

38 | 1955

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr. Hellmut Baumann

### Rollzustände großer Amplitude in seitlicher Dünung

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

# **Rollzustände großer Amplitude in seitlicher Dünung**

Dr. Hellmut Baumann, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

---

S O N D E R D R U C K

aus Heft 10, 1955

der „Schiffstechnik“, Forschungshefte für Schiffbau und Schiffsmaschinenbau

Schiffahrts-Verlag »Hansa« C. Schroedter & Co. · Hamburg 11 · Stubbenhuk 10

# Rollzustände großer Amplitude in seitlicher Dünung

Dr. Hellmut Baumann, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

## 1. Einleitung

Gegenstand der Betrachtung sind die stationären Rollzustände von Schiffen in seitlicher Dünung. Besonders werden die bei großen Rollwinkeln auftretenden nichtlinearen Effekte erörtert. Die Methode der Darstellung besteht darin, daß die Dünung nur durch Steilheit und Länge der Wellen gekennzeichnet wird, daß also die genaue Wellenform unberücksichtigt bleibt bzw. im Einzelfall passend angenommen wird. Hierin liegt zweifellos eine Willkür; das trifft aber auf die sonst übliche Annahme einer sinusförmigen Welle ebenfalls zu. Solange jedoch hinsichtlich so wichtiger Dinge wie der hydrodynamischen Trägheit und Dämpfung der Schiffe noch immer Ungewißheiten bestehen, müßte es übertrieben erscheinen, wollte man der Wellenform allzu große Sorgfalt widmen. Im Gegensatz zu den in der Literatur verschiedentlich erschienenen sin-Ansätzen<sup>1)</sup>, welche ein Näherungsverfahren erforderlich machen, das bei größeren Rollamplituden aus Konvergenzgründen zumindest praktisch versagt, bedienen wir uns bewußt einer ungenauen Wellendarstellung und erhalten dafür einfache mathematische Beziehungen, welche im ganzen Stabilitätsumfang des Schiffes für die angenommenen Dünungswellen bei Vernachlässigung der Dämpfung exakt gelten und auch eine elementare graphische Konstruktion der Resonanzkurven sowie der Grenze beständiger Rollzustände ermöglichen. Bei Berücksichtigung der Dämpfung können die Resonanzkurven und die Beständigkeitsgrenze ebenfalls leicht konstruiert werden. Das Resultat ist aber mehr qualitativ zu verstehen, solange uns die genaue Kenntnis der hydrodynamischen Dämpfung fehlt.

## 2. Die Bewegungsgleichung

Wir beschreiben das Rollen eines Schiffes in seitlicher Dünung durch die Differentialgleichung

$$M(t) \equiv J' \cdot \ddot{\varphi} + W(Ts) \cdot \dot{\varphi} + P \cdot [1 + \beta(t)] \cdot h(\psi) = 0. \quad (1)$$

Dazu sind folgende Voraussetzungen und Bemerkungen zu machen:

Die Wellenlänge  $\lambda$  der Dünung sei im Vergleich zur Schiffsbreite  $B$  groß genug, mindestens

$$\frac{\lambda}{4} > B. \quad (2)$$

Dann nimmt das Schiff an der Orbitalbewegung des Wassersteil und kann unter Beibehaltung seines Deplacements rollen.

Zusätzlich zur Schwerkbeschleunigung unterliegt es dabei noch der Orbitalbeschleunigung vom Betrage  $r\omega^2$  ( $r$  = Orbitalradius,  $\omega$  = dessen Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz). Der resultierende Vektor schwankt periodisch sowohl in seiner Richtung als auch in seiner Größe; er steht bekanntlich senkrecht auf der Wellenoberfläche. Die statische Gleichgewichtslage des Schiffes ist zur Wasseroberfläche orientiert, sie pendelt

also wie diese um einen Winkel  $\vartheta(t)$  gegen den Horizont; für dessen Amplitude, die Wellenschräge  $\vartheta$ , gilt in einer Gerstner'schen Trochoidenwelle die Beziehung

$$\sin \vartheta = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{2\pi r}{\lambda}. \quad (3)$$

Bei einer Krängung  $\psi$  aus der jeweiligen statischen Gleichgewichtslage ist der Hebelarm  $h(\psi)$  derselbe wie in ruhigem Wasser. Wir setzen eine symmetrische Hebelarmkurve

$$h(\psi) = -h(-\psi)$$

bis zur Grenze des Stabilitätsumfangs  $\psi_{st}$  voraus. Das Schiffsgewicht nimmt jedoch wegen der Größenschwankung des resultierenden Schwerevektors einen veränderlichen Momentanwert

$$P \cdot [1 + \beta(t)] \quad (4)$$

an, wo  $\beta(t)$  im Wellental positiv, auf dem Wellenberg negativ ist. In sinusförmiger Dünung gilt

$$\beta^2(t) + \vartheta^2(t) = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^2} < 1; \quad (5)$$

es ist z. B. für die Standardwelle ( $2r : \lambda = 1 : 20$ )

$$|\beta| = |\vartheta| = \frac{\pi}{20} \approx 0,157. \quad (6)$$

Der Rollwinkel gegen den Horizont ist

$$\varphi(t) = \psi(t) + \vartheta(t). \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment  $J'$  des Schiffes sei konstant. Die Frequenzabhängigkeit seines hydrodynamischen Anteils kann vernachlässigt werden, solange die von dem rollenden Schiff ausgehende Welle die Voraussetzung (2) erfüllt.

Das Dämpfungsmoment von Schiffen ist noch zu wenig erforscht, als daß man dafür einen analytischen Ausdruck angeben könnte. Es hängt in hydrodynamisch komplizierter Weise u. a. von der Schiffsbauform, der Schwerpunktlage, der Rollperiode und den Augenblickswerten des Rollwinkels und der Winkelgeschwindigkeit ab. Wir berücksichtigen nur seine Abhängigkeit von der Rollperiode  $Ts$  und setzen es proportional der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  relativ zur Wasseroberfläche.

## 3. Rollen in ruhigem Wasser

Als Grundlage für die Berechnung der erzwungenen Rollschwingungen in Dünung betrachten wir vorweg die Abhängigkeit der Periode von der Winkelamplitude bei ungedämpftem Rollen in ruhigem Wasser. Wir setzen also vorerst

$$W = 0 \text{ und } r = 0, \text{ also } \vartheta(t) \equiv 0, \beta(t) \equiv 0. \quad (8)$$

Dann sind  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  identisch, und die Bewegungsgleichung lautet

$$J' \cdot \ddot{\psi} + P \cdot h(\psi) = 0. \quad (9)$$

Da hier keine Dämpfung wirkt, ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie

<sup>1)</sup> Zum Beispiel die Ziffern [3], [5], [7] und [9] des am Schluß befindlichen Literaturauszugs. — Aus der Fülle der Arbeiten über Schwingungen nichtlinearer Systeme werden dort nur solche aufgezählt, deren Anwendung auf das Rollen der Schiffe unmittelbar gegeben ist.

$$E = \frac{1}{2} J' \dot{\psi}^2 + U(\psi) \quad (10)$$

konstant, nämlich

$$\frac{1}{2} J' \dot{\psi}^2 + U(\psi) = U(\bar{\psi}) \quad (11)$$

mit

$$U(\psi) = P \cdot \int_0^\psi h(\alpha) d\alpha \quad (12)$$

Aus (11) ergibt sich der zeitliche Ablauf der Schwingung in der Darstellung

$$t(\psi) = \sqrt{\frac{1}{2} J'} \cdot \int_0^\psi \frac{d\alpha}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\alpha)}} \quad (13)$$

Nur bei kleiner Amplitude  $\bar{\psi}$  kann der Hebelarm  $h(\psi)$  proportional zu  $\psi$ , also die potentielle Energie proportional zu  $\psi^2$  angesetzt werden; dann stellt (13) eine Sinusschwingung dar. Mit wachsender Amplitude zeigen sich jedoch Abweichungen vom sinusförmigen Oszillogramm, welche nach Überschreiten des Hebelarm-Maximums zu einer merklichen Verflachung und bei Annäherung an die Grenze des Stabilitätsumfangs  $\psi_u$  zu einer rechteckähnlichen Kurve führen. Gleichzeitig verändert sich die Rollperiode

$$T_0(\bar{\psi}) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} J'} \int_0^{+\psi} \frac{d\alpha}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\alpha)}} \quad (14)$$

derart, daß sie (im Falle positiver Zusatzstabilität nach anfänglicher Verkürzung) unbeschränkt anwächst, während sich die Amplitude der Grenze des Stabilitätsumfangs nähert.

