d.h. $\chi_E^n = \chi_E^{n-2}$ zutrifft. Eine geeignete Anfangsfunktion χ_E erhält man etwa aus der 'Lift Equivalence'-Methode.

Diese Methode entstammt der Beobachtung, daß sich der Auftrieb eines Flügels mit Teilkavitation gegenüber dem kavitationsfreien Zustand i.A kaum unterscheidet.

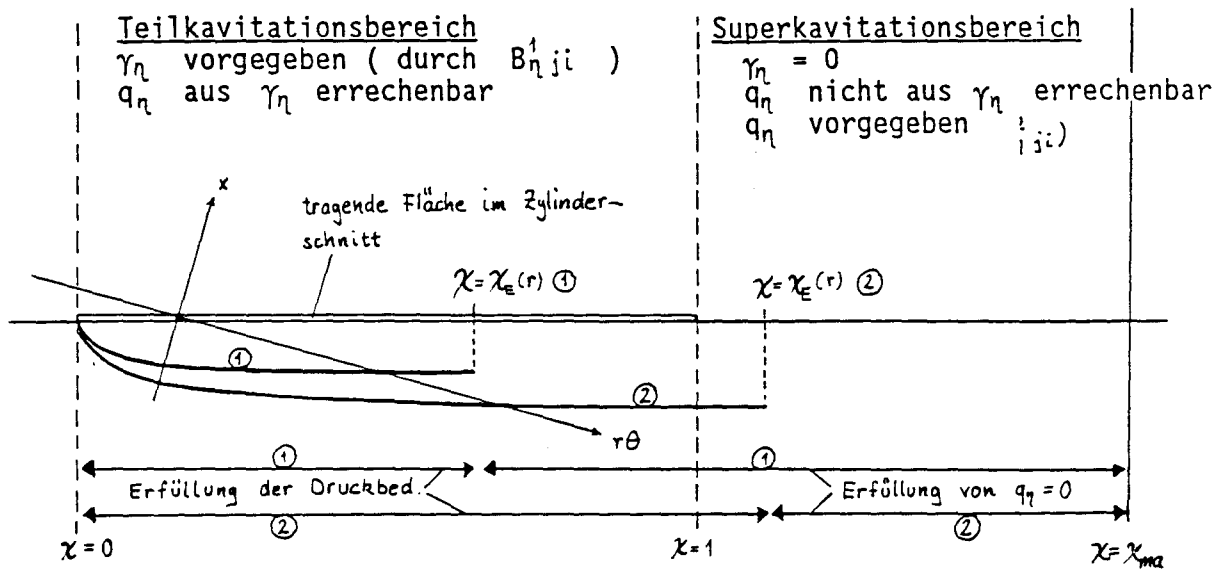


Abb. 8: Der Teilkavitationsbereich und der Superkavitationsbereich

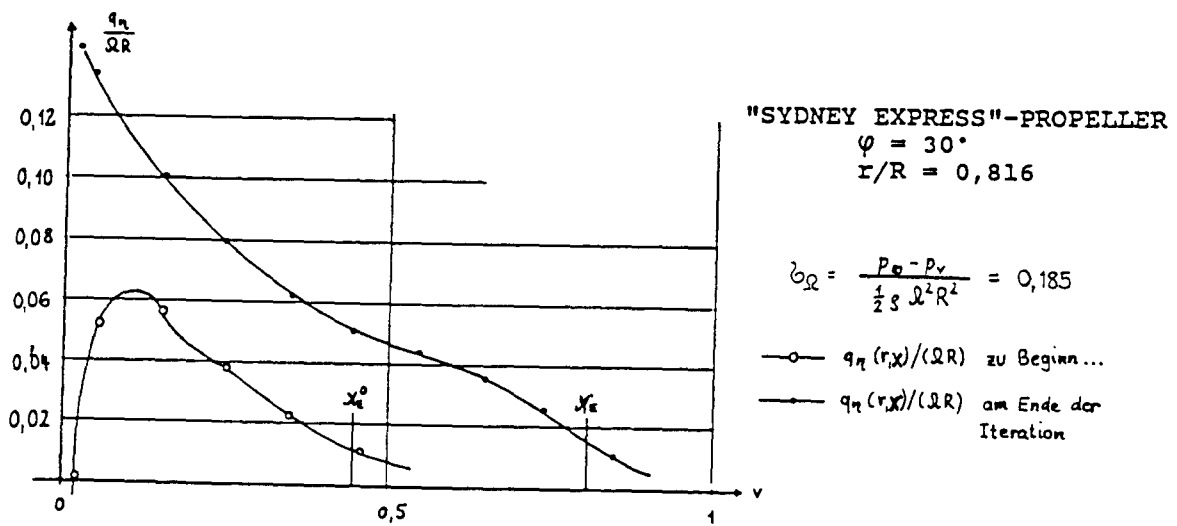


Abb. 9: Ein Beispiel für $q_n(r, x)$ auf einem bestimmten Radius zu Beginn und Ende der schrittweisen Verlängerung von $x_E(r)$

Man bestimmt aus dem sich ohne Kavitation ergebenden Druckbeiwert (der über die Profiltiefe aufgetragen ist) die Fläche zwischen dem Dampfdruckbeiwert σ_v und dem Kurvenstück, das über diesem verläuft. Mit dieser Fläche wird hinter dem Schnittpunkt mit σ_v der Zwischenraum Druckbeiwert- σ_v aufgefüllt. Die Tiefenkoordinate, bei der sich Flächengleichheit ergibt, ist dann die gesuchte Schichtlänge.

Sämtliche Rechnungen wurden mit $\chi_{ma} = 2$ durchgeführt. Versuchsweise wurde auch $\chi_{ma} = 1.5$ und $\chi_{ma} = 2.5$ eingesetzt , wobei keine nennenswerte Veränderungen in den Ergebnissen festzustellen war.

5 RESULTATE UND DISKUSSION

5.1 RESULTATE

Zur theoretischen Vorhersage der Ausdehnung und Dicke von Schichtkavitation wurden 2 Rechenprogramme erstellt. Das erste Programm bestimmt aus einer instationären axialen Zuströmung und der Propellergeometrie die Wirbelverteilung $\gamma_0(s, \chi, \Omega t - 2\pi \frac{(n-1)}{N})$, indem es die Koeffizienten B_{0jim} errechnet (Gleichung (46)). Es benötigt auf der VAX 11/780 ca. 3 Stunden CPU-Zeit, wenn der Nachstrom mit $M = 6$ gemäß (4.3) harmonisch analysiert wird. Das zweite Programm erhält die Koeffizienten der Wirbeldichte γ_0 , die zu betrachtende Winkelstellung sowie die Propellergeometrie als Eingabedaten. Es berechnet daraus unter Berücksichtigung der Dickenlinie y_d durch die Tangentialgeschwindigkeit U_{q0} ((16),(19)) und der radialen Komponente W_{γ_0} (Gleichung (16)),Anhang A) den Druckbeiwert des kavitationsfreien Zustands $c_{p0}(\pm)$. Der Saugseitendruck ist von den zusätzlichen Quellen und gebundenen Wirbeln gemäß (19) unter Berücksichtigung der Nullverdrängungsbedingung (14) zu modifizieren. Das Programm bestimmt die Schichtlänge χ_E als Funktion des Radius sowie die Schichtdicke 2η als Funktion des Radius und der Tiefenkoordinate. Die Rechenzeit hierfür beträgt ca. 1 Stunde je Winkelstellung.

Die Abbildungen 11-12 zeigen, wie durch geeignete Abspaltungen die Normalableitung des Potentials $\Phi_{\gamma,w}$ auch an der Vorderkante gelingt, so daß die Stromlinienbedingung auch dort kontrolliert werden kann. Mit den Funktionen

$$\gamma_0 = \frac{1}{l(s)} \cot \frac{\tau'}{2} \sin \lambda' \Omega R^2 (\text{Abb.11 + 12})$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{l(s)} \sin \tau' \sin \lambda' \Omega R^2 (\text{Abb.12})$$

als Testfunktionen wurde aus $\Phi_{\gamma,w}$ eine wirbelinduzierte Normalgeschwindigkeit nach 2 Verfahren berechnet. In der ersten Methode wird versucht, den Term (vergleiche (33))

$$\frac{\frac{\partial G(s,0)}{\partial s}}{(r-s)} \quad (66)$$

mittels einer Reihenentwicklung von G und anschliessender Differentiation der Reihenglieder über s zu integrieren. Beim anderen Verfahren wird die Differenz

$$\frac{\frac{\partial(G(s,0)-G_a(s))}{\partial s}}{(r-s)} \quad (67)$$

wie oben behandelt. Außerdem werden zwei zusätzliche entstandene Einfachintegrale ausgewertet. Auch im instationären Fall, d.h. bei zeitabhängiger Wirbelbelegung, ist die Kontrolle der Randbedingung an der Vorderkante möglich. Wie im Anhang A gezeigt wird, haben dann die Funktionen G_a^m die Rolle der Funktion G_a .

Leider liegen sehr wenige Druckverteilungsmessungen vor, die an einem Modellpropeller bei instationärer Zuströmung durchgeführt wurden. Zudem ist die Genauigkeit dieser Experimente ungewiß. Die hier vorgestellte Methode zur Berechnung der instationären Druckverteilung im kavitationsfreien Zustand wird mit Messungen von Takei, Koyama und Kurobe /15/ in der Abbildung 13 verglichen (die Differenz $p_\infty - p_0(+)$ ist in der Definition des Druckbeiwerts nicht auf die örtliche Anströmungsgeschwindigkeit $U_\infty = \sqrt{\Omega^2 r^2 + \tilde{c}_x(r, \varphi)}$ sondern auf $\sqrt{\Omega^2 r^2 + U'^2}$ bezogen, wobei U' eine von den Autoren angegebene mittlere axiale Zuströmung ist). Man erkennt, daß vor allem der instationäre Anteil des errechneten Druckbeiwertes recht gut mit dem Versuch übereinstimmt, jedoch liegen die theoretischen Ergebnisse in allen Winkelstellungen etwas zu hoch. Dieses Verhalten ist qualitativ für eine potentialtheoretische Rechnung auch zu erwarten.

In den Abbildungen 15-20 wurde der Modell-Propeller eines Containerschiffes ('Sydney Express', HSVA-Prop.Nr.1917) mit dem Nachstrom aus Abb.21 theoretisch untersucht. Dieser Propeller zeigt auf den äußeren Radien bei einer Kavitationszahl $\sigma_\Omega = \frac{p_\infty - p_v}{0.5 \rho \Omega^2 R^2} = 0.185$ und einem K_T -Wert von 0.175 (was bei einer homogenen Zuströmung einem Fortschrittsgrad $J_{KT} = 0.70$ entspricht) die in der Abbildung 18 dargestellten Schichtkavitation /2/(Beobachtet). Eingezeichnet sind ebenfalls die Schichtlängen, wie sie sich aus der errechneten Druckverteilung und dem vorliegenden Verfahren zur Berechnung von Kavitationsausdehnungen mit einer quasistationären Tragflächentheorie ergeben. Beim Vergleich der beobachteten und berechneten Kavitation wird eine Phasendifferenz von etwa $+15^\circ$ festgestellt. Physikalisch kann man dieses Phänomen damit begründen, daß ein Kavitationsvolumen sich aufgrund endlicher Aufweitungs- und Zusammenfallzeiten erst verspätet einem zeitlich variablen Druck anpassen kann. Chao /2/ benutzt mit $+15^\circ$ eine in seiner Berechnungsmethode festeingebaute Phasendifferenz ähnlicher Größe.

Die Abbildungen 15-17 zeigen den potentialtheoretisch errechneten Druckverlauf, der zu den berechneten Schichtlängen in der Abbildung 18 führt. Hier wie auch in den folgenden Druckbeiwertdiagrammen ist die Druckdifferenz $p_\infty - p_0(+)$ nicht auf die örtliche Anströmung $U_\infty = \sqrt{\Omega^2 r^2 + \tilde{u}_0(r, \varphi)}$ bezogen. Als Referenzgeschwindigkeit dient $\sqrt{\Omega^2 r^2 + \bar{U}^2}$ wobei \bar{U} die Geschwindigkeit ist, welche bei homogener Zuströmung den gleichen Schub erzeugt. Deutlich zu erkennen ist beim Radius $\frac{r}{R} = 0.969$ der Einfluss der radialen Komponente der induzierten Geschwindigkeit auf den Druckbeiwert. Sie vermindert den Druck im hinteren Profilbereich auf den Zylinderschnitten $\frac{r}{R} = 0.969$ und $\frac{r}{R} = 0.933$ erheblich. Dies erklärt im allgemeinen, warum ein Propeller auf den äußeren Radien zu Superkavitation neigt. Der Abbildung 20 ist zu entnehmen, wie die berechnete Schichtkavitation den Druckverlauf am Modell-Propeller der 'Sydney-Express' in der Flügelstellung $\varphi = 30^\circ$ verändert.

Die Abbildungen 25 und 29 lassen eine Aussage über Masstabeffekte in der Korrelation zwischen Modellversuch und Großausführung zu. Gezeigt sind Kavitationserscheinungen am Propeller der 'Honkong-Express' wie sie bei Experimenten im Tunnel

und an der Großausführung auftraten. Die Beobachtungen stammen in beiden Abbildungen von Friesch /17/. Der potentialtheoretischen Rechnung liegen bei einheitlich $J_{KT} = 0.785$ und $\sigma_{\Omega} = 0.227$ unterschiedliche Nachstromverteilungen zugrunde. Zum einen der Nachstrom des Modellversuchs, wie er im Tunnel der HSVA gemessen wurde (Abb. 33). Zum anderen die Nachstromverteilung der Großausführung, die durch Umrechnung von Schlepptankmessungen ermittelt worden ist (Abb. 34). Die theoretischen Ergebnisse stimmen mit der Beobachtung an der Großausführung besser überein. Der Grund hierfür mag sein, daß im Modellversuch eine Grenzschichtablösung mit Totwasserbildung vorliegen könnte. Die Unterdrücke in den Wirbeln des Totwassers würden die Kavitation verstärken.

In den Abbildungen 26-28 (Modell) bzw. 22-24 (Großausführung) sind die Druckverläufe dargestellt, aus denen die Schichtlängen der Abbildungen 29 und 25 errechnet wurden. Eingezeichnet ist auch der jeweilige örtliche Dampfdruckbeiwert σ_v , der bei der vorliegenden Theorie im Kavitationsfall nicht unterschritten werden darf.

Zur Ermittlung der Druckschwankungen, die durch Schichtkavitation am Hinterschiff herangerufen werden, sind die Kavitationsvolumina in den Positionen um die 12° -Stellung interessant. Die Abbildungen 30 (Modell) und 31 (Großausführung) zeigen die errechnete Schichtdicken im Zylinderschnitt. Messungen der Schichtdicken für die erwähnten Propeller liegen nicht vor. Experimentelle Untersuchungen dieser Art sind jedoch in der HSVA geplant.

5.2 AUSBLICK

In der Zukunft wären folgende Verbesserungen in der Berechnung des Druckfeldes für den kavitationsfreien Zustand zu überlegen.

- Berücksichtigung des stetigen Anteils der dickeninduzierten Normalgeschwindigkeit in der Stromlinienbedingung (Anstellwinkelkorrektur)
- Kontrolle der auf den freien Wirbelflächen geltenden Randbedingungen, um deren Geometrie genauer zu erfassen
- Einbeziehung einer über den Radius veränderlichen Steigung $2\pi h_0(r)$
- Berücksichtigung einer Umfangs-Komponente der Zuströmung
- Berücksichtigung der dickeninduzierten Tangentialgeschwindigkeit U_{q0} nach der dreidimensionalen Theorie (Formel (40))
- Rechenzeitverkürzung (z.B wäre zu untersuchen, ob man bis auf den Aufpunktflügel ($n=1$) nicht alle anderen statt durch tragende Fläche mittels tragender Linien erfassen kann).

Aus Gründen der Rechenzeiterparnis und um eine größere Anzahl von Lösungsfunktionen $H_{\eta_i}^1$ (vergleiche (50)) berücksichtigen zu können, ist zu untersuchen, inwieweit die zusätzliche Wirbeldichte γ_{η} nicht genauso wie γ_0 in einer Birnbaumreihe enthalten kann. Damit wären die beiden Produktansätze bis auf die zeitabhängigen Faktoren, die in γ_0 noch auftreten, identisch. Im Abschnitt 4 wurde streng darauf geachtet, in

der Kombination (56) logarithmische Singularitäten an der Vorderkante zu vermeiden. Bei der Verwendung der Birnbaumreihe werden diese auftreten. Wenn man allerdings die Druckbedingung (53) nicht direkt an der Vorderkante kontrolliert und einen logarithmisch singulären Verlauf des erreichten Drucks (der ja eigentlich konstant Dampfdruck zu sein hat) in dem Bereich von der Vorderkante bis zum ersten Kontrollpunkt akzeptiert, bietet die Birnbaumreihe 3 Vorteile

- alle Rechnungen zur wirbelinduzierten Normalgeschwindigkeit $V_{\gamma\eta}$ entfallen für die Indizes $i = 0, \dots, I$, denn diese sind schon in dem Programm ausgeführt worden, das γ_0 bestimmt.
- die Vergrößerung der Zahl der $H_{\eta i}^1$ durch $i = I + 1, I + 2..$ ist denkbar einfach ($\sin(I + 1)\tau', \sin(I + 2)\tau', \dots$)

5.3 ABSCHLIESSENDE BEMERKUNG

Es wurde eine Methode vorgestellt, die Kavitationserscheinungen am Propeller erfaßt mittels einer quasistationären 3-dimensionalen Potentialtheorie für den veränderten Auftrieb und einer ebenfalls quasistationären 2-dimensionalen Potentialtheorie für die zusätzliche Verdrängung. Allein das offene Kavitationsmodell scheint in Verbindung mit Potentialströmung realistisch /6,16/. In der vorliegenden Arbeit wurde die Kavitationsausdehnung nicht über die Nishiyama-Bedingung /7,10/ ermittelt denn diese ist auf die Behandlung ebener Probleme beschränkt. Inwieweit das hier eingeführte Verfahren zur Bestimmung der hinteren Schichtgrenze sinnvoll ist, kann vielleicht von den in der HSVA geplanten Messungen der Schichtdicke entschieden werden.

