

416 | Mai 1982

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

H. Gasau

Zur Behandlung der stationären Teil- und Superkavitation an Tragflügelprofilen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Zur Behandlung der stationären Teil- und Superkavitation an Tragflügelprofilen

H. Gasau, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1982

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 416

Zur Behandlung der stationären Teil- und
Superkavitation an Tragflügelprofilen

von

H. Gasau

Hamburg, Mai 1982

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Das Integralgleichungssystem zur Berechnung der durch die Kavitation bedingten zusätzlichen Belegungen	2
3. Die Behandlung von Kavitationserscheinungen am Profil bei inhomogener Zuströmung	5
4. Der Einfluß der Kavitation auf die Druckverteilung am Profil	15
5. Diskussion einer Lösungsvarianten für das Integralgleichungssystem bei Teilkavitation	19
6. Die Behandlung von Superkavitation	29
7. Der Übergang von der Super- zur Vollkavitation	35
8. Darstellung und Diskussion der Rechenergebnisse	39
9. Literatur	43
Zusammenfassung	45
Anhang	
A. Überprüfung der Lösungen für die Singularitätenbelegungen im Grenzfall der Vollkavitation	
B. Beweis einiger Integralformeln	
C. Abbildungen	

1. Einleitung

Als Kavitation bezeichnet man die instabile Aufweitung von Dampfkeimen in Flüssigkeiten im Druckfeld eines Strömungskörpers. Sie tritt auf, sobald der örtliche Druck absinkt auf einen kritischen, von der Geometrie der Keime abhängigen, Wert unterhalb des thermodynamischen Gleichgewichtsdampfdrucks. Diese sogenannten Kavitationskeime sind die Voraussetzung für das Auftreten von Kavitation, da sie die zum Aufreißen des Wassers erforderlichen Zugspannungen erheblich herabsenken. In reinem Wasser läßt sich deshalb auch keine Kavitation beobachten.

Von den vielfältigen Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern ist insbesondere die Schichtkavitation von Interesse. Sie tritt bei größeren Anstellwinkeln praktisch bei allen Tragflügelprofilen und Schiffspropellern auf. In stark keimhaltigem Wasser kommt es, beginnend in der Grenzschicht, an den Profilen durch das Berühren und teilweise Zusammenwachsen der einzelnen Blasen zur Bildung ausgedehnter Kavitationsgebiete, die wie eine Schicht am Profil haften. Sie weisen in ihrem Innern eine Art Wabenstruktur auf. Die Behandlung der Schichtkavitation mit Hilfe der Blasendynamik erfordert die Einführung empirischer Parameter, da diese Theorie strenggenommen ja nur die zeitliche Entwicklung einzelner Kavitationsblasen beschreiben kann. Die Bestimmung dieser Parameter ist unsicher, weil genaue Experimente fehlen. So bereitet z.B. die Messung der Keimverteilung in der Anströmung zum Profil besonders für kleine Radien noch erhebliche Schwierigkeiten (siehe /4/). Aus diesem Grund wurde schon früh versucht, die Kavitation am Profil phänomenologisch mit Hilfe der aus der Aerodynamik bekannten Profiltheorie zu erfassen. Bei ihrer Anwendung wird die Kavitationsschicht als zusätzlicher Strömungskörper betrachtet, in dessen Innern homogen Dampfdruck herrscht. Der Einfluß dieser Schicht auf die strömungsmechanischen Eigenschaften des Profils wird dann entweder mit Methoden der konformen Abbildung, z.B. /5/ oder durch zusätzliche Singularitätenbelegungen am Profil erfaßt (z.B. /7/ und /11/). Auch die Anwendung der Profiltheorie

kommt nicht ohne die Einführung empirischer Größen aus. So ist zum Beispiel die Vorstellung von einer Kavitationsschicht als geschlossenem Strömungskörper unrealistisch, da an ihrem hinteren Ende kein Staupunkt der Strömung auftreten kann. Fordert man die Erfüllung der aus der Profiltheorie bekannten Schließungsbedingung, so liefert die Theorie stets unrealistische Singularitäten. Es hat sich in der Literatur deshalb durchgesetzt, mit einem sogenannten offenen Kavitationsmodell zu arbeiten, bei dem die Dicke der Schicht am hinteren Ende durch empirische Bedingungen festgelegt wird.

Der Nachteil der Profiltheorie gegenüber der Blasendynamik ist in der Tatsache zu sehen, daß sie dem eigentlichen physikalischen Kavitationsvorgang nicht gerecht wird. Sie ist nicht in der Lage, den Aufweitungsvorgang der einzelnen Blasen zu beschreiben und berücksichtigt auch nicht den Einfluß der Wasserqualität auf die Kavitation. Dafür umgeht die Profiltheorie aber durch die Annahme eines homogenen Druckes im Innern der Schicht die Schwierigkeit, das Zusammenwachsen der einzelnen Blasen beschreiben zu müssen. Außerdem brauchte der durch Dampfbildung in Wasser bedingte Zugspannungsabbau nicht berücksichtigt zu werden. Sie liefert mit Experimenten zufriedenstellend übereinstimmende Aussagen über die Ausdehnung und Geometrie einer am Profil haftenden Kavitationsschicht sowie über den Einfluß der Kavitation auf die strömungsmechanischen Profileigenschaften.

Die hier vorgelegte Arbeit schließt direkt an die Ergebnisse einer Veröffentlichung von Alwardt und Isay /2/ an. In ihr wurde ein Integralgleichungssystem zur Berechnung der durch die Kavitation bedingten zusätzlichen Singularitäten-Belegungen aufgestellt und verschiedene Lösungsvarianten diskutiert.

Die vorliegende Arbeit läßt sich in 4 Teile gliedern:

- a) In /2/ wurde eine Theorie zur Berechnung von Kavitationsschichten, die nicht an der Profilverkante beginnen, aufgestellt. Zur Bestimmung der Kavitationsausdehnung wird auf die in /11/ vorgestellte Nishiyama-Bedingung verzichtet, die von einem definierten konstanten Anstellwinkel der Strömung

am Profil ausgeht. Aus diesem Grund läßt sich die Theorie ohne die Nishiyama-Bedingung auch zur Beschreibung von Kavitationserscheinungen bei einem über die Profiltiefe variablen Anstellwinkel verwenden. Es wird der Fall eines sich linear ändernden Anstellwinkels betrachtet. Des weiteren wird die Theorie auch für höhere Anstellwinkel durchgerechnet und die Möglichkeit der Anwendung auf Kavitations-schichten, die an der Profilverderkante beginnen, überprüft.

- b) Basierend auf der Theorie aus a) wird die Änderung der Druckverteilung am kavitierenden Profil bestimmt.
- c) Eine zusätzliche Lösungsvariante für das in /2/ aufgestellte Integralgleichungssystem wird diskutiert. Dabei wird zunächst von der Annahme ausgegangen, daß die zusätzliche Quell-Senken-Belegung im gesamten Profilbereich definiert ist. Da durch sie die Kavitationsschicht mathematisch nachgebildet wird, muß später wieder gefordert werden, daß diese Zusatzbelegung außerhalb des Kavitationsbereiches identisch verschwindet.
- d) Eine Theorie zur Beschreibung von Superkavitationserscheinungen an Tragflügelprofilen wird aufgestellt. Sie bleibt auch im Grenzfall der Vollkavitation gültig und liefert einen stetigen Übergang zur Theorie für die Teilkavitation.

2. Das Integralgleichungssystem zur Berechnung der durch die Kavitation bedingten zusätzlichen Belegungen

Bei der Anwendung der Profiltheorie zur Beschreibung von Kavitationserscheinungen wird eine am Profil haftende Kavitationsschicht als zusätzlicher Strömungskörper betrachtet, dessen Verdrängungswirkung man mathematisch durch eine Quell-Senken-Belegung $q_\eta(x)$ beschreiben kann. Dem durch die Kavitation veränderten Auftrieb tragen wir durch eine zusätzliche Wirbelbelegung $\gamma_\eta(x)$ Rechnung. Im Folgenden stellen wir ein Integralgleichungssystem zur Berechnung dieser Belegungen auf. Die Herleitung lehnt sich eng an die Darstellungen in /2/ und /1/ an. Zur Einführung in die Profiltheorie sei insbesondere auf /3/ und /10/ verwiesen.

Wir betrachten ein mäßig dickes und schwach gewölbtes Profil der Länge $2A$ in ebener Anströmung. Die Profilsehne fällt im Intervall $-A \leq x \leq A$ mit der x -Achse zusammen. Auf der Saugseite des Profils haftet im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$ eine Kavitationsschicht mit der örtlichen Dicke $2\eta(x)$ (siehe Abb. 1).

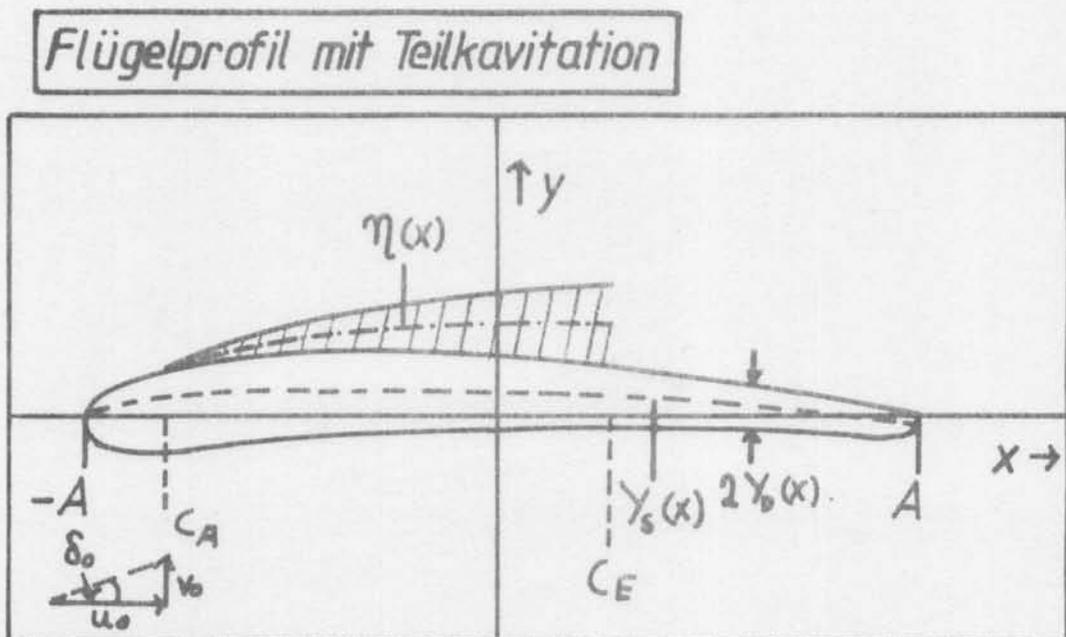


Abb. 1

Nach der Profiltheorie ergibt sich zur Bestimmung von
Die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{q_{\eta}(x)}{2u_0} \quad (2.1)$$

Als Strömungsrandbedingung für das kavitierende Profil fordern wir, daß die Mittellinie $\gamma_s(x) + \eta(x)$ Stromlinie sein soll. Mit $\delta_0 = \arctan(V_0/u_0)$ führt dies nach /3/ zu der Aussage

$$\delta_0 - \frac{d\gamma_s}{dx} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \delta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \gamma_{\eta}(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (2.2)$$

Die Neigung der Mittellinie muß im Bereich $-A \leq x \leq A$ stetig sein, da jede Sprungstelle zu einer physikalisch nicht interpretierbaren Singularität führen würde. Die zusätzliche Quell-Senken-Belegung muß demnach unter Berücksichtigung von /1/ folgenden Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} CA = -A & : & q_{\eta}(CA) &= 0 \\ CA \geq -A & : & q_{\eta}(CA) &= 0 \quad \text{und} \quad q_{\eta}(CE) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Des weiteren fordern wir, daß im Bereich der Kavitationsschicht homogen der Dampfdruck P_v herrscht. Als Kavitationsbeiwert G_v definieren wir den Druckbeiwert im Kavitationsgebiet

$$G_v = \frac{P_{\infty} - P_v}{\frac{\rho}{2} u_0^2} \quad (2.4)$$

Im Rahmen der linearisierten Profiltheorie vernachlässigen wir die Produkte und Quadrate der von den Belegungen induzierten Geschwindigkeiten sowie den Einfluß der Dickenlinie γ_0 auf die Druckverteilung. Ferner sind alle Randbedingungen auf der Profilschne (y = 0) zu erfüllen.

Mit $G_v = 2 \frac{u_q}{u_0} + 2 \frac{u_r}{u_0}$ und

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} u_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q_2(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad \text{sowie}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} u_r(x) = \frac{\gamma(x)}{2} + \frac{\gamma_2(x)}{2}$$

erhalten wir schließlich

$$G_v = \gamma(x) + \gamma_2(x) + \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^A q(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} + \frac{1}{\pi u_0} \int_{CA}^{cE} q_2(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (2.5)$$

Die zu (2.2) und (2.5) analogen Gleichungen im nichtkavitierenden Zustand sind

$$\delta_0 - \frac{d\gamma_s}{dx} = \frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (2.6)$$

$$c_p(x) = \gamma(x) + \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^A q(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (2.7)$$

Wir lösen (2.2) und (2.6) nach $\delta_0 - \frac{d\gamma_s}{dx}$ auf und setzen gleich. Unter Berücksichtigung von (2.1) erhalten wir

$$-q_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \gamma_2(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (2.8)$$

Wir bilden die Differenz zwischen (2.5) und (2.7)

$$G_v - c_p(x) = \frac{\gamma_2(x)}{u_0} + \frac{1}{\pi u_0} \int_{CA}^{cE} q_2(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (2.9)$$

Die Gleichungen (2.8) und (2.9) stellen ein gekoppeltes Integralgleichungssystem zur Bestimmung der durch Kavitation bedingten zusätzlichen Belegung dar. Bei seiner Auflösung haben wir zu bedenken, daß zuerst nach der im größeren Bereich definierten Variablen invertiert werden muß. Beide Gleichungen gelten sowohl für Super- als auch für Teilkavitation.

3. Die Behandlung von Kavitationserscheinungen am Profil bei inhomogener Zuströmung

Als inhomogen bezeichnen wir solche Kavitationserscheinungen, bei denen der Zustromwinkel über die Profiltiefe variiert. Inhomogene Anströmung tritt z.B. bei den Blättern eines Propellers auf. Zur Bestimmung der Kavitationsausdehnung können wir nicht mehr auf die Nishiyama-Bedingung zurückgreifen, die einen konstanten Anstellwinkel voraussetzt.

In /2/ wurde eine Lösung des Integralgleichungssystems (2.8) und (2.9) angegeben für Kavitationsschichten, die nicht an der Profilverderrkante beginnen. Diese Lösung verzichtet auf die Nishiyama-Bedingung, so daß sie sich auch für die Beschreibung inhomogener Kavitationserscheinungen eignet. Wir stellen im Folgenden diese Lösung vor, rechnen aber mit etwas anderen Transformationen als in /2/.

Bei der Inversion von (2.8) und (2.9) berücksichtigen wir, daß q_η nur im Kavitationsbereich definiert ist, γ_η hingegen im gesamten Profilbereich. Würden wir γ_η ebenfalls nur auf den Kavitationsbereich beschränken, so ergibt sich für $CA > A$ keine physikalisch sinnvolle Lösung, wie in /2/ gezeigt wird. Wir invertieren zunächst (2.8) nach γ_η . Hierzu verwenden wir aus /8/ die Inversionsformel

$$\gamma_\eta(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \left[\Gamma + \int_{-A}^A q_\eta(\xi) \sqrt{A^2 - \xi^2} \frac{d\xi}{x - \xi} \right]$$

mit
$$\Gamma = \int_{-A}^A \gamma_\eta(\xi) d\xi \tag{3.1}$$

die gültig ist für Integralgleichungen der Art (2.8). Die Konstante Γ , die nach /8/ beliebig vorgegeben werden darf, legen wir durch die Erfüllung der Kutta'schen Abflußbedingung $\gamma_{\eta}(CE) = 0$ fest. Wir erhalten

$$\gamma_{\eta}(x) = \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \frac{1}{\pi} \int_{CA}^{CE} a_{\eta}(\zeta) \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}} \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (3.2)$$

Um eine Integralgleichung für a_{η} zu erhalten, setzen wir (3.2) in (2.9) ein

$$G_v - C_p(x) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{CA}^{CE} a_{\eta}(\zeta) \left[1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x} \frac{A+\zeta}{A-\zeta}} \right] \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (3.3)$$

Um zur Inversion von (3.3) ebenfalls die Formel (3.1) verwenden zu können, müssen wir eine Variablen-Transformation vornehmen, die das Integral in eine Form wie (2.8) bringt. Wir setzen

$$\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} = \beta_1 z + \beta_2 = (b-b')z + (b+b')$$

$$\text{mit } b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A+CE}{A-CE}}, \quad b' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A+CA}{A-CA}} \quad (3.4)$$

Durch die Transformation (3.4) bilden wir den Bereich $CA \leq x \leq CE$ ab auf $-1 \leq z \leq 1$. Mit

$$\frac{d\zeta}{x-\zeta} = 2 \frac{1+(\beta_1 z + \beta_2)^2}{1+(\beta_1 z' + \beta_2)^2} \frac{\beta_1 z' + \beta_2}{\beta_1(z+z') + 2\beta_2} \frac{dz'}{z-z'}$$

geht (3.3) über in

$$G_v - C_p(z) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{-1}^1 a_{\eta}(z') 2 \cdot \frac{\beta_1 z' + \beta_2}{\beta_1 z + \beta_2} \frac{1+(\beta_1 z + \beta_2)^2}{1+(\beta_1 z' + \beta_2)^2} \frac{dz'}{z-z'} \quad (3.5)$$

Zur Inversion bringen wir (3.5) in die Form

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{q}_\eta(z') \frac{dz'}{z-z'} = F(z)$$

mit
$$\tilde{q}_\eta(z') = q_\eta(z') \cdot \frac{\beta_1 z' + \beta_2}{1 + (\beta_1 z' + \beta_2)^2}$$

und
$$F(z) = \frac{u_0}{2} (G_v - C_p(z)) \frac{\beta_1 z + \beta_2}{1 + (\beta_1 z + \beta_2)^2}$$

Mit der Formel (3.1) erhalten wir als Lösung

$$\tilde{q}_\eta(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}} \left[Q - \int_{-1}^1 F(z') \sqrt{1-z'^2} \frac{dz'}{z-z'} \right]$$

Die Konstante Q legen wir fest durch die Erfüllung der Randbedingung (2.3) an der Stelle CE. Mit

$$Q = \int_{-1}^1 F(z') \sqrt{1-z'^2} \frac{dz'}{1-z'} \quad (3.6)$$

erhalten wir schließlich als Inversion von (3.5)

$$\begin{aligned} \frac{q_\eta(z)}{u_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 + (\beta_1 z + \beta_2)^2}{\beta_1 z + \beta_2} \cdot \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \\ &\quad \cdot \int_{-1}^1 (C_p(z') - G_v) \cdot \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \cdot \frac{\beta_1 z' + \beta_2}{1 + (\beta_1 z' + \beta_2)^2} \cdot \frac{dz'}{z-z'} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nach (2.3) muß q_η auch bei CA verschwinden. Für Q ergibt sich dann

$$Q = - \int_{-1}^1 F(z') \sqrt{1-z'^2} \frac{dz'}{1+z'} \quad (3.8)$$

Da $Q = \int_{-1}^1 \tilde{a}_n(z') dz'$ eindeutig ist, müssen (3.6) und (3.8) identisch sein. Dies führt zu der Bedingung

$$\int_{-1}^1 \left[(\rho(z') - G_v) \frac{\beta_1 z' + \beta_2}{1 + (\beta_1 z' + \beta_2)^2} \frac{dz'}{\sqrt{1 - z'^2}} \right] = 0 \quad (3.9)$$

Wir addieren jetzt zu (3.7) die Bedingung (3.9) und berücksichtigen, daß $\beta_1 z' + \beta_2 = 2b' + (b-b')(1+z)$

Damit ergibt sich für die zusätzliche Quell-Senken-Belegung

$$\frac{q_n(z)}{u_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + (2b' + (b-b')(1+z))^2}{2b' + (b-b')(1+z)} \cdot \int_{-1}^1 \left[(\rho(z') - G_v) \cdot \sqrt{\frac{1-z'^2}{1-z'^2}} \frac{2b' + (b-b')(1+z')}{1 + (2b' + (b-b')(1+z'))^2} \frac{dz'}{z - z'} \right] \quad (3.10)$$

Zur besseren numerischen Auswertung gehen wir über zu trigonometrischen Variablen und transformieren

$$z = -\cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad 1+z = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1-z'^2}{1-z'^2}} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \tau}, \quad \frac{dz'}{z - z'} = \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} \quad (3.11)$$

Wir erhalten

$$\frac{q_n(\tau)}{u_0} = \frac{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\vartheta}{2})^2}{b' + (b-b') \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[(\rho(\tau) - G_v) \cdot \frac{b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2}}{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2} \frac{\sin \vartheta d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} \right]$$

Wir können das Integral exakt auswerten, wenn wir einen Teil des Integranden durch eine Fourier-Cosinus-Reihe approximieren.

Wir setzen

$$\left[c_p(\tau) - G_v \right] \cdot \frac{b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2}}{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \cos \lambda \tau \quad (3.12)$$

Unter Verwendung der aus der Literatur (z.B. /3/) bekannten Integralformel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} = \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} \quad (3.13)$$

erhalten wir endgültig für die zusätzliche Quell-Senken-Belegung

$$\frac{q_n(\vartheta)}{u_0} = \frac{1}{2} \frac{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\vartheta}{2})^2}{b' + (b-b') \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \sin \lambda \vartheta \quad (3.14)$$

Hieraus können wir unmittelbar die Dicke der Kavitationsschicht bestimmen. Nach (2.1) gilt

$$2\eta(x) = \int_{CA}^x \frac{q_n(x)}{u_0} dx \quad (3.15)$$

Aus (3.4) und (3.11) ergeben sich die Transformationsbeziehungen

$$\vartheta(x) = \arccos \left[\frac{(b+b' - \sqrt{\frac{A+x}{A-x}})}{(b-b')} \right]$$

$$\frac{dx}{A} = \frac{8(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\vartheta}{2})(b-b') \sin \vartheta d\vartheta}{[1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\vartheta}{2})^2]^2} \quad (3.16)$$

Die Dicke der Kavitationsschicht ergibt sich damit zu

$$\frac{2\eta(x)}{A} = 4(b-b') \cdot \int_0^{\psi(x)} \frac{\sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \sin \lambda \psi \sin \psi}{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\psi}{2})^2} d\psi \quad (3.17)$$

Zur Berechnung der Kavitationsausdehnung, d.h. zur Festlegung des Kavitationsbeiwertes für einen bestimmten CE-Wert, gehen wir aus von der Bedingung (3.9). Unter Verwendung der Transformation (3.11) nimmt sie die Form an

$$\int_0^{\pi} [(\rho(\tau) - G_v)] \frac{2(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})}{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2} d\tau = 0 \quad (3.18)$$

Wir verwenden erneut die Fourierapproximation (3.12) und erhalten

$$a_0 \int_0^{\pi} d\tau + 2 \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \int_0^{\pi} \cos \lambda \tau d\tau = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 0 \quad (3.19)$$

Um aus der Bedingung (3.19) den Kavitationsbeiwert zu erhalten, spalten wir die Koeffizienten in (3.12) auf in $a_{\lambda} = a_{\lambda}' - G_v a_{\lambda}''$. Aus (3.19) ergibt sich dann

$$G_v = a_0' / a_0''$$

mit

$$a_0' = \frac{2}{N} \left[\frac{F_1(0) + F_1(\pi)}{2} + \sum_{\lambda=1}^{N-1} F_1(\pi \cdot \lambda / N) \right]$$

$$a_0'' = \frac{2}{N} \left[\frac{F_2(0) + F_2(\pi)}{2} + \sum_{\lambda=1}^N F_2(\pi \cdot \lambda / N) \right] \quad (3.20)$$

sowie $F_1(\tau) = C_p(\tau) \cdot F_2(\tau)$

$$F_2(\tau) = \frac{b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2}}{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2}$$

Bei Vorgabe eines CA-Wertes erhalten wir aus (3.20) G_v als Funktion von CE.

