

170 | September 1966

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Wieghardt

Kompressibilitätseffekte in Wasser mit freiem Luftgehalt

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FUER SCHIFFBAU DER UNIVERSITAET HAMBURG

Bericht Nr. 170

Kompressibilitätseffekte in Wasser mit freiem Luftgehalt

von

K. Wieghardt

Hamburg, im September 1966

1. Einleitung:

Reines Wasser kann als inkompressibel angesehen werden, da es z.B. bei Atmosphärendruck eine recht große Schallgeschwindigkeit a von rd. 1400 m/s hat. Das Seewasser, in dem sich Schiffe bewegen, enthält jedoch zumindest an der Oberfläche viele kleine Luftblasen, wodurch es wesentlich kompressibler wird. Bei Atmosphärendruck verringert nämlich ein freier Luftgehalt des Wassers von nur 1 0/o Volumenanteil (bzw. 5 0/o) die Schallgeschwindigkeit auf 102 m/s (bzw. 47 m/s); sie ist also sogar kleiner als in Luft allein. Daß in solchem Wasser, vor allem bei niedrigem statischen Druck, sogar Verdichtungsstöße auftreten können, hat J. Ackeret [1] bereits 1930 gezeigt. Die Grundgleichungen für Wasser-Luft-Gemische hat dann G. Heinrich 1942 [2] thermodynamisch genauer aufgestellt; sie sind aber anscheinend etwas in Vergessenheit geraten und sollen deshalb hier ausführlicher nochmals abgeleitet werden. Aus ihnen erhält man dann eine Art Karikatur der gewöhnlichen Gasdynamik; gewisse Effekte sind - zumindest für den Tragflügelantrieb und Propellerschub - nicht vernachlässigbar.

Es wird hier nicht die im Wasser gelöste Luft berücksichtigt, sondern nur die freien Luftbläschen, die nicht mit dem Wasser reagieren. Gemische von Wasser und Dampfblasen mit nicht-isentropen Uebergängen von einer Phase zur anderen werden im Buch von L. D. Landau und E. M. Lifshitz [3 S. 248] kurz behandelt.

2. Die Grundgleichungen:

Es werde ein nichtlösliches Gemisch von Wasser und Luft betrachtet, das in einem Volumenelement $V = V_W + V_L$ die Masse $M = M_W + M_L$ enthält. Das Massenverhältnis von Luft zu Wasser

$$\mu = M_L/M_W = \text{const.} \quad (1)$$

werde für das jeweilige Gemisch überall in der Strömung als konstant angesehen, d.h. die Luftblasen sollen keine Eigenbewegung gegen das Wasser ausführen. Verglichen mit den Strömungsabmessungen sollen die Bläschen so klein sein, daß das Gemisch als Kontinuum dargestellt werden kann. Das Wasser sei praktisch inkompressibel, so daß

$$\rho_W = M_W/V_W = \text{const.} \quad (2)$$

Die Luftdichte $\rho_L = M_L/V_L$ ist dagegen veränderlich, insbesondere druckabhängig nach der Gasgleichung

$$\rho_L = p/RT, \text{ mit } R = 289 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{grd} = \text{Gaskonstante}, \quad (3)$$

T = absolute Temperatur, p = statischer Druck. Veränderlich ist daher auch das Volumenverhältnis

$$\alpha = V_L/V_W = \rho_W/\rho_L. \quad (4)$$

Für die Dichte des Gemischs ρ gilt mit diesen Bezeichnungen

$$\rho = \frac{M_W + M_L}{V_W + V_L} = \frac{1 + \mu}{(1/\rho_W) + (\mu/\rho_L)} = \frac{1 + \mu}{1 + \alpha} \rho_W, \text{ oder} \quad (5)$$

$$\alpha = \mu \rho_W/\rho_L = \frac{1 + \mu}{\rho/\rho_W} - 1. \quad (6)$$

Die innere Energie e des Gemischs je Masseneinheit wird

$$de = \frac{M_W c_W + M c_v}{M_W + M_L} dT = \frac{c_W + \mu c_v}{1 + \mu} dT, \quad (7)$$

mit c_W = spezifische Wärme des Wassers und c_v = spezifische Wärme der Luft bei konstantem Volumen.

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist der Zuwachs der inneren Energie gleich der infinitesimalen Wärmezufuhr δq und der äußeren Kompressionsarbeit (alles je Masseneinheit):

$$de = \delta q - pd(1/\rho). \quad (8)$$

Die vereinfachende Hauptannahme, die nun gemacht wird, ist die, daß alle Wärmeleitung und Reibung (Dissipationswärme) im Gemisch vernachlässigt ist und Wärme weder ab- noch zugeführt wird:

$$\delta q = 0. \quad (9)$$

Eliminiert man nun die Temperatur mit der Gasgleichung (3)

$$T = p\alpha/\mu\rho_W R, \quad dT = \frac{1}{\mu\rho_W R} (pd\alpha + \alpha dp) \quad (10)$$

in Gl. (7), so wird jetzt mit (8) und (9):

$$de = -pd(1/\rho) = pd\rho/\rho^2 = \frac{c_W + \mu c_v}{1 + \mu} \cdot \frac{1}{\mu\rho_W R} (pd\alpha + \alpha dp). \quad (11)$$

Rechnerisch erweist es sich als zweckmäßiger, mit dem Volumenverhältnis α anstatt mit der Gemischdichte ρ weiterzurechnen. Aus ihrem Zusammenhang nach Gl. (6) folgt noch

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = - \frac{(1 + \mu) \rho_W}{\rho^2}. \quad (12)$$

Berücksichtigt man die Beziehung $R = c_p - c_v$, wobei alle Größen entweder in mechanischen oder in kalorischen Einheiten zu schreiben sind, so ergibt sich nach leichter Rechnung aus (11) und (12) die Adiabate oder Isentrope des Gemischs:

$$p\alpha^{1+\varepsilon} = C = \text{const.}, \text{ mit } 1 + \varepsilon = \frac{c_W + \mu c_p}{c_W + \mu c_v}. \quad (13)$$

Für $\mu \rightarrow \infty$, also für die Luft allein ohne jedes Wasser, wird $1 + \varepsilon = c_p/c_v = \kappa$ (also $\kappa = 0,4$) und nach (5) $\rho = \rho_L$. Für Wasser mit Luftblasen wird jedoch ε sehr klein. Die spezifischen Wärmen von Luft und Wasser sind nämlich

$$\begin{aligned} c_p &= 0,241 \text{ cal/kg grad} \\ c_v &= 0,172 \text{ ''} \\ c_W &= 1 \text{ ''} \end{aligned},$$

somit $1 + \varepsilon = (1 + 0,241 \mu)/(1 + 0,172 \mu)$. Speziell beim Atmosphärendruck $p = 1,033 \cdot 10^4 \text{ kp/m}^2$ wird $\rho_W = 101,9 \text{ kp s}^2/\text{m}^4$ und $\rho_L/\rho_W \approx 1/800$. Für einen Luftvolumengehalt von 1% ($\alpha = 0,01$) wird dann $\mu = 0,01/800 = 1,25 \cdot 10^{-5}$ und $\varepsilon = \frac{c_p - c_v}{c_W} \mu = 8,6 \cdot 10^{-7}$.