Literatur

- [1] KERWIN, J.E und LEE, C.-S. "Prediction of Steady and Unsteady Marine Propeller Performance by Numerical Lifting-Surface Theory". SNAME Transactions, Vol.86, 1978
- [2] CHAO, K.-Y. "Entwicklung eines praktikablen EDV-Programms zur Berechnung der Druckschwankungen an der Aussenhaut infolge Kavitierender Propeller im Nachstrom". FDS Ber.Nr.137, 1982
- [3] KOYAMA, K. "On Application of Lifting-Surface-Theory to Marine Propellers". Proc.13th. Symp. on Naval Hydrod., Tokyo 1980.
- [4] ISAY, W.-H. "Moderne Probleme der Propellertheorie". Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1970
- [5] LEE, C.-S. "Prediction of Transient Cavitation on Marine Propellers by Numerical Lifting-Surface-Theory". Proc.13th. Symp. on Naval Hydrod., Tokyo 1980.
- [6] ISAY, W.-H. "Kavitation". Schiffahrtsverlag HANSA, Hamburg, 1984

- [7] ALWARDT,P. und ISAY,W.-H." Zur Behandlung von Teilkavitation an Flügeln mit den Methoden der Profiltheorie". IFS Ber.Nr.399,1980
- [8] VAN GENT, W."On the Use of Lifting Surface Theory for Moderately and Heavily Loaded Ship Propellers ". Netherlands Ship Modell Basin, Wagenigen, Public.No.536
- [9] TRUCKENBRODT,E." Das Geschwindigkeitspotential der tragenden Fläche bei inkompressibler Strömung". Zeitschr. f. angew. Math. und Mech.,Band 33,1953.
- [10] GASAU,H." Zur Behandlung der stationären Teil- und Superkavitation an Tragflügeln". IFS Ber.Nr. 416, 1982.
- [11] NISHIYAMA,T und ITO,J"Linearized Theoty of Partialy Cavitated Hydrofoils by Singularity Methods". Techn.Report of Tohoku Univ.,Vol.42,1977
- [12] SCHLICHTING,H. und TRUCKENBRODT,E." Aerodynamik des Flugzeugs". Springer Verlag 1969.
- [13] YMASAKI,R."On the Theory of Screw Propellers in Non-Uniform Flows". Memoirs of the Faculty of Engineering,Kyushu Univ.,Vol. 25,No.2,1966.
- [14] HANAOKA,T."Linearized Theory of Cavity Flow past a Hydrofoil of Arbitrary Shape". Sel. Pap. f. the Journ. of the Soc.of Nav. Arch. of Japan, Vol.2,p. 56, 1969.
- [15] TAKEI,Y.,KOYAMA,K. und KUROBE,Y."Mesurments of Pressure on Blade of a Propeller Model". Papers of Ship Research Inst. Tokyo, No. 55, 1979.
- [16] HOSHINO,T. "A Method of Predict Fluctuating Pressure Inducted by a Cavitating Propeller". Mitsubishi Technical Buletin, No. 150,1982
- [17] FRIESCH,J."Cavitation Observations and Measurments of Propeller Excited Pressure pulses in Fullscale and in Model Test". SNAME Propellers '84 Symposium, Virginia Beach, May 1984.
- [18] SCHMEIDLER,W."Integralgleichungen mit Anwendung in Physik und Technik". Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig, Leibzig,1950.
- [19] ISAY,W.-H. und ARMONAT,R. "Zur Berechnung der potentialtheoretischen Druckverteilung am Flügelblatt eines Propellers". Schiffstechnik Bd. 13, 1966.

ANHANG A Auswertung des Geschwindigkeitspotentials ϕ_γ im instationären Fall

A.1 Zerlegung des Potentials

Zunächst ist in der Formel (25) zu bilden

$$\frac{\partial}{\partial n'_f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_f|} = \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + s^2}} \left(h_0/s \frac{\partial}{\partial \theta'_f} - s \frac{\partial}{\partial x'_f} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_f|} \quad (A1)$$

Der Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'_f|$ zwischen dem Aufpunkt x, r, φ und einem Punkt $x'_f, s, \theta'_f + 2\pi(n-1)/N - \Omega t$ auf den freien Wirbelflächen ist

$$|\vec{r} - \vec{r}'_f| = \sqrt{(x-x'_f)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\Omega t + \varphi - \theta'_f + \theta_n)} \\ \theta_n = -2\pi(n-1)/N \quad (A2)$$

Das Ergebnis der Differentiation lautet

$$\frac{\partial}{\partial n'_f} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_f|} = \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + s^2}} \left(\frac{h_0 r \sin(\Omega t + \varphi - \theta'_f + \theta_n) - s(x-x'_f)}{\sqrt{(x-x'_f)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\Omega t + \varphi - \theta'_f + \theta_n)}^3} \right) \quad (A3)$$

Die Koordinaten des Vektors \vec{r} aus (26) sind

$$\begin{aligned} \varphi &= \theta - \Omega t_0 + (\Delta/\sqrt{h_0^2 + r^2}) \frac{h_0}{r} = \theta - \Omega t_0 + \frac{\Delta}{r} \sin \delta \\ x &= h_0 \theta - \Delta r / \sqrt{h_0^2 + r^2} = h_0 \theta - \Delta \cos \delta \\ r &= r \end{aligned} \quad (A4)$$

Außerdem benutzen wir statt x'_f und θ'_f die Variablen θ' und ψ aus (22'-23). Die Formel für das Potential lautet so mit $\delta\theta = \theta - \theta'$ und $\delta t = t - t_0$

$$\begin{aligned} \phi_\gamma &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{R_b}^R ds \int_0^1 l(s) d\mathbf{x}' \int_0^\infty \gamma(s, \mathbf{x}', \Omega t + \theta_n - \psi) \cdot \\ & \frac{[h_0 r \sin(\Omega \delta t + \delta\theta - \psi + \theta_n + \frac{\Delta}{r} \sin \delta) - s h_0 (\delta\theta - \psi - \frac{\Delta}{h_0} \cos \delta)]}{\sqrt{h_0^2 (\delta\theta - \psi - \frac{\Delta}{h_0} \cos \delta)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\Omega \delta t + \delta\theta - \psi + \theta_n + \frac{\Delta}{r} \sin \delta)}^3 \quad (A5) \end{aligned}$$

Der Integrand ist stetig, wenn $n \neq 1$ ist. Eine Transformation $\psi + \theta' - \theta = \tilde{\nu}$

und die Entwicklung der trigonometrischen Funktionen für $n=1$ sowie $t=t_0$ ergibt das approximierte Potential $\phi_{\gamma,w}$

$$\phi_{\gamma,w} = \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R ds \int_0^1 l(s) d\mathcal{X}' \int_{\theta'-\theta}^{\infty} \gamma(s, v', \Omega t_0 - \vartheta - \theta + \theta') \frac{h_0^2 + rs}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \left\{ \frac{\Delta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \vartheta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}} \right\}^3 d\vartheta \quad (A6)$$

Bei homogener Zuströmung ist $\gamma(s, v', \Omega t_0 - \vartheta + \theta' - \theta) = \gamma(s, \mathcal{X}')$ und die ϑ -Integration ließe sich sofort analytisch ausführen. Allgemein müssen wir jedoch in (A6) mit $\delta\theta = \theta - \theta'$ wie folgt zerlegen

$$\gamma(s, \mathcal{X}', \Omega t_0 - \delta\theta - \vartheta) = \gamma(s, \mathcal{X}', \Omega t_0 - \delta\theta) + \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \gamma(s, \mathcal{X}', \Omega t_0 - \delta\theta - \vartheta) \right]_{\vartheta=0} \cdot \vartheta + \dots \quad (A7)$$

und erhalten entsprechend

$$\phi_{\gamma,w} = \phi_{\gamma,w}^0 + \phi_{\gamma,w}^1 + \dots \quad (A8)$$

Wir nehmen an, daß γ in der Form

$$\gamma = \sum_{m=-M}^M \gamma^m(s, \mathcal{X}') e^{im(\vartheta + \delta\theta - \Omega t_0)} \quad (A9)$$

vorliegt. Dann kann man für die beiden ersten Summanden auf der rechten Seite von (A8) folgende Darstellung finden

$$\begin{aligned} \phi_{\gamma,w}^0 &= \sum_{m=-M}^M e^{-im\Omega t_0} \varphi_{\gamma}^{m,0}, & \phi_{\gamma,w}^1 &= \sum_{m=-M}^M e^{-im\Omega t_0} \varphi_{\gamma}^{m,1} \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma}^{m,0} &= \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R ds l(s) \int_0^1 d\mathcal{X}' \gamma^m(s, \mathcal{X}') e^{im\delta\theta} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \int_{-\delta\theta}^{\infty} \frac{(h_0^2 + rs) \Delta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \vartheta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}}^3 d\vartheta \\ \varphi_{\gamma}^{m,1} &= \frac{im}{4\pi} \int_{R_b}^R ds l(s) \int_0^1 d\mathcal{X}' \gamma^m(s, \mathcal{X}') e^{im\delta\theta} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \int_{-\delta\theta}^{\infty} \frac{(h_0^2 + rs) \Delta \vartheta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \vartheta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}}^3 d\vartheta \end{aligned}$$

Die Integration über ϑ kann in beiden Fällen analytisch ausgeführt werden. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \int_{-\delta\theta}^{\infty} \frac{(h_0^2 + rs) \Delta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \vartheta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}}^3 d\vartheta &= \frac{\Delta \sqrt{h_0^2 + rs}}{\Delta^2 + (s-r)^2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{h_0^2 + rs}}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \delta\theta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}} \right\} \\ \int_{-\delta\theta}^{\infty} \frac{(h_0^2 + rs) \Delta \vartheta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \vartheta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}}^3 d\vartheta &= \frac{\Delta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \delta\theta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}} \end{aligned} \quad (A11)$$

A.2 Berechnung von V_γ aus (29)

Wenn wir die Normalgeschwindigkeit V_γ aus (29) errechnen wollen, müssen wir bilden

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \partial/\partial\Delta \phi_\gamma(r, \theta, \Delta; t_0) \quad (A12)$$

Wir schreiben

$$\phi_\gamma(r, \theta, \Delta; t_0) = [\phi_\gamma(r, \theta, \Delta; t_0) - \phi_{\gamma,w}(r, \theta, \Delta; t_0)] + \phi_{\gamma,w}(r, \theta, \Delta; t_0) \quad (A13)$$

und beschäftigen uns zunächst mit der Differentiation von $\phi_{\gamma,w}$. Wie von TRUCKENBRODT [9] gezeigt wurde, ist

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial\Delta} \varphi_\gamma^{m,0} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial\Delta} \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \frac{\Delta}{(s-r)^2 + \Delta^2} G^m(s, \Delta) ds \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} G^m(r, 0) - \oint_{R_b}^R \frac{G^m(s, 0)}{(r-s)^2} ds \right\} = - \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \frac{\partial/\partial s G^m(s, 0)}{r-s} ds \end{aligned} \quad (A14)$$

wobei \oint die Aussparung von $r-\varepsilon \leq s \leq r+\varepsilon$ bei der Integration bedeutet und $G^m(s, \Delta)$ den folgenden Term zusammenfaßt

$$G^m(s, \Delta) = \gamma(s) \sqrt{\frac{h_0^2 + rs}{h_0^2 + r^2}} \int_0^1 \left(1 + \frac{\sqrt{h_0^2 + rs} \delta\theta}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \delta\theta^2 + (s-r)^2 + \Delta^2}} \right) \gamma^m(s, \chi') e^{im\delta\theta} d\chi' \quad (A15)$$

Die Gleichung (A14) setzt $G^m(R, 0) = G^m(R_b, 0) = 0$ voraus. Im stationären Fall ist nur $G^0(s, \Delta)$ maßgebend.

In einem Abstand von der Vorderkante läßt sich (A14) recht gut mit Hilfe des Quadraturverfahrens von MULTHOFF zur Ermittlung der Auftriebsverteilung nach der Tragflächentheorie [12,13] auswerten. Für die Variation von γ_0 in Tiefenrichtung χ' verwenden wir gemäß (48) auch einen Term $|(1-\chi)/\chi|^{1/2}$ (ctg-Term der Birnbaumreihe). Die Wurzelsingularität an der Vorderkante hat zur Folge, daß unterhalb 10% Entfernung von der Kante der numerische Aufwand für das oben erwähnte Verfahren wächst (vergleiche Abb. 11-12) und aus Gründen der Rechenzeiterparnis weitere Abspaltungen erforderlich sind. Gleiches trifft für γ_n aus (50) und (57) zu. Wir führen mit G_α^m eine G^m ähnliche Funktion ein

$$G_a^m(s) = l(r) \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \frac{\delta l}{\sqrt{(\delta l)^2 + (s-r)^2}} d\chi'$$

$$l(r) = \sqrt{h_0^2 + r^2} \bar{\theta}(r) \quad , \quad \delta l = l(r)(\chi - \chi') - c(\chi')(s-r) \quad (A16)$$

$$c(\chi') = \sqrt{h_0^2 + r^2} \partial/\partial r \theta'(r, \chi')$$

wobei χ die Transformation von θ auf das Intervall $[0,1]$ gemäß

$$\theta = \bar{\theta}(r)\chi + \theta_\chi(r)$$

ist. Wir benutzen G_a^m , um diese Funktion von $G^m(s,0)$ abzuziehen und anschließend wieder hinzuzuzählen. Mit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} G_a^m(r) - \oint_{R_b}^R \frac{G_a^m(s)}{(r-s)^2} ds \right) = \frac{\sqrt{1+c^2(\alpha)}}{4\pi} \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \{ f_-(R-r, \chi') + f_+(r-R_b, \chi') \} \frac{d\chi'}{\chi - \chi'} \quad (A17)$$

$$c(\chi) = \sqrt{h_0^2 + r^2} \partial/\partial r \theta(r, \chi)$$

wobei f_- und f_+ laut Gleichung (34.) definiert sind, gelangt man schließlich zu der (nun auch an der Vorderkante verwendbaren) Formel

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta} \varphi_\gamma^{m,0} = -\frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \frac{\partial/\partial s (G^m(s,0) - G_a^m(s))}{r-s} ds \quad (A18)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{G_a^m(R)}{R-r} + \frac{G_a^m(R_b)}{r-R_b} \right\} - \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1+c^2(\alpha)}}{\sqrt{1+c^2(\alpha)}} \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \left\{ \frac{f_-(R-r, \chi') + f_+(r-R_b, \chi')}{2} - 1 \right\} \frac{d\chi'}{\chi - \chi'}$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sqrt{1+c^2(\alpha)} \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \frac{d\chi'}{\chi - \chi'}$$

Bei geeignetem Ansatz für γ^m (Birnbaumreihe in Tiefenrichtung wie in (47)) ist das profiltheoretische Integral mit Kern $1/(\chi - \chi')$ unter Ausnutzung von

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\tau' / (\cos \tau' - \cos \tau) d\tau' = \sin k\tau / \sin \tau \quad (A19)$$

analytisch berechenbar [18].

Nun muß $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \partial/\partial \Delta \varphi_\gamma^{m,1}$ noch ausgewertet werden. Wir definieren

$$g^m(s) = \frac{l(s)}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \int_0^1 \gamma^m(s, \chi') e^{im\delta\theta} \frac{d\chi'}{\sqrt{(h_0^2 + rs) \delta\theta^2 + (s-r)^2}}$$

$$g_a^m(s) = \frac{l(r)}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \frac{d\chi'}{\sqrt{(\delta l)^2 + (s-r)^2}} \quad (A20)$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta} \varphi_{\gamma}^{m,1} &= \frac{i m}{4\pi} \int_{R_b}^R ds (g^m(s) - g_a^m(s)) \\ &+ \frac{i m}{4\pi} \bar{\theta}(r) \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \ln \left\{ \frac{f_{-}^*(R-r, \chi')}{f_{-}^*(R_b-r, \chi')} \right\} \frac{d\chi'}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} \end{aligned} \quad (A21)$$

$$f_{\pm}^*(u, \chi') = \left(\frac{\sqrt{1 + (l(r)(\chi - \chi')/u \mp c(\chi'))^2}}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} + \frac{|u|}{u} \right) |u| (1+c^2(\chi')) \mp c(\chi') l(r)(\chi - \chi')$$

wobei der zweite Summand in (A21) aus der Integration von $g_a(s)$ über s entsteht. Aus

$$f_{+}^*(u, \chi') f_{-}^*(-u, \chi') = (l(r) (\chi - \chi'))^2 \quad (A22)$$

folgt durch Erweitern mit $f_{+}^*(r-R_b, \chi')$ unterm Logarithmus, daß für $\chi' \rightarrow \chi$ der Logarithmus in (A21) wie

$$- 2 \ln (l(r)(\chi - \chi'))$$

singulär wird. Bei geeignetem Reihenansatz für γ^m (Birnbaumreihe in Tiefenrichtung) ist

$$- \frac{i m}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+c^2(\chi)}} \bar{\theta}(r) \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \ln (2(\chi - \chi')) d\chi' \quad (A23)$$

unter Ausnutzung der Integrale

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(\cos \tau' - \cos \tau) (1 + \cos \tau') d\tau' &= -(\ln 2 + \cos \tau) \quad (A24) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(\cos \tau' - \cos \tau) \sin k\tau' \sin \tau' d\tau' &= \begin{cases} -(\ln 2 - \frac{1}{2} \cos 2\tau) / 2, & k=1 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k-1)\tau - \cos(k+1)\tau}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\tau}{k+1} \right), & k>1 \end{cases} \end{aligned}$$

analytisch bestimmbar. Somit bereiten die oben erwähnten logarithmischen Singularitäten keine Schwierigkeiten, wenn für die numerische Auswertung wie folgt zerlegt wird

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta} \varphi_{\gamma}^{m,1} &= \frac{i m}{4\pi} \int_{R_b}^R ds (g^m(s) - g_a^m(s)) \quad (A25) \\ &+ \frac{i m}{4\pi} \bar{\theta}(r) \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \left\{ \ln \left(\frac{f_{-}^*(R-r, \chi')}{f_{-}^*(R_b-r, \chi')} \right) \frac{1}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} + \frac{2 \ln (2(\chi - \chi'))}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} \right\} d\chi' \\ &- \frac{i m}{2\pi} \frac{\bar{\theta}(r)}{\sqrt{1+c^2(\chi)}} \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') \ln (2(\chi - \chi')) d\chi' \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Normalgeschwindigkeit V_γ ist schließlich noch der Beitrag der Nachbarflügel zum Geschwindigkeitspotential sowie die Differenz zwischen dem exakten Beitrag des 1. Flügels und der Summe $\phi_{\gamma,w}^0 + \phi_{\gamma,w}^1$ zu berücksichtigen. Die Formel dafür lautet

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \partial/\partial\Delta [\phi_\gamma(r, \theta, \Delta; t_0) - \phi_{\gamma,w}^0(r, \theta, \Delta) - \phi_{\gamma,w}^1(r, \theta, \Delta)] = \\ & \sum_{m=-M}^M e^{-im\Omega t_0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \int_{R_b}^R ds \ln(s) \int_0^1 dv' \gamma^m(s, \chi') e^{im(\theta - \theta')} \quad (A26) \\ & \int_{\theta'-\theta}^{\theta} \left\{ \frac{(h_0^2 \cos(\theta_n - \vartheta) + rs)}{r_n^3} e^{im\vartheta} - \delta(n,1)(1+im\vartheta) \frac{(h_0^2 + rs)}{\sqrt{(h_0^2 + rs)\vartheta^2 + (s-r)^2}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{3h_0^2}{r_n^5} (r \sin(\theta_n - \vartheta) + s\vartheta)(r\vartheta + s \sin(\theta_n - \vartheta)) e^{im\vartheta} \right\} d\vartheta \\ & r_n^2 = h_0^2 \vartheta^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta_n - \vartheta) \quad \theta_n = -2\pi(n-1)/N \end{aligned}$$

wobei $\delta(n,1)$ für $n \neq 1$ stets 0 ist, für $n=1$ hingegen 1.

