489 | Mai 1989

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Heinrich Schimmöller

Das Variationsproblem der Elastostatik

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Das Variationsproblem der Elastostatik

Heinrich Schimmöller, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1989

Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 489

Das Variationsproblem der Elastostatik

von

Heinrich Schimmöller

Mai 1989

ISBN 3 - 89220 - 489 - 6

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Ausgangspunkt der Arbeit sind die Differentialgleichungen des linear-elastischen Kontinuums und die daraus folgenden NAVIER'schen Gleichungen. Als Randbedingungen werden allgemeine gemischte Randbedingungen formuliert.

Zunächst werden der Energiesatz der Elastizitätstheorie, die Formänderungsarbeit und das Gesamtpotential abgeleitet.

Der einfache Denkansatz der Variation der Verschiebungen, gleichbedeutend mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, wird eindeutig definiert. Die Anwendung führt auf das Prinzip der virtuellen Arbeiten. Die Identität zwischen dem Prinzip der virtuellen Arbeiten und der Stationarität des Gesamtpotentials Π wird für ein allgemeines elastisches Stoffgesetz nachgewiesen. Durch Einführen eines linear-elastischen Stoffgesetzes folgt die Minimaleigenschaft des Gesamtpotentials und damit das Minimalprinzip der Verschiebungen.

Schließlich wird das dreidimensionale Variationsproblem der Elastostatik formuliert. Die zu diesem Variationsproblem gehörenden EULER-LAGRANGE'schen Differentialgleichungen werden abgeleitet. Sie erweisen sich als identisch mit den NAVIER'schen Gleichungen. Demnach filtert die Lösung des Variationsproblems genau den Satz des Verschiebungsfeldes aus, der den NAVIER'schen Gleichungen und damit auch den Differentialgleichungen des Systems genügt.

Conclusion

This work is based upon the differential equations of the linear-elastic continuum and - as a result thereof - NAVIER's equations. General mixed boundary conditions are formulated.

First of all the theorem of energy of the theory of elasticity, the strain energy and the total potential energy are derived.

The simple statement of the variation of displacements, being identical with the principle of virtual displacements, is defined definitely. The application leads to the principle of virtual works. The identity of the principle of virtual works and the principle of stationary total potential Π is proven for a general elastic stress-strain relation. Through the introduction of a linear-elastic constitutive relation results the minimal quality of the total potential energy and therefore the minimal principle of displacements.

Eventually the three-dimensional variational problem of elasticity is formulated. EULER-LAGRANGE's differential equations, which belong to this variational problem of elasticity, are deduced. They turn out to be identical with NAVIER's equations. Consequently the result of the variational problem filters out exactly the set of the field of displacement, which in turn fulfills the requirements of NAVIER's equations, and therefore also the differential equations of the system.

Abkürzungen / Symbole

x_i	Koordinaten
u_i	Verschiebungen
$\mathring{u}_i$	Verschiebungen auf O_g
ε_{ij}	Dehnungstensor
γ	Schubverformung
σ_{ij}	Spannungstensor
X_i	Volumenkräfte
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
Fi	Einzellasten
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
ν	Querkontraktionszahl
$\mathring{p}_i$	Oberflächenspannung auf O_n
$\mathring{q}_i$	Reaktionsspannung auf O_g
n_i	Normaleneinsvektor
Ink	Differentialoperator
W	Formänderungsenergie
W_s	Spezifische Formänderungsenergie
U	Potential der äußeren Belastungen
Π	Gesamtpotential
V	Volumen
O	Gesamtoberfläche
O_n	Oberfläche für natürliche Randbedingungen
O_g	Oberfläche für geometrische Randbedingungen
I_1, I_2	Invarianten des Spannungstensors

A, B, C	Ortsfunktionen
F	Grundfunktion
ρ	Dichte
t	Zeit
δ	Variationssymbol
w	Durchbiegung

1. Das allgemeine Integrationsproblem

Es wird lineare Kinematik (geometrische Linearität) und lineares Stoffgesetz (physikalische Linearität) für isotrope Körper vorausgesetzt. Die Gleichgewichtsbedingungen (Statik) werden am unverformten Volumenelement (Theorie I. Ordnung) aufgestellt, wobei in der Elastostatik die Trägheitskräfte $\rho\, \partial^2 u_i / \partial t^2$ vernachlässigt werden. Dann lauten die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie /1/:

Kinematik : $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) , \tag{1.a}$$

Statik : $$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 , \tag{1.b}$$

Stoffgesetz : $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\right). \tag{1.c}$$

Eliminiert man in Gl. (1.a) die Verschiebungen u_i , erhält man für die Kinematik die Kompatibilitätsbedingungen. Das Grundgleichungssystem lautet dann :

Kompatibilitätsbedingungen :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 , \tag{2.a}$$

Statik : $$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 , \tag{2.b}$$

Stoffgesetz : $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\right). \tag{2.c}$$

Die 81 Gln. (2.a) reduzieren sich wegen der Symmetrie des Dehnungstensors, man vergleiche (1.a), auf sechs Gln. Diese sind voneinander nicht unabhängig. Es gelten nämlich die BIANCHI-Identitäten /2/. Danach verbleiben drei Kompatibilitätsbedingungen, die man nach RIEDER /3/ in der Form

$$\mathrm{Ink}\,(\varepsilon_{ij}) = 0 \tag{3}$$

zusammenfaßt, mit Ink als Differentialoperator. Die Gln. (2.a) und (3) sind identisch. Gl. (3) sagt aus, daß die Inkompatibilität des Dehnungstensors ε_{ij} verschwindet. Für das Gleichungssystem (1) sind durch die Gln. (1.a) die Kompatibilitätsbedingungen identisch erfüllt.

Die Gln. (1.b) und (2.b) stehen für das Kräftegleichgewicht am Volumenelement im Körperinneren. Das Momentengleichgewicht wird durch die Symmetrie des Spannungstensors abgedeckt.
Das Gleichungssystem (1) ist das allgemeine Integrationsproblem der Elastizitätstheorie unter Einschluß der Verschiebungen u_i.
Das Gleichungssystem (2) ist das allgemeine Integrationsproblem, formuliert in den Dehnungen ε_{ij} und den Spannungen σ_{ij}.