Die Schallgeschwindigkeit oder Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Druckstörungen ist allgemein definiert durch $a = \sqrt{dp/d\rho}$. Hier wird also nach Gl. (12) und (13):

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\rho} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \mu} \cdot \frac{p}{\rho_W} \cdot \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha}. \quad (14)$$

Für nicht zu großen Luftgehalt wird angenähert:

$$a \approx \sqrt{\frac{p}{\rho_W} \cdot \frac{1 + \alpha}{\alpha}} \approx \sqrt{\frac{p/\rho_W}{(1 - \rho/\rho_W) \cdot \rho/\rho_W}}. \quad (15)$$

Insbesondere bei Atmosphärendruck erhält man folgende Werte:

α	ρ/ρ_W	a m/s
0,01	0,990	101,7
0,02	0,980	72,6
0,05	0,952	47,3
0,1	0,909	35,0
0,2	0,833	27,0
0,5	0,667	21,4
1	0,5	20,1
2	0,333	21,4

(Für andere Drucke folgt a aus $a \sim \sqrt{p}$).

3. Bernoulli-Gleichung:

Die Kontinuitäts- und Eulergleichung für ein reibungsloses, barotropes Medium mit $\rho = \rho(p)$ lauten bekanntlich

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div } \rho \omega = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} + \text{grad } \frac{\omega^2}{2} - \text{rot } \omega = \text{grad } (U - P), \quad (17)$$

$$\text{mit der Druckfunktion } P(p) = \int \frac{dp}{\rho}. \quad (18)$$

(ω = Geschwindigkeitsvektor, t = Zeit, U = Potential der äußeren Kraft). Da das Medium bereits als reibungslos angenommen wurde, betrachten wir nur drehungsfreie Strömungen mit einem Potential, so daß $\omega = \text{grad } \psi$. Durch räumliche Integration folgt dann aus Gl. (17) die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\delta \psi}{\delta t} + P + \frac{\omega^2}{2} - U = f(t), \text{ mit } \omega = \text{grad } \psi. \quad (19)$$

Die Druckfunktion P ist nun mit der Isentrope nach Gl. (13) zu berechnen. Aus Gl. (13) folgt zunächst

$$dp = -(1 + \varepsilon) C \alpha^{-2-\varepsilon} d\alpha$$

und mit Gl. (5) und (12) wird nach $d\alpha$ integriert:

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{(1 + \varepsilon) C}{(1 + \varepsilon) \rho_W} \left(\frac{\alpha^{-1-\varepsilon}}{1 + \varepsilon} + \frac{\alpha^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (20)$$

Drückt man die Konstante C wieder durch p und α aus, so wird

$$P = \frac{p}{(1 + \varepsilon) \rho_W} \left(1 + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \alpha \right), \text{ mit } \alpha = (C/p)^{1/(1 + \varepsilon)}. \quad (21)$$

Für nicht zu großen Luftgehalt α wird ε sehr klein und es wird in guter Näherung

$$\alpha \approx \frac{1}{p} C^{1/(1+\varepsilon)} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \ln p\right), \quad (22)$$

entsprechend der Reihenentwicklung:

$$x^n = e^{n \ln x} = 1 + n \ln x + \frac{1}{2!} (n \ln x)^2 + \dots$$

Somit wird für $\varepsilon \ll 1$:

$$P \approx \frac{1}{(1+\mu) \rho_W} \left(p + C^{1/(1+\varepsilon)} \ln p + \text{const} \right) \\ \frac{1}{(1+\mu) \rho_W} (p + p \alpha \ln p) + \text{const}. \quad (23)$$

4. Druck im Staupunkt bei Unterschallströmung:

In einer stationären Unterschallströmung ohne äußere Kräfte sei im Unendlichen Parallelströmung U_∞ ; wie groß ist der Druck im Staupunkt eines Körpers? Aus der Bernoulli-Gleichung (19) mit (21) folgt:

$$\frac{U_\infty^2}{2} = \frac{1}{(1+\mu) \rho_W} \left[p_s - p_\infty + \frac{1+\varepsilon}{2} p_\infty \alpha_\infty \left(\frac{p_s}{p_\infty} - \frac{\alpha_s}{\alpha_\infty} - 1 \right) \right] \quad (24)$$

Bezeichnet man mit τ das folgende Druckverhältnis:

$$\tau = (p_s - p_\infty) / p_\infty, \quad (25)$$

so wird der Druckbeiwert im Staupunkt

$$c_p = \frac{p_s - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2 / 2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \frac{2\alpha_\infty}{(1+\alpha_\infty) M_\infty^2} \quad (26)$$

mit der Mach-Zahl

$$M_\infty^2 = U_\infty^2 / a_\infty^2, \quad \text{mit } a_\infty \text{ nach Gl. (14)}. \quad (27)$$

Berücksichtigt man die Isentrope nach Gl. (13), so folgt aus Gl. (24) nach etwas Rechnung

$$c_p = \frac{1 + \alpha_\infty}{1 + \frac{\alpha_\infty}{\pi} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \left[(1 + \pi)^{\varepsilon/(1+\pi)} - 1 \right]}$$

$$\frac{1 + \alpha_\infty}{1 + \frac{\alpha_\infty}{\pi} \ln(1 + \pi)} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 1. \quad (28)$$

Bei gegebenem Luftvolumenverhältnis α_∞ der ungestörten Strömung kann man nun ein π annehmen, c_p aus Gl. (28) berechnen und die zugehörige Machzahl aus Gl. (26). Das Ergebnis in Abb. 1 zeigt, daß die Staudruckerhöhung gegenüber dem inkompressibel berechneten Staudruck recht klein ist, nämlich stets kleiner als α_∞ . Durch den Stau werden zwar die Luftblasen im Wasser zusammengedrückt, die Dichte des Gemischs kann aber dadurch nur noch wenig erhöht werden. Erst bei einem Schaum - etwa mit $\alpha_\infty = 1$ - ist die Abweichung etwa so groß wie in einem Gas.