Wir können aus den Formeln (A18), (A25-26) die Normalgeschwindigkeit V_γ endlich errechnen, wenn wir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\Delta} (\phi_\gamma - \phi_{\gamma,w}^0 - \phi_{\gamma,w}^1) \\ & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial\Delta} \phi_{\gamma,w}^0 \quad (A27) \\ & \frac{\partial}{\partial\Delta} \phi_{\gamma,w}^1 \end{aligned}$$

jeweils auf dem Computer auswerten bzw. die Integrale mit Kern $1/(\chi - \chi')$, $\ln(2(\chi - \chi'))$ und $1/(r-s)$ analytisch bestimmen. Im Falle des Kerns $1/(r-s)$ ist nach Transformation der Variablen s auf λ' gemäß

$$s = R_b + (R - R_b)/2 \cdot (1 - \cos \lambda')$$

die Differenz $G^m(s,0) - G_a^m(s)$ durch 2 Kosinus-Glieder und eine Sinusreihe darzustellen. Man erhält die Formel

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \frac{\partial/\partial s (G^m(s,0) - G_a^m(s))}{r-s} ds \quad (A28) \\ & = - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{R - R_b} \int_0^\pi \frac{\partial/\partial \lambda' (c_0/2 + c_1 \cos \lambda' + b_1 \sin \lambda' + b_2 \sin 2\lambda' + \dots)}{\cos \lambda' - \cos \lambda} d\lambda' \end{aligned}$$

wenn man wie oben auch noch r auf λ transformiert. Eine Anwendung des Quadraturverfahrens von MULTHOFF [12] bringt hier erhebliche Rechenzeiterparnis bei der Integration der Sinus-Glieder. Dabei wird ausgenutzt, daß für eine an den Grenzen $\lambda' = 0$ und $\lambda' = \pi$ verschwindende Funktion $f(\lambda', \lambda)$ gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial/\partial\lambda' f(\lambda', \lambda) d\lambda'}{\cos\lambda' - \cos\lambda} = b_{kk}^* f(\lambda_k, \lambda_k) - \sum_{k'=1}^{K_0} b_{kk'}^* f(\lambda_{k'}, \lambda_{k'}) \quad (A29)$$

$$b_{kk}^* = (K_0+1)/(2\sin\lambda_k) \quad , \quad b_{kk'}^* = \frac{1-(-1)^{k-k'}}{K_0+1} \sin\lambda_{k'}/(\cos\lambda_k - \cos\lambda_{k'})^2$$

wobei $\lambda_{k'}$ bzw. λ_k dem Intervall $[0, \pi]$ gemäß

$$\lambda_{k'} = k'\pi/(K_0+1) \quad , \quad k'=1, \dots, K_0 \quad ; \quad \lambda_k = k\pi/(K_0+1) \quad , \quad k=1, \dots, K_0$$

zu entnehmen sind. Die Verwendung dieser Formel bedingt eine Einschränkung der Aufpunkte $r(\lambda)$ auf $r(\lambda_k)$ mit zulässigen k -Werten $k=1, \dots, K_0$.

A.3 Berechnung der wirbelinduzierten Radialgeschwindigkeit W_γ und der wirbelinduzierten Tangentialgeschwindigkeit U_γ

Um die Radialgeschwindigkeit W_γ bzw. die Tangentialgeschwindigkeit U_γ auf der tragenden Fläche zu bestimmen, müssen wir auswerten

$$W_\gamma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \phi_\gamma(r, \theta, \Delta; t_0) \quad (A30)$$

$$U_\gamma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_\gamma(r, \theta, \Delta; t_0)$$

Dabei geht

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (A31)$$

aus dem Operator für die Tangentialgeschwindigkeit im x, r, φ -System

$$\lim_{x \rightarrow h_0 \theta, \varphi \rightarrow \theta - \Omega t_0} \left(\cos \delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \delta \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (A32)$$

hervor, wenn man die Beziehungen in (28) ausnutzt. Wir wollen uns auf eine Approximation durch

$$U_\gamma \cong \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_{\gamma, w} \quad (A33)$$

beschränken. Vorausgesetzt, daß nicht nach Δ differenziert wird, kann zunächst mit

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{r+a}^{r+b} \frac{\Delta}{(s-r)^2 + \Delta^2} ds = \begin{cases} \frac{\Delta}{|\Delta|} & a < 0 < b \\ -\frac{\Delta}{|\Delta|} & b < 0 < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A34})$$

der Grenzwert

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta / ((s-r)^2 + \Delta^2)$$

als Diracsche Delta-Funktion $\delta(s-r)$ identifiziert werden. Dann gilt für die Bestandteile von $\phi_{\gamma,w}$ aus (A10)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varphi_{\gamma,w}^0 &= \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{|\Delta|} G^m(r, \Delta=0) \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varphi_{\gamma,w}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A35})$$

(A15) entnimmt man

$$G^m(r, 0) = I(r) \int_0^1 \gamma^m(r, \chi') e^{im\bar{\theta}(r)(\chi-\chi')} \left(1 + \frac{\chi-\chi'}{|\chi-\chi'|}\right) d\chi' \quad (\text{A36})$$

und erhält schließlich mit (A10) und $\Delta/|\Delta| = \pm 1$ (Saugseite +, Druckseite -)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \phi_{\gamma,w} = \pm \sum_{m=-M}^M \frac{1}{2} I(r) e^{im(\theta-\Omega t_0)} \int_0^{\chi} \gamma^m(r, \chi') e^{-im\bar{\theta}(r)\chi'} d\chi' \quad (\text{A37})$$

Die in (A33) formulierte Näherung mit $1/\sqrt{h_0^2 + r^2} \partial/\partial\theta = 1/I(r) \partial/\partial$ lautet also

$$U_{\gamma} \cong \pm \sum_{m=-M}^M \frac{1}{2} e^{-im\Omega t_0} \left\{ \gamma^m(r, \chi) + im\bar{\theta}(r) \int_0^{\chi} \gamma^m(r, \chi') e^{im\bar{\theta}(r)(\chi-\chi')} d\chi' \right\} \quad (\text{A38})$$

Nach (A30) b.z.w. (44) ist der unstetige Anteil der wirbelinduzierten Radialgeschwindigkeit

$$W_{\gamma r} \cong \pm \sum_{m=-M}^M \frac{1}{2} e^{im(\theta-\Omega t_0)} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ I(r) \int_0^{\chi} \gamma^m(r, \chi') e^{-im\bar{\theta}(r)\chi'} d\chi' \right\} \quad (\text{A39})$$

Anhang A

Betrachten wir jetzt den stetigen Anteil der wirbelinduzierten Radialgeschwindigkeit aus Formel (44). Für $n=1$, $r=s$, $-\xi = \theta^* - \theta' - \psi = \theta^* - \theta'$ wird der Kern des dreifachen Integrals singularär.

$$W_{Y2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \int_{\theta_v}^{\theta_H} \int_{\theta^* - \theta'}^{\infty} h_0 \sqrt{h_0^2 + r^2} \gamma \frac{-s \xi + r \sin \xi}{[h_0^2 \xi^2 + (r-s)^2 + 2rs(1 - \cos \xi)]^{3/2}} d\xi d\theta' ds \right) \quad (\text{A40})$$

Bei numerischer Differentiation nach r (Differenzenbildung) und numerischer Integration (z.B. Trapezregel) über s , kann man das zweifache Integral aufspalten ($n=1$, $r=s$)

$$\begin{aligned} I_X &= \int_{\theta_v(s)}^{\theta_H(s)} \int_{\theta^* - \theta'}^{\infty} = \int_{\theta_v}^{\theta^* - b - \alpha} \int_{\theta^* - \theta'}^{\infty} + \int_{\theta_v}^{\theta^* - b + \alpha} \int_{-\alpha}^{\infty} + \int_{\theta_v}^{\theta^* - b} \int_{+\alpha}^{\infty} + \\ &+ \int_{\theta^* - b}^{\theta^* + b + \alpha} \int_{\theta^* - \theta'}^{\infty} + \int_{\theta^* - b}^{\theta^* + b} \int_{+\alpha}^{\infty} + \int_{\theta^* + b}^{\theta_H} \int_{\theta^* - \theta'}^{\infty} = I_{\theta 1} + \dots + I_{\theta 6} \end{aligned} \quad (\text{A41})$$

für $|\alpha| \ll 1$, $|b| \ll 1$ kann man die trigonometrischen Funktionen im Kern der singularären Integrale $I_{\theta 2}$, $I_{\theta 4}$ in eine Reihe entwickeln und nach Abkürzen einen regulären Kern erhalten.

$$\text{Kern} = \pm \frac{1}{3 \sqrt{h_0^2 + r^2}^3} \quad (\text{A42})$$

ANHANG B Auswertung des Geschwindigkeitspotentials ϕ_q

Der Abstand $|\vec{r}-\vec{r}'_q|$ zwischen dem Aufpunkt \vec{r} und einem Punkt auf der tragenden Fläche \vec{r}'_q ist mit den Koordinaten aus (36) gegeben durch

$$|\vec{r}-\vec{r}'_q| = \sqrt{(x-h_0\theta')^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\Omega t + \varphi - \theta' - 2\pi(n-1)/N)} \quad (B1)$$

Wenn wir den Aufpunkt gemäß (26) durch r, θ, Δ darstellen gilt

$$\phi_q(r, \theta, \Delta=0; t=t_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{R_b}^R ds l(s) \int_0^1 \frac{q(s, \chi') d\chi'}{\sqrt{h_0^2(\theta-\theta')^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta-\theta'+\theta_n)}} \quad (B2)$$

$$\theta_n = -2\pi(n-1)/N$$

Das Potential aus (B2) ist nach θ zu differenzieren, um die Tangentialgeschwindigkeit U_q zu erhalten (vergleiche (37)). Der Integrand von ϕ_q ist wieder stetig, wenn $n \neq 1$ ist. Das approximierte Potential $\phi_{q,w}$ aus (38) erhält man nach einer Entwicklung des Kosinus in (B1) bzw (B2) für den Aufpunktflügel ($n=1$). Der Beitrag dieses approximierten Potentials zur Tangentialgeschwindigkeit U_q ist

$$\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_{q,w}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R F(s) ds \quad (B3)$$

wobei $F(s)$ in (41) definiert ist. Der Integrand der Funktion $F(s)$ hat eine 3-fache Nullstelle im Nenner und nur eine einfache Nullstelle im Zähler. Zur Abspaltung dieser Singularität wird $F_a(s)$ aus (41) benutzt. Die Funktion F_a kann über s analytisch integriert werden (die \pm sind (41) zu entnehmen)

$$\frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R F_a(s) ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{q(r, \chi')}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} \{ t_-(R-r, \chi') + t_+(r-R_b, \chi') \} \frac{d\chi'}{\chi'-\chi} \quad (B4)$$

Für $v \rightarrow v'$ gilt $t_- \rightarrow 1$, $t_+ \rightarrow 1$. Der Integrand wird stetig, wenn man

$$\frac{2q(r, \chi')}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} \frac{1}{\chi-\chi'}$$

vom Integranden abzieht und separat behandelt (vergleiche Anhang C),

was in der Formel (40) geschehen ist. Schließlich sind in (33) die Nachbarflügel sowie die Differenz zwischen dem exakten Beitrag des ersten Flügels zum Geschwindigkeitspotential und $\phi_{q,w}$ durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{h_0^2+r^2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \phi_q(r, \theta, \Delta=0; t=t_0) - \phi_{q,w}(r, \theta) \right\} \quad (B5) \\ &= \frac{1}{\sqrt{h_0^2+r^2}} \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{R_b}^R ds \, \Gamma(s) \int_0^1 q(s, \chi') d\chi' \cdot \\ & \left\{ \frac{h_0^2(\theta-\theta') + rs \sin(\theta-\theta'+\theta_n)}{\sqrt{h_0^2(\theta-\theta')^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\theta-\theta'+\theta_n)}} - \delta(n,1) \frac{(h_0^2+rs)(\theta-\theta')}{\sqrt{(h_0^2+rs)(\theta-\theta')^2 + (s-r)^2}} \right\} \\ & \theta_n = -2\pi(n-1)/N \end{aligned}$$

zusammengefaßt, wobei $\delta(n,1)$ für $n \neq 1$ verschwindet und für $n=1$ den Wert 1 annimmt.

Anhang C Darstellung der Quellverteilung $q(s, \chi)$

Wir berechnen die Quellverteilung $q(s, \chi)$ aus der genäherten Form der Gleichung (8)

$$\frac{q(s, \chi')}{2} = \frac{\bar{U}(s)}{\Gamma(s)} \frac{\partial}{\partial v'} y_d(s, \chi') \quad (C1)$$

\bar{U} entsteht aus einer Mittelung der Tangentialgeschwindigkeit $U_\theta(s, \theta - \Omega t)$ über alle Winkelstellungen $-\Omega t + \theta'$. Die auf die Tiefe bezogene Dickenlinie wird in eine Sinus-Reihe entwickelt

$$\frac{y_d(s, \chi')}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2} (D_1(s) \sin \tau' + D_2(s) \sin 2\tau' + \dots) \quad , \quad \chi' = (1 - \cos \tau')/2 \quad (C2)$$

Die Einführung der trigonometrischen Variablen τ' führt über

$$\frac{\partial}{\partial \chi'} = \frac{2}{\sin \tau'} \frac{\partial}{\partial \tau'} \quad (C3)$$

zur Darstellung

$$\frac{q(s, \chi')}{2 \Omega R} = \frac{\bar{U}(s)}{\Omega R \sin \tau'} (D_1(s) \cos \tau' + 2 D_2(s) \cos 2\tau' + \dots) \quad (C4)$$

Mit

$$\frac{q(s, \chi') \sin \tau'}{2 \Omega R \sqrt{1+c^2(\chi')}} = \frac{\bar{U}(s)}{\Omega R} (D_1^*(s) \cos \tau' + D_2^*(s) \cos 2\tau' + \dots) \quad (C5)$$

und unter Ausnutzung der Integrationsformel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n \tau'}{\cos \tau' - \cos \tau} d\tau = \frac{\sin n \tau}{\sin \tau} \quad (C6)$$

läßt sich das Integral aus (42) analytisch auswerten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{q(r, \chi')}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} \frac{d\chi'}{\chi-\chi'} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{q(r, \chi')}{\sqrt{1+c^2(\chi')}} \frac{\sin \tau' d\tau'}{\cos \tau' - \cos \tau} \\ &= \bar{U}(r) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(D_1^*(r) \cos \tau' + D_2^*(r) \cos 2\tau' + \dots)}{\cos \tau' - \cos \tau} d\tau' \quad , \quad \chi = (1 - \cos \tau) / 2 \end{aligned} \quad (C7)$$

ANHANG D Linearisierung des Druckbeiwertes $c_p(\pm)$

Die Bernoulli'sche Gleichung lautet mit U_∞ als ungestörte Zuströmung im nichtrotierenden System und p_∞ als zugehöriger Druck [4]

$$\begin{aligned} \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U_\infty^2 &= \\ &= \frac{p(\pm)}{\rho} + \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial \phi_q}{\partial t} + \frac{1}{2} (U_\gamma + U_q + \bar{u}_\infty \sin \delta)^2 + \frac{1}{2} W_\gamma^2 + \frac{1}{2} (V_\gamma - \bar{u}_\infty \cos \delta)^2 \end{aligned} \quad (D1)$$

dabei ist die Strömungsgeschwindigkeit im nichtrotierenden System in Tangential-, Normal- und Radialkomponente unterteilt worden. Alle Geschwindigkeiten und Ableitungen sind auf der tragenden Fläche zu nehmen. Es gilt jetzt für die Ableitung der Potentiale nach der Zeit ((A5) und (28))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial t} &= \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_\gamma + \phi_\gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] = \Omega r \cos \delta U_\gamma + \Omega r \sin \delta V_\gamma + \phi_\gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial \phi_q}{\partial t} &= \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_q \cong \Omega r \cos \delta U_q \end{aligned} \quad (D2)$$

wobei $\phi_\gamma [\partial \gamma / \partial t]$ bedeutet, daß im Potential ϕ_γ statt γ nun $\partial \gamma / \partial t$ mit der Kernfunktion zu multiplizieren ist. Unter Berücksichtigung der Relationen aus (D2) wird aus (D1)

$$\begin{aligned} \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U_\infty^2 &= \frac{P(\pm)}{\rho} + \frac{1}{2} (U_\gamma + U_q + \bar{u}_o \sin \delta + \Omega r \cos \delta)^2 + \frac{1}{2} (V_\gamma - \bar{u}_o \cos \delta + \Omega r \sin \delta)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} W_\gamma^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \delta - \bar{u}_o \sin \delta \Omega r \cos \delta + \bar{u}_o \cos \delta \Omega r \sin \delta - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \delta + \phi_\gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (D3)$$

Gemäß der Stromlinienbedingungen (9) und (12) kann in (D3) das Quadrat der Normalgeschwindigkeiten in guter Näherung vernachlässigt werden. Weiteres Zusammenfassen ergibt dann mit $U_o = \bar{u}_o \sin \delta + \Omega r \cos \delta$

$$\frac{P_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U_\infty^2 = \frac{P(\pm)}{\rho} + \frac{1}{2} (U_\gamma + U_q + U_o)^2 + \frac{1}{2} W_\gamma^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 + \phi_\gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \quad (D4)$$

Daraus folgt mit $V_\infty^2 = \Omega^2 r^2 + U_\infty^2$, $R_\mp = 1 / \sqrt{1 + (\gamma_D')^2}$

$$\frac{P_\infty - P(\pm)}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = -1 + \frac{1}{V_\infty^2} [(U_o + U_\gamma + U_q) \cdot R_\mp]^2 + \frac{W_\gamma^2}{V_\infty^2} + \frac{2}{V_\infty^2} \phi_\gamma \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \quad (D5)$$

Vernachlässigung von $(U_{\gamma\eta} + U_{q\eta})^2$ sowie $U_o/V_\infty \cong 1$ und

$$U_o U_{\gamma\eta} + \phi_{\gamma\eta} \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \cong \pm \frac{1}{2} \gamma_\eta(r, \varphi, \Omega t) \cdot U_o \quad (D6)$$

(man versehe (A30) mit dem Faktor U_o und (A37) mit $-im\Omega$, ersetze t_o durch t und nutze $U_o \bar{\theta}(r) - \Omega l(r) \cong 0$ aus) ergibt schließlich die Druckbeiwerte (15) und (17).