2. Die Randbedingungen

Die Lösungen von (1) oder (2) müssen die Randbedingungen erfüllen. Es wird hier der allgemeine Fall gemischter Randbedingungen betrachtet. Dann sind für ein Teilgebiet (Teilmenge) O_g der Gesamtoberfläche O die Verschiebungen $\overset{\circ}{u}_i$ vorgegeben, und für O_g gelten die sogenannten geometrischen Randbedingungen

$$\overset{\circ}{u}_i\,(x_i)\ ,\ \text{für alle}\ \ x_i \in O_g\,. \tag{4}$$

Für das Teilgebiet O_n der Gesamtoberfläche O sind die Oberflächenspannungen $\overset{\circ}{p}_i$ vorgegeben. Für O_n gelten die sogenannten natürlichen Randbedingungen

$$\overset{\circ}{p}_i(x_i) = n_j(x_i)\,\sigma_{ij}(x_i)\ ,\ \text{für alle}\ \ x_i \in O_n\ , \tag{5}$$

man vergleiche /1/. Dabei ist n_j der aus dem Volumengebiet herauszeigende Normaleneinsvektor des Oberflächenelementes im Angriffspunkt von $\overset{\circ}{p}_i$. Nach Gl. (5) sind Spannungstensor σ_{ij} und Oberflächenspannung $\overset{\circ}{p}_i$ am Oberflächenelement im Kräfgegleichgewicht.

Die Gesamtoberfläche O steht dabei mit den Teilgebieten O_g (Oberflächenbereich, auf dem die geometrischen Randbedingungen vorgeschrieben sind) und den Teilgebieten O_n (Oberflächenbereich, auf dem die natürlichen Randbedingungen vorgeschrieben sind) in der Beziehung

$$O = O_g \cup O_n\,. \tag{6}$$

In der Strukturmechanik werden die geometrischen Randbedingungen bzw. Verschiebungsrandbedingungen (4) auch wesentliche Randbedingungen genannt, die natürlichen Randbedingungen (5) heißen auch Kraftrandbedingungen /6/.

3. Die NAVIER'schen Gleichungen

Ein Weg zur Auflösung des allgemeinen Integrationsproblems (1) besteht darin, Spannungen σ_{ij} und Dehnungen ε_{ij} zu eliminieren. Dann erhält man drei partielle Differentialgleichungen in den Verschiebungen u_i , nämlich:

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right)+X_i=0\,. \tag{7}$$

Diese drei Gln. zur Bestimmung von $u_i(x_i)$ heißen NAVIER'sche Gleichungen. In ausgeschriebener Form lauten die Gln. (7):

$$\left.\begin{aligned}
G\left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right\}+X_1&=0\,,\\
G\left\{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right\}+X_2&=0\,,\\
G\left\{\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right\}+X_3&=0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Eliminiert man im Gleichungssystem (1) Verschiebungen u_i und Dehnungen ε_{ij} , erhält man sechs partielle Differentialgleichungen für die sechs Spannungskomponenten σ_{ij} . Diese Gleichungen heißen BELTRAMI'sche Gleichungen. Auf die Wiedergabe wird hier verzichtet, man vergleiche /4/.

4. Die Formänderungsarbeit des elastischen Körpers

Als Folge des Spannungs- und Verformungszustandes nimmt der elastische Körper Formänderungsenergie oder Formänderungsarbeit W auf. Die im Volumenelement dV gespeicherte Formänderungsenergie beträgt

$$dW=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ij}\,\sigma_{ij}\,dV\,. \tag{9}$$

Die auf das Volumenelement dV entfallende (bezogene) Formänderungsarbeit heißt spezifische Formänderungsarbeit oder spezifische Formänderungsenergie W_s . Aus Gl. (9) folgt

$$W_s = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \quad . \tag{10}$$

Die ausgeschriebene Form von Gl. (10) lautet (Summation über die Indizes i,j):

$$W_s = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_{11}\sigma_{11} + \varepsilon_{22}\sigma_{22} + \varepsilon_{33}\sigma_{33} + 2\left(\varepsilon_{12}\sigma_{12} + \varepsilon_{23}\sigma_{23} + \varepsilon_{13}\sigma_{13}\right)\right\} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_{11}\sigma_{11} + \varepsilon_{22}\sigma_{22} + \varepsilon_{33}\sigma_{33} + \gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{23}\sigma_{23} + \gamma_{13}\sigma_{13} \right\} .$$

Einsetzen des Stoffgesetzes (1.c) in Gl. (10) liefert $W_s = W_s\,(\sigma_{ij})$:

$$W_s\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk}\right)$$

$$= \frac{1+\nu}{2E} \left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk}\right)$$

$$= \frac{1+\nu}{2E} \left(\sigma_{ij}^2 - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk}^2\right) . \tag{12}$$

Die ausgeschriebene Form von Gl. (12) lautet:

$$W_s\left(\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2E} \left\{ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu\left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}\right)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2G} \left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2\right) . \tag{13}$$

Mit der ersten und zweiten Invariante I_1 und I_2 des Spannungstensors σ_{ij} , nämlich

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad \text{und}$$

$$I_2 = -\left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}\right) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad ,$$

man vergleiche z.B. /1/, kann (13) auch in der Form

$$W_S(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2E} \left\{ I_1^2 + 2(1+\nu) I_2 \right\} \tag{14}$$

geschrieben werden.

Leitet man Gl. (12) nach σ_{ij} ab, erhält man den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_S(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1+\nu}{2E} \left(2\sigma_{ij} - \frac{2\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \\ &= \varepsilon_{ij} . \end{aligned} \tag{15}$$

In Worten: Die Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie $W_S(\sigma_{ij})$ nach den Spannungskomponenten σ_{ij} liefert die Dehnungskomponenten ε_{ij} .