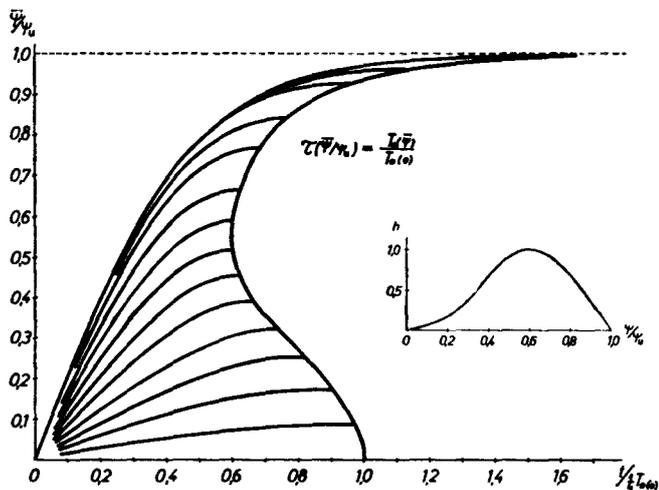


Bild 1 Form der Roll-Oszillogramme eines Schiffes mit positiver Zusatzstabilität in ruhigem Wasser; keine Dämpfung

Bild 1 zeigt eine Schar solcher Oszillogramme über eine viertel Rollperiode, welche für Schiffe mit einer Hebelarmkurve des gezeichneten Verlaufs gilt<sup>2)</sup>. Die Kurve  $\tau(\bar{\psi}/\psi_u)$  durch ihre Endpunkte (Maxima) stellt die Abhängigkeit der Rollperiode  $T_0(\bar{\psi})$  dimensionslos dar. Es ist

$$T_0(\bar{\psi}) = T_0(0) \cdot \tau(\bar{\psi}/\psi_u), \quad (15)$$

wo

$$T_0(0) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J'}{P \cdot M_0 G}} \quad (16)$$

die Rollperiode für sehr kleine Ausschläge bedeutet. Bei Einführung des größten Hebelarms  $h_{\max}$  und des Stabilitätsumfangs  $\psi_u$  gemäß der Beziehung

$$c \cdot h_{\max} = M_0 G \cdot \psi_u \quad (17)$$

kann auch

$$T_0(0) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J' \cdot \psi_u}{c \cdot P \cdot h_{\max}}} \quad (18)$$

geschrieben werden. Der Wert  $c$  hängt nur von der Gestalt der Hebelarmkurve ab. Im vorliegenden Falle ist  $c = 0,5$ .

Die Berechnung der Funktion  $\tau(\bar{\psi}/\psi_u)$ , d. h. also die Auswertung des Integrals (14), ist im allgemeinen ohne kostspielige Hilfsmittel recht mühselig. Für das Verhalten eines Schiffes auf See ist jedoch der Amplituden-Einfluß auf die Rollperiode von entscheidender Bedeutung; deshalb sollen hierzu noch einige Angaben folgen.

(a) Gewisse analytisch definierte Hebelarmkurven führen exakt auf das Vollständige Elliptische Integral 1. Gattung<sup>3)</sup>

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (19)$$

$$\frac{2}{\pi} K \approx 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{264} k^6 + \dots \quad (20)$$

Zwei Beispiele, welche nicht nur von theoretischem Interesse sind, sondern auch zur Annäherung praktisch vorkommender Hebelarmkurven ohne Zusatzstabilität im ganzen Stabilitätsumfang dienen können, sind der Sinusbogen und die kubische Parabel. Wird

$$h^I(\psi) = h_{\max} \cdot \sin \frac{\pi \psi}{\psi_u} \quad (21)$$

gesetzt, wo der größte Hebelarm in der Mitte des Stabilitätsumfangs liegt und

$$c^I = \pi \quad (22)$$

ist, so ergibt sich in elementarer Weise

$$\left. \begin{aligned} \tau^I(\bar{\psi}/\psi_u) &= \frac{2}{\pi} \cdot K \\ \text{mit} \quad k^2 &= \sin^2 \frac{\pi \bar{\psi}}{2 \psi_u} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Wird zum anderen

$$\begin{aligned} h^{II}(\psi) &= M_0 G \cdot \psi \cdot [1 - (\psi/\psi_u)^2]^4 \\ &= c^{II} \cdot h_{\max} \cdot \psi/\psi_u \cdot [1 - (\psi/\psi_u)^2] \end{aligned} \quad (24)$$

gewählt, wo

$$c^{II} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2,60 \quad (25)$$

ist und das Maximum der Hebelarmkurve bei  $\psi/\psi_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$  liegt, so findet man durch entsprechende Umformung

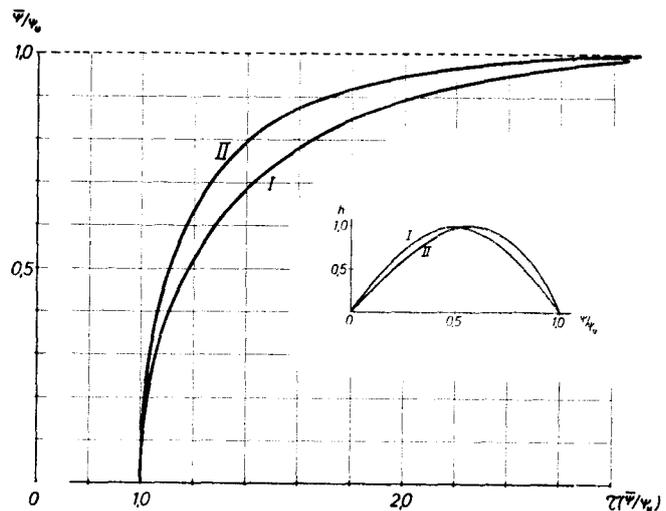


Bild 2 Abhängigkeit der Rollperiode vom Rollwinkel in ruhigem Wasser

<sup>2)</sup> Diese sowie die in Bild 3 gezeigten Kurven wurden von Herrn cand. math. Alfred Meyer am „Integromaten“ des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg gewonnen.

<sup>3)</sup> Jahnke-Emde.

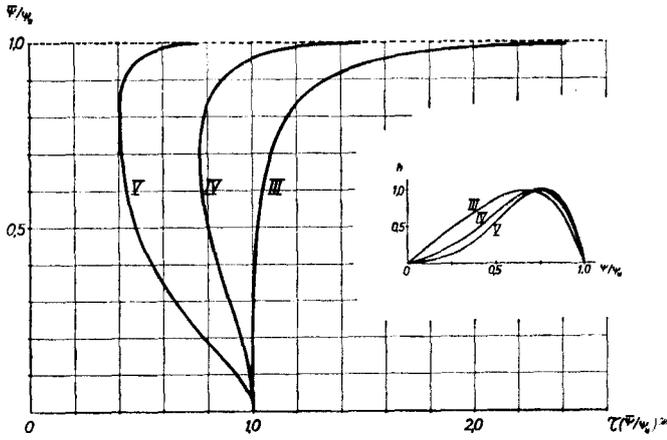


Bild 3 Abhängigkeit der Rollperiode vom Rollwinkel in ruhigem Wasser

mit

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\text{II}}(\bar{\psi}/\psi_u) &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{2}{\pi} K \\ k^2 &= \frac{\bar{\psi}^2}{2\psi_u^2 - \bar{\psi}^2} \end{aligned} \right\} (26)$$

Die durch (23) und (26) gegebenen Funktionen sind in Bild 2 aufgetragen worden.

(b) Bild 3 zeigt noch die Abhängigkeit der Rollperiode bei drei analytisch gegebenen Hebelarmkurven mit positiver Zusatzstabilität, nämlich

$$\begin{aligned} h^{\text{III}}(\psi) &= 1,87 h_{\text{max}} \cdot \psi/\psi_u \cdot [1 - (\psi/\psi_u)^2] \cdot [1 + (\psi/\psi_u)^2] \\ h^{\text{IV}}(\psi) &= 0,8 h_{\text{max}} \cdot \psi/\psi_u \cdot [1 - (\psi/\psi_u)^2] \cdot [1 + 5(\psi/\psi_u)^2] \\ h^{\text{V}}(\psi) &= 0,2 h_{\text{max}} \cdot \psi/\psi_u \cdot [1 - (\psi/\psi_u)^2] \cdot [1 + 25(\psi/\psi_u)^2], \end{aligned}$$

deren Maxima bei  $\psi/\psi_u = 0,668$ ;  $0,741$  bzw.  $0,768$  liegen. Sie mögen zu Vergleichszwecken nützlich sein (über ihre Berechnung vgl. Fußnote 2).

(c) Ein sehr wertvolles Mittel zur Bestimmung der Funktion  $T_0(\bar{\psi})$  ist der Modellversuch. Er enthält zugleich den Einfluß der hydrodynamischen Trägheit. — Man kann aber auch mit Hilfe eines Rollpendels, dessen Rückstellmoment einer vorgegebenen Hebelarmkurve entspricht, im Trocknen den Amplituden-Einfluß  $\tau(\bar{\psi}/\psi_u)$  feststellen<sup>5)</sup>, wobei wegen (18) bei der Wahl des Stabilitätsumfangs und des größten Hebelarms gewisse Freiheiten bestehen.

