

440 | Januar 1984

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Martin Steindor

Systeme von zusammenfallenden Kavitationsblasen in kugelsymmetrischen und nicht kugelsymmetrischen Strömungsfeldern

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Systeme von zusammenfallenden Kavitationsblasen in kugelsymmetrischen und nicht kugelsymmetrischen Strömungsfeldern

Martin Steindor, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1984

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 440

Systeme von zusammenfallenden Kavitationsblasen in
kugelsymmetrischen und nicht kugelsymmetrischen Strömungsfeldern

von

Martin Steindor

Januar 1984

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit wird der Zusammenfall von Vielblasensystemen untersucht, die sowohl in Form eines kugelsymmetrischen als auch in der Gestalt eines schichtförmigen Volumbereichs (Clusters) angeordnet sind. Die Einzelheiten des Zusammenfallvorgangs, also seine Zeitdauer, die auftretenden Extremalradien sowie der zeitliche Verlauf werden in Abhängigkeit von den entscheidenden Parametern diskutiert und mit den entsprechenden Resultaten für Einzelblasen verglichen. Die erwähnten Parameter sind der Luftdruck, der Flüssigkeitsdruck, das Gasvolumenverhältnis und das Anfangsvolumen.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der Zusammenfall einer einzelnen Blase unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung mit Umgebungsblasen behandelt. Auch hier erfolgt eine analoge Diskussion der Parameterabhängigkeit und eine Prüfung der Kompatibilität mit dem vorher behandelten Modell des kugelförmigen Clusters.

1. Clusterkavitation, kugelsymmetrische und ebene Cluster

Die vorliegende Arbeit baut auf einer Arbeit von Mørch auf mit dem Titel "Energy considerations on cavity clusters" (Juni 1981). Darin wird eine Theorie über den Zusammenfall von Blasenclustern entwickelt, d.h. "Wolken" von vielen einzelnen Blasen, deren Verhalten als Ganzes betrachtet wird. Aus der Energiebilanz der Formänderungsarbeit gegen den Druck innerhalb der Blasen und der an die Flüssigkeit während des Zusammenfalls abgestrahlten kinetischen Energie wird eine Differentialgleichung für den Clusterradius $R = R(t)$ hergeleitet bzw. für die Dicke $Y = Y(t)$ eines an einer festen Wand haftenden ebenen Clusters.

Diese Theorie wird im folgenden insofern erweitert, als der Luftdruck mit berücksichtigt wird, der für den Minimalradius und die Zusammenfallszeit eine Rolle spielt. Das Verhalten des Luftanteils wird als adiabatisch angenommen, das Verhalten des Wasserdampfanteils als isotherm; im Phasenübergang ist der Dampfdruck dann konstant. Diese Annahmen stimmen strenggenommen nicht, ihre Fehler gleichen sich jedoch aus, wie aus der klassischen Blasendynamik bekannt ist.

Wir beginnen zunächst mit der Betrachtung kugelsymmetrischer Cluster.

1a) Kugelsymmetrische Cluster

Die Anzahl der Blasen innerhalb des Clusters wird als so groß angenommen, daß die Strömung auch unmittelbar an der Clusterwand praktisch als kugelsymmetrisch angesehen werden kann. Wir gehen also von einer vollkommen homogenen Gasverteilung innerhalb des Clusters aus. Dann ist mit $\beta = \text{Gasvolumenverhältnis} =$

$V_{\text{Gas}} / (V_{\text{Wasser}} + V_{\text{Gas}})$ das Potential außerhalb des Clusters

$$\phi = -\frac{1}{4\pi r} \frac{dV_{\text{Gas}}}{dt} = -\frac{1}{4\pi r} \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \beta \right) = -\frac{1}{r} \left(R^2 \dot{R} \beta + \frac{1}{3} R^3 \dot{\beta} \right) \quad (1)$$

Damit ergibt sich die durch die Volumenänderung bewirkte differentielle Änderung der kinetischen Energie außerhalb des Clusters:

$$dE_k = d\left(\int_R^\infty 4\pi \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 r^2 dr\right) = d\left[\int_R^\infty 2\pi \rho \dot{R}^2 R^4 \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR}\right) \frac{dr}{r^2}\right] \quad (2)$$

Die folgende Betrachtung zeigt, daß der Zusammenfall der Blasen keine Änderung der kinetischen Energie des Fluids innerhalb des Clusters bewirkt, unter der Voraussetzung homogener Gasverteilung, d.h. für Blasenanzahl $N \rightarrow \infty$.

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{d(a^3)}{dt} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{|r^2 - r_n^2|} \quad (|r| < R) \quad , \quad a = \text{Radius der Einzelblasen, der für alle Blasen als gleich angenommen wird.}$$

Für den Abstand der n-ten Blase zum Aufpunkt gilt:

$$|r^2 - r_n^2|^2 = A^2 = r^2 + r_n^2 - 2 r r_n \cos \vartheta \cos \vartheta_n - 2 r r_n \sin \vartheta \sin \vartheta_n \cos(\varphi - \varphi_n)$$

Wegen der Kugelsymmetrie kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\vartheta = 0$ angenommen werden und somit

$$A^2 = r^2 + r_n^2 - 2 r r_n \cos \vartheta_n$$

Für $N \rightarrow \infty$ geht die Summe in ein Integral über, dessen Berechnung ergibt:

$$2\pi \cdot \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \frac{r_n^2 \sin \vartheta_n d\vartheta_n dr_n}{\sqrt{r^2 + r_n^2 - 2 r r_n \cos \vartheta_n}} = \frac{3}{2R^3} \int_0^R \int_{-1}^{+1} \frac{r_n^2 dr_n dx}{\sqrt{r^2 + r_n^2 - 2 r r_n x}}$$

$$= \frac{3}{2R^3} \int_0^R \frac{r_n}{r} \left(\sqrt{r^2 + r_n^2 - 2 r r_n} - \sqrt{r^2 + r_n^2 + 2 r r_n} \right) dr_n$$

Da die Wurzel positiv definit ist, gilt:

$$r_n \leq r \Rightarrow \sqrt{r^2 + r_n^2 - 2 r r_n} = r - r_n$$

$$r_n \geq r \Rightarrow \sqrt{r^2 + r_n^2 - 2 r r_n} = r_n - r$$

Damit spaltet sich das Integral auf:

$$\frac{3}{2R^3} \int_0^r \frac{r_n}{r} \cdot -2 r_n dr_n + \frac{3}{2R^3} \int_r^R r_n \cdot -2 dr_n = 2\pi \cdot \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{r_n^2 \sin \vartheta_n d\vartheta_n dr_n}{\sqrt{A^2}}$$

$$= \frac{3}{2R^3} \left[-\frac{2}{3} r^2 - R^2 + r^2 \right]$$

$$= \frac{3}{2R^3} \cdot \left[\frac{1}{3} r^2 - R^2 \right]$$

dann wird

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{3} \frac{d\alpha^3}{dt} \cdot \frac{3}{2R^3} \int_0^R \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \vartheta_n d\vartheta_n dr_n}{\sqrt{A}} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{d\alpha^3}{dt} \frac{3}{2R^3} \left[\frac{1}{3} r^2 - R^2 \right] \end{aligned}$$

oder mit $R^3 \beta = N \cdot \alpha^3$

$$\Phi = -\frac{1}{2N} \frac{d}{dt} (R^3 \beta) \cdot \frac{1}{R^3} \left[\frac{r^2}{3} - R^2 \right]$$

und wir erhalten für die Geschwindigkeit in radialer Richtung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r = -\frac{1}{3N} \frac{d}{dt} (R^3 \beta) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R^3} \cdot \frac{2r}{3}$$

Für $N \rightarrow \infty$ folgt $v_r \rightarrow 0$. Daher können wir die kinetische Energie innerhalb des Clusters vernachlässigen. —

Für das Differential der Formänderungsarbeit gegen den Gasdruck gilt:

$$dE_{\text{pet}} = (p(R) - p_\infty) dV_{\text{gas}} = (p(R) - p_\infty) \beta 4\pi R^2 dR + (p(R) - p_\infty) \frac{4\pi}{3} \frac{d\beta}{dR} dR \quad (3)$$

Daraus ergibt sich die Energiebilanz $dE_k + dE_p = 0$,
also

$$\begin{aligned} & d \left[\int_R^\infty 2\pi \rho \dot{R}^2 R^4 \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right) \frac{dr}{r^2} \right] + (p(R) - p_\infty) 4\pi R^2 \left[\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right] dR = 0 \\ 0 &= d \left[\rho \dot{R}^2 R^3 \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right) \right] \cdot \frac{-1}{2} + (p(R) - p_\infty) R^2 \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right) dR \\ &= -\frac{\rho}{2} \left[\frac{d\dot{R}^2}{dR} \cdot R \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right) + \dot{R}^2 \cdot 3 \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right) + \dot{R}^2 R \left(\frac{d\beta}{dR} + \frac{1}{3} \frac{d\beta}{dR} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R}{3} \frac{d^2\beta}{dR^2} \right) \right] + (p(R) - p_\infty) \left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} \right) ; \end{aligned}$$

und mit $\frac{d\ddot{R}}{dR} = 2\ddot{R}$ folgt die Differentialgleichung

$$R\ddot{R}\left(\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR}\right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2\left(\beta + \frac{R}{2} \frac{d\beta}{dR}\right) + \frac{\dot{R}^2 R}{3} \left(4 \frac{d\beta}{dR} + R \frac{d^2\beta}{dR^2}\right) = \frac{p(R) - p_\infty}{\rho} \quad (5)$$

Nun gibt es zwischen dem Clustervolumen, dem absoluten Gasvolumen und dem Gasvolumenverhältnis folgende Beziehungen:

$$\frac{V_{gas}}{V_{o, gas}} = \frac{a^3}{a_o^3} = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \frac{1-\beta_o}{\beta_o} \quad (6a)$$

Ferner gilt:

$$\frac{R_c^3}{R^3} = \frac{1-\beta}{1-\beta_o} = \frac{V_{gas_o} + V_{wasser}}{V_{gas} + V_{wasser}} \quad (6b)$$

Daraus folgt:

$$\beta = - (1-\beta_o) \frac{R_o^3}{R^3} + 1 \quad (6c)$$

und

$$\frac{d\beta}{dR} = \frac{3(1-\beta)}{R} \quad (6d)$$

Schließlich folgt

$$\beta + \frac{R}{3} \frac{d\beta}{dR} = - (1-\beta_o) \frac{R_o^3}{R^3} + 1 + (1-\beta) = \beta + (1-\beta) = 1$$

$$4 \frac{d\beta}{dR} + R \frac{d^2\beta}{dR^2} = \frac{12}{R} (1-\beta) - \frac{12}{R} (1-\beta) = 0$$

Damit vereinfacht sich Gl. (5) zu

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p(R) - p_\infty}{\rho}, \quad (7)$$

wobei $p(R) = p_{i0} \cdot \left(\frac{V_{g0}}{V_g}\right)^\chi + p_v - \frac{2\sigma}{a}$

$$= p_{i0} \left(\frac{R_o}{R}\right)^{3\chi} \left(\frac{\beta_o}{1 - (1-\beta_o) \frac{R_o^3}{R^3}}\right)^\chi + p_v - \frac{2\sigma}{a_o} \left(\frac{\beta_o}{\frac{R^3}{R_o^3} - 1 + \beta_o}\right)^{1/3} (\chi \approx 1.4) \text{ ist.}$$

Wie man leicht sieht, geht Gleichung (7) für $\beta_o \rightarrow 1$ in die Differentialgleichung der konventionellen Blasendynamik über (Rayleigh-Plesset), wie es sein muß.

Tatsächlich gilt jedoch die Clustertheorie nur für niedrige Gasvolumenverhältnisse, da es einen gewissen β -Wert geben muß, bei welchem sich die Blasen berühren, man also diese Wechselwirkung mit berücksichtigen muß. Die folgende Betrachtung zeigt, daß dieser Wert bei $\beta_o = \pi/6$ liegt.

Alle Blasen sollen den gleichen Radius $a_0 = a(t=0)$ haben. Im Mittelpunkt des Clusters sei eine Blase, der Rest sei auf n Kugelschalen mit dem jeweiligen Radius $r_n = 2a_0 n$ mit $n=1 \dots n_0$ angeordnet. Die Oberfläche der n -ten Kugelschale ist $4\pi r_n^2 = 4\pi 4a_0^2 n^2$; die Fläche, die eine Blase einnimmt, falls sie sich mit den anderen gerade berührt, ist $4a_0^2$. Die Anzahl der Blasen auf der n -ten Kugelschale ist somit $N_n = 4\pi n^2$.

Bei einem Cluster des Radius $R = 2na_0 + a_0$ ist die Gesamtzahl der Blasen $N = 1 + 4\pi \cdot \sum_{n=1}^{n_0} n^2$

$$= \frac{4}{3} \pi n_0^3 \left(1 + \frac{1+3n_0}{2n_0^2} \right) + 1$$

Dann wird

$$\beta_0 = \frac{V_{g0}}{V_w + V_{g0}} = \frac{\frac{4}{3} \pi n_0^3 \left(1 + \frac{1+3n_0}{2n_0^2} \right) + 1}{(1+2n_0)^3}, \text{ also: } \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \beta_0 = \frac{\pi}{6}$$

Beweis: Behauptung war

$$\sum_{n=1}^{n_0} n^2 = \frac{n_0^3}{3} \left(1 + \frac{1+3n_0}{2n_0^2} \right) = \frac{2n_0^3 + n_0 + 3n_0^2}{6}$$

Der Übergang von $n_0 \rightarrow n_0 + 1$ ergibt

$$\sum_{n=1}^{n_0+1} n^2 = \frac{2n_0^3 + n_0 + 3n_0^2}{6} + n_0^2 + 2n_0 + 1$$

$$= \frac{2n_0^3 + 13n_0^2 + 6}{6}$$

$$= \frac{2(n_0+1)^3 + 3(n_0+1)^2 + (n_0+1)}{6} \quad . \quad -$$

Für die Clusterwandgeschwindigkeit ergibt sich unter Benutzung der Beziehung

$$2R^2(\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2) = \frac{d}{dR}(R^3\dot{R}^2)$$

mit der Anfangsbedingung $\dot{R}^2(t=0) = 0$:

$$\frac{d}{dR}(R^3\dot{R}^2) = 2\frac{P_{l0}}{\rho} \left(\frac{\beta_0}{\frac{R^3}{R_0^3} - 1 + \beta_0} \right) \cdot R^2 + \frac{2R^2}{\rho} (P_v - P_w) - \frac{4\sigma}{a_0\rho} R^2 \cdot \left(\frac{\beta_0}{\frac{R^3}{R_0^3} - 1 + \beta_0} \right)^{1/3}$$

Daraus folgt für die Wandgeschwindigkeit durch Integration:

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_w - p_v}{\rho} \left(\frac{R_c^3}{R^3} - 1 \right) + \frac{2}{3} \frac{p_{L0}}{\rho} \frac{R_0^3}{R^3} \frac{\beta_0}{1-\chi} \left[\left(\frac{\frac{R^3}{R_c^3} - 1 + \beta_0}{\beta_0} \right)^{1-\chi} - 1 \right] - \frac{2\sigma}{a_0 \rho} \beta_0 \frac{R_c^3}{R^3} \left[\left(\frac{\frac{R^3}{R_c^3} - 1 + \beta_0}{\beta_0} \right)^{2/3} - 1 \right] \quad (8)$$

In der rein isothermen Näherung wäre $\chi = 1$ und der 2. Summand würde lauten:

$$\frac{2}{3} \frac{p_{L0}}{\rho} \beta_0 \left[\frac{R_c^3}{R^3} \ln \left(\frac{R^3}{R_c^3} - 1 + \beta_0 \right) - \frac{R_0^3}{R^3} \ln \beta_0 \right]$$

Für die Zusammenfallszeit folgt aus (8):

$$t_z = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{p_w - p_v}} R_0 \cdot \int_{R/R_c}^1 z^{3/2} \cdot \left\{ 1 - z^3 + \frac{p_{L0}}{p_w - p_v} \cdot \left[\beta^\chi (z^3 - 1 + \beta_0)^{1-\chi} - \beta_0 \right] \cdot \frac{1}{1-\chi} - \frac{3\sigma}{a_0 \cdot (p_w - p_v)} \left(\beta_0^{1/3} (z^3 - 1 + \beta_0)^{2/3} - \beta_0 \right) \right\}^{-1/2} dz \quad (9)$$

Einige Anmerkungen zu den Ergebnissen im kugelsymmetrischen Fall:

1) Bedeutung der Größe β_0

a) Einfluß von β_0 auf den Minimalradius (Abb. 1)

Der Minimalradius wird gemäß (7), (8) nach der Gleichung

$$1 - \frac{R^3}{R_0^3} + \frac{p_{L0}}{p_\infty - p_v} \left(\beta^x \left(\frac{R^3}{R_0^3} - 1 + \beta_0 \right)^{1-x} - \beta_c \right) \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{3\sigma}{a_0(p_\infty - p_v)} \left(\beta_0^{1/3} \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 1 + \beta_0 \right)^{2/3} - \beta_c \right) = 0 \quad (10)$$

bestimmt.

Bei konstantem $P_{LO} = p_\infty - p_v$ ist β_0 die entscheidende Größe hierfür. Es muß gelten: $(R/R_0)^3 > (1 - \beta_0)$, da P_L sonst unendlich groß wird. *Denn es gilt:*

$$P_L \approx P_{L0} \cdot \left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \frac{\beta_c}{1 - (1 - \beta_0) \frac{R_0^3}{R^3}} \right)^x$$

Also fällt das Minimalvolumen linear mit steigendem β_0 .