Jetzt soll $W_S = W_S(\varepsilon_{ij})$ berechnet werden. Dazu benötigt man das Stoffgesetz in der nach σ_{ij} aufgelösten Form. Aus Gl. (1.c) folgt durch Umkehrung:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right). \tag{16}$$

Einsetzen von (16) in (10) liefert $W_S = W_S(\varepsilon_{ij})$:

$$\begin{aligned} W_S(\varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^2 \right) \\ &= G \left(\varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^2 \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Die ausgeschriebene Form der Gl. (17) lautet:

$$W_S(\varepsilon_{ij}) = G\left\{\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2+2\left(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{13}^2\right)\right\}. \tag{18}$$

Leitet man (17) nach den Komponenten des Dehnungstensors ε_{ij} ab, erhält man den Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_S(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(2\varepsilon_{ij}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\\ &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}\right)\\ &= \sigma_{ij}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

In Worten: Die Ableitung der spezifischen Formänderungsenergie $W_s = W_s\,(\varepsilon_{ij})$ nach den Dehnungskomponenten ε_{ij} liefert die Spannungskomponenten σ_{ij} .

Als Beispiel werden ε_{11} und σ_{11} aus der spezifischen Formänderungsarbeit W_s nach den Gln. (13), (15), (18) und (19) berechnet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_S(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{11}} = \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2E}\left\{2\sigma_{11}-2\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right\}\\ &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_S(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{11}} = \sigma_{11} &= G\left\{2\varepsilon_{11}+\frac{2\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\}\\ &= 2G\left\{\varepsilon_{11}+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right\}.\end{aligned}$$

Die im Körper gespeicherte Formänderungsenergie W beträgt:

$$W = \iiint_V W_S\,dV = \iiint_V W_S(\sigma_{ij})\,dV = \iiint_V W_S(\varepsilon_{ij})\,dV\,. \tag{20}$$

5. GAUSS'scher Integralsatz (Divergenz-Theorem)

Gegeben sei ein Volumengebiet V, das durch die Oberfläche O begrenzt wird. Auf dem Integrationsgebiet seien die skalaren Ortsfunktionen $A(x_i)$, $B(x_i)$ und $C(x_i)$ mit den partiellen Ableitungen $\partial A/\partial x_1$, $\partial B/\partial x_2$ und $\partial C/\partial x_3$ gegeben. Dann lautet der Integralsatz von GAUSS /7/:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial A(x_i)}{\partial x_1} + \frac{\partial B(x_i)}{\partial x_2} + \frac{\partial C(x_i)}{\partial x_3}\right) dV = \iint\limits_O \left(A(x_i)n_1 + B(x_i)n_2 + C(x_i)n_3\right) dO. \tag{21}$$

Der Satz (21) wird durch

$$B(x_i) = C(x_i) = 0 \quad \text{und} \quad A(x_i) = \sigma_{11}(x_i) \cdot u_1(x_i) \tag{22}$$

umgeformt. Einsetzen von (22) in (21) liefert

$$\iiint\limits_V \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dV = \iint\limits_O \sigma_{11} u_1 n_1 \, dO - \iiint\limits_V \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} u_1 \, dV. \tag{23}$$

Für den weiteren Gebrauch wird die Form (23) des GAUSS'schen Integralsatzes noch verallgemeinert. Aus (23) erhält man schließlich die benötigte Form in Indexschreibweise:

$$\iiint\limits_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \iint\limits_O \sigma_{ij} u_i n_j \, dO - \iiint\limits_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i \, dV, \tag{24}$$

mit n_j als Normaleneinsvektor gemäß Abschn. 2.

6. Der Energiesatz

Im folgenden wird die Formänderungsarbeit W, vgl. Abschn. 4, näher untersucht. Es gilt

$$W = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\,dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dV\,,$$

wobei im rechts stehenden Volumenintegral von $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ Gebrauch gemacht wurde. Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes (24) liefert:

$$W = \frac{1}{2}\left\{\iint\limits_O \sigma_{ij}n_j u_i\,dO - \iiint\limits_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}u_i\,dV\right\}\,. \tag{25}$$

Unter Beachtung der im Körperinneren geltenden Gleichgewichtsbedingungen (1.b) erhält man aus (25):

$$W = \frac{1}{2}\left\{\iint\limits_O \sigma_{ij}n_j u_i\,dO + \iiint\limits_V X_i u_i\,dV\right\}\,. \tag{26}$$

Das Oberflächenintegral in (26) geht gemäß Gl. (6) über die Gesamtoberfläche $O = O_g \cup O_n$, wobei auf O_n die Kraftrandbedingungen (5) gelten.
Auf O_g rufen die nach der Randbedingung (4) vorgeschriebenen Verschiebungen $\mathring{u}_i$ Oberflächenreaktionsspannungen, auch Auflagerreaktionen genannt, hervor. Diese werden mit $\mathring{q}_i$ bezeichnet. Die durch die Vorgabe von $\mathring{u}_i$ im Oberflächenbereich O_g hervorgerufenen Reaktionsspannungen $\mathring{q}_i$ müssen natürlich am Oberflächenelement mit σ_{ij} im Kräftegleichgewicht stehen. Daher gilt Gl. (5) auf O_g entsprechend:

$$\mathring{q}_i(x_i) = n_j(x_i)\,\sigma_{ij}(x_i)\,, \quad \text{für alle } x_i \in O_g\,. \tag{27}$$

Unter Beachtung der Randbedingungen (4), (5) und (27) lautet Gl. (26):

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_V \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\,dV = \frac{1}{2}\left\{\iint\limits_{O_n}\mathring{p}_i u_i\,dO + \iint\limits_{O_g}\mathring{q}_i\mathring{u}_i\,dO + \iiint\limits_V X_i u_i\,dV\right\}\,. \tag{28}$$

Der Zusammenhang (28) wird als Energiesatz bezeichnet. Danach ist die gespeicherte Formänderungsenergie gleich der Arbeit der äußeren Lasten. Diese äußere Arbeit besteht nach (28) aus der Arbeit der Oberflächenspannungen $\overset{\circ}{p}_i$, aus der Arbeit der Auflagerreaktionen $\overset{\circ}{q}_i$ und aus der Arbeit der Volumenkräfte X_i . Das Oberflächenintegral über O_g in Gl. (28) kann durch den Ausdruck $F_i u_i$ ersetzt werden, mit F_i als Einzellasten einschließlich aller Auflagerreaktionen.