(d) Das umgekehrte Problem, nämlich zu einer gegebenen Abhängigkeit der Rollperiode eine Hebelarmkurve zu berechnen, ist übrigens kürzlich von Kauderer [10] erörtert worden.

Im folgenden werden wir nun zeigen, daß und wie sich aus einer gegebenen Kurve  $T_0(\bar{\psi})$  (Grundkurve) alle wesentlichen Aussagen über die möglichen Rollzustände in seitlicher Dünung herleiten lassen.

#### 4. Die stationären Rollzustände in seitlicher Dünung

Die Bewegungsgleichung (1) liefert bei Integration über

$$d\varphi = d\psi + d\theta \quad (27)$$

für die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} J' \dot{\varphi}^2 + U(\psi) \quad (28)$$

des rollenden Schiffs die Gleichung

$$\begin{aligned} -E(t) &= W(T_S) \cdot \int_0^{T_S} \dot{\psi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt + P \cdot \int_0^{T_S} h(\psi) \cdot \dot{\theta} \cdot dt \\ &+ P \cdot \int_0^{T_S} \beta \cdot h(\psi) \cdot \dot{\varphi} \cdot dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Wir beschränken unsere Betrachtung auf stationäre Rollzustände der Periode  $T_S$ . Für solche gilt

$$E(T_S) = E(0), \quad (30)$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= W(T_S) \cdot \int_0^{T_S} \dot{\psi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt + P \cdot \int_0^{T_S} \dot{\theta} \cdot h(\psi) \cdot dt \\ &+ P \cdot \int_0^{T_S} \beta \cdot h(\psi) \cdot \dot{\varphi} \cdot dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Weil nun das erste, den Dämpfungsverlust darstellende Integral immer positiv ist, müssen die beiden anderen einzeln oder zusammen einen negativen Wert, d. h. eine entsprechende Anfachung der Rollschwingung ergeben. Nun haben die Funktionen  $\psi(t)$ ,  $h(\psi)$  und  $\varphi(t)$  die Periode  $T_S$  des rollenden Schiffs,  $\theta(t)$  und  $\beta(t)$  die Periode  $T_W$  der Wellen. Sie enthalten ferner, bei nicht-sinusförmigem Verlauf, auch Teilperioden  $\frac{1}{n} T_S$  bzw.  $\frac{1}{m} T_W$  ( $n, m$  ganze Zahlen). Infolgedessen kann

$$\frac{1}{n} T_S = \frac{1}{m} T_W \quad (32)$$

ist; und das dritte nur dann, wenn

$$\frac{1}{2n'} T_S = \frac{1}{m'} T_W \quad (33)$$

ist. Außerdem muß noch die Phase zwischen den Bewegungen von Schiff und Welle geeignet liegen. Es gibt nun offenbar unendlich viele Wertepaare  $n, m$ , und  $n', m'$ <sup>6)</sup>, welche die Bedingungen (32) und (33), unter Umständen sogar gleichzeitig, erfüllen. Es ist aber anzunehmen, daß die Anfachung durch die Teilamplituden höherer Ordnung nicht ausreicht, um die Dämpfung aufzuwiegen; wir berücksichtigen daher nur die Werte  $n, m, n', m' = 1$ . Dann verbleiben für die stationären Rollzustände die beiden, einander ausschließenden Bedingungen

$$T_S = T_W \quad \text{und} \quad T_S = 2 T_W. \quad (34) \quad (35)$$

Es gibt also zwei Arten von Rollzuständen:

Bei den Rollzuständen erster Art erfolgt die Entdämpfung durch die periodische Neigung  $\theta(t)$  der Wellenoberfläche. Rollperiode und Wellenperiode sind einander gleich.

Bei den Rollzuständen zweiter Art erfolgt die Entdämpfung durch die periodische Auf- und Abbeschleunigung  $g \cdot \beta(t)$  der Wellenoberfläche. Auf eine Rollschwingung entfallen zwei Dünungswellen.

Unsere Voraussetzung (2) wird im ersten Fall gut erfüllt. Wenn man nämlich nach Kempf [6] die Rollzahl

$$R = T_S \cdot \sqrt{\frac{g}{B}} \quad (36)$$

mit mindestens 8 ansetzt, so ergibt sich für die Rollzustände erster Art

$$\frac{\lambda}{4} > 2,5 B. \quad (37)$$

Für die Rollzustände zweiter Art muß im Sinne unserer Voraussetzung

$$R > 10 \quad (38)$$

angenommen werden; wir müssen also sehr steife Schiffe von der Betrachtung dieser Rollzustände ausschließen.

#### 5. Die Rollzustände erster Art ( $T_S = T_W$ )

a) Phasenerlegung

Wir zerlegen den Zeitablauf der Wellenneigung  $\theta(t)$  in zwei Phasen

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_w(t), \quad (39)$$

4) Dies Rückstellmoment spielt eine grundlegende Rolle u. a. in den Arbeiten [2], [3], [5], [7], [9].

5) Vergl. hierzu [1].  
6) sogenannte multiple Resonanzen.

deren erste dem Schiff im Takt der Wellen reversible Energie (Blindleistung) zuführt und dadurch seine Rollperiode der Wellenperiode gleich macht, deren zweite die zum Ausgleich der Dämpfung notwendige Leistungszufuhr (Wirkleistung) besorgt. Die Bewegungsgleichung (1) erscheint dann in der Gestalt

$$J' \cdot (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}_b + \ddot{\vartheta}_w) + W(T_W) \cdot \dot{\psi} + P \cdot [1 + \beta] \cdot h(\psi) = 0. \quad (40)$$

Da wegen (31) die Oszillogramme  $\ddot{\vartheta}_b(t)$  und  $\psi(t)$  sowie  $\ddot{\vartheta}_w(t)$  und  $\dot{\psi}(t)$  jeweils phasenrein sind, kann diese in die beiden Beziehungen

$$J' \cdot (\ddot{\psi} + \ddot{\vartheta}_b) + P \cdot [1 + \beta] \cdot h(\psi) = 0 \quad (41)$$

$$J' \cdot \ddot{\vartheta}_w + W(T_W) \cdot \dot{\psi} = 0 \quad (42)$$

aufgespalten werden.

Wir gehen nun so vor, daß wir zu jedem durch Periode und Amplitude gekennzeichneten Rollzustand, dessen Oszillogramm mit der Bewegungsgleichung verträglich ist, die Funktionen  $\vartheta_b(t)$  und  $\vartheta_w(t)$  einzeln bestimmen und ihre Amplituden wegen des Phasenunterschieds von  $90^\circ$  quadratisch addieren.

$$\vartheta^2 = \vartheta_b^2 + \vartheta_w^2, \quad (43)$$

wobei wir einigermaßen sinusförmigen Verlauf voraussetzen müssen. So gewinnen wir eine Beziehung zwischen der Rollamplitude und den Hauptmerkmalen der Dünung, nämlich Wellenschräge und Periode bzw. Frequenz, die sich bei Kenntnis der Amplitudenabhängigkeit der Roll-Eigenperiode (14) leicht auswerten läßt und in Sonderheit eine einfache graphische Konstruktion der sog. Resonanzkurven zuläßt. — Die Form der Oszillogramme und der Wellen interessiert uns weniger; wir erörtern sie nachträglich.

#### b) Amplitudenbeziehungen

Zur Integration der Differentialgleichung (41) machen wir den Ansatz, daß die Oszillogramme  $\vartheta_b(t)$  und  $\psi(t)$  einander proportional seien, wir setzen also

$$\vartheta_b(t) = \frac{\vartheta}{\bar{\psi}} \cdot \psi(t). \quad (44)$$

Das Amplitudenverhältnis ist positiv oder negativ, je nachdem die Oszillogramme gleiche oder entgegengesetzte Phase haben. Wir erhalten dann die Differentialgleichung

$$J' \cdot \left(1 + \frac{\vartheta_b}{\bar{\psi}}\right) \cdot \ddot{\psi} + P \cdot [1 + \beta] \cdot h(\psi) = 0. \quad (45)$$

Bis auf den Einfluß der Gewichtsschwankung (4), den wir im Augenblick vernachlässigen können, stellt diese die Bewegungsgleichung eines Schiffs mit dem Trägheitsmoment  $J' \cdot \left(1 + \frac{\vartheta_b}{\bar{\psi}}\right)$

in ruhigem Wasser dar. Gegenüber der Eigenperiode (14) tritt also hier der Verstimmungsfaktor

$$\frac{T_W}{T_0(\bar{\psi})} = \sqrt{1 + \frac{\vartheta_b}{\bar{\psi}}} \quad (46)$$

auf, welcher je nach Phasenlage größer oder kleiner als 1 ist. Für die Amplitude des verstimmenden Anteils der Wellenneigung ergibt sich also

$$\vartheta_b = \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \bar{\psi} \quad (47a)$$

bzw. mit den entsprechenden Kreisfrequenzen ausgedrückt

$$-\omega \cdot T_W = 2\pi = \nu_0(\bar{\psi}) \cdot T_0(\bar{\psi}) -$$

$$\vartheta_b = \left( \frac{\nu_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \cdot \bar{\psi}. \quad (47b)$$