In Abb. 1 ist R_e/R_0 aufgetragen. Die Zeichnung zeigt, daß $R_e/R_0 = (1 - \beta_0)^{1/3}$ die Bestimmungsgleichung des Extremalradius ist, jedenfalls sofern β_0 kleiner gleich $\pi/6$. (Für $\beta_0 = 1$, d.h. eine Einzelblase vom Radius des Clusters, stimmt das offenbar nicht mehr, da dann der Luftdruck einen größeren Einfluß hat.)

b) Einfluß von β_0 auf β_{min}/β_0 und a_{min}/a_0 (Abb. 3)

Die Kurve für β_{min}/β_0 verläuft mit steigendem β_0 stärker als linear. Gleichzeitig wurde für $\beta_0 = 0.1 \dots 0.5$ bei $P_{LO} = 0.02$ bar, $p_\infty - p_v = 0.5$ bar ein konstantes a_{min}/a_0 von 0.136 festgestellt, was dem Extremalradius in der klassischen Blasendynamik entspricht. Daß a_{min}/a_0 nicht von β_0 abhängt, liegt an der Tatsache, daß der Luftdruck der entscheidende Parameter für das minimale Gasvolumen ist, und dieser ist eine Funktion des Gasvolumens und keine Funktion seines Verhältnisses zum Wasservolumen. Das Ansteigen von β_{min} mit β_0 rührt nur von dem Umstand her, daß das Wasservolumen als constant angenommen wurde;

denn für den Fall, daß

$$\left(\frac{u_{\min}}{a_0}\right)^3 = \frac{V_{g\min}}{V_{g0}} = \text{const.},$$

so gilt

$$\frac{\beta_{\min}}{\beta_0} = \text{const.} \cdot \frac{V_{g2} + V_w}{V_{g\min} + V_w} = \text{const.} \cdot \frac{V_{g0} + V_w}{\text{const.} \cdot V_{g0} + V_w} = \frac{\text{const.}}{\beta_0(\text{const.} - 1) + 1}$$

und da $\text{const} \ll 1$, wächst dieser Ausdruck mit β_0 ungefähr hyperbolisch.

c) Einfluß von β_0 auf die Zusammenfallszeit

Die Zusammenfallszeit steigt mit β_0 , ihre Ableitung sinkt allerdings. Das hat folgende Ursachen:

- (1) Der Extremalradius sinkt mit steigendem β_0 ; die Volumenänderung des Clusters wird also größer.
- (2) Auf die Wandgeschwindigkeit wirkt sich β_0 offenbar nicht aus; die Steigung der Verlaufskurven (Abb. 15,16) ist offenbar die gleiche.
- (3) Es stellt sich die Frage, ob die Verlängerung der Zusammenfallszeit der höheren Gaskonzentration oder dem größeren absoluten Gasvolumen geschuldet ist; da in Abb. 1 das Cluster-Anfangsvolumen konstant gelassen wird, geht das aus der Abbildung nicht ohne weiteres hervor.

Stellen wir zunächst anhand der Abb. 1 eine Interpolationsformel $T_z(\beta_0)$ auf. Sie lautet:

$$(a) \quad t_z(\beta_0) = t_z(\beta_0 = 0.1) \cdot \sqrt{\frac{\beta_0}{0.1}}$$

Nun denken wir uns $\beta_0 = 0.1$ konstant und fragen: wie verhält sich die Zusammenfallszeit, wenn wir bei konstantem β_0 das Anfangs-Gasvolumen vergrößern, d.h. R_0 vergrößern?

Wir wissen aus (9), daß $t_z(r_0) = t_z(R_0 = 1) \cdot R_0(b)$ ist. Die Gleichungen (a) und (b) formen wir so um, daß statt R_0 und β_0 V_{g0} die Variable ist, wobei bei (a) R_0 , bei (b) β_0 konstant bleibt.

$$(a) \quad \text{wird mit } \beta_0 = V_{g0} / (R_0^3 \cdot \frac{4}{3} \pi)$$

$$t_z(\beta_0) = t_z(V_{g0}) = t_z(\beta_0 = 0.1) \cdot \sqrt{\frac{V_{g0}}{0.1 \cdot R_0^3 \cdot \frac{4}{3} \pi}}$$

(b) wird mit $\beta_0 = \frac{V_{g0}}{R_0^3 \cdot \frac{4\pi}{3}}$

$$t_z(R_0) = t_z(V_{g0}) = t_z(R_0=1) \cdot \left(\frac{V_{g0}}{R_0^3 \beta_0 \frac{4\pi}{3}} \right)^{1/3}$$

Wegen $t_z(R_0=1) = t_z(b_0=0.1)$ steigt t_z bei einer Vergrößerung des Gesamtvolumens mit $\beta_0 = \text{const}$ weniger stark an als bei einer Erhöhung der Gaskonzentration innerhalb des Clusters.

Da im Modell keinerlei Wechselwirkungen berücksichtigt sind, kann dieser Unterschied in der Zusammenfallszeit nur geometrische Gründe haben. Sei ΔV die Differenz zwischen Ausgangs- und Minimalvolumen. Dann gilt die Beziehung

$$\Delta R = \frac{\Delta V}{4\pi R^2} \quad \text{zwischen Volumen- und Radiusänderung.}$$

Nun geht aus (8) hervor, daß die Wandgeschwindigkeit etwa proportional zu $(R_0/R)^3$ ist. Für konstantes β_0 ist nun das Volumenverhältnis $(R_0/R_{\min})^3$ konstant, d.h., damit hat auch die Wandgeschwindigkeit für verschiedene Clustervolumina bei konstantem β_0 denselben Zeitverlauf. Weil aber die zurückzulegende Radiendifferenz mit zunehmendem Ausgangsvolumen abnimmt, ist die Zunahme der Zusammenfallszeit mit dem Gasvolumen bei Zunahme des Gesamtvolumens entsprechend geringer.

4) Anmerkung zum Verlauf des Zusammenfalls $R(t)$ (Abb. 15, 16):

Für $\beta_0 = 1$ hat die Kurve anfangs einen relativ flachen Verlauf und fällt dann gegen Ende des Zusammenfallvorgangs stark ab. Dieser Abfall entspricht einer Zunahme der Wandgeschwindigkeit in der letzten Phase des Zusammenfalls und steht scheinbar im Widerspruch zum Anstieg von P_{LO} bei $\beta_0 = 1$. Es ist jedoch so, daß die Zunahme von P_{LO} von der Volumenänderung abhängt; zwischen der Volumenänderungsgeschwindigkeit besteht nun folgende

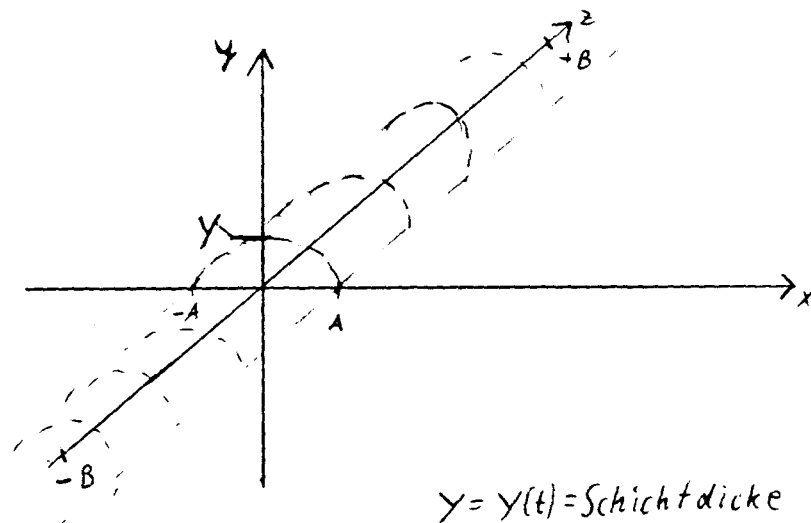
Beziehung:

$$\frac{d}{dt} (R^3) = 3 R^2 \dot{R}, \text{ d.h. } \dot{R} = \frac{d}{dt} (R^3) / 3 R^2$$

Für kleine R wächst dieser Ausdruck immerhin quadratisch. Einer annähernd konstanten oder sogar leicht sich verringern- den Volumenänderung pro Zeiteinheit entspricht somit immer noch eine zunehmende Wandgeschwindigkeit $\dot{R}$.

1_B) Ebenes Kavitationscluster an einer festen Wand

Ausgegangen wird von einem an der Wand haftenden ebenen Cluster, welches in z -Richtung als unendlich ausgedehnt angenommen wird; die Länge in x -Richtung betrage $2 A$ (siehe Zeichnung).



Die Anzahl der Blasen im Cluster wird ebenso wie beim kugelsymmetrischen Cluster als so groß angenommen, daß das Gasvolumenverhältnis $V_{\text{gas}}/V_{\text{Cluster}} = \beta$ an jedem Ort innerhalb des Clusters als gleich angesehen werden kann. Außerdem seien folgende Voraussetzungen gegeben:

1) Die durch den Zusammenfall bewirkte Abstrahlung kinetischer Energie in x -Richtung sei vernachlässigbar klein; d.h., das Geschwindigkeitsfeld des Fluids verlaufe nur in y -Richtung. Entsprechend klein ist Y_0/A zu wählen. -

2) Die Länge des Clusters $2A$ sowie seine - als rechteckig angenommene - Form bleiben während des gesamten Zusammenfalls konstant.

Die Geschwindigkeit des Fluids errechnet sich aus der Profiltheorie folgendermaßen:

Das Potential ist

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-A}^{+A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (11)$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit in y-Richtung:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-A}^{+A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta}{((x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2)^{3/2}}$$

Wir nehmen an: $|B| \rightarrow \infty$, und die Quellenbelegung q sei unabhängig von ξ und z :

Dann ist

$$v = \frac{1}{4\pi} \int_{-A}^{+A} q(\xi, t) y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{((x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2)^{3/2}}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{((x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2)^{3/2}} = \frac{5}{((x-\xi)^2 + y^2) \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

(mit der Variablentransformation $\xi = \xi - z$) folgt

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{+A} q(\xi, t) \cdot y \cdot \frac{1}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{+A} \frac{\frac{dy}{dt} + u_0 \cdot \frac{dy}{dx}}{(x-\xi)^2 + y^2} y d\xi$$

Da die Seitenabstrahlung vernachlässigt wird und die Clusterform sich nicht ändert, setzen wir $x = 0$, d.h., das Cluster soll sich an jeder Stelle wie an seinem Mittelpunkt verhalten; Entsprechendes gelte für das Fluid über dem Cluster.

$$\text{Mit } v = \frac{1}{\pi} \dot{y} \int_{-A}^{+A} \frac{y d\xi}{\xi^2 + y^2} = \dot{y} \frac{2}{\pi} \arctg \frac{A}{y} \quad (12)$$

ergibt sich die kinetische Energieänderung des Fluids pro differentielle Volumenänderung des Clusters zu:

$$dE_k = d \left[\int_Y^\infty \left(\dot{Y} \frac{2}{\pi} \arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy \cdot \frac{\rho}{2} \cdot 4AB \right]$$

$$= 4AB \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{d\dot{Y}^2}{dY} \int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy - \dot{Y}^2 \left(\arctg \frac{A}{Y} \right)^2 \right] dY$$

mit $\frac{d\dot{Y}^2}{dY} = 2 \cdot \ddot{Y}$ folgt

$$dE_k = 4AB \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \left[2 \ddot{Y} \int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy - \dot{Y}^2 \left(\arctg \frac{A}{Y} \right)^2 \right] dY \quad (13)$$

Das Differential der Formänderungsarbeit ist:

$$dE_p = (P_\infty - P(Y)) dY \cdot 4AB \quad (14)$$

Damit ergibt sich aus der Energiebilanz: $0 = dE_k + dE$:

$$0 = \frac{\rho}{2} \frac{\rho}{\pi^2} \ddot{Y} \int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy - \frac{4}{\pi} \dot{Y}^2 \left(\arctg \frac{A}{Y} \right) \cdot \rho$$

und die Differentialgleichung für $\dot{Y}^2$ lautet:

$$\ddot{Y} - \frac{\dot{Y}^2}{2} \frac{\left(\arctg \frac{A}{Y} \right)^2}{\int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy} = \frac{P(Y) - P_\infty}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{2} \left[\int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy \right]^{-1}$$

oder

$$\frac{d\dot{Y}^2}{dY} + \dot{Y}^2 \frac{d}{dY} \ln \left(\int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy \right) = \frac{P(Y) - P_\infty}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{2} \left[\int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy \right]^{-1} \quad (15)$$

Die Integration mit der Anfangsbedingung $\dot{Y}(t=0) = 0$ ergibt:

$$\dot{Y}^2 = \left[\int_Y^\infty \left(\arctg \frac{A}{y} \right)^2 dy \right]^{-1} \cdot \int_{Y_0}^Y \frac{P(Y) - P_\infty}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{2} dY$$

$$\text{Nun ist } P(Y) = P_{L0} \cdot \left(\frac{V_{g0}}{V_g} \right)^K - \frac{2\sigma}{a} = P_{L0} \cdot \left(\frac{Y_0 \beta_0}{Y \beta} \right)^K - \frac{2\sigma}{a_0} \left(\frac{Y_0 \beta_0}{Y \beta} \right)^{1/3}$$

$$= P_{L0} \left(\frac{Y_0 \beta_0}{Y - (1 - \beta_0) Y_0} \right)^K - \frac{2\sigma}{a_0} \left(\frac{Y_0 \beta_0}{Y - (1 - \beta_0) Y_0} \right)^{1/3}$$

Also folgt

$$\dot{Y}^2 = \left[\int_Y^\infty \left(\operatorname{arctg} \frac{A}{Y} \right)^2 dY \right]^{-1} \frac{\pi^2}{2g} \left[(p_v - p_\infty) (Y - Y_0) + \frac{p_{v0}}{1-\chi} \left((Y_0 \beta_0)^\chi (Y - (1-\beta_0) Y_0) \right)^{1-\chi} - (Y_0 \beta_0) \right] - \frac{3\epsilon}{a_0} \left[\beta_0^{1/3} \cdot (z - (1-\beta_0))^{2/3} - \beta_0 \right] \quad (16)$$

mit $t_z = \int_{Y_0}^Y \frac{1}{\sqrt{\dot{Y}^2}} dY$ folgt für die Zusammenfallszeit:

$$t_z = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_{Y_0}^Y \left[\int_{\frac{Y_0^2}{A}}^{\frac{Y^2}{A}} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\eta} \right)^2 d\eta \right]^{1/2} \cdot \sqrt{Y_0 A} \cdot \left[(p_v - p_\infty) (z-1) + \frac{p_{v0}}{1-\chi} \cdot \left(\beta_0^\chi (z - (1-\beta_0)) \right)^{1-\chi} - \beta_0 \right] - \frac{3\epsilon}{a_0} \left[\beta_0^{1/3} \cdot (z - (1-\beta_0))^{2/3} - \beta_0 \right] \right]^{-1/2} dz \quad (17)$$

Die folgende Betrachtung zeigt, daß an die Flüssigkeit innerhalb des Clusters unter den gegebenen Voraussetzungen ($N \rightarrow \infty$) keine kinetische Energie abgestrahlt wird.

Innerhalb des Clusters ist das Potential:

$$\phi = - \frac{1}{4\pi N} AB \frac{d}{dt} (\beta Y) \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$$

Die Geschwindigkeit in y-Richtung ist also

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = - \frac{1}{4\pi N} AB \frac{d}{dt} (\beta Y) \frac{d}{dY} \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad (\text{Die Geschwindigkeit in x-Richtung wird vernachlässigt.})$$

Mit $x = 0$ (s.o.) und $z = 0$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit folgt:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \frac{d}{dY} \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} = \frac{1}{4ABY} \frac{d}{dY} \int_{-A}^{+A} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^Y \frac{dx_n dz_n dY_n}{\sqrt{x_n^2 + z_n^2 + (Y - Y_n)^2}}$$

Das Verschwinden von $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz des Integrals.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dy} \int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^Y \frac{dx_n dz_n dy_n}{\sqrt{x_n^2 + z_n^2 + (y - y_n)^2}} &= \int_{-A}^A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^Y \frac{(y_n - y) dx_n dz_n dy_n}{(x_n^2 + z_n^2 + (y - y_n)^2)^{3/2}} \\
 &= \int_0^Y \int_{-A}^A \frac{dx_n dy_n \cdot (y_n - y)}{(x_n^2 + (y - y_n)^2) \cdot \sqrt{\frac{x_n^2}{z_n^2} + 1 - \frac{(y - y_n)^2}{z_n^2}}} \bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \int_0^Y \int_{-A}^A \frac{2(y_n - y) dx_n dy_n}{x_n^2 + (y - y_n)^2} \\
 &= \int_0^Y \frac{2(y_n - y)}{y_n - y} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x_n}{y - y_n} \bigg|_{-A}^{+A} \\
 &= \int_0^Y 2 \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{A}{y - y_n} - \operatorname{arctg} \frac{-A}{y - y_n} \right) dy \\
 &= 4 \int_0^Y \operatorname{arctg} \frac{A}{y - y_n} dy
 \end{aligned}$$

Dieses Integral konvergiert offensichtlich. Für $N \rightarrow \infty$ verschwindet daher die kinetische Energie innerhalb des Clusters.

Anmerkungen zu den Ergebnissen

Allgemeine Bemerkungen zum Geltungsbereich dieser Theorie des ebenen Clusters und zu den mit den Annahmen verbundenen Fehlern.