7. Das Gesamtpotential Π des elastischen Körpers

Ist W die Formänderungsenergie eines Systems und sei U das Potential aller am System angreifenden (eingeprägten) Belastungen, dann gilt für das Gesamtpotential Π des Systems

$$\Pi = W + U \; . \tag{29}$$

Für ein linear elastisches Kontinuum, das an seiner Oberfläche O gemäß den Randbedingungen (4) und (5) beeinflußt wird, gilt

$$W = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \varepsilon_{ij} \, \sigma_{ij} \, dV \qquad \text{und} \tag{30}$$

$$U = - \iint\limits_{O_n} \overset{\circ}{p}_i u_i \, dO - \iint\limits_{O_g} \overset{\circ}{q}_i \overset{\circ}{u}_i \, dO - \iiint\limits_V X_i u_i \, dV \; , \tag{31}$$

wobei U das Potential aller eingeprägten Lasten darstellt. Damit erhält man für das Gesamtpotential Π :

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \, dV - \iint\limits_{O_n} \overset{\circ}{p}_i u_i \, dO - \iint\limits_{O_g} \overset{\circ}{q}_i \overset{\circ}{u}_i \, dO - \iiint\limits_V X_i u_i \, dV \; . \tag{32}$$

In /6/ steht für das Oberflächenintegral über O_g der Ausdruck $F_i u_i$, mit F_i als Einzellasten. Diese umfassen alle äußeren eingeprägten Kräfte und die Reaktionslasten. In /8/ wird das Oberflächenintegral über O_g beim Gesamtpotential nicht aufgeführt.

Das Gesamtpotential Π ist gleich der gesamten oder totalen potentiellen Energie des Systems. Wie noch gezeigt wird, ist Π stationär ($\delta\,\Pi = 0$). Im Hinblick auf diese wesentliche Eigenschaft, die die Grundlage für Finite-Elemente-Berechnungen in kontinuierlichen Systemen darstellt, wird Π auch in Anlehnung an die Variationsrechnung als Funktional bezeichnet.

8. Virtuelle Verschiebungen

Für einen Körper, der auf seiner Oberfläche O durch die allgemeinen gemischten Randbedingungen (4) und (5) belastet ist, wird sich ein aktueller (realer) Verschiebungszustand $u_i(x_i)$ einstellen. Dieser erfüllt die NAVIER'schen Differentialgleichungen (7) bzw. (8) und damit auch die Gleichgewichtsbedingungen (1.b).

Der reale Verschiebungszustand $u_i(x_i)$ soll nunmehr gedanklich durch eine Variation $\delta u_i(x_i)$ verändert werden, wodurch auch die Energiezustände des belasteten elastischen Körpers mitvariiert werden. Derartige Variationen bilden die Grundlage für weitergehende Energiebetrachtungen.

Die Variation δu_i des Verschiebungszustandes u_i kann beliebig vorgenommen werden. Allerdings müssen die nachstehend genannten Forderungen berücksichtigt werden: Eine Variation δu_i sei

> klein gegenüber den realen Verschiebungen u_i,
> eine stetige Funktion der x_i, und
> eine geometrisch verträgliche Verschiebung.

Die letzte Forderung besagt, daß z.B. in einem festen Auflager die Variation der Oberflächenverschiebung im Auflagerpunkt Null sein muß: $\delta \mathring{u}_i = 0$. Andernfalls ist die geometrische Verträglichkeit an der Oberfläche im Auflagerpunkt verletzt.
Allgemein ausgedrückt bedeutet die geometrische Verträglichkeit, daß für das Oberflächenteilgebiet O_g, in dem nach den geometrischen Randbedingungen (4) die Oberflächenverschiebungen $\mathring{u}_i$ vorgeschrieben sind, die Variationen $\delta\mathring{u}_i$ verschwinden müssen. Demnach lautet die Forderung nach geometrischer Verträglichkeit der Variationen $\delta u_i(x_i)$ in Übereinstimmung mit (4) :

$$\delta \mathring{u}_i (x_i) = 0 \quad \text{für alle} \quad x_i \in O_g \,. \tag{33}$$

Die beschriebene Variation δu_i der Verschiebung u_i nennt man auch virtuelle Verschiebung. Virtuelle Verschiebungen δu_i sind gedachte, geometrisch verträgliche und kleine Änderungen des real eintretenden Verschiebungszustandes u_i . Man kann auch sagen, virtuelle Verschiebungen δu_i sind mögliche, zum Schein (für den Zweck, Kenntnisse über die Variation des Energiezustandes zu gewinnen) vollzogene kleine Änderungen des Verschiebungszustandes u_i . In /5/ wird auf den einfachen Denkansatz, der dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen zugrunde liegt, besonders eingegangen.

Abb. 1 zeigt erlaubte und nicht erlaubte virtuelle Verschiebungen am Beispiel eines Balkens auf zwei Stützen.

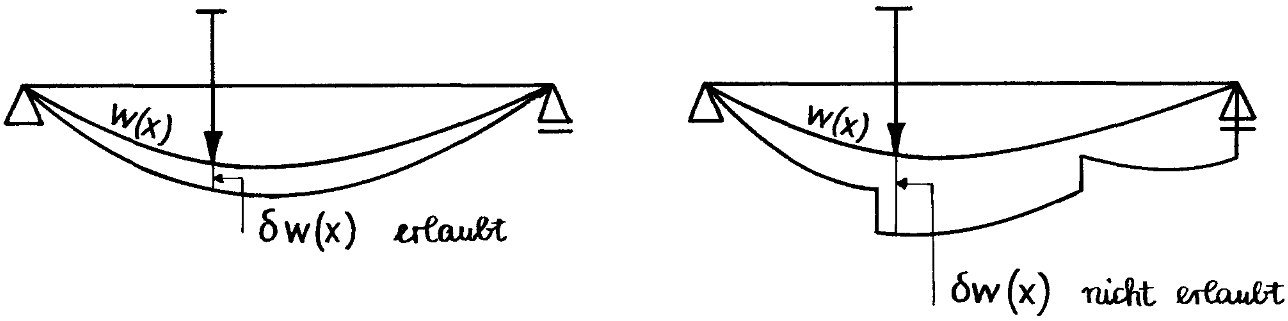

Abb. 1

Virtuelle Verschiebungen δu_i führen zu einer Variation des Dehnungszustandes $\delta \varepsilon_{ij}$. Nach Gl. (1.a) ergibt sich für die Variation des Dehnungstensors