Zur Ermittlung der zusätzlichen Wirbelbelegung γ_n setzen wir die Lösung (3.14) in (3.2) ein. Mit den Transformationen (3.4) und (3.11) erhalten wir

$$\frac{\gamma_n(\mathcal{J})}{u_0} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (\beta_2 - \beta_1 \cos \mathcal{J})^2}{\beta_2 - \beta_1 \cos \mathcal{J}} \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \cdot \frac{1}{\beta_1} \int_0^\pi \frac{\beta_2 - \beta_1 \cos \tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{J}} \cdot \frac{\sin \lambda \tau \sin \tau d\tau}{2 \beta_2 / \beta_1 - \cos \mathcal{J} - \cos \tau} \quad (3.21)$$

Wir substituieren $\cosh \theta = 2 \beta_2 / \beta_1 - \cos \mathcal{J}$ und verwenden die im Anhang bewiesene Integralformel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau d\tau}{(\cosh \theta - \cos \tau)(\cos \tau - \cos \mathcal{J})} = \frac{1}{\cosh \theta - \cos \mathcal{J}} \left(\frac{\sin \lambda \mathcal{J}}{\sin \mathcal{J}} + \frac{e^{-\lambda \theta}}{\sinh \theta} \right) \quad (3.22)$$

Damit ergibt sich für die Zusatzwirbelbelegung im Bereich der Kavitationsschicht

$$\frac{\gamma_n(\mathcal{J})}{u_0} = - \frac{1}{2} \frac{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2})^2}{b' + (b-b') \sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2}} \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \left[\cos \lambda \mathcal{J} + e^{-\lambda \theta} \right] \quad (3.23)$$

Die in diesem Abschnitt aufgestellten Formeln gelten sowohl für homogene als auch für inhomogene Zuströmung. Wir müssen lediglich für $C_p(\tau)$ die entsprechende Druckverteilung einsetzen. Im Folgenden berechnen wir die Druckverteilung am Profil für den Fall eines sich über die Profiltiefe linear ändernden Anstellwinkels.

Aus der Profiltheorie, z.B. /3/, ist bekannt, daß sich die Druckverteilung am Profil in folgender Form darstellen läßt

$$C_p(x) = \frac{\left(\frac{u_r}{u_0} + \frac{u_q}{u_0} + 1\right)^2}{1 + \left(\frac{dY_D}{dx}\right)^2} - 1 \quad (3.24)$$

Es ist üblich, mit der Transformation $X = -A \cdot \cos \varphi$ den Profilbereich auf $0 \leq \varphi \leq \pi$ abzubilden. Die durch die Quell-Senken-Belegung induzierte Geschwindigkeit u_q und die Ableitung der Dickenlinie Y_D' können dann geschrieben werden als

$$\frac{u_q(\varphi)}{u_0} = B_0 (1 + 2 \cos \varphi) - B_1 (1 - 2 \cos \varphi) - \sum_{\lambda=1}^N B_\lambda \cos \lambda \varphi$$

$$Y_D' = \frac{a_2(\varphi)}{2u_0} = B_0 \left(\cot \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi\right) + B_1 \left(\tan \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi\right) + \sum_{\lambda=2}^N B_\lambda \sin \lambda \varphi \quad (3.25)$$

Die Profilkoeffizienten B_λ lassen sich der einschlägigen Literatur wie z.B. /9/ für standardisierte Profile entnehmen.

Der Einfluß des Zuströmwinkels wird in der durch die Wirbelbelegung induzierten Geschwindigkeit u_r berücksichtigt. Nach der linearisierten Profiltheorie gilt

$$\frac{u_r(\varphi)}{u_0} = \frac{\gamma(\varphi)}{2u_0} \quad (3.26)$$

Zur Bestimmung der Wirbelbelegung müssen wir (2.6) invertieren. Unter Berücksichtigung der Kutta'schen Abflußbedingung aus der Profiltheorie, $\gamma(A) = 0$, erhalten wir

$$\frac{\gamma(x)}{2u_0} = - \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \left(\delta(x) - \frac{dY_D}{dx} \right) \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}} \frac{d\zeta}{x-\zeta}$$

Wir gehen über zu trigonometrischen Variablen und approximieren sowohl $\delta(\psi)$ als auch $Y_s'(\psi)$ durch eine Cosinusreihe

$$\sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = \cot \frac{\psi}{2}, \quad \frac{dx}{x-z} = \frac{\sin \psi d\psi}{\cos \psi - \cos \varphi}$$

$$\delta(\psi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N a_{2\lambda} \cos 2\lambda \psi, \quad Y_s'(\psi) = \frac{b_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N b_{2\lambda} \cos 2\lambda \psi$$

(3.27)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{Y_2(\psi)}{2u_0} &= -\cot \frac{\psi}{2} \left[\left(\frac{a_0}{2} - \frac{b_0}{2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tan \frac{\psi}{2} \sin \psi d\psi}{\cos \psi - \cos \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\lambda=1}^N (a_{2\lambda} - b_{2\lambda}) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\lambda \psi \tan \frac{\psi}{2} \sin \psi d\psi}{\cos \psi - \cos \varphi} \right] \end{aligned}$$

Unter Verwendung der im Anhang bewiesenen Integralformeln

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tan \frac{\psi}{2} \sin \psi d\psi}{\cos \psi - \cos \varphi} = -1 \quad (3.28)$$

und

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\lambda \psi \tan \frac{\psi}{2} \sin \psi d\psi}{\cos \psi - \cos \varphi} = \sin 2\lambda \varphi \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \quad (3.29)$$

erhalten wir für die induzierte Geschwindigkeit

$$\frac{U_y(\psi)}{u_0} = \left(\frac{a_0}{2} - \frac{b_0}{2} \right) \cot \frac{\psi}{2} - \sum_{\lambda=1}^N (a_{2\lambda} - b_{2\lambda}) \sin 2\lambda \psi$$

(3.30)

Die Formel (3.30) gilt allgemein für gewölbte Profile mit beliebiger Variation des Zuströmwinkels. Bei ungewölbten Profilen ($Y_s = 0$) verschwinden alle b-Koeffizienten. Für die standardisier-

ten NACA-Profilen ist der Verlauf von γ_s' in /9/ tabelliert angegeben, so daß man die b_λ' leicht berechnen kann.

Wir betrachten jetzt den Fall eines sich über die Profiltiefe linear von δ_1 auf δ_2 ändernden Anstellwinkels:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1) \left(\frac{x+A}{2A} \right) \\ &= \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} + \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \frac{x}{A} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mit der üblichen Transformation $x = -A \cos \varphi$ erhalten wir

$$\delta(\varphi) = \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \cos \varphi \quad (3.32)$$

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich durch Koeffizientenvergleich mit (3.27) zu

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}, \quad a_1 = -\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}, \quad a_\lambda = 0 \quad \text{für } \lambda \geq 2$$

Die durch die Wirbelbelegung induzierte Geschwindigkeit ist damit

$$\begin{aligned} \frac{u_y(\varphi)}{u_0} &= \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \cot \frac{\varphi}{2} + \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \sin \varphi - \frac{b_0}{2} \cot \frac{\varphi}{2} + \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^N b_\lambda \sin \lambda \varphi \end{aligned} \quad (3.33)$$

Bei konstantem Anstellwinkel δ_0 ist

$$\frac{u_y(\varphi)}{u_0} = \delta_0 \cot \frac{\varphi}{2} - \frac{b_0}{2} \cot \frac{\varphi}{2} + \sum_{\lambda=1}^N b_\lambda \sin \lambda \varphi \quad (3.34)$$

Wir müssen jetzt noch die Transformationsbeziehung zwischen den Variablen τ und φ angeben, da mit ihnen unterschiedliche Bereiche auf das Intervall von 0 bis π abgebildet worden waren.

Aus (3.4) und (3.11) folgt

$$\frac{X}{A} = \frac{4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2 - 1}{4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2 + 1}$$

Mit $X/A = -\cos \varphi$ ergibt sich unmittelbar

$$\varphi(\tau) = \arccos \left[\frac{2}{1 + 4(b' + (b-b') \sin^2 \frac{\tau}{2})^2} - 1 \right] \quad (3.35)$$

4. Der Einfluß der Kavitation auf die Druckverteilung am Profil

Wir sind bisher immer von der Voraussetzung ausgegangen, daß im Innern der Kavitationsschicht homogen der Dampfdruck P_v herrscht. Da jede Unstetigkeit in der Druckverteilung am Profil physikalisch unrealistisch wäre, muß der Druckbeiwert außerhalb des Kavitationsbereiches, den wir mit $G_{vp}(x)$ bezeichnen wollen, an den Grenzen CA und CE identisch sein mit G_v . Das bedeutet, daß der Verlauf von G_{vp} verschieden ist gegenüber dem Verlauf des Druckbeiwertes C_p im nichtkavitierenden Zustand.

Um G_{vp} zu bestimmen, gehen wir aus von der Gleichung (3.3). Sie bleibt auch gültig für $x \leq CA$ bzw. $x \geq CE$. Mit der Transformation (3.4) geht (3.3) über in (3.5). Wir haben nun zu bedenken, daß dem Bereich $-A \leq x \leq CA$ das Intervall $-\frac{\beta_2}{\beta_1} \leq z \leq -1$ entspricht. Der Bereich $CE \leq x \leq A$ wird durch (3.4) abgebildet auf $1 \leq z \leq \infty$. Durch Einsetzen der Quell-Senken-Belegung (3.14) in die Gleichung (3.5) und unter Verwendung der Transformation (3.11) für z' erhalten wir nach elementarer Umformung

$$G_{vp}(z) - C_p(z) = \frac{1}{2} \frac{1 + 4(b' + (b-b') \frac{1+z}{2})^2}{b' + (b-b') \frac{1+z}{2}} \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{\cos \tau + z} d\tau \quad (4.1)$$

Zur Berechnung von G_{vp} ist es zweckmäßig, die folgenden aus der Aerodynamik, z.B. /15/, bekannten Integralformeln zu verwenden:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau d\tau}{\cos \tau - \cosh \Phi} = - \frac{e^{-\lambda \Phi}}{\sinh \Phi} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau d\tau}{\cos \tau + \cosh \Theta} = (-1)^{\lambda} \frac{e^{-\lambda \Theta}}{\sinh \Theta} \quad (4.3)$$

a) Druckverteilung vor der Kavitationsschicht

Wir setzen $Z = -\cosh \Phi$ und erhalten mit $\cosh \Phi - 1 = 2 \sinh^2 \frac{\Phi}{2}$

$$G_{vp}(\Phi) - C_p(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{1 + 4(b' - (b-b') \sinh^2 \frac{\Phi}{2})^2}{b' - (b-b') \sinh^2 \frac{\Phi}{2}} \cdot \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{\cos \tau - \cosh \Phi} d\tau \quad (4.4)$$

Das Integral in (4.4) können wir mit der Formel (4.2) exakt auswerten. Es ergibt sich

$$G_{vp}(\Phi) - C_p(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{1 + 4(b' - (b-b') \sinh^2 \frac{\Phi}{2})^2}{b' - (b-b') \sinh^2 \frac{\Phi}{2}}$$

$$\cdot \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \frac{e^{-\lambda \Phi}}{\sinh \Phi} (e^{\Phi} - e^{-\Phi})$$

Unter Berücksichtigung der Definition des hyperbolischen Cosinus erhalten wir für den Verlauf der Druckverteilung vor der Kavitationsschicht

$$G_{vp}(\bar{\Phi}) - C_p(\bar{\Phi}) = - \frac{1 + 4(b' + (b-b') \sinh^2 \frac{\bar{\Phi}}{2})^2}{b' + (b-b') \sinh^2 \frac{\bar{\Phi}}{2}} \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} e^{-\lambda \bar{\Phi}} \quad (4.5)$$

Zwischen $\bar{\Phi}$ und der Profilverfahrenskordinate X besteht wegen (3.4) folgender Zusammenhang

$$\bar{\Phi} = \operatorname{ar} \cosh \left[\frac{b + b' - \sqrt{\frac{A+X}{A-X}}}{b - b'} \right] \quad (4.6)$$

Der Stelle $X = CA$ entspricht also $\bar{\Phi} = 0$. Wir überprüfen jetzt die Bedingung $G_{vp}(CA) = G_v$. Aus (4.5) folgt

$$G_{vp}(CA) - C_p(CA) = G_{vp}(0) - C_p(0) = - \frac{1 + 4b'^2}{b'} \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \quad (4.7)$$

Die Fourierapproximation (3.12) liefert bei für $X = CA \stackrel{\wedge}{=} \tau = 0$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} = (C_p(CA) - G_v) \cdot \frac{b'}{1 + 4b'^2}$$

Mit (3.19) erhalten wir also

$$G_{vp}(CA) = G_v \quad (4.8)$$

b) Die Druckverteilung hinter der Kavitationsschicht

Wir transformieren jetzt $Z = \cosh \theta$ und bekommen mit

$$\cosh \theta + 1 = 2 \cosh^2 \frac{\theta}{2}$$

$$G_{vp}(\theta) - C_p(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 + 4 \left(b' + (b-b') \cosh^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}{b' + (b-b') \cosh^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{\cos \tau + \cosh \theta} d\tau \quad (4.9)$$

Das Integral läßt sich mit der Formel (4.3) auswerten, und wir erhalten für die Druckverteilung hinter der Kavitationsschicht

$$G_{vp}(\theta) - C_p(\theta) = - \frac{1 + 4 \left(b' + (b-b') \cosh^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}{b' + (b-b') \cosh^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \cdot (-1)^{\lambda} e^{-\lambda \theta} \quad (4.10)$$

mit

$$\theta = \operatorname{ar} \cosh \left[\frac{\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} - b - b'}{b - b'} \right] \quad (4.11)$$

Dem Ende der Kavitationsschicht entspricht hier $\theta = 0$.
Bei $X = CE$ gilt also

$$G_{vp}(CE) - C_p(CE) = - \frac{1 + 4b^2}{b} \cdot \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} (-1)^{\lambda}$$

$$= - \frac{1 + 4b^2}{b} \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \cos \lambda \pi \quad (4.12)$$

Da $\tau = \pi$ der Stelle $X = CE$ entspricht, folgt aus (3.12) unter Berücksichtigung der Randbedingung $a_0 = 0$

$$G_{vp}(CE) - C_p(CE) = \frac{1 + 4b^2}{b} \sum_{\lambda=1}^N a_{\lambda} \cos \lambda \pi$$

Wir stellen fest, daß auch am Ende der Kavitationsschicht die Bedingung $G_{vp} = G_v$ erfüllt ist.

5. Diskussion einer Lösungsvarianten für das Integralgleichungssystem bei Teilkavitation

Im folgenden Abschnitt soll eine Lösungsvariante des Integralgleichungssystems (2.8), (2.9) für Kavitationsschichten, die an der Profilvorderkante beginnen, diskutiert werden.

Wir gehen dabei von der Annahme aus, daß die zusätzliche Quell-Senken-Belegung im gesamten Profilbereich definiert ist. Da diese Belegung die Verdrängungswirkung der Kavitationsschicht im Wasser beschreibt, müssen wir als Randbedingung fordern, daß q_n hinter der Kavitationsschicht identisch verschwindet.

Mit der Randbedingung

$$q_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad CE \leq x \leq A \quad (5.1)$$

nimmt das simultane Integralgleichungssystem (2.8) und (2.9) die folgende Gestalt an

$$-q_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \gamma_n(\zeta) \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (5.2a)$$

$$\boxed{-} \circ = \frac{\gamma_n(x)}{u_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q_n(\zeta)}{u_0} \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (5.2b)$$

mit

$$\boxed{-} \circ = G_v - (p(x)) \quad -A \leq x \leq CE$$

$$\boxed{-} \circ = G_{vp}(x) - (p(x)) \quad CE \leq x \leq A$$

Mit G_{vp} bezeichnen wir hier wieder den Verlauf des Druckbeiwertes am Profil hinter der Kavitationsschicht. Die Inversion von (5.2a) unter Berücksichtigung der Kutta'schen Abflußbedingung $\gamma_n(A) = 0$ lautet

$$\gamma_n(x) = \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A q_n(\zeta) \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}} \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (5.3)$$

Durch Einsetzen dieser Lösung in (5.2b) erhalten wir als Integralgleichung zur Bestimmung der zusätzlichen Quell-Senken-

$$\left[\frac{1}{z} \right]_0^A = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{q_n(\zeta)}{u_0} \left[1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x} \frac{A+\zeta}{A-\zeta}} \right] \frac{d\zeta}{x-\zeta} \quad (5.4)$$

Um (5.4) invertieren zu können, müssen wir zunächst wieder einige Transformationen durchführen. Wir setzen

$$\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} = \frac{1+z}{1-z}$$

Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen

$$z = 1 - 2 / \left(\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} + 1 \right)$$

$$x/A = 2z / (1+z^2)$$

$$\frac{d\zeta}{x-\zeta} = \frac{(1-z'^2)(1+z'^2)}{(1-2zz')(1+z'^2)} \cdot \frac{dz'}{z-z'} \quad (5.5)$$

Mit diesen Transformationen geht (5.4) über in

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z} \right]_0^A \frac{1+z}{1+z^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{q_n(z')}{u_0} \frac{1+z'}{1+z'^2} \frac{dz'}{z-z'} \quad (5.6)$$

Wir invertieren (5.6) mit der Forderung $q_n(z=1) = 0$ und erhalten

$$\frac{q_n(z)}{u_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+z^2}{1+z} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \int_{-1}^1 \frac{1+z'}{1+z'^2} \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \frac{dz'}{z-z'}$$

Berücksichtigen wir, daß das Ende CE der Kavitationsschicht durch die Transformation (5.5) auf $z = z_E$ abgebildet wird, so können wir für q_n schreiben

$$\begin{aligned} \frac{q_n(z)}{u_0} = & \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \frac{1+z^2}{1+z} \left[\int_{-1}^{z_E} \left((p - G_v) \frac{1+z'}{1+z'^2} \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \frac{dz'}{z-z'} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{z_E}^1 \left((p - G_{vp}) \frac{1+z'}{1+z'^2} \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \frac{dz'}{z-z'} \right) \right] \quad (5.7) \end{aligned}$$

Unsere Randbedingung (5.1) lautet jetzt

$$q_n(z) = 0 \quad \text{für} \quad z_E \leq z \leq 1 \quad (5.8)$$

Nach Definition zweier Hilfsfunktionen

$$\omega(z) = (G_{vp} - c_p) \frac{1+z}{1+z^2} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \quad (5.9)$$

$$F(z) = (G_v - c_p) \frac{1+z}{1+z^2} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$$

erhalten wir aus der Bedingung, daß die Quell-Senken-Belegung q_n außerhalb der Kavitationsschicht identisch verschwindet, eine Integralgleichung zur Bestimmung von ω und damit von

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(z') \frac{dz'}{z-z'} = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F(z') \frac{dz'}{z-z'} \quad , \quad z_E \leq z \leq 1 \quad (5.10)$$

Zur weiteren Behandlung ist es zweckmäßig, den Definitionsbereich von ω abzubilden auf $-1 \leq y \leq 1$. Wir setzen

$$z = \frac{1+z_E}{2} + \frac{1-z_E}{2} y \quad (5.11)$$

Für ω ergibt sich nun die Integralgleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \omega(y) \frac{dy'}{y-y'} = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F(z') \frac{dz'}{z(y)-z'} \equiv -I(y) \quad (5.12)$$

Um (5.12) invertieren zu können, müssen wir eine Annahme machen über das Verhalten von ω an den Grenzen ihres Definitionsbereiches. Aus der Theorie der Integralgleichungen, z.B. /8/, ist bekannt, daß die Lösungen von Gleichungen des Typs (5.12) an den Grenzen nur die Werte 0 und ∞ annehmen können.

$\omega(-1) \hat{=} \omega(z_E) = 0$ würde bedeuten, daß $G_{vp}(z_E) = c_p(z_E)$ ist. Dies ist physikalisch nicht sehr wahrscheinlich, da der Druckbeiwert am Ende der Kavitationsschicht mit dem Kavitationsbeiwert identisch sein muß. $\omega(1) = 0$ bedeutet wegen der wurzelartigen Singularität von (5.9a) an der Profilhinterkante, daß dort G_{vp} und c_p übereinstimmen.

Wir invertieren jetzt (5.12) unter den beiden mathematisch möglichen Randbedingungen $\omega(-1)=0$ oder $\omega(1)=0$

a) $\omega(-1) = 0$

Wir erhalten

$$\omega(\gamma) = \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 I(\gamma') \sqrt{\frac{1+\gamma'}{1-\gamma'}} \frac{d\gamma'}{\gamma-\gamma'} \equiv \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} I'(\gamma)$$

beziehungsweise nach Rücktransformation auf z unter Berücksichtigung von (5.9a)

$$G_{v\rho}(z) - C_\rho(z) = \frac{1+z^2}{1+z} \frac{1-z}{\sqrt{1+z}\sqrt{z-2\epsilon}} I'(z) \quad (5.13)$$

Bei dieser Lösung tritt also an der Stelle $z = z\epsilon$ eine physikalisch unrealistische Singularität auf.

b) $\omega(\gamma = -1) = 0$

Die Lösung von (5.12) lautet nun

$$\omega(\gamma) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 I(\gamma') \sqrt{\frac{1-\gamma'}{1+\gamma'}} \frac{d\gamma'}{\gamma-\gamma'} \equiv \sqrt{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} I'(\gamma)$$

Nach Rücktransformation bekommen wir

$$G_{v\rho}(z) - C_\rho(z) = \frac{1+z^2}{1+z} \sqrt{\frac{z-2\epsilon}{1+z}} I'(z) \quad (5.14)$$

Im Anhang zu diesem Kapitel werten wir (5.14) exakt aus. In Abb. 11 ist der Verlauf von $G_{v\rho}$ für das Profil NACA 0015 ($\delta_0 = 6^\circ$, $CE = -4,4$) dargestellt. Wie aus dieser Abbildung zu ersehen ist, tritt an der Stelle CE eine unrealistische Sprungstelle auf.

Wir untersuchen jetzt, ob die Inversion von (5.6) unter der Forderung $q_n(-1) = 0$ zu physikalisch sinnvollen Ergebnissen führt. Anstelle von (5.7) erhalten wir

$$\frac{q_n(z)}{u_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+z^2}{1+z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \left[\int_{-1}^{z\epsilon} \tilde{F}(z') \frac{dz'}{z-z'} + \int_{z\epsilon}^1 \tilde{\omega}(z') \frac{dz'}{z-z'} \right] \quad (5.15)$$

mit den Hilfsfunktionen

$$\tilde{F}(z) = (G_v - C_p(z)) \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} \quad (5.16a)$$

$$\tilde{\omega}(z) = (G_{vp}(z) - C_p(z)) \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} \quad (5.16b)$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß die Singularität an der Profilverdickerkante bei der Lösung (5.15) proportional zu $(1+z)^{-1/2}$ ist, bei (5.7) dagegen proportional zu $(1+z)^{-3/2}$.

Die Forderung, daß $Q_\eta(z)$ im Bereich von zE bis 1 identisch verschwindet, führt in Analogie zu (5.12) zu der Integralgleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{\omega}(y')}{y-y'} dy' = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{F}(z')}{z(y)-z'} dz' \quad (5.17)$$

Hierbei haben wir erneut den Bereich hinter der Kavitationsschicht auf $-1 \leq y \leq 1$ abgebildet. Zur Lösung von (5.17) müssen wir fordern, daß ω an der Profilhinterkante verschwindet. Die andere Möglichkeit, $\omega(-1) = 0$, ist unrealistisch, da sie zu einer Sprungstelle am Ende der Kavitationsschicht wie bei der Lösung (5.14) führen würde.