Um die Vernachlässigung des  $\beta$ -Einflusses auf die Verstimmung nachträglich zu rechtfertigen, ersetzen wir den Schwingungsfaktor  $1 + \beta(t)$  des Rückstellmoments für die Dauer je einer Halbwelle durch einen passenden Mittelwert  $1 \pm \epsilon|\beta|$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , und fügen die Rollperiode aus zwei Anteilen zusammen, die sich dann um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \epsilon \cdot |\beta|}} \approx 1 \mp \frac{1}{2} \epsilon \cdot |\beta| + \frac{3}{8} \epsilon^2 \cdot |\beta|^2 \mp \dots \quad (48)$$

von der halben Rollperiode unterscheiden. Der Verstimmungseinfluß der Gewichtsschwankung beträgt also

$$\frac{1/2}{\sqrt{1 + \epsilon \cdot |\beta|}} + \frac{1/2}{\sqrt{1 - \epsilon \cdot |\beta|}} \approx 1 + \frac{3}{8} \epsilon^2 \cdot |\beta|^2 + \dots, \quad (49)$$

was z. B. bei einer Standardwelle (6) weniger als 1% ausmacht. Die Gewichtsschwankung bewirkt auch eine Unsymmetrie des Rolloszillogramms  $\psi(t)$ , auf die wir nachträglich noch eingehen.

Für den zur Entdämpfung des Schiffs notwendigen Anteil der Wellenneigungsfunktion liefert die Beziehung (42) bei zweimaliger Integration mit solchen Konstanten, daß

$$\int_0^{T_W} \vartheta_w(t) \cdot dt = 0 \quad (50)$$

wird, den Ausdruck

$$\vartheta_w(t) = - \frac{W(T_W)}{J'} \int \psi(t) \cdot dt, \quad (51)$$

also für seine Amplitude

$$\vartheta_w = \frac{W(T_W)}{J'} \cdot \int_0^{1/4 T_W} \psi(t) \cdot dt. \quad (52)$$

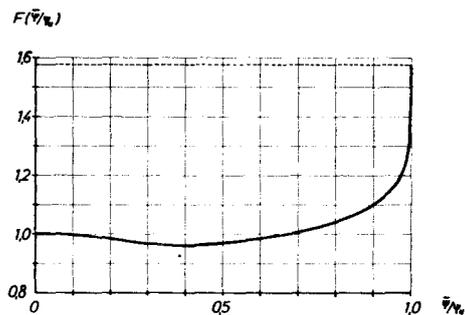


Bild 4 Formparameter der in Bild 1 gezeigten Oszillogramme

Wir bringen das Integral, welches über ein Viertel-Oszillogramm mit dem Maximum  $|\bar{\psi}|$  auf einer der Intervallgrenzen zu erstrecken ist, noch in die Gestalt

$$\int_0^{1/4 T_W} \psi(t) \cdot dt = \frac{\bar{\psi} \cdot T_W}{2\pi} \cdot F(\bar{\psi}/\psi_u) = \frac{\bar{\psi}}{\omega} \cdot F(\bar{\psi}/\psi_u), \quad (53)$$

wo  $F(\bar{\psi}/\psi_u)$  ein Formparameter des Oszillogramms ist, der dessen Völligkeit angibt. Für eine Sinuskurve ist er 1; für eine

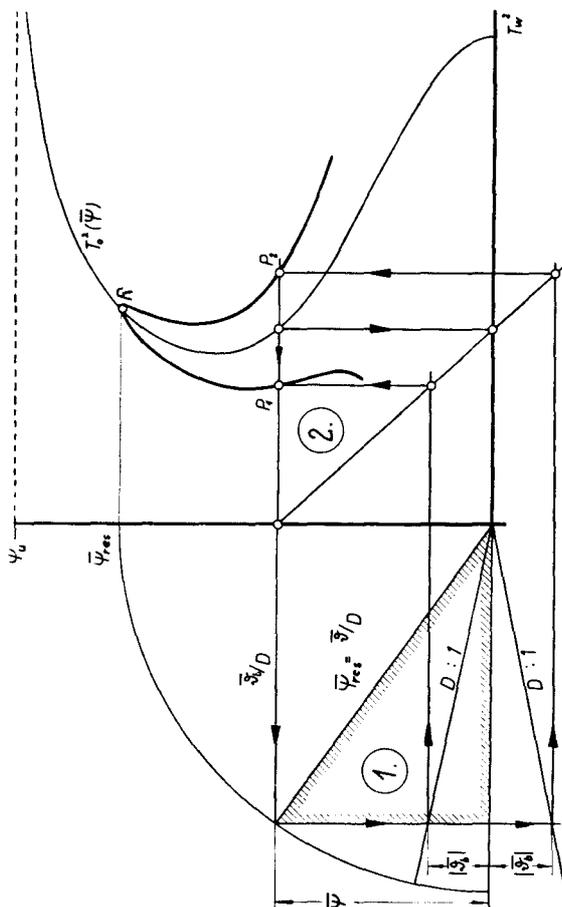
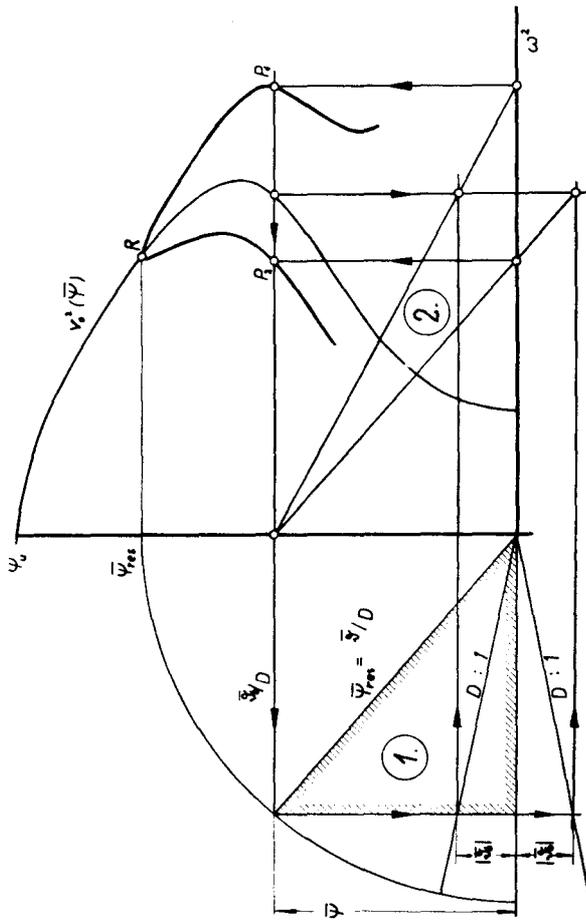


Bild 5 Konstruktion der Resonanzkurven  
a) über der  $T_W^2$ -Achse — b) über der  $\omega^2$ -Achse

Rechteckkurve nimmt er den Wert  $\pi/2$  an. Zur Illustration ist in Bild 3 der aus den in Bild 1 gezeigten Oszillogrammen planimetrisch gewonnene Formparameter aufgetragen worden. Wie zu erwarten, weicht er nur am Ende des Stabilitätsumfanges merklich von 1 ab und strebt dem Wert  $\pi/2$  zu. Man darf dieses Verhalten verallgemeinern und bei Beschränkung auf Rollwinkel, die den statischen Kenterpunkt ( $h = h_{\max}$ ) nicht wesentlich überschreiten,  $F \approx 1$  setzen. So schreiben wir für die Amplitude (52)

$$\vartheta_w = \frac{T_W \cdot W(T_W)}{2 \pi J'} \cdot F(\bar{\psi}/\psi_0) \cdot \bar{\psi} \quad (54)$$

$$\approx D(T_W) \cdot \bar{\psi} \quad (55)$$

mit

$$D(T_W) = \frac{T_W \cdot W(T_W)}{2 \pi J'} \quad (56a)$$

bzw.

$$D(\omega) = \frac{W(\omega)}{J' \omega} \quad (56b)$$

(Die gleichzeitige Verwendung der Symbole  $D(T_W)$  und  $D(\omega)$  sowie  $W(T_W)$  und  $W(\omega)$  ist nicht korrekt; kann aber; da wir die Formeln (56a) und (56b) alternativ verwenden, nicht zu Verwechslungen führen.)