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} \right) ,$$

oder in anderer Schreibweise

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) . \tag{34}$$

9. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten

Die Formänderungsenergie W soll nunmehr durch virtuelle Verschiebungen δu_i des Verschiebungszustandes u_i variiert werden. Dabei gelten die für δu_i im Abschn. 8 festgelegten Regeln. Ausgehend von Gl. (20) liefert die Variation unter Beachtung von (19):

$$\delta W = \iiint\limits_V \delta W_s(\varepsilon_{ij})\, dV = \iiint\limits_V \frac{\partial W_s(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij}\, dV = \iiint\limits_V \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV. \tag{35}$$

Den Zusammenhang

$$\delta W = \iiint\limits_V \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV \tag{36}$$

findet man auch ohne Berücksichtigung eines linear elastischen Stoffgesetzes, denn die am Volumenelement wirksame virtuelle Formänderungsarbeit ist $\sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV$ /9/,/10/. Demnach gilt (36) ganz allgemein auch für nichtlineare elastische Spannungs-Dehnungsbeziehungen.

Da der Dehnungstensor ε_{ij} nach Gl. (1.a) aus dem Verschiebungsfeld u_i folgt, kann in (36) die Variation des Dehnungstensors $\delta\varepsilon_{ij}$ nach Gl. (34) durchgeführt werden. Man erhält unter Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) dV = \iiint\limits_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}\, dV. \tag{37}$$

Man beachte, daß in Gl. (37) die virtuellen Verschiebungen δu_i explizit auftreten. Die sinngemäße Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes in der Form (24) auf Gl. (37) liefert:

$$\delta W = \iint\limits_O \sigma_{ij}\, \delta u_i\, n_j\, dO - \iiint\limits_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i\, dV. \tag{38}$$

Da die Variation δu_i auf einen im Gleichgewicht befindlichen Körper angewandt wird, gelten die Gleichgewichtsbedingungen (1.b). Demnach kann die Ableitung des Spannungstensors im Volumenintegral von Gl. (38) nach (1.b) durch die spezifischen Volumenkräfte X_i ersetzt werden:

$$\delta W = \iint_{O} \sigma_{ij}\, n_j\, \delta u_i\, dO + \iiint_{V} X_i\, \delta u_i\, dV. \tag{39}$$

Das Oberflächenintegral in (39) wird gemäß den allgemeinen Randbedingungen nach Abschn. 2 in die Oberflächenintegrale über O_n und O_g zerlegt. Dabei ist zu beachten, daß nach Gl. (4) auf O_g die Verschiebungen $\mathring{u}_i$ vorgegeben sind. Auf diese Weise erhält man aus (39):

$$\delta W = \iint_{O_n} \sigma_{ij}\, n_j\, \delta u_i\, dO + \iint_{O_g} \sigma_{ij}\, n_j\, \delta \mathring{u}_i\, dO + \iiint_{V} X_i\, \delta u_i\, dV. \tag{40}$$

Wegen der geforderten geometrischen Verträglichkeit der virtuellen Verschiebungen darf $\mathring{u}_i$ auf O_g nicht mitvariiert werden. Bei Beachtung der Bindungen bzw. Lagerungsbedingungen $\mathring{u}_i$ auf O_g gilt nach Gl. (33) $\delta \mathring{u}_i = \sigma$ auf O_g . Damit folgt aus (40):

$$\delta W = \iint_{O_n} \sigma_{ij}\, n_j\, \delta u_i\, dO + \iiint_{V} X_i\, \delta u_i\, dV. \tag{41}$$

Weiterhin gelten für den Oberflächenbereich O_n die natürlichen Randbedingungen (5), nämlich $\mathring{p}_i = \sigma_{ij}\, n_j$. Damit folgt für die Variation von δW schließlich aus (41):

$$\delta W = \iint_{O_n} \mathring{p}_i\, \delta u_i\, dO + \iiint_{V} X_i\, \delta u_i\, dV. \tag{42}$$

In Worten: Die mit einer virtuellen Verschiebung δu_i verbundene virtuelle Formänderungsarbeit ist gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte, also gleich der Arbeit der Belastungen und der Volumenkräfte.
Da die Oberflächenbelastung $\mathring{p}_i$ und die Volumenkräfte X_i nicht mitvariiert werden, kann in Gl. (42) das Variationszeichen vor die Integrale treten. Es folgt dann endgültig aus (42):

$$\delta \left\{ W - \iint_{O_n} \mathring{p}_i u_i \, dO - \iiint_V X_i u_i \, dV \right\} = 0 . \tag{43}$$

Man bezeichnet den Zusammenhang der Gl. (43) als das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

10. Die Stationarität des Gesamtpotentials Π

Es wird jetzt die erste Variation des Gesamtpotentials Π gebildet. Dabei geht man direkt von Gl. (32) für Π aus. Wir schreiben Π aber in der zulässigen Form

$$\Pi = W - \iint_{O_n} \mathring{p}_i u_i \, dO - \iint_{O_g} \mathring{q}_i \mathring{u}_i \, dO - \iiint_V X_i u_i \, dV , \tag{44}$$

wobei die Formänderungsenergie W nicht an ein linear elastisches Stoffgesetz gebunden sein muß. Man beachte dazu die Ausführungen im Abschn. 9. Die Variation von Π nach Gl. (44) liefert :

$$\delta\Pi = \delta W - \iint_{O_n} \mathring{p}_i \, \delta u_i \, dO - \iint_{O_g} \mathring{q}_i \, \delta \mathring{u}_i \, dO - \iiint_V X_i \, \delta u_i \, dV . \tag{45}$$

Da auf O_g die Variationen $\delta \mathring{u}_i$ verschwinden, folgt aus Gl. (45):

$$\delta \Pi = \delta \left\{ W - \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i \, u_i \, dO - \iiint\limits_V X_i \, u_i \, dV \right\} . \tag{46}$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten Gl. (43). Demnach gilt

$$\delta \Pi = 0. \tag{47}$$

In Worten: Die erste Variation des Gesamtpotentials verschwindet bzw. das Gesamtpotential Π ist stationär.
Die einander gleichen Aussagen (43) und (46) wurden auf verschiedenen Wegen hergeleitet. Daher gilt: Das Prinzip der virtuellen Arbeiten und die Stationarität des Gesamtpotentials Π sind identisch. Demnach gelten die folgenden Ausführungen zur Stationarität von Π genau so auch für das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

Zur Ableitung von $\delta\Pi = 0$ wurden folgende Grundgleichungen und Randbedingungen herangezogen, man vergleiche dazu die Abschnitte 1 und 9 :

Kinematik, Gl. (1.a) : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)$,

Statik, Gl. (1.b) : $\sigma_{ij,i} + X_j = 0$,

(4): $\mathring{u}_i (x_i)$ für alle $x_i \in O_g$,

Randbedingungen

(5): $\mathring{p}_i (x_i) = n_j (x_i) \sigma_{ij} (x_i)$ für alle $x_i \in O_n$.