Wir erhalten nach Rücktransformation auf z

$$G_{vp}(z) - C_p(z) = \frac{1+z^2}{\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{\sqrt{z-zE}} \frac{1}{\pi} \int_{zE-1}^{zE} \frac{1}{\pi} \int_{zE-1}^{zE} \frac{F(\zeta) d\zeta}{z'-\zeta} \sqrt{\frac{z'-zE}{1-z'}} \frac{dz'}{z-z'} \quad (5.18)$$

(5.18) wird singular bei $z = zE$. Eine physikalisch sinnvolle Lösung existiert deshalb nur, wenn wir zeigen können, daß die folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\begin{aligned} & [G_v - C_p(zE)] \frac{\sqrt{1+zE}}{1+zE^2} = \text{constans} \\ & = \lim_{z \rightarrow zE} \frac{1}{\sqrt{z-zE}} \frac{1}{\pi} \int_{zE-1}^{zE} \frac{1}{\pi} \int_{zE-1}^{zE} \frac{\tilde{F}(\zeta) d\zeta}{z'-\zeta} \sqrt{\frac{z'-zE}{1-z'}} \frac{dz'}{z-z'} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Zur Überprüfung von (5.11) ist es zweckmäßig, zu trigonometrischen Variablen überzugehen. Um den Bereich hinter der Kavitationsschicht auf das Intervall $0 \leq \mathcal{V} \leq \pi$ abzubilden, transformieren wir

$$z = \frac{1 + zE}{2} - \frac{1 - zE}{2} \cos \mathcal{V} \quad (5.20)$$

Es ergeben sich folgende Beziehungen

$$z - zE = (1 - zE) \sin^2 \frac{\mathcal{V}}{2}$$

$$1 - z = (1 - zE) \cos^2 \frac{\mathcal{V}}{2}$$

$$\frac{dz'}{z - z'} = \frac{\sin \mathcal{V}' d\mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}}$$

Wir bezeichnen mit $\varphi(\mathcal{V}')$ das innere Integral über ζ in (5.19) und können für die Bedingung schreiben

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 - zE}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\mathcal{V}}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\mathcal{V}') (1 - \cos \mathcal{V}') \frac{d\mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}} \neq 0, \infty \quad (5.21)$$

Bei $z' = zE$ wird der Integrand von φ singulär. Wir schreiben deshalb

$$\varphi(\mathcal{V}') = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{zE} \frac{\bar{F}(\zeta) - \bar{F}(zE)}{z'(\mathcal{V}') - \zeta} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{zE} \frac{\bar{F}(zE)}{z'(\mathcal{V}') - \zeta} d\zeta \quad (5.22)$$

Der erste Integrand von (5.22) ist auch für $z' = zE$ stetig. Wir können das Integral also in eine Fourierkosinusreihe entwickeln. Der Wert des zweiten Integrals ergibt sich nach einer einfachen Rechnung zu $\frac{\bar{F}(zE)}{\pi} \ln \left(\frac{z' + 1}{z' - zE} \right)$

Mit der Transformation (5.20) können wir (5.22) darstellen als

$$\varphi(\mathcal{V}') = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \cos \lambda \mathcal{V}' - \frac{\bar{F}(zE)}{\pi} \ln \left(\frac{1 - \cos \mathcal{V}'}{\frac{3 + zE}{1 - zE} - \cos \mathcal{V}'} \right)$$

Die Bedingung (5.19) nimmt damit die folgende Form an

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-z\epsilon'} \sin \frac{\mathcal{V}}{2}} \left[\frac{a_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \mathcal{V}') d\mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}} + \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \mathcal{V}' (1 - \cos \mathcal{V}') d\mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}} \right]$$

$$= \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-z\epsilon'} \sin \frac{\mathcal{V}}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{F}(z\epsilon') \ln \left(\frac{1 - \cos \mathcal{V}'}{\frac{3+z\epsilon'}{1-z\epsilon'} - \cos \mathcal{V}'} \right) \frac{1 - \cos \mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}} d\mathcal{V}' \neq 0$$

(5.23)

Wir berechnen zunächst den ersten Grenzwert in (5.23). Unter Verwendung der Integralformel (3.13) erhalten wir

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-z\epsilon'} \sin \frac{\mathcal{V}}{2}} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{\sin \lambda \mathcal{V}}{\sin \mathcal{V}} (1 - \cos \mathcal{V}) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{1-z\epsilon'}} \left[\lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{\sin \lambda \mathcal{V}}{\cos \mathcal{V}/2} - \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{a_0/2}{\sin \mathcal{V}/2} \right] = \infty$$

Im zweiten Teil von (5.23) können wir die Funktion

$$\frac{\bar{F}(z\epsilon')}{\pi} \ln \left(\frac{1 - \cos \mathcal{V}'}{\frac{3+z\epsilon'}{1-z\epsilon'} - \cos \mathcal{V}'} \right) \cdot (1 - \cos \mathcal{V}')$$

in eine Cosinus-Reihe entwickeln, da sie im Bereich von 0 bis π stetig ist und insbesondere für $\mathcal{V} = 0$ verschwindet.

$$\Rightarrow \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-z\epsilon'} \sin \frac{\mathcal{V}}{2}} \left[\frac{a_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \mathcal{V}') d\mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}} + \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \mathcal{V}' (1 - \cos \mathcal{V}') d\mathcal{V}'}{\cos \mathcal{V}' - \cos \mathcal{V}} \right] =$$

$$= \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-z\epsilon'}} \left[-\frac{a_0/2}{2 \sin \mathcal{V}/2} + \sum_{\lambda=1}^N b_\lambda \frac{\sin \lambda \mathcal{V}}{\sin \mathcal{V}/2 \sin \mathcal{V}} \right] = \infty$$

Wir stellen fest, daß die Bedingung (5.19) nicht zu erfüllen ist. Damit existieren keine physikalisch sinnvollen Lösungen der Integralgleichungen (5.17) und (5.6).

Zusammenfassend können wir sagen, daß die Inversion des Gleichungssystems (5.2) unter der Annahme einer auch hinter der Kavitationsschicht definierten zusätzlichen Quell-Senken-Belegung zu physikalisch unrealistischen Ergebnissen führt.

Anhang: Auswertung von Gl. (5.14)

Vollständig hingeschrieben lautet (5.14)

$$G_{vp}(z) - (p(z)) = \frac{1+z^2}{1+z} \sqrt{\frac{z-zE}{1+z}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-y'}{1+y'}} \cdot \frac{1}{z'(y')-z} \frac{dy'}{y-y'}$$

$$\cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (G_v - (p(\xi))) \cdot \frac{1+\xi}{1+\xi^2} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \cdot \frac{d\xi}{z'(y')-\xi} \frac{dy'}{y-y'}$$

Zur numerischen Auswertung gehen wir zweckmäßigerweise über zu trigonometrischen Variablen. Wir setzen

$$y = -\cos \psi, \quad y' = -\cos \tau \quad \underline{2}$$

$$\xi = \frac{zE-1}{2} - \frac{zE+1}{2} \cos \varphi, \quad z'(y') = \frac{zE-1}{2} + \frac{zE+1}{2} \cosh \theta$$

Die hyperbolische Transformation ist notwendig, da in beiden Integralen unterschiedliche Intervalle, die sich nur an einer Stelle berühren, auf 0 bis π abgebildet werden. Wir approximieren zunächst den Kern des inneren Integrals durch eine Cosinusreihe

$$F(\varphi) \sin \varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \cos \lambda \varphi$$

mit

$$F(\varphi) = \frac{[(1+zE) \sin^2 \varphi/2]^{3/2} [2 - (1+zE) \sin^2 \varphi/2]^{-1/2}}{1 + [(1+zE) \sin^2 \varphi/2 - 1]^2}$$

Die Fourierkoeffizienten müssen hierbei den folgenden Bedingungen genügen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} = 0 \quad \underline{3} \quad \text{und} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} a_{\lambda} = 0 \quad \underline{4}$$

Unter Verwendung der Integralformel (4.3) erhalten wir

$$G_{vp}(z) - (p(z)) = \frac{1+z^2}{1+z} \sqrt{\frac{z-zE}{1+z}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{\tau}{2} \frac{1}{\cosh \theta} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} a_{\lambda} e^{-\lambda \theta} \right] \frac{\sin \tau d\tau}{(\cos \tau - \cos \psi)}$$

Aus (5.20) und 2 ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen θ und τ

$$\theta = \operatorname{arccosh} \left[1 + 2 \frac{1 - zE}{1 + zE} \sin^2 \frac{\tau}{2} \right] \quad \underline{6}$$

Wir approximieren jetzt

$$\frac{1}{\cosh \theta} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\lambda a_\lambda e^{-\lambda \theta} \right] = \frac{b_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^N b_\lambda \cos \lambda \tau$$

Unter Verwendung der Integralformel (3.13) erhalten wir schließlich für den Verlauf der Druckverteilung hinter der Kavitations-schicht mit $z - zE = 2 \sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2}$

$$G_{vp}(z) - c_p(z) = \frac{1 + z^2}{1 + z} \sqrt{\frac{1 - zE}{1 + z}} \left(\frac{b_0}{2} \sin \frac{\mathcal{J}}{2} + \cos \frac{\mathcal{J}}{2} \sum_{\lambda=1}^N b_\lambda \sin \lambda \mathcal{J} \right) \quad \underline{7}$$

Hierbei bestehen zwischen \mathcal{J} , z und x die Beziehungen

$$\mathcal{J}(z) = \arccos \left[\frac{1 + zE - zE}{1 - zE} \right]$$

$$z(x) = \frac{\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} - 1}{\sqrt{\frac{A+x}{A-x}} + 1} \quad \underline{8}$$

6. Die Behandlung von Superkavitation

Erstreckt sich eine Kavitationsschicht über die Profilhinterkante hinaus, so bezeichnet man dies als Superkavitation. Zur Berechnung der zusätzlichen Belegungen können wir auch bei Superkavitation das Integralgleichungssystem (2.8) und (2.9) heranziehen. Wir haben bei der Inversion lediglich zu berücksichtigen, daß $CE > A$ ist und außerhalb des Profilsbereichs sowohl C_p als auch γ_n verschwinden. Für die folgenden Berechnungen gehen wir aus von einem Kavitationseinsatz an der Profilverderrkante ($CA = -A$).

Die Inversion von (2.9) lautet unter Berücksichtigung der Bedingung $q_n(CE) = 0$ nach /8/

$$\frac{q_n(x)}{u_0} = \sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{CE} \frac{\sqrt{A+\xi}}{\sqrt{CE-\xi}} \left(C_p(\xi) - G_v + \frac{\gamma_n(\xi)}{u_0} \right) \frac{d\xi}{X-\xi} \quad (6.1)$$

Da C_p und γ_n nur im Bereich von $-A \leq \xi \leq A$ von 0 verschieden sind, können wir (6.1) noch vereinfachen. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir

$$\frac{q_n(x)}{u_0} = \sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\sqrt{A+\xi}}{\sqrt{CE-\xi}} \left(C_p(\xi) + \frac{\gamma_n(\xi)}{u_0} \right) \frac{d\xi}{X-\xi} + G_v \sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} \quad (6.2)$$

Um eine Integralgleichung zur Ermittlung der zusätzlichen Wirbelbelegung zu erhalten, setzen wir (6.2) in (2.8) ein.

$$-\sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A C_p(\xi) \frac{\sqrt{A+\xi}}{\sqrt{CE-\xi}} \frac{d\xi}{X-\xi} - G_v \sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma_n(\xi)}{u_0} \left[1 + \sqrt{\frac{CE-X}{A+X} \frac{A+\xi}{CE-\xi}} \right] \frac{d\xi}{X-\xi} \quad (6.3)$$

Um diese Integralgleichung mit unserer üblichen Inversionsformel (3.1) lösen zu können, müssen wir die folgende Variablentransformation vornehmen

$$\sqrt{\frac{A+\xi}{CE-\xi}} = b(z+1) \quad \text{mit} \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2A}{CE-A}} \quad (6.4)$$

Durch (6.4) wird der Profildbereich auf $-1 \leq z \leq 1$ abgebildet. Dem Intervall $-A \leq x \leq CE$ entspricht $1 \leq z \leq \infty$. Es ergeben sich die folgenden Beziehungen

$$\zeta = \frac{CEb^2(z'+1)^2 - A}{1 + b^2(z'+1)^2} \quad dz' = \frac{2(z'+1)b^2((E+A) dz')}{[1 + b^2(z'+1)^2]^2} \quad (6.5)$$

$$\left[1 + \sqrt{\frac{CE-x}{A+x} \frac{A+\zeta}{CE-\zeta}} \right] = 2 \frac{z'+1}{z+1} \frac{1+b^2(z+1)^2}{1+b^2(z'+1)^2} \frac{dz'}{z-z'}$$

Mit diesen Umformungen geht (6.3) über in

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_{\eta}(z)}{u_0} \frac{z'+1}{1+b^2(z'+1)^2} \frac{dz'}{z-z'} = -\frac{Gv}{2b} \frac{1}{1+b^2(z+1)^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 c_p(z') \frac{(z'+1)^2}{1+b^2(z'+1)^2} \frac{1}{z'+z+2} \frac{dz'}{z-z'} \quad (6.6)$$

Diese Gleichung können wir analog zur Gl. (3.5) lösen. Die Inversionskonstante legen wir durch die Erfüllung der Kutta'schen Abflußbedingung $\gamma_{\eta}(1) = 0$ fest. Sie besagt, daß an der hinteren Profilkante kein Sprung in der von Wirbelbelegung induzierten Geschwindigkeit auftreten darf. Wir erhalten

$$\frac{\gamma_{\eta}(z)}{u_0} = \frac{1+b^2(z+1)^2}{z+1} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \left\{ \frac{Gv}{2b} \frac{1}{1+b^2(z'+1)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 c_p(\zeta) \frac{(\zeta+1)^2}{1+b^2(\zeta+1)^2} \frac{1}{z+z'+\zeta} \frac{d\zeta}{z'-\zeta} \right\} \frac{dz'}{z-z'} \quad (6.7)$$

Zur weiteren Behandlung gehen wir wieder über zu trigonometrischen Variablen. Wir substituieren

$$z = \cos \mathcal{J}, \quad z' = -\cos \tau, \quad \zeta = -\cos \psi$$

Die Wirbelbelegung ergibt sich damit zu

$$\frac{\gamma_{\eta}(\mathcal{J})}{u_0} = \frac{1}{2} \frac{1+4b^2 \sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2}}{\sin^2 \frac{\mathcal{J}}{2}} \cot \frac{\mathcal{J}}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tan \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{Gv}{2b} \frac{1}{1+4b^2 \sin^2 \frac{\tau}{2}} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} c_p(\psi) \frac{\sin^4 \frac{\psi}{2}}{1+4b^2 \sin^4 \frac{\psi}{2}} \frac{1}{2-\cos \psi - \cos \tau} \frac{\sin \psi d\psi}{\cos \psi - \cos \tau} \right\} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{J}} \quad (6.8)$$

Um die Integrale exakt auswerten zu können, approximieren wir die Integranden durch Fourierreihen. Wir setzen zunächst

$$\frac{2 c_D(\psi) \sin^4 \frac{\psi}{2}}{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\psi}{2}} = \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \sin \lambda \psi \quad (6.9)$$

Das innere Integral in (6.8) stellt sich damit dar als

$$2 \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \lambda \psi \sin \psi}{2 - \cos \tau - \cos \psi} \frac{d\psi}{\cos \psi - \cos \tau} = \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda-1)\psi - \cos(\lambda+1)\psi}{(2 - \cos \tau - \cos \psi)(\cos \psi - \cos \tau)} d\psi$$

Wir substituieren $\cosh \theta = 2 - \cos \tau$ und können zur Berechnung die Integralformel (3.22) heranziehen. Nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n(\nu)}{u_0} = & \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\nu}{2}}{\sin^2 \frac{\nu}{2}} \cot \frac{\nu}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tan \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{G\nu}{2b} \frac{1}{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2}} + \right. \\ & \left. + \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda \frac{1}{1 - \cos \tau} \cdot [e^{-\lambda\theta} - \cos \lambda \tau] \right\} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} \quad (6.10) \end{aligned}$$

Wir approximieren jetzt

$$\frac{G\nu}{2b} \frac{1 - \cos \tau}{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2}} + \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda [e^{-\lambda\theta} - \cos \lambda \tau] = \frac{A_0}{2} + \sum_{\mu=1}^N A_\mu \cos \mu \tau \quad (6.11)$$

und können (6.10) schreiben als

$$\frac{\gamma_n(\nu)}{u_0} = \frac{1}{2} \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\nu}{2}}{\sin^2 \frac{\nu}{2}} \cot \frac{\nu}{2} \left[\frac{A_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} + \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} \right]$$

Unter Berücksichtigung der Integralformel (3.13) erhalten wir endgültig für die zusätzliche Wirbelbelegung

$$\frac{\gamma_n(\nu)}{u_0} = \frac{1}{2} \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\nu}{2}}{\sin^2 \frac{\nu}{2}} \cot \frac{\nu}{2} \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda \frac{\sin \lambda \nu}{\sin \nu} \quad (6.12)$$

Als nächstes haben wir die zusätzliche Quell-Senken-Belegung zu berechnen. Wir gehen aus von der Gleichung (6.2). Nach Durchführung der Transformation (6.4) nimmt sie die folgende Form an

$$\frac{q_n(z)}{u_0} = \frac{G_v}{b} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+b^2(z+1)^2}{1+b^2(z'+1)^2} \left(c_p(z') + \frac{\gamma_n(z')}{u_0} \right) \cdot \lambda \frac{(z'+1)^2}{2+z+z'} \frac{dz'}{z-z'}$$

Um den Profilbereich auf 0 bis π abzubilden, setzen wir erneut $z' = -\cos \tau$. Für γ_n verwenden wir die Lösung (6.12).

Wir erhalten

$$\frac{q_n(z)}{u_0} = \frac{G_v}{b} \frac{1}{z+1} + \frac{1+b^2(z+1)^2}{z+1} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \lambda \frac{c_p(\tau) 4 \sin^4 \frac{\tau}{2}}{1+4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{\sin \tau d\tau}{(2+z-\cos \tau)(\cos \tau+z)} + \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{(2+z-\cos \tau)(\cos \tau+z)} d\tau \right]$$

Nach erneuter Durchführung der Fourierapproximation (6.9) erhalten wir für q_n

$$\frac{q_n(z)}{u_0} = \frac{G_v}{b} \frac{1}{z+1} + \frac{1+b^2(z+1)^2}{z+1} \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{(2+z-\cos \tau)(\cos \tau+z)} d\tau \quad (6.13)$$

Zur weiteren Auswertung müssen wir den Profilbereich und den Bereich hinter dem Profil getrennt behandeln.

Im Profilbereich setzen wir $z = -\cos \vartheta$

$$\Rightarrow \frac{q_n(\vartheta)}{u_0} = \frac{G_v}{2b} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1+4b^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{(2-\cos \vartheta - \cos \tau)(\cos \tau - \cos \vartheta)} d\tau$$

Wir substituieren wieder $\cosh \theta = 2 - \cos \vartheta$ und erhalten mit der Integralformel (3.22) endgültig für die zusätzliche Quell-Senken-Belegung im Profilbereich

$$\frac{q_n(\mathcal{V})}{u_0} = \frac{G_v}{2b} \frac{1}{\sin^2 \frac{\mathcal{V}}{2}} + \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\mathcal{V}}{2}}{4 \sin^4 \frac{\mathcal{V}}{2}} \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) \cdot (e^{-\lambda \Theta} - \cos \lambda \mathcal{V}) \quad (6.14)$$

Wir bemerken noch, daß sich q_n an der Profilvorderkante ($\mathcal{V} \rightarrow 0$) verhält wie $(X + A)^{-3/4}$.

Der Bereich hinter dem Profil wird durch (6.4) abgebildet auf $1 \leq z \leq \infty$. Wir substituieren deshalb $z = \cosh \Phi$. (6.13) nimmt damit die folgende Form an

$$\frac{q_n(\Phi)}{u_0} = \frac{1}{\cosh \Phi + 1} \left\{ \frac{G_v}{b} + (1 + 4b^2 \cosh^4 \frac{\Phi}{2}) \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda-1)\tau - \cos(\lambda+1)\tau}{(2 + \cosh \Phi - \cos \tau)(\cos \tau + \cosh \Phi)} d\tau \right.$$

Zur Auswertung des Integrals substituieren wir $\cosh \Omega = 2 + \cosh \Phi$. Mit der im Anhang bewiesenen Integralformel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \lambda \tau d\tau}{(\cosh \Omega - \cos \tau)(\cos \tau + \cosh \Phi)} = \frac{1}{\cosh \Omega + \cosh \Phi} \cdot \left[\frac{e^{-\lambda \Omega}}{\sinh \Omega} + (-1)^\lambda \frac{e^{-\lambda \Phi}}{\sinh \Phi} \right] \quad (6.15)$$

erhalten wir nach kurzer Rechnung für die Quell-Senken-Belegung

$$\frac{q_n(\Phi)}{u_0} = \frac{1}{\cosh \Phi + 1} \left[\frac{G_v}{b} + \frac{1 + 4b^2 \cosh^4 \frac{\Phi}{2}}{\cosh \Phi + 1} \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) (e^{-\lambda \Omega} - (-1)^\lambda e^{-\lambda \Phi}) \right] \quad (6.16)$$

An der Profilhinterkante gilt $\mathcal{V} = \pi$, $\Phi = 0$, $\cosh \Theta = \cosh \Omega$. Damit gehen die Lösungen (6.14) und (6.15) ineinander über.

Zur Bestimmung der Kavitationsausdehnung, d.h. zur Festlegung des Kavitationsbeiwertes für einen bestimmten CE-Wert, benötigen wir eine zusätzliche Bedingung. Wir unterwerfen deshalb den Verlauf der Schichtdicke der 'Nishiyama-Bedingung'. Nishiyama

ging in /11/ von der Vorstellung aus, daß im Profilbereich die Mittellinie $\eta(x)$ der Kavitationsschicht einer Stromlinie mit dem Anstellwinkel δ_0 folgt. Bei dem sogenannten offenen Kavitationsmodell, das wir für die folgenden Berechnungen zugrunde legen wollen, ist die Dicke der Kavitationsschicht hinter dem Profil konstant (siehe Abb. 1 b). Wir fordern deshalb

$$\eta(CE) = 2A\delta_0 \quad (6.17)$$

Aus (2.1) folgt unmittelbar für die Dicke der Kavitationsschicht

$$2\eta(CE) = \int_{-A}^A \frac{q_n(x) dx}{u_0} + \int_{-A}^A \frac{q_n(x) dx}{u_0} \quad (6.18)$$

\uparrow (6.14) \uparrow (6.16)

Im Profilbereich gilt unter Berücksichtigung von (6.5)

$$dx = 4 \frac{(CE+A)b^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta d\vartheta}{[1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}]^2}$$

Außerhalb des Profilbereichs haben wir

$$dx = 4 \frac{(CE+A)b^2 \cosh^2 \frac{\Phi}{2} \sinh \Phi d\Phi}{[1 + 4b^2 \cosh^4 \frac{\Phi}{2}]^2}$$

Mit $2(CE+A)b^2 = A \frac{CE+A}{CE-A}$ erhalten wir für die Dicke der Kavitationsschicht bei $x = CE$

$$\begin{aligned}
 2\eta(CE) = 4A\delta_0 = & A \frac{CE+A}{CE-A} \int_0^\pi \left\{ \frac{G_v}{b} + \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2}}{1 - \cos \tau} \right. \\
 & \cdot \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) \left[e^{-\lambda\tau} - \cos \lambda\tau \right] \left. \right\} \frac{\sin \tau d\tau}{(1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2})^2} + \\
 & + A \frac{CE+A}{CE-A} \int_0^\infty \left\{ \frac{G_v}{b} + \frac{1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2}}{1 - \cos \tau} \right. \\
 & \cdot \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) \left[e^{-\lambda\Omega} - (-1)^\lambda e^{-\lambda\Phi} \right] \left. \right\} \frac{\sinh \Phi d\Phi}{[1 + 4b^2 \cosh^4 \frac{\Phi}{2}]^2} \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

Um aus (6.19) zur Berechnung des Kavitationsbeiwertes eine Funktion der Art

$$\sigma_v / \delta_0 = F(CE)$$

zu erhalten, spalten wir unter Berücksichtigung von (6.11) die Fourierkoeffizienten A_λ auf

$$A_\lambda = \sigma_v A_\lambda' + A_\lambda''$$

Wir verwenden die Abkürzungen

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin \tau \, d\tau}{(1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2})^2}, \quad I_2(\lambda) = \int_0^\pi \left[\frac{e^{-\lambda \Theta(\tau)} - \cos \lambda \tau}{2 \sin^2 \frac{\tau}{2} (1 + 4b^2 \sin^4 \frac{\tau}{2})} \right] \sin \tau \, d\tau \quad (6.20)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\sinh \Phi \, d\Phi}{(1 + 4b^2 \cosh^4 \frac{\Phi}{2})^2}, \quad I_4(\lambda) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\lambda \Omega(\Phi)} - (-1)^\lambda e^{-\lambda \Phi}}{2 \cosh^2 \frac{\Phi}{2} (1 + 4b^2 \cosh^4 \frac{\Phi}{2})} \right] \sinh \Phi \, d\Phi$$

und können nach einiger Rechnung den Kavitationsbeiwert schreiben als

$$\frac{\sigma_v}{\delta_0} = \left[\frac{I_1 + I_3}{b} + \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda' (I_2(\lambda) + I_4(\lambda)) \right]^{-1} \cdot \left[4 \frac{CE - A}{CE + A} - \frac{1}{\delta_0} \sum_{\lambda=1}^N (2a_\lambda + A_\lambda) (I_2(\lambda) + I_4(\lambda)) \right]$$

Die Integrale lassen sich numerisch mit der Simpson-Regel berechnen. Da die Integranden von I_3 und I_4 für $\Phi \rightarrow \infty$ sehr gut konvergieren, erweist es sich als ausreichend, die obere Integralgrenze auf 3 zu begrenzen. Für $\tau \rightarrow 0$ wird der Integrand von I_2 unbestimmt von der Art 0/0. Für die Berechnungen verwenden wir deshalb den Grenzwert für $\tau \rightarrow 0$. Eine Rechnung ergibt $\lim_{\tau \rightarrow 0} F_2(\tau) = -2\lambda$.