Anhang E Transformation der instationären Stromlinienbedingung in lineare Gleichungssysteme

Die Entwicklung der axialen Zuströmung U in Umfangsrichtung lautet mit s und θ' als Koordinaten des mitrotierenden Systems

$$\bar{u}_o(s, \theta' - \Omega t) = U_{SH} \left(1 + \sum_{m=-M}^M \Lambda_m(s) e^{im(\theta' - \Omega t)} \right) \quad (E1)$$

Diese Darstellung von U ist in die ausführliche Formulierung der Stromlinienbedingung (9) d. h. in

$$\begin{aligned} V_{\gamma_o}(s, \theta', \Omega t) &= (\Omega s \cos \delta' + \bar{u}_o \sin \delta') y'_s - (\Omega s \sin \delta' - \bar{u}_o \cos \delta') \\ y'_s &= \partial / \partial \chi' (y_s(s, \chi') / l(s)) \end{aligned} \quad (E2)$$

einzusetzen. Der Produktansatz (46) für die Wirbelbelegung γ_o erlaubt die Schreibweise (vergleiche Anhang A)

$$\begin{aligned} V_{\gamma_o} &= \sum_{m=-M}^M \sum_{ji} B_{ojim} N_{ojim}(s, \theta') e^{-im\Omega t} \\ &= \sum_{m=-M}^M \vec{N}_m(s, \theta') \vec{B}_m e^{-im\Omega t} \end{aligned} \quad (E3)$$

wobei der Übersicht halber die Indizierung "o" in \vec{N}_m und \vec{B}_m weggelassen wurde und die j,i-Indizierung durch die Vektordarstellung entfällt. Auf der rechten Seite der Stromlinienbedingung (E2) fassen wir durch

$$\begin{aligned} V_s &= (\Omega s \cos \delta' + (1 + \Lambda_o(s)) U_{SH} \sin \delta') y'_s \\ &\quad - (\Omega s \sin \delta' - (1 + \Lambda_o(s)) U_{SH} \cos \delta') \end{aligned} \quad (E4)$$

den stationären Anteil zusammen. Wir erhalten in jedem Aufpunkt $s, \theta', \Omega t$ die lineare Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{m=-M}^M \left\{ \vec{N}_m(s, \theta') \vec{B}_m - U_{SH} \Lambda_m(s) (\sin \delta' y'_s + \cos \delta') e^{im\theta'} \right\} e^{-im\Omega t} \\ + \vec{N}_o(s, \theta') \vec{B}_o - N_s(s, \theta') = 0 \end{aligned} \quad (E5)$$

wobei \sum' das Auslassen von $m=0$ bei der Summenbildung bedeutet. Da

diese Gleichung für alle Winkelstellungen $-\Omega t$ zu erfüllen ist, hat der Term in $\{ \}$ separat zu verschwinden.

Sowohl \bar{u}_0 als auch γ_0 sind reell. Demnach ist γ_0 ebenso durch die reelle Reihe

$$\begin{aligned} & \frac{1(s)}{2\Omega R^2} \gamma_0(s, \chi(\varphi)) = \\ & = \sum_{m=0}^M (\vec{b}_{cm} \cos m\varphi + \vec{b}_{sm} \sin m\varphi) (g_1 \Phi_{00}, g_1 \Phi_{01}, \dots, g_J \Phi_{0I}) \end{aligned} \quad (E6)$$

und \bar{u}_0 durch

$$\bar{u}_0(s, \varphi) = U_{SH} \left(1 + \sum_{m=0}^M (\lambda_{cm}(s) \cos m\varphi + \lambda_{sm}(s) \sin m\varphi) \right) \quad (E7)$$

darstellbar. (Die Funktionen Φ_{0i} und g_j beschreiben gemäß (47) die Veränderlichkeit der Wirbeldichte in Tiefen- bzw radialer Richtung).

Dann gilt für die komplexen Koeffizienten der Wirbeldichte und Zuströmung

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\pm|m|} &= \frac{1}{2} \vec{b}_{c|m|} \mp \frac{1}{2} i \vec{b}_{s|m|} & |m| \neq 0 \\ \Lambda_{\pm|m|}(s) &= \frac{1}{2} \lambda_{c|m|}(s) \mp \frac{1}{2} i \lambda_{s|m|}(s) & |m| \neq 0 \end{aligned} \quad (E8)$$

Wir erhalten aus (E5) für positive $m \neq 0$ (Re:Realteil Im:Imaginärteil)

$$\{ \text{Re}(\vec{N}_m(s, \theta')) + i \text{Im}(\vec{N}_m(s, \theta')) \} \{ \vec{b}_{cm} - i \vec{b}_{sm} \} = X_m(s, \theta') \quad (E9)$$

$$X_m(s, \theta') = \{ \lambda_{cm}(s) - i \lambda_{sm}(s) \} U_{SH} \{ \sin \delta' y'_s + \cos \delta' \} \{ \cos m\theta' + i \sin m\theta' \}$$

und somit für die Vektoren \vec{b}_{cm} und \vec{b}_{sm} die 2 gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{N}_m(s, \theta')) \cdot \vec{b}_{cm} + \text{Im}(\vec{N}_m(s, \theta')) \cdot \vec{b}_{sm} &= \text{Re}(X_m(s, \theta')) \\ \text{Im}(\vec{N}_m(s, \theta')) \cdot \vec{b}_{sm} - \text{Re}(\vec{N}_m(s, \theta')) \cdot \vec{b}_{cm} &= \text{Im}(X_m(s, \theta')) \end{aligned} \quad (E10)$$

Betrachtet man negative m , so ergibt sich mit

$$\vec{N}_{-|m|}(s, \theta') = \text{Re}(\vec{N}_{|m|}(s, \theta')) - i \text{Im}(\vec{N}_{|m|}(s, \theta')) \quad (E11)$$

(wie es sein sollte) das gleiche Ergebnis.

Aus (E10) werden 2 gekoppelte überbestimmte Gleichungssysteme (die man auch zu einem Gleichungssystem zusammenfassen kann), wenn man den

Vektor \vec{N}_m in einer Zahl von Aufpunkten s, θ' ausrechnet, die die Dimension des Vektors \vec{b}_{cm} bzw. \vec{b}_{sm} überschreitet. Faßt man beide Systeme zu einem einzigen Gleichungssystem zusammen, so lassen sich die Lösungsvektoren \vec{b}_{cm} und \vec{b}_{sm} mit Hilfe eines Fehlerquadratverfahrens bestimmen. Die Zahl der Aufpunkte sollte sich dabei zur Dimension der Lösungsvektoren wie 3/2 verhalten.

ANHANG F Berechnung von $H_{\eta_i}^1(v) - P_{\eta_i}(\cdot)$ aus (59) und $-P_{\eta_i}(v)$ aus (60) sowie der Integrale aus (58)

Die in (58), (59) und (60) angegebenen Formeln basieren auf der Auswertung der Integrale

$$\int_0^1 f_3(x') \frac{dx'}{x-x'}, \int_0^1 f_2(x') \frac{dx'}{x-x'}, \int_0^1 f_1(x') \frac{dx'}{x-x'}, \int_0^1 1/f_1(x') \frac{dx'}{x-x'} \quad (F1)$$

$$f(x') = |(1-x')/x'|$$

Für die Auswertung dieser Integrale in dem Intervall $0 \leq v \leq 1$ transformieren wir wie folgt

$$\frac{x'}{1-x'} = t^4, \quad x' = \frac{t^4}{1+t^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx'}{dt'} = \frac{4t^3}{(1+t^4)^2} \quad (F2)$$

$$\frac{x}{1-x} = t^4, \quad x = \frac{t^4}{1+t^4} \quad \Rightarrow \quad x-x' = \frac{t^4 - t'^4}{(1+t'^4)(1+t^4)}$$

Wie erhalten

$$\int_0^1 f_3(x') \frac{dx'}{x-x'} = 4 \int_0^\infty \left(\frac{1+t^4}{(t^4-t'^4)(1+t'^4)} \right) dt' = 4 \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t'^4} + \frac{1}{t^4-t'^4} \right) dt' = \pi \left(\sqrt{2} + \frac{1}{t^3} \right)$$

$$\int_0^1 f_2(x') \frac{dx'}{x-x'} = 4 \int_0^\infty \left(\frac{t'}{1+t'^4} + \frac{t'}{t^4-t'^4} \right) dt' = \pi \quad (F3)$$

$$\int_0^1 f_1(x') \frac{dx'}{x-x'} = 4 \int_0^\infty \left(\frac{t'^2}{1+t'^4} + \frac{t'^2}{t^4-t'^4} \right) dt' = \pi \left(\sqrt{2} - \frac{1}{t} \right)$$

$$\int_0^1 1/f_1(x') \frac{dx'}{x-x'} = 4 \int_0^\infty \left(\frac{t'^4}{1+t'^4} + \frac{t'^4}{t^4-t'^4} \right) dt' = 4 \int_0^\infty \left(\frac{t'^4}{t^4-t'^4} - \frac{1}{1+t'^4} \right) dt' = \pi (t - \sqrt{2})$$

wobei das Ergebnis der Integration einer Integraltabelle (Bronstein) entnommen wurde. Für die Auswertung der Integrale aus (F1) in $1 \leq x \leq \infty$ transformieren wir

$$\frac{x}{x-1} = t^4, \quad x = \frac{t^4}{t^4-1} \quad \Rightarrow \quad x-x' = \frac{t^4+t'^4}{(t^4-1)(1+t'^4)} \quad (\text{F4})$$

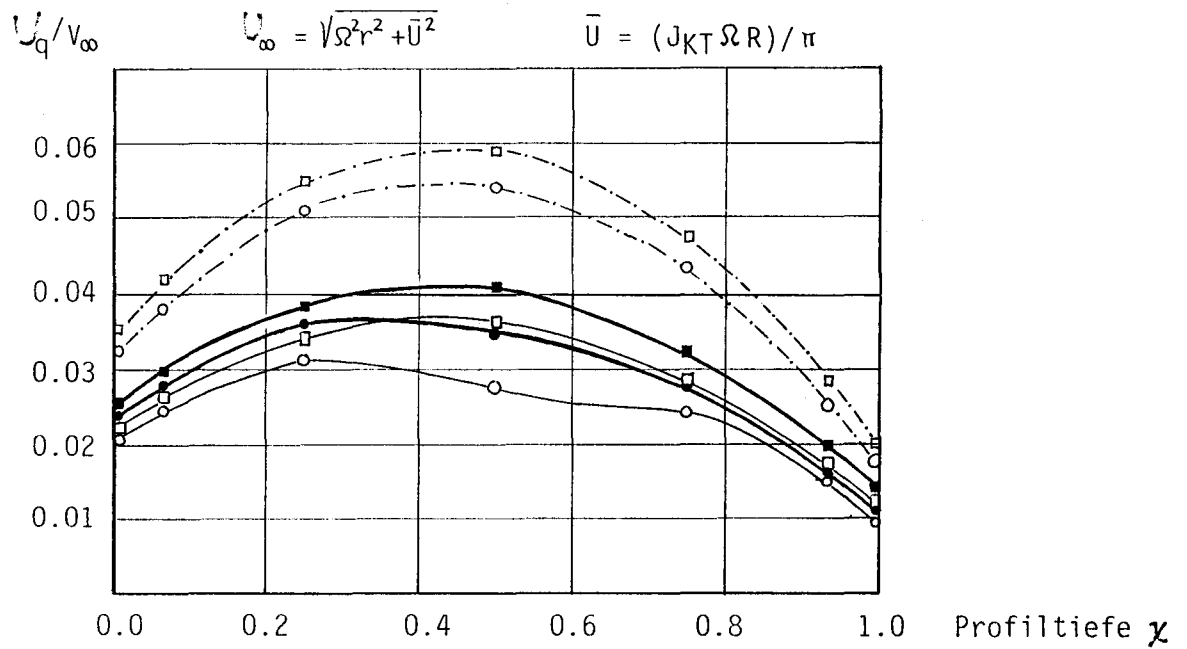
Man erhält

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_3(x') \frac{dx'}{x-x'} &= 4 \int_0^\infty \frac{t^4-1}{(t^4+t'^4)(1+t'^4)} dt' = 4 \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t'^4} - \frac{1}{t^4+t'^4} \right) dt' = \pi \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{t^3} \right) \\ \int_0^1 f_2(x') \frac{dx'}{x-x'} &= 4 \int_0^\infty \left(\frac{t^1}{1+t'^4} - \frac{t^1}{t^4+t'^4} \right) dt' = \pi \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \\ \int_0^1 f_1(x') \frac{dx'}{x-x'} &= 4 \int_0^\infty \left(\frac{t^{12}}{1+t'^4} - \frac{t^{12}}{t^4+t'^4} \right) dt' = \pi \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \\ \int_0^1 1/f_1(x') \frac{dx'}{x-x'} &= 4 \int_0^\infty \left(\frac{t^{14}}{1+t'^4} - \frac{t^{14}}{t^4+t'^4} \right) dt' = 4 \int_0^\infty \left(\frac{t^4}{t^{14}+t^4} - \frac{1}{1+t'^4} \right) dt' = \pi \sqrt{2} (t-1) \end{aligned} \quad (\text{F5})$$

wobei das Ergebnis der Integration wieder einer Integraltabelle entstammt. Die Integration von

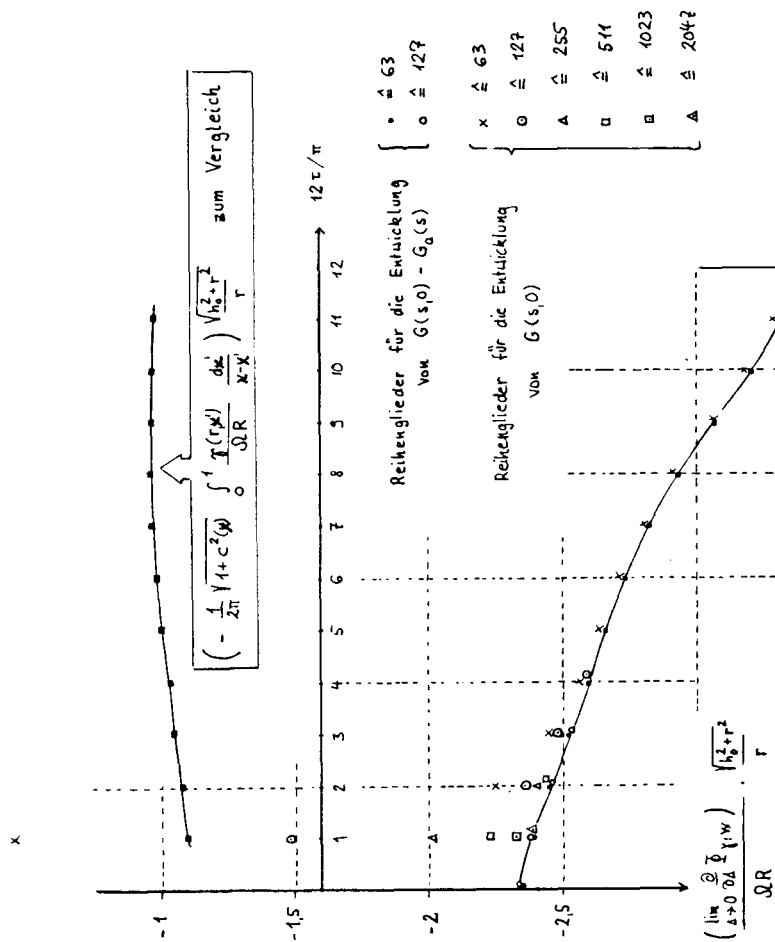
$$\begin{aligned} \int_0^1 x' f_k(x') \frac{dx'}{x-x'} \quad , \quad \int_0^1 \frac{x'}{f_1(x')} \frac{dx'}{x-x'} \\ \int_0^1 x'^{12} f_k(x') \frac{dx'}{x-x'} \quad , \quad \int_0^1 \frac{x'^{12}}{f_1(x')} \frac{dx'}{x-x'} \end{aligned} \quad (\text{F6})$$

läßt sich durch geeignete Umformungen (partielle Integration, Partialbruchzerlegung) auf die Integrale in (F3) und (F5) zurückführen.



	U_q nach Formel (40)	U_q nach Formel (42)
$r/R = 0.931$	—○—	—□—
$r/R = 0.818$	—●—	—■—
$r/R = 0.590$	- - ○ - -	- - □ - -

Abb. 10 "Sydney Express" Propeller, $J_{KT} = 0.7$: Quelleninduzierte Tangentialgeschwindigkeit U_q über Profiltiefe χ , berechnet zum einen durch vollständige Auswertung des Geschwindigkeitspotentials (Formel (40)) und zum anderen durch die Näherungsformel (42).



Auswertung von $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \Delta} \phi_{\gamma, w}(r, \theta, \Delta)$ an einem Testpropeller auf dem Radius $r/R = 0,5955$ für verschiedene transformierte Tiefenkoordinaten ($\theta = \theta_0(r) + \bar{\theta}(r)(1 - \cos t)/2$) bei versuchsweise angenommener Wirbelbelegung $\gamma(s, v) / (\Omega R^2) = (1/l(s)) \sin \lambda' \operatorname{ctg}(\tau/2)$ (vergl. (4.2)). Gemäß (A.14) ist dazu

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{R_b}^R \frac{\partial/\partial s G(s,0)}{r-s} ds$$

mit $G(s, \Delta)$ aus (3.12) zu ermitteln. Dieser Ausdruck kann bestimmt werden, indem man

- a) $G(s, 0)$ in eine Sinus-Reihe entwickelt, sodas die Integration über die Reihenglieder analytisch erfolgen kann (vergl. (A28))
- b) die Differenz $G(s, 0) - G_\alpha(s)$ mit G_α aus (3.15) unter Verwendung von 2 Kosinus-Gliedern und einer Sinus-Reihe darstellt, um analytisch rechnen zu können und die gemäß (A18) zusätzlich auftretenden Integrale berechnet und addiert.