Die Linearität des Stoffgesetzes (1.c) wurde nicht benötigt.

Demnach sind in der Aussage $\delta\Pi = 0$ die Gleichgewichtsbedingungen und die Kinematik (Verträglichkeitsbedingungen) enthalten. $\delta\Pi = 0$ stellt daher eine andere Formulierung der Statik und Kinematik des elastischen Kontinuums für ein beliebiges elastisches Stoffgesetz dar.

Die Gl. (47), $\delta\Pi = 0$, bedeutet: Das sich einstellende, die kinematischen Bedingungen, die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen erfüllende reale Verschiebungsfeld u_i macht das Gesamtpotential des elastischen Körpers stationär.

Für die weiteren Betrachtungen wird ein linear elastisches Kontinuum vorausgesetzt.

11. Die Minimaleigenschaft des Gesamtpotentials Π

$\delta\Pi = 0$ ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum. Falls die zweite Variation $\delta^2\Pi > 0$ ist, handelt es sich bei dem Extremum um ein Minimum. Im folgenden wird $\delta^2\Pi > 0$ für ein lineares elastisches Stoffgesetz bewiesen.

Wir spezialisieren zunächst die virtuelle Formänderungsenergie δW nach Gl. (36) durch Einbringen der linear elastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung (16):

$$\delta W = \iiint\limits_V \sigma_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

$$= \frac{E}{1+\nu} \iiint\limits_V \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk}\right) \delta\varepsilon_{ij}\, dV$$

$$= \frac{E}{1+\nu} \iiint\limits_V \left(\varepsilon_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, \varepsilon_{kk}\, \delta\varepsilon_{kk}\right) dV\,. \tag{48}$$

Es gilt nach den Gln. (29) und (46) :

$$\Pi = W + U \quad \text{und}$$

$$\delta\Pi = \delta W + \delta U$$

$$= \delta\left\{W - \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i\, u_i\, dO - \iiint\limits_V X_i\, u_i\, dV\right\}. \tag{49}$$

Nach den Grundlagen der Variationsrechnung /7/,/9/,/11/ folgt für die gesuchte zweite Variation

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 W + \delta^2 U. \tag{50}$$

Nach Gl. (49) ist das Potential der äußeren Belastungen U linear. Daher verschwindet die zweite Variation δ^2 U . Demnach gilt

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 W, \tag{51}$$

weshalb nur die zweite Variation der Formänderungsenergie zu untersuchen ist. Die zweite Variation von W ergibt sich aus der vorbereiteten Gl. (48) zu :

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \delta^2 W \\ &= \frac{E}{1+\nu} \iiint\limits_V \delta \left(\varepsilon_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}\, \delta\varepsilon_{kk} \right) dV. \end{aligned} \tag{52}$$

Die Variation der Einzelterme liefert wegen der Linearität des Dehnungstensors (1.a):

$$\begin{aligned} \delta\left(\varepsilon_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\right) &= \varepsilon_{ij}\,\delta^2\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} = \left(\delta\varepsilon_{ij}\right)^2 , \\ \delta\left(\varepsilon_{kk}\,\delta\varepsilon_{kk}\right) &= \varepsilon_{kk}\,\delta^2\varepsilon_{kk} + \delta\varepsilon_{kk}\,\delta\varepsilon_{kk} = \left(\delta\varepsilon_{kk}\right)^2 . \end{aligned} \tag{53}$$

Einsetzen von (53) in (52) ergibt für die zweite Variation von Π :

$$\delta^2 \Pi = \frac{E}{1+\nu} \iiint\limits_V \left\{ \left(\delta\varepsilon_{ij}\right)^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\delta\varepsilon_{kk}\right)^2 \right\} dV > 0 \quad \text{für } 0 \leq \nu \leq 0{,}5 . \tag{54}$$

Da die Querkontraktionszahl ν stets in dem geforderten Bereich liegt, ist nach Gl. (54) $\delta^2\Pi > 0$. Damit ist bewiesen, daß das Gesamtpotential Π bei linear elastischen Körpern stets ein Minimum annimmt.

Die Minimaleigenschaft des Gesamtpotentials Π kann damit wie folgt ausgedrückt werden:
Das sich einstellende, die kinematischen Bedingungen, die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen erfüllende reale Verschiebungsfeld u_i macht das Gesamtpotential des linearen elastischen Körpers zum Minimum.

Vergleicht man also das wirklich eintretende System von Verschiebungen u_i mit allen möglichen benachbarten und geometrisch zulässigen Verschiebungen $u_i + \delta u_i$, so zeichnet sich das wirklich eintretende Verschiebungsfeld u_i durch ein Minimum der gesamten potentiellen Energie Π aus.

Demnach ist es möglich, den linear-elastischen Zustand eines Körpers durch die Minimalforderung (47) vollständig zu beschreiben. Mit anderen Worten: In der kompakten Formulierung $\delta\Pi = 0$ ist das Grundgleichungssystem (1) vollständig enthalten.

Da die NAVIER'schen Gln. (7) bzw. (8) aus dem allgemeinen Integrationsproblem (1) entwickelt wurden, beschreibt die Forderung $\delta\Pi = 0$ auch den Zusammenhang, der durch die NAVIER'schen Differentialgleichungen ausgedrückt wird.