7. Der Übergang von der Super- zur Vollkavitation

Als Vollkavitation bezeichnen wir den Fall einer sich über den ganzen Profildbereich erstreckenden Kavitationsschicht. Zur Bestimmung der zusätzlichen Quell-Senken- und Wirbelbelegung können wir in diesem Fall nicht mehr die Gl. (6.13) und (6.12) heranziehen, da der in ihnen explizit als auch implizit enthaltene Faktor b für $CE = A$ singulär wird. Der Grenzübergang $C_E \rightarrow A$ läßt sich nur vollziehen, wenn wir vorher zurück auf die Profilversehnenkoordinate x zurücktransformieren. Wir betrachten beide Belegungen getrennt.

a) Wirbelbelegung

Die Wirbelbelegung ist gegeben durch

$$\frac{\gamma_n(z)}{U_0} = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \frac{1+b^2(z+1)^2}{z+1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+z'}{1-z'}} \left\{ \frac{G_v}{2b} \frac{1}{1+b^2(z+1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 C_p(\zeta) \frac{(\zeta+1)^2}{1+b^2(\zeta+1)^2} \frac{1}{z'+\zeta+2} \frac{d\zeta}{z'-\zeta} \right\} \frac{dz'}{z-z'} \quad (7.1)$$

Aus der Transformation (6.5) lassen sich die folgenden Umkehrformeln errechnen

$$\frac{dz'}{z-z'} = \frac{1}{2} \frac{1+b^2(z'+1)^2}{1+b^2(z+1)^2} \left(1 + \frac{z+1}{z'+1}\right) \frac{d\zeta}{X-\zeta} \quad (7.2)$$

$$\frac{1+b^2(z+1)^2}{1+b^2(z'+1)^2} = \frac{CE-\zeta}{CE-X} \quad (7.3)$$

$$\frac{1+z'}{1-z'} \frac{1-z}{1+z} = \frac{2b \sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} - 1}{2b \sqrt{\frac{CE-\zeta}{A+\zeta}} - 1} \quad (7.4)$$

Mit diesen Beziehungen erhalten wir

$$\frac{\gamma_2(x)}{u_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{+A} \sqrt{\frac{2b\sqrt{(CE-X)/(A+X)}-1}{2b\sqrt{(CE-\zeta)/(A+\zeta)}-1}} \left\{ \frac{G_v}{2} \sqrt{\frac{CE-X}{A+X}} + \right. \quad (7.5)$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A c_p(x') \sqrt{\frac{A+x' CE-X}{CE-x' A+X}} \frac{dx'}{\zeta-x'} \right\} \left(1 + \sqrt{\frac{A+X CE-\zeta}{CE-X A+\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{X-\zeta}$$

Wir vollziehen in (7.5) den Grenzübergang $CE \rightarrow A$ bzw.

$b \rightarrow \infty$

$$\frac{\gamma_2(x)}{u_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \sqrt{\frac{A-X}{A+X} \frac{A+\zeta}{A-\zeta}} \left\{ \frac{G_v}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A c_p(x') \sqrt{\frac{A+x'}{A-x'}} \frac{dx'}{\zeta-x'} \right\} \cdot$$

$$\left(\sqrt{\frac{A-X}{A+X}} + \sqrt{\frac{A-\zeta}{A+\zeta}} \right) \frac{d\zeta}{X-\zeta}$$

Zur weiteren Auswertung gehen wir erneut über zu trigonometrischen Variablen und setzen

$$X = -A \cos \vartheta, \quad \zeta = -A \cos \tau, \quad X' = -A \cos \tau'$$

Für die Wirbelbelegung ergibt sich damit

$$\frac{\gamma_2(\vartheta)}{u_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \frac{\vartheta}{2} + \tan \frac{\tau}{2}} \left\{ \frac{G_v}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi c_p(\tau') \frac{\tan \frac{\tau'}{2} \sin \tau' d\tau'}{\cos \tau' - \cos \tau} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\cot \frac{\vartheta}{2} + \cot \frac{\tau}{2} \right) \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta}$$

Wir berücksichtigen die Integraldarstellung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\tan \frac{\tau'}{2} \sin \tau' d\tau'}{\cos \tau' - \cos \tau} = -1 \quad (7.6)$$

und können somit endgültig für die Wirbelbelegung schreiben

$$\frac{\gamma_n(\mathcal{J})}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2} \tan \frac{\tau}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi ((\rho(\tau') - G_v) \frac{\tan \frac{\tau'}{2} \sin \tau' d\tau'}{\cos \tau' - \cos \mathcal{J}} \cdot (\cot \frac{\mathcal{J}}{2} + \cot \frac{\tau}{2}) \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{J}} \quad (7.7)$$

b) Quell-Senken-Belegung

Aus der Gl. (6.2) ergibt sich direkt für die Quell-Senken-Belegung bei Vollkavitation

$$\frac{q_n(x)}{u_0} = G_v \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \left(\rho(\xi) + \frac{\gamma_n(\xi)}{u_0} \right) \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi} \frac{A-x}{A+x}} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Nach dem Übergang zu trigonometrischen Variablen erhalten wir unter Berücksichtigung von (7.6)

$$\frac{q_n(\mathcal{J})}{u_0} = \cot \frac{\mathcal{J}}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left((\rho(\tau) - G_v + \frac{\gamma_n(\tau)}{u_0}) \frac{\tan \frac{\tau}{2} \sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{J}} \quad (7.8)$$

In /2/ wurde eine Theorie für die Teilkavitation aufgestellt, die zur Bestimmung der Kavitationsausdehnung die Nishiyama-Bedingung verwendet. Bei Vollkavitation liefert sie für die Belegungen

$$\frac{\gamma_n(\mathcal{J})}{u_0} = \cot \frac{\mathcal{J}}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{q_n(\tau)}{u_0} \frac{\tan \frac{\tau}{2} \sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{J}} \quad (7.9)$$

$$\frac{q_n(\mathcal{J})}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi ((\rho(\tau) - G_v) \sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2} \tan \frac{\tau}{2}} \left(1 + \cot \frac{\mathcal{J}}{2} \tan \frac{\tau}{2} \right) \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{J}} \quad (7.10)$$

Der Unterschied zwischen den Belegungen aus /2/ und den Darstellungen (7.7) und (7.8) beruht auf der unterschiedlichen Inversionsreihenfolge des Integralgleichungssystems (2.8, 2.9) bei Super- und Teilkavitation.

Aus der Theorie der Integralgleichungen /8/ ist bekannt, daß die sogenannte Prandtl-Birnbaumsche Integralgleichung

$$F(x) = - \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{K(\zeta)}{x-\zeta} d\zeta$$

nur eine eindeutige Lösung besitzt, sobald das Verhalten der gesuchten Funktion an einer bestimmten Stelle festgelegt ist. Bei beiden möglichen Inversionsreihenfolgen des Integralgleichungssystems werden die Wirbelbelegung γ_n und die Quellen-Senken-Belegung q_n mit den Randbedingungen $\gamma_n(A) = 0$ und $q_n(CF) = 0$ bestimmt. Demnach sind die jeweiligen Singularitäten-Belegungen aus beiden Kavitationsbereichen identisch.

Im Anhang A. wird die Übereinstimmung der Formeln (7.7) und (7.9) sowie (7.8) und (7.10) für den speziellen Fall einer Druckverteilung $C_p(\tau) = C_0 + C_1 \cdot \cos \tau$ exakt gezeigt.

8. Darstellung und Diskussion der Rechenergebnisse

Mit den in den Kapiteln 3 bis 5 aufgestellten Beziehungen wurden Kavitationserscheinungen an den Profilen NACA 0015, NACA 4412 und NACA 16006 berechnet. Im Bereich der Teilkavitation liegen für diese Profile Meßergebnisse vor. Die jeweiligen Druckverteilungen wurden potentialtheoretisch nach Daten aus /9/ berechnet. Sie sind in den Abbildungen 2 - 4 dargestellt. Sämtliche Rechnungen wurden auf einem Microcomputer VC-20 von Commodore in Basic durchgeführt.

a) Teilkavitation bei konstantem Anstellwinkel

Für die Profile NACA 0015 und NACA 4412 wurden bei den Anstellwinkeln 2° , 6° und 8° die Kavitationsausdehnung und bei den Winkeln 2° und 6° der Verlauf der Schichtdicke errechnet. An diesen Profilen wurden 1980 von Westphal Untersuchungen in der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt durchgeführt (siehe /4/). In /2/ wurden diese Ergebnisse mit einer Theorie verglichen, die von der Voraussetzung eines Kavitationseinsatzes an der Profilvorderkante ausgeht. Für die Rechnungen wurde angenommen, daß der Kavitationseinsatz jeweils beim potentialtheoretischen Druckminimum erfolgt. Dies ist auch in guter Näherung der Fall, wie die Messungen von Westphal ergaben. Beim Profil NACA 0015 zeigen sich bei den Anstellwinkeln 6° und 8° gute Übereinstimmungen mit den Experimenten. Bei 2° ergibt sich jedoch eine deutliche Abweichung, wie in Abb. 5_a zu ersehen ist. Es wird vermutet, daß beim Experiment eine gewisse Unsicherheit in der Einstellung des Zuström winkels vorlag, die sich bei kleinen Anstellwinkeln stärker auswirkt. Da die Messungen jedoch abgeschlossen sind, ist eine zweifelsfreie Klärung nicht mehr möglich. In den Abb. 5_a und 5_b sind zusätzlich Kavitationsausdehnungen eingezeichnet, bei denen der Tunneleffekt berücksichtigt worden ist. Läßt sich die Dimension des untersuchten Profils vergleichen mit dem Durchmesser des Kavitationstunnels, so kommt es aufgrund der Verdrängung zu erhöhten Geschwindigkeiten und damit zu einer

Druckabsenkung. Dieser sogenannte Tunneleffekt führt zu einer vergrößerten Kavitationsausdehnung.

Beim Profil NACA 4412 tritt beim Anstellwinkel 6° eine größere Abweichung zum experimentellen Ergebnis auf. Eine Erklärung hierfür konnte auch nicht von Alwardt und Isay in /2/ gegeben werden, die diesen Fall mit einer anderen Theorie durchgerechnet haben. Bei 2° und 8° ergibt sich wieder eine gute Übereinstimmung mit der Theorie.

Für das Profil NACA 16006 liegen Meßergebnisse in /14/ vor. Der Vergleich mit der Theorie zeigt nur bei 2° eine Übereinstimmung. Bei größeren Anstellwinkeln ergibt sich eine deutlich größere Kavitationsausdehnung als berechnet. Erklären ließe sich dies mit einer turbulenten Grenzschichtablösung an diesem Profil. In den Wirbeln des Totwassers hinter einer Ablösestelle bilden sich Unterdrücke, die zu einem Erhalt der Kavitation führen. Der Kavitationsbereich ist dadurch wesentlich größer als der potentialtheoretisch errechnete. Zur Klärung des Grenzschichteinflusses auf die Kavitation sind jedoch noch weitere Untersuchungen notwendig. Generell läßt sich sagen, daß die beobachteten Kavitationsausdehnungen stets über den berechneten liegen.

Von besonderem Interesse ist der Zusammenhang zwischen dem Kavitationseinsatz und der Kavitationsausdehnung. Es zeigt sich, daß bei Profilen mit starken Druckgradienten an der Vorderkante wie z.B. dem NACA 16006 die Wahl des CA-Wertes einen großen Einfluß auf die Ergebnisse hat. Rechnungen wurden für dieses Profil sowie für das NACA 0015 durchgeführt beim Anstellwinkel 6° . Die Ergebnisse sind in den Abb. 20 und 21 dargestellt. Während beim Profil NACA 0015 die Kavitationsausdehnung nur gering mit dem CA-Wert variiert, zeigen sich beim NACA 16006 im ungünstigsten Fall Unterschiede von 20 %. Bei diesem Profil liegt das potentialtheoretische Druckminimum unter 1 ‰ der Profiltiefe. Der Druckbeiwert im Minimum ist mit 12,3 bedeutend höher als beim Profil NACA 0015 ($C_{p_{\min}} = 1,8$). Wir haben allerdings zu bedenken, daß für Profile mit einer derartig steilen Druckverteilung die potentialtheoretische Profiltheorie ohne die Berücksichtigung von Zähigkeitseffekten nicht mehr anzuwenden ist.

Wie aus der Abb. 9 zu ersehen ist, tritt beim NACA 16006 schon für $\delta_0 = 4^\circ$ eine erhebliche Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment auf. Bei 6° dürfte sich diese Tendenz noch verstärken. Eine Rechnung ohne die Berücksichtigung von Grenzschichteffekten ist hier nicht mehr zulässig.

Zusätzlich wurden die Kavitationsausdehnungen unter Verwendung der empirischen Nishiyama-Bedingung (Theorie aus /2/) bestimmt. Bei Profilen mit niedrigen Druckgradienten wie z.B. dem NACA 0015 und dem NACA 4412 zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Resultaten der Profiltheorie ohne die Nishiyama-Bedingung.

Der Verlauf der Schichtdicke wurde nach Gl. (3.17) für die Profile NACA 0015 und NACA 4412 ermittelt. Von besonderem Interesse ist die Extrapolation des Kavitationseinsatzes an der Profilvorderkante. Wie die Abb. 12 und 13 zeigen, ergeben sich für diesen Fall unrealistische, weil an der Profilvorderkante negative Schichtdicken. Es zeigt sich also, daß die Theorie nur anzuwenden ist auf Kavitationsschichten, die nicht an der Profilvorderkante beginnen. Dies ist verständlich, da diese Theorie entwickelt wurde mit der Bedingung eines Verschwindens der Quell-Senken-Belegung bei CA und CE. Dies kann nur für Schichten gefordert werden, die nicht an der Profilvorderkante beginnen. Besonders bemerkenswert ist aber, daß die damit erhaltenen Ergebnisse sehr gut übereinstimmen mit den Resultaten jener anderen Version aus /2/, die zur Festlegung der Kavitationsausdehnung von der empirischen Stromlinien-Bedingung von Nishiyama Gebrauch macht. Beim Anstellwinkel 6° zeigt sich in den Abb. 12 und 13, daß die Dicke der Kavitationsschicht an ihrem Ende in guter Näherung mit dem durch die Nishiyama-Bedingung festgelegten Wert übereinstimmt. Die Erklärung dürfte darin zu suchen sein, daß bei diesem Winkel noch näherungsweise von einem Kavitationseinsatz an der Profilvorderkante ausgegangen werden kann.

b) Inhomogene Anströmung

Für die Profile NACA 0015 und NACA 4412 wurden zwei Fälle durchgerechnet:

(I) linearer Anstieg des Zuström winkels von 0° auf 4° und
(II) linearer Abfall von 4° auf 0° . Bei beiden Profilen ergibt sich im Fall (I) eine deutliche größere Kavitationsausdehnung als im Fall (II). Dies hat seine Erklärung in der Profiltheorie. Der Auftrieb eines Profils und damit auch die Druckverteilung wird entscheidend beeinflusst durch den Anstellwinkel im sogenannten 3/4-Punkt (75 % Profiltiefe). Im Fall (I) ist dieser wesentlich größer als im Fall (II), so daß sich bei gleichem Dampfdruck im Falle eines Anstiegs des Zuström winkels stets ausgeprägtere Kavitationserscheinungen ergeben als bei einem Abfall über die Profiltiefe.

c) Superkavitation

Im Fall der Superkavitation wurden die Kavitationsausdehnungen bei den Anstellwinkeln 6° , 8° und 10° für die Profile NACA 0015, NACA 16006 sowie für ein Plattenprofil ($Y_D = 0$) berechnet. Aus der Literatur lagen Meßergebnisse nur für ein Plattenprofil vor (/16/, /17/). Bei allen Profilen zeigt sich, daß bei Superkavitation der Anstellwinkel nur noch eine geringe Rolle spielt. Da es sich bei dem NACA 16006 um ein sehr dünnes Profil handelt, wurden die Ergebnisse auch mit den Messungen für ein Plattenprofil verglichen. Es zeigt sich, daß die Kavitationsausdehnungen größer sind als die berechneten. Besonders beim Plattenprofil ist dies der Fall. Eventuell ließe sich dies durch die Tatsache erklären, daß ein unendlich dünnes Profil technisch nicht zu realisieren ist.

Besonders hervorzuheben ist noch, daß die Theorie für die Super- und Teilkavitation einen stetigen Übergang ergeben, wie es in der Abb. 19 zu ersehen ist. Da bei Superkavitation der Kavitationseinsatz stets an der Profilverderrkante erfolgt, wurde zur Berechnung der Kavitationsausdehnung im Profilbereich die Theorie mit der Nishiyama-Bedingung aus /2/ herangezogen.

Literaturverzeichnis

- /1/ W.H. Isay:
Kavitation
Schiffahrtsverlag "Hansa", Hamburg (1981)
- /2/ P. Alwardt, W.H. Isay:
Zur Behandlung von Teilkavitation an Flügeln mit
Methoden der Profiltheorie
Institut für Schiffbau, Bericht Nr. 399 (1980)
- /3/ W.H. Isay:
Inkompressible Strömungen
Vorlesungsmanuskript der Universität Hamburg (1972)
- /4/ N. Westphal:
Keimverteilungsmessungen mit dem Laserstreulichtverfahren
bei Tragflügel- und Propellerströmungen
Institut für Schiffbau, Bericht Nr. 408 (1981)
- /5/ J.A. Geverst:
Linearized Theory for Partially Cavitated Hydrofoils
Int. Shipbuilding Progress Vol. 6 (1959)
- /6/ J.A. Geverst:
Linearized Theory for Fully Cavitated Hydrofoils
Int. Shipbuilding Progress Vol. 7 (1960)
- /7/ T. Hanaoha:
Linearized Theory of Cavity Flow past a Hydrofoil of
Arbitrary Shape
Selected Papers from the Journal of the Society of
Nav. Arch. of Japan Vol. 3 (1969)
- /8/ W. Schmeidler:
Integralgleichungen mit Anwendung in Physik und Technik
Akademische Verlagsgesellschaft Geest' und Portig
Leipzig 1950
- /9/ I. Abbott, A. von Doenhoff:
Theory of Wing Sections
Dover Publications Inc. New York (1959)

- /10/ H. Schlichting, E. Truckenbrodt:
Aerodynamik des Flugzeugs Bd. I
Springer-Verlag Berlin (1969)
- /11/ T. Nishiyama, J. Ito:
Linearized Theory of Partially Cavitated Hydrofoils
by Singularity Method
Techn. Report of the Tohoku University Vol. 42 (1977)
- /12/ T. Nishiyama, T. Ota:
Linearized Potential Flow Models for Hydrofoils in
Supercavitating Flows
Journal of Basic Eng. 93 (1971)
- /13/ R. Oba, T. Ikohagi:
Performance Analyses on a Short Cavity Supercavitating
Hydrofoil
Reports of the Inst. of High Speed Mech., Tohoku
University (1981)
- /14/ C. Kruppa, G. Sasse:
Cavitation Erosion Test with Oscillating Sections
Proc. of the 14th Symp. on Naval Hydrodynamics,
Ann Arbor, U.S.A. (in Vorbereitung)
- /15/ W.H. Isay:
Ein Wirbelmodell zur Behandlung der Strömung am Rotor-
blatt eines Hubschraubers
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Nr. 52 (1972)
- /16/ P. Leehay, T.S. Stellingner:
Force and Moment Measurements of Supercavitating
Hydrofoils of Finite Span with Comparison to Theory
Journal of Fluid Engineering 96 (1975)
- /17/ R.B. Wade, A.J. Acosta:
Experimental Observations on the Flow past a Plano-
Convex Hydrofoil
Journal of Basic Eng. 88 (1966)

Z u s a m m e n f a s s u n g

Von Alwardt und Isay wurde 1980 in /2/ ein Integralgleichungssystem zur Berechnung der zusätzlichen Singularitätenbelegungen an kavitierenden Profilen aufgestellt und verschiedene Lösungsvarianten für den Bereich der Teilkavitation diskutiert.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Theorie aus /2/, die zur Bestimmung der Kavitationsausdehnung auf die Nishiyama-Bedingung verzichtet, zur Berechnung von Kavitationserscheinungen bei inhomogener Zuströmung herangezogen. Diskutiert wurde der Fall eines sich über die Profiltiefe linear ändernden Anstellwinkels. Es zeigt sich, daß bei einem Anstieg des Winkels die Kavitation am Profil ausgeprägter ist als bei einem Abfall. Bei konstantem Anstellwinkel wurden mit dieser Theorie Rechnungen für die Naca Profile 0015,4412 und 16006 durchgeführt und mit Messungen von Westphal und Sasse verglichen. Während sich bei den ersten beiden Profilen zufriedenstellend bis gute Übereinstimmungen zwischen Theorie und Experiment ergaben, zeigten sich beim Naca 16006 schon bei mittleren Anstellwinkeln erhebliche Abweichungen. Bei solchen Profilen mit starken Druckgradienten an der Profilvorderkante versagt die Anwendung der Profilttheorie, da sie keine Grenzschichteffekte berücksichtigt.

Eine weitere Lösungsvariante für den Bereich der Teilkavitation wurde aufgestellt. Es zeigte sich, daß sie wegen der Annahme einer im gesamten Profilbereich definierten zusätzlichen Quell-Senken-Belegung zu physikalisch unrealistischen Ergebnissen führt.

Basierend auf dem Integralgleichungssystem aus /2/ wurde eine Theorie zur Beschreibung der Superkavitation aufgestellt. Im Grenzfall der Vollkavitation ($C_e = A$) liefert sie einen stetigen Übergang zur Teilkavitation. Damit zeigt sich die Überlegenheit der Singularitätenmethode gegenüber den Theorien, die Kavitationsgebiete mit Methoden der konformen Abb. behandeln. Auch in neueren Arbeiten treten dort unrealistische Singularitäten bei $C_e = A$ auf (siehe z.B. Oba /13/). Der Vorteil der hier aufgestellten Theorie gegenüber vergleichbaren wie von Nishiyama /12/ liegt darin, daß das verwendete Integralgleichungssystem exakt gelöst werden kann. Als charakteristische Eingangsgröße wird nur die Druckverteilung im nichtkavitierendem Zustand benötigt, so daß sich Kavitationserscheinungen an beliebigen Tragflügelprofilen berechnen lassen.