5. Ausfluß aus einem Kessel:

Aus einem Kessel (Index o), in dem das Medium ruht, werde durch den Ueberdruck p_o gegen den Außendruck p aus einem Rohr mit dem engsten Querschnitt F die Menge $Q = Fqu$ gedrückt. Aus der Bernoulli-Gleichung folgt mit Gl. (23) für $\varepsilon \rightarrow 1$:

$$u^2 = \frac{2p_o}{(1 + \mu)q_W} \left(1 - \frac{p}{p_o} - \alpha_o \ln \frac{p}{p_o} \right). \quad (29)$$

Die örtliche Gemischdichte ergibt sich aus Gl. (5). Bezieht man die Ausflußmenge auf die fiktive Ausflußmenge einer inkompressiblen Flüssigkeit mit der konstanten Dichte $\rho_o = (1 + \mu)q_W / (1 + \alpha_o)$, so wird

$$Q/Q_{\text{ink}} = \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - p/p_o}} \cdot \frac{p/p_o}{p/p_o + \alpha_o} \left(1 - p/p_o - \alpha_o \ln p/p_o \right). \quad (30)$$

Abb. 2 zeigt, daß erst bei kleinem Außendruck merklich weniger Masse ausfließt als bei inkompressibler Strömung, wenn der Luftgehalt des Wassers nur klein ist.

Anschaulicher ist jedoch eine Auftragung der absoluten Ausflußmenge wie in Abb. 3. Darin ist Q auf Kesselgrößen bezogen, nämlich auf die dortige Dichte ρ_o und Schallgeschwindigkeit a_o ; hier wird

$$Q/F\varrho_0 a_0 = \sqrt{2\alpha_0} \cdot \frac{p/p_0}{p/p_0 + \alpha_0} \cdot \sqrt{1 - p/p_0 - \alpha_0 \ln p/p_0}. \quad (31)$$

Abb. 3 zeigt nun, wie für abnehmendem Außendruck $p/p_0 < 1$ zunächst noch $Q \sim \sqrt{1 - p/p_0}$ gilt wie für inkompressible Strömung. Bei kleinerem Gegendruck verringert sich jedoch die Dichte und Q steigt langsamer an. Schließlich ist die größte Ausflußmenge erreicht, wenn $Q/Fa_0\varrho_0 = (p/p_0)_*$. Die Geschwindigkeit berechnet sich dann zu

$$u_* = \sqrt{\frac{2p_0}{(1 + \epsilon)\varrho_W} \cdot \frac{(p/p_0 + \alpha_0)}{\sqrt{2\alpha_0}}} \quad \text{und die Schallgeschwindigkeit}$$

ist dort $a_* = \sqrt{\frac{p_*}{(1 + \epsilon)\varrho_W} \cdot \frac{(1 + \alpha_*)}{\alpha_*}}$. Da für $\epsilon \ll 1$ genähert gilt

$p_*\alpha_* \approx p_0\alpha_0$, ist also $u_* = a_*$ oder $M_* = 1$. Dieses kritische Druckverhältnis, bei dem im engsten Querschnitt F gerade die örtliche Schallgeschwindigkeit erreicht wird, folgt aus

$$1 - \frac{p_*}{p_0} - \alpha_0 \ln \frac{p_*}{p_0} = \frac{(p_*/p_0 + \alpha_0)^2}{2\alpha_0} \quad (32)$$

und kann auch der Abb. 3 entnommen werden. Der nach links abfallende Ast der Kurven könnte nur in einer sich erweiternden Lavaldüse verwirklicht werden mit Uberschallströmung bei immer geringer werdenden Dichte, weshalb wieder weniger Masse je Querschnittseinheit hindurchfließt. Ohne eine solche Lavaldüse fließt dagegen stets die gleiche Maximalmenge aus, sowie $p/p_0 \leq p_*/p_0$; denn im Austrittsquerschnitt ist dann bereits Schallgeschwindigkeit erreicht und eine weitere Gegendruckverringeringung kann stromaufwärts nicht mehr wahrgenommen werden.

Für Luft allein (mit $\kappa = 1,4$) ergibt sich die strichpunktierte Kurve in Abb. 3

$$Q/F\varrho_0 a_0 = (p/p_0)^{1/\kappa} \cdot \frac{2}{\sqrt{\kappa-1}} \left[1 - (p/p_0)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]. \quad (33)$$

Daß unsere Kurve für $\alpha_0 \rightarrow \infty$ davon abweicht, liegt einfach daran, daß die Näherung $\epsilon \ll 1$ für diesen Extremfall mit $\epsilon = \kappa - 1 = 0,4$ (vgl. Gl. (13)) nicht mehr ausreicht.

6. Verdichtungsstoß:

In einem Stromfaden konstanten Querschnitts, z.B. in einem Rohr oder in einer Parallelströmung, lauten bei stationärer Strömung

mung die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie an zwei beliebigen Stellen 1 und 2, wenn man die Gemischdichte ρ bereits durch das Volumenverhältnis α ersetzt, wie folgt

$$\frac{u_1}{1 + \alpha_1} = \frac{u_2}{1 + \alpha_2} \quad (34)$$

$$\frac{(1 + \mu)\rho_W}{1 + \alpha_1} u_1^2 + p_1 = \frac{(1 + \mu)\rho_W}{1 + \alpha_2} u_2^2 + p_2 \quad (35)$$

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{(1 + \mu)\rho_W} \left(1 + \frac{1 + \mu}{\varepsilon} \alpha_1\right) = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{(1 + \mu)\rho_W} \times \left(1 + \frac{1 + \mu}{\varepsilon} \alpha_2\right). \quad (36)$$