Abb. 12 Beitrag von $\phi_{\gamma, w}$ zur wirbelinduzierten Normalgeschw. $r/R = 0,5955$

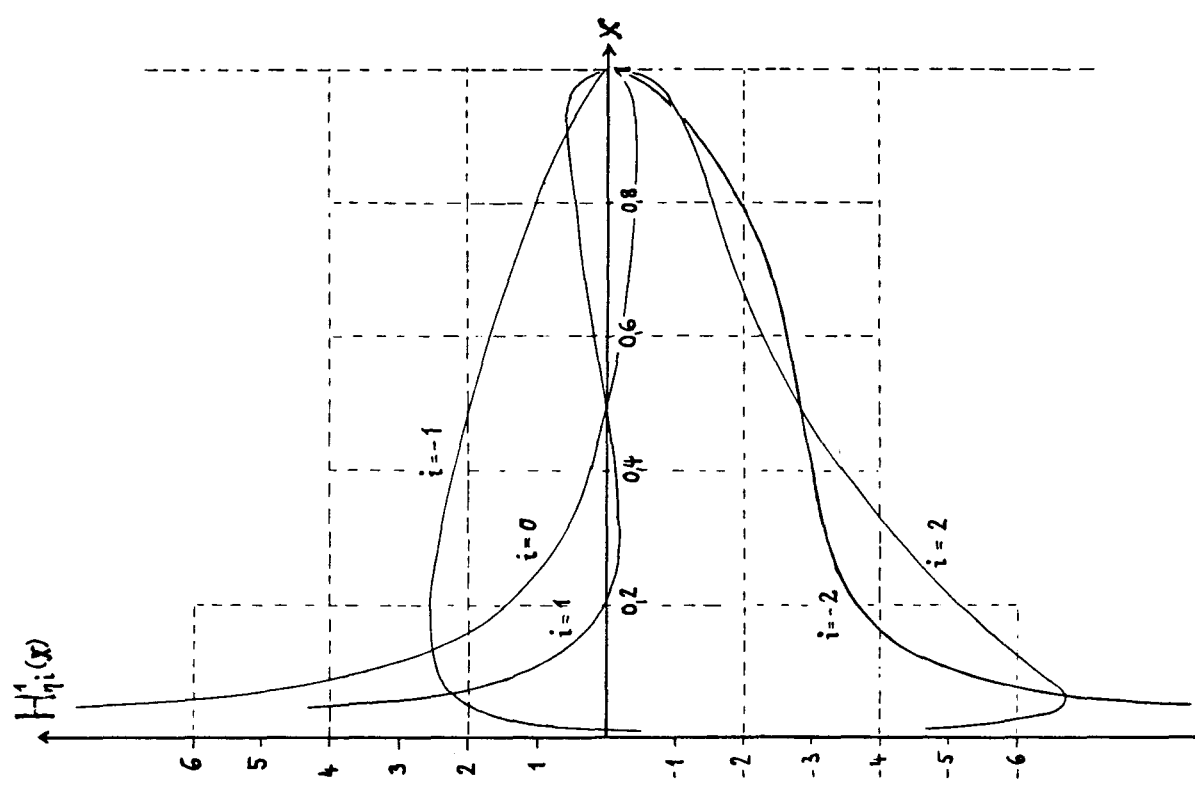
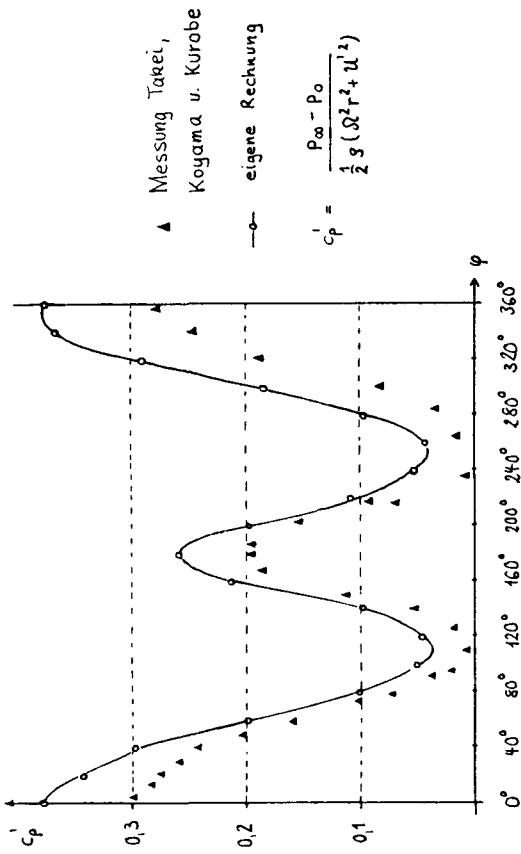


Abb. 11 Reihenansatz für γ_η



INSTANTANÄRER SAUGSEITEN-DRUCKBEIWEIT c_p^i MODELL-PROPELLER MP 0123

$r/R = 0,77$ | 20% Profiltiefe

Versuchsbedingungen

R	Ω	u^i	u^i (max)
12,5 cm	$2\pi \cdot 10,8$	2,43 m/s	3,53 m/s

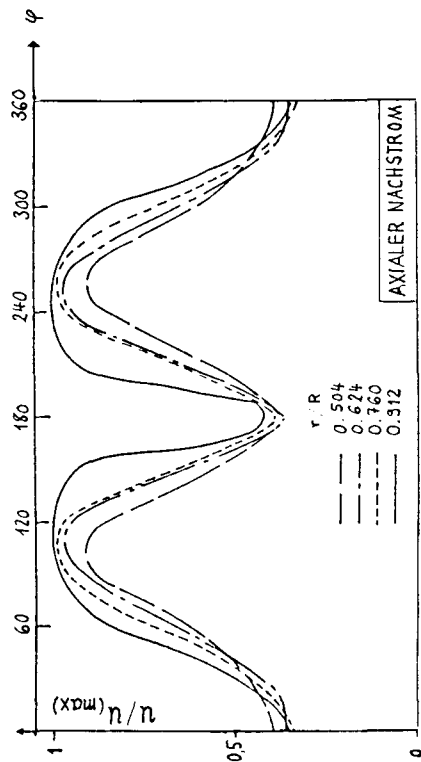
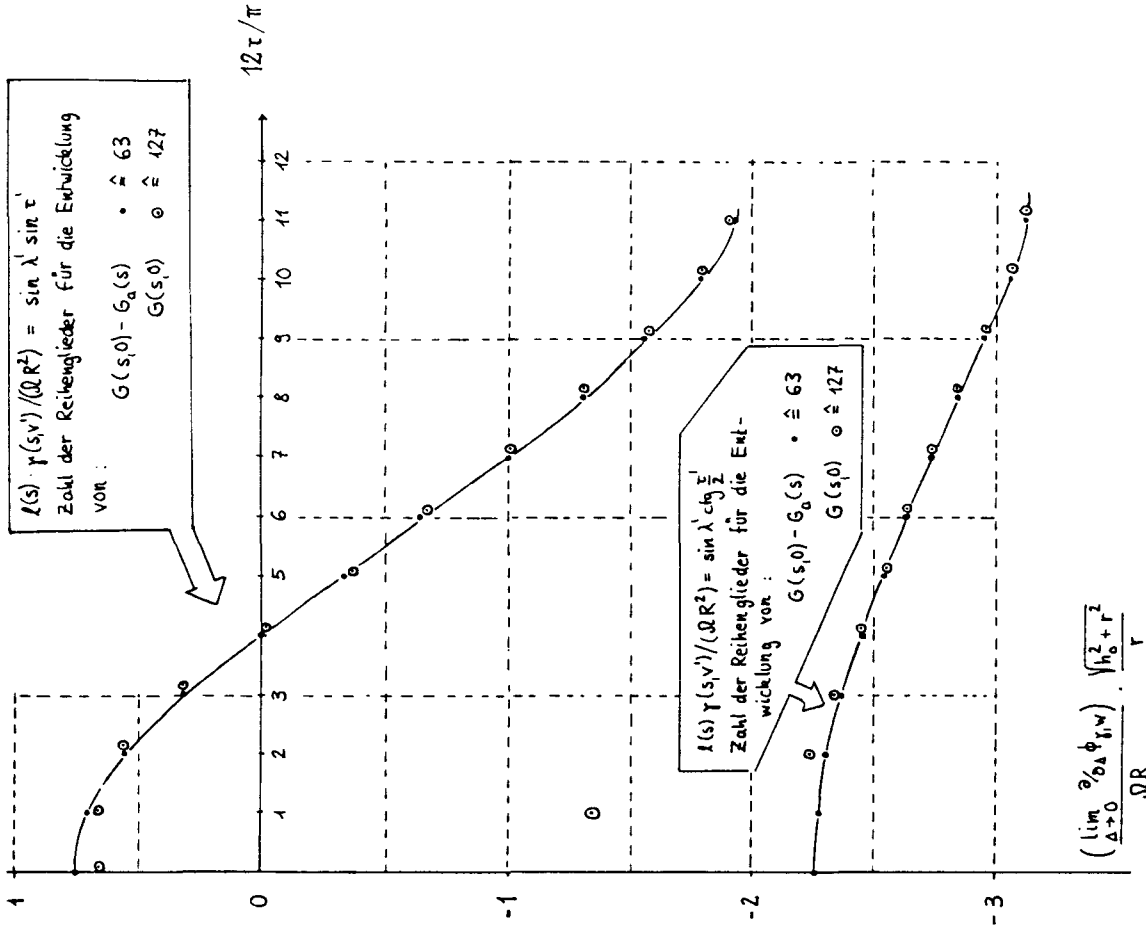


Abb. 14 Vergleich einer gemessenen und der nachgerechneten Druckverteilung

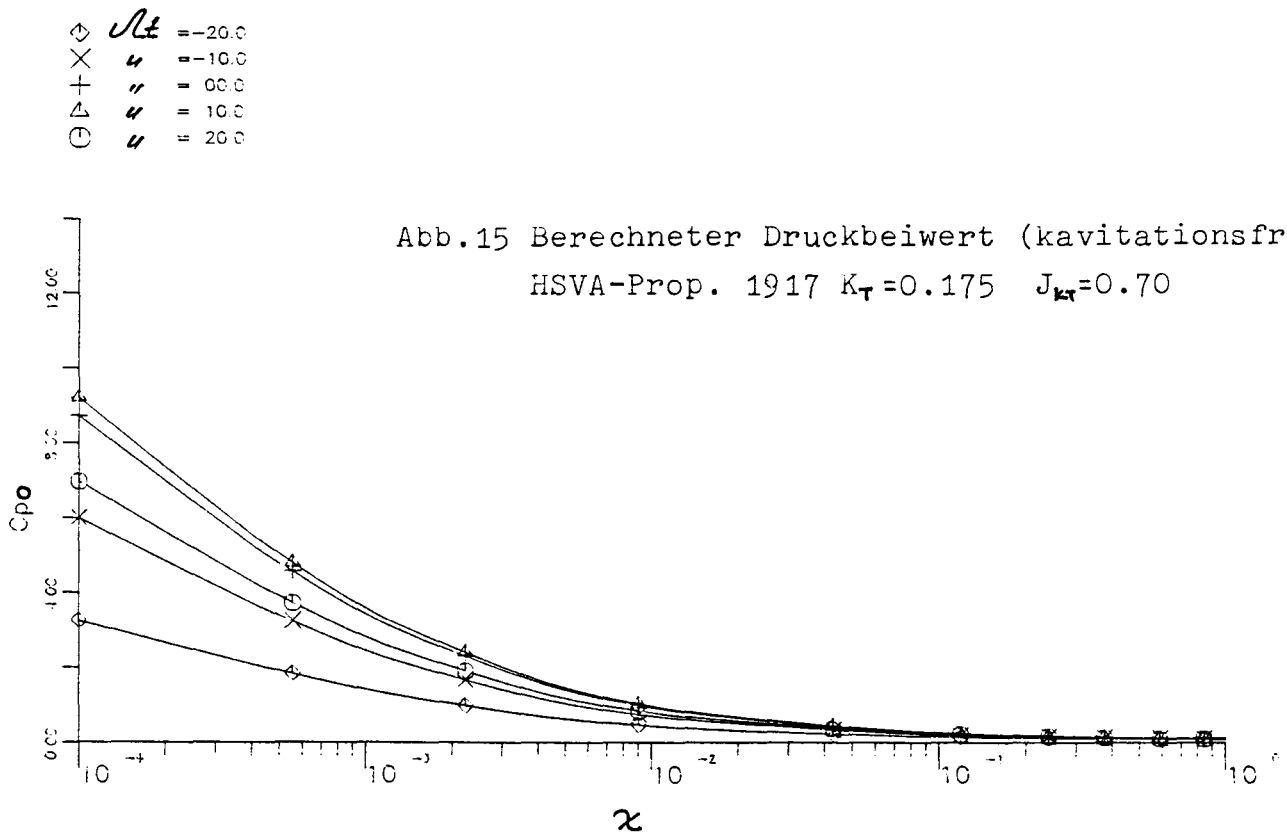


Zum Verständnis dieser Abbildung siehe Abb.11 . Die zusätzliche Kurve rührt von einer 2. versuchsweise angenommenen Wirbelbelegung

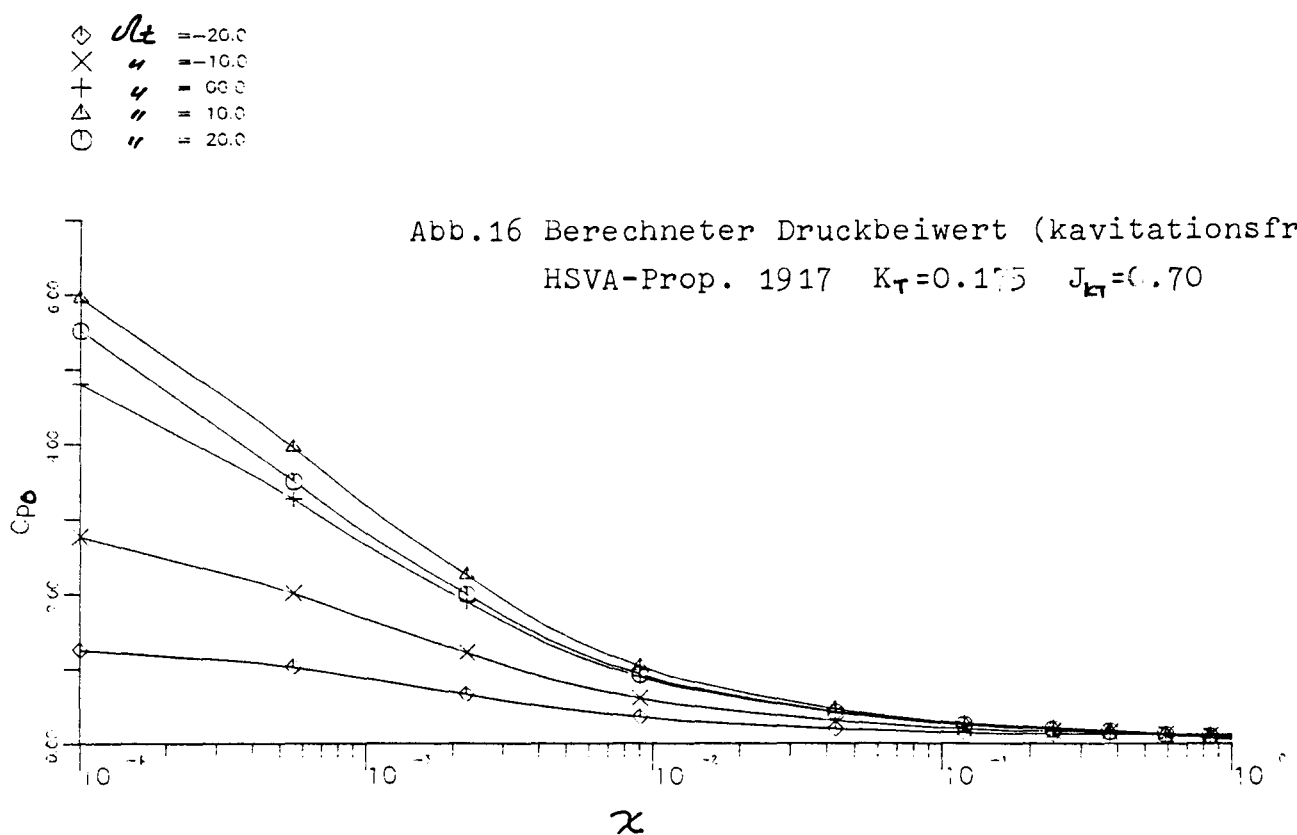
$$I(s) \gamma(s, v') / (\Omega R^2) = \sin \lambda' \sin \tau'$$

Abb. 13 Beitrag von $\phi_{\gamma, w}$ zur wirbelinduzierten Normalgeschwindigkeit, $r/R = 0,75$