Anhang

A. Der Vergleich der Singularitätenbelegungen im Grenzfall der Vollkavitation

In /2/ wurden die zusätzlichen Wirbel- und Quell-Senken-Belegungen für die spezielle Form einer Druckverteilung

$C_p(\tau) = C_0 + C_1 \cdot \cos \tau$ im Grenzfall der Vollkavitation exakt ausgewertet. Es ergaben sich die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_n(\mathcal{V})}{u_0} &= \frac{G_v - C_0}{2\sqrt{2}'} \sqrt{\cot \frac{\mathcal{V}}{2}} \left(1 - \cot \frac{\mathcal{V}}{2} \right) + \\ &+ \frac{C_1}{4\sqrt{2}'} \left(1 - 2\cos \mathcal{V} - (3 - 2\cos \mathcal{V}) \cot \frac{\mathcal{V}}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{q_n(\mathcal{V})}{u_0} &= \frac{G_v - C_0}{2\sqrt{2}'} \sqrt{\cot \frac{\mathcal{V}}{2}} \left(1 + \cot \frac{\mathcal{V}}{2} \right) + \\ &+ \frac{C_1}{4\sqrt{2}'} \sqrt{\cot \frac{\mathcal{V}}{2}} \left(1 - 2\cos \mathcal{V} + (3 - 2\cos \mathcal{V}) \cot \frac{\mathcal{V}}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Um mit der oben angegebenen speziellen Form der Druckverteilung die Belegungen der Superkavitation berechnen zu können, benötigen wir die folgenden, in /2/ bewiesenen Integralformeln

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{V}} = \sqrt{2}' - \sqrt{\cot \frac{\mathcal{V}}{2}} \quad (\text{A.3.1})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{V}} = \sqrt{\tan \frac{\mathcal{V}}{2}} - \sqrt{2}' \quad (\text{A.3.2})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}}^3 \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \mathcal{V}} = \sqrt{2}' + \sqrt{\cot \frac{\mathcal{V}}{2}}^3 \quad (\text{A.3.3})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}}^3 \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} = -\sqrt{2} - \sqrt{\tan \frac{\nu}{2}}^3 \quad (\text{A.3.4})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau \cos \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\sqrt{\tan \frac{\nu}{2}} - \sqrt{2} \right) \cos \nu \quad (\text{A.3.5})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau \cos \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\sqrt{\cot \frac{\nu}{2}} - \sqrt{2} \right) \cos \nu \quad (\text{A.3.6})$$

a) Wirbelbelegung

Die Wirbelbelegung lässt sich darstellen als

$$\frac{\gamma_n(\nu)}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left((\rho(\tau') - G\nu) \frac{\tan \frac{\tau'}{2} \sin \tau' d\tau'}{\cos \tau' - \cos \tau} \right. \\ \left. \cdot \left(\sqrt{\cot \frac{\nu}{2}} \cot \frac{\tau}{2} + \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}}^3 \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \right) \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} \right)$$

Nach Ausführen der inneren Integration erhalten wir

$$\frac{\gamma_n(\nu)}{u_0} = \frac{G\nu - c_0 + c_1}{4} \left[\sqrt{\cot \frac{\nu}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} + \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}}^3 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} \right] - \\ - \frac{c_1}{4} \left[\sqrt{\cot \frac{\nu}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau \cos \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} + \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}}^3 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}}^3 \frac{\sin \tau \cos \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \nu} \right]$$

Die einzelnen Integrationen lassen sich mit Hilfe der Formeln (A.3.1) bis (A.3.6) leicht durchführen. Es ergibt sich

$$\frac{\gamma_n(\nu)}{u_0} = \frac{G\nu - c_0 + c_1}{4} \left(\sqrt{2} - \sqrt{2} \cot \frac{\nu}{2} \right) \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}} - \\ - \frac{c_1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \nu + \frac{\cot \frac{\nu}{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cot \frac{\nu}{2} \cos \nu \right) \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}}$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir als endgültiges Resultat für die Wirbelbelegung

$$\frac{\gamma_n(\vartheta)}{u_0} = \frac{G_v - c_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\cot \frac{\vartheta}{2}} \left(1 - \cot \frac{\vartheta}{2} \right) + \quad (\text{A.4})$$

$$+ \frac{c_1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\cot \frac{\vartheta}{2}} \left(1 - 2 \cos \vartheta - (3 - 2 \cos \vartheta) \cot \frac{\vartheta}{2} \right)$$

(A.4) ist identisch mit (A.1), wie es auch sein muß.

b) Quell-Senken-Belegung

Die Theorie der Superkavitation liefert im Grenzfall der Vollkavitation die Quell-Senken-Belegung

$$\frac{q_n(\vartheta)}{u_0} = \cot \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(c_p(\tau) - G_v + \frac{\gamma_n(\tau)}{u_0} \right) \frac{\tan \frac{\tau}{2} \sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta}$$

Wir setzen erneut $c_p(\tau) = c_0 + c_1 \cdot \cos \tau$ und verwenden für γ_n die Lösung (A.4)

$$\frac{q_n(\vartheta)}{u_0} = (G_v - c_0) \cot \frac{\vartheta}{2} + c_1 \cot \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \cos \vartheta \right) +$$

$$+ \cot \frac{\vartheta}{2} \frac{G_v - c_0}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} \right) +$$

$$+ \frac{c_1}{4\sqrt{2}} \cot \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau \cos \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\cot \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \tau \cos \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} \right)$$

Die Integrationen werden mit den unter (A.3) angegebenen Formeln vollzogen.

Wir erhalten

$$\frac{q_n(\mathcal{J})}{u_0} = \frac{G_v - c_0}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} + \sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}}^3 \right) +$$

$$+ \frac{C_1}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} - 2\sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} \cos \mathcal{J} + 3\sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} - 2\sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} \cos \mathcal{J} \right)$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas vereinfachen, so daß sich endgültig für die Quell-Senken-Belegung ergibt

$$\frac{q_n(\mathcal{J})}{u_0} = \frac{G_v - c_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} \left(1 + \cot \frac{\mathcal{J}}{2} \right) +$$

$$+ \frac{C_1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\cot \frac{\mathcal{J}}{2}} \left(1 - 2\cos \mathcal{J} + (3 - 2\cos \mathcal{J}) \cot \frac{\mathcal{J}}{2} \right) \quad (\text{A.5})$$

(A.5) ist identisch mit (A.2). Es zeigt sich also, daß im Grenzfall der Vollkavitation die Singularitätenbelegungen aus dem Bereich der Superkavitation identisch sind mit denen aus dem Bereich der Teilkavitation.

B. Beweis einiger Integralformeln

Sämtliche in dieser Arbeit auftretenden Integrale lassen sich auf die folgenden, aus der Aerodynamik, z.B. /15/, bekannten Grundintegrale zurückführen.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} d\tau = \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau - \cosh \Omega} d\tau = - \frac{e^{-\lambda \Omega}}{\sinh \Omega} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau + \cosh \Theta} d\tau = (-1)^{\lambda} \frac{e^{-\lambda \Theta}}{\sinh \Theta} \quad (\text{B.3})$$

a) Integral (3.29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau + \tan \frac{\vartheta}{2} \sin \tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\lambda-1)\tau + \cos(\lambda+1)\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} d\tau \\ &= \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\frac{1}{2} (\sin(\lambda-1)\vartheta + \sin(\lambda+1)\vartheta)}{\sin \vartheta} \\ &= \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\sin \lambda \vartheta \cdot \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \\ &= \sin \lambda \vartheta \cdot \tan \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}$$

b) Integral (6.15)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cosh \Omega - \cos \tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau + \cosh \Phi} d\tau &= \frac{e^{-\lambda \Omega}}{\sinh \Omega} + (-1)^{\lambda} \frac{e^{-\lambda \Phi}}{\sinh \Phi} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \lambda \tau \left(\frac{1}{\cosh \Omega - \cos \tau} + \frac{1}{\cos \tau + \cosh \Phi} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\cosh \Omega + \cosh \Phi) \cos \lambda \tau}{(\cosh \Omega - \cos \tau)(\cos \tau + \cosh \Phi)} d\tau \end{aligned}$$

Wir erhalten damit als Resultat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau \, d\tau}{(\cosh \Omega - \cos \tau)(\cos \tau + \cosh \Phi)} = \frac{1}{\cosh \Omega + \cosh \Phi} \left[\frac{e^{-\lambda \Omega}}{\sinh \Omega} + (-1)^\lambda \frac{e^{-\lambda \Phi}}{\sinh \Phi} \right]$$

b) Integral (3.22)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cosh \theta - \cos \tau} \, d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} \, d\tau &= \frac{e^{-\lambda \theta}}{\sinh \theta} + \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\cosh \theta - \cos \vartheta) \cos \lambda \tau \, d\tau}{(\cosh \theta - \cos \tau)(\cos \tau - \cos \vartheta)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{(\cosh \theta - \cos \tau)(\cos \tau - \cos \vartheta)} \, d\tau = \frac{1}{\cosh \theta - \cos \vartheta} \left[\frac{e^{-\lambda \theta}}{\sinh \theta} + \frac{\sin \lambda \vartheta}{\sin \vartheta} \right]$$

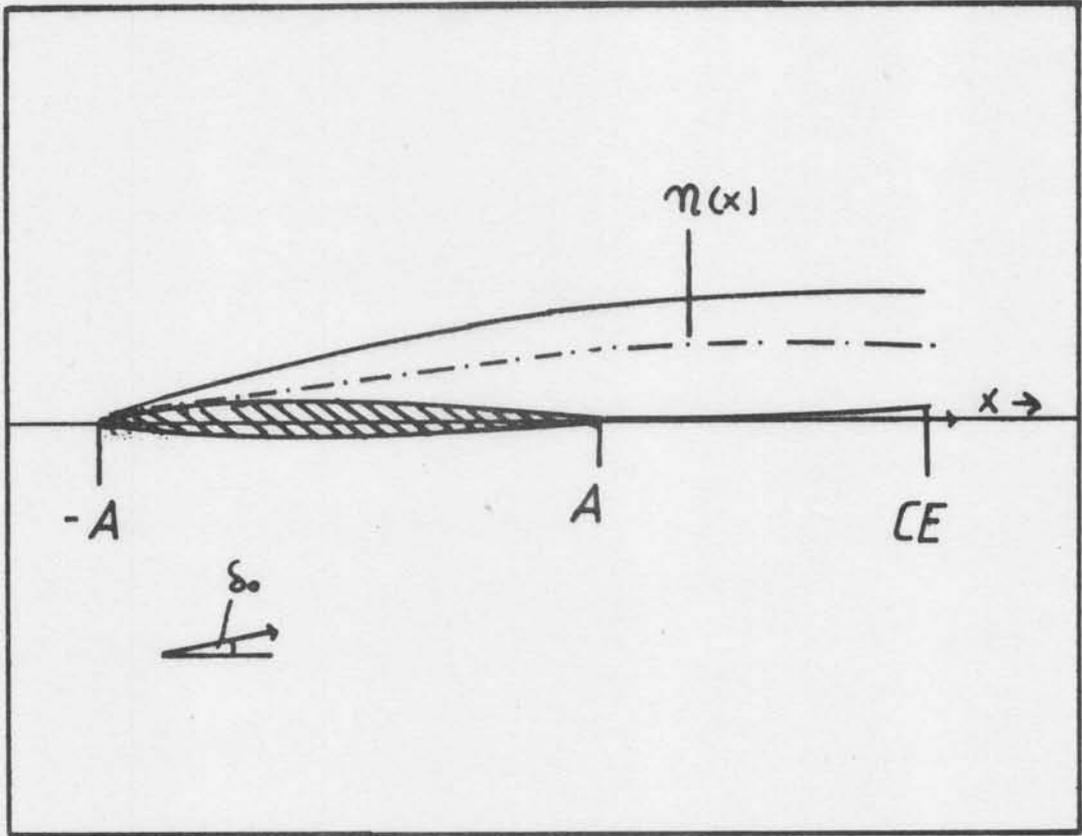
Verzeichnis der Abbildungen

Abb.

- 1) Bezeichnungen am kavitierenden Profil
- 2a,b) Druckverteilung am Profil NACA 0015
- 3a,b) Druckverteilung am Profil NACA 4412
- 4) Druckverteilung am Profil NACA 16006
- 5,6) Kavitationsausdehnung am Profil NACA 0015
- 7,8) Kavitationsausdehnung am Profil NACA 4412
- 9) Kavitationsausdehnung am Profil NACA 16006
- 10) Druckverteilung bei Kavitation am Profil NACA 0015
(Theorie aus Abschnitt 4)
- 11) Druckverteilung bei Kavitation am Profil NACA 0015
(Theorie aus Abschnitt 5)
- 12,13,14) Verlauf der Schichtdicke am Profil NACA 0015
- 15) Verlauf der Schichtdicke am Profil NACA 4412
- 16) Kavitationsausdehnung am Profil NACA 0015
bei Superkavitation
- 17) Kavitationsausdehnung am Profil NACA 16006
- 18) Kavitationsausdehnung am Plattenprofil bei
Superkavitation
- 19) Der Übergang von der Super- zur Teilkavitation
- 20) Der Einfluss des Kavitationseinsatzes auf die ...
Kavitationsausdehnung (NACA 0015)
- 21) Der Einfluss des Kavitationseinsatzes auf die
Kavitationsausdehnung (NaCA 16006)