Die Bernoulli-Gl. (36) besagt in dieser Form nur, daß die Gesamtenergie je Masseneinheit an den beiden Stellen 1 und 2 gleich ist, die sich zusammensetzt aus der kinetischen Energie $u^2/2$, der Druckenergie $p/\rho = \frac{p(1 + \alpha)}{(1 + \mu)\rho_W}$ und der inneren Energie nach Gl. (11):

$$e = \frac{c_W + \mu c_V}{(1 + \mu)\mu\rho_W(c_p - c_V)} \cdot p\alpha + \text{const} = \frac{p\alpha}{(1 + \mu)\rho_W} + \text{const.} \quad (37)$$

Selbst wenn zwischen den Stellen 1 und 2 irreversible Prozesse wie Reibung und Wärmeleitung stattfinden, wären deren Energieänderungen in der inneren Energie an der Stelle 2 mitenthalten. Freilich würde dann die Entropie zwischen 1 und 2 ansteigen, so daß nicht mehr die Isentrope nach Gl. (13) gälte; d.h. $p_1\alpha_1^{1+\mu}$ muß nicht unbedingt gleich $p_2\alpha_2^{1+\mu}$ sein. Wir setzen jetzt nur noch voraus, daß das Medium an den Stellen 1 und 2 selbst im thermodynamischen Gleichgewichtszustand ist.

Die drei Gleichungen (34) bis (36) bestimmen nun u_2 , p_2 und α_2 , wenn der Anströmzustand u_1 , p_1 und α_1 gegeben ist. Außer der trivialen Lösung $u_2 = u_1$, $p_2 = p_1$ und $\alpha_2 = \alpha_1$ gibt es noch eine zweite, da zwei Gleichungen u quadratisch enthalten. Eliminiert man p_2 aus Impuls- und Energiesatz, dann u_2 mit der Kontinuitätsgleichung, so wird schließlich mit $M = u/a$

$$\alpha_2/\alpha_1 = \frac{\varepsilon + 2/M_1^2}{\varepsilon + 2} \approx 1/M_1^2 \quad (38)$$

$$\rho_2/\rho_1 \approx \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1/M_1^2} \quad (39)$$

$$(\varepsilon + 2/M_1^2)(\varepsilon + 2/M_2^2) = (\varepsilon + 2)^2 \quad \text{oder}$$

$$M_1 M_2 = 1 \quad \text{für} \quad \varepsilon = 1 \quad (40)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + \alpha_1(1/M_1^2 + \varepsilon/2)/(1 + \varepsilon/2)}{1 + \alpha_1} \approx \frac{1 + \alpha_1/M_1^2}{1 + \alpha_1} \quad (41)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon/2} (M_1^2 - 1) M_1^2. \quad (42)$$

Aus Gl. (40) ist sofort abzulesen, daß nur ein spontanes Umschlagen von Ueberschall- zu Unterschallströmung oder umgekehrt möglich ist. Wie in der Gasdynamik ist die zweite Möglichkeit wegen des II. Hauptsatzes auszuschließen, da sie eine Entropieverringerung von 1 nach 2 bedeutete. Nur eine Ueberschallströmung mit $M_1 > 1$ kann also - ohne Zwischenstadien - in eine Unterschallströmung umschlagen mit $M_2 < 1$, wobei vor allem der Druck sprunghaft steigt wie in einem Gas. Abb. 4 zeigt die Veränderungen in einem solchen Verdichtungsstoß; besonders bei kleinem Luftgehalt kann freilich nur der Druck, nicht aber die Dichte, stark ansteigen. Solche Stöße sind vor dem Kopf eines mit Ueberschallgeschwindigkeit Körpers zu erwarten.

Natürlich kann man diese Rechnung erweitern für schräge Stöße, um wie in der Gasdynamik einfache Ueberschallströmungen zusammenzusetzen. Leider ist hier jedoch der Anwendungsbereich - wenigstens bei Wasser mit kleinem Luftgehalt - auf derart kleine Ablenkungswinkel der Stromlinien beschränkt, daß es sich nicht lohnt, hierauf einzugehen.

7. Linearisierte Unterschallströmung:

Ueberschallströmungen in Wasser mit kleinem Luftgehalt sind zwar technisch durchaus möglich, wichtiger bleiben aber Unterschallströmungen, bei denen vor allem interessiert, ob und wann die Kompressibilität merkliche Effekte verursachen kann. Dazu betrachten wir nun stationäre Potentialströmungen, für die die bekannte gasdynamische Gleichung gilt. Man erhält sie aus Kontinuitäts- und Eulergleichung (16) und (17) und der Definition der (vom Ort abhän-

gigen) Schallgeschwindigkeit $a^2 = dp/d\rho$ nach Gl. (14):

$$\begin{aligned} \psi_{xx}^{\prime} (1 - u^2/a^2) + \psi_{yy}^{\prime} (1 - v^2/a^2) + \psi_{zz}^{\prime} (1 - w^2/a^2) \\ - \frac{2uv}{a^2} \psi_{xy}^{\prime} - \frac{2vw}{a^2} \psi_{yz}^{\prime} - \frac{2uw}{a^2} \psi_{xz}^{\prime} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Wenn alle Geschwindigkeitskomponenten u, v, w klein gegen a sind, folgt daraus die lineare Laplace-Gleichung für das Potential. Näherungsweise läßt sich diese Gleichung aber auch noch linearisieren, wenn eine Parallelströmung U nur wenig gestört wird, etwa durch einen schlanken Körper unter ebenfalls nur kleinem Anstellwinkel, Speziell für ebene Strömung seien u_s und v_s dessen Störgeschwindigkeiten, so daß jetzt $u_x = u = U + u_s$, $u_y = v = w_s$ und $u_s, v_s \ll U$. Dann bleibt von Gl. (43) in erster Näherung nur übrig:

$$\psi_{xx}^{\prime} (1 - M_{\infty}^2) + \psi_{yy}^{\prime} = 0, \text{ mit } M_{\infty} = U/a_{\infty}. \quad (44)$$

Solange nämlich M_{∞}^2 nicht nahe bei 1 liegt, kann man die Änderung von M^2 in Körperrnähe gegenüber dem M_{∞}^2 weit vor oder hinter dem Körper vernachlässigen, da nur kleine Druckstörungen und somit auch kleine Änderungen der Schallgeschwindigkeit vorkommen sollen.