Zwischen der Rollamplitude  $\bar{\psi}$  und der Wellenschräge  $\vartheta$  erhalten wir schließlich bei Anwendung der Additionsformel (43) auf die Gleichungen (47) und (55) die Amplitudenbeziehung

$$\vartheta^2 = \left[ \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right)^2 + D^2(T_W) \right] \cdot \bar{\psi}^2, \quad (57a)$$

bzw.

$$\vartheta^2 = \left[ \left( \frac{v_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right)^2 + D^2(\omega) \right] \cdot \bar{\psi}^2. \quad (57b)$$

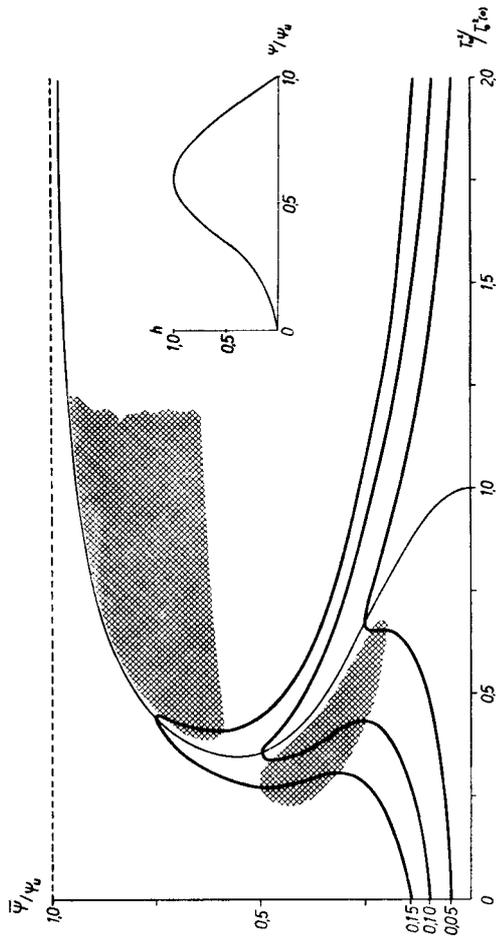
Diese bildet den Hauptgegenstand unserer Betrachtung. Sie liefert zu einer durch  $\vartheta$  und  $T_W$  bzw.  $\omega$  gegebenen Dünung nach Maßgabe der (veränderlichen) Eigenperiode und Dämpfung des Schiffs eine Anzahl von  $\bar{\psi}$ -Werten, welche je einen Rollzustand erster Art kennzeichnen.

Wir werden nun im folgenden die Resonanzkurven, nämlich die Kurvenschar  $\bar{\psi}(\vartheta, T_W^2)$  bzw.  $\bar{\psi}(\vartheta, \omega^2)$  mit  $\vartheta$  als Parameter und  $T_W^2 \sim \lambda$  bzw.  $\omega^2$  als Abszissen sowie die Grenzkurve zwischen stabilen und labilen Rollzuständen graphisch konstruieren. Dazu müssen die Funktionen  $T_0^2(\bar{\psi})$  und  $D(T_W)$  bzw.  $v_0^2(\bar{\psi})$  und  $D(\omega)$  vorliegen. Über  $T_0^2(\bar{\psi})$  haben wir im Anschluß an Gleichung (14) einiges ausgeführt; für die Dämpfungsfunktion nehmen wir, solange nichts Näheres bekannt ist, der Einfachheit halber einen festen D-Wert an<sup>7)</sup>.

### c) Resonanzkurven

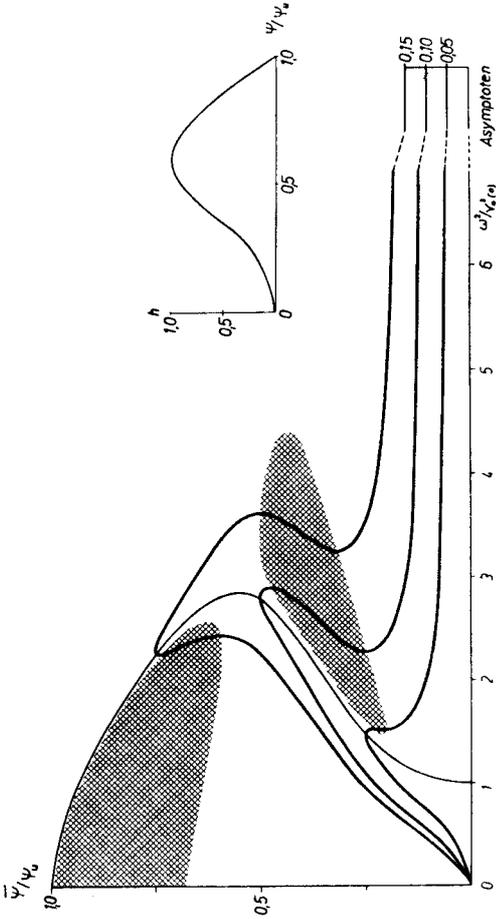
Um die Resonanzkurven über der  $T_W^2$ - bzw.  $\omega^2$ -Achse zu konstruieren, zeichnen wir zunächst die Grundkurve  $T_0^2(\bar{\psi})$  bzw.  $v_0^2(\bar{\psi})$  (Bild 5a bzw. b) und markieren auf ihr den Punkt mit der Ordinate  $\bar{\psi}_{\text{res}} = \bar{\psi}/D$ , welche den größten (im Resonanzfall  $\vartheta_b = 0$  auftretenden) Rollwinkel darstellt. Sodann führen wir für genügend viele Rollamplituden  $\bar{\psi} < \bar{\psi}_{\text{res}}$  die folgenden beiden elementaren Operationen aus: Erstens bilden wir mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes den Verstärkungsanteil der Wellenschräge

<sup>7)</sup>  $D = \text{const}$  bedeutet, daß der Dämpfungskoeffizient  $W(\omega)$  der Frequenz  $\omega$  proportional ist. In dem durch die Voraussetzung (2) beschränkten Frequenzbereich ist dies eine tragbare Annahme.

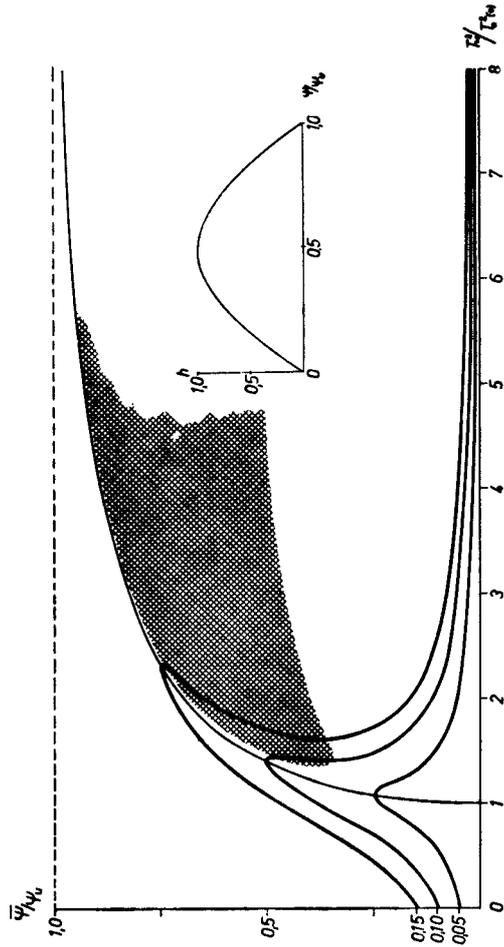


a) über der  $T_w$ -Achse

**Bild 6** Resonanzkurven eines Schiffes in seitlicher Dünung für drei verschiedene Wellenschrägen; Dämpfung  $D = 0,2$ ,  $\times \times \times \times \times$  nicht beständig