12. Das Minimalprinzip der Verschiebungen

Wählt man die Darstellung

$$W = W(\varepsilon_{ij}) = W\left\{(u_{i,j} + u_{j,i})/2\right\} = W(u_i)\ ,$$

dann ist das Gesamtpotential

$$\Pi(u_i) = W(u_i) - \iint_{O_n} \mathring{p}_i u_i \, dO - \iint_{O_g} \mathring{q}_i \mathring{u}_i \, dO - \iiint_V X_i u_i \, dV \tag{55}$$

eine Funktion des Verschiebungsfeldes u_i. Aus diesem Grunde bezeichnet man

$$\delta \Pi (u_i) = 0 \tag{56}$$

auch als das Minimalprinzip der Verschiebungen.

13. Das dreidimensionale Variationsproblem der linearen Elastostatik

Bei der Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeiten wurden die Grundgleichungen für Kinematik (1.a), Statik (1.b) und Stoffgesetz (1.c) sowie die Randbedingungen (4) und (5) herangezogen. Daraus folgte, daß das Prinzip der virtuellen Arbeiten diese grundlegenden Differentialgleichungen enthält. Aus der Identität zwischen dem Prinzip der virtuellen Arbeiten und der Stationarität des Gesamtpotentials wurde gefolgert, daß auch $\delta\Pi = 0$ die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen einschließt.

Es muß aber auch der direkte Weg über das Gesamtpotential Π zum Ziele führen. Deshalb ist noch nachzuweisen, daß das Minimalprinzip der Verschiebungen $\delta\Pi(u_i) = 0$ die Differentialgleichungen des allgemeinen Integrationsproblems (1) vollständig enthält.
Daher wird in diesem Abschnitt das dreidimensionale Variationsproblem der Elastostatik formuliert. Mit Hilfe der Variationsrechnung gelingt damit die direkte Ableitung der NAVIER'schen Differentialgleichungen (7) bzw. (8), wodurch $\delta\Pi(u_i) = 0$ direkt auf das allgemeine Integrationsproblem (1) zurückgeführt ist.

Das Gesamtpotential $\Pi(u_i)$

Die Formänderungsenergie $W(u_i)$ ergibt sich aus Gl. (17) unter Beachtung von Gl. (1.a) :

$$W(u_i) = G \iiint\limits_V \left\{ \frac{1}{4}\left(u_{i,j}^2 + 2\,u_{i,j}\,u_{j,i} + u_{j,i}^2\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\,u_{k,k}^2 \right\} dV . \tag{57}$$

Mit Gl. (57) lautet das Gesamtpotential Π nach Gl. (32) :

$$\Pi(u_i) = \iiint\limits_V \left\{ G \left[\frac{1}{4}\left(u_{i,j}^2 + 2u_{i,j}u_{j,i} + u_{j,i}^2\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\, u_{k,k}^2 \right] - X_i u_i \right\} dV -$$

$$- \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i u_i \, dO - \iint\limits_{O_g} \mathring{q}_i \mathring{u}_i \, dO \,. \tag{58}$$

Gl. (58) wird in der Form

$$\Pi(u_i) = \iiint\limits_V F(u_i, u_{i,j})\, dV - \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i u_i \, dO - \iint\limits_{O_g} \mathring{q}_i \mathring{u}_i \, dO \,, \tag{59}$$

mit $\quad F(u_i, u_{i,j}) = F\left\{u_i(x_i), u_{i,j}(x_i)\right\} \quad$ als Grundfunktion

$$F = G\left\{\frac{1}{4}\left(u_{i,j}^2 + 2u_{i,j}u_{j,i} + u_{j,i}^2\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\, u_{k,k}^2 \right\} - X_i u_i \tag{60}$$

geschrieben. Wie ersichtlich, hängt die Grundfunktion von den drei Funktionen des Verschiebungsfeldes $u_i(x_i)$ und von den neun Verschiebungsableitungen $u_{i,j}(x_i)$ ab. Im Hinblick auf das anstehende Variationsproblem nennt man $\Pi(u_i)$ auch Funktional.

Das Variationsproblem

Wir fordern jetzt das Minimum der potentiellen Gesamtenergie $\Pi(u_i)$ und bilden dazu die erste Variation $\delta\Pi = 0$. Benutzt wird Gl. (59), wobei das Oberflächenintegral über O_g wegen $\delta\mathring{u}_i = 0$ wegfällt :

$$\delta\Pi(u_i) = \delta \iiint\limits_V F(u_i, u_{i,j})\, dV - \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i \, \delta u_i \, dO = 0 \,. \tag{61}$$

In der Variationsrechnung werden Extremwerte für Funktionale gesucht. Die vorliegende Variationsaufgabe besteht nach Gl. (61) darin, das Funktional Π, welches von den drei unbekannten Vektorfunktionen des Verschiebungsfeldes $u_i(x_i)$ und deren neun Ableitungen $u_{i,j}(x_i)$ abhängt, in Abhängigkeit von $u_i(x_i)$ zu minimieren. Die Frage des Variationsproblems (61) lautet demnach: Welcher Satz von drei Funktionen $u_i(x_i)$ macht das Funktional Π zum Minimum ? Dabei ist $\delta\Pi = 0$, also Gl. (61), die notwendige Bedingung für den Extremwert von $\Pi(u_i)$.

Für die weitere Behandlung schreiben wir (61) in der zulässigen Form:

$$\delta\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\,\delta u_i + \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\,\delta u_{i,j}\right) dV - \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i\,\delta u_i\,dO = \sigma\,, \tag{62}$$

mit $\dfrac{\partial}{\partial u_{i,j}} = \dfrac{\partial}{\partial\left(\partial u_i/\partial x_j\right)}$.