- 1) Das Geschwindigkeitsfeld wurde nur für die y-Richtung errechnet. In Wirklichkeit wird jedoch unmittelbar an den Enden des Clusters sowie im Raum über dem Cluster kinetische Energie seitlich in x-Richtung (bei unendlicher Ausdehnung in z-Richtung) abgestrahlt. Würde man diese berücksichtigen, wäre die linke Seite in Formel (15) kleiner als bei der hiesigen Berechnung, da die Energieanteile der Abstrahlung in x-Richtung mit zur Energiebilanz beitragen. Insbesondere wären $\dot{y}^2$ und y kleiner, die Zusammenfallszeit infolgedessen größer als die jetzt berechnete. Die Theorie gilt also nur für sehr lange Cluster, wie folgende Berechnung zeigt.

Das Potential ist

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-A+x}^{A+x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit in x-Richtung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = \frac{1}{4\pi} \int_{-A+x}^{A+x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q \cdot (x-\xi) d\xi d\zeta}{[(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}}$$

Mit den Variablentransformationen $\eta = x - \xi$, $d\eta = -d\xi$ und $z - \zeta = \zeta$ ergibt sich

$$\begin{aligned} v_x &= q \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{-A+x}^{A+x} \frac{\eta d\eta \cdot \zeta}{(\eta^2 + y^2) \cdot \sqrt{\eta^2 + y^2 + \zeta^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 2 \dot{y} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{-A+x}^{A+x} \frac{\eta d\eta}{\eta^2 + y^2} \cdot 2 \\ &= \frac{\dot{y}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(A+x)^2 + y^2}{(x-A)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Das Argument des Logarithmus geht für sehr große A gegen 1, d.h., die Abstrahlung in x-Richtung verschwindet dann.

- 2) Die Quellenbelegung wurde in der Ebene $y = 0$ angenommen. Nun ist aber $v = \dot{y} \arctg (A/y) \cdot 2/\pi$, während direkt an der Clusterwand, also bei $y = Y$, $v = \dot{Y}$ gelten muß. Für kleine A/y gilt dies offenbar nicht, d.h., die Geschwindigkeit ist in dieser Berechnung kleiner als sie wäre, wenn man die Quellenbelegung bei $y = Y$ annehmen würde, wie es strenggenommen richtig wäre. Aus der Energiebilanz wird daher eine Wandbeschleunigung und -geschwindigkeit errechnet, die bei kleinen A/y zu groß werden; die Zusammenfallszeit wird durch diesen Fehler entsprechend verkleinert. Allerdings beträgt bei $A/y > 10$ der $\arctg (A/y) = 0,937 \frac{\pi}{2}$, d.h., es ist $v = 0,94 \dot{Y}$ und der Fehler praktisch vernachlässigbar.

Bedeutung der Größe β_0 :

- a) Einfluß von b_0 auf die Minimalschichtdicke

Die Minimalschichtdicke bestimmt sich nach der Gleichung

$$z-1 + \frac{p_{L0}}{p_\infty - p_v} \beta_0 \cdot \frac{1}{1-\kappa} \left[\left(\frac{z-(1-\beta_0)}{\beta_0} \right)^{1-\kappa} - 1 \right] - \frac{3\sigma}{a_0} \frac{\beta_0}{p_\infty - p_v} \left[\left(\frac{z-(1-\beta_0)}{\beta_0} \right)^{1/3} - 1 \right] = 0$$

mit

$$z = \frac{Y_E}{Y_0}$$

Offenbar entspricht dies Gl. (10) für das kugelsymmetrische Cluster, wenn man z durch $(R_E/R_0)^3$ ersetzt. Das minimale Volumenverhältnis $V_{\min}/V_0$ ist offenbar bei beiden Clustern gleich, wie man auch aus Abb. 1 und 2 sehen kann: Die Kurve in Abbildung 2 geht in die von Abb. 1 über, wenn man aus ihren Werten die 3. Wurzel zieht. Ihre aus der Zeichnung zu entnehmende Interpolationsgleichung ist $Y_E/Y_0 = 1 - \beta_0$, also ein linearer Verlauf bei konstantem $P_{L0}/(P_\infty - P_v)$. Für $\beta_0 = 1$ gilt: $Y_E/Y_0 = 0.002$ (bei $P_{L0} = 0.02$ bar, $P - P_v = 0.5$ bar), also etwa die 3. Wurzel des Extremalradius R_E/R_0 ($\beta_0 = 1$) beim kugelsymmetrischen Cluster. Nach der Interpolationsformel würde das Cluster ganz verschwinden; bei großen β_0 -Werten hat also der Luftdruck größeren Einfluß.

- b) Einfluß von β_0 auf $\beta_{\min}/\beta_0$ und $a_{\min}/a_0$ (Abb. 3)

Die Kurven gelten für das ebene und das kugelsymmetrische Cluster. Da das minimale Volumenverhältnis $V_{\min}/V_0$ bei beiden

Clustern gleich ist, müssen die Kurven für $\beta_{\min}$ und $a_{\min}$ ebenfalls bei beiden Clustern die gleichen sein, weil ja die Änderung des Gesamtvolumens gleich der Änderung des Gasvolumens ist, die Wassermenge also constant ist. Die Extremalvolumenverhältnisse hängen also in keiner Weise von der Clusterform ab.

c) Einfluß der Größe β_0 auf die Zusammenfallszeit:

Der qualitative Verlauf der Kurve ist der gleiche wie im kugelsymmetrischen Fall (Abb. 1 und 3). Die aus der Zeichnung entnommene Interpolationsformel lautet:

$$t_z = t_z \left(\beta_0 = \frac{\pi}{8} \right) \cdot \sqrt{\beta_0 / \frac{\pi}{8}}$$

Diese aus der Kurve abzulesende Funktion ist also die gleiche wie im kugelsymmetrischen Fall. Auch hier soll nun untersucht werden, inwieweit die Zusammenfallszeit von der Blasendichte im Cluster abhängt oder lediglich vom absoluten Gasvolumen. Aus den Abb. 15 und 14 folgen die Interpolationsformeln für die Zusammenfallszeit in Abhängigkeit von der Dicke und von der Länge des Clusters:

$$t_z = t_z (y_0 = 0.1) \cdot \sqrt{y_0 / 0.1}$$

$$t_z = t_z (A = 10) \cdot \sqrt{A / 10}$$

Führt man V_{go} als Variable ein, so folgt mit $\beta_0 = \frac{V_{go}}{4AB y_0}$:

$$t_z = t_z \left(\beta_0 = \frac{\pi}{8} \right) \cdot \sqrt{\frac{V_{go}}{y_0 4AB \cdot \frac{\pi}{8}}}$$

$$t_z = t_z (y_0 = 0.1) \cdot \sqrt{\frac{V_{go}}{0.1 \cdot \beta_0 \cdot 4AB}}$$

$$t_z = t_z (A = 10) \cdot \sqrt{\frac{V_{go}}{10 \cdot 4AB y_0 \beta_0}}$$

Offenbar ist also der Verlauf von t_z immer der gleiche, ob die Änderung des Gasvolumens nun durch eine Verdichtung oder durch eine Änderung des Clustervolumens erfolgt. -

Sieht man sich die Formel für t_z genauer an, so merkt man, daß dies strenggenommen nicht stimmt. Bestimmende Faktoren sind zwar y_0 und A_0 , aber diese Größen gehen außerdem in das

Integral

ein. Das bedeutet: 1) Je größer Y_0 , desto kleiner wird das Integral; die Abhängigkeit der Zusammenfallszeit von Y_0 ist also schwächer als Y_0 (falls A/Y_0 nicht allzu groß wird; in diesem Fall wird das Integral konstant in Y_0). 2) Je größer A wird, desto größer wird das Integral; die Abhängigkeit der Zusammenfallszeit von A ist also stärker als A , falls A/Y_0 nicht allzu groß wird. Bei zunehmendem Verhältnis A/Y_0 nähert sich der Verlauf der Zusammenfallszeit gegen den Cluster-Querschnitt $Y_0 \cdot A$ und den der Quadratwurzel.

Die Abweichung von diesem Verlauf hat folgende Gründe:

- 1) Die Verminderung des Integrals bei steigendem Y_0 beruht auf dem oben erwähnten Fehler. Strenggenommen müßte an der Wand, also bei $y = Y$, immer gelten $v = \dot{Y}$. Die zu einem bestimmten Zeitpunkt abgestrahlte kinetische Energie wäre dann unabhängig von der Schichtdicke, wie es sein muß.
- 2) Die Steigerung des Integralwertes mit wachsendem A erklärt sich aus der Tatsache, daß bei längerem Cluster ein überproportional größerer Anteil an kinetischer Energie in y -Richtung abgestrahlt wird (siehe hierzu obige Rechnung zur Seitenabstrahlung).

Bedeutung des Luftdrucks und des Flüssigkeitsdrucks

- a) Die Zusammenfallszeit verläuft mit steigendem Luftdruck qualitativ wie beim kugelsymmetrischen Cluster; bei $\beta_0 = 1$ ist die Abhängigkeit stärker als bei $\beta_0 = \pi/8$, wie es sein muß. Die Abhängigkeit ist wie beim kugelsymmetrischen Cluster nur schwach.
- b) Y_E/Y_0 (Abb. 8) verhält sich bei Änderung des Anfangsluftdrucks wie das extremale Volumenverhältnis beim kugelsymmetrischen Cluster, was man Abb. 9 entnimmt, wenn man die dort aufgetragenen Werte mit 3 potenziert. Wie erwähnt, sind ja die Gesetze über das Extremalvolumen bei beiden Clusterformen die gleichen.

- c) Der Verlauf der Zusammenfallszeit bei Änderung von $P_{\infty} - P_v$ entspricht qualitativ der klassischen Berechnung für die einzelne Blase. Die Form des Clusters hat darauf offenbar keinen Einfluß.

2. Verhalten einer einzelnen Blase bei Anwesenheit umgebender Blasen

Um eine Blase herum seien gleichmäßig Umgebungsblasen verteilt, wobei ihre Mittelpunkte auf einer Kugelfläche vom Radius ℓ um den Koordinatenursprung (Mittelpunkt der mittleren Blase) herum angeordnet sind. Unter diesen Bedingungen wird der Zusammenfall der mittleren Blase berechnet.

Das Potential hat die allgemeine Form

$$\phi = \phi_0(t) \cdot \frac{1}{|r|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(t)}{|r - r_n|} \quad (18)$$

was die einzige Bedingung an das Potential, die Laplace-Gleichung, $\Delta\phi = 0$, erfüllt.

Da für den Zusammenfallsvorgang das Volumen der Blase die entscheidende Größe ist, wird die während des Vorgangs auftretende Verformung als kugelsymmetrisch angenommen. Das Potential an der Oberfläche wird gemittelt über alle Richtungen.

In 0-ter Näherung gilt für alle Blasen:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{R} = \frac{-\phi_0}{R^2} \implies \phi_0 = -\dot{R} R^2$$

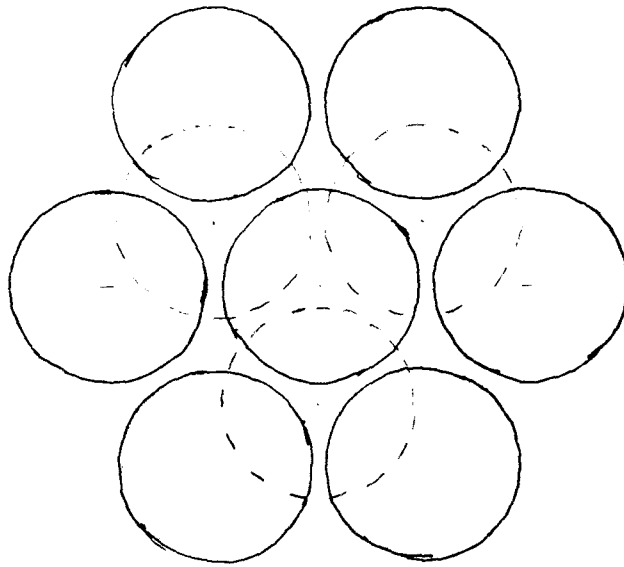
Dies wird anstelle von ϕ_n in den Störterm eingesetzt, da nur die Störung 1. Ordnung betrachtet wird, gemittelt über alle Richtungen. Bei $r = R$ wird also gesetzt:

$$\phi(r=R) = \phi_0(t) \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_0(t)}{|r - r_n|} \Big|_{r=R} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (19)$$

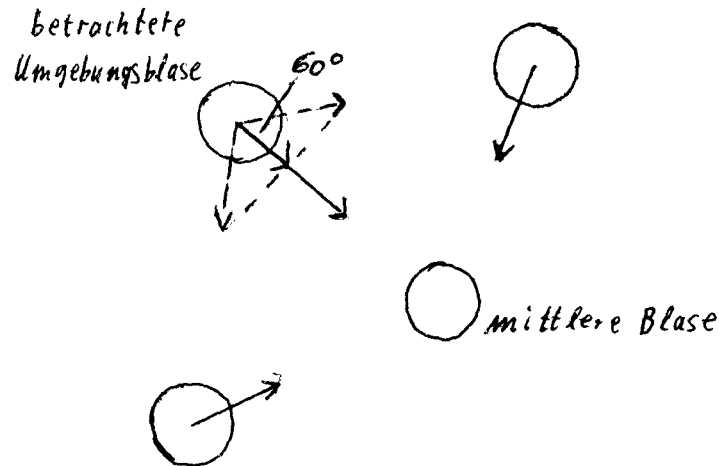
Dabei ist zugrunde gelegt, daß der Radius der Umgebungsblasen in jedem Zeitpunkt gleich dem der mittleren Blase ist, was strenggenommen nicht stimmt. Die Blasen sind nur dann gleichen physikalischen Bedingungen unterworfen, wenn man die Wechselwirkung zwischen ihnen vernachlässigt. Solange diese jedoch als Störung 1. Ordnung betrachtet werden kann, kann diese Ungenauigkeit als "Störung der Störung" von höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Die Überlagerung der kugelsymmetrischen Geschwindigkeitsfelder der Einzelblasen ergibt eine Resultierende, die zum Mittelpunkt des Systems gerichtet ist. Die Geschwindigkeit einer Umgebungs-

blase zum Koordinatenursprung hin hängt ab von der Anordnung der Umgebungsblasen. In der vorliegenden Untersuchung beschränken wir uns auf den Fall, daß die Blasen in Form eines Ikosaeders angeordnet sind, was der Kugelsymmetrie am nächsten kommt. Das Ikosaeder besteht aus einer Blase im Koordinatenursprung, deren Verhalten wir betrachten wollen. Um diese herum sind in Form eines Sechsecks in der x-y-Ebene weitere Blasen angeordnet; außerdem befinden sich über und unter dem Sechseck jeweils drei Blasen, deren Mittelpunkte jeweils ein gleichseitiges Dreieck bilden, das in das Sechseck eingeschrieben ist.



Die Drift der Umgebungsblasen zum Koordinatenursprung hin berechnet sich dann wie folgt: Der Abstand des Mittelpunktes einer Umgebungsblase vom Ursprung sei l . Die Geschwindigkeit ergibt sich nun aus der Überlagerung der Radialgeschwindigkeiten der Umgebungsblase und der mittleren Blase (die Felder werden als kugelsymmetrisch angenommen). Weiter wollen wir die Geschwindigkeitsfelder der 6 einer Umgebungsblase am nächsten benachbarten Umgebungsblasen berücksichtigen, die am Ort der betrachteten Umgebungsblase eine Resultierende in Richtung Koordinatenursprung ergeben. Das Vektordiagramm sieht dann folgendermaßen aus:



Für die Wechselwirkung mit der mittleren Blase gilt: $\dot{l}_n = 2 \cdot v_r$,
da sich beide Blasen gegenseitig anziehen. (Im Bild sind nur
drei benachbarte Umgebungsblasen eingezeichnet.)