"SYDNEY-EXPRESS" (MODELL) $r/R=0.97$

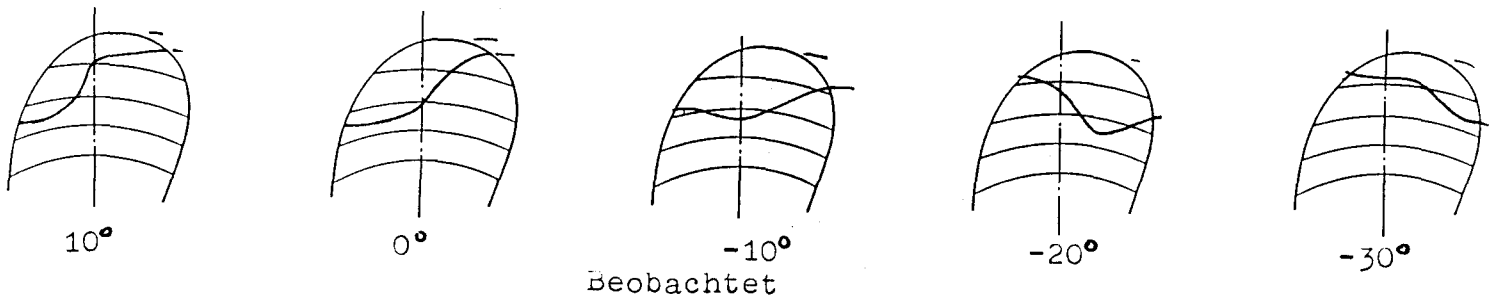
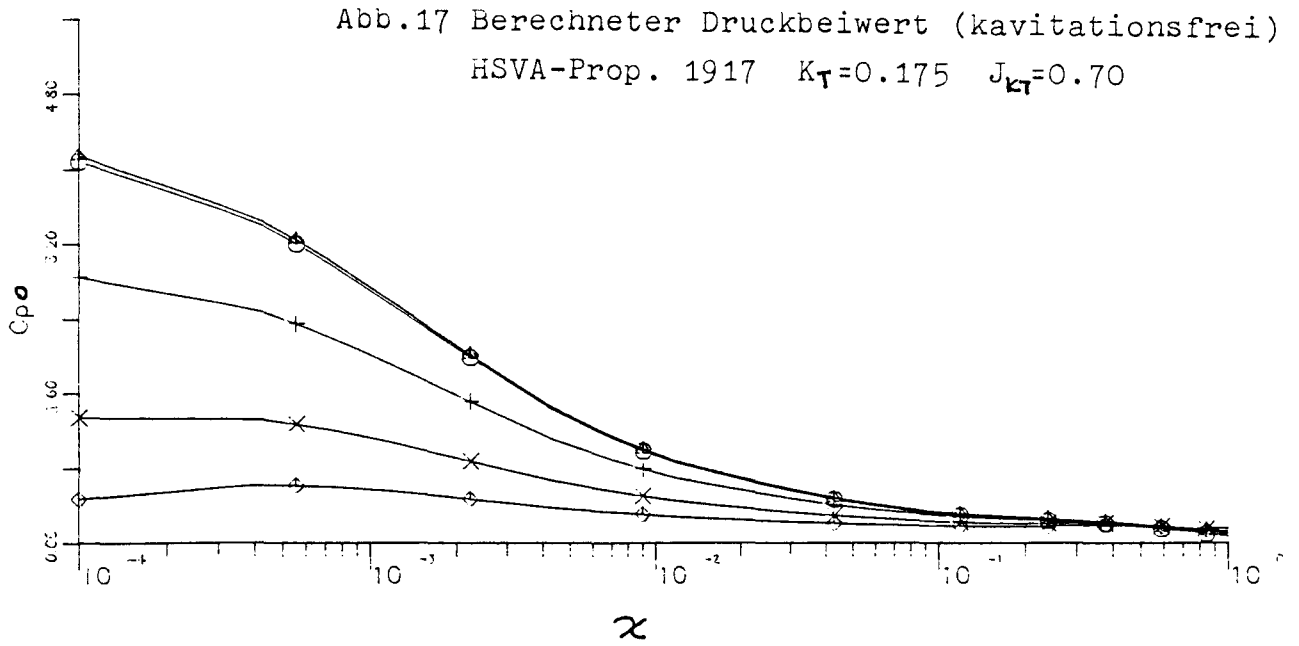


"SYDNEY-EXPRESS" (MODELL) $r/R=0.93$



"SYDNEY-EXPRESS" (MODELL) $r/R=0.88$

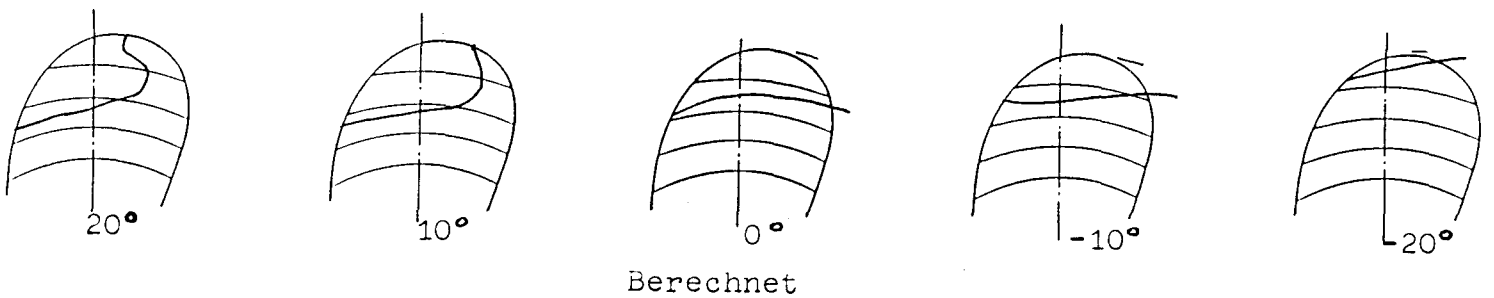
\odot Δ $+$ \times \diamond \square \circ \bullet
 Re = -20.0
 " = -10.0
 " = 00.0
 " = 10.0
 " = 20.0



Backbord

Abb.18 Kavitation am Modell
 HSVA-Prop. 1917

Steuerbord



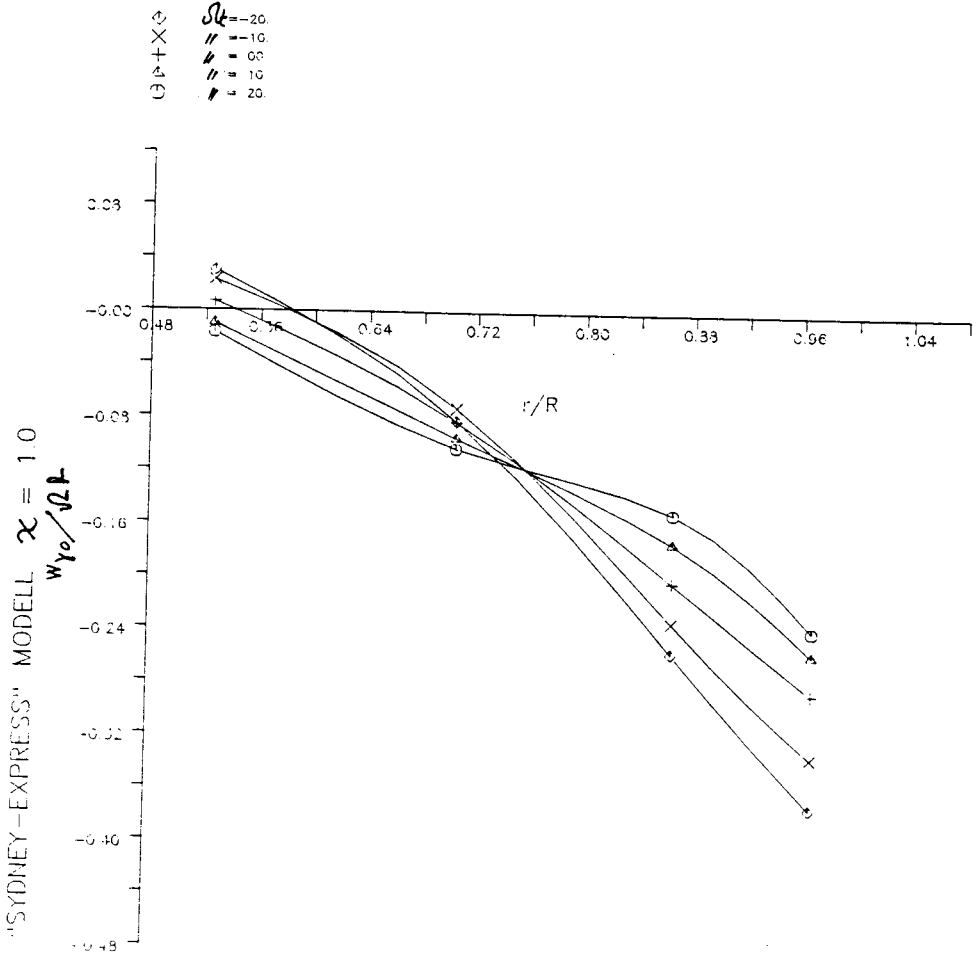
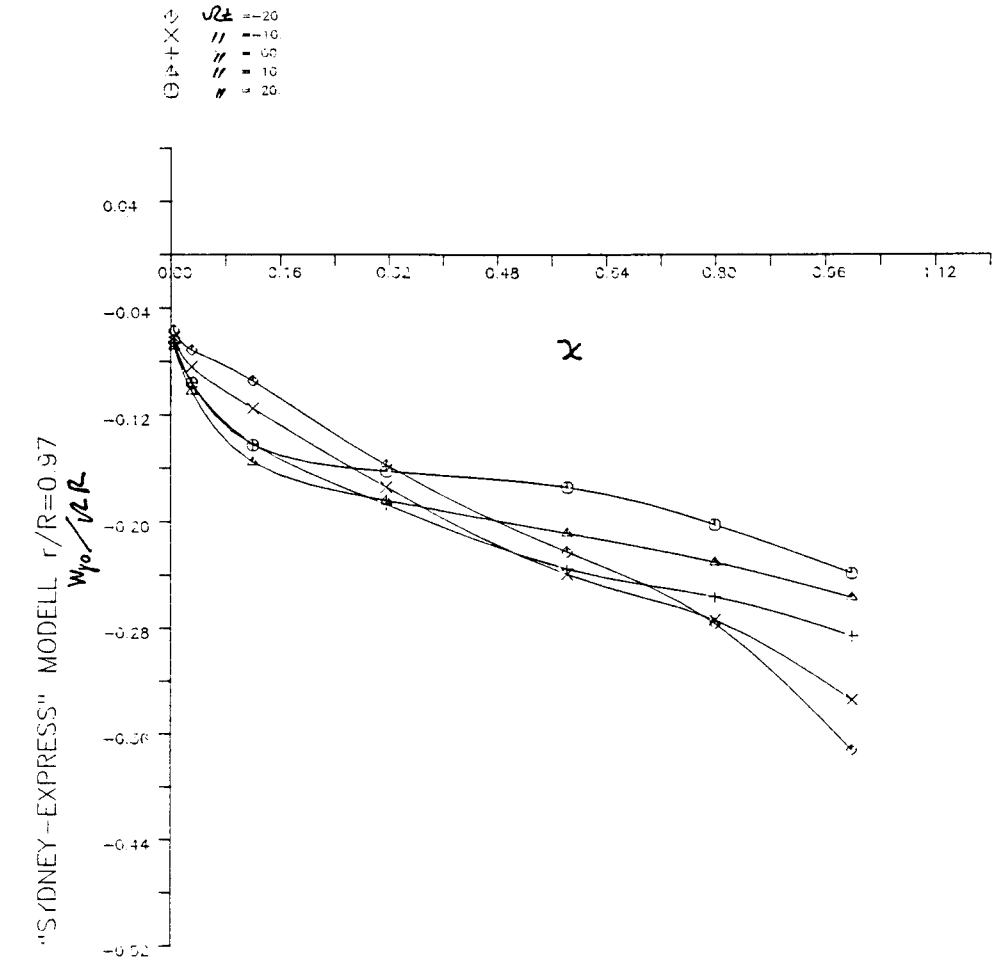


Abb.19 Wirbelinduzierte Radialgeschwindigkeit HSVA-Prop. 1917

Abb.20 Errechneter Druckverlauf bei Schichtkavitation, HSVA-Prop. 1917

"SYDNEY EXPRESS"-PROPELLER (MODELL) $J_{KT} = 0,70$
 $\varphi = 30^\circ$
 BERECHNETER DRUCKVERLAUF BEI KAVITATION

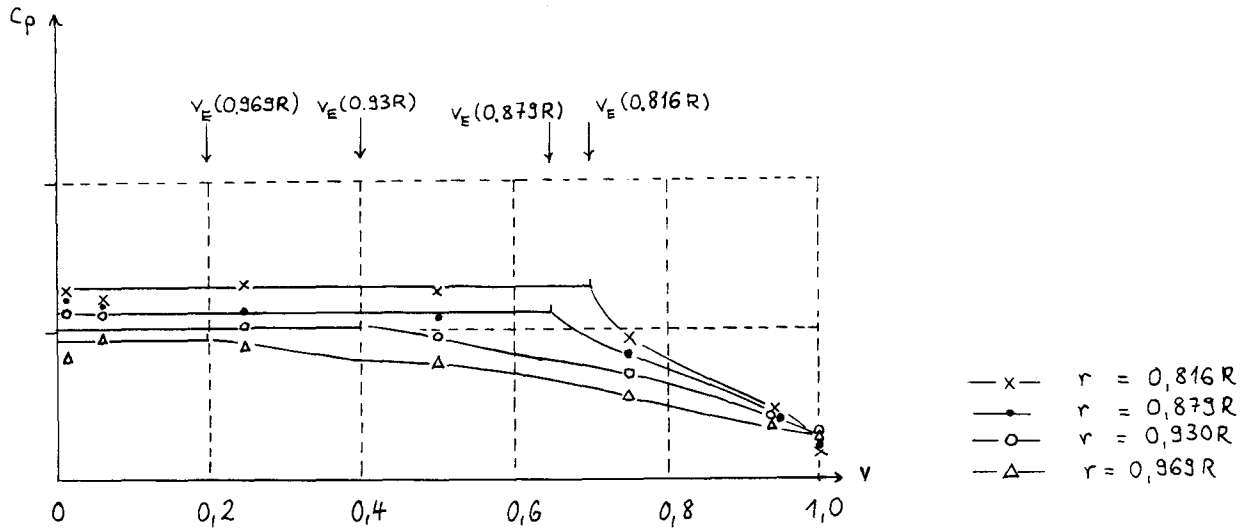
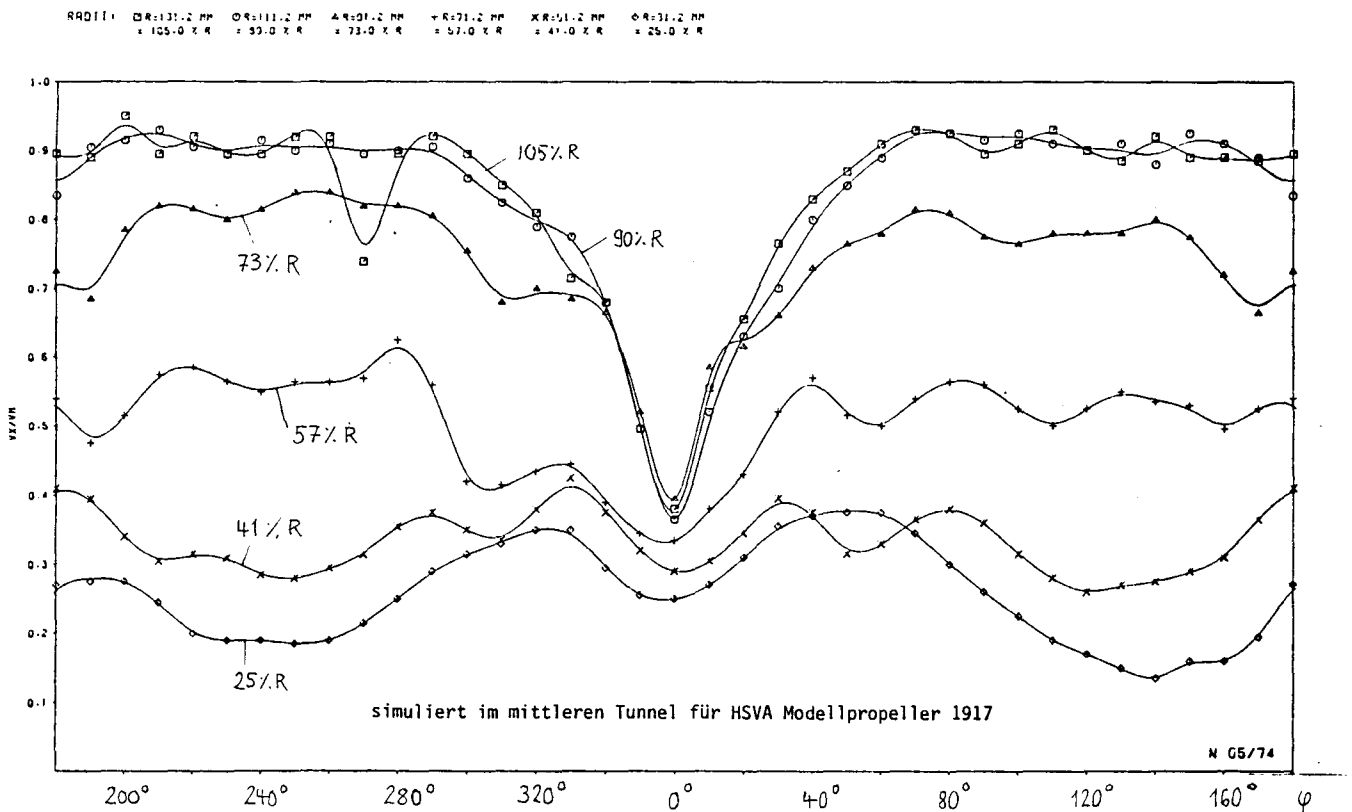
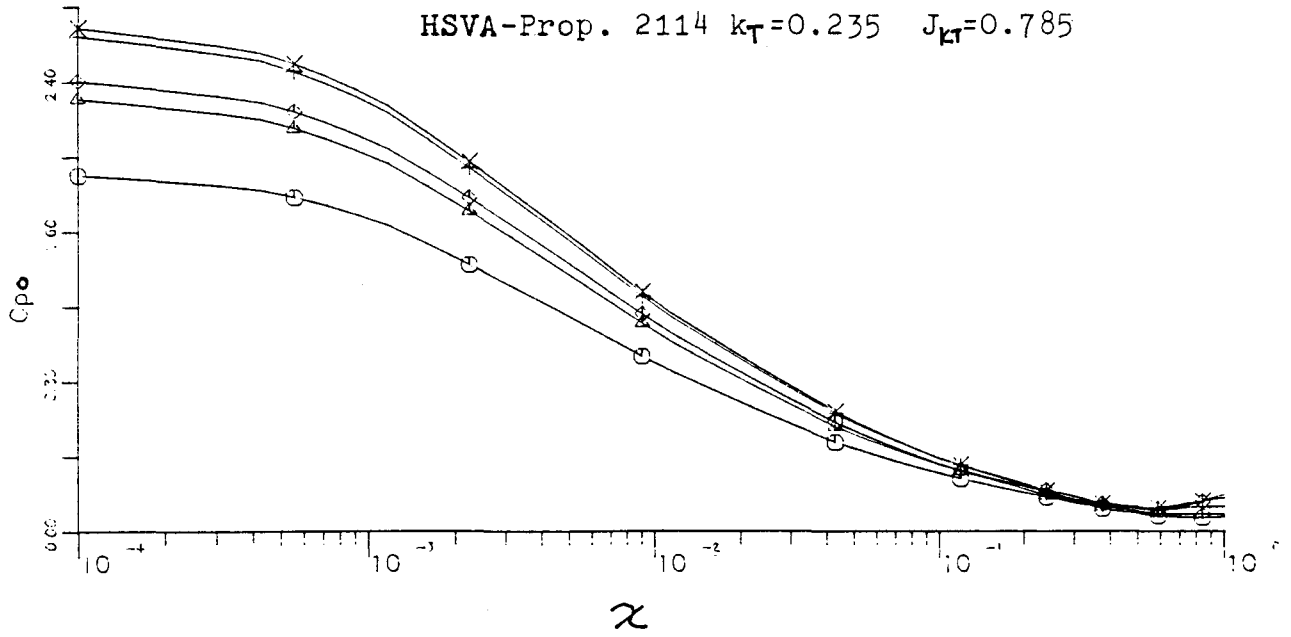