Die Bernoulli-Gleichung und die Isentrope gelten hier im Unterschall überall, also wird nach Gl. (19) und (23) für $\mu = 1$:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p_{\infty} + p_{\infty} \alpha_{\infty} \ln p_{\infty}}{(1 + \mu) \rho_W} = \frac{(U + u_s)^2 + v_s^2}{2} - \frac{p + p \alpha \ln p}{(1 + \mu) \rho_W}. \quad (45)$$

Mit $p \alpha / p_{\infty} \alpha_{\infty} = (1 + \epsilon \ln \alpha_{\infty} / \alpha) \approx 1$ nach Gl. (13) und $\rho_{\infty} = (1 + \mu) \rho_W / (1 + \alpha_{\infty})$ nach Gl. (5) wird für schwache Druckstörungen wie in der Gasdynamik $\ln p/p_{\infty} \approx 1 + (p - p_{\infty})/p_{\infty}$ und somit

$$- \rho_{\infty} U u_s \approx p - p_{\infty}; \quad (46)$$

der Druckbeiwert c_p wird einfach

$$c_p \equiv \frac{p - p_{\infty}}{\rho_{\infty} U^2/2} \approx - 2 \frac{u_s}{U}. \quad (47)$$

Wie L. Prandtl (1922) und H.B. Glauert (1928) unabhängig von einander bemerkten, läßt sich die Gl. (44) zurückführen auf die

Potentialgleichung inkompressibler, reibungsloser Medien $\Delta\phi = 0$ durch die Koordinatentransformation

$$\xi = x, \quad \eta = \beta y \quad \text{mit} \quad \beta = \sqrt{1 - M_{\infty}^2} < 1. \quad (48)$$

Für die Geschwindigkeiten $U + u_s, v_s$ in der x, y -Ebene und $U + \bar{u}_s, \bar{v}_s$ in der ξ, η -Ebene gilt dabei an entsprechenden Punkten

$$\begin{aligned} U + u_s &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, & U + \bar{u}_s &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} & \text{also} & \quad u_s = \bar{u}_s \\ v_s &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, & \bar{v}_s &= \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial y} & & \quad v_s = \beta \bar{v}_s. \end{aligned} \quad (49)$$

Daher ist die Neigung entsprechender Stromlinien - insbesondere solcher, die Körperkonturen darstellen - in der xy -Ebene um den Faktor $\beta < 1$ kleiner als in der ξ, η -Ebene, da ja auch für die Neigung näherungsweise gilt $v_s/U = \beta \bar{v}_s/U$. Andererseits sind die Störgeschwindigkeiten in Anströmungsrichtung gleich groß: $u_s = \bar{u}_s$ und damit nach Gl. (47) auch die Drucke. Ein Flügelprofil mit dem Dickenverhältnis δ und dem Anstellwinkel α bei $M_{\infty} = 0$ bewirkt also die gleiche Strömung und Kräfte wie ein affines, dünneres Profil mit $\beta \cdot \delta$ und $\beta \cdot \alpha$ bei $M_{\infty} = \sqrt{1 - \beta^2} > 0$. Umgekehrt wächst der Beiwert für den Auftrieb oder den Propellerschub des gleichen Profils mit der Machzahl der Anströmung an wie $1/\beta = 1/\sqrt{1 - M_{\infty}^2} > 1$. In der Gasdynamik ist diese Regel z.B. für Profile von 10% Dicke bis zu $M_{\infty} = 0,8$ bestätigt worden. Daß die Voraussetzung $u_s, v_s < U$ in Staupunktnähe nicht erfüllt wird, ist anscheinend bedeutungslos; wichtig ist jedoch, daß auch noch am Druckminimum des Profils die örtliche Machzahl kleiner als 1 bleibt und kein lokales Uberschallgebiet entsteht.

Der Auftrieb eines Tragflügels oder der Schub eines Propellers in lufthaltigem Wasser bezogen auf die Kraft desselben Körpers in luftfreiem Wasser wird somit für $M < 1$

$$K/K_{\text{ink}} = \frac{\rho/\rho_w}{\sqrt{1 - M^2}} = \frac{1}{(1 + \alpha)\sqrt{1 - \rho_w U^2 \alpha/p(1 + \alpha)^2}} \quad (50)$$

und für $M \ll 1$ und $\alpha \ll 1$:

$$K/K_{\text{ink}} = 1 + \left(\frac{U^2 \rho_w}{2p} - 1\right)\alpha + \left[1 - 3\frac{U^2 \rho_w}{2p} + 3\left(\frac{U^2 \rho_w}{2p}\right)^2\right]\alpha^2 + \dots \quad (51)$$

Nach Abb. 5 ist bei kleineren Geschwindigkeiten U zunächst $K < K_{\text{ink}}$, da die Luftblasen die Wasserdichte verringern; bei großen Geschwindigkeiten überwiegt jedoch der Kompressibilitäts-einfluß und es wird $K \sim K_{\text{ink}}$:

8. Schrifttum:

- 1 J. Ackeret: Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1, 1930, S. 1 und S. 63.
- 2 G. Heinrich: ZAMM 22, 1942, S. 117.
- 3 L. D. Landau und E. M. Lifschitz, Fluid Mechanics, Pergamon Press, London 1959, S. 248.