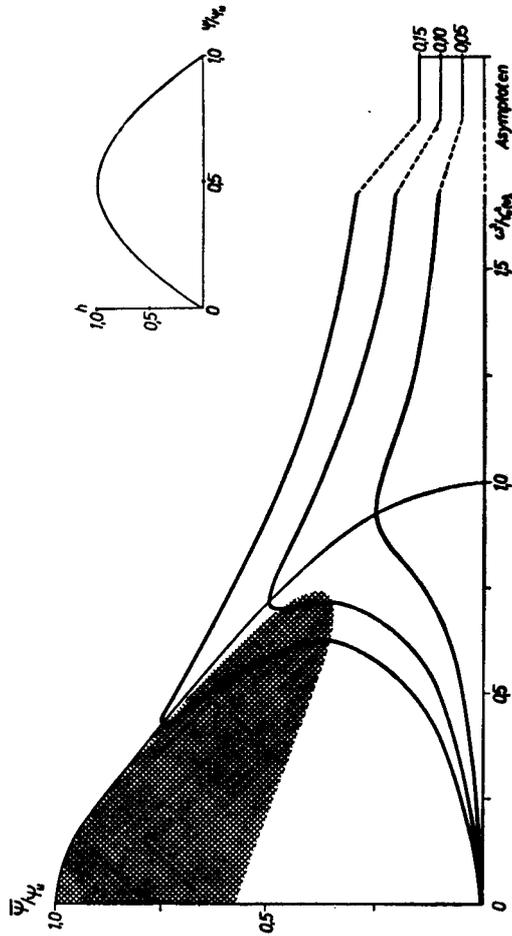


b) über der  $\omega^2$ -Achse

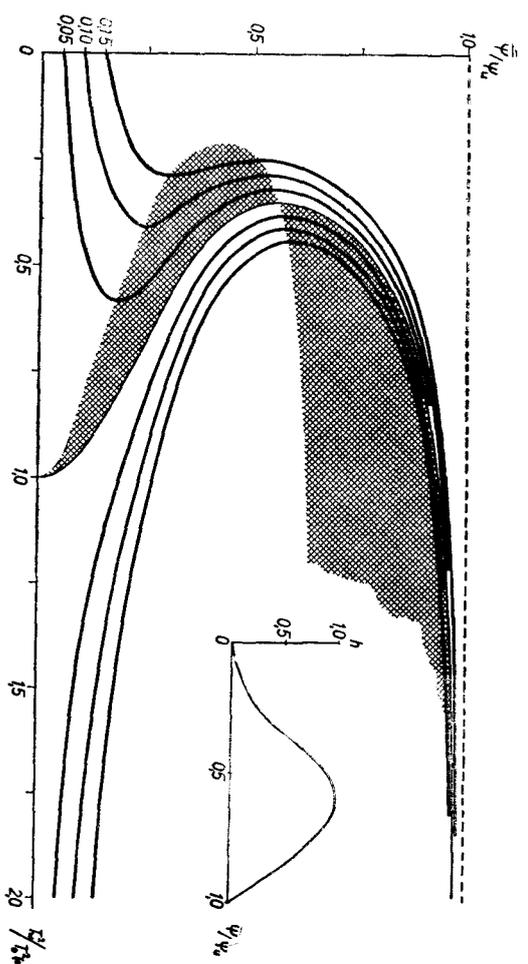


a) über der  $T_w$ -Achse

**Bild 7** Resonanzkurven eines Schiffes in seitlicher Dünung für drei verschiedene Wellenschrägen; Dämpfung  $D = 0,2$ ,  $\times \times \times \times \times$  nicht beständig

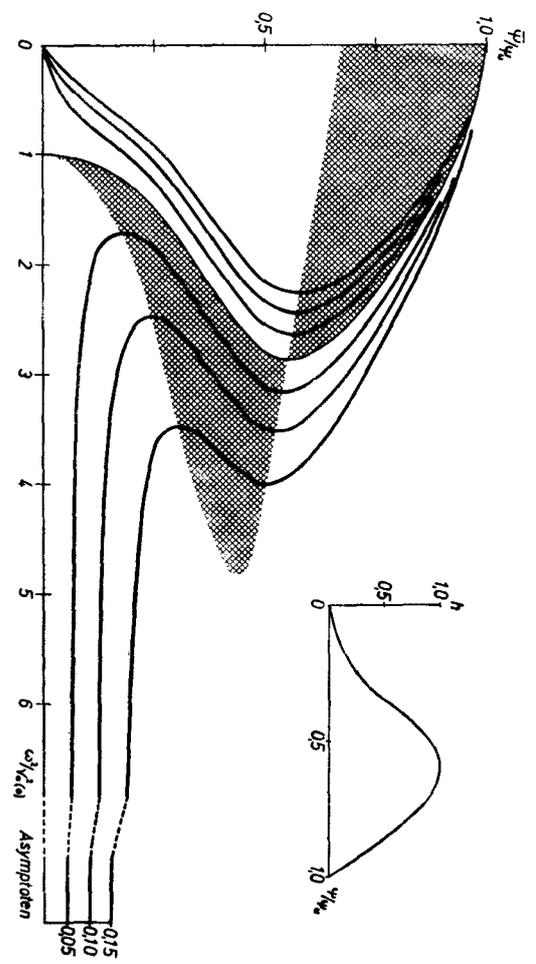


b) über der  $\omega^2$ -Achse

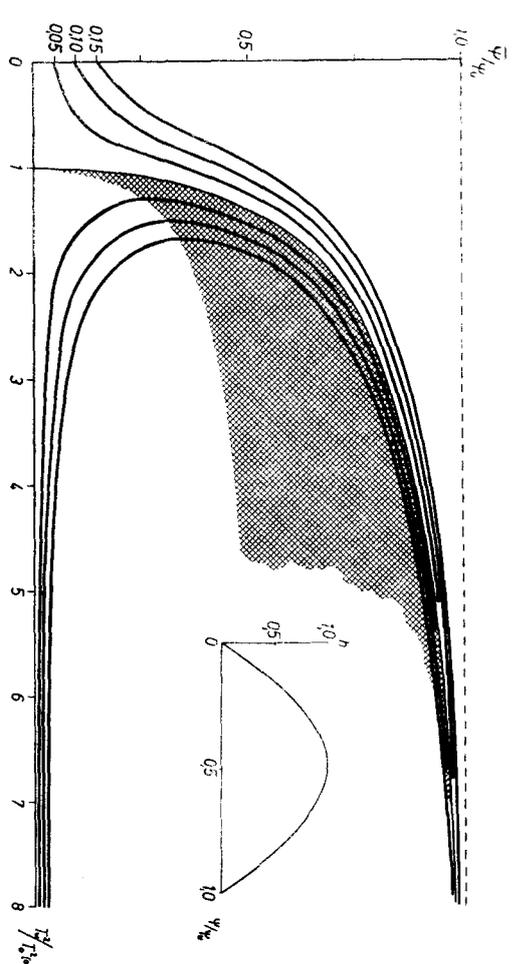


a) über der  $T_w$ -Achse

Bild 8 Resonanzkurven eines Schiffes in seitlicher Dünung für drei verschiedene Wellenschrägen; Dämpfung nicht berücksichtigt,  $\times \times \times \times$  nicht beständig

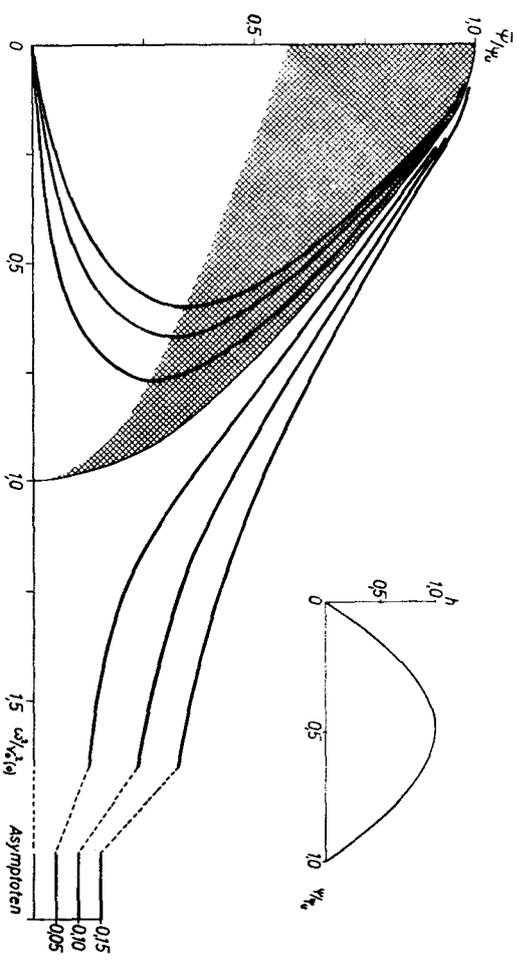


b) über der  $\omega$ -Achse



a) über der  $T_w$ -Achse

Bild 9 Resonanzkurven eines Schiffes in seitlicher Dünung für drei verschiedene Wellenschrägen; Dämpfung nicht berücksichtigt,  $\times \times \times \times$  nicht beständig



b) über der  $\omega$ -Achse

$$\vartheta_b = \pm \sqrt{\vartheta^2 - (D \cdot \bar{\psi})^2} = \pm D \cdot \sqrt{\bar{\psi}_{res}^2 - \bar{\psi}^2}, \quad (58)$$

der sich aus (55) und (43) ergibt. Zweitens wenden wir, um die mit (47a bzw. b) identische Proportion

$$T_W^2 : T_0^2(\bar{\psi}) = (\bar{\psi} + \vartheta_b) : \bar{\psi} \quad (59a)$$

bzw.

$$v_0^2(\bar{\psi}) : \omega^2 = (\bar{\psi} + \vartheta_b) : \bar{\psi} \quad (59b)$$

herzustellen, den Strahlensatz entsprechend an. Da bei  $\vartheta_b$  beide Vorzeichen zu berücksichtigen sind (denn  $\psi(t)$  und  $\vartheta(t)$  können gleiche oder entgegengesetzte Phasen haben), gewinnen wir so für jeden Rollwinkel  $\bar{\psi} < \bar{\psi}_{res}$  zwei Punkte ( $P_1, P_2$ ) der Resonanzkurve. Wenn  $|\bar{\psi}| < |\vartheta|$  ist, hat einer davon eine negative Abszisse; dieser Kurvenast stellt aber keine Lösung unseres Problems dar, da  $T_W$  und  $\omega$  definitionsgemäß positiv reell sind.