Der Term mit der Variation der Verschiebungsableitung in Gl. (62) wird durch den GAUSS'schen Integralsatz (24) ausgedrückt. Setzt man in (24) für $\sigma_{ij} := \partial F/\partial u_{i,j}$ und ergänzt bei u_i das Variationssymbol δ , so erhält man:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\,\delta u_{i,j}\,dV = \iint\limits_O \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\,n_j\,\delta u_i\,dO - \iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\right)\delta u_i\,dV\,. \tag{63}$$

Einsetzen von (63) in (62) ergibt

$$\delta\Pi = \iiint\limits_V \left\{ \frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\right) \right\} \delta u_i \, dV$$
$$+ \iint\limits_O \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j \, \delta u_i \, dO - \iint\limits_{O_n} \mathring{p}_i \, \delta u_i \, dO = \sigma, \tag{64}$$

wobei das Oberflächenintegral über O gemäß Gl. (6) wieder über $O = O_g \cup O_n$ zu berechnen ist. Da auf O_g die Variationen $\delta\mathring{u}_i$ verschwinden, verbleibt nur das Oberflächenintegral über O_n. Die endgültige Form der Bedingung für den Extremwert des Gesamtpotentials lautet damit :

$$\delta\Pi = \iiint\limits_V \left\{ \frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\right) \right\} \delta u_i \, dV$$
$$+ \iint\limits_{O_n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j - \mathring{p}_i \right) \delta u_i \, dO = \sigma. \tag{65}$$

Da dies für beliebige Variationen δu_i gilt, ist die Extremwertbedingung (65) nur dann erfüllt, wenn die Integranden im Volumen- und Oberflächenintegral verschwinden :

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\right) = \sigma \quad \text{in } V, \tag{66}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j - \mathring{p}_i = \sigma \quad \text{auf } O_n. \tag{67}$$

Die drei partiellen Differentialgleichungen (66) sind die EULER-LAGRANGE'schen Gleichungen des vorliegenden dreidimensionalen Variationsproblems.

Die Extremwertbedingung $\delta\Pi = 0$ des Variationsproblems ist damit auf die beiden Gleichungssysteme (66) und (67) zurückgeführt. Die notwendige Bedingung für das Gesamtpotential ist dann erfüllt, wenn (66) und (67) gelten. Demnach muß die Grundfunktion $F(u_i, u_{i,j})$ nach Gl. (60) diese beiden Gleichungssysteme erfüllen.

Im folgenden werden (66) und (67) mit Hilfe von (60) berechnet :

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = - X_i \ ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} = G \left\{ \frac{1}{4} \left(2u_{i,j} + 2u_{i,j} \frac{\partial u_{j,i}}{\partial u_{i,j}} + 2u_{j,i} + 2u_{j,i} \frac{\partial u_{j,i}}{\partial u_{i,j}} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \frac{\partial u_{k,k}}{\partial u_{i,j}} \right\}$$

$$= G \left\{ u_{i,j} + u_{j,i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \, \delta_{ij} \right\} \ , \tag{68}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} \right) = G \left(u_{i,jj} + u_{j,ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,kj} \, \delta_{ij} \right)$$

$$= G \left(u_{i,jj} + u_{j,ji} + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,ji} \right) = G \left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} \right).$$

Mit diesen Berechnungen lauten die zu erfüllenden EULER-LAGRANGE'schen Gleichungen (66) :

$$G \left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} \right) + X_i = 0 \ . \tag{69}$$

Das sind aber genau die NAVIER'schen Gleichungen (7). Demnach filtert das grundlegende Extremalprinzip $\delta\Pi = 0$ genau die drei Verschiebungsfunktionen u_i aus, welche den NAVIER'schen Gleichungen genügen. Bei den NAVIER'schen Gln. (7) handelt es sich um die Gleichgewichtsbedingungen (1.b), ausgedrückt in den Verschiebungen u_i . Sie enthalten die kinematischen Grundgleichungen (1.a) und das Stoffgesetz (1.c). Daher vereinigt das Prinzip vom Minimum der gesamten potentiellen Energie $\delta\Pi = 0$ in sich alle Forderungen, die das Differentialgleichungssystem (1) enthält.

Nachzuweisen ist noch die Gültigkeit der Gln. (67). Es gilt nach Gl. (68), (1.a) und mit dem Stoffgesetz (16):

$$\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} n_j - \mathring{p}_i = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)n_j - \mathring{p}_i = \sigma_{ij} n_j - \mathring{p}_i = 0. \qquad (70)$$

Nach (70) beschreibt die Forderung (67) die natürlichen Randbedingungen (5). Damit ist auch (67) erfüllt.

Es wurde nachgewiesen, daß (66) genau den problemorientierten Differentialgleichungen und (67) genau den Randbedingungen genügt. In solchen Fällen spricht man auch von einem natürlichen Variationsproblem /12/.

14. Schlußbemerkung

Die das elastische Kontinuum beschreibenden Differentialgleichungen (1) wurden unter Erfüllung der geometrischen Randbedingungen und der natürlichen Randbedingungen direkt aus dem Variationsprinzip abgeleitet. Man kann auch kurz sagen: $\delta\Pi = 0$ ist das Variationsproblem zum Grundgleichungssystem (1).

Wendet man das grundlegende Variationsprinzip der Elastostatik direkt an, um Näherungslösungen der Differentialgleichungen für Spannungen und Verschiebungen zu erhalten, so beinhaltet das Prinzip die Erfüllung der das System beschreibenden Differentialgleichungen, ohne daß man diese selbst braucht.

Die Formulierung einer elastostatischen Aufgabe als Variationsproblem ist demnach ein alternativer Weg zur Systembeschreibung.

Bei numerischen Näherungsverfahren, wie z.B. der Methode der Finiten Elemente, spielt die Variationsmethode eine zentrale Rolle. So bildet die Formulierung als Variationsproblem die Grundlage zur Aufstellung der Finite-Elemente-Gleichungen.

Schrifttum

/1/ Schimmöller, H.A.: Vorlesungen über Elastizitätstheorie. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Vorlesungsmanuskript 1989.

/2/ Betten, J.: Elastizitäts- und Plastizitätslehre. Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.

/3/ Rieder, G.: Spannungen und Dehnungen im gestörten elastischen Medium. Zeitschr. f. Naturforschung 11a, 1956, S. 171/173.

/4/ Biezeno, C.B. und R. Grammel: Technische Dynamik, Erster Band. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1953.

/5/ Timoshenko, S.P. u. J.N. Goodier: Theory of Elasticity. Mc Graw-Hill Book Company, 1985.

/6/ Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1986.

/7/ Arfken, G.: Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, Inc., London, 1985.

/8/ Gawehn, W.: Finite-Elemente-Methode. Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1985.

/9/ Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2. Physik-Verlag, Weinheim, 1985.

/10/ Saada, A.S.: Elasticity. Theory and Applications. Pergamon Press Inc., New York, 1974.

/11/ Duschek, A.: Höhere Mathematik, III. Band. Springer-Verlag, Wien, 1953.

/12/ Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente. Carl-Hanser-Verlag, München/Wien, 1977.