

543 | April 1994

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Kai Uwe Graf

Mehrgitterverfahren für die Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichung

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Mehrgitterverfahren für die Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichung

Kai Uwe Graf, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1994

ISBN: 3-89220-543-4

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

**Mehrgitterverfahren für die Lösung der
Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichung**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieurin/Doktor-Ingenieur
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Kai Uwe Graf
aus Schleswig

Hamburg
April 1994

Tag der Disputation: 27.06.1994

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Söding
Prof. Dr.-Ing. M. Peric

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 543

Mehrgitterverfahren für die Lösung der
Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichung

Kai Uwe Graf

Juli 1994

Kurzfassung

In diesem Bericht wird ein Verfahren für die Berechnung viskoser, turbulenter Strömungen vorgestellt. Es basiert auf der diskreten Lösung der zeitgemittelten Navier-Stokes-Gleichung mit Finitendifferenzen-Diskretisierung in einem krummlinigen körpergebundenen Koordinatensystem. Ein Schwerpunkt der Entwicklung war ein Mehrgitteralgorithmus als effektives Lösungsverfahren.

Der hier verfolgte Lösungsansatz läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Die Navier-Stokes-Gleichung wird in einem beliebigen krummlinigen, nichtorthogonalen Koordinatensystem formuliert. Die zu berechnenden Strömungsparameter - Geschwindigkeit, Druck und Turbulenzparameter - werden in einem dreidimensionalen strukturierten Gitter mit einer zentrierten Variablenanordnung diskretisiert. Es werden kartesische Geschwindigkeitskomponenten benutzt. Die in dem krummlinigen Koordinatensystem gebildeten partiellen Ableitungen werden mit finiten Differenzen erster und zweiter Ordnung berechnet. Turbulente Effekte werden mit der Wirbelviskositätshypothese berücksichtigt, wobei zur Berechnung der Wirbelviskosität ein 0-Gleichungs- und ein 2-Gleichungsmodell benutzt werden. Das globale Berechnungsschema lehnt sich an das bekannte SIMPLE-Verfahren an. Innerhalb diesem werden lineare Gleichungssysteme mit einer unvollständigen LU-Zerlegung gelöst bzw. geglättet. Das iterative Lösungsverfahren wird mit einer Mehrgittermethode beschleunigt. Dabei wird sowohl die innere Iteration des SIMPLE-Algorithmus mit einem linearen Mehrgitter-Korrekturschema, als auch die globale Iteration mit einem "Full Approximation Scheme" beschleunigt. Die Mehrgitterbeschleunigung ist also in gleicher Weise wie der SIMPLE-Algorithmus geschachtelt.

Zur Validierung des Verfahrens wurden ein ebener und ein räumlicher Strömungsfall untersucht. Bei dem ebenen Fall handelt es sich um eine pontonförmige Schwimmbrücke bei einer Reynoldszahl von $Re=0.9 \cdot 10^6$. Für die Validierung räumlicher Strömungsberechnungen wurde auf Vermessungen des Wigley-Schiffes bei $Re=4.5 \cdot 10^6$ zurückgegriffen. Bei beiden Berechnungsfällen wurde das Konvergenz- und Laufzeitverhalten des numerischen Lösungsverfahrens intensiv untersucht.

Der Vergleich von Berechnungs- mit Meßergebnissen zeigt, daß die erzielte Genauigkeit bei den einzelnen Strömungsgrößen recht unterschiedlich ausfällt. Die Abweichung von Meßergebnissen beträgt bei den Geschwindigkeitsprofilen weniger als 5 %. Der Druckverlauf wird mit einer Genauigkeit in der gleichen Größenordnung wiedergegeben. Schubspannungsberechnungen sind im Bereich dicker Grenzschichten (Achterschiff) ebenfalls sehr genau, im Bereich dünner Grenzschichten (Vorschiff bis Hauptspant) beträgt die Abweichung etwa 30 %. Unbefriedigend sind die Berechnungsergebnisse der turbulenten kinetischen Energie, die in der Wandnähe nur den halben Betrag der Meßwerte erreichen. In größerer Entfernung vom Schiff ist die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse jedoch deutlich besser.

Das Laufzeitverhalten des Programmes ist gut. Durch ein Verfahren zur optimalen Bestimmung von Startwerten sowie durch das geschachtelte Mehrgitterverfahren konnte eine erhebliche Beschleunigung der iterativen Berechnung erzielt werden. Bei allen Berechnungsfällen konnte ein annähernd optimales Konvergenzverhalten erreicht werden. Während bei niedrigeren Reynoldszahlen ($0.5 \cdot 10^6$) hierfür das "Full Approximation Scheme" zwingend erforderlich war, war das Konvergenzverhalten bei hohen Reynoldszahlen ($5 \cdot 10^6$) auch ohne Mehrgitterbeschleunigung der globalen Iteration nahezu optimal. Grundsätzlich verbesserte sich das Laufzeitverhalten mit zunehmender Reynoldszahl, geeignete Startwerte vorausgesetzt. Dementsprechend war die Beschleunigung durch das "Full Approximation Scheme" in der globalen Iteration bei hohen Reynoldszahlen deutlich geringer als erwartet. Die Umströmung des Wigley-Schiffes bei $Re=4.5 \cdot 10^6$ in einem Diskretisierungsgitter mit 100.000 Zellen wurde mit einem normierten Residuum von 10^{-5} in 70 globalen Iteration und in einer Zeit von unter $1\frac{1}{2}$ Stunden auf einer HP 730 berechnet.

Danksagung

Mein Dank gilt den Herren C. Jastram und Dr. L. Palm. Sie haben mir ermöglicht, in einem industriellen Umfeld wissenschaftlich zu arbeiten, in dem sie die dafür notwendigen Rahmenbedingungen und Freiräume geschaffen haben. Ihre organisatorische, fachliche und menschliche Unterstützung war eine wertvolle Hilfe, ohne die ich die vorliegende Arbeit nicht hätte anfertigen können.

Prof. H. Söding und Prof.

M. Peric danke ich für zahlreiche fachliche Anregungen und Hinweise, die mir geholfen haben, auf dem richtigen Weg zu bleiben.

Hamburg, 15.4.1994

Kai Graf

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
2. Stand der Technik und Beschreibung des vorgestellten Verfahrens	2
3. Erhaltungsgleichungen	8
3.1. Navier-Stokes-Gleichungen	8
3.2. Impulsgleichung	8
3.3. Druckkorrekturgleichung	10
3.4. Turbulenzmodellierung	11
3.4.1. k - ϵ -Turbulenzmodell	12
3.4.2. Turbulenzmodell von Baldwin und Lomax	13
3.5. Randbedingungen der Impuls-, k - und ϵ -Gleichungen	15
3.5.1. Logarithmische Wandfunktionen an festen Wänden mit Haftbedingung	16
3.5.2. Feste Wände mit Gleitbedingung	19
3.6. Randbedingung der Druckkorrekturgleichung	19
4. Numerische Methode zur Lösung der Reynoldsgleichungen	21
4.1. Linearisierung und Vereinfachung der Gleichungssysteme	21
4.2. Diskretisierung der Feldvariablen und der partiellen Ableitungen	23
4.3. Globales Iterationsschema	26
4.3.1. Startwerte, Unterrelaxation und Residuen	27
4.3.2. Diskrete Druckkorrekturgleichung	29
4.3.3. Geschwindigkeitsinterpolation	30
4.3.4. Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	31
4.4. Mehrgittermethode	32
4.4.1. Grundprinzip	32
4.4.2. Mehrgitteralgorithmus für die Navier-Stokes-Gleichungen	36
5. Programmentwicklung und Programmbenutzung	41
6. Validierungsberechnung "Wall Driven Cavity"	43
7. Berechnungen ebener Strömungen	47
7.1. Testrechnung mit einem Diskretisierungsgitter von $64 * 24$ Zellen	47
7.2. Variation der Diskretisierung des Berechnungsgebietes	50
7.3. Vergleich der Berechnungsergebnisse mit Meßergebnissen	53
7.4. Konvergenzverhalten des Berechnungsverfahrens	55
7.4.1. Einfluß der Druckkorrekturgleichung auf die globale Konvergenz	55
7.4.2. Einfluß der Diskretisierung des Konvektionstermes	58
7.4.3. Mehrgitter-Korrekturschema für die Druckkorrekturgleichung	59
7.4.4. Beschleunigung der globalen Iteration	61