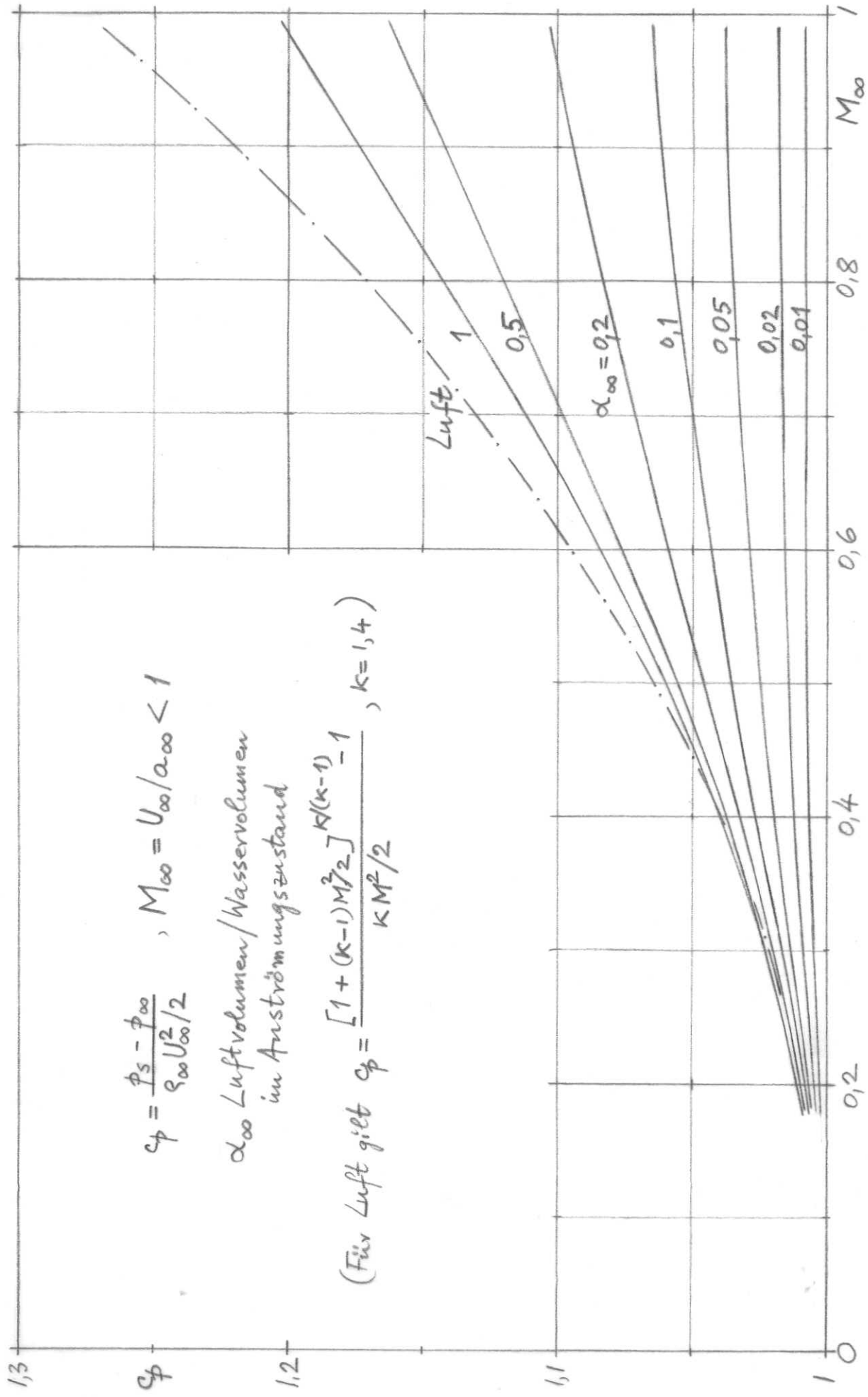


Abb.1 Druckbeiwert im Staupunkt für Wasser-Luft-Gemische.

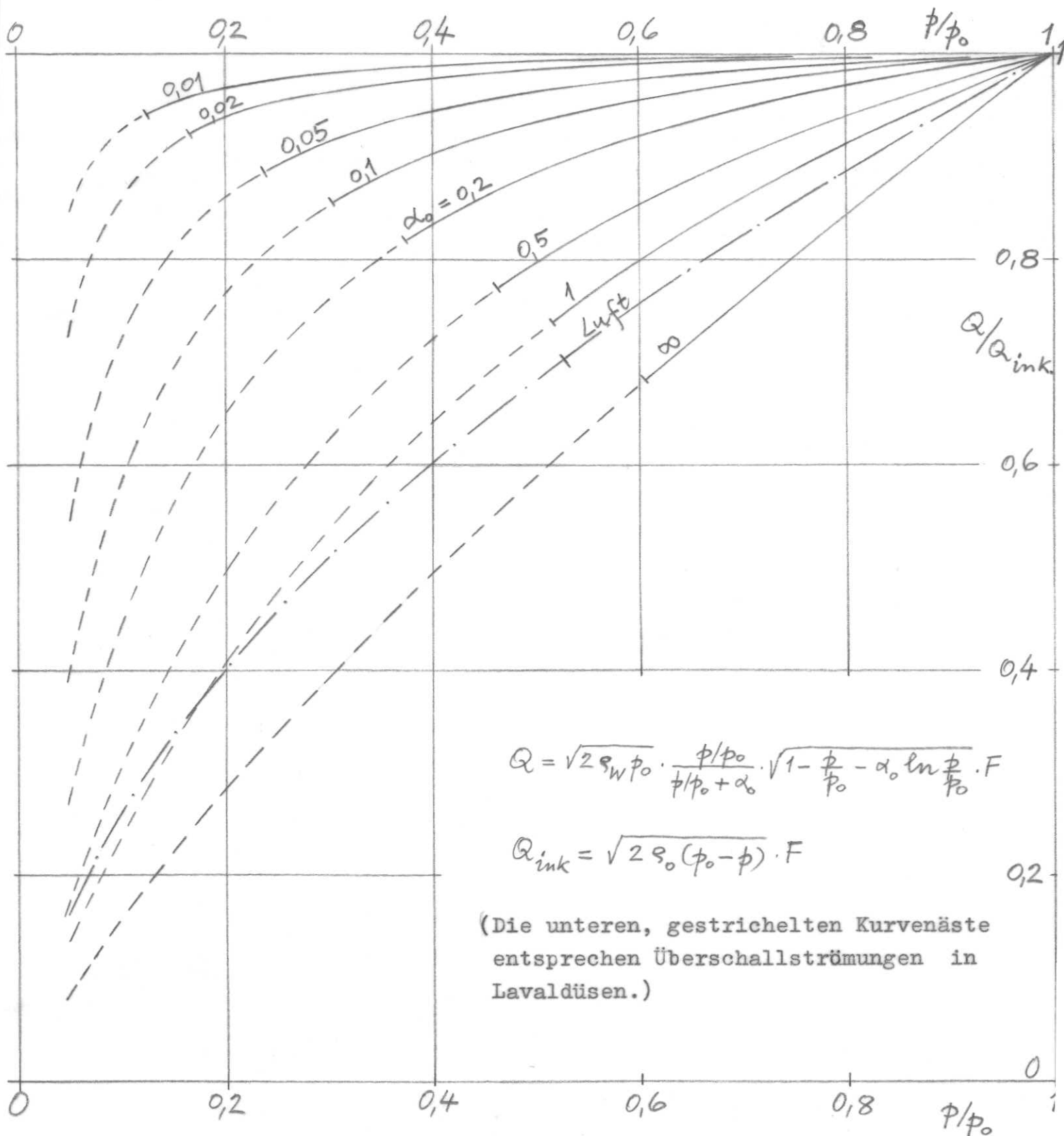


Abb.2. Ausflußmenge Q eines Wasser-Luft-Gemischs aus einem Kessel bezogen auf die fiktive Ausflußmenge Q_{ink} einer inkompressiblen Flüssigkeit. (p_0, ρ_0 und α_0 : Druck, Dichte und Luft-/Wasservol. im Kessel; p Außendruck)