Die Bilder 6a und 6b sowie 7a und 7b zeigen die mit  $D = 0,2$  konstruierten Resonanzkurven für drei Wellenschrägen ( $\bar{\vartheta}/\psi_u = 0,05; 0,10; 0,15$ ) in dimensionsloser Darstellung; und zwar beziehen sich die Bilder 6a und 6b auf Schiffe mit positiver Zusatzstabilität, deren Hebelarm  $h(\bar{\psi}/\psi_u)$  und Eigenperiode  $\tau(\bar{\psi}/\psi_u)$  dem Bild 1 entsprechen, die Bilder 7a und 7b auf Schiffe mit sinusförmiger Hebelarmkurve (21) und der in Bild 2 dargestellten Eigenperiode (23). (Letztere schließen, wenn  $\psi_u = 180^\circ$  gesetzt wird, das mathematische Pendel ein.) In den schraffierten Bereichen, auf deren Zustandekommen wir sogleich eingehen werden, sind stationäre Rollzustände nicht realisierbar. Die Bilder 8a und 8b sowie 9a und 9b zeigen dasselbe, aber ohne Berücksichtigung der Dämpfung ( $D = 0$ ). Zu ihrer Konstruktion genügt die Proportion (59a) bzw. (59b), weil  $\vartheta_b = \vartheta$  unmittelbar gegeben ist.

#### d) Beständige Rollzustände

Die betrachteten Rollzustände erster Art erfüllen sämtlich das in der Bewegungsgleichung (1) ausgedrückte Momenten-Gleichgewicht. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob sie auch alle physikalisch realisierbar sind. Diese Frage interessiert besonders in Hinblick auf die in gewissen Abszissen-Intervallen auftretende Mehrdeutigkeit der Resonanzkurven.

Da wir nur stationäre Rollzustände betrachten, können wir nicht ohne weiteres ihre dynamische Stabilität untersuchen. Wir formulieren deshalb ein auf die Amplitudenbeziehung (57a) bzw. (57b) anwendbares Kriterium für die „Beständigkeit“ eines Rollzustandes, nämlich daß bei konstanter Periode die Rollamplitude nur dann größer werden darf, wenn die Wellenschräge wächst, und nur dann kleiner, wenn die Wellenschräge abnimmt. Abstrakter ausgedrückt: „Ein beständiger Schwingungszustand liegt vor, wenn beim Übergang zu jedem stationären Nachbarzustand gleicher Periode die Amplituden von Erregung und Schwingung (ungeachtet ihrer Phase) gleichzeitig zu- oder abnehmen.“ Die beständigen Rollzustände sind also analytisch durch das Kriterium

$$C = \frac{\partial \vartheta^2}{\partial \bar{\psi}^2} > 0 \quad (60)$$

gekennzeichnet.

Wenn wir nun die Steigung der Resonanzkurven bei konstantem  $D$ , nämlich den Ausdruck

$$\frac{d\bar{\psi}}{dT_W^2} = \frac{\frac{\partial \vartheta^2}{\partial T_W^2}}{2\bar{\psi} \cdot \frac{\partial \vartheta^2}{\partial \bar{\psi}^2}} = \frac{\bar{\psi}}{C \cdot T_0^2(\bar{\psi})} \cdot \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \quad (61a)$$

bzw.

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\omega^2} = \frac{\frac{\partial \vartheta^2}{\partial \omega^2}}{2\bar{\psi} \cdot \frac{\partial \vartheta^2}{\partial \bar{\psi}^2}} = \frac{\bar{\psi} \cdot v_0^2(\bar{\psi})}{C \cdot \omega^4} \cdot \left( \frac{v_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \quad (61b)$$

betrachten, so finden wir die Regel, daß diese bei beiden Auftragungen in solchen Punkten, welche beständige Rollzustände ( $C > 0$ ) darstellen, links der Grundkurve [ $T_W^2 < T_0^2(\bar{\psi})$  bzw.  $\omega^2 < v_0^2(\bar{\psi})$ ] positiv, rechts davon [ $T_W^2 > T_0^2(\bar{\psi})$  bzw.  $\omega^2 > v_0^2(\bar{\psi})$ ] negativ ist. Bei veränderlichem  $D$  liegt das Resonanzmaximum nicht auf der Grundkurve; dann läßt sich mit einigem Aufwand von Differentialquotienten bis zur 2. Ordnung dieselbe Regel für Punkte links bzw. rechts vom Resonanzmaximum beweisen.

Auf der Grenze zwischen beständigen und nicht-beständigen Rollzuständen ist  $C = 0$ ; dort verlaufen die Resonanzkurven lotrecht. Die Amplitudenbeziehung (57a bzw. 57b) liefert für die Beständigkeitsgrenze die Gleichung

$$\begin{aligned} C &= \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right)^2 + D^2(T_W) \\ &- \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \frac{T_W^2 \cdot \bar{\psi}}{T_0^4(\bar{\psi})} \cdot \frac{dT_0^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} = 0 \\ &= \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} \cdot \left[ 1 - \frac{\bar{\psi}}{T_0^2(\bar{\psi})} \cdot \frac{dT_0^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} \right] - 1 \right) \\ &+ D^2(T_W) = 0 \end{aligned} \quad (62a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} C &= \left( \frac{v_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right)^2 + D^2(\omega) \\ &+ \left( \frac{v_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \cdot \frac{\bar{\psi}}{\omega^2} \cdot \frac{dv_0^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} = 0 \\ &= \left( \frac{v_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{v_0^2(\bar{\psi})}{\omega^2} + \frac{\bar{\psi}}{\omega^2} \cdot \frac{dv_0^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} - 1 \right) \\ &+ D^2(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (62b)$$

Hieraus können wir die Grenzkurve mit elementaren Mitteln graphisch konstruieren.

Bei zunächst vernachlässigter Dämpfung ( $D = 0$ ) müssen die runden Klammern in (62a bzw. 62b) einzeln null sein. Daraus folgen die Lösungen

$$T_W^2 = T_0^2(\bar{\psi}) \quad \text{und} \quad T_W^2 = T_*^2(\bar{\psi}) \quad (63a)$$

bzw.

$$\omega^2 = v_0^2(\bar{\psi}) \quad \text{und} \quad \omega^2 = v_*^2(\bar{\psi}), \quad (63b)$$

von denen die jeweils erste die Grundkurve darstellt und die zweite durch die Beziehung

$$T_*^2(\bar{\psi}) \cdot \left( \frac{d\bar{\psi}}{dT_0^2(\bar{\psi})} - \frac{\bar{\psi}}{T_0^2(\bar{\psi})} \right) = T_0^2(\bar{\psi}) \cdot \frac{d\bar{\psi}}{dT_0^2(\bar{\psi})} \quad (64a)$$

bzw.

$$v_*^2(\bar{\psi}) = v_0^2(\bar{\psi}) + (\bar{\psi}) \cdot \frac{dv_0^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} \quad (64b)$$

damit verknüpft ist.



aber noch die Frage offen, welcher von den zwei oder u. U.<sup>8)</sup> drei möglichen Rollzuständen gleicher Periode in der Wirklichkeit zu erwarten ist. Diese Frage muß statistisch betrachtet werden; es kommt dabei auf den Anfangszustand, aus dem das Schiff in den beständigen Rollzustand einschwingt, und auf die Größe und den zeitlichen Verlauf derjenigen Störmomente an, welche den Übergang in einen anderen Rollzustand bewirken könnten. Diese Dinge liegen außerhalb unserer, auf stationäre Zustände beschränkten Betrachtung. Wir können aber von anderer Seite her zweierlei dazu sagen: Zunächst sind Rollzustände kleiner Amplitude wahrscheinlicher als solche großer Amplitude, weil in den letzteren mehr Energie steckt, die dem Schiff erst zugeführt werden muß. Zum anderen hat der Verfasser bei Experimenten am Navipendulum [8] mit einem Schiffspendel sinusförmiger Hebelarmkurve deutlich erfahren, daß in dem zweideutigen Frequenzintervall die Rollzustände großer Amplitude nur mit Sorgfalt hergestellt werden konnten, und daß schon geringfügige Störungen den Übergang in den Rollzustand kleinerer Amplitude bewirkten, und zwar um so eher, je höher der Bildpunkt auf dem Resonanzkurvenast lag. Die Energiebetrachtung und das Experiment sprechen also für eine größere Wahrscheinlichkeit der kleineren Amplitude.