Für die Wechselwirkung mit den benachbarten Umgebungsblasen
gilt: $\dot{l}_n = 6 \cdot 2 \cdot v_r \cos 60^\circ$

Die Drift ist dann

$$\dot{l} = 2 \cdot \frac{\dot{R} R^2}{l^2} + 6 \frac{\dot{R} R^2}{l^2} \cos 60^\circ \cdot 2$$

$$= 8 \frac{\dot{R} R^2}{l^2}$$

$$\dot{l} l^2 = 8 \dot{R} R^2$$

Daraus folgt:

$$l^3 - l_0^3 = 8(R^3 - R_0^3) \quad (20)$$

$$l(R) = l_0 \left(8 \frac{R^3 - R_0^3}{l_0^3} + 1 \right)^{1/3} \quad (21)$$

$$\frac{dl}{dR} = \frac{8R^2}{l^2}$$

a) Berechnung des Zusammenfalls ohne Berücksichtigung der Drift
Mit dem Potential

$$\phi = \frac{-\dot{R} R^2}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-R^2 \dot{R} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{[r^2 + l^2 - 2rl(\cos \vartheta \cos \vartheta_n + \sin \vartheta \sin \vartheta_n \cos(\varphi - \varphi_n))]^{3/2}} \right] \quad (22)$$

gilt ohne Berücksichtigung der Drift

$$\text{mit } A = r^2 + l^2 - 2rl(\cos\vartheta\cos\vartheta_n + \sin\vartheta\sin\vartheta_n\cos(\varphi-\varphi_n))$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{r=R} = -\ddot{R}R - 2\dot{R}^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \left[\frac{-R\ddot{R} - 2\dot{R}^2 R}{\sqrt{A}} \right] \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{R} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{R\dot{R}}{2A^{3/2}} \cdot (2r - 2l(\cos\vartheta\cos\vartheta_n + \sin\vartheta\sin\vartheta_n\cos(\varphi-\varphi_n))) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Für $r = R$, also an der Wand der mittleren Blase, gilt dann nach der Bernoulli'schen Gleichung $\frac{p_w - p(R)}{\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2$

$$\begin{aligned} \frac{p_w - p(R)}{\rho} &= \frac{2}{\left(R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi\right)} = -\frac{d\dot{R}^2}{dR} + \dot{R}^2 \cdot \frac{2}{\left(R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi\right)} \\ &\cdot \left(-2 - \frac{2R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{R - l(\cos\vartheta\cos\vartheta_n + \sin\vartheta\sin\vartheta_n\cos(\varphi-\varphi_n))}{A^{3/2}} \right. \right. \\ &\left. \left. \cdot \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \right]^2 \right) \end{aligned}$$

Für die Wandgeschwindigkeit ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \exp \left(- \int_R^{R_0} \frac{2}{R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi} \cdot \left(-2 - \frac{2R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{R - l(\cos\vartheta\cos\vartheta_n + \sin\vartheta\sin\vartheta_n\cos(\varphi-\varphi_n))}{A^{3/2}} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \right]^2 \right) dR \right) \\ &\cdot \int_R^{R_0} \exp \left(\int_R^{R_0} (dt_0) dR \right) \cdot \frac{p_w - p_{c0} \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\alpha} - p_v + \frac{2\sigma}{R}}{\rho} \cdot \frac{2 dR}{R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi} \quad (23) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Zusammenfallszeit nach der Formel

$$t_z = \int_{R_F}^{R_0} \frac{1}{\sqrt{\dot{R}^2}} dR \quad (24)$$

b) Berechnung des Zusammenfalls mit Berücksichtigung der Drift der Umgebungsblasen

Die Ableitungen des Potentials (Gl. 22) liefern jetzt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -R \ddot{R} - 2 \dot{R}^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \left[\frac{-R^2 \ddot{R} - 2 R^2 \dot{R}}{\sqrt{A}} + \right. \\ \left. + \frac{R^2 \dot{R}}{2 A^{3/2}} \left(2l \frac{dl}{dR} \dot{R} - 2 \frac{dl}{dR} \dot{R} R (\sin \vartheta \sin \vartheta_n \cos(\varphi - \varphi_n) + \cos \vartheta \cos \vartheta_n) \right) \right] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{R} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{R^2 \dot{R}}{2 A^{3/2}} (2R - 2l(\sin \vartheta \sin \vartheta_n \cos(\varphi - \varphi_n) + \cos \vartheta \cos \vartheta_n)) \\ \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Für $r = R$ folgt damit aus der Bernoulli'schen Gleichung:

$$\frac{p_v - p(R)}{\rho} \cdot \frac{2}{R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi} = - \frac{d\dot{R}^2}{dR} + \dot{R}^2 \cdot \frac{2}{R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi} \cdot \\ \cdot \left(-2 + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{dl}{dR} \cdot \frac{l - R(\sin \vartheta \sin \vartheta_n \cos(\varphi - \varphi_n) + \cos \vartheta \cos \vartheta_n)}{A^{3/2}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right. \\ \left. - \frac{2R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{R - l(\cos(\varphi - \varphi_n) \sin \vartheta \sin \vartheta_n + \cos \vartheta \cos \vartheta_n)}{A^{3/2}} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right]^2 \right)$$

Damit ergibt sich für die Wandgeschwindigkeit

$$\dot{R}^2 = \exp \left(- \int_R^{R_0} \frac{2}{R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi} \cdot \left(-2 + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{dl}{dR} \cdot \frac{l - R(\sin \vartheta \sin \vartheta_n \cos(\varphi - \varphi_n) + \cos \vartheta \cos \vartheta_n)}{A^{3/2}} \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \frac{2R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{R - l(\cos(\varphi - \varphi_n) \sin \vartheta \sin \vartheta_n + \cos \vartheta \cos \vartheta_n)}{A^{3/2}} \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right]^2 dR \right) \cdot \int_R^{R_0} \exp \left(+ \int_R^{R_0} \dots (dt_0) dR \right) \cdot \frac{p_v - p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_v + \frac{2\sigma}{R}}{\rho} \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{R + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{12} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{A}} d\vartheta d\varphi} dR \quad (25)$$

Die Zusammenfallszeit ist dann:

$$t_z = \int_R^{R_0} \frac{1}{\sqrt{R^2}} dR \quad (24)$$

Anmerkungen zu den Ergebnissen:

- 1) Wirkung der Umgebungsblasen auf die Zusammenfallszeit.
Kompatibilität mit dem Clustermodell (1. Teil)

Wie erwartet, tritt eine Verlängerung der Zusammenfallszeit der mittleren Blase infolge der Wechselwirkung mit den Umgebungsblasen ein. Im Inneren des Ikosaeders heben sich nämlich das kugelsymmetrische Geschwindigkeitsfeld der mittleren Blase und das der Umgebungsblasen gegenseitig teilweise auf, so daß die Zusammenfallsgeschwindigkeit sich verringert. Abb. 21 zeigt den Verlauf von t_z gegen L_0/R_0 . Für eine einzelne Blase mit $R_0 = 0.2 \text{ cm}$ gilt $t_z = 0.26 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$; dieser Wert wird offenbar erst für sehr große L_0/R_0 asymptotisch angenähert.

Die Drift wirkt sich erwartungsgemäß verlängernd auf die Dauer des Zusammenfalls aus, da der Einfluß der Umgebungsblasen ja mit abnehmender Entfernung größer wird; diese Differenz zu den Ergebnissen ohne Berücksichtigung der Drift ist jedoch auch bei kleinen L_0 so gering, daß sie bei den Abbildungen nicht aufgeführt wurde.

Es stellt sich die Frage, ob für geringe Blasenabstände die Theorie mit der des kugelsymmetrischen Clusters kompatibel ist, d.h., ob homogene Gasverteilung näherungsweise angenommen werden kann.

Betrachten wir das System als Cluster mit den dem Blasenabstand entsprechenden β_0 -Werten, so erhalten wir die in Abb. 1 gestrichelt gezeichnete Kurve, wenn man die Werte für t_z , das ja für das Cluster streng proportional zum Radius des ganzen Systems ist, auf den Radius von 1 cm reduziert (als Volumen des Ikosaeders

wurde hier näherungsweise das der Kugel vom Anfangsradius $R_0 + r_0$ genommen, in welche das Ikosaeder einbeschrieben ist). Das Gasvolumenverhältnis beim Ikosaeder ist dann

$$\beta_c = \frac{13}{\left(\frac{L_0}{R_c} + 1\right)^3}$$

Wir stellen eine stärkere Steigung der Kurve für das Ikosaeder fest, weil beim Cluster die Wechselwirkung der Einzelblasen vernachlässigt wurde. Das Cluster wurde ja als homogenes Gas-Fluid-Gemisch betrachtet, ohne daß die einzelnen Blasen ein eigenes Geschwindigkeitsfeld während des Zusammenfalls erzeugten. Gerade dieses ist es aber, was den Zusammenfall der Blasen gegenseitig behindert und zur Verlängerung seiner Dauer führt. Je enger die Blasen zusammengedrängt sind, um so stärker ist dieser Effekt.

Die Theorie des Clusters mit homogener Gasdichteverteilung ist also mit der Theorie der ikosaedrischen Anordnung der Blasen nicht kompatibel; was die Zusammenfallszeit angeht, so nähern sich die Kurven für $\beta_0 \rightarrow 0$ einander an, da mit abnehmendem Blasenradius auch der Wechselwirkungseffekt geringer wird.

Der Minimalradius R_e/R_0 läßt sich mit dem der Kugel, in die das Ikosaeder einbeschrieben ist, gar nicht vergleichen: im ersten Fall entspricht die Volumenänderung genau der Gasvolumenänderung, in letzterem ist die Volumenänderung wegen der Drift wesentlich stärker, während die Gasvolumenänderung für alle β_0 die gleiche bleibt (der Extremalradius der Einzelblasen ist 0,13 für große L_0 und steigt auf 0,135 für $L_0 = 3,5$).

2) Bedeutung der Druckgrößen

Hier ist anzumerken, daß der Verlauf des Extremalradius der mittleren Blase gegen P_{L0} (Abb. 12) identisch ist mit dem Verlauf bei einer ungestörten einzelnen Blase. Für die Zeitverläufe gegen $P_\infty - P_v$ und P_{L0} (Abb. 18,19) besteht qualitative Übereinstimmung mit denen der ungestörten Blase. Die Zusammenfallszeit ist wegen der oben dargestellten Gründe größer.

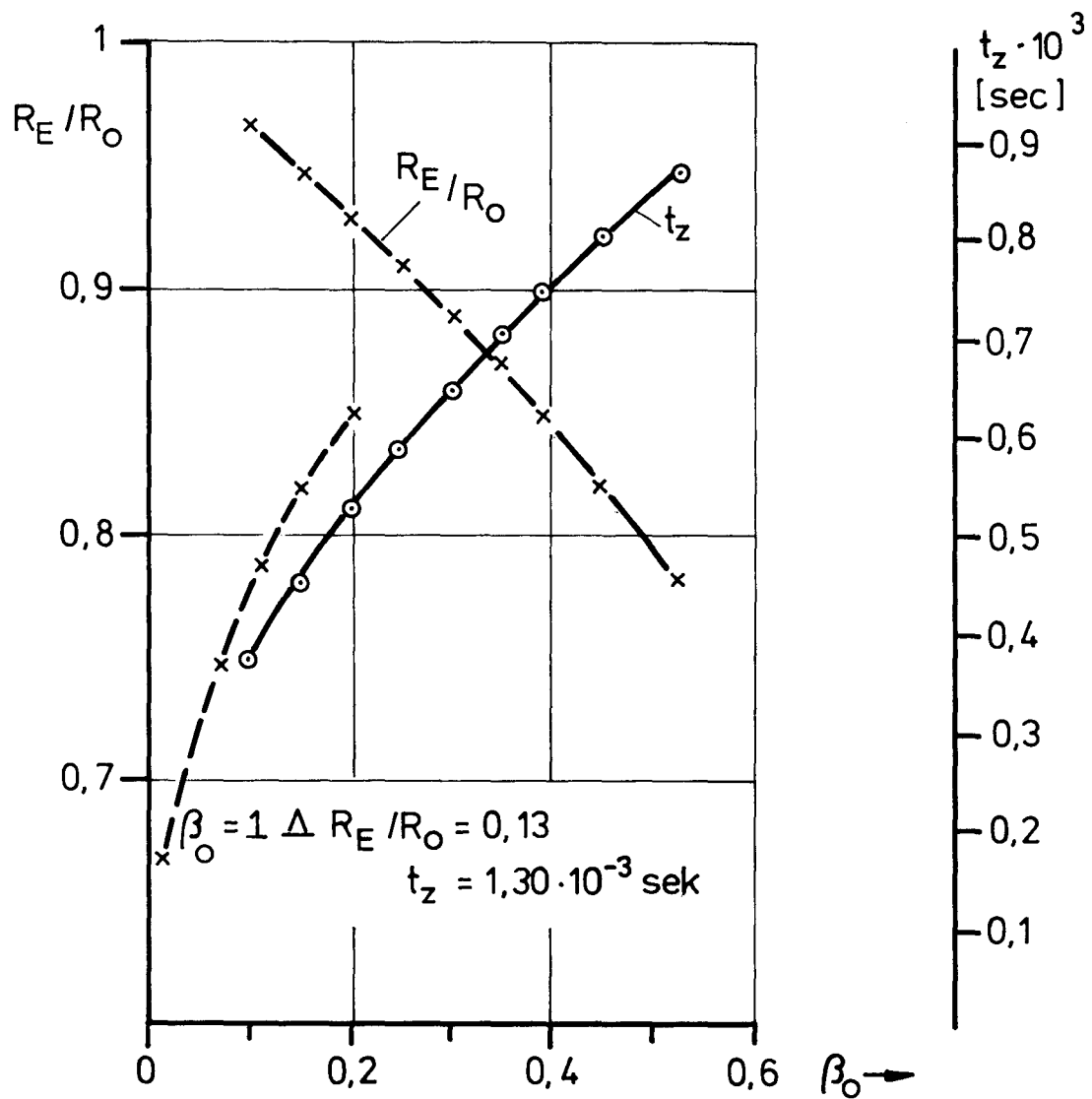
3) Verlauf von t_z gegen den Anfangsradius der Einzelblasen R_0

Abbildung 20 zeigt den linearen Verlauf von t_z gegen R_0 , wie es dem einer einzelnen Blase entspricht. Ein Vergleich mit der Kurve in Abb. 16 zeigt: je kleiner L_0/R_0 , desto mehr muß die Gerade $t_z(R_0)$ steigen; d.h., die Auswirkung der Wechselwirkung ändert sich mit L_0/R_0 , nicht mit dem Absolutwert L_0 . Die für die Störung durch die Umgebungsblasen bestimmende physikalische Größe ist also das Verhältnis L_0/R_0 . Bei konstanten L_0/R_0 bleibt nämlich die Störung, die die Verzögerung des Zusammenfalls bewirkt, konstant, und wir erhalten dann linearen Verlauf von t_z gegen R_0 , allerdings mit stärkerer Steigung, als dies bei einer einzelnen Blase der Fall wäre. Für $R_0/L_0 \rightarrow 0$ nähert sich die Gerade der für die einzelne Blase an.

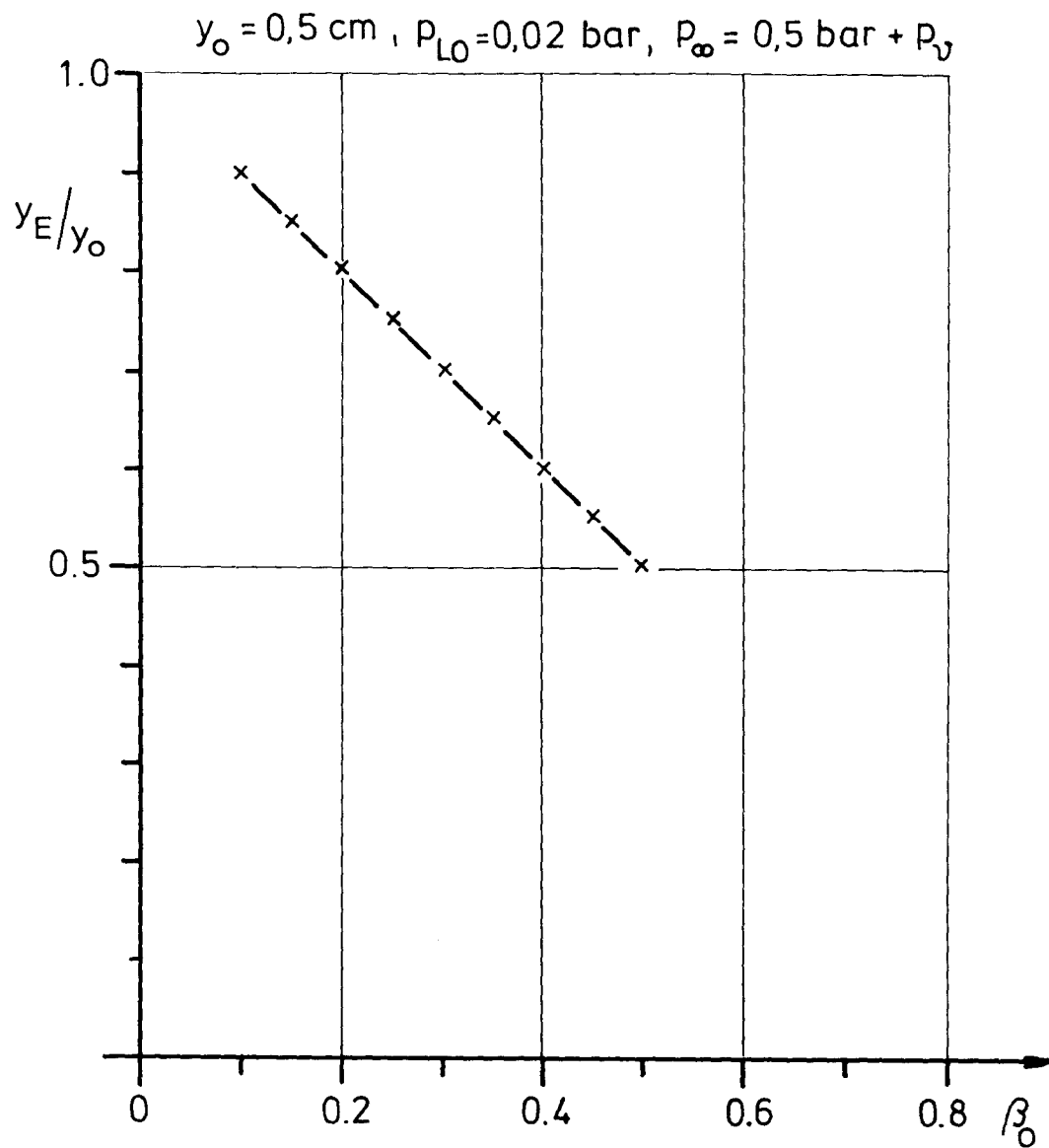
Literaturverzeichnis

1. W.H. Isay:
Kavitation.
Schiffahrts-Verlag "Hansa" C. Schroedter & Co,
Hamburg, 1981
2. L. Prandtl:
Strömungslehre.
Vieweg, Braunschweig, 1960
3. K.A. Mørch:
Energy considerations on the collapse of
cavity clusters.
IUTAM Symposium on Underwater Physics of Bubbles
in Acoustics Presidence, California, June 1981

R_E/R_O und t_z gegen β_O bei $R_O=1\text{cm}$ $a_O=0,1\text{cm}$
 $p_\infty - p_v = 0,5 \text{ bar}$, $p_{LO} = 0,02 \text{ bar}$