TRAGFLÜGELPROFIL MIT
SUPERKAVITATION

Abb. 1b



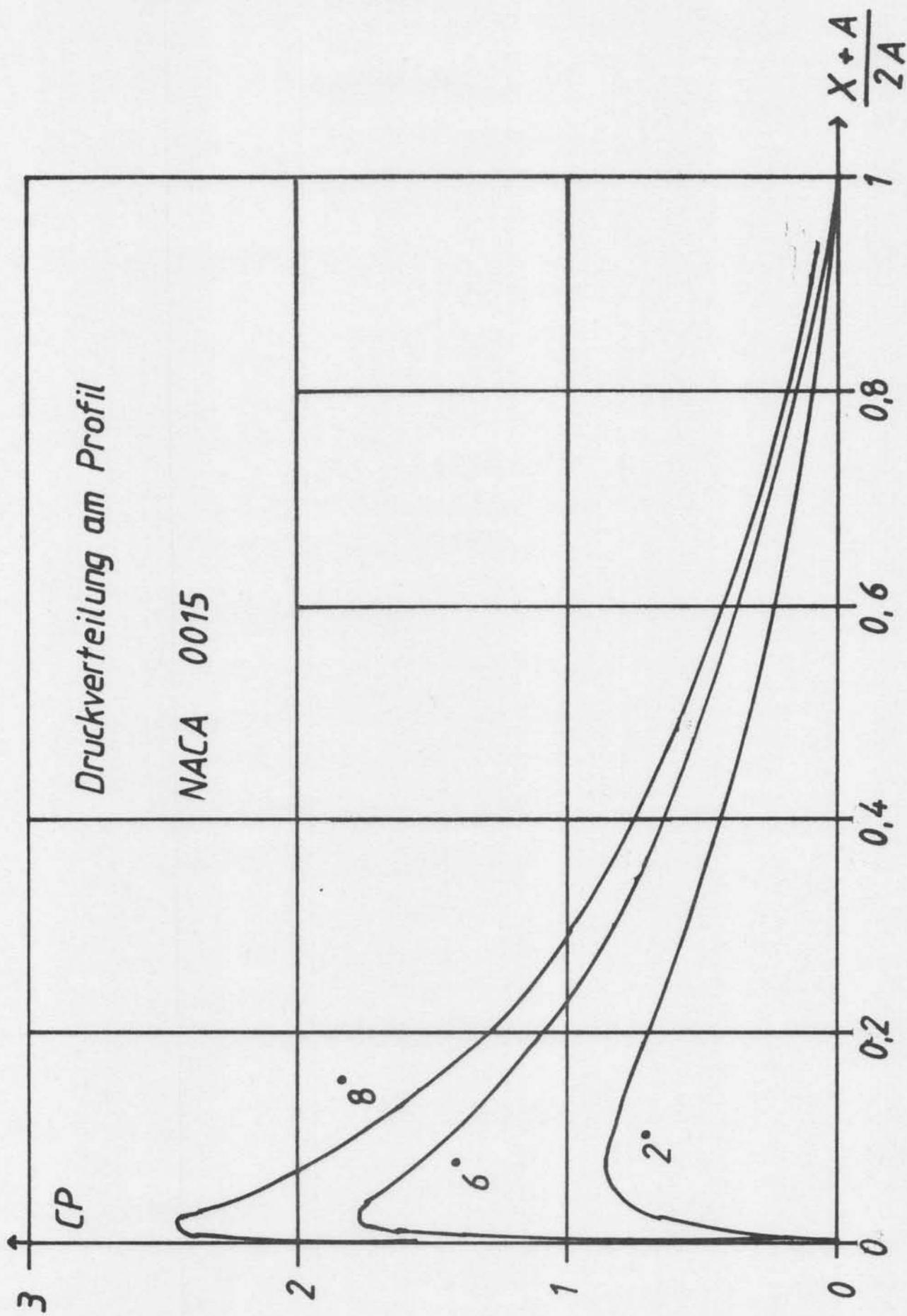


Abb. 2a

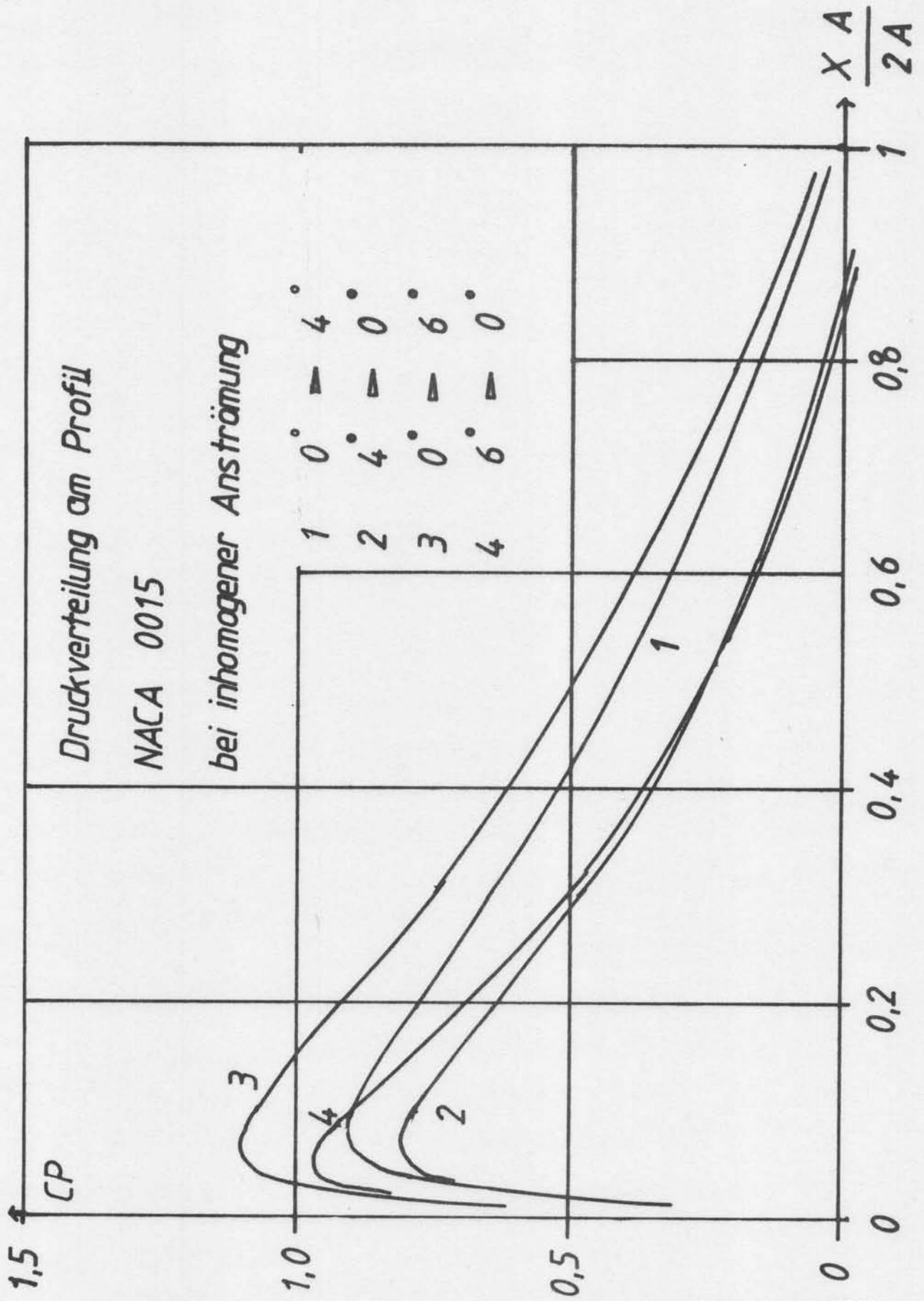


Abb. 2b

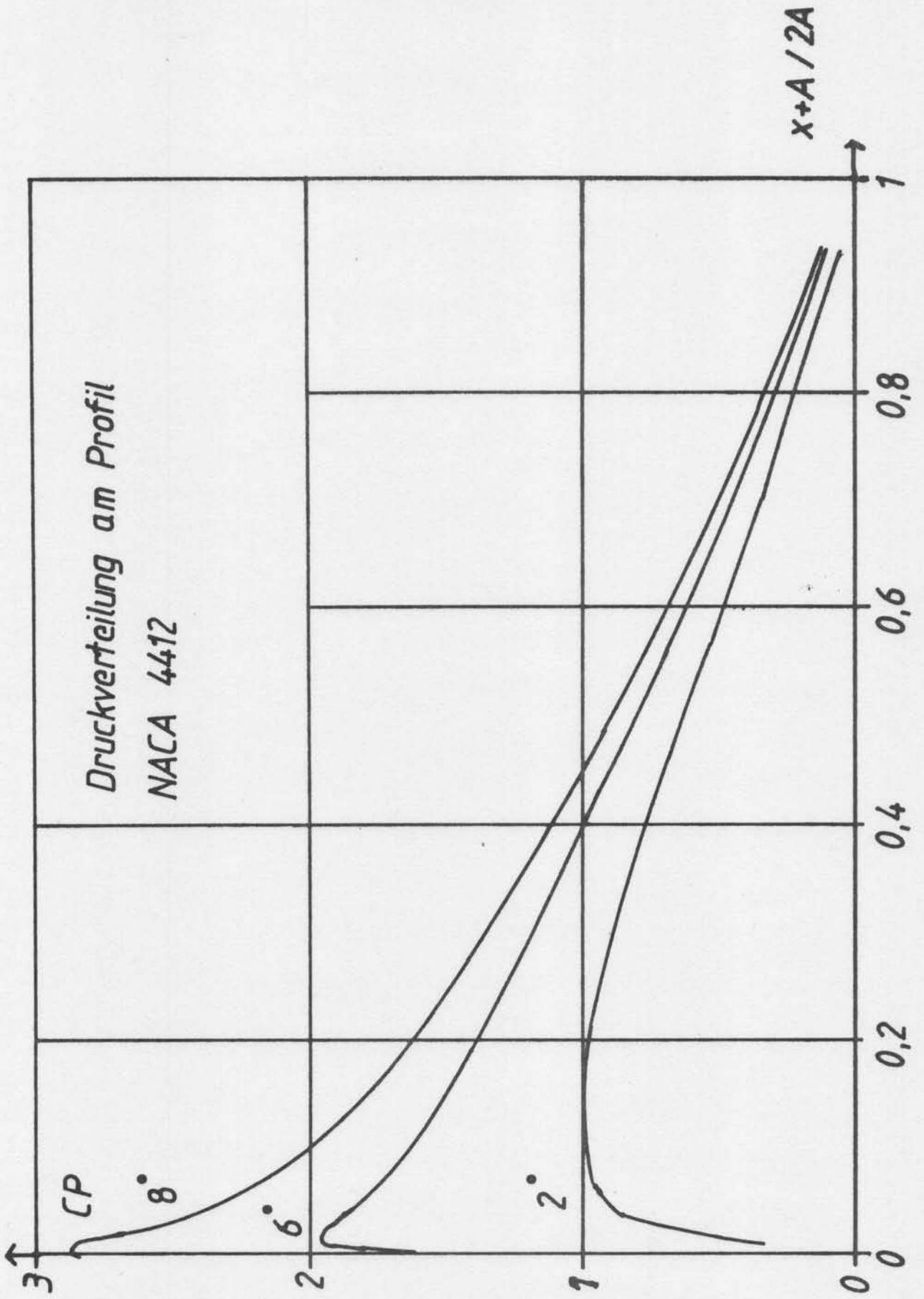


Abb. 3a

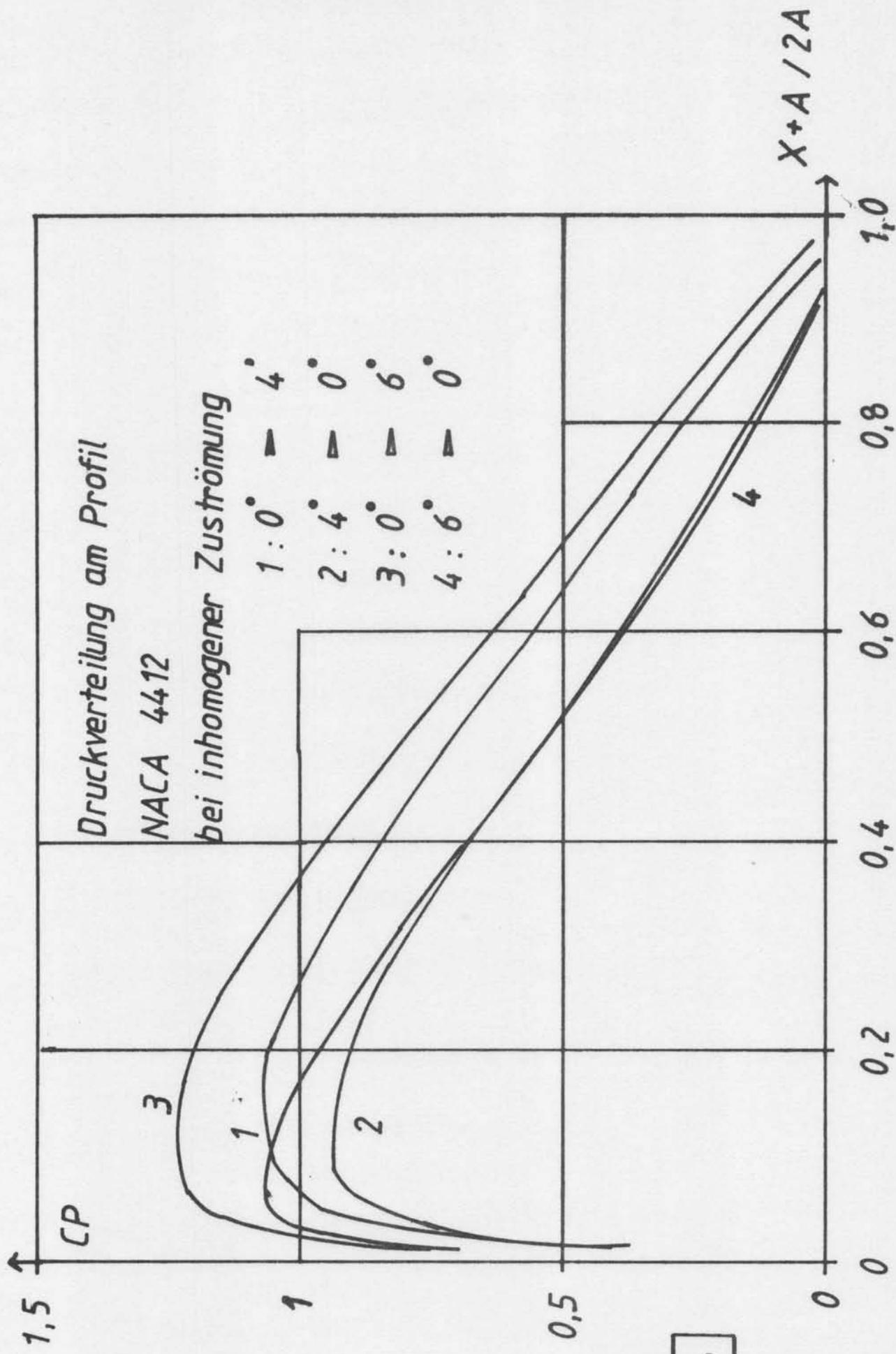


Abb. 3b

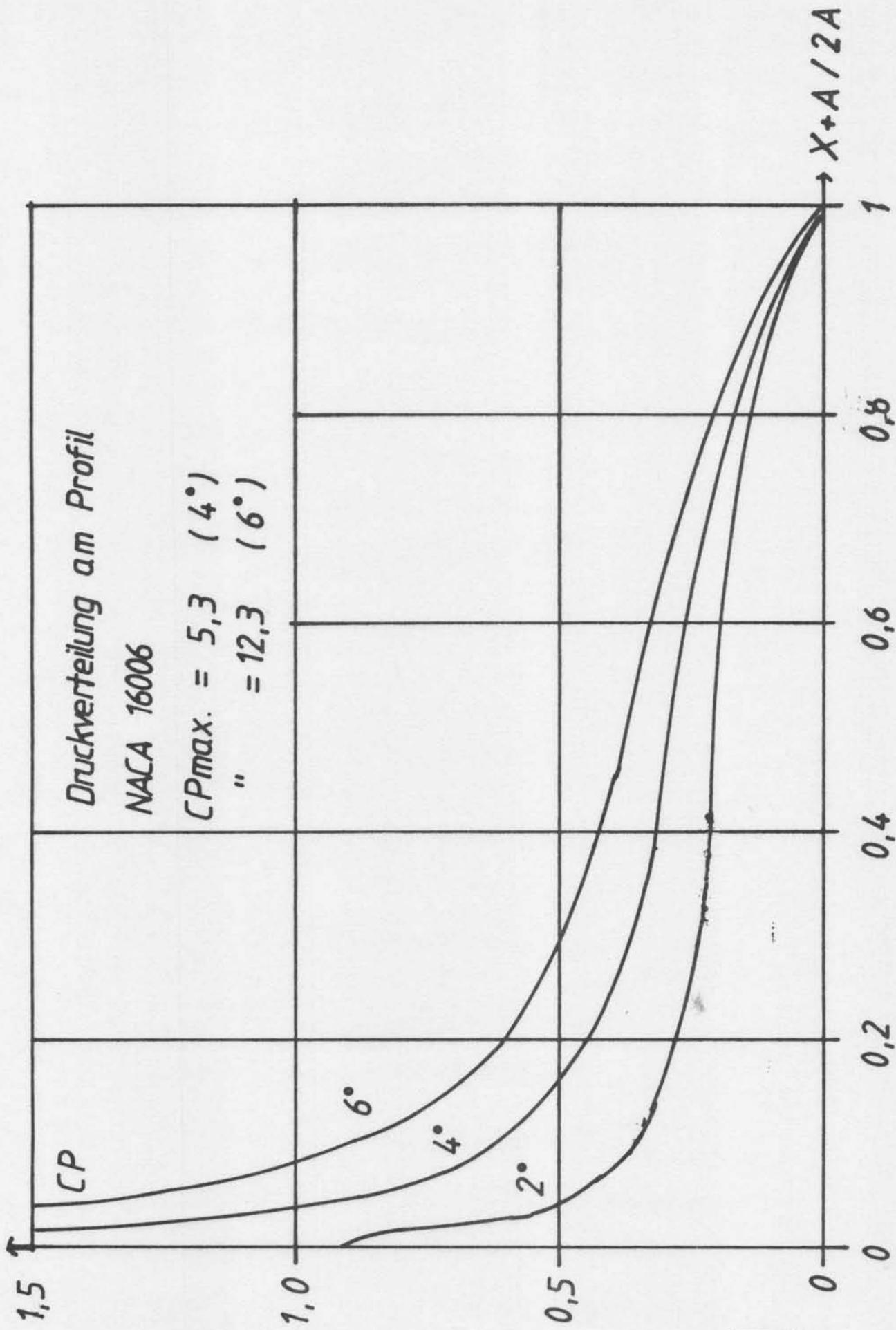


Abb. 4

KAVITATIONS-AUSDEHNUNG AM PROFIL NACA 0015

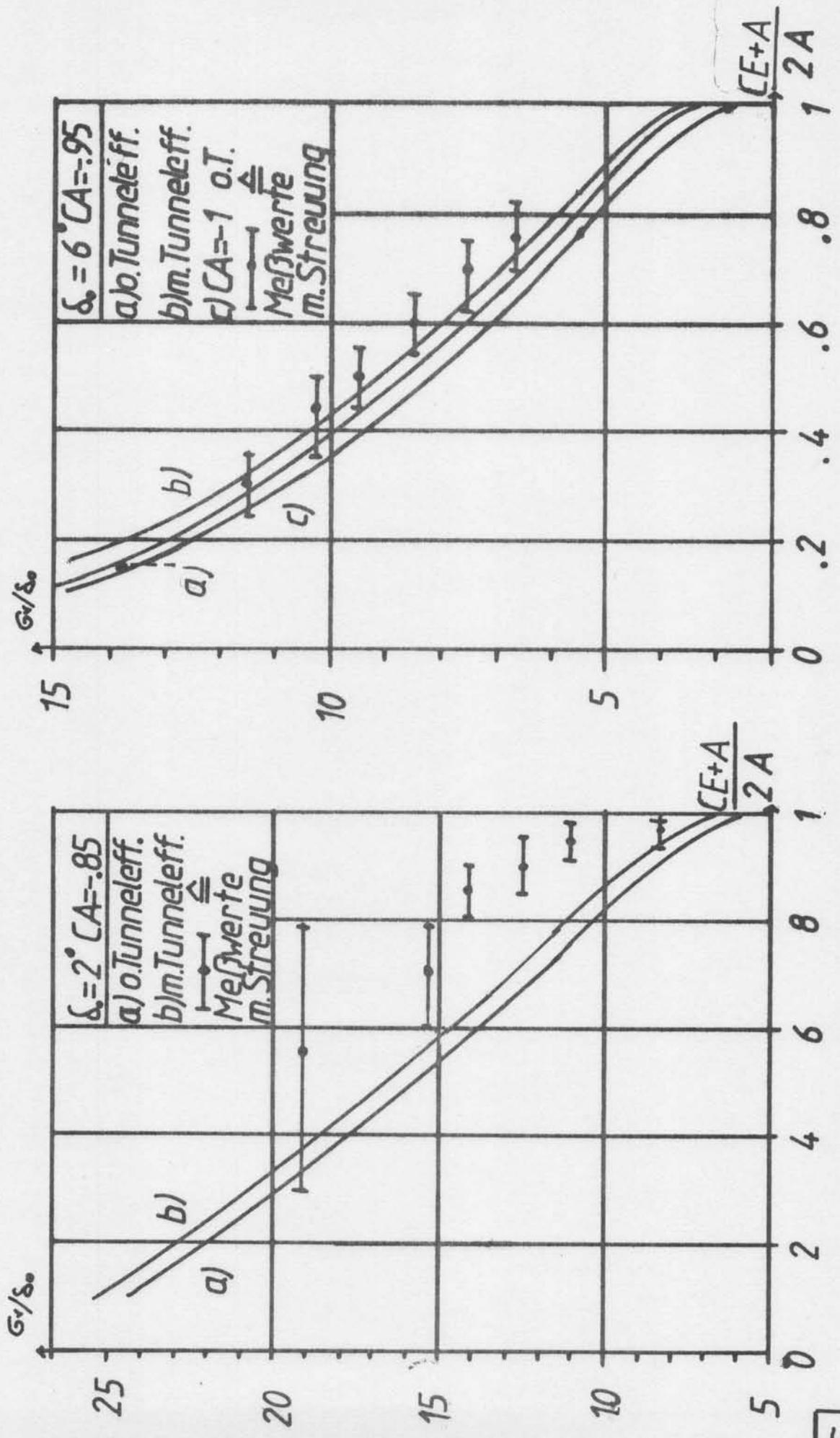


Abb. 5

KAVITATIONS-AUSDEHNUNG AM PROFIL NACA 0015

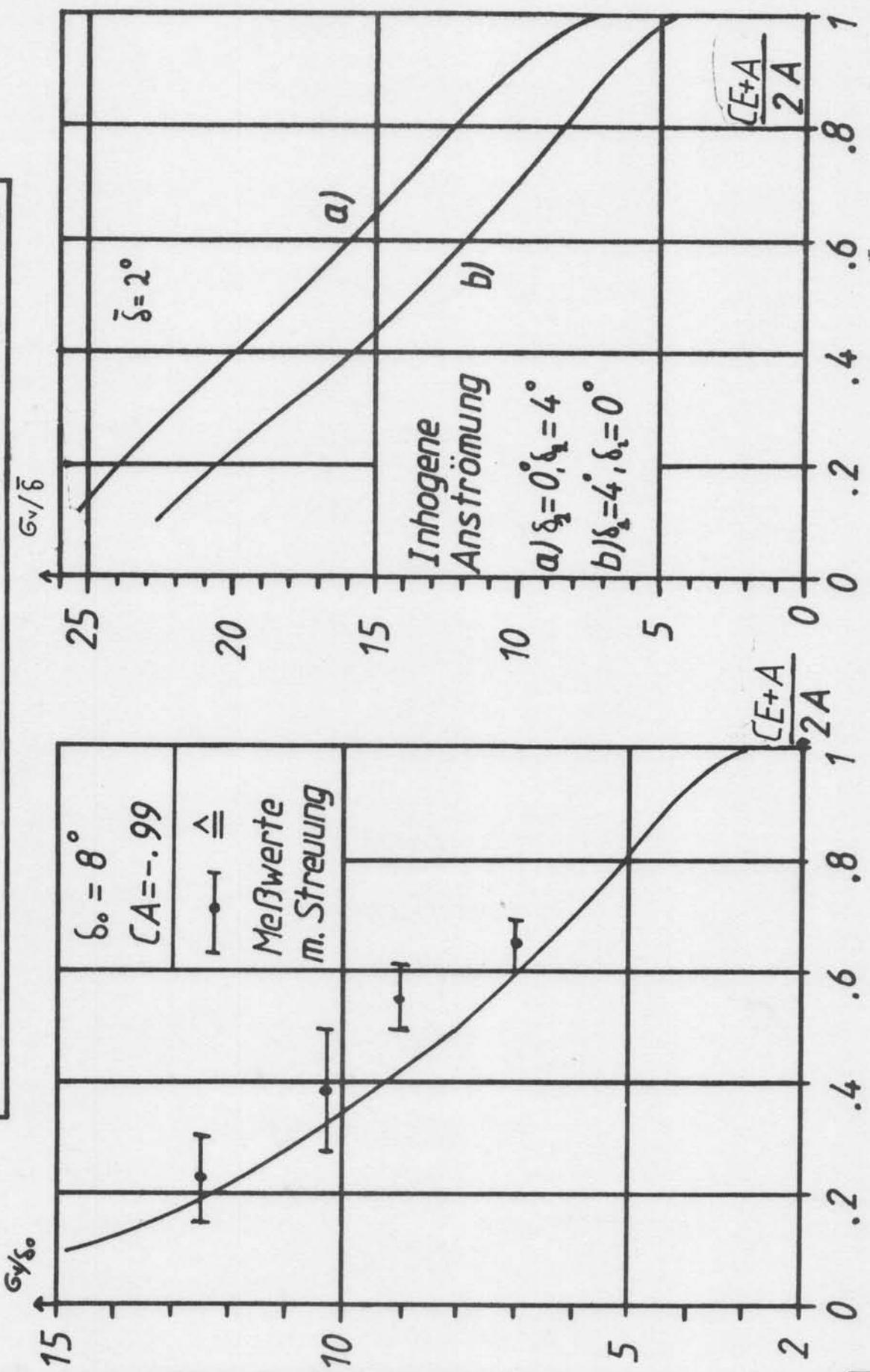


Abb. 6

KAVITATIONS-AUSDEHNUNG AM PROFIL NACA 4412

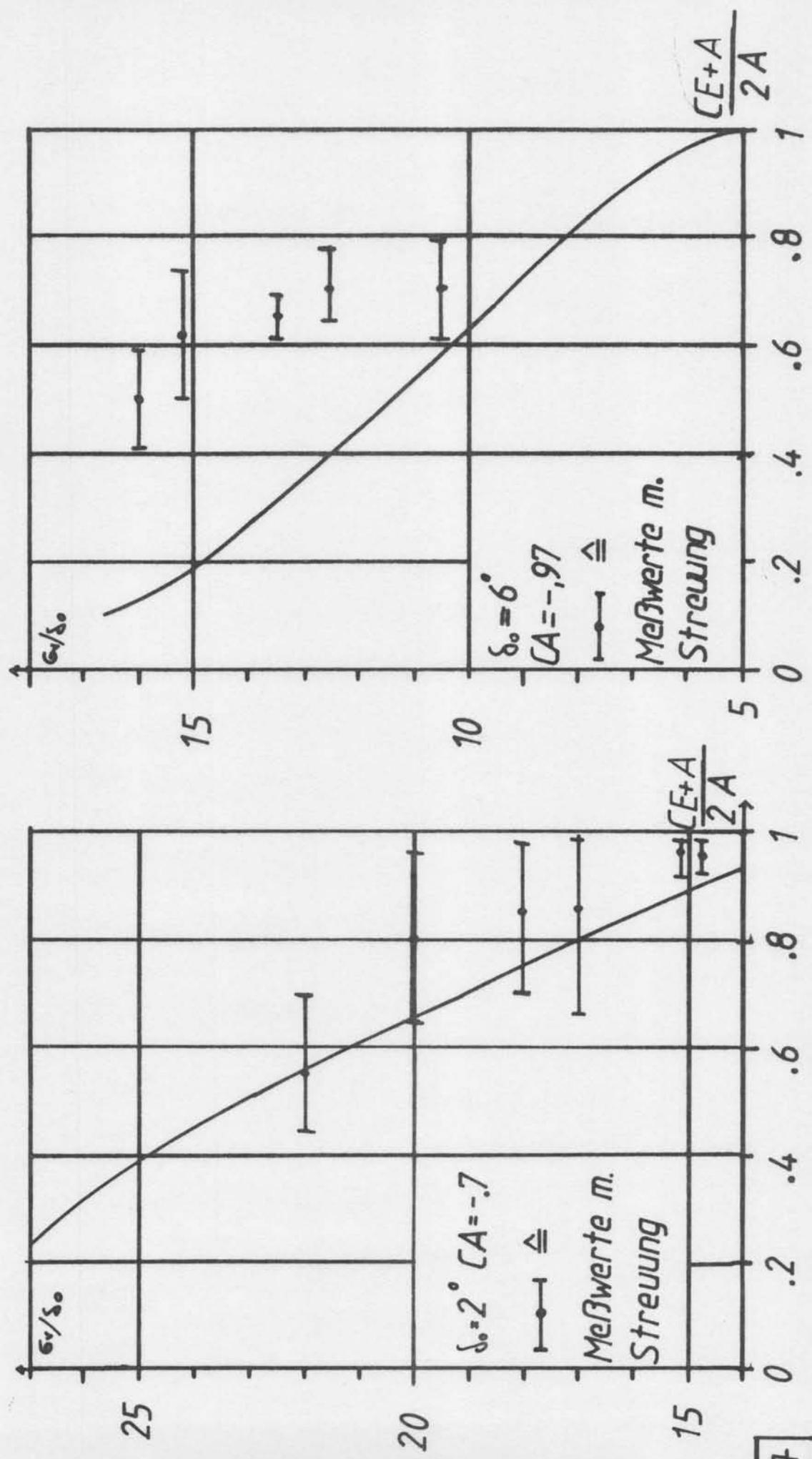
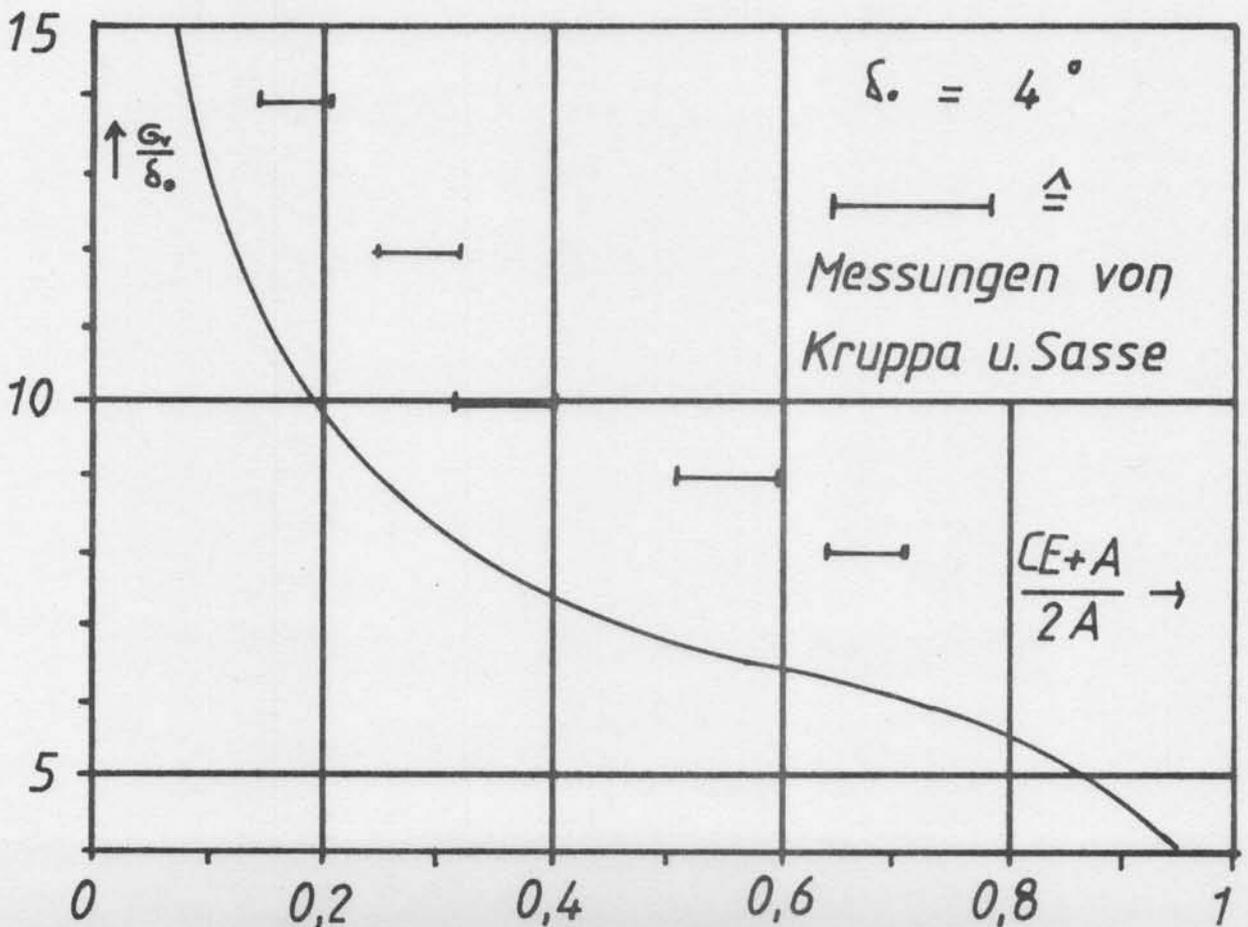
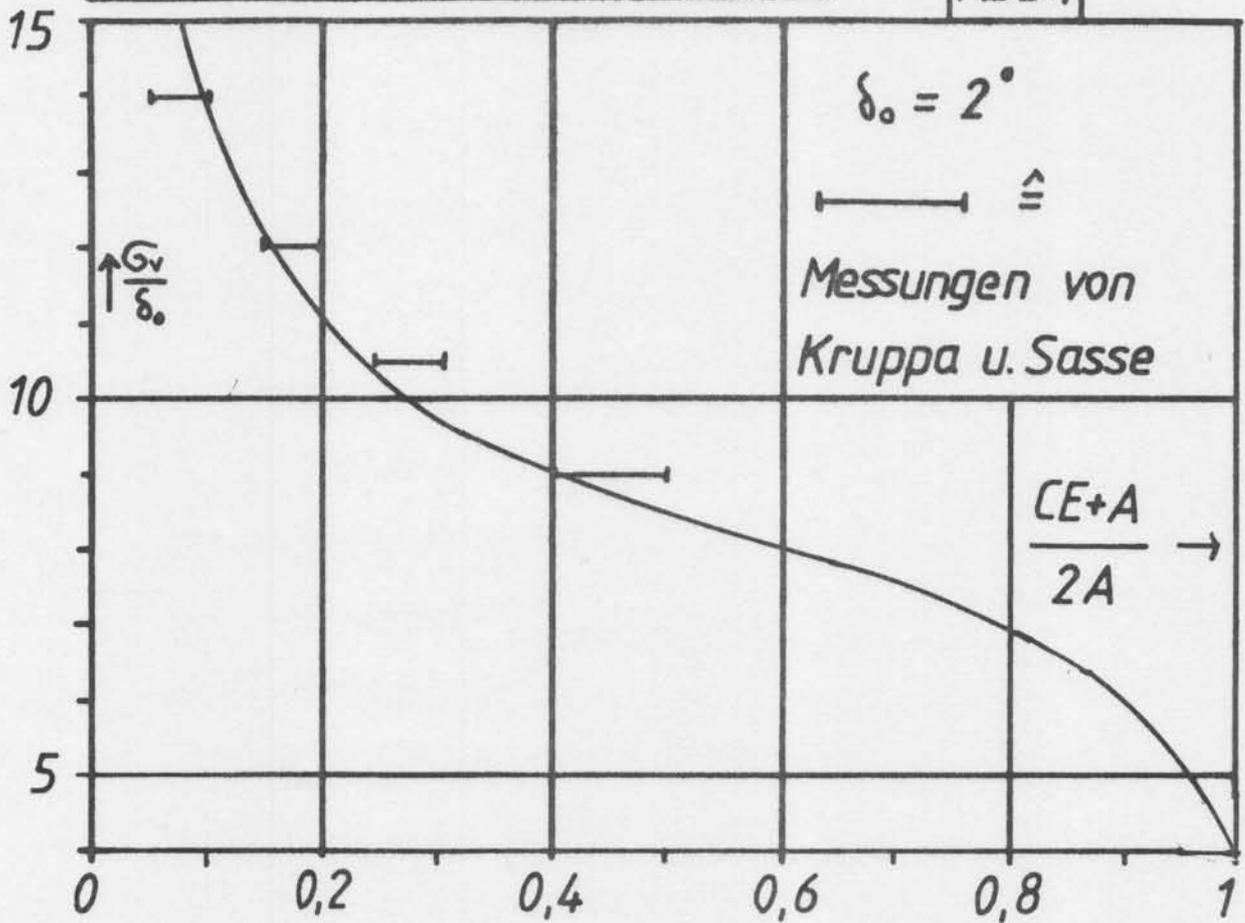