Die jeder Dünung in praxi überlagerten Störwellen werden dem Schiff nur selten gerade den Impuls erteilen, der zum Übergang aus dem Rollzustand kleiner Amplitude in denjenigen großer Amplitude erforderlich ist, sie werden aber meist ausreichen, den diffizilen Rollzustand großer Amplitude zu stören.

#### f) Nachträge

Nachdem wir bisher nur Beziehungen zwischen den Amplituden und Frequenzen betrachtet haben, verschaffen wir uns noch nachträglich Einblick in den zeitlichen Ablauf der Bewegungen von Schiff und Dünung.

Die Phasenlage der Rollbewegung zur Welle hängt von dem Verhältnis

$$\bar{\vartheta}_b : \bar{\vartheta}_w = \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) : D(T_W) \quad (67)$$

ab. Im Resonanzfall  $T_W^2 = T_0^2(\bar{\psi}_{res})$  ist  $\bar{\vartheta}_b = 0$  und der Rollwinkel  $\psi(t)$  läuft wegen (42) mit einer Verspätung von  $1/4$  Periode hinter der Wellenneigung  $\vartheta(t)$  her. Das Schiff hat demnach auf einem Wellenberg gerade seine größte Neigung  $\psi_1$  in Richtung der zuletzt passierten Wellenschräge, also nach der Leeseite der Dünung; im Wellental findet die größte luvseitige Schiffsneigung  $\psi_2$  statt. Außerhalb der Resonanz treten die Extremlagen des Schiffs entsprechend Gleichung (67) früher [ $T_W > T_0(\bar{\psi})$ ] oder später [ $T_W < T_0(\bar{\psi})$ ] ein.

Nun ist das Rückstellmoment wegen der Gewichtsschwankung (4) in der Bergphase kleiner als in der Talphase. Infolgedessen ist die leeseitige Neigung des Schiffs größer als die luvseitige; d. h. das Oszillogramm

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_\infty(t) \quad (68)$$

enthält eine mittlere leeseitige Krängung  $\psi_0$ . Um ihre Größe abzuschätzen, ersetzen wir im Resonanzfall, wo  $\psi_\infty(t)$  und  $\beta(t)$  phasenrein sind, wieder den Schwankungsfaktor  $1 + \beta(t)$  in der Differentialgleichung (45) während der Bergphase durch einen konstanten Mittelwert  $1 - \delta \cdot |\bar{\beta}|$  und während der Talphase durch  $1 + \delta \cdot |\bar{\beta}|$ ,  $0 < \delta < 1$ , und setzen die Krängungsenergien der Extremlagen

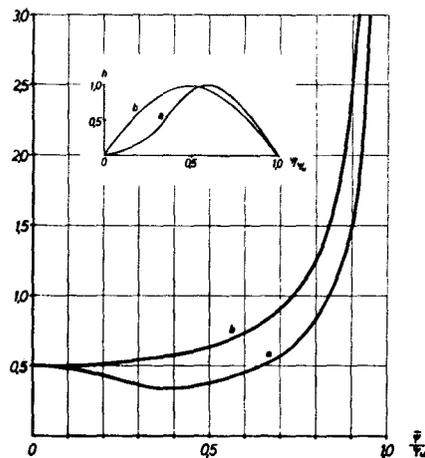


Bild 11 Zur Abschätzung der mittleren leeseitigen Krängung

$$\psi_2 = \psi_0 \pm \bar{\psi} \quad (69)$$

einander gleich:

$$[1 - \delta \cdot |\bar{\beta}|] \cdot U(\psi_0 + \bar{\psi}) = [1 + \delta \cdot |\bar{\beta}|] \cdot U(\psi_0 - \bar{\psi}) \quad (70)$$

Wegen der Symmetrie von  $U$  können wir dann bei Entwicklung nach  $\psi_0$  in erster Näherung

$$U(\psi_0 + \bar{\psi}) \pm U(\psi_0 - \bar{\psi}) = \begin{cases} 2 U(\bar{\psi}) \\ 2 \psi_0 \cdot P \cdot h(\bar{\psi}) \end{cases} \quad (71)$$

schreiben und erhalten schließlich die Beziehung

$$|\psi_0| < \frac{U(\bar{\psi})}{P \cdot h(\bar{\psi}) \cdot \bar{\psi}} \cdot |\bar{\psi} \cdot \bar{\beta}| \quad (72)$$

In Bild 11 ist der Bruch der rechten Seite für den in Bild 1 gezeigten Hebelarmverlauf (a) und für sinusförmigen Verlauf (b) dimensionslos dargestellt worden. Sein Wert liegt praktisch zwischen 0,5 und 1,0. Bei Resonanz mit einer Standardwelle (6) beträgt demnach die mittlere leeseitige Krängung eines Schiffes

mit der Rolldämpfung  $D = 0,2$  weniger als  $\frac{5\pi}{20} \cdot \frac{\pi}{20} = 7,2^\circ$ ;

meist sogar weniger als die Hälfte dieses Wertes. Außerhalb der Resonanz ist der Effekt geringer. — Die Tatsache einer mittleren Krängung verbietet keineswegs unseren Ansatz (44), denn  $\psi_0$  liefert keinen Beitrag zur Winkelbeschleunigung  $\dot{\psi}(t)$ .

Wir müssen aber nachträglich betonen, daß als Amplitude  $\bar{\psi}$  die halbe Winkeldifferenz zwischen den Endlagen, also die Amplitude von  $\psi_\infty(t)$ , zu nehmen ist, wie dies auch in (68) und (69) zum Ausdruck kommt.

Das Oszillogramm der Wellenneigung  $\vartheta(t)$ , welches dem Ansatz (44) entspricht, setzt sich gemäß (39) aus den um  $90^\circ$  phasenverschobenen Anteilen  $\vartheta_b(t)$  und  $\vartheta_w(t)$  zusammen, deren erster wegen (47a) bis auf eine geringe Verzerrung infolge der Gewichtsschwankung durch den Ausdruck

$$\vartheta_b(t) = \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \psi_\infty(t) \quad (73)$$

und deren zweiter durch Gleichung (52) gegeben ist. Also gilt

$$\vartheta(t) = \left( \frac{T_W^2}{T_0^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \psi_\infty(t) - \frac{W(T_W)}{J} \cdot \int \psi_\infty(t) dt \quad (74)$$

8) Positive Zusatzstabilität, kleine Wellenschräge, kleine Dämpfung.

Der erste Anteil ist bei endlichen Rollamplituden nicht sinusförmig, sondern ähnlich den in Bild 1 gezeigten Oszillogrammen; der zweite ist wegen der Integration schon eher sinusförmig, liefert aber nur in unmittelbarer Nähe der Resonanz einen maßgeblichen Beitrag. Im allgemeinen ist also mit  $\vartheta(t)$ -Oszillogrammen zu rechnen, deren Völligkeit — vgl. (53) und Bild 4 — von 1 etwas abweicht. Die anzunehmenden Wellen weichen von der Sinusform weniger ab als das  $\vartheta(t)$ -Oszillogramm, da sie aus diesem durch Integration über den durchlaufenden Weg gewonnen werden können. Erst bei Rollamplituden, die den statischen Kenterwinkel wesentlich überschreiten, müssen wir zugunsten unserer Methode ein Wellenprofil annehmen, das in Berg und Tal etwas spitzer ist als die Sinuslinie.

#### Schrifttum

- [1] Russo, G. „An experimental method of ascertaining the rolling of ships in waves.“ Trans. Inst. Naval Architects 42 (1900) 30—52.
- [2] Scribanti, A. „On the heeling and rolling of ships of small initial stability.“ Trans. Inst. Naval Architects 46 (1904), 93—116.
- [3] Weinblum, G. „Die Bewegungsgleichungen des Schiffes im Seegang.“ Schiffbau 32 (1931), 486—495, 509—511 und 525—529.
- [4] Späth, W. „Beitrag zur Dynamik der Schiffsbewegungen im Seegang.“ Werft, Reederei, Hafen 14 (1933), 104—106.
- [5] Weinblum, G. „Über den Einfluß der Schiffsform auf die Bewegungen eines Schiffes im Seegang.“ Werft, Reederei, Hafen 14 (1933), 269—275 und 289—292.
- [6] Kempf, G. „Stabilitätsgrenzen für Schiffe.“ Schiffbau 41 (1940), 17—18.
- [7] Wendel, K. „Rollschwingungen und Hebelarmkurve.“ Schiffbau 41 (1940), 45—51.
- [8] Baumann, H. „Das Navipendulum als Gerät für Modellschlingerversuche.“ Werft, Reederei, Hafen 22 (1941), 103 bis 104.
- [9] Grim, O. „Zur Stabilität der periodischen, erzwungenen Rollschwingungen eines Schiffes.“ Ingenieurarchiv 22 (1954), 55—59.
- [10] Kauderer, H. „Zur kinetischen Bestimmung der Kennlinie eines nichtlinearen freien Schwingers.“ Ingenieurarchiv 22 (1954), 215—226.