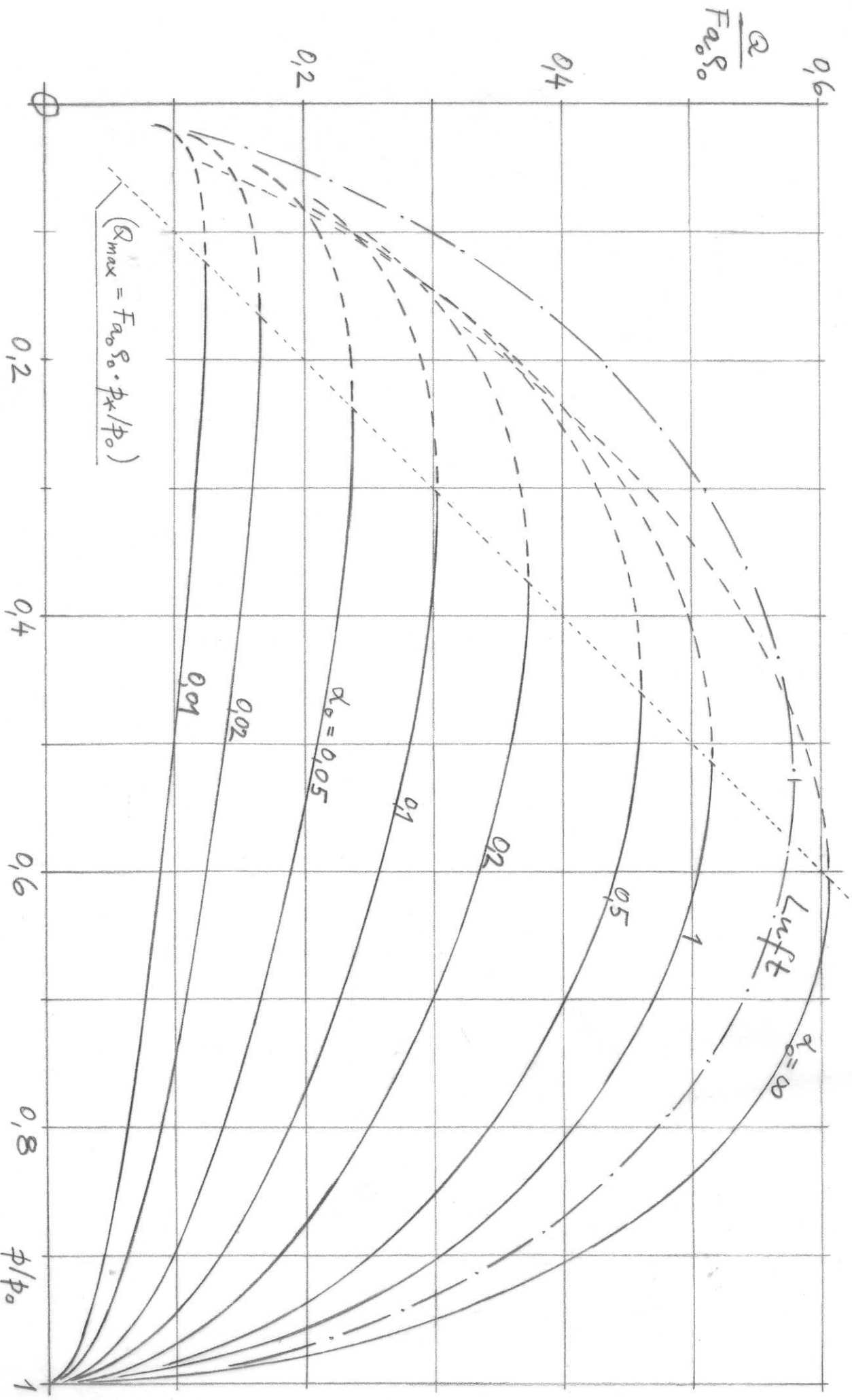


Abb. 3. Ausfluß eines Wasser-Luft-Gemisches aus einem Kessel (Druck p_0 , Schallgeschwindigkeit a_0 , α_0 = Luft-/Wasservolumen im Kessel, Gegendruck p). Die linken gestrichelten Kurvenäste entsprechen Überschallströmungen in Lavaldüsen.