Abb. 7

KAVITATIONS-AUSDEHNUNG
AM PROFIL NACA 16006

Abb. 9



**DRUCKVERTEILUNG AM PROFIL NACA 0015
BEI KAVITATION**

$\Delta = 6 \text{ GRAD}$ $CA = -.95$

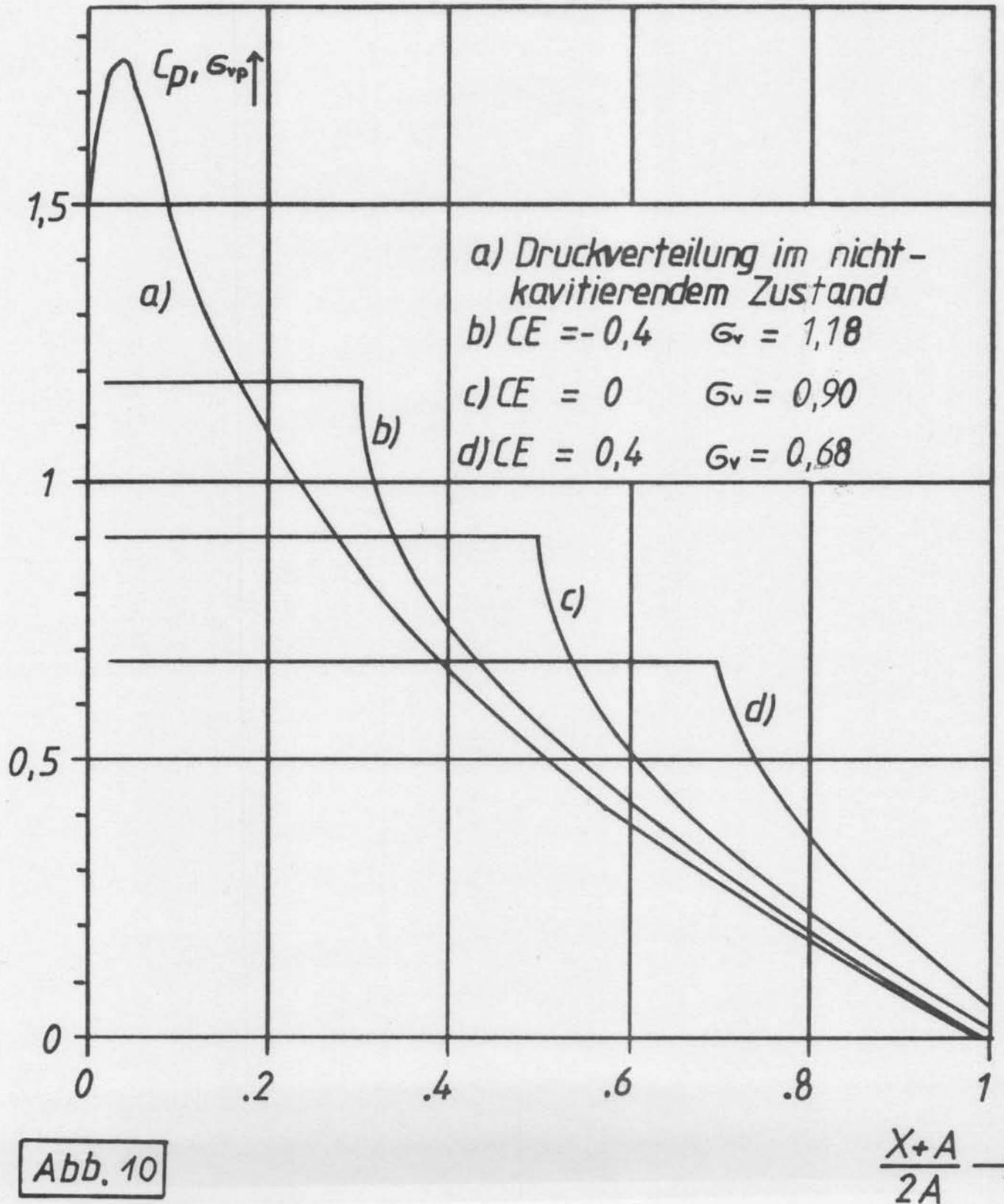


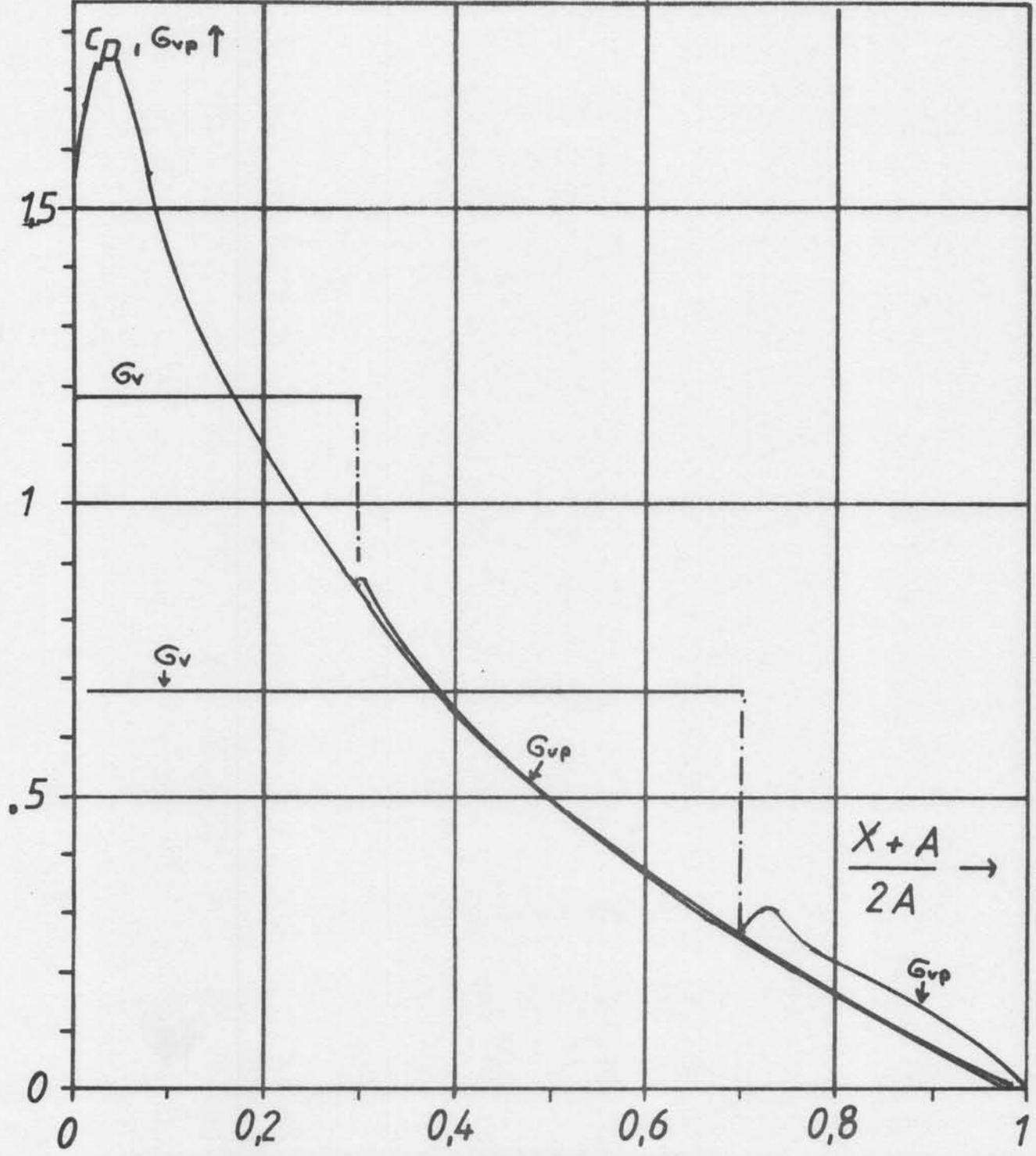
Abb. 10

$\frac{X+A}{2A} \rightarrow$

**DRUCKVERTEILUNG AM PROFIL NACA 0015
 BEI KAVITATION (Theorie aus Abschnitt 5)**

DELTA = 6 GRAD

Abb. 11



SCHICHTDICKE AM PROFIL NACA 0015

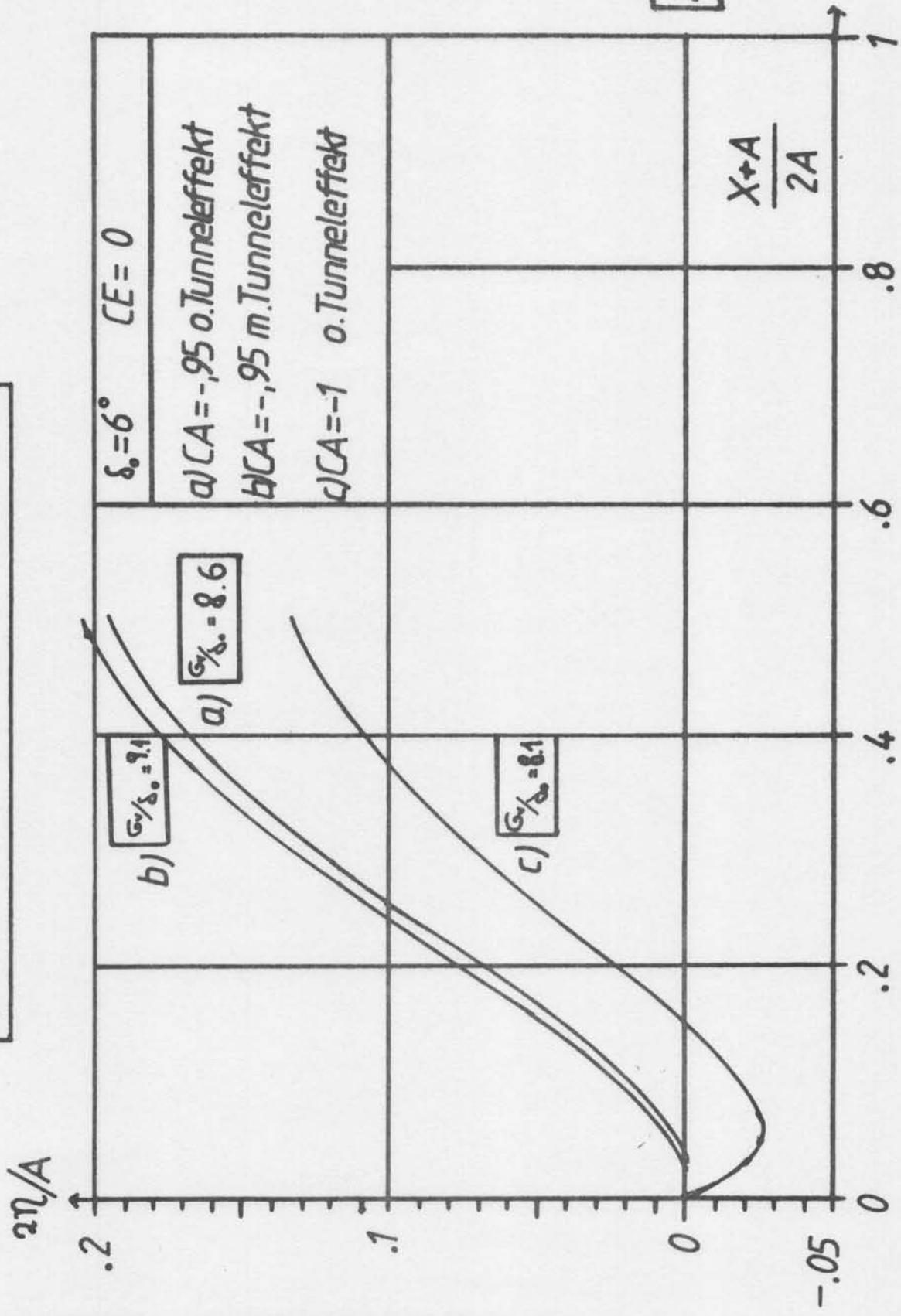


Abb. 11

SCHICHTDICKE AM PROFIL NACA 0015

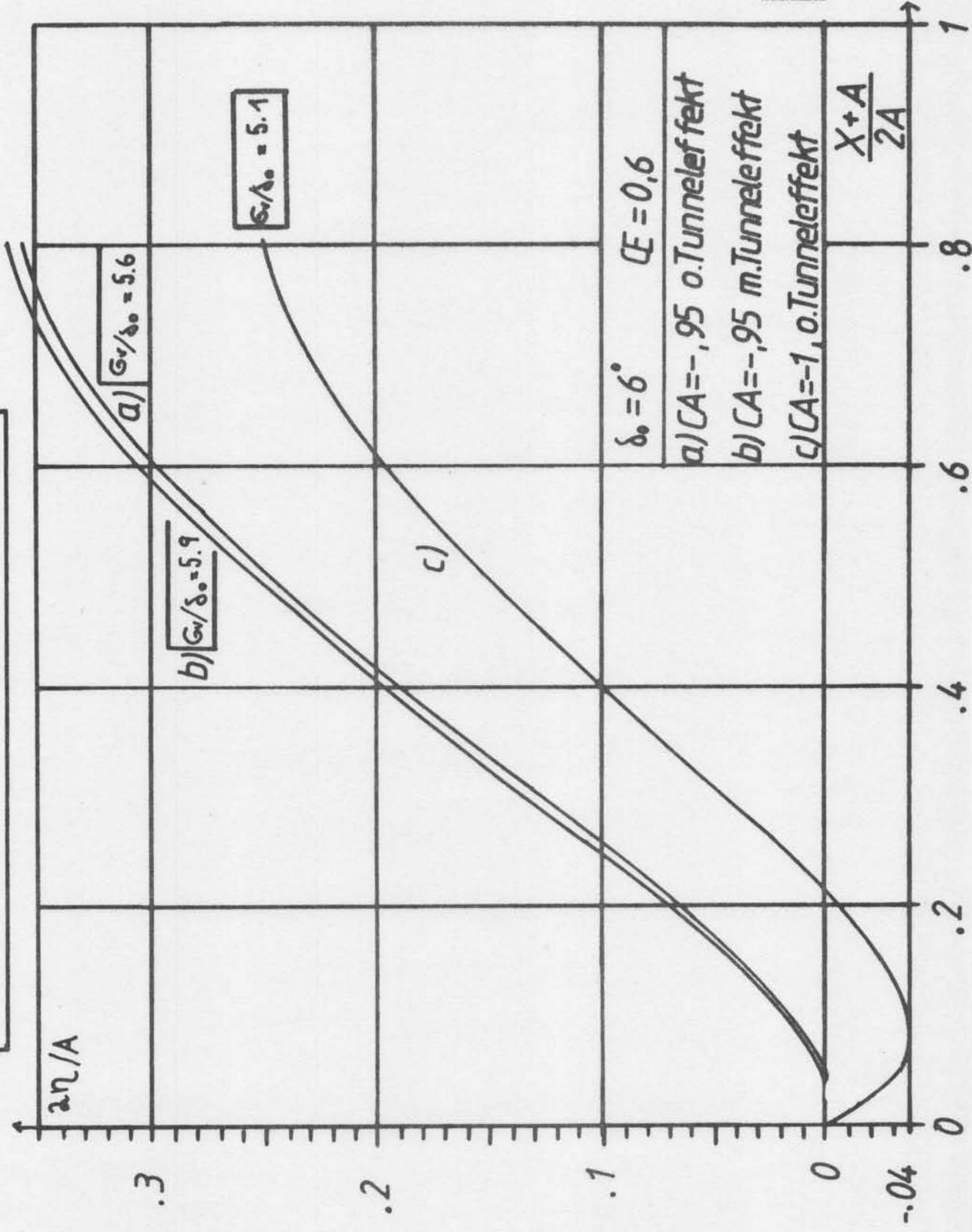


Abb. 13

SCHICHTDICKE AM PROFIL NACA 0015

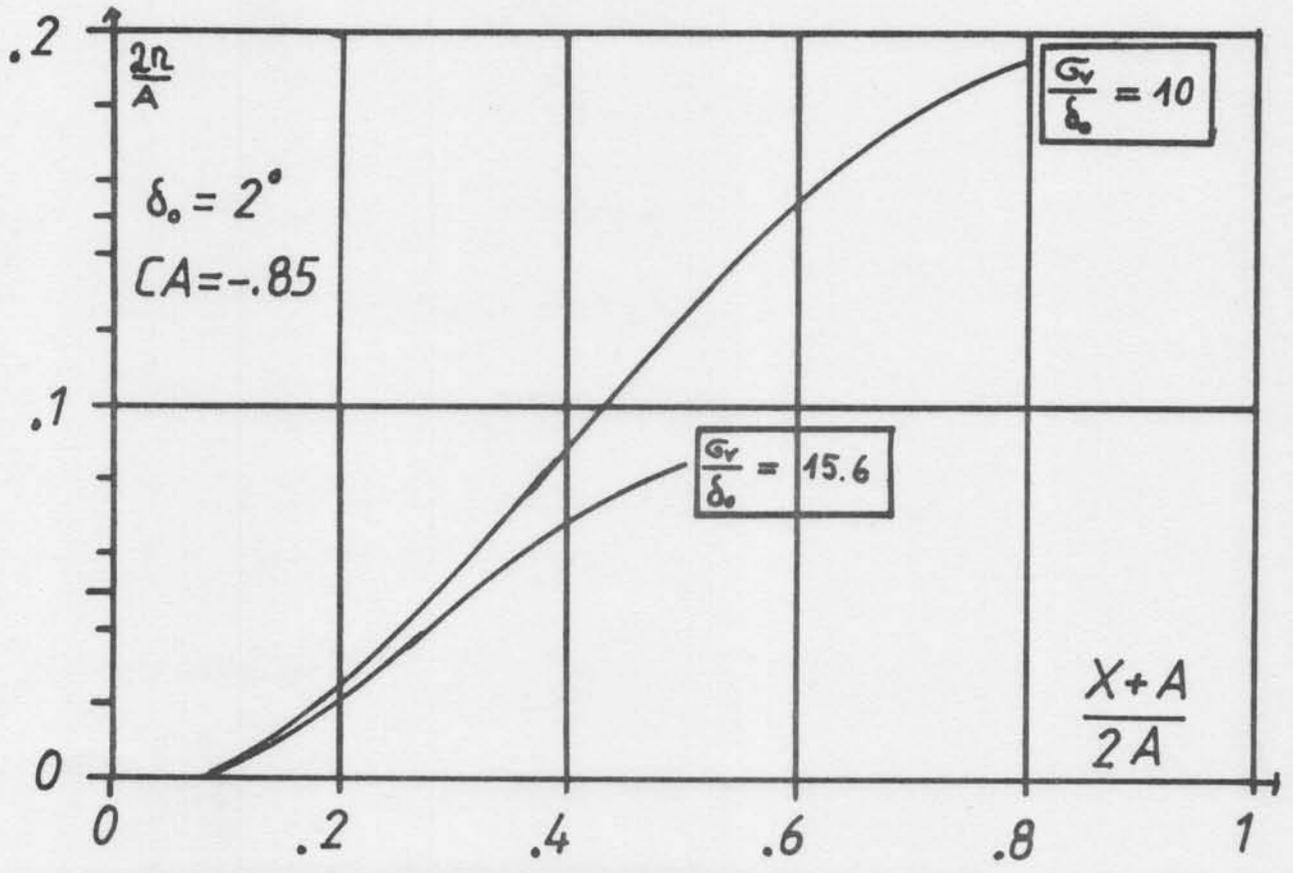
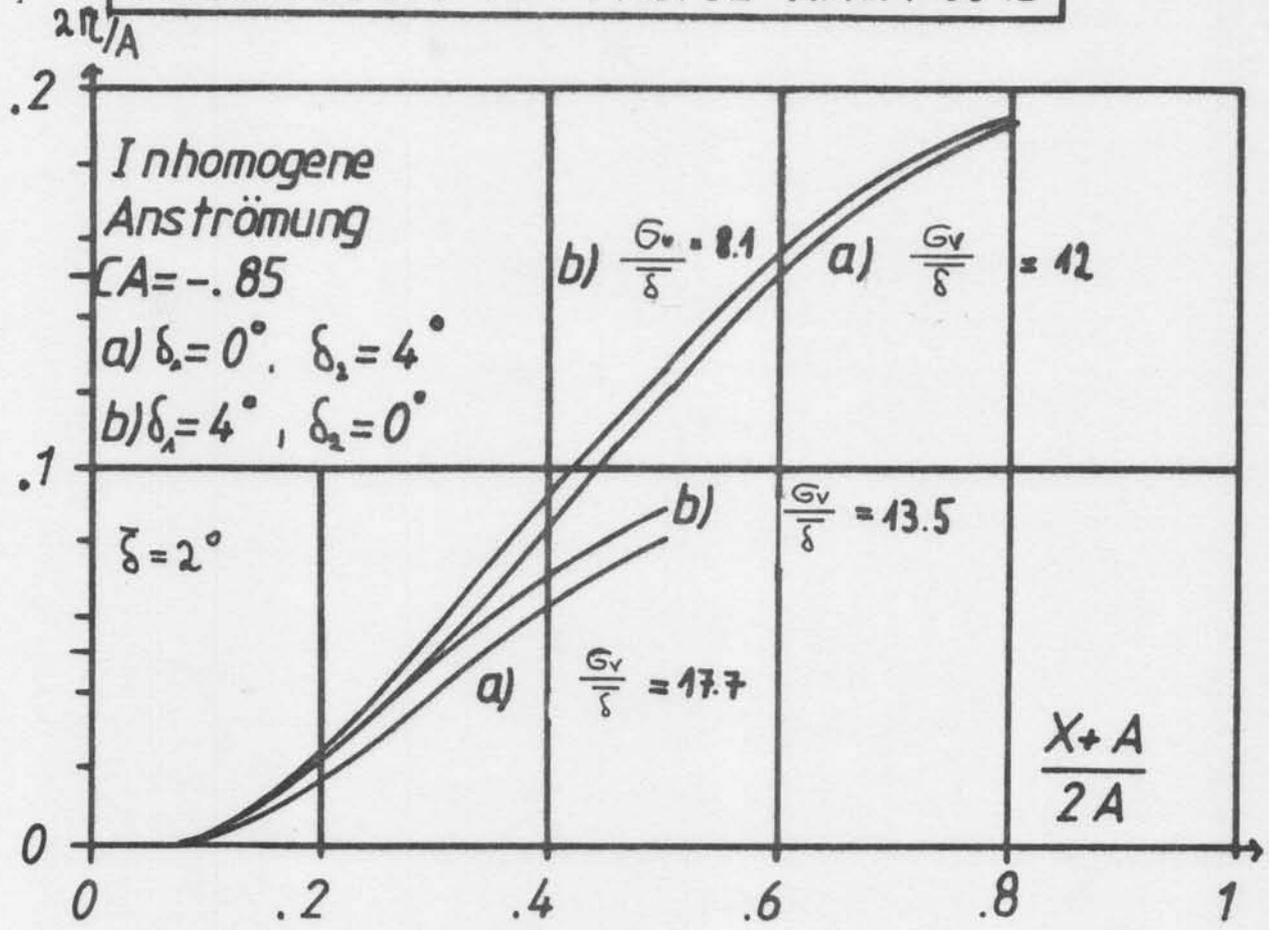