Abb 21 Nachstrom des Modellversuchs, HSVA-Prop. 1917



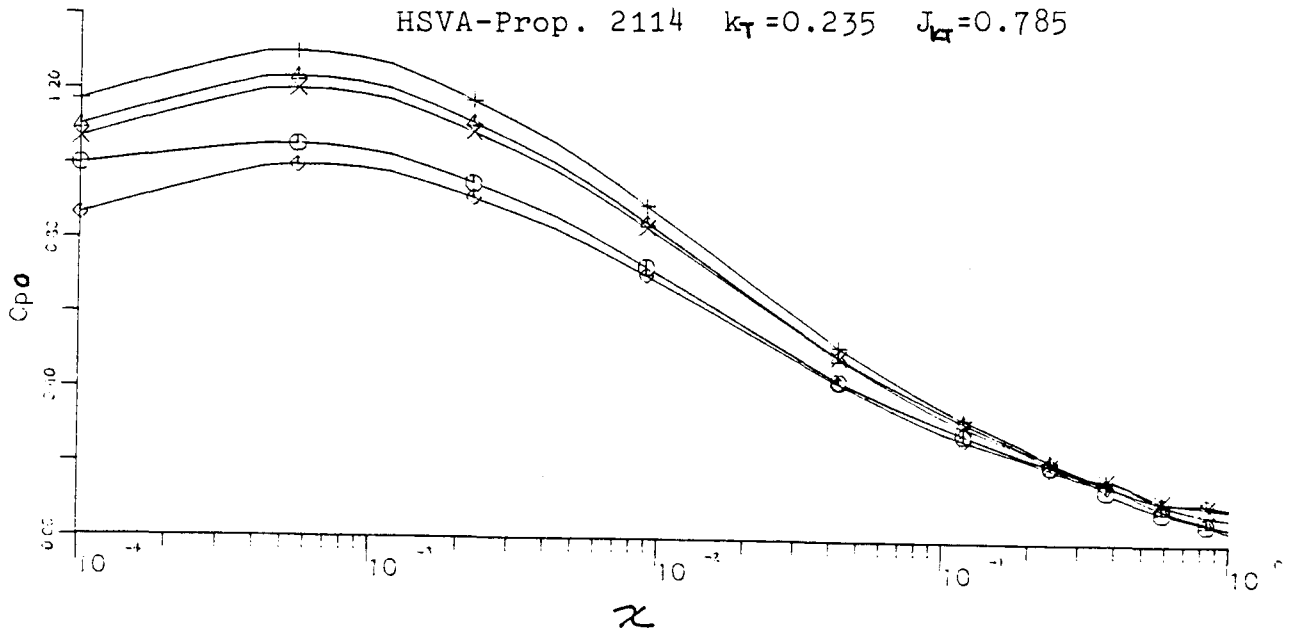
- ⊕ $At = -20.0$
- × " $= -10.0$
- + " $= 00.0$
- △ " $= 10.0$
- ⊖ " $= 20.0$

Abb.22 Berechneter Druckbeiwert (Kavitationsfrei)
 HSVA-Prop. 2114 $k_T=0.235$ $J_{kT}=0.785$



- ⊕ $At = -20.0$
- × " $= -10.0$
- + " $= 00.0$
- △ " $= 10.0$
- ⊖ " $= 20.0$

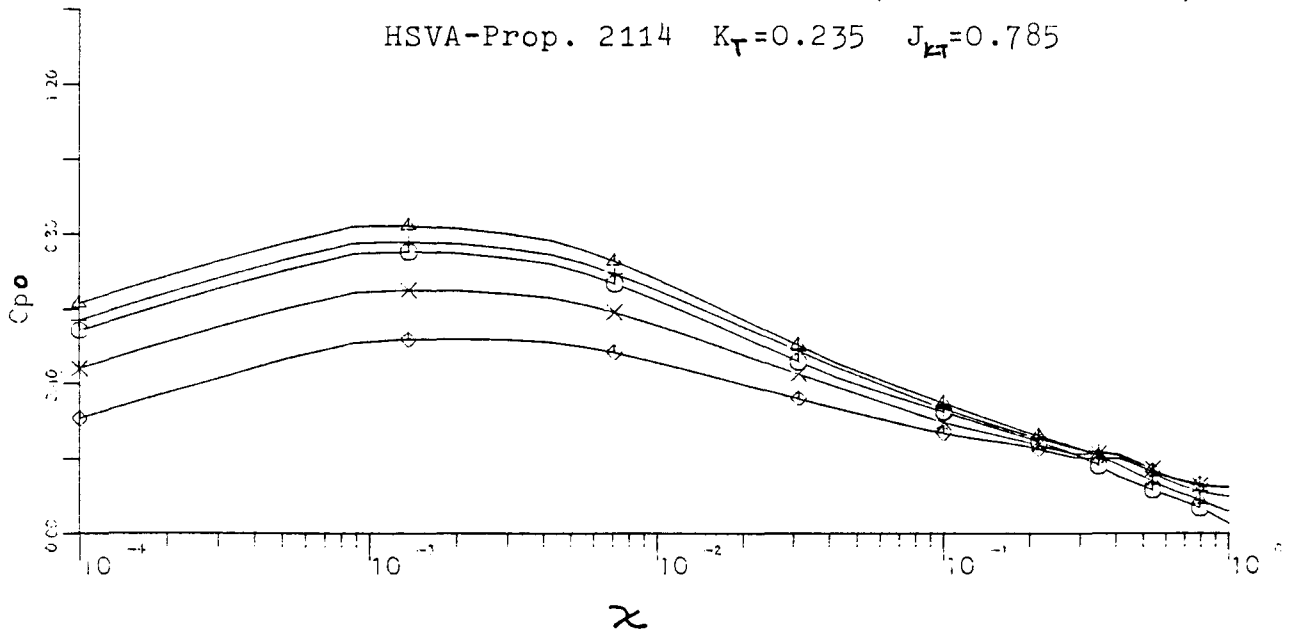
Abb.23 Berechneter Druckbeiwert (Kavitationsfrei)
 HSVA-Prop. 2114 $k_T=0.235$ $J_{kT}=0.785$



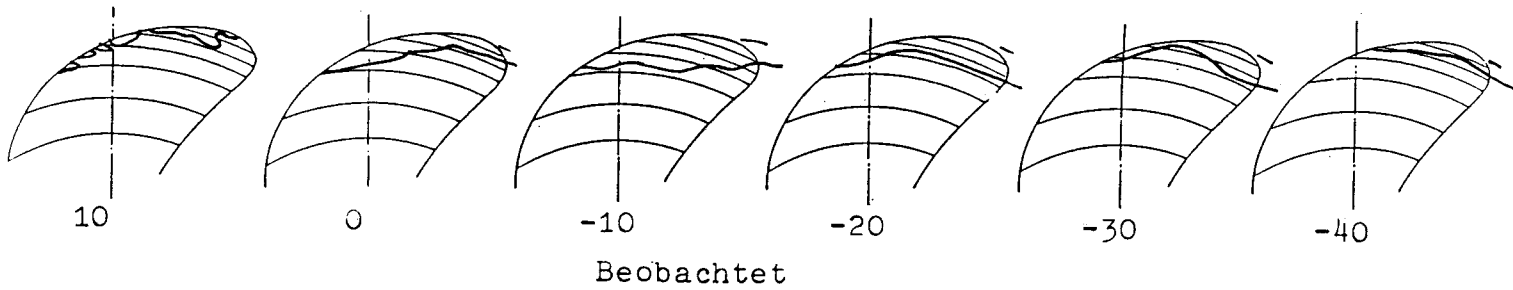
- Δ $\beta = -20.0$
- \times $\beta = -10.0$
- $+$ $\beta = 00.0$
- \circ $\beta = 10.0$
- \bullet $\beta = 20.0$

Abb.24 Berechneter Druckbeiwert (Kavitationsfrei)
 HSVA-Prop. 2114 $K_T=0.235$ $J_{KT}=0.785$

"HONKONG-EXPRESS" $r/R=0.88$



(GROSSAUSFUEHRUNG)

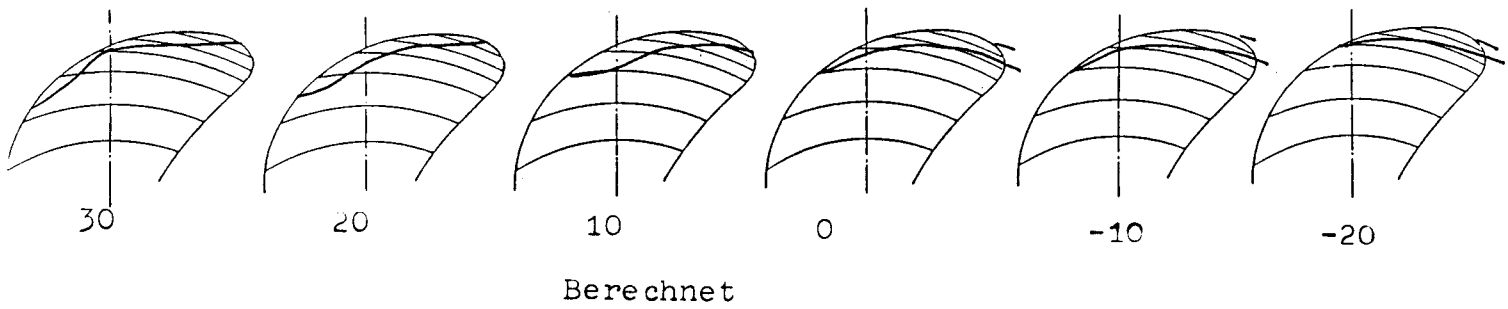


Beobachtet

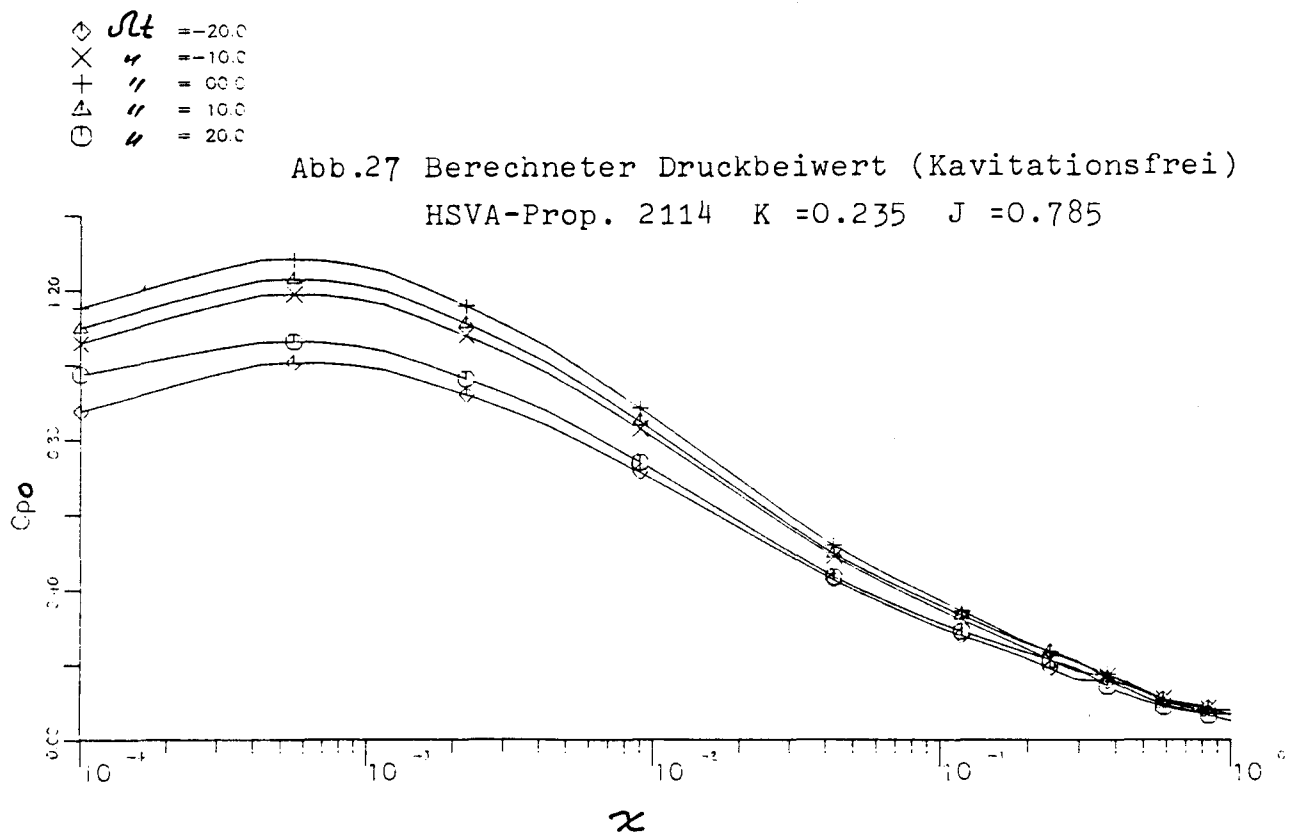
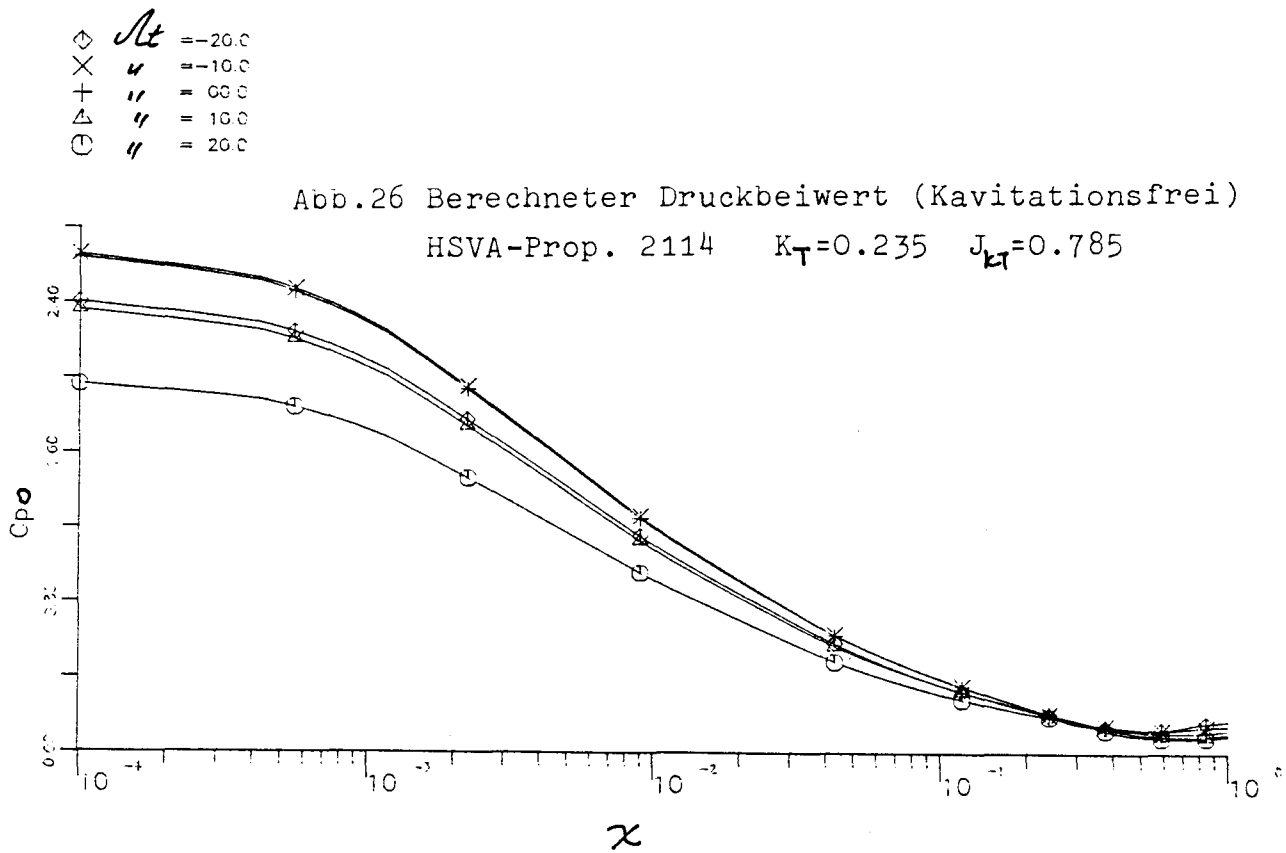
Backbord