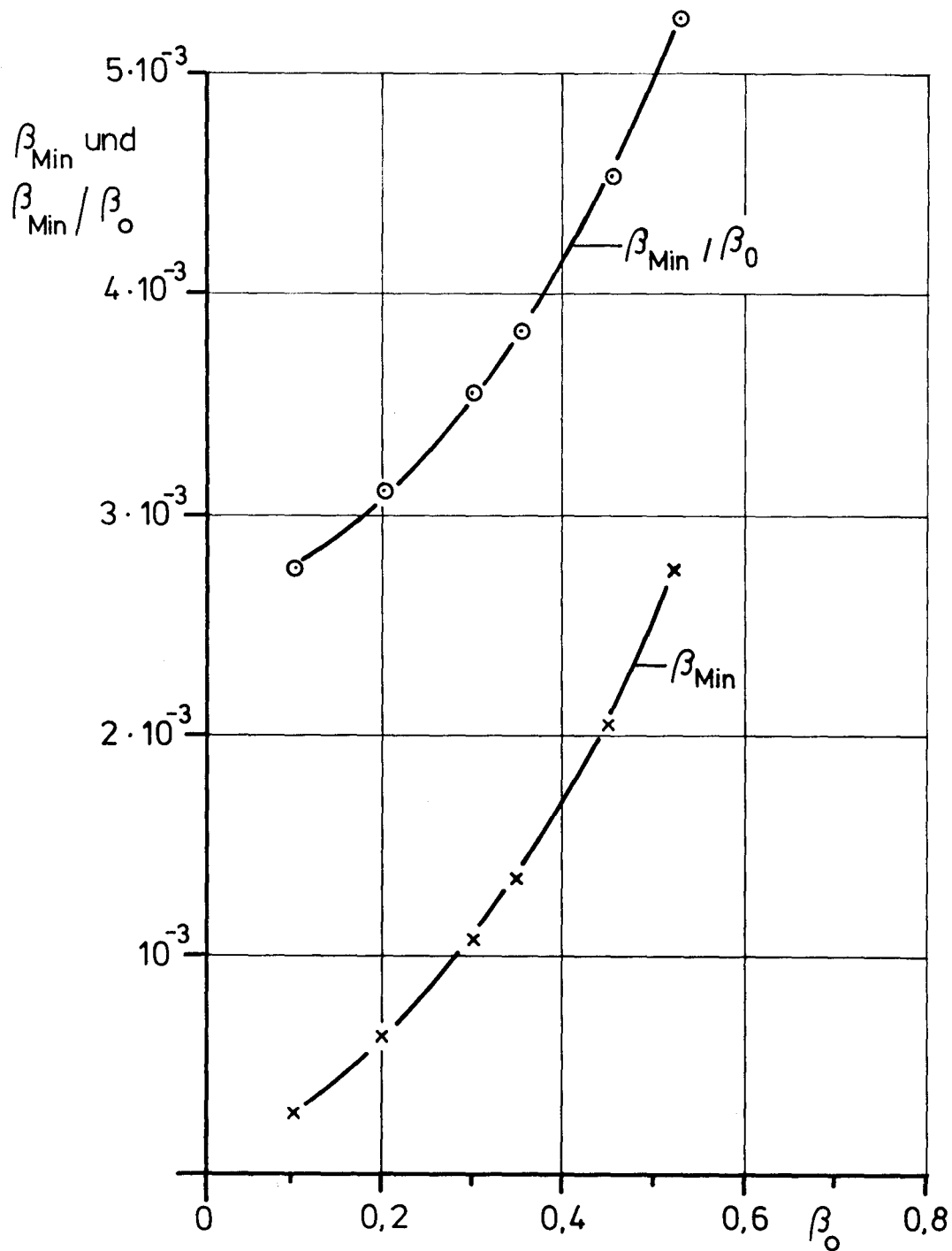
Kugelsymmetrisches Cluster



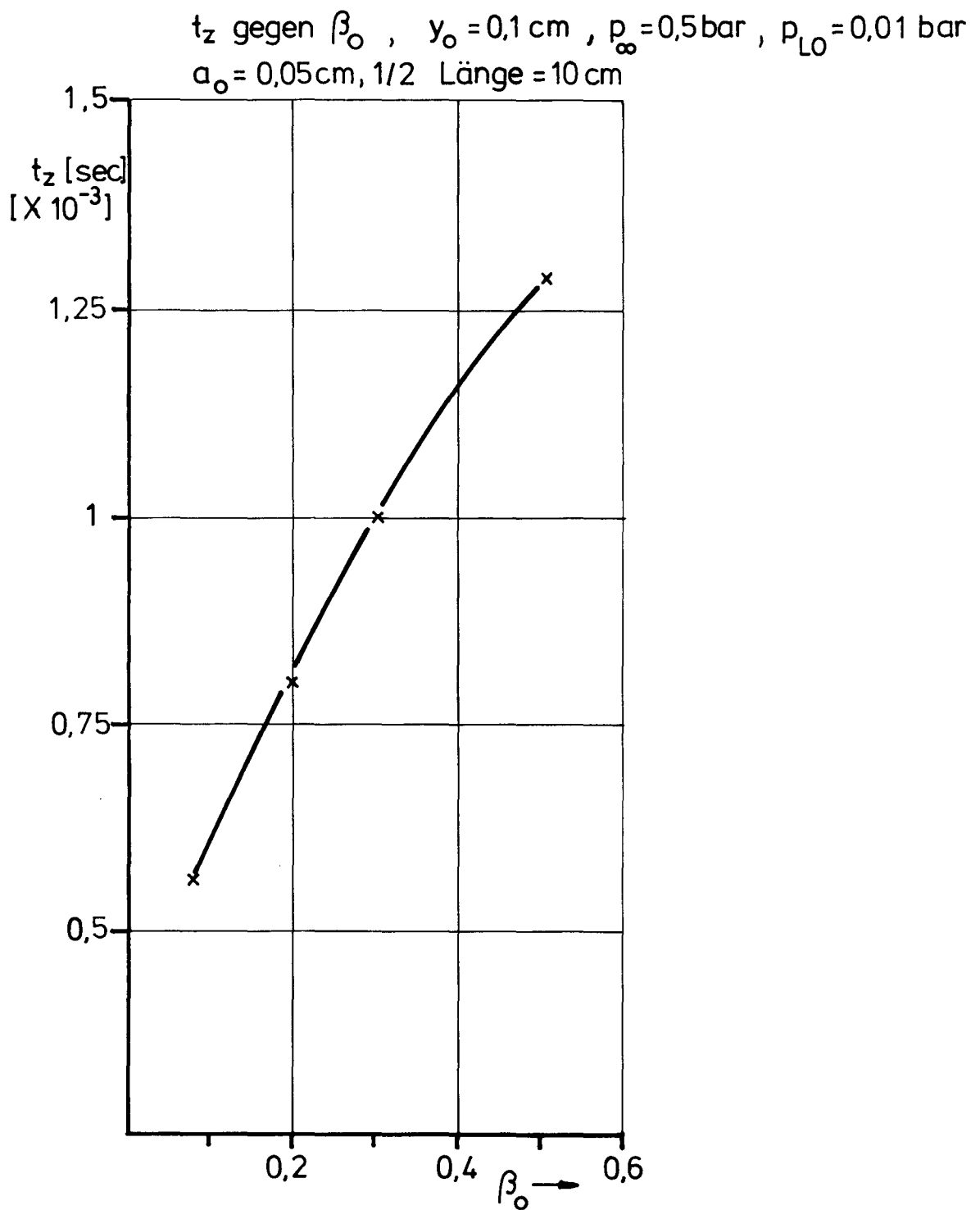
Ebenes Cluster y_E/y_0 gegen β_0 (Extremal -
dicke gegen Gasvolumenverhältnis bei $t=0$)

β_{Min} und $\beta_{\text{Min}}/\beta_0$ gegen β_0

: bei $p_{\text{LO}}=0,02$ bar, $p_{\infty}-p_v=0,5$ bar

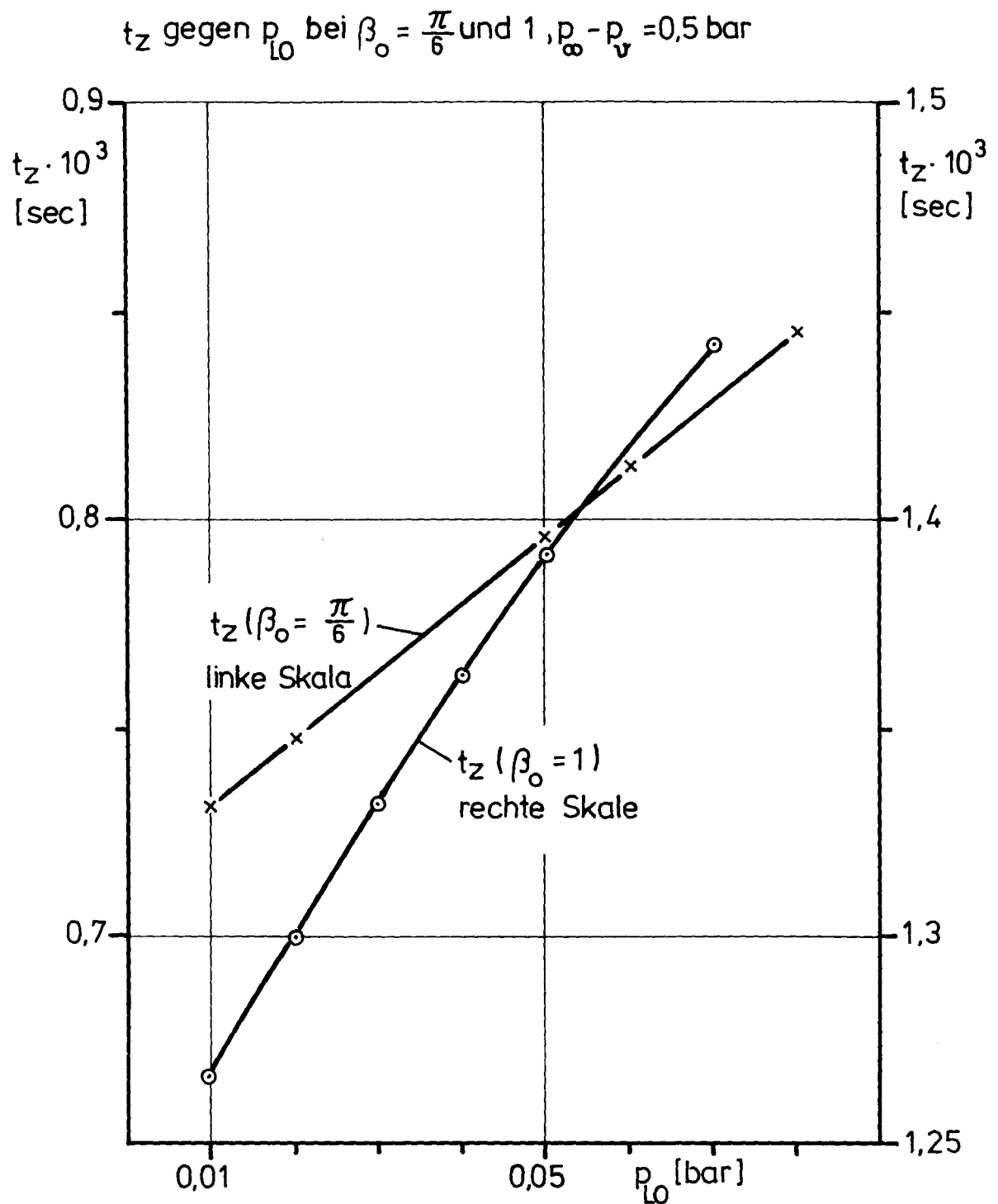


Ebenes und Kugelsymmetrisches Cluster

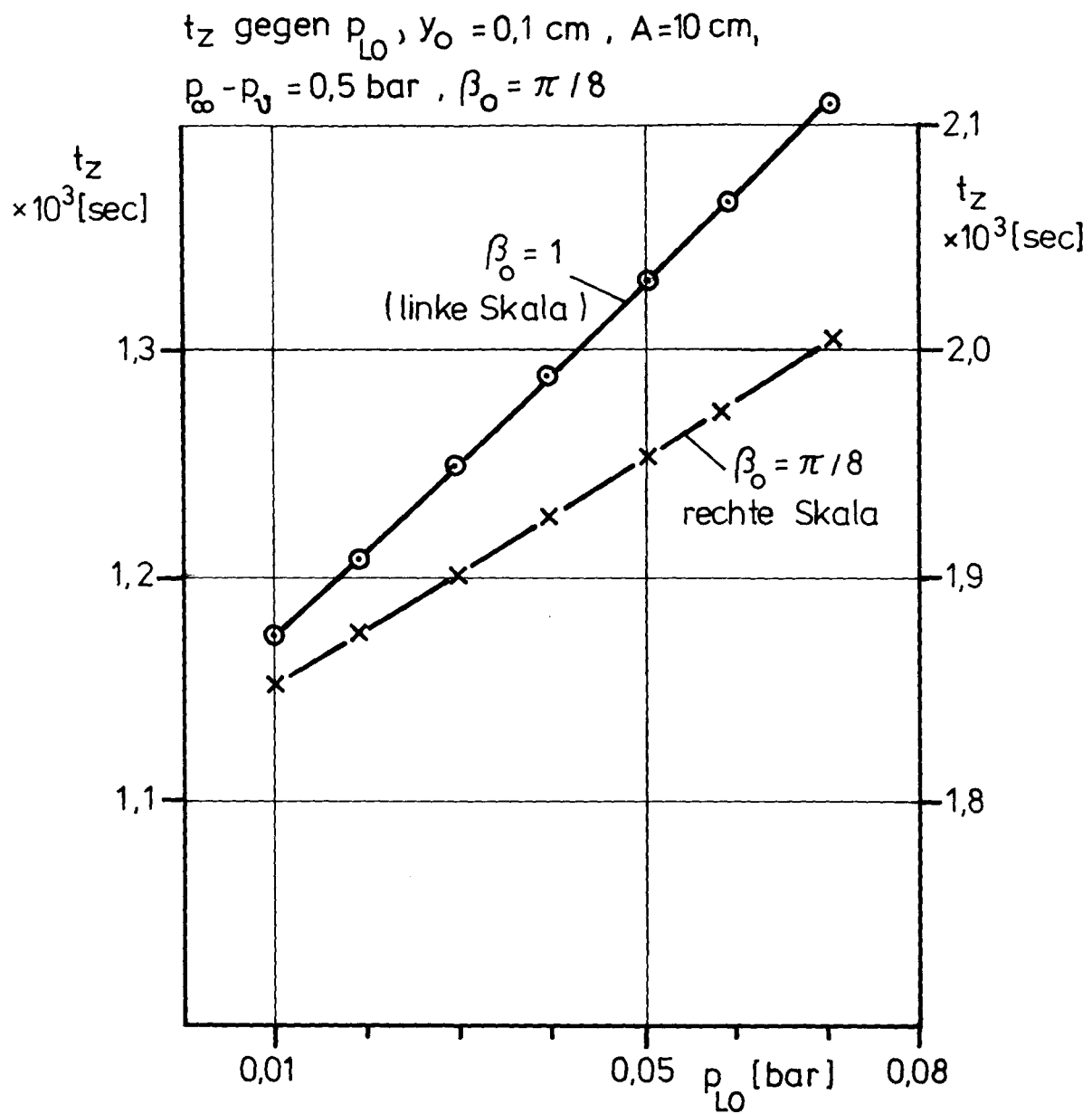


Ebenes Cluster

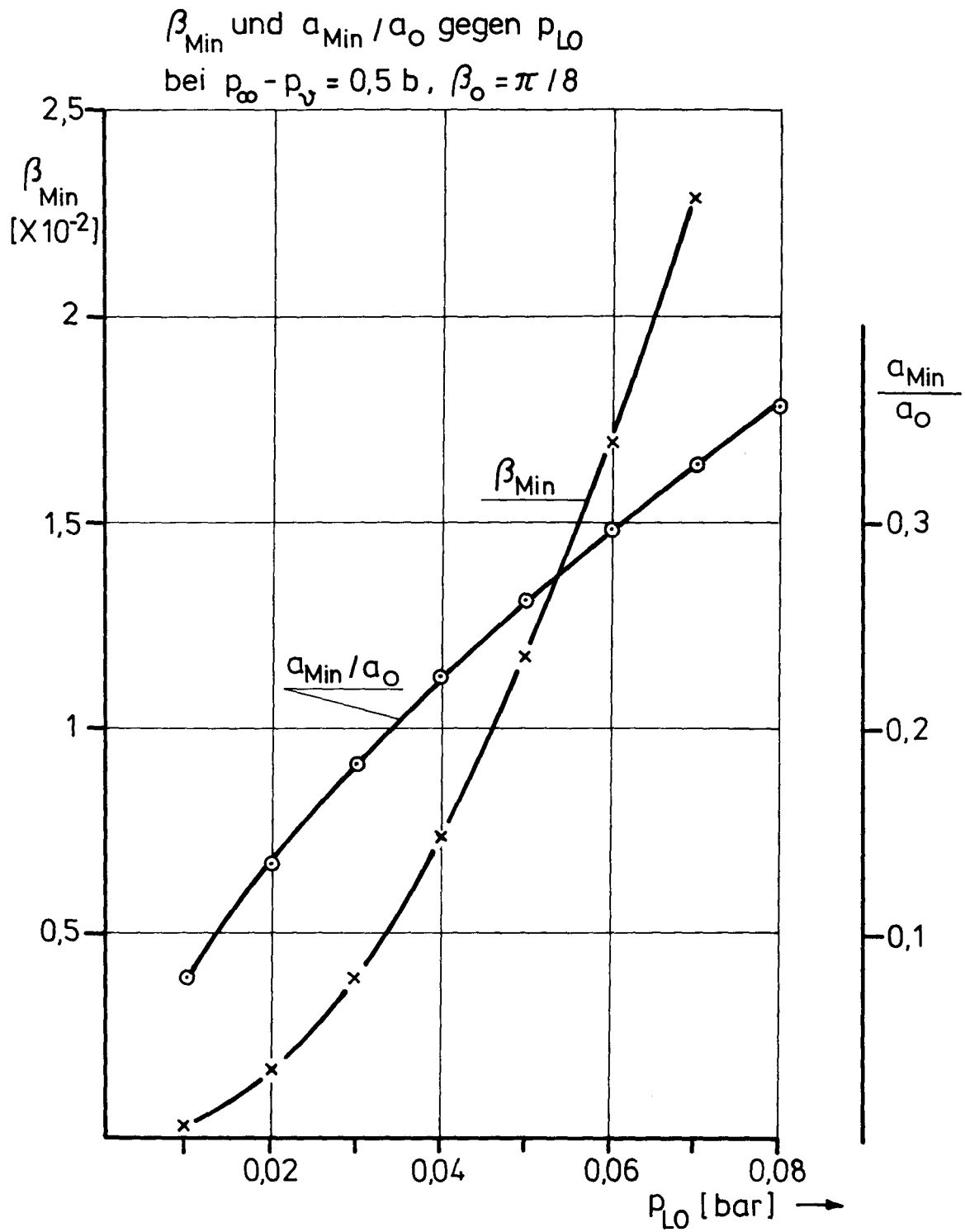
Abb. 5



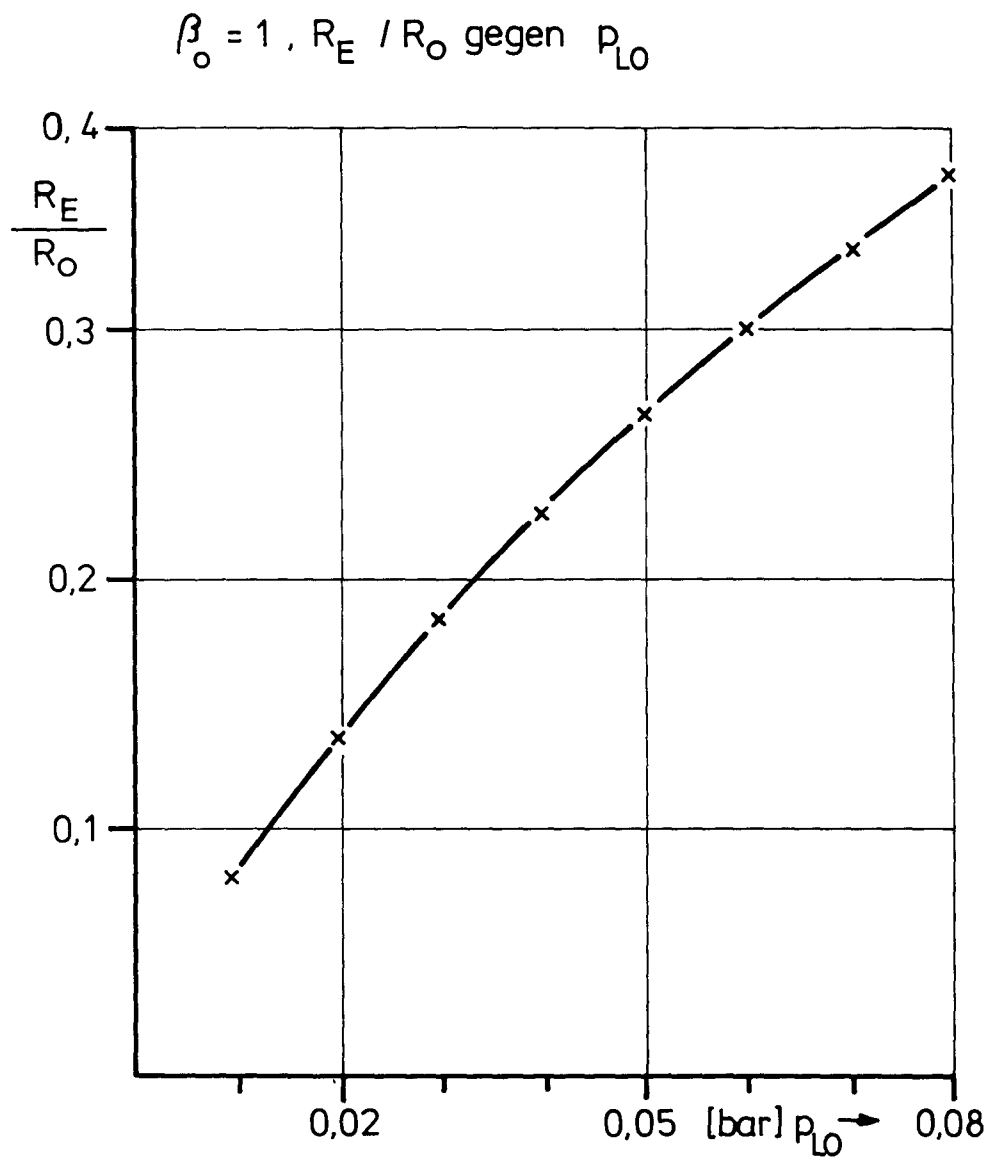
Kugelsymmetrisches Cluster



Ebenes Cluster

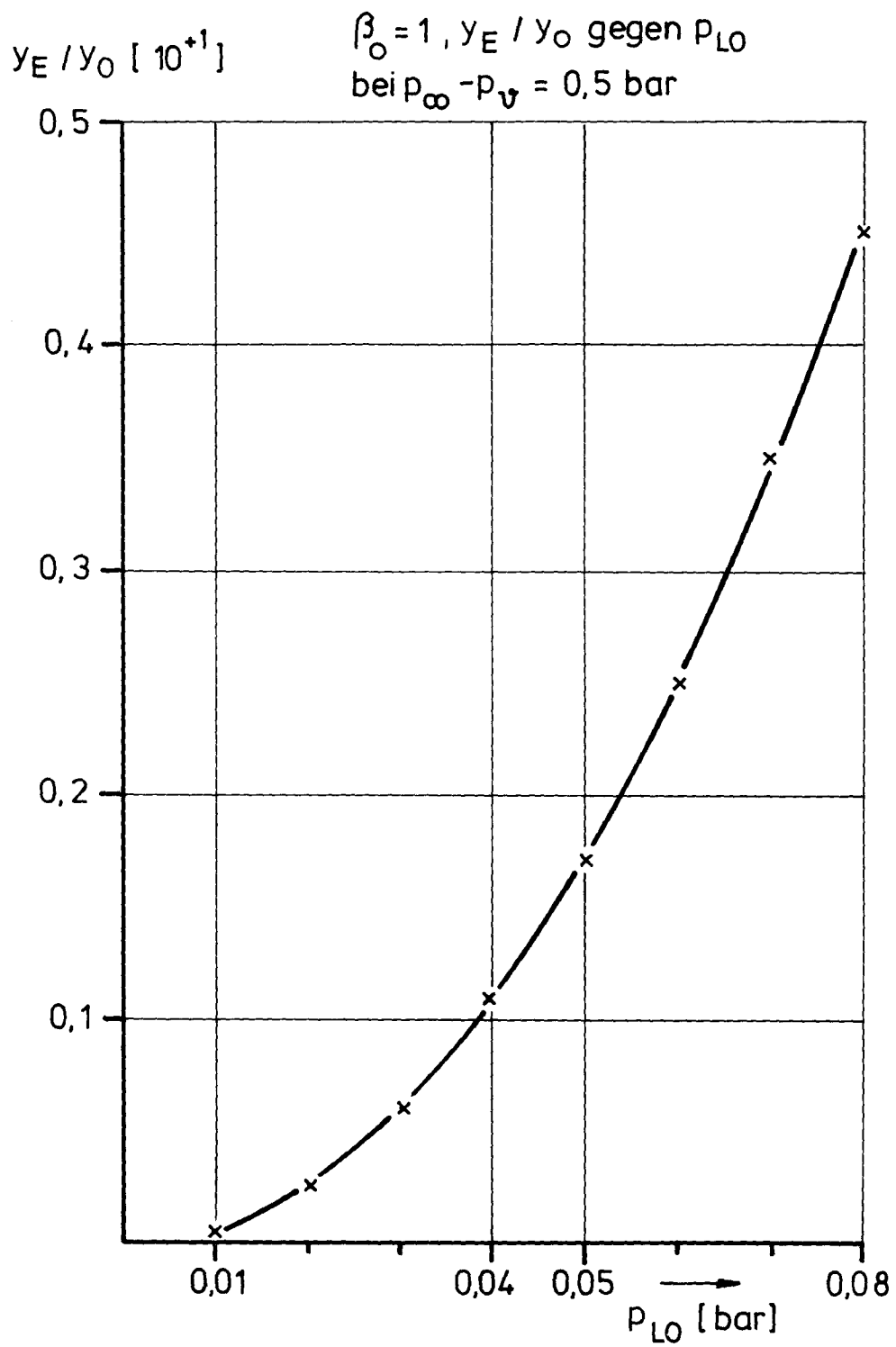


Ebenes und Kugelsymmetrisches Cluster

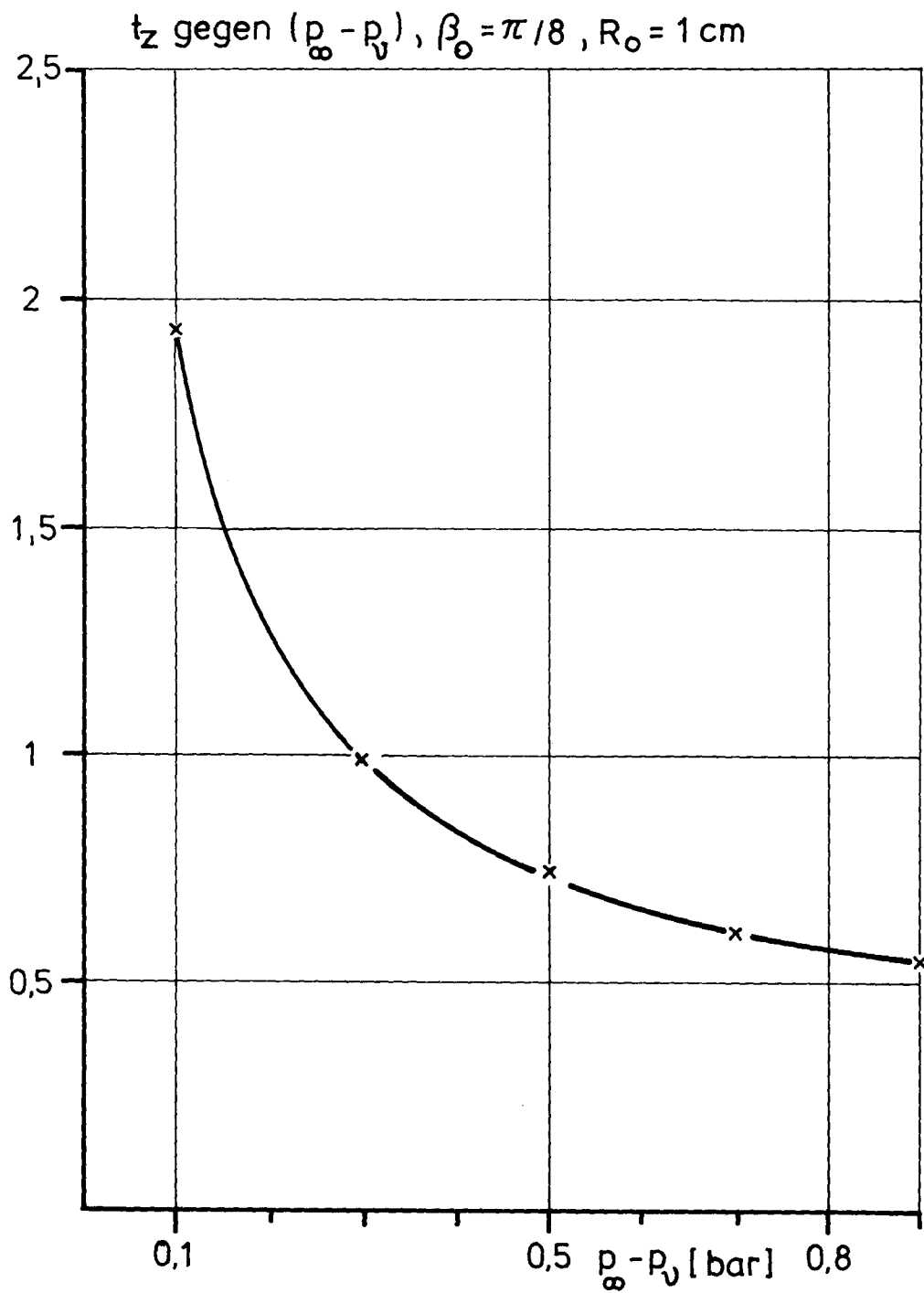


Kugelsymmetrisches Cluster

Abb. 9

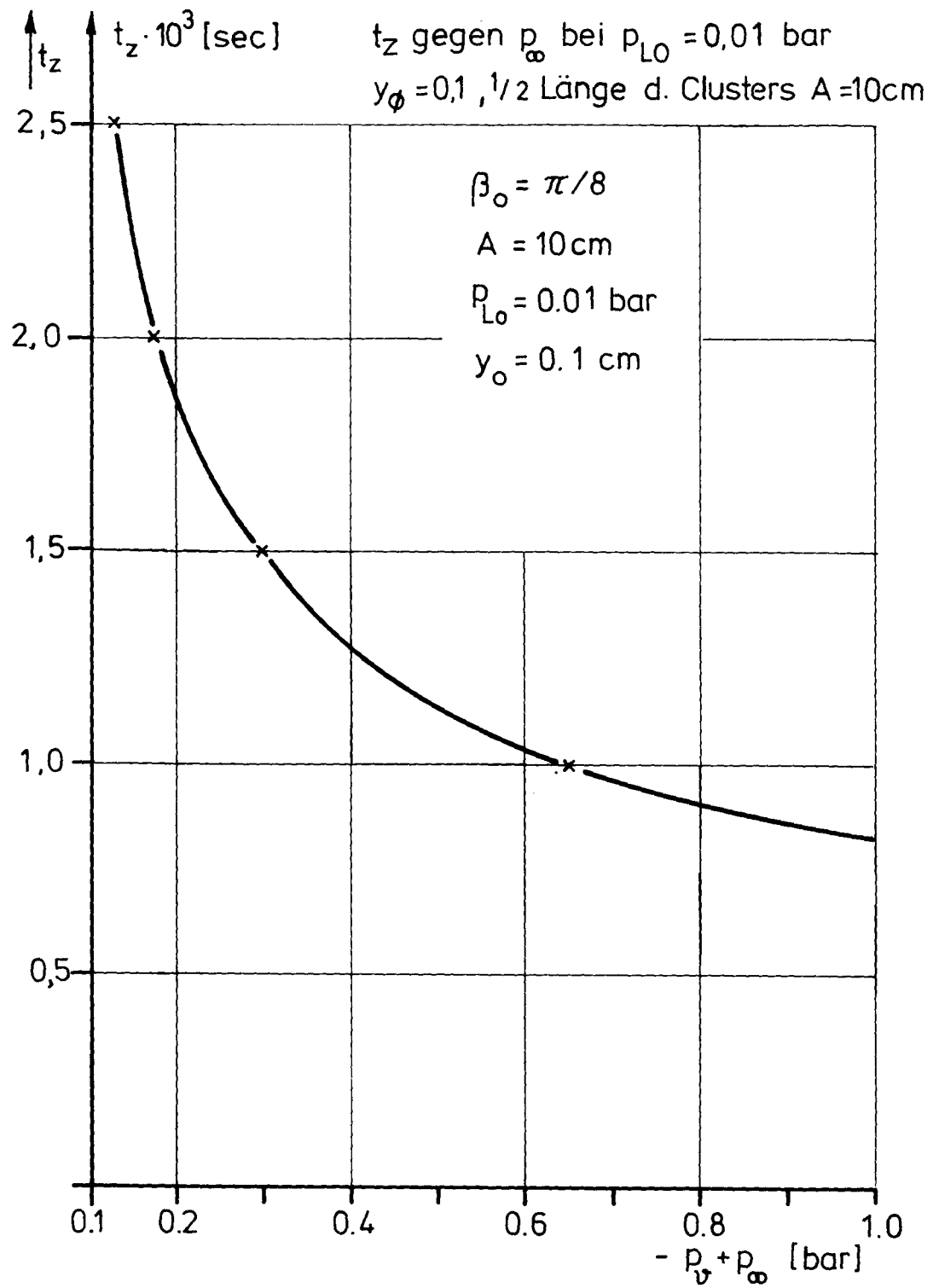


Ebenes Cluster

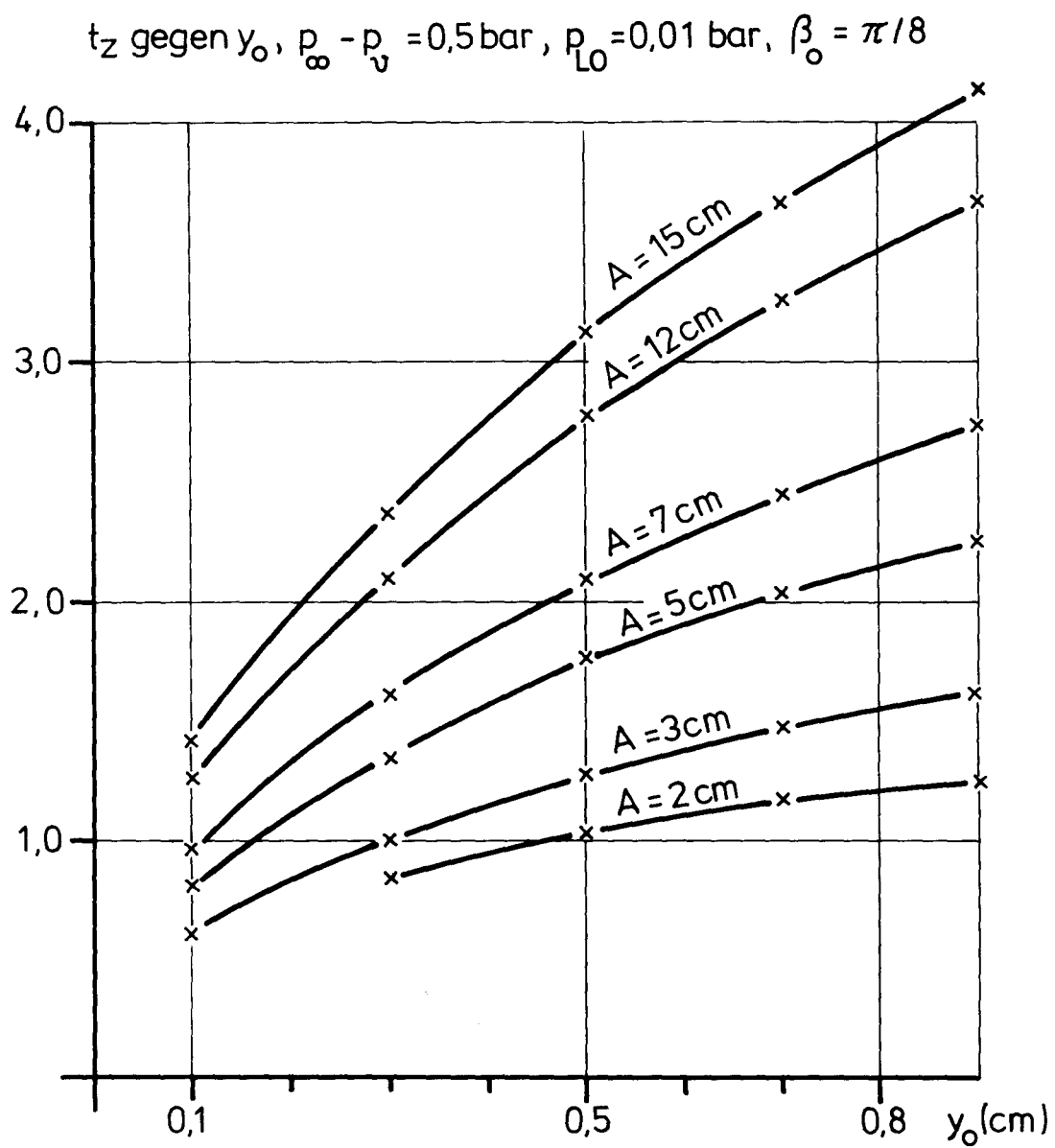


Kugelsymmetrisches Cluster

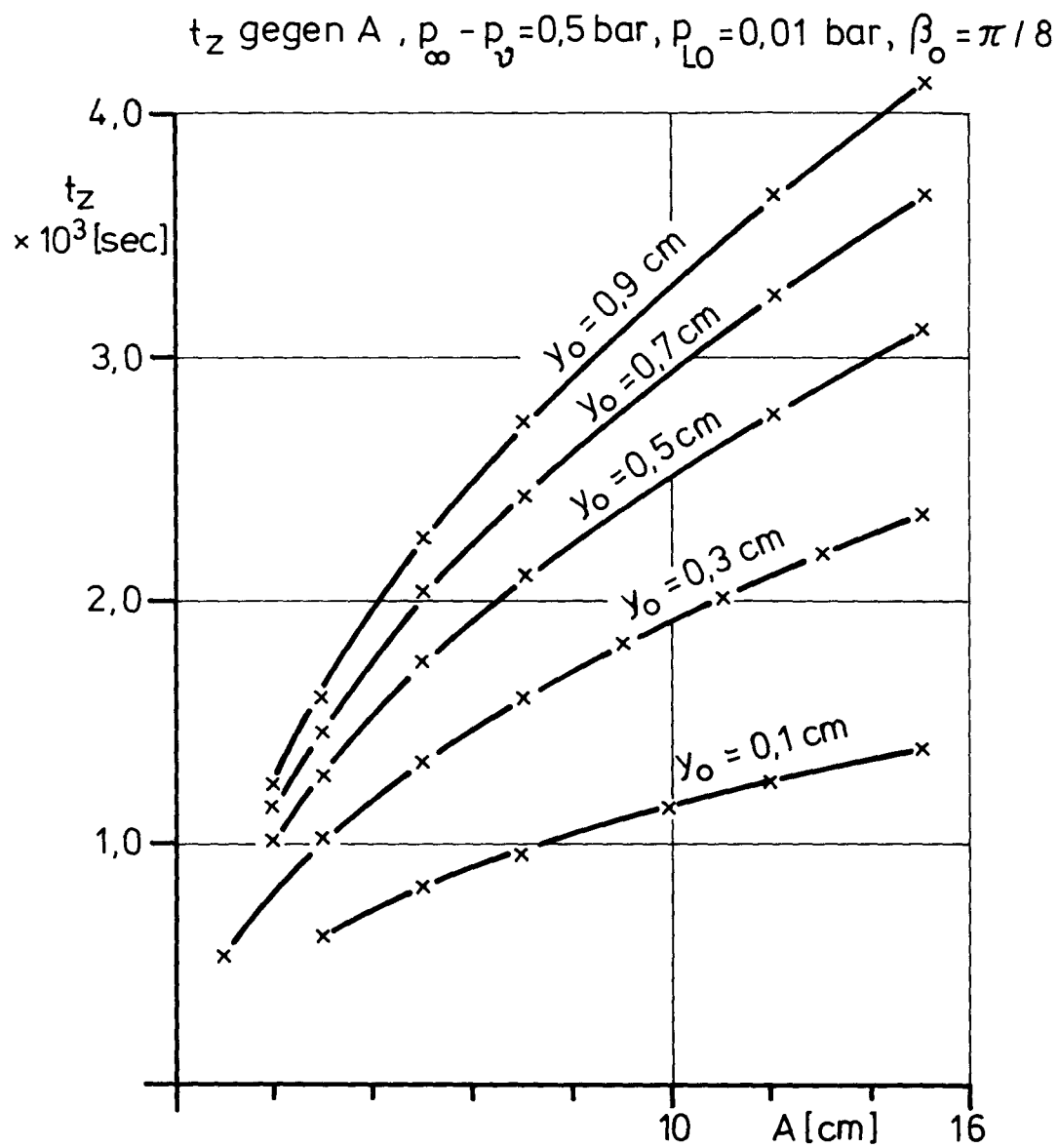
Abb. 11



Ebenes Cluster



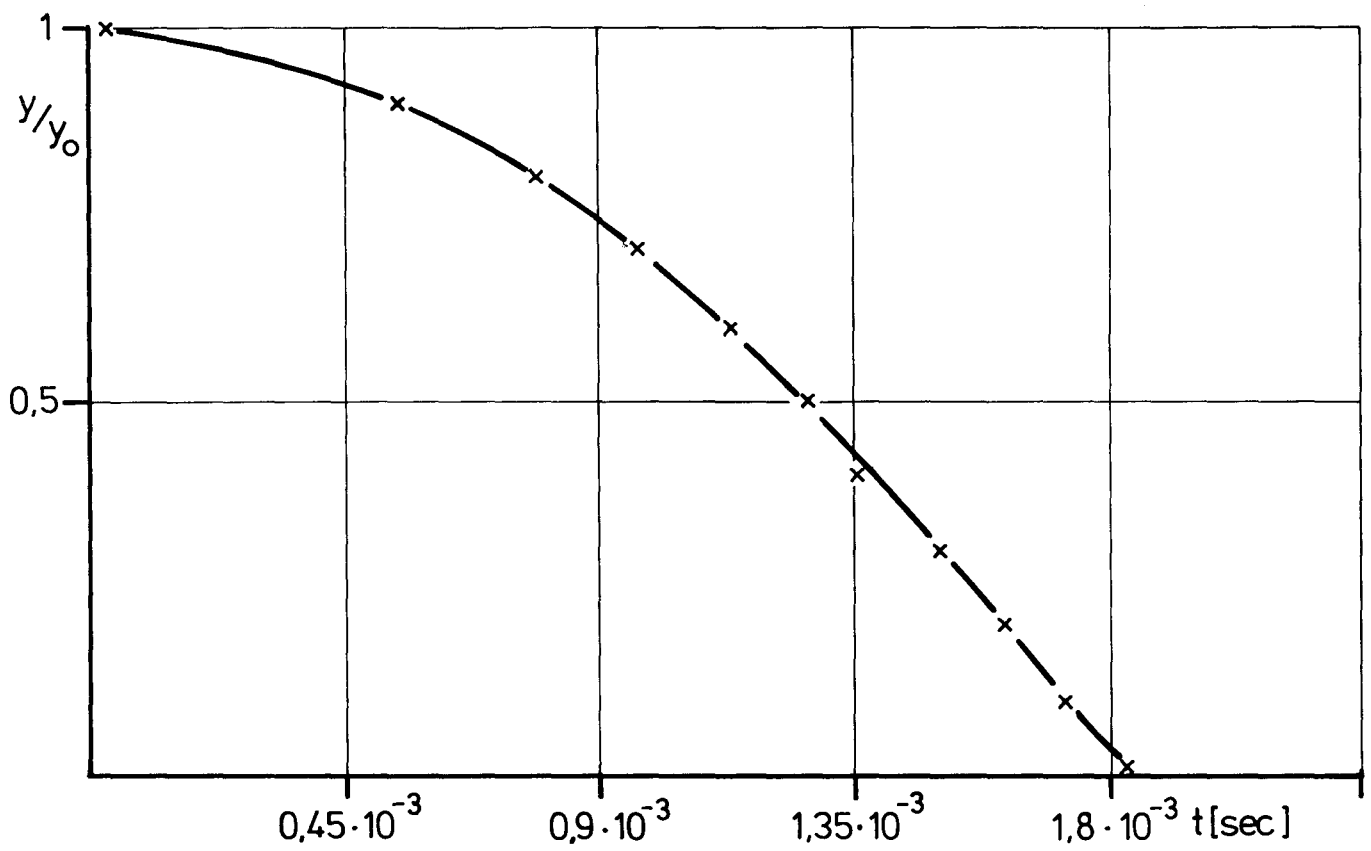
Ebenes Cluster



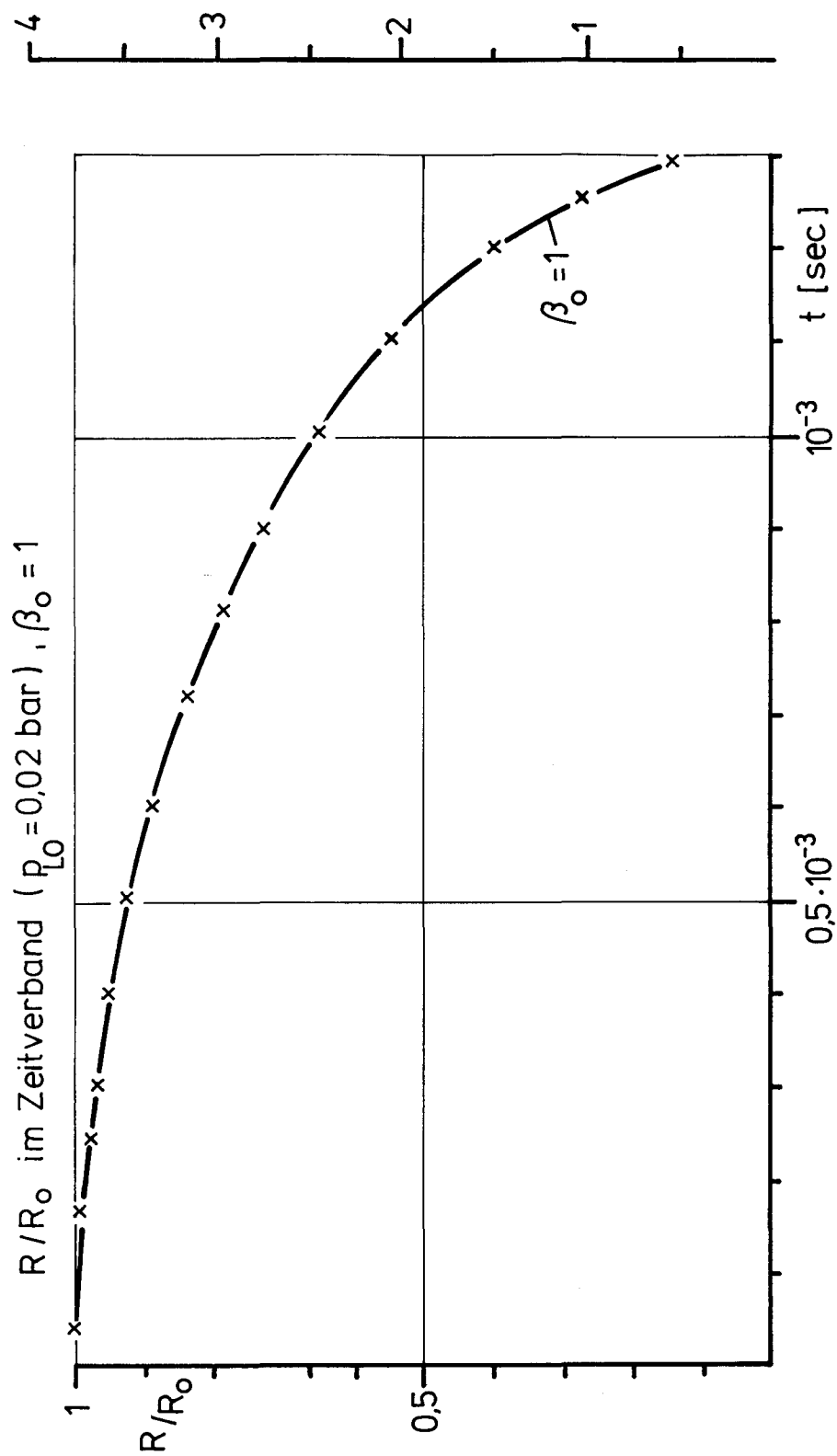
Ebenes Cluster

$$\beta_o = 1, \quad p_o - p_v = 0,5 \text{ bar}, \quad p_{Lo} = 0,01 \text{ bar}$$

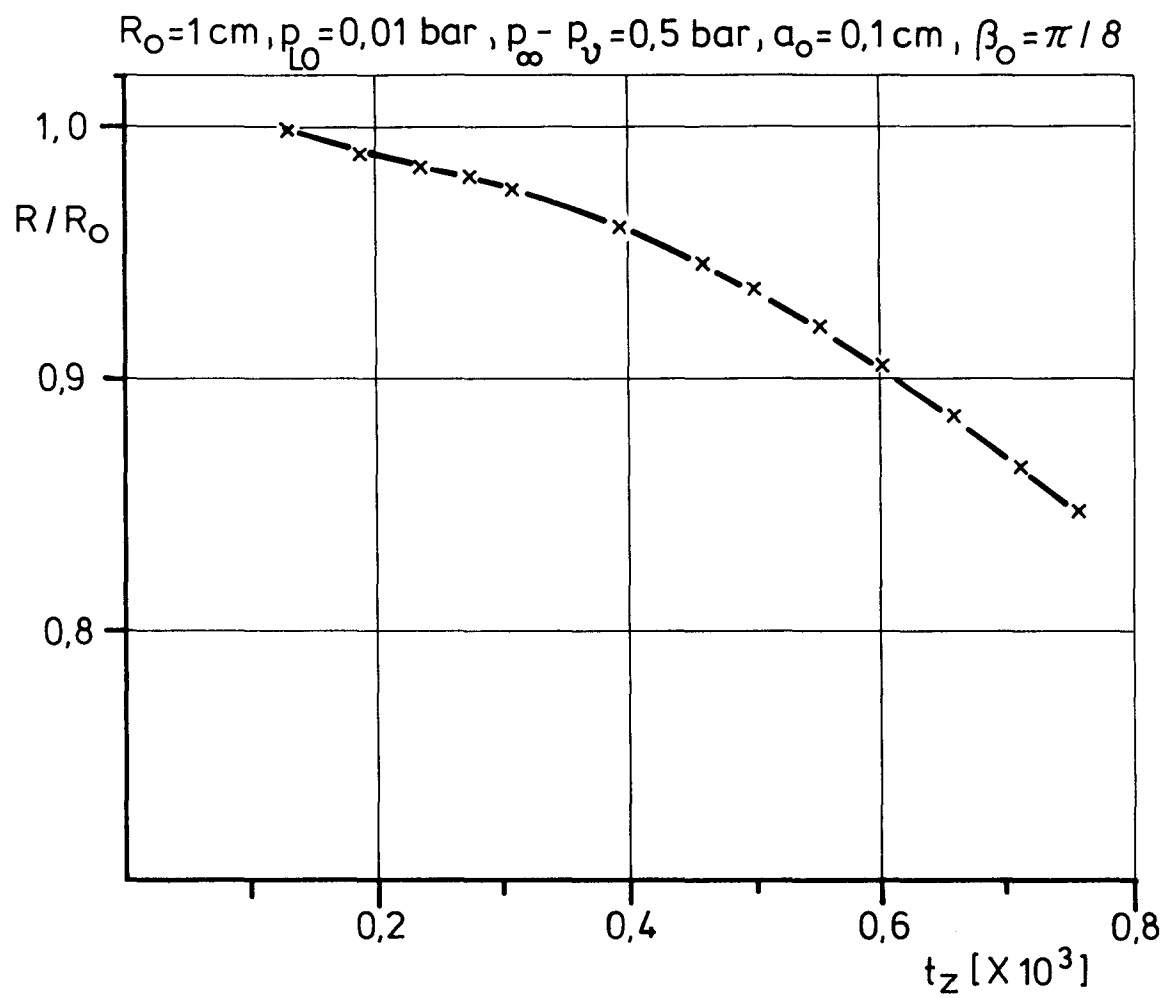
$$y_o = 0,1 \text{ cm}, \quad A = 10 \text{ cm}$$



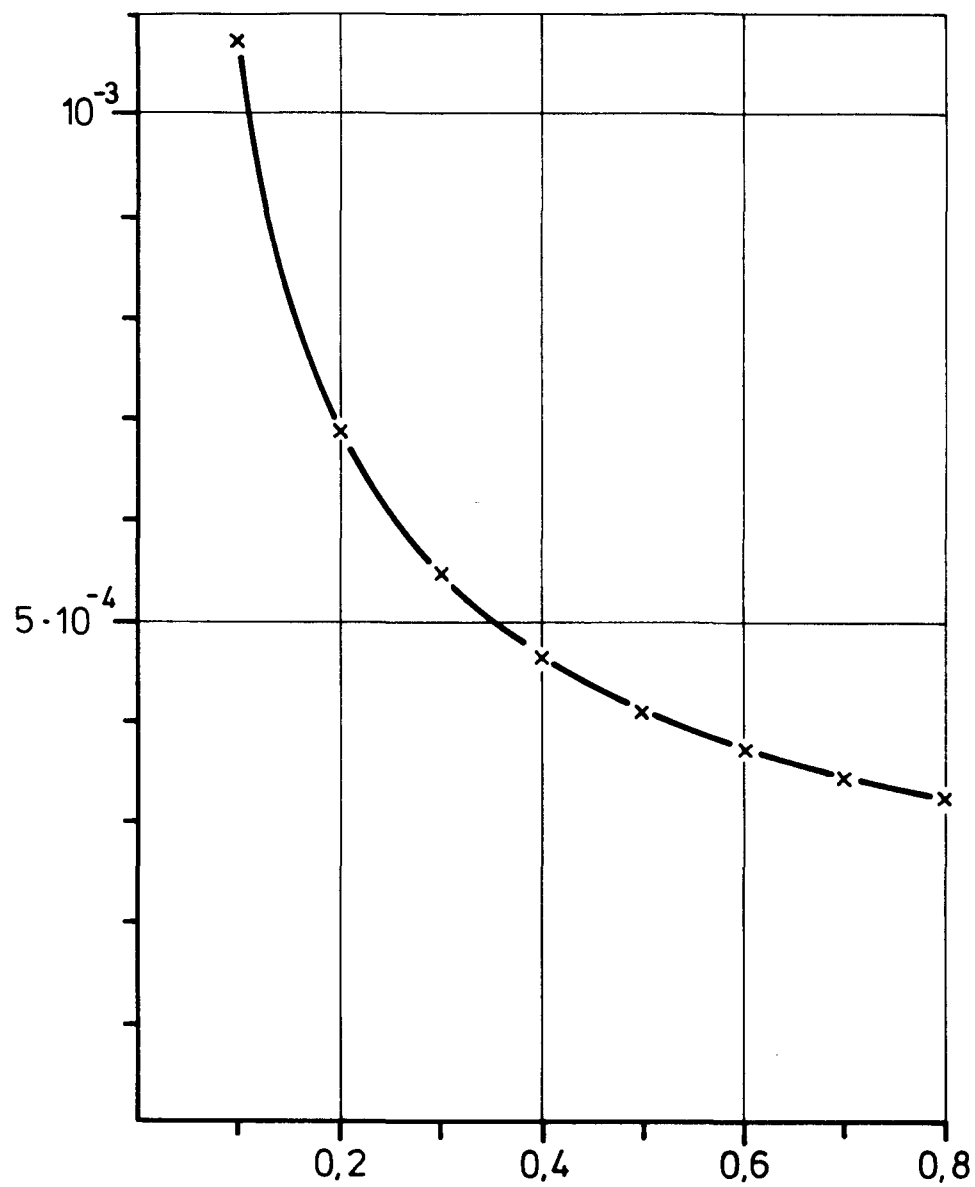
Ebenes Cluster



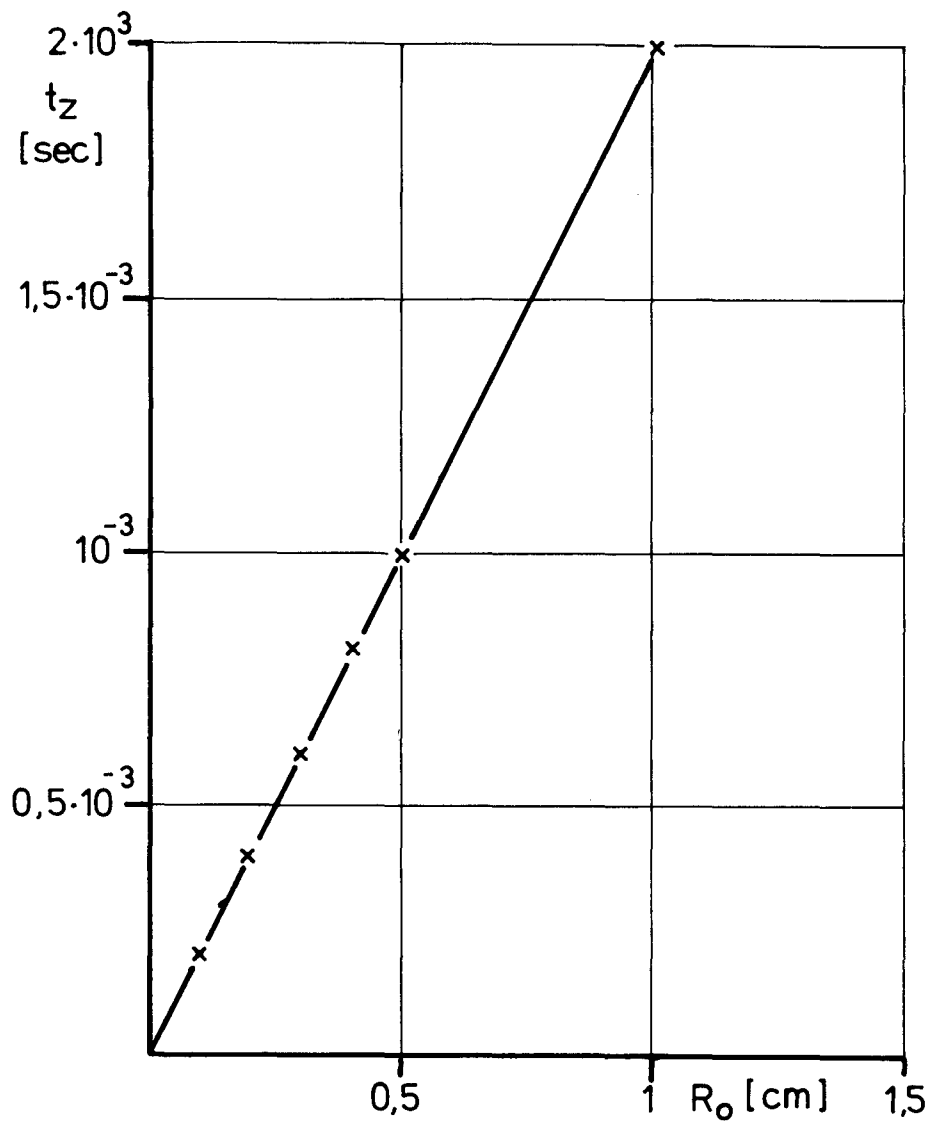
Kugelsymmetrisches Cluster $\beta_0 = 1$, $p_\infty - p_v = 0,5 \text{ bar}$



Kugelsymmetrisches Cluster



Ohne Driftberücksichtigung :
 t_z gegen $p_{\infty} - p_v$ bei $p_{L0} = 0,02 \text{ bar}$,
 $R_o = 0,2 \text{ cm}$, $L_o = L = 6 \cdot R_o$

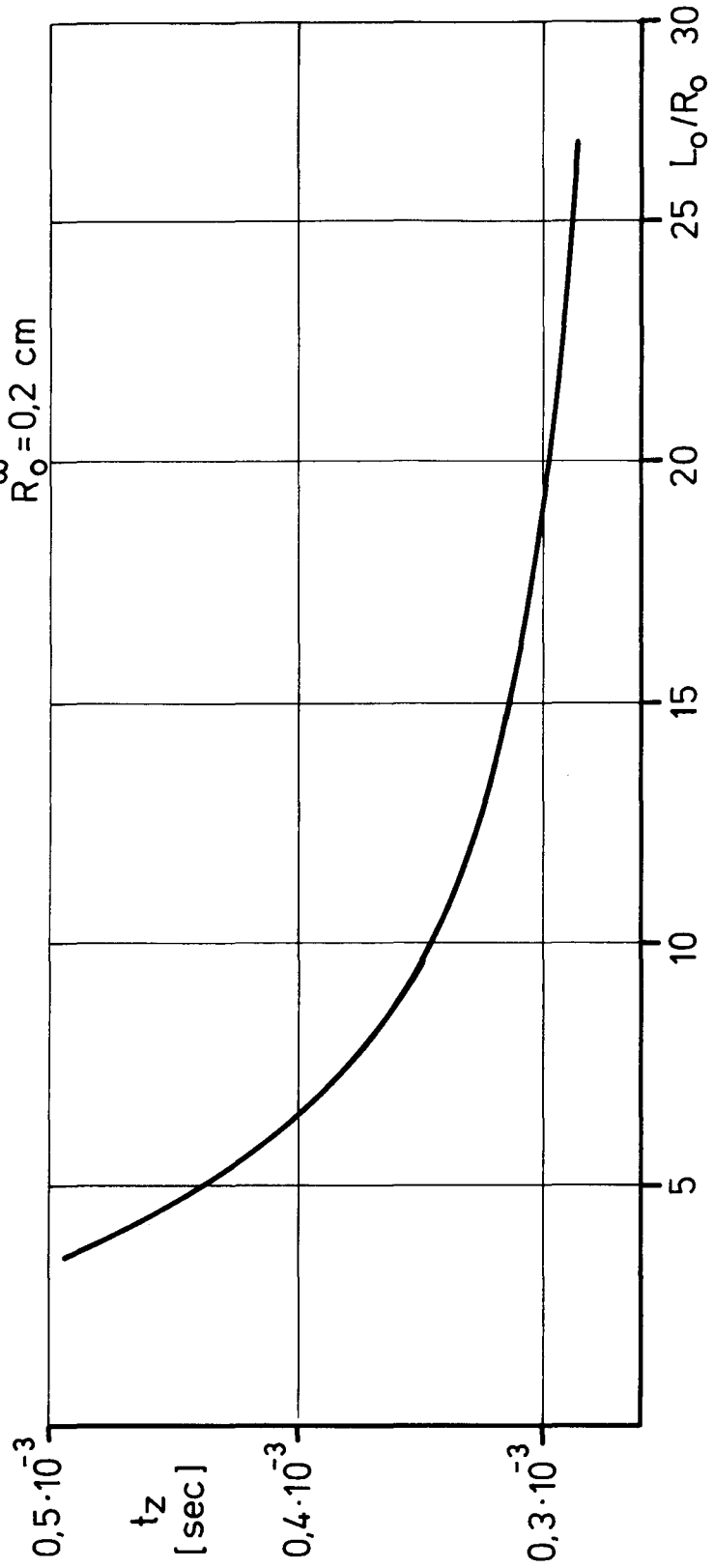


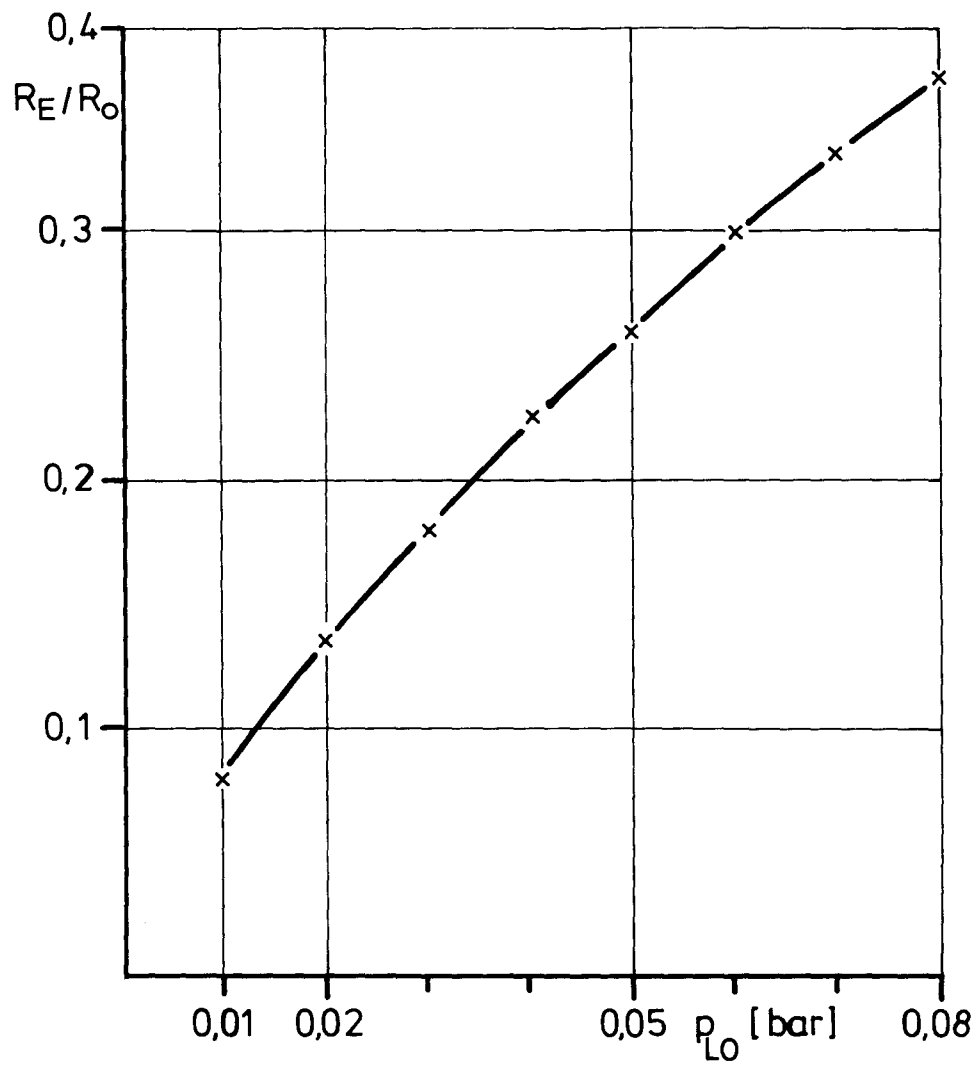
$p_{\infty} - p_v = 0,5 \text{ bar}$, t_z gegen R_o , $p_{LO} = 0,02 \text{ bar}$
 $L_o = 6 \cdot R_o$ ohne Drift ,
 einfache Blase : $R_o = 1 \text{ cm}$, $t_z = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$

t_z gegen L_o/R_o , ohne Berücksichtigung der Drift, $p_{L_o} = 0,02 \text{ bar}$

$p_{\infty} = 0,5 \text{ bar}$

$R_o = 0,2 \text{ cm}$

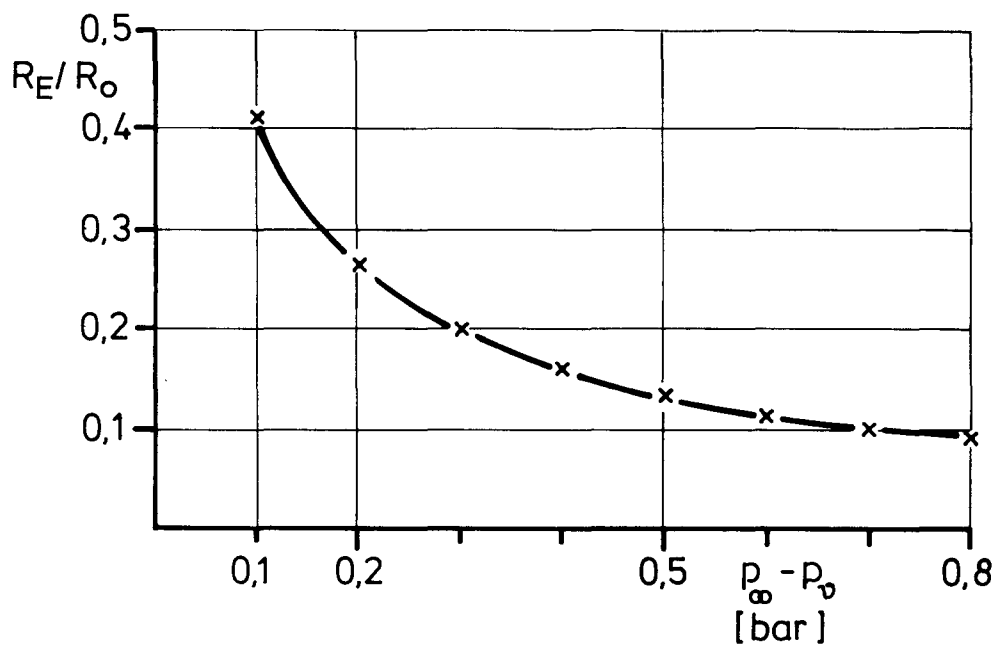




Ohne Drift, R_E/R_O gegen p_{LO} , $p_\infty - p_v = 0,5$ bar,

$R_O = 0,2$ cm, $L_O = 6 \cdot R_O$,

vereinfachte Rechnung: $A \approx L_O^2$



$R_0 = 0,2 \text{ cm} , L_0 = 6 R_0$
 $p_{L0} = 0,02 \text{ bar}$

Extremalradius ohne Drift