Abb. 14

SCHICHTDICKE AM PROFIL NACA 4412

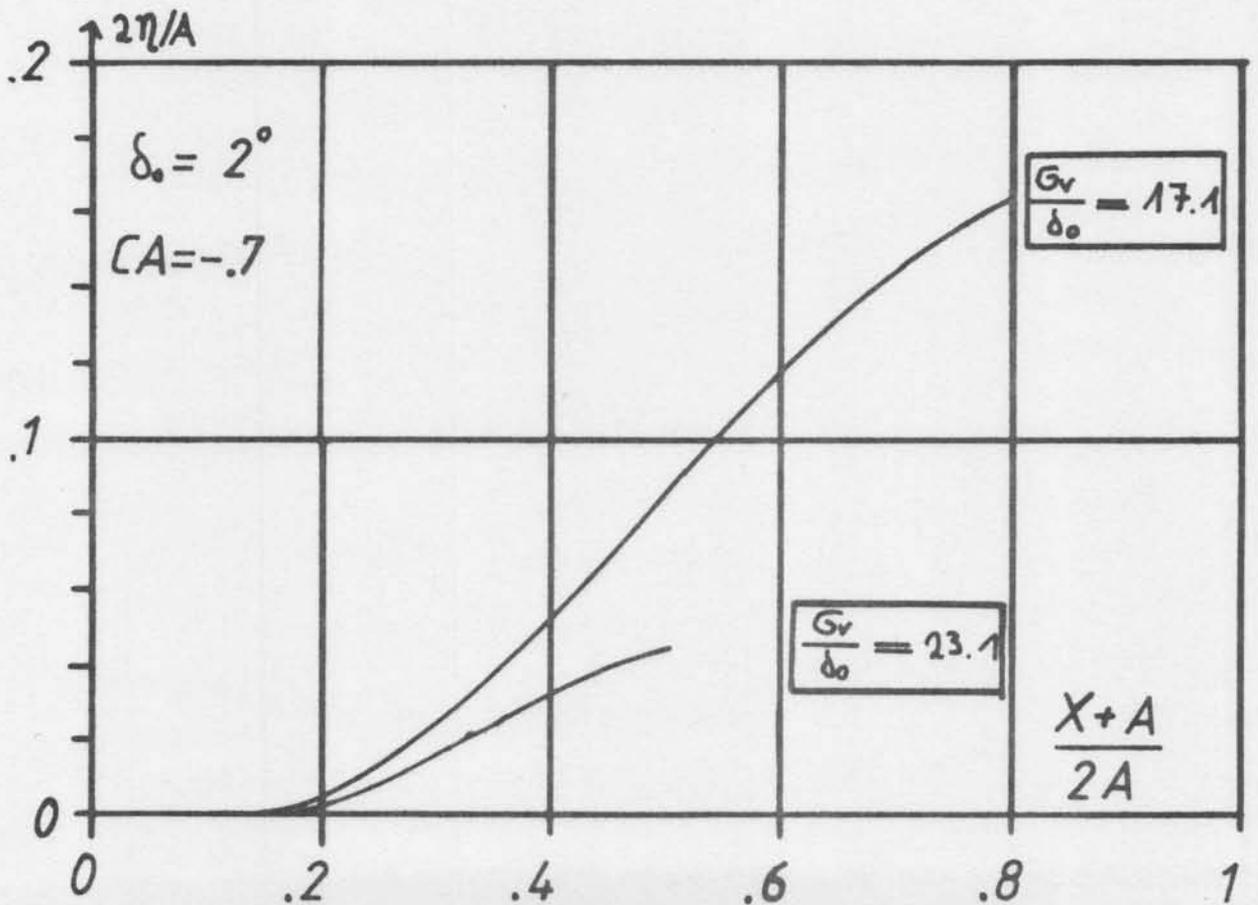
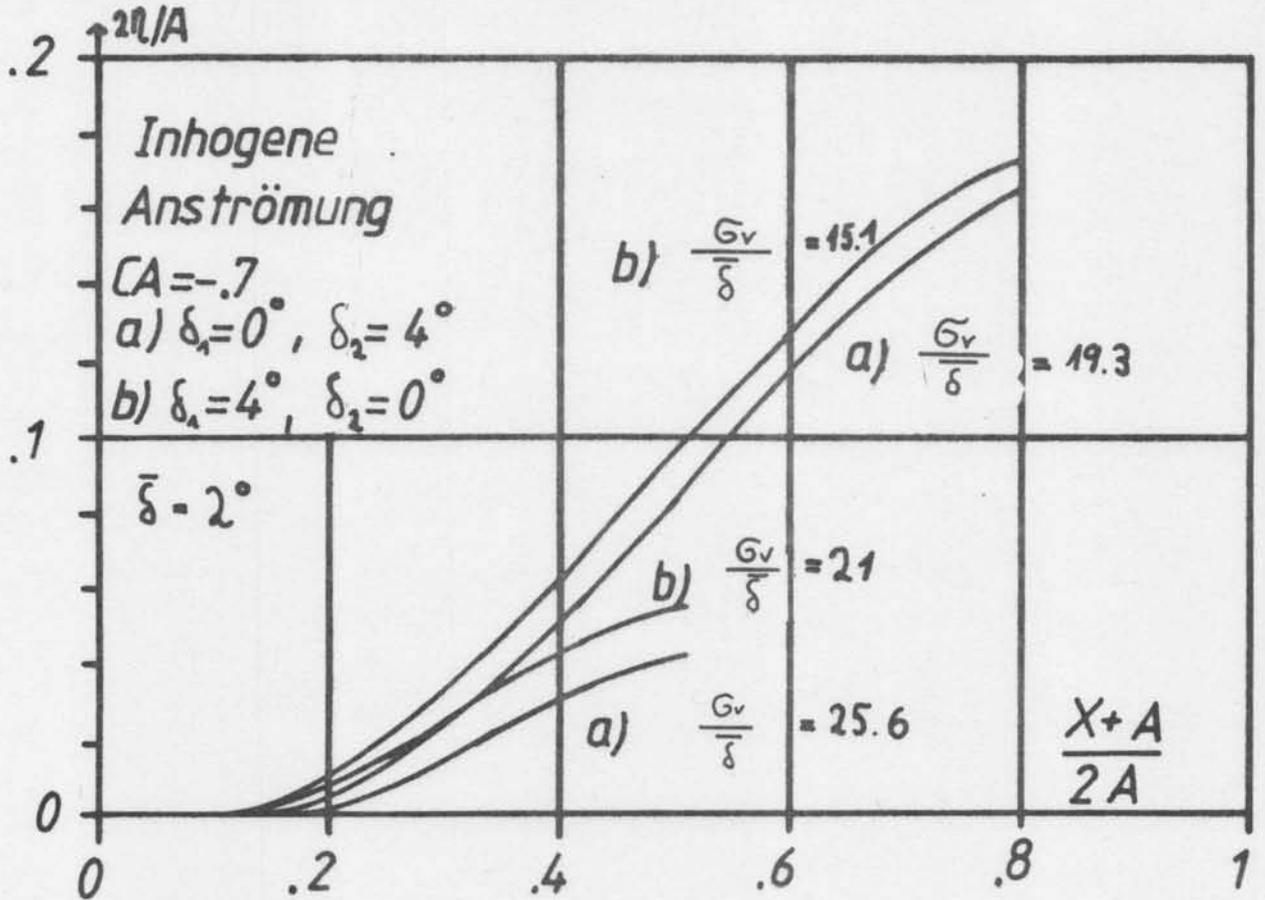
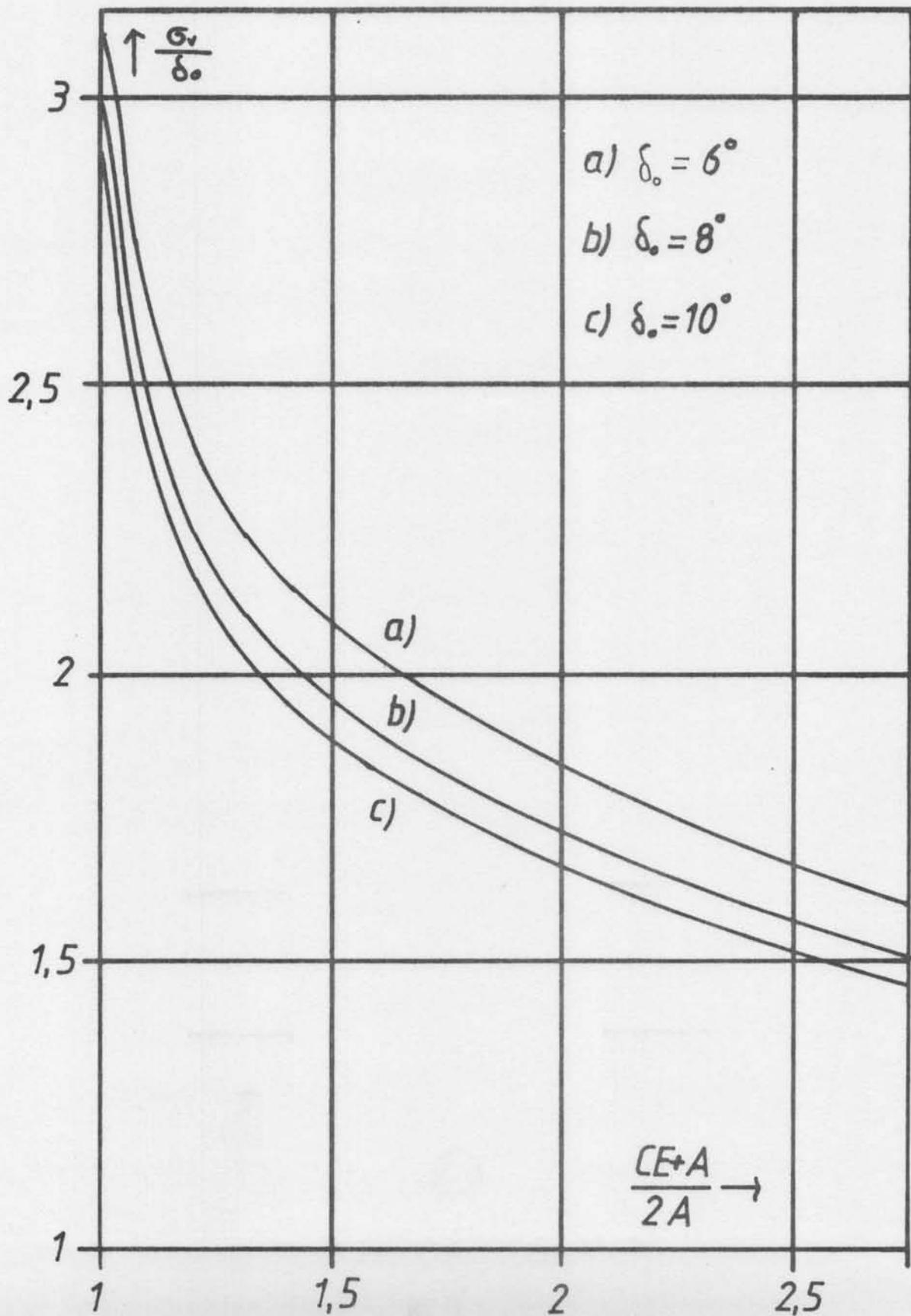


Abb. 15

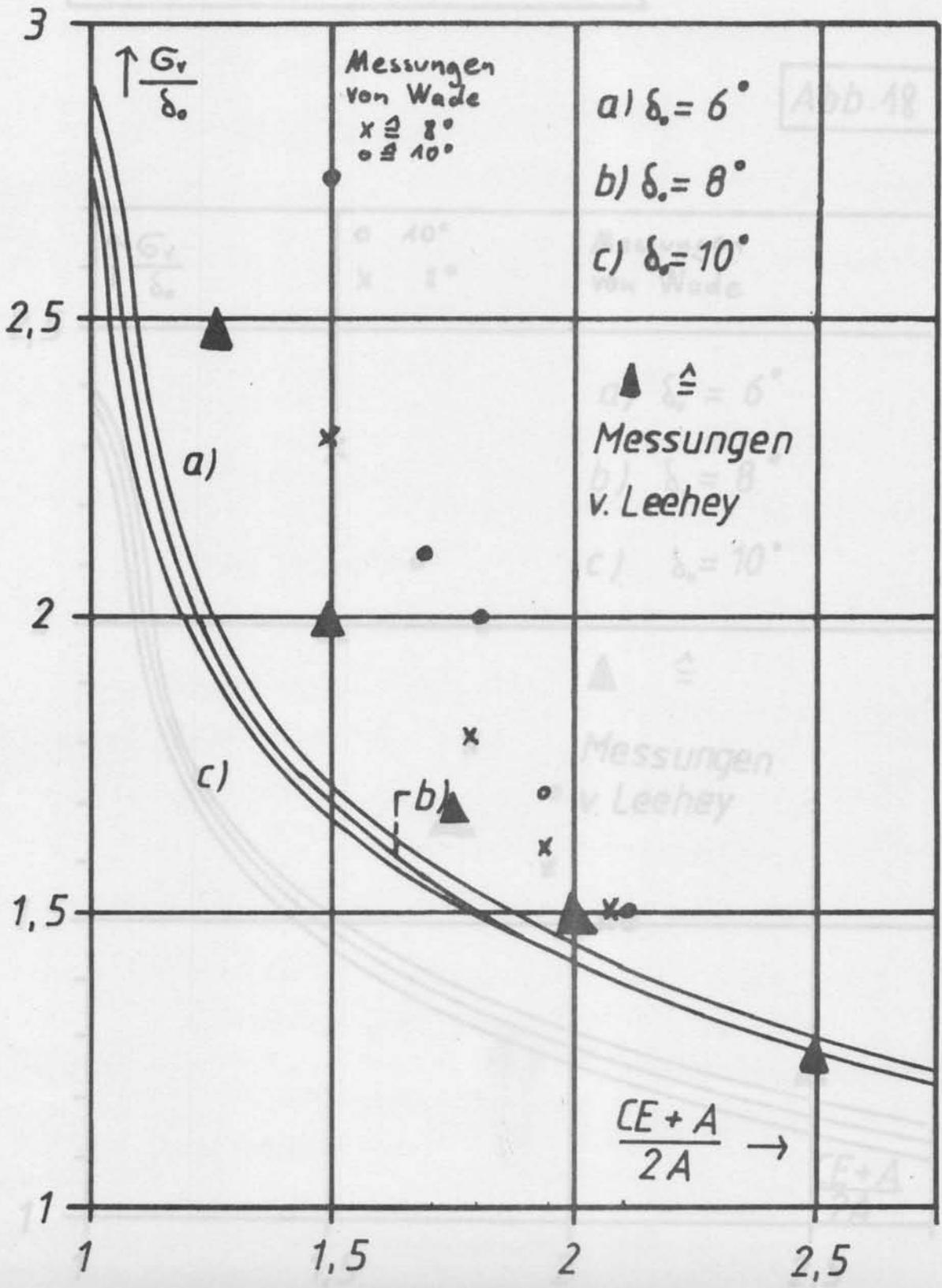
KAVITATIONS AUSDEHNUNG
AM PROFIL NACA 0015
BEI SUPERKAVITATION

Abb. 16



KAVITATIONS AUSDEHNUNG
 BEI SUPERKAVITATION
 AM PROFIL NACA 16006

Abb. 17



DER ÜBERGANG VON DER TEIL- ZUR SUPERKAVITATION

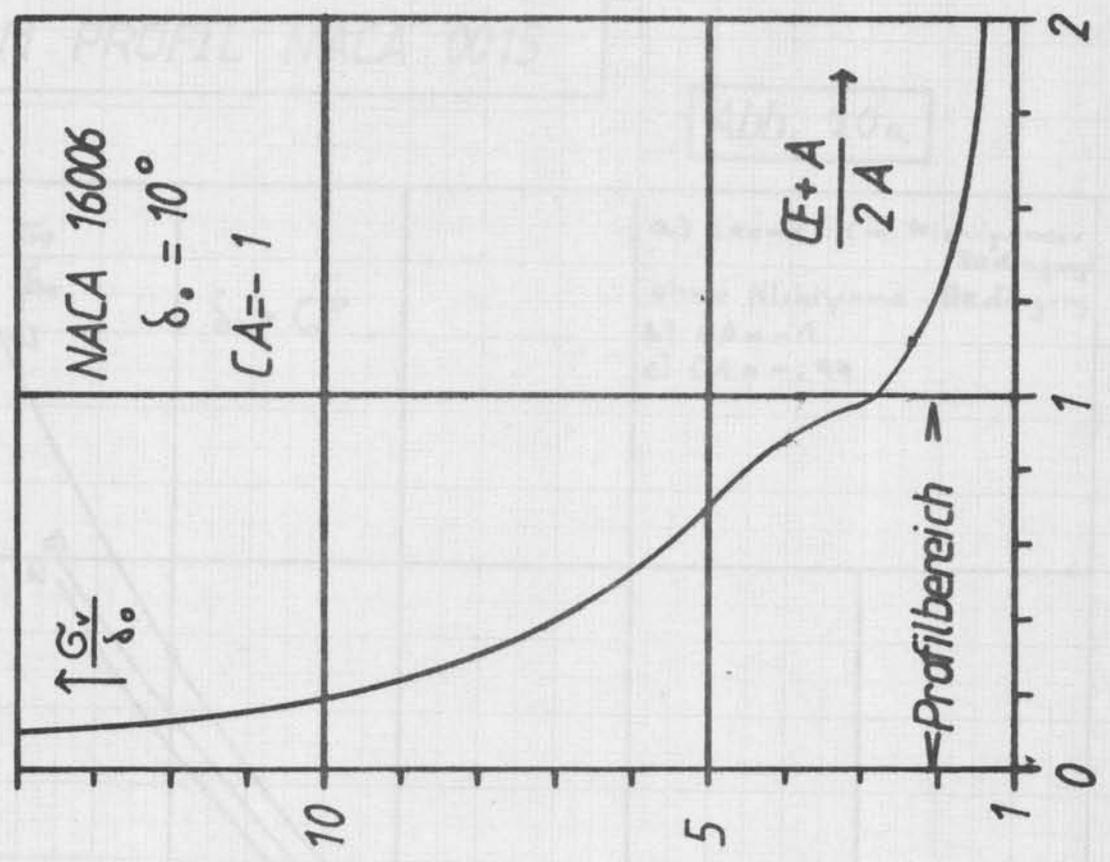
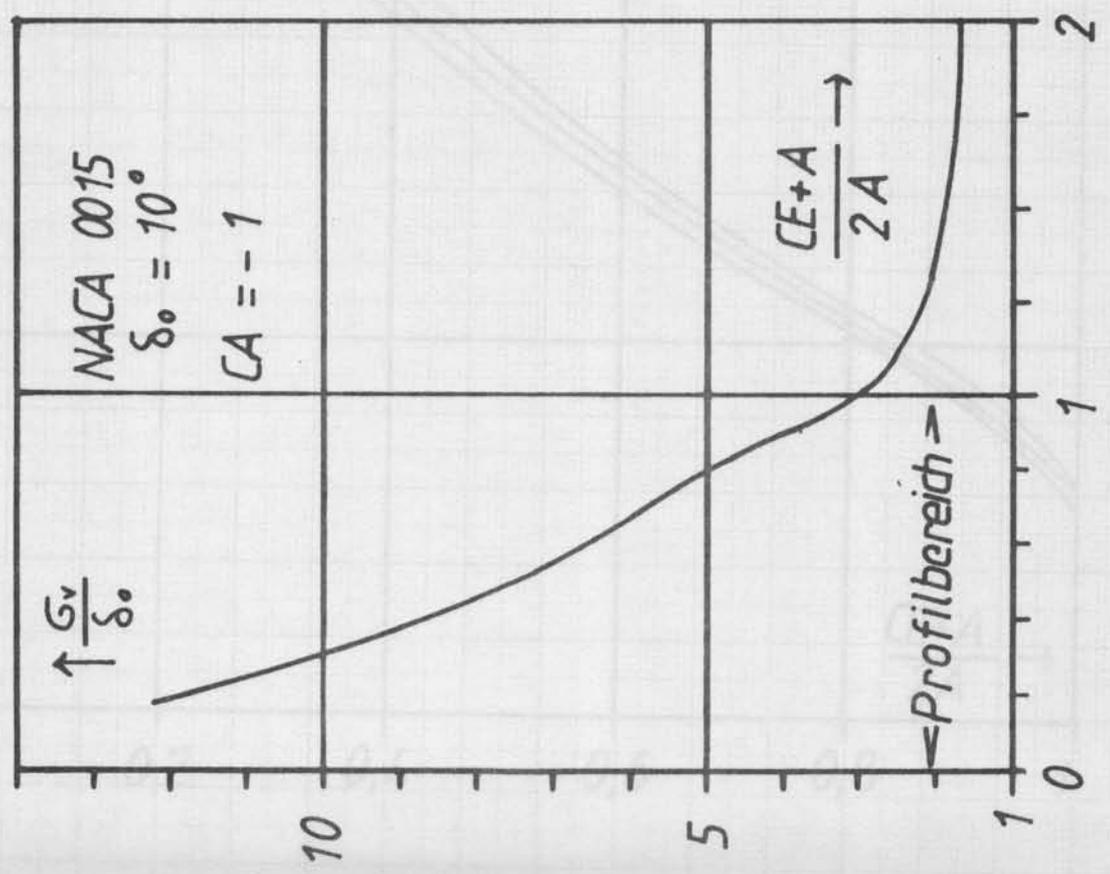


Abb. 19

KAVITATIONS AUSDEHNUNG AM PROFIL NACA 16006 $\delta_0 = 6^\circ$

Abb. 21