Abb.25 Kavitation an der Grossausführung
 HSVA-Prop. 2114

Steuerbord



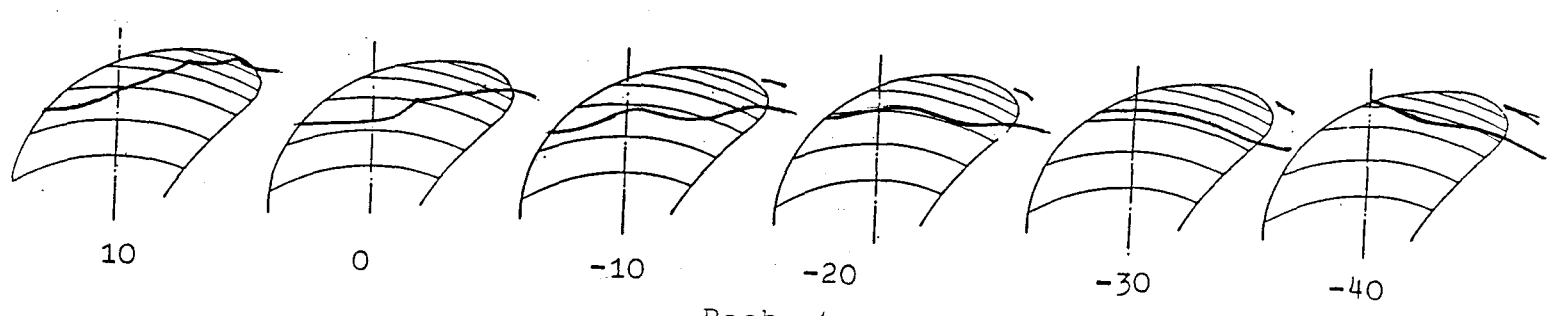
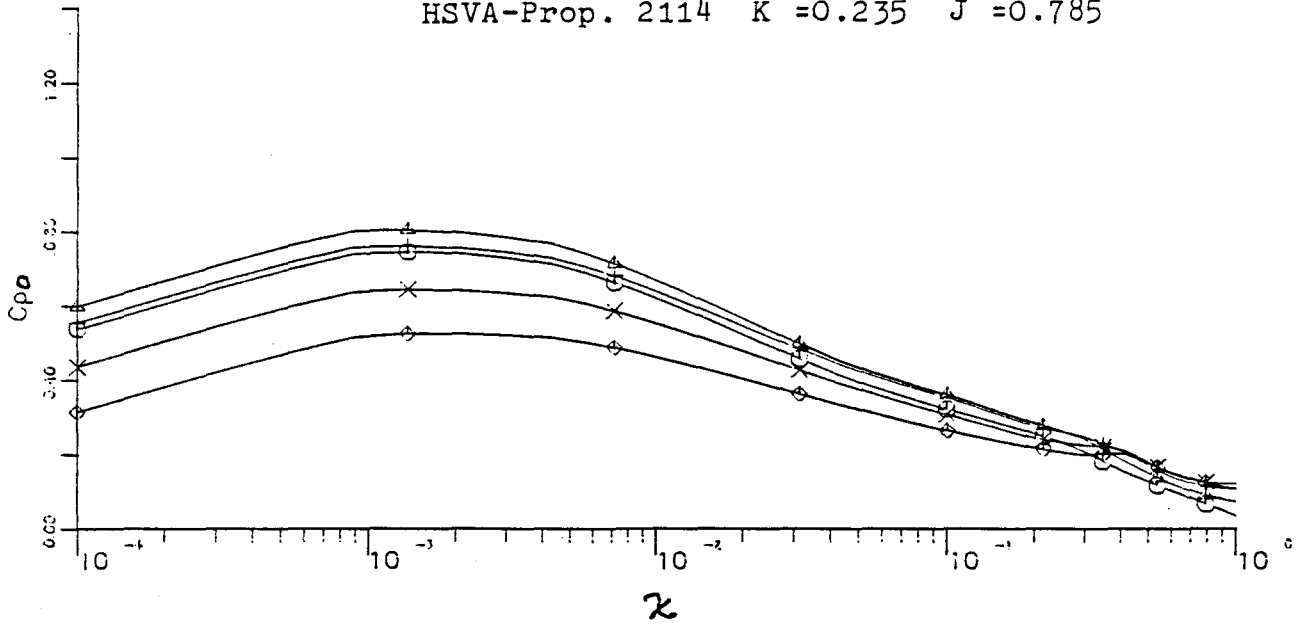
Berechnet



"HONKONG-EXPRESS" (MODELL) $r/R=0.88$

- \diamond $Re = -20.0$
- \times $Re = -10.0$
- $+$ $Re = 00.0$
- \triangle $Re = 10.0$
- \square $Re = 20.0$

Abb.28 Berechneter Druckbeiwert (Kavitationsfrei)
 HSVA-Prop. 2114 $K = 0.235$ $J = 0.785$



Backbord Beobachtung Steuerbord
 Abb. 29 Kavitation am Modell
 HSVA-Prop. 2114

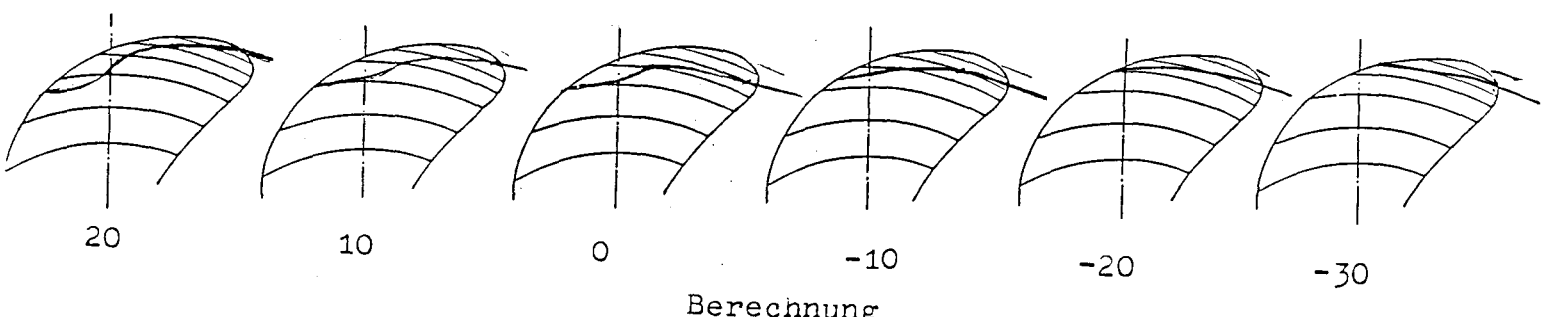
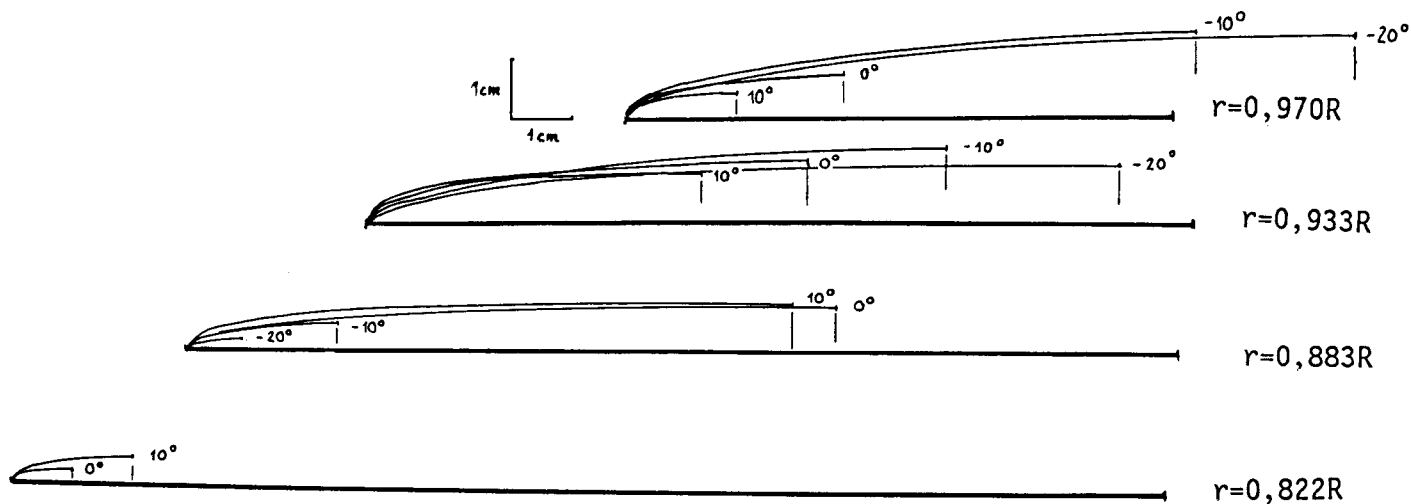
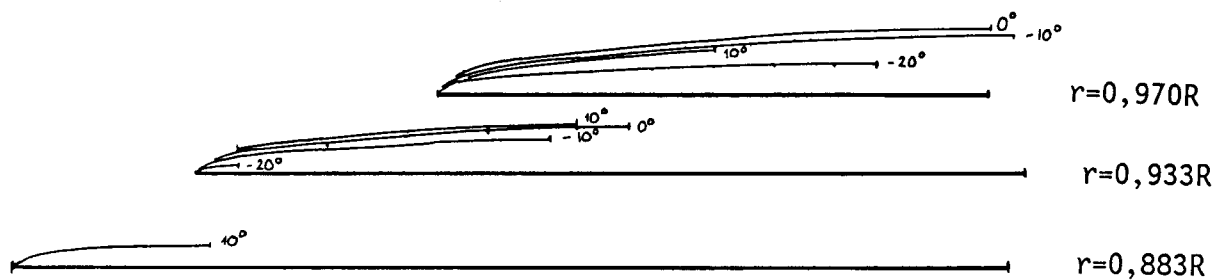


Abb.30 Berechnete Schichtdicken am Modell, HSVA-Propeller 2114



PROPELLER DER "HONGKONG EXPRESS" (MODELL) IM NACHSTROM
 SCHICHTDICKE 2η FÜR $R = 33,6$ cm IN ABHÄNGIGKEIT VON DER WINKELSTELLUNG
 (mit experimentellen Daten aus der Winkelstellung
 $\varphi_{ex} = \varphi - 20^\circ$ zu vergleichen)

Abb. 31 Berechnete Schichtdicken an der Großausführung, HSVA-Propeller 2114



PROPELLER DER "HONGKONG EXPRESS" (GROSSAUSFÜHRUNG) IM NACHSTROM
 SCHICHTDICKE 2η FÜR $R = 33,6$ cm IN ABHÄNGIGKEIT VON DER WINKELSTELLUNG
 (mit experimentellen Daten aus der Winkelstellung
 $\varphi_{ex} = \varphi - 20^\circ$ zu vergleichen)

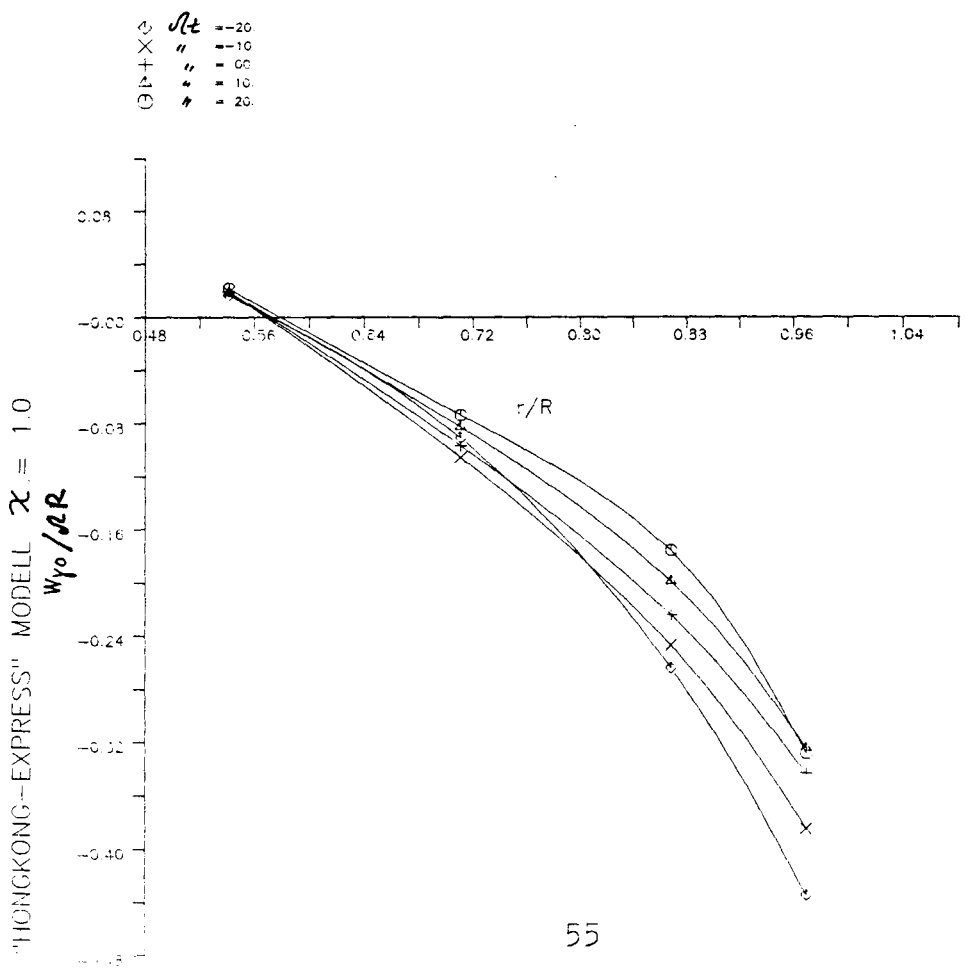
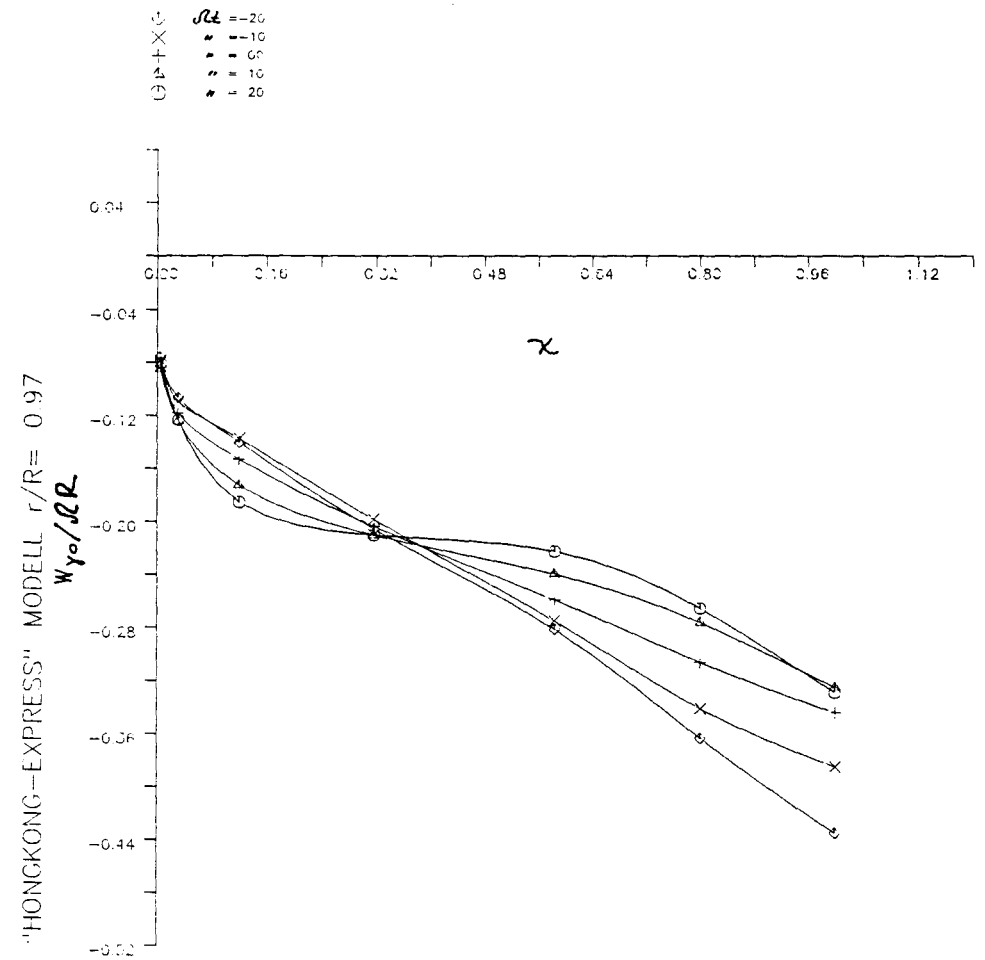


Abb.32 Wirbelinduzierte Radialgeschwindigkeit HSVA-Prop. 2114

Abb.33 Nachstrom des Modellversuchs, HSVA-Prop. 2114

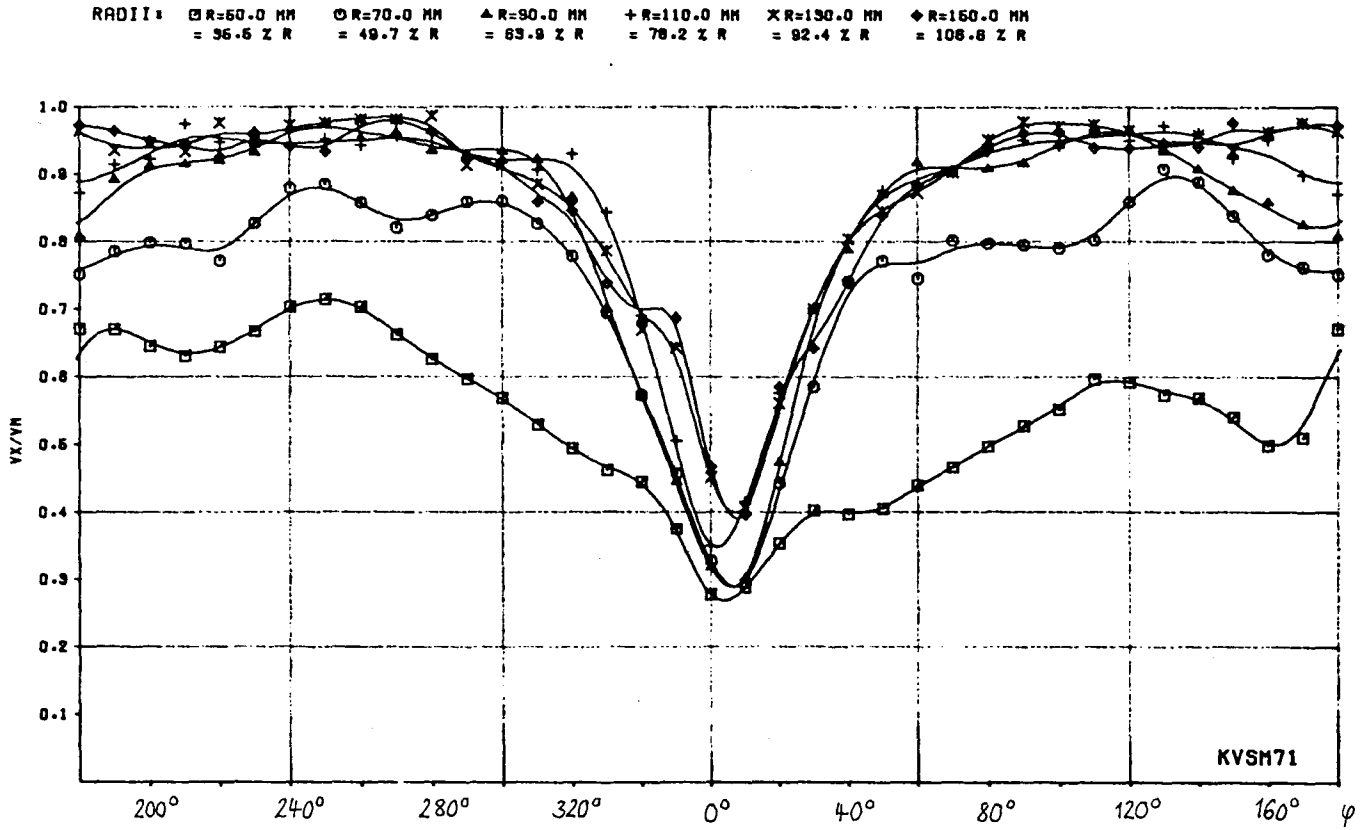


Abb.34 Nachstrom der Großausführung, HSVA-Prop. 2114