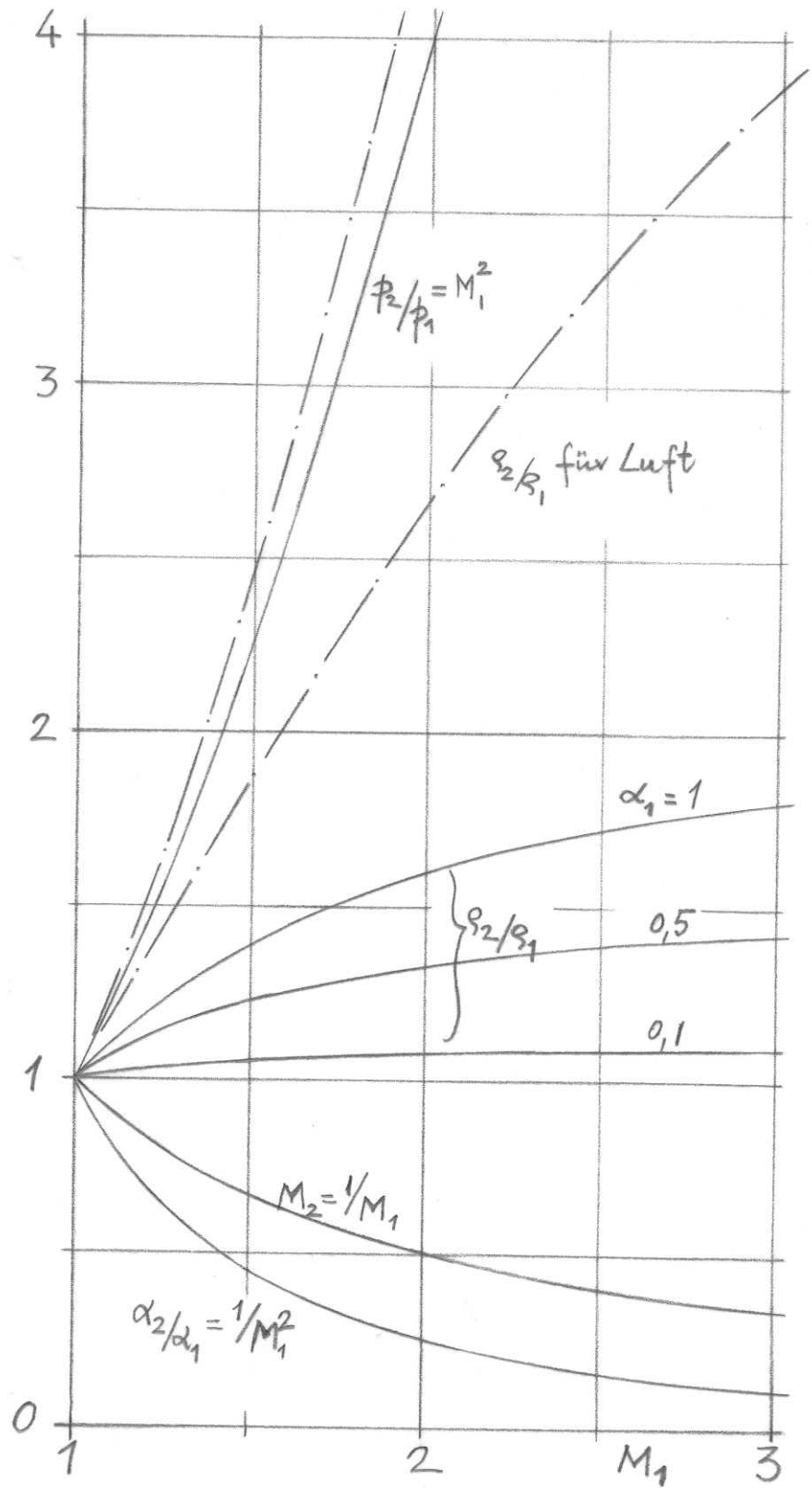


Abb.4. Senkrechter Stoß im Wasser-Luft-Gemisch
 p Druck, ρ Dichte, α Luft-/Wasservolumen
 Index 1: Anströmung mit Überschall $M_1 > 1$
 Index 2: Unterschallströmung nach dem Stoß $M_2 < 1$.

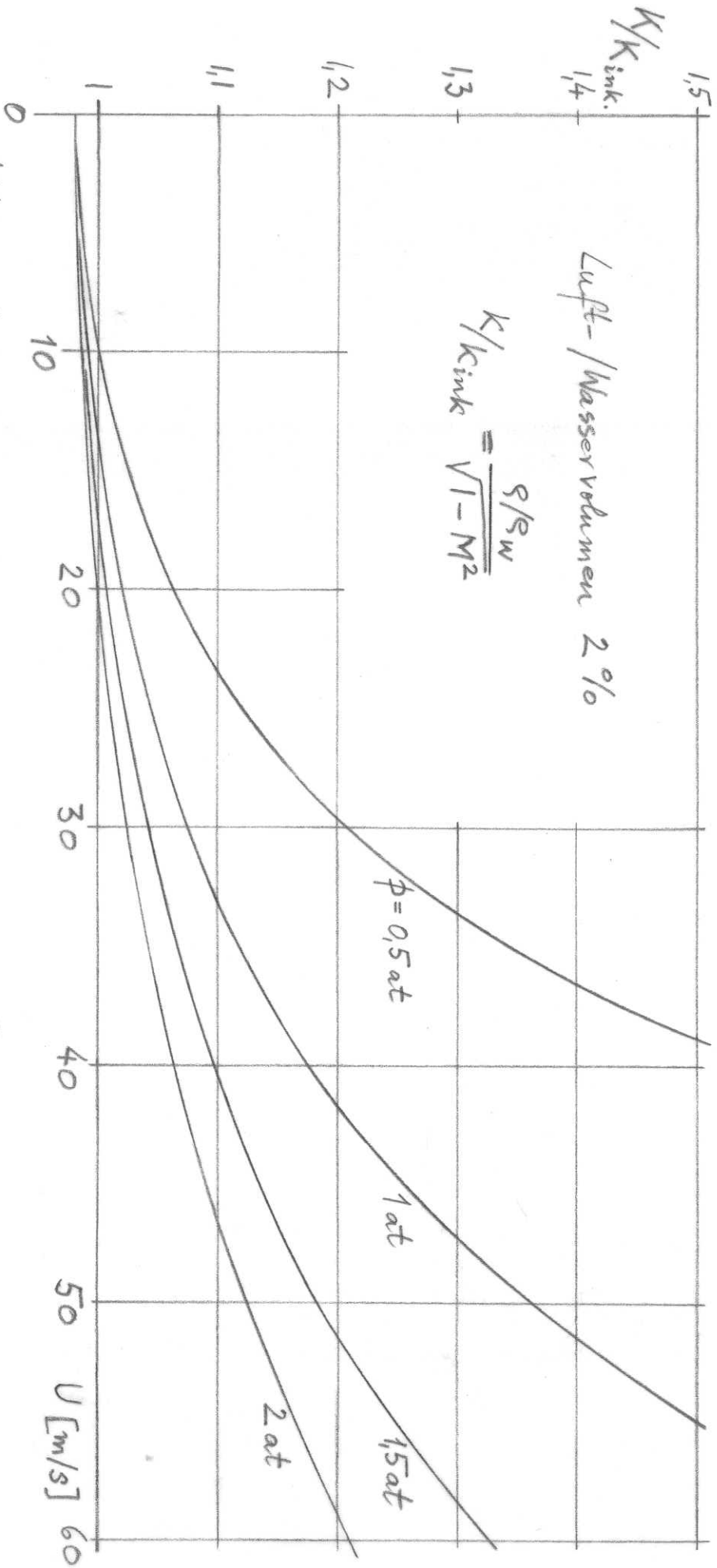


Abb. 5. Auftrieb eines Tragflügels oder Schub eines Propellers in lufthaltigem Wasser mit $\alpha = 0,02$ bezogen auf die Kraft in luftfreiem Wasser abhängig von der Relativgeschwindigkeit bei verschiedenen Drucken.