Inhaltsverzeichnis

8. Strömungsberechnungen um das Wigley-Schiff	65
8.1. Vergleich von Berechnungs- und Meßergebnissen	68
8.2. Konvergenzverhalten des Mehrgitteralgorithmus	73
8.2.1. Beschleunigung der inneren Iteration	73
8.2.2. Beschleunigung der äußeren Iteration	74
9. Schlußbemerkungen	79
10. Literaturverzeichnis	82
Anhang	87
A: Tensoralgebra und Tensoranalysis	87
B: Überprüfung des Potenz-Wandgesetzes	91
C: Verzeichnis der benutzten Symbole	93
D: Eingabedatei und Postprozessor zum Programm "flowc"	95

1 Einführung

In diesem Bericht wird ein numerisches Verfahren beschrieben, mit dem die Umströmung pontonförmiger Wasserfahrzeuge auf begrenzter Wassertiefe berechnet werden sollte. Ziel ist die Prognose hydrodynamischer Eigenschaften im Vorentwurf. Dabei soll es in diesem Entwurfsstadium möglich sein, durch den gezielten Vergleich einzelner Formvarianten die Formgebung des Fahrzeugrumpfes strömungsmechanisch zu optimieren. Eine wichtige Randbedingung für die Entwicklung war die Lauffähigkeit auf relativ kleinen Rechenmaschinen, so daß das Verfahren von Ingenieuren auf den ihnen üblicherweise zur Verfügung stehenden Workstations benutzt werden kann.

Bei der Berechnung der Umströmung pontonförmiger Wasserfahrzeuge auf flachem Fahrwasser muß berücksichtigt werden, daß die Fahrzeugform in der Regel kantig ist, wobei sich an den Kanten ausgeprägte Strömungsablösungen bilden. Zwischen Fahrzeugrumpf und Gewässerboden bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil mit zwei Grenzschichten aus, das die Strömung unter dem Fahrzeug einschnürt und damit das Druckfeld dort stark beeinflusst. Die Strömung um das Fahrzeug ist turbulent. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß sich um das Fahrzeug ein ausgeprägtes Wellensystem ausbildet und sich das Fahrzeug vertrimmt und absenkt.

Eine vollständige rechnerische Behandlung dieser komplexen Strömung ist bis heute noch nicht gelungen. Das hier beschriebene Lösungsverfahren beschränkt sich auf die Berechnung der viskosen, turbulenten Strömung, wobei der Schiffsrumpf als unbeweglich angenommen wird, d.h. Vertrimmung und Absenkung werden als bekannt vorausgesetzt. Auch die freie Wasseroberfläche wird durch eine grobe Näherung ersetzt.

Es wurde ein numerisches Verfahren zur Lösung der zeitgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (NSE) entwickelt. Darin werden turbulente Effekte mit dem Wirbelviskositäts-Modell berücksichtigt, d.h. es werden die sogenannten Reynolds-gemittelten Navier Stokes-Gleichungen (RANSE) gelöst.

Numerische Verfahren zur Berechnung der Navier-Stokes-Gleichungen (Navier-Stokes-Solver) werden im Schiffbau erst in jüngster Zeit angewendet. Einer der wichtigsten Gründe hierfür ist sicherlich, daß diese Verfahren einen hohen Bedarf an Rechenleistung haben. Diese steht erst in den letzten Jahren zu akzeptablen Kosten zur Verfügung. Doch auch mit schnellen Rechnern können Navier-Stokes-Solver nicht auf effiziente numerische Lösungsverfahren verzichten, so daß die Entwicklung von Navier-Stokes-Solvern mit der Entwicklung schneller und robuster Gleichungslöser einhergeht.

Die Entwicklung eines solchen effektiven numerischen Lösungsverfahrens war daher der Schwerpunkt des vorliegenden Verfahrens. Dazu wurde die Mehrgittermethode gewählt. Dieses Verfahren zur Beschleunigung eines iterativen Lösungsverfahrens muß sorgfältig an die Problemstellung angepaßt werden. Im vorliegenden Fall war zu berücksichtigen, daß räumliche Strömungsprobleme mit hoher Reynoldszahl in krummlinigen Diskretisierungsgittern mit Zellen von sehr unterschiedlichem Seitenverhältnis zu lösen waren.

In den folgenden Kapiteln wird das Verfahren beschrieben. Die einzelnen Kapitel behandeln sukzessiv die Herleitung der beherrschenden Gleichungen, das gewählte Diskretisierungsverfahren und den iterativen Lösungsansatz. Einen breiten Raum nehmen spezielle Aspekte der numerischen Implementation und des numerischen Verhaltens des Algorithmus ein. Das Verfahren wird mit Meßergebnissen aus Schlepptank- und Windkanalversuchen verifiziert.

2 Stand der Technik und Beschreibung des vorgestellten Verfahrens

Für die Festlegung eines Lösungsansatzes werden folgende Voraussetzungen berücksichtigt: Die zu untersuchenden Strömungen sind stationär, viskos und turbulent. Es können Strömungsablösungen auftreten. Die Strömung läßt sich nicht allein in den wandnahen Regionen des Strömungsgebietes untersuchen, d.h. eine reine Grenzschichtbetrachtung ist nicht ausreichend. Das Strömungsmedium ist inkompressibel. Wie bereits in der Einleitung beschrieben, verlangt eine rechnerische Erfassung dieser Strömungsprobleme ein Verfahren zur numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (NSE).

Bei der numerischen Lösung der NSE mit den genannten Vorgaben hat sich eine Standardmethode durchgesetzt, die in der überwiegenden Anzahl aller bekannten Verfahren eingesetzt wird: die sogenannte Druckkorrekturmethode mit einer Finite-Differenzen- oder Finite-Volumen-Diskretisierung in einem strukturierten Gitter. Alle folgenden Betrachtungen beschränken sich auf diese Gruppe von Verfahren.

Bei der Druckkorrekturmethode werden zunächst die Erhaltungsgleichungen für alle Komponenten des Impulses mit einem noch ungenauen Druckfeld näherungsweise erfüllt. Der dabei entstehende Massendefekt wird durch eine anschließende Druckkorrektur ausgeglichen, die an eine Korrektur der Geschwindigkeit gekoppelt ist. Im Anschluß daran werden gegebenenfalls Erhaltungsgleichungen für andere skalare Größen wie Energie oder Turbulenzintensität gelöst. Die beschriebene Berechnungsfolge wird für angenäherte Gleichungssysteme wiederholt, bis sich ein konvergierter Zustand eingestellt hat.

Um die die Strömung beschreibenden partiellen Differentialgleichungen in numerisch lösbare algebraische Gleichungen zu transformieren, wird das Strömungsgebiet in einem strukturierten Gitter diskretisiert, d. h. die Feldgleichungen der Strömung werden in Gittergleichungen umgewandelt. Die freien Variablen der Gleichungen werden nur an bestimmten Positionen dieses Gitters als diskrete Werte berechnet. Partielle Differentiale werden durch finite Differenzen ersetzt.

Die ersten Verfahren, die diesem prinzipiellen Vorgehen folgten, wurden z. B. von *Patankar (1980)* beschrieben. Dabei wurde zunächst von zahlreichen Vereinfachungen ausgegangen: das Diskretisierungsgitter war orthogonal und äquidistant. Die Strömung war laminar. Aus Rechenzeitgründen wurden fast ausschließlich ebene Strömungsprobleme untersucht. Bei diesen Verfahren wurde meist eine im Gitter versetzte Anordnung der kartesischen Geschwindigkeitskomponenten angenommen (Bild 2.1). Dadurch wurden die Geschwindigkeitskomponenten an den Zellgrenzen unmittelbar an die Drücke in den benachbarten Zellenmittelpunkten gekoppelt, wodurch Oszillationen des Druckes vermieden werden konnten.

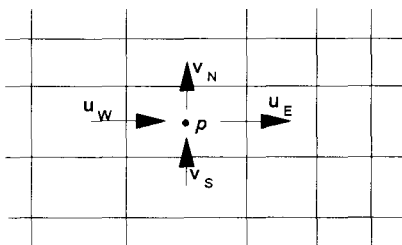


Bild 2.1: Orthogonales Gitter

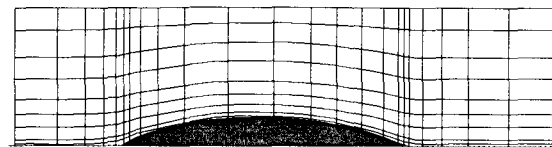


Bild 2.2: Konturangepaßtes Gitter

Die meisten praktischen Strömungen - so auch Schiffsumströmungen - lassen sich in einem orthogonalen Gitter nicht effektiv modellieren. Für die Berechnung der Umströmung realer Geometrien werden in der Regel konturangepaßte Gitter wie in Bild 2.2. Um die diskretisierten NSE in diesem Gitter zu lösen, werden sie in einem krummlinigen nichtorthogonalen Koordinatensystem formuliert. Durch diese Transformation wird die NSE um einige Terme komplexer: im Diffusionsterm treten sowohl Kreuzableitungen als auch der transponierte Geschwindigkeitsgradient auf; Ausdrücke, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem verschwinden.

Berechnungsverfahren für die Lösung der NSE in krummlinigen nichtorthogonalen Koordinatensystemen wurden unter anderem von *Demirdzic (1982)*, *Demirdzic et.al (1986)*, *Yang et.al. (1990)* und *Petric (1985)* beschrieben.

In krummlinigen Gittern bieten sich verschiedene Alternativen für die Komponenten der Geschwindigkeit und die Plazierung der Variablen im Gitter an. In verschiedenen Arbeiten wurden zahlreiche Alternativen vorgeschlagen und untersucht, z.B. *Schönung (1991)* und *Shih et.al. (1989)*. In der Mehrzahl der Arbeiten haben sich im wesentlichen zwei Verfahren durchgesetzt: kontravariante physikalische Geschwindigkeitskomponenten in einer versetzten Anordnung und kartesische Geschwindigkeitskoordinaten in einer zellenzentrierten Anordnung (siehe Bild 2.3).

Verfahren mit kontravarianten physikalischen Geschwindigkeitskomponenten in versetzten Variablenanordnungen wurden für schiffbauliche Anwendungen von *Chen et.al. (1989)*, *Tsabiras and Loukakis (1989)*, *Oh et.al. (1989)* und *Masuko and Ogiwara, S. (1989)* benutzt.

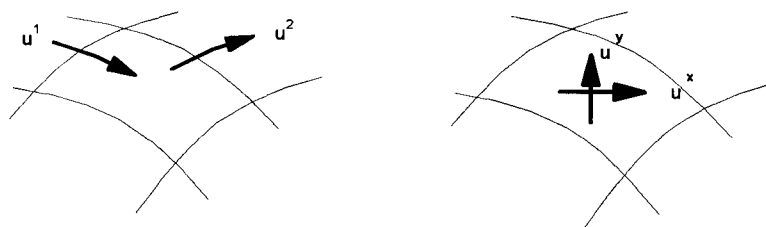


Bild 2.3: Krummlinige Gitterzelle mit kontravarianten und kartesischen Geschwindigkeitskomponenten

Piquet, J. and Visonneau, M. (1989) beschrieben ein Verfahren zur Berechnung von Schiffsumströmungen und verwendeten darin kartesische zellenzentrierte Geschwindigkeitskomponenten.

Im Vergleich bieten kontravariante versetzte Geschwindigkeitskomponenten eine einfache Behandlung der Randbedingungen und vermeiden Druckoszillationen. In den Impulserhaltungsgleichungen treten aber zusätzliche Krümmungsterme auf. Kartesische, zentriert angeordnete Geschwindigkeitskomponenten vermeiden diese Krümmungsterme und vereinfachen zudem die Indizierung der Gittervariablen. Die Behandlung von Rändern des Strömungsgebietes ist allerdings komplizierter, und zur Vermeidung von Druckoszillationen müssen spezielle Interpolationstechniken für die Flüsse über die Ränder der Diskretisierungszellen angewendet werden. Diese und eine Reihe weiterer Vor- und Nachteile der jeweiligen Geschwindigkeitsnotationen gleichen sich in etwa aus. Wenn allerdings ein Mehrgitterverfahren - wie weiter unten beschrieben - für die Beschleunigung der iterativen Gleichungslösung benutzt wird, überwiegen die Vorteile der kartesischen gitterzentrierten Geschwindigkeitsnotation. Die bei Mehrgitterverfahren notwendige Übertragung von Gittervariablen auf unterschiedliche Gitterebenen erfolgt in zentrierten Gittern für alle Variablen mit dem gleichen Interpolationsalgorithmus, was eine erhebliche Vereinfachung mit sich bringt. Eine weitere Vereinfachung entsteht dadurch, daß die Basisvektoren kartesischer Geschwindigkeitskomponenten auf unterschiedlichen Gitterebenen konstant bleiben, was bei kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten nicht zutrifft.

Als Schlußfolgerung dieser Betrachtung wird in dem vorliegenden Verfahren die zellenzentrierte kartesische Notation der Geschwindigkeiten gewählt.

Das hier vorgestellte Verfahren berechnet Umströmung von Pontons und kleinen Booten. Bei einer mittleren Fahrzeuglänge von etwa 10 m und einer Geschwindigkeit zwischen 1 und 4 m/s ist die Reynoldszahl damit in der Größenordnung von 10^7 , d.h. die Strömung ist turbulent. Wie in diesen Fällen üblich werden die Navier-Stokes-Gleichungen daher nur für die zeitgemittelten Strömungsvariablen gelöst. Die in den zeitgemittelten Impulserhaltungsgleichungen auftretenden Zusatzterme, die die

turbulente Fluktuation berücksichtigen - die sogenannten Reynoldsspannungen - werden meist mit der Wirbelviskositätshypothese angenähert. Dabei wird die turbulente Fluktuation durch eine zusätzliche turbulente Viskosität berücksichtigt. Die vorliegende Arbeit folgt diesem Ansatz.

Es werden zwei verschiedene Verfahren für die Berechnung der turbulenten Viskosität untersucht. Das bekannte k - ϵ -Turbulenzmodell, das die Lösung von Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate verlangt und grundlegend von *Lauder und Spalding (1974)* beschrieben wird, wurde bereits mehrfach für die Berechnungen von Schiffsumströmungen eingesetzt, z.B. *Masuko and Ogiwara (1989)* und *Tsabiras and Loukakis. (1989)*. Obwohl das k - ϵ -Modell bereits mehrfach erweitert worden ist, um für bestimmte Anwendungen eine höhere Genauigkeit zu erzielen, z.B. *Lauder und Leschziner (1992)*, verwenden die Verfahren für die Berechnung von Schiffsumströmungen in der Regel das Standardmodell.

Sogenannte algebraische Turbulenzmodelle bestimmen die turbulente Viskosität ohne die Lösung von Transportgleichungen. Sie erleichtern die Berechnung turbulenter Strömungen daher sehr. *Cebeci and Smith (1978)* beschrieben ein inzwischen vielfach eingesetztes algebraisches Turbulenzmodell, das von *Cebeci et. al. (1989)* in modifizierter Form auch für die Berechnung von Schiffsumströmungen benutzt wurde. Bei diesem Modell wird eine Abschätzung der Dicke der Grenzschicht als bekannt vorausgesetzt. *Baldwin and Lomax (1978)* modifizierten den Ansatz von Cebeci und Smith, so daß auf die Kenntnis der Grenzschichtdicke verzichtet werden kann. In der Arbeit von *Stock and Haase (1989)* wurden beide Modelle miteinander verglichen und bewertet. Obwohl sich in diesem Vergleich zeigte, daß abgelöste Strömungen bei Cebeci besser wiedergegeben werden, wurde das Verfahren von Baldwin-Lomax vorgezogen, da es durch den Wegfall der Grenzschichtdicke bedeutend einfacher zu implementieren ist.

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden Turbulenzmodelle - k - ϵ und Baldwin-Lomax - untersucht und miteinander verglichen. Der Vergleich beschränkt sich auf zweidimensionale Strömungen ohne freie Oberfläche und dient als Entscheidungshilfe, welches Turbulenzmodell für die dreidimensionalen Berechnungen implementiert werden sollte.

Folgende Randbedingungen werden berücksichtigt: am Einstromrand werden die Geschwindigkeit und Turbulenzparameter vorgegeben. Am Ausstromrand werden verschwindende Normalengradienten der Geschwindigkeit angenommen. Für die turbulente kinetische Energie wird angenommen, daß ihre Änderungen hier nur durch die Dissipationsrate verursacht werden. An den seitlichen Begrenzungen des Berechnungsgebietes wird die randnormale Geschwindigkeitskomponente wie auch die Änderung der wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten in Wandnormalenrichtung Null gesetzt.

Auf der Schiffskörperoberfläche und in einigen Fällen auch am Gewässerboden wird das logarithmische Wandgesetz benutzt, um eine Randbedingung aufzustellen, statt die Hafrandbedingung direkt zu erfüllen, siehe *White (1974)*. Ein wesentlicher Vorteil des logarithmischen Wandgesetzes liegt darin, daß in der Nähe der Wände eine gröbere Diskretisierung ausreicht. Die direkte Erfüllung der Hafrandbedingung in Verbindung mit einem dann erforderlichen Low-Reynoldszahl-Turbulenzmodell verlangt eine feinere Diskretisierung in Wandnähe und führt in der Regel zu sehr ungünstigen Seitenverhältnissen der Diskretisierungszellen. Beides erschwert die numerische Lösung der Erhaltungsgleichungen. Logarithmische Wandfunktionen erlauben zudem eine einfache Berücksichtigung rauher Wände, wenn Rauigkeitselemente die viskose Unterschicht überragen.

Bei der numerischen Implementation des Wandgesetzes wurde ein neuer Weg beschritten. Die sich aus dem Wandgesetz ergebende Wandschubspannung kann in der herkömmlichen Form nicht direkt, sondern nur iterativ bestimmt werden. Mit einer einfachen Approximation der logarithmischen Wandfunktion und der Einführung einer örtlichen, mit dem Wandabstand gebildeten Reynoldszahl wird eine

explizite Berechnung der Wandspannung ermöglicht, die das Lösungsverfahren vereinfacht und beschleunigt.

An der freien Wasseroberfläche müssen zwei Randbedingungen berücksichtigt werden. Die dynamische Randbedingung besagt, daß der Druck an der freien Wasseroberfläche gleich dem Luftdruck ist. Die kinematische Randbedingung besagt, daß keine Flüssigkeit durch die freie Wasseroberfläche hindurchtritt. Die überwiegende Zahl der Lösungsverfahren für viskose Schiffsumströmungen vernachlässigt die dynamische Randbedingung und ersetzt die kinematische durch einen Symmetrierand, d.h. der tiefgetauchte Doppelrumpf wird simuliert. Der Symmetrierand wird wie die seitlichen Begrenzungen des Strömungsgebietes behandelt.

Erhaltungsgleichungen für Impuls, Masse und ggf. Turbulenzparameter werden in einem krummlinigen nichtorthogonalen strukturierten Gitter diskretisiert. Die partiellen Ableitungen werden dabei bezüglich der kontravarianten Ortskoordinaten des durch das Gitter beschriebenen krummlinigen Koordinatensystems gebildet. Sie werden mit zentralen Finite-Differenzen-Formeln zweiter Ordnung für den diffusiven Anteil und mit einem Flux-Blending-Schema für den konvektiven Term diskretisiert. Bei letzterem wird die erste Ableitung mit einem gewichteten Mittel aus Aufwind-Differenzen erster Ordnung und zentralen Differenzen zweiter Ordnung diskretisiert.

Bei einer niedrigen Ordnung des Konvektionstermes entstehen bekannterweise Verfälschungen der Lösung durch numerische Diffusion. Finite-Differenzen-Formeln höherer Ordnung vermeiden dies Problem. Für stationäre inkompressible Strömungen wird sehr häufig das QUICK-Verfahren von *Leonard (1977)* verwendet, das auch bereits für die Berechnung von Schiffsumströmungen benutzt wurde, *Zhu et.al. (1989)*. Das QUICK-Schema ist nicht unproblematisch. Es verlangt starke Unterrelaxation der Impulsgleichungen, um zu einem stabilen, mit iterativen Verfahren leicht zu lösenden Gleichungssystem zu kommen. Auch müssen verschiedene Terme der QUICK-Differenzenformel explizit behandelt werden, um eine schlanke Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems zu erhalten, was das Konvergenzverhalten des Lösungsverfahrens weiter verschlechtert.

Im vorliegenden Verfahren wird daher die sogenannte Defekt-Korrektur benutzt. Dabei werden in den diskretisierten Erhaltungssätzen konvektive Terme mit finiten Differenzen erster Ordnung implizit berechnet. Explizit wird der mit finiten Differenzen erster Ordnung berechnete konvektive Term wieder abgezogen und der mit finiten Differenzen zweiter Ordnung berechnete konvektive Term hinzugefügt. Dabei erhält man für die Lösung des Gleichungssystems eine schlanke Koeffizientenmatrix mit guter Konditionierung und im konvergierten Berechnungszustand eine zweiter Ordnung genaue Diskretisierung der konvektiven Änderung. Aus Stabilitäts- und Laufzeitgründen wird in der Praxis allerdings eine Diskretisierung des Konvektionstermes vorgesehen, die aus einem gewichteten Mittel aus zentralen und Stromauf-Differenzen besteht.

Nach erfolgter Diskretisierung der Strömungsparameter und Einsetzen der finiten Differenzen in die Erhaltungsgleichungen für Impuls und Masse ergeben sich algebraische Gleichungssysteme. Bei dem hier benutzten Druckkorrekturverfahren wird die Massenerhaltungsgleichung durch eine Druckkorrekturgleichung ersetzt, die sich aus den Impulsgleichungen und der Massenerhaltungsgleichung ergibt. Das allgemeine Lösungsverfahren folgt dem SIMPLE-Schema, *Patankar (1980)*. Die Impulsgleichung wird linearisiert und dann mit einem geschätzten Druckfeld näherungsweise gelöst. Danach wird die Druckkorrekturgleichung gelöst und die Drücke dann korrigiert. Der Druckkorrektur entsprechend wird die Geschwindigkeit korrigiert. An diese Berechnung schließt sich die Berechnung der Turbulenzparameter an. Wegen der Nichtlinearitäten und der notwendigen Unterrelaxation wird dieser Vorgang wiederholt, bis die Residuen der Erhaltungsgleichungen genügend klein sind.

Zahlreiche Verbesserungen des ursprünglichen SIMPLE-Algorithmus wurden von verschiedenen Autoren beschrieben, z.B. *Issa (1986)* und *Patankar and Spalding (1972)*. Die Vorteile der einzelnen Varianten des SIMPLE-Schemas sind jedoch uneinheitlich und sehr stark problemabhängig. Es zeigt sich, daß das SIMPLE-Verfahren mit einer optimalen Wahl der Unterrelaxationsparameter für Druck und

Geschwindigkeit nur schwer zu übertreffen ist. Im vorliegenden Verfahren wurde lediglich eine Erweiterung des SIMPLE-Verfahrens implementiert und getestet: das SIMPLEC-Verfahren von *Van Doormal und Raithby (1984)* verlangt im Vergleich zum Basisverfahren fast keinen zusätzlichen Rechenaufwand. In Strömungen mit starkem Wandeinfluß reduziert es die Anzahl der erforderlichen globalen Iterationszyklen nennenswert.

Bei Strömungen, die sich im wesentlichen in eine Hauptrichtung ausbreiten und bei der Störungen einer stationären Strömung sich nur wenig gegen die Strömungsrichtung ausbreiten, werden häufig sogenannte partiell parabolische Lösungsansätze verfolgt, z.B. *Hoekstra und Raven (1985)*. In der vorliegenden Strömungsverhältnisse auftreten, die die Annahme der Störungfortpflanzung nur in eine Richtung nicht erfüllen.

Innerhalb der SIMPLE- bzw. SIMPLEC-Iterationszyklen werden für die Erhaltungsgleichungen linearisierte Gleichungssysteme gelöst. Mehrere iterative Lösungsverfahren wurden getestet: Successive Overrelaxation (SOR), Linien-Relaxation bzw. Linien-Gauss-Seidel (LGS) und Alternative Direction Implicit (ADI). Es zeigte sich aber, daß alle genannten Verfahren nicht mit der unvollständigen LU-Zerlegungsmethode nach *Stone (1968)* konkurrieren können, die sowohl das beste Konvergenz- als auch Glättungsverhalten hatte. Für dreidimensionale Strömungen, d.h. Koeffizientenmatrizen des linearen Gleichungssystems mit sechs Nebendiagonalen, wird vorgeschlagen, das ursprünglich für Koeffizientenmatrizen mit vier Nebendiagonalen beschriebene Stone'sche SIP-Verfahren (Strongly Implicit Procedure) sukzessiv für alle diskreten Ebenen eines dreidimensionalen Gebietes zu lösen, *Schönung (1991)*. Im vorliegenden Verfahren wird allerdings das SIP-Verfahren für die Berechnung von Gleichungssystemem mit sechs Nebendiagonalen erweitert. Es zeigt sich, daß dieses Verfahren insbesondere in stark inhomogenen Koeffizientenmatrizen, d.h. in Diskretisierungsnetzen mit stark variierender Maschenweite, überlegenes Konvergenzverhalten hat.

Als weiteres Verfahren zur Beschleunigung sowohl der inneren Iterationen (Lösung der linearisierten Erhaltungsgleichungen) als auch der globalen Iteration (sukzessives wiederholtes Lösen der Impulserhaltungsgleichungen, der Druckkorrekturgleichungen und der Turbulenzgleichungen) im SIMPLE-Schema wurden Mehrgitterverfahren eingesetzt. Mehrgitterverfahren wurden grundlegend zum Beispiel von *Stüben und Trottenberg (1981)* und *Hackbusch (1985)* beschrieben. *Brand (1984)* beschreibt die Anwendung von Mehrgittermethoden in der numerischen Strömungsmechanik.

Anders als in den genannten Veröffentlichungen ist für die vorliegende Anwendung der Pontonumströmung ein Mehrgitterverfahren für turbulente Strömungen in krummlinigen Gittern erforderlich. *Lien und Leschziner (1992)* beschreiben ein Finite-Volumen-Verfahren, das in drei Dimensionen turbulente Strömungen berechnet. Über die Implementation des Mehrgitteralgorithmusses ist in diesem Aufsatz allerdings sehr wenig enthalten. Das hier implementierte Verfahren lehnt sich an die Arbeit von *Peric et.al. (1989)* an. Sie beschrieben ein Verfahren für zweidimensionale turbulente Strömungen in einem orthogonalen Gitter und berechneten damit die Strömung um eine rückwärts-springende Stufe. Die Erweiterung für den vorliegenden Fall der räumlichen Strömung in krummlinigen Gittern folgt theoretisch unmittelbar aus dem Verfahren für ebene Strömungen. Lediglich der Interpolation von Korrekturen vom groben auf das feine Gitter - der Prolongation - muß besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Das Verfahren von *Peric et.al.* benutzt als Glätter auf allen Gitterebenen den SIMPLE-Algorithmus. Dies beinhaltet die Lösung der (linearisierten) Druckkorrekturgleichung. Testrechnungen zeigen, daß der Genauigkeitsgrad, mit der die Druckkorrekturgleichung gelöst wird, von erheblicher Bedeutung für das globale Konvergenzverhalten ist. Für eine genaue Lösung der Druckkorrekturgleichung ist der Rechenaufwand jedoch erheblich. Aus diesem Grund wurde im vorliegenden Verfahren für die Lösung der Druckkorrekturgleichung ein Mehrgitter-Korrekturschema vorgesehen. Das Mehrgitterschema ist damit in der gleichen Weise geschachtelt wie der SIMPLE-Algorithmus. Die globale Iteration des SIMPLE-

Algorithmus wird mit einem "Full Approximation Scheme" beschleunigt, während die innere Iteration zur Berechnung der Druckkorrektur mit einem Mehrgitter-Korrekturschema beschleunigt wird.

Die im vorliegenden Verfahren eingesetzte Mehrgittermethode ist damit ein "Full Approximation Scheme" mit einem eingebetteten "Correction Scheme".

Zusammenfassung:

- Formulierung der Erhaltungsgleichungen
Die Navier-Stokes-Gleichungen werden in einem beliebigen nichtorthogonalen Koordinatensystem formuliert, d.h. die partiellen Ableitungen werden nach den kontravarianten Ortskoordinaten gebildet. Es werden kartesische Geschwindigkeitskomponenten benutzt.
- Die Erhaltungsgleichungen werden in einem krummlinigen dreidimensionalen Gitter diskretisiert. Die Variablenanordnung ist zentriert.
- Turbulente Effekte werden mit der Wirbelviskositätshypothese berücksichtigt. Als Turbulenzmodell werden das k - ϵ -Modell und das algebraische Modell von Baldwin-Lomax implementiert.
- Die partiellen Ableitungen werden mit Finite-Differenzen-Formeln erster bis zweiter Ordnung für den konvektiven und zweiter Ordnung für den diffusiven Anteil gebildet.
- Das allgemeine Lösungsverfahren folgt dem SIMPLE-Schema. Ein SIMPLER-Schema wird ebenfalls benutzt.
- Als iterativer Löser für die linearen Gleichungssysteme wird eine dreidimensionale Variante des SIP-Verfahrens von Stone angewendet.
- Zur Beschleunigung der iterativen Lösung wird ein Mehrgitterverfahren eingesetzt. Es besteht aus einem "Full Approximation Scheme" für die SIMPLE-Iteration mit einem eingebetteten "Correction Scheme" für die Beschleunigung der inneren Iteration innerhalb der globalen SIMPLE-Iteration.

3 Erhaltungsgleichungen

In diesem Kapitel werden die zu lösenden Erhaltungsgleichungen und ihre Randbedingungen hergeleitet bzw. beschrieben. Dies sind die Erhaltungsgleichung für eine kartesische Komponente des Impulses (Impulsgleichung), die Druckkorrekturgleichung sowie Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate (k -Gleichung und ε -Gleichung). Partielle Ableitungen werden dabei in einem krummlinigen nichtorthogonalen Koordinatensystem nach den kontravarianten Ortskoordinaten gebildet.

3.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Für die Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen mit den notwendigen Transformationen in ein krummliniges Koordinatensystem ist die Tensorrechnung sehr hilfreich. Die wichtigsten hier angewendeten Schreibweisen und Rechenregeln der Tensorrechnung sind im Anhang beschrieben. In den folgenden Gleichungen wird insbesondere zwischen Tensoren und Tensorkomponenten unterschieden. Eine als Tensor bezeichnete Größe setzt sich immer aus seinen Tensorkomponenten und den dazugehörigen Basisvektoren zusammen. Diese Unterscheidung ist notwendig, da zwei verschiedene Koordinatensysteme benutzt werden: die Impulserhaltungsgleichung wird für kartesische Komponenten der Geschwindigkeit erfüllt. Dabei sollen aber alle partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten eines krummlinigen Koordinatensystems gebildet werden.

Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen mit konstanter Dichte des Strömungsmediums lauten in Koordinatensystem-invarianter Schreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}) = -\nabla p + \mathbf{f} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

mit

$$\boldsymbol{\tau} = \nu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (3.3)$$

Dabei ist \mathbf{u} der Geschwindigkeitsvektor (ein einstufiger Tensor), $\boldsymbol{\tau}$ ist der durch die Dichte geteilte (zweistufige) Spannungstensor, p ist der durch die Dichte geteilte Druck und \mathbf{f} ist eine massenormierte Körperkraft, zum Beispiel die Erdbeschleunigung.

3.2 Impulsgleichung

Aus (3.1) wird eine Erhaltungsgleichung für eine kartesische Komponente des volumenspezifischen, durch die Dichte dividierten Impulses (d.i. Geschwindigkeitskomponente) abgeleitet. Im folgenden wird von einer stationären Strömung ausgegangen.

In einem beliebigen Koordinatensystem mit den kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i und den kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^j wird für den Nabla-Operator die Beziehung $\nabla = \mathbf{g}^j \partial / \partial \zeta^j$ mit der krummlinigen Ortskoordinate ζ^j benutzt. Man erhält dann (siehe Anhang A):

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{g}^i \mathbf{u}_{,i} & \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} &= \mathbf{g}^i \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})_{,i} & \nabla p &= \mathbf{g}^j p_{,j} \\ (\nabla \mathbf{u})^T &= \mathbf{u}_{,i} \mathbf{g}^i & \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{g}^j \cdot (\mathbf{g}^i \mathbf{u}_{,i})_{,j} & \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T &= \mathbf{g}^j \cdot (\mathbf{u}_{,i} \mathbf{g}^i)_{,j} \end{aligned}$$

Mit der Jakobischen J und den Hilfsbeziehungen $(Jg^i)_{,i} = 0$ erhält man für die einzelnen Terme in (3.1) (eine detaillierte Herleitung mit den gebräuchlichen Konventionen der Tensoralgebra und -analysis befindet sich im Anhang):

$$\nabla p = g^i p_{,i} \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{uu}) = \frac{1}{J} (Jg^i \cdot \mathbf{uu})_{,i} \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{J} (Jg^{ij} \mathbf{u}_{,j})_{,i} \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \frac{1}{J} (Jg^i \cdot \mathbf{u}_{,j} g^j)_{,i} \quad (3.7)$$

Man setze (3.3) in (3.1) und anschließend (3.5) (3.6) und (3.7) ein, multipliziere diese Gleichung mit J und bringe Teile des Diffusionstermes auf die rechte Seite. Damit wird aus der Impulsgleichung (3.1) für den stationären Fall:

$$(Jg^i \cdot \mathbf{uu} - Jv g^{ij} \mathbf{u}_{,j})_{,i} = -Jg^i p_{,i} + J\mathbf{f} + (Jv g^i \cdot \mathbf{u}_{,j} g^j)_{,i} \quad (3.8)$$

Dies ist nach wie vor eine Vektorgleichung. Um sie zu lösen, muß sie komponentenweise geschrieben werden. Die Wahl der zu diesen Komponenten gehörenden Basisvektoren ist völlig frei und muß keinesfalls mit dem Koordinatensystem \mathbf{g}_i übereinstimmen, das zur Bildung der Ableitungen benutzt wird. Der Grund für diese Form der Herleitung ist vielmehr, daß kartesische Geschwindigkeitskomponenten berechnet werden sollen, also Komponenten mit den rechtwinkelig aufeinanderstehenden Einheitsbasisvektoren \mathbf{e}^1 , \mathbf{e}^2 und \mathbf{e}^3 . Da diese konstant sind, können sie aus den partiellen Ableitungen herausgezogen werden.

Für eine kartesische Komponente des Impulses u^k lautet die Impulsgleichung also:

$$(Jg^i \cdot \mathbf{u} u^k - J\tau^{ik})_{,i} = -Jg^i \cdot \mathbf{e}^k p_{,i} + J\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^k + (Jv g^i \cdot \mathbf{u}_{,j} g^j \cdot \mathbf{e}^k)_{,i} \quad (3.9)$$

mit:

$$\tau^{ik} = v g^{ij} u^k_{,j} \quad (3.10)$$

Die Tensorkomponenten τ^{ik} dürfen nicht mit den Komponenten des Tensors $\boldsymbol{\tau}$ in (3.3) verwechselt werden, da erstere nicht den konjugierten Geschwindigkeitsgradienten enthalten. Die Divergenzbedingung (3.2) führt auf:

$$(Jg^i \cdot \mathbf{e}_k u^k)_{,i} = 0 \quad (3.11)$$

Betrachtung der Größenordnung der einzelnen Terme in (3.9):

Bei der numerischen Lösung von (3.9) ist eine Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Summenterme sehr hilfreich. Von Bedeutung ist ein Vergleich der Größenordnung des konvektiven und des diffusiven Anteils, die Größenordnung der Kreuzableitungen und der Terme der rechten Seite von (3.9).

Konvektiver Anteil vs. diffusiver Anteil: Die numerische Lösung von (3.9) wird dadurch erschwert, daß der Diffusionsterm in der Gleichung im überwiegenden Bereich des Berechnungsgebietes sehr viel kleiner ist als der Konvektionsterm. Er bestimmt aber die Ordnung der Differentialgleichung, d.h. er enthält die höchsten Ableitungen. Lediglich in Wandnähe ist der Diffusionsterm nicht klein. Man begegnet diesem Problem mit einer entsprechend feineren Diskretisierung in Wandnähe. Verschiedene Verfahren nutzen die Randbedingung, daß sich der Druck in Wandnähe nicht so stark ändert wie die Geschwindigkeit, siehe *Tsabiras und Loukakis(1989)*. Hiervon wird im vorliegenden Verfahren jedoch nicht ausgegangen.

Kreuzableitungen: Im Diffusionsterm treten zweifache Ableitungen auf:

$$(J\mathbf{g}^{ij}u^k_{,j})_{,i} \quad (3.12)$$

Die Ableitungen, die sich aus $i \neq j$ ergeben, werden Kreuzableitungen genannt. Sie verschwinden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, da dort $g^{ij}=0$ bei $i \neq j$. In einem fast rechtwinkligen Koordinatensystem - wovon im folgenden ausgegangen wird - ist der Anteil des Diffusionstermes, der sich aus den Kreuzableitungen ergibt, klein, da hier gilt: $g^{ij} \ll g^{ii}$ für $i \neq j$.

Transponierter Geschwindigkeitsgradient im Diffusionsterm: Unter der Annahme, daß die Viskosität konstant ist, kann diese vor die Differentiale gezogen werden. Es verbleibt der Ausdruck:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (3.13)$$

Er ist null (die Herleitung befindet sich im Anhang), d.h. bei konstanter Viskosität verschwindet die diffusive Änderung durch den transponierten Geschwindigkeitsgradienten. Für kleine Gradienten der Viskosität ergibt sich damit die Schlußfolgerung, daß der Anteil des Diffusionstermes, der sich aus dem transponierten Geschwindigkeitsgradienten ergibt, sehr viel kleiner ist, als der aus dem nicht transponierten Geschwindigkeitsgradienten. Auch bei der Berechnung turbulenter Strömungen war der Ausdruck stets so klein, daß eine explizite Berechnung weder zu Stabilitätsproblemen noch zu erheblichen Laufzeitveränderungen führte.

3.3 Druckkorrekturgleichung

Die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten mit (3.9) kann erfolgen, wenn der Druck bekannt ist. Berechnet man die Geschwindigkeitskomponenten mit einem geschätzten Druck, muß dieser im Anschluß korrigiert werden. Außerdem muß auch die Geschwindigkeit korrigiert werden, um den Masseerhaltungssatz (3.11) zu befriedigen. Die Gleichungen zur Korrektur des Druckes und der Geschwindigkeit werden im folgenden hergeleitet.

Nach der Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten mit (3.9) ist in der Regel die Divergenzbedingung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ verletzt, d.h. sie ist nur mit einer geeigneten Korrektur der Geschwindigkeitskomponenten \bar{u}^k erfüllt:

$$(J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}_k(u^k + \bar{u}^k))_{,i} = 0 \quad (3.14)$$

Die Korrelation zwischen einer Korrekturgeschwindigkeit und einer dazu gehörenden Druckkorrektur erhält man aus (3.9). Für eine kleine Korrektur des Druckes \bar{p} berechnet sich die entsprechende Korrektur einer Geschwindigkeitskomponente \bar{u}^k mit:

$$L^{(k)}(\bar{u}^k) = -J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}^k \bar{p}_{,i} \quad (3.15)$$

Dies ist die Geschwindigkeitskorrekturgleichung, in der $L^{(k)}$ der Differentialoperator für die konvektive und diffusive Änderung der Impulskomponente u^k in (3.9) ist, d.h. $L^{(k)}(u^k) = (Jg^i \cdot \mathbf{u} u^k - Jv g^{ij} u^k_{,j})_{,i}$. Mit der Klammerung des Indexes k wird L als ein Operator auf die einfach kontravariante Tensorkomponente u^k bezeichnet, $L^{(k)}(u^k)$ ist also keine zweifach kontravariante Tensorkomponente. Die Gleichung zur Bestimmung der Druckkorrektur \bar{p} erhält man durch Einsetzen von (3.15) in (3.14):

$$(Jg^i \cdot \mathbf{e}_k (L^{(k)})^{-1} Jg^j \cdot \mathbf{e}^k \bar{p}_{,j})_{,i} = (Jg^i \cdot \mathbf{e}_k u^k)_{,i} \quad (3.16)$$

Dies ist die Druckkorrekturgleichung. Auf der linken Seite treten neben geometrischen Größen nur die unbekannte Druckkorrektur auf. Die rechte Seite ist der (mit der konstanten Dichte normierte) Massedefekt, der sich nach einer Berechnung der Geschwindigkeiten mit (3.9) ergibt.

Zur Berechnung der Geschwindigkeit und des Drucks in einem Berechnungsgebiet berechnet man zunächst die Geschwindigkeiten mit einem geschätzten bzw. aus der letzten Iteration stammenden Druck. Anschließend wird mit (3.16) die Druckkorrektur berechnet. Mit (3.15) wird dann die Korrekturgeschwindigkeit berechnet. Die Druckkorrektur \bar{p} wird zum Druck p und die Korrekturgeschwindigkeit \bar{u}^k zur Geschwindigkeit u^k addiert.

3.4 Turbulenzmodellierung

Grundsätzlich sind die beschriebenen Erhaltungsgleichungen auch für turbulente Strömungen gültig. Um aber mit (3.9) und (3.16) turbulente Strömungen zu berechnen, müßte man das Berechnungsgebiet sehr fein auflösen, was zu sehr großen Gleichungssystemen führen würde. Zum heutigen Zeitpunkt können mit den leistungsfähigsten zur Verfügung stehenden Rechnern Strömungen mit einer Reynoldszahl in der Größenordnung von 10^4 direkt mit den beschriebenen Erhaltungssätzen berechnet werden.

Bei praktischen ingenieurmäßigen Strömungsproblemen wie dem vorliegenden der Pontonumströmung treten allerdings Reynoldszahlen in der Größenordnung von 10^7 und darüber auf. Es stehen außerdem nur Rechenmaschinen der mittleren Leistungsklasse zur Verfügung.

In diesem Fall begnügt man sich damit, zeitgemittelte Größen der Strömungsparameter Geschwindigkeit und Druck zu berechnen. Führt man in die Impulsgleichung für die aktuelle Strömungsgeschwindigkeit die Summe aus einer zeitgemittelten Strömungsgeschwindigkeit und einer zusätzlichen turbulenten Fluktuation \hat{u}^i ein, deren Mittelwert verschwindet, dann entsteht in (3.1) ein zusätzlicher Term, der den gemittelten Impulstransport durch die turbulente Fluktuation angibt:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}) = -\nabla p + \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (3.17)$$

In dieser Gleichung sind $\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}$ und p jetzt zeitgemittelte Größen und \mathbf{R} ist der sogenannte Reynoldsspannungstensor:

$$\mathbf{R} = -\overline{\hat{u}^i \hat{u}^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (3.18)$$

(3.17) wird auch Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichung (RANSE - Reynolds Averaged Navier Stokes Equation) genannt. Will man sie lösen, wird eine Bestimmungsgleichung für \mathbf{R} benötigt. Es lassen sich exakte Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen herleiten, doch läßt sich zeigen, daß diese ohne empirische Modellannahmen nicht zu bestimmen sind.

Die verbreitetsten Turbulenzmodelle basieren auf der sogenannten Wirbelviskositätshypothese. In dieser wird angenommen, daß der Reynoldsspannungstensor wie der viskose Spannungstensor von der Geschwindigkeit \mathbf{u} abhängt:

$$\mathbf{R} = \nu_T(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) - \frac{2}{3}k\delta^{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \quad (3.19)$$

Hier ist ν_T die ortsabhängige turbulente Viskosität, \mathbf{u} die zeitgemittelte Geschwindigkeit, k die turbulente kinetische Energie pro Masseneinheit und δ^{ik} das Kroneckersymbol. Der zweite Term in (3.19) stellt sicher, daß die halbe Summe der Normalspannungen $\frac{1}{2}\dot{u}^i\dot{u}^i$ die turbulente kinetische Energie k ergibt.

Setzt man (3.19) in (3.9) ein, ergibt sich:

$$(J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}u^k - J\tau^{ik}),_i = \quad (3.20)$$

$$-J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}^k p_{,i} + J\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^k + (J(\nu + \nu_T)\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}_{,j}\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{e}^k),_i - \frac{2}{3}(J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}^k k),_i$$

$$\tau^{ik} = (\nu + \nu_T)\mathbf{g}^{ij}u^k_{,j} \quad (3.21)$$

Mit (3.20) werden die Impulsgleichungen für die drei mittleren Impulskomponenten in turbulenten Strömungen berechnet. Zur Berechnung der turbulenten Viskosität ν_T werden sogenannte Turbulenzmodelle herangezogen, die einen teilempirischen Ansatz für ν_T beschreiben. In dem vorliegenden Verfahren wurden zwei verschiedene Turbulenzmodelle benutzt und miteinander verglichen: das k - ϵ -Modell und das Baldwin-Lomax-Modell.

3.4.1 k - ϵ -Turbulenzmodell

Das k - ϵ -Turbulenzmodell ist das bei der Berechnung turbulenter Strömungen verbreitetste Modell. Es wurde grundlegend von *Lauder und Spalding (1974)* beschrieben. In ihm wird die turbulente Viskosität mit Hilfe der turbulenten kinetischen Energie k und ihrer Dissipationsrate ϵ berechnet:

$$\nu_T = c_1 \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.22)$$

c_1 ist eine Konstante. Die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate werden mit folgenden Transportgleichungen berechnet:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}k - c_2\nu_T\nabla k) = G - \epsilon \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\epsilon - c_3\nu_T\nabla\epsilon) = c_4\frac{\epsilon}{k}G - c_5\frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.24)$$

c_2, c_3, c_4 und c_5 sind Konstanten und G ist die Produktionsrate turbulenter kinetischer Energie. In dem hier vorgestellten Berechnungsverfahren wurde der Standardsatz an Koeffizienten c_1 bis c_5 benutzt:

Konstanten im Turbulenzmodell				
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
0.09	1.0	0.769	1.44	1.92

Die Transportgleichungen für k und ϵ werden in ähnlicher Weise umgeformt, so daß partielle Ableitungen nach der kontravarianten Ortskoordinate eines krummlinigen Koordinatensystems gebildet werden. Mit $\nabla = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ und $(J\mathbf{g}^i)_{,i} = 0$ erhält man:

$$(J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}k),_i = (J\mathbf{g}^{ij}c_2\nu_T k_{,j}),_i + J(G - \epsilon) \quad (3.25)$$

und
$$(J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u} \varepsilon)_{,i} = (J g^{ij} c_3 \nu_T \varepsilon_{,j})_{,i} + J \left(c_4 \frac{\varepsilon}{k} G - c_5 \frac{\varepsilon^2}{k} \right) \quad (3.26)$$

Die Produktionsrate G der turbulenten kinetischen Energie entspricht der Energiedissipation der mittleren Hauptströmung durch die Reynoldsspannungen. Man erhält aus der Energiebilanzgleichung (siehe z.B. *White (1974)* oder *Hirsch (1988)*):

$$G = (\boldsymbol{\tau}_T \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \quad (3.27)$$

Der zweistufige Tensor $\boldsymbol{\tau}_T$ ist der mit der turbulenten Viskosität gebildete Spannungstensor, d.h. der Reynoldsspannungstensor ohne die Korrektur der kinetischen Energie:

$$\boldsymbol{\tau}_T = \nu_T \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3.28)$$

(3.27) mit (3.28) muß so umgeformt werden, daß partielle Ableitungen in einem krummlinigen Koordinatensystem gebildet werden können. Dazu wird der Geschwindigkeitsgradient umformuliert:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{g}^i \mathbf{u}_{,i} = g^{ij} \mathbf{g}_i (\mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^k) \mathbf{g}_k = g^{ij} \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^k \mathbf{g}_i \mathbf{g}_k$$

In dem letzten Ausdruck sind die Basisvektoren des Tensors $\mathbf{g}_i \mathbf{g}_k$ rechts zusammengefaßt. Analog ergibt sich für den transponierten Geschwindigkeitsgradienten:

$$(\nabla \mathbf{u})^T = g^{kj} \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_k$$

Daraus folgt:

$$\left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \cdot \nabla = g^{ij} \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^k \left(\mathbf{g}_i \frac{\partial}{\partial \xi^k} + \mathbf{g}_k \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right)$$

und schließlich:

$$G = \nu_T g^{ij} \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^k (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,k} + \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{u}_{,i}) \quad (3.29)$$

Die Transportgleichungen für k und ε sind nichtlinear. Im Gegensatz zu den Impulsgleichungen ist hier jedoch der konvektive Anteil linear, der diffusive Anteil und der Quellterm sind nichtlinear.

3.4.2 Turbulenzmodell von Baldwin und Lomax

Das Turbulenzmodell von *Baldwin and Lomax (1978)* ist ein algebraisches Modell, d.h. es müssen keine Transportgleichungen gelöst werden. Der Verzicht auf Transportgleichungen vereinfacht die Berechnung der turbulenten Viskosität erheblich, ist aber zugleich auch ein großer Mangel algebraischer Turbulenzmodelle. Auf dem Turbulenztransport beruhende Phänomene können damit nicht berücksichtigt werden.

Das Turbulenzmodell von Baldwin und Lomax lehnt sich an das Modell von *Cebeci and Smith (1978)* an, die damit auch Umströmungen um Schiffskörper berechnen. Im Gegensatz zu dem Turbulenzmodell von Cebeci et.al. erfordert das Modell von Baldwin und Lomax aber nicht die Berechnung der Grenzschichtdicke. Es ist damit für Lösungsverfahren für die reynoldsgemittelte Navier-Stokes-Gleichung besser geeignet.

In dem Turbulenzmodell von Baldwin und Lomax wird der wandnahe Bereich des Berechnungsgebietes in eine innere und eine äußere Region aufgeteilt. Die innere Region ist der Bereich in der Nähe einer

Wand mit Haftbedingung. In diesem Bereich wird die turbulente Viskosität mit einer Längenskala - Formel berechnet:

$$v_T^i = \left(K y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \right)^2 |\nabla \times \mathbf{u}| \quad (3.30)$$

In dieser Gleichung sind K die v.Karman - Konstante, A^+ die Ackermann - Konstante und y der Wandabstand. $y^+ = y \sqrt{\tau_w} / \nu$ ist der mit der Wandschubspannung τ_w und der Viskosität ν gebildete dimensionslose Wandabstand und $|\nabla \times \mathbf{u}|$ ist der Betrag der Rotation der Geschwindigkeit. In dem hier beschriebenen Verfahren werden an Wänden mit Haftbedingungen zur Berechnung der Wandschubspannungen sogenannte Wandfunktionen benutzt. Als Konsequenz daraus wird die turbulente Viskosität in einem Bereich $y^+ < 100$ nicht benötigt. In den Bereichen $y^+ > 100$ aber kann die Van Driest Korrektur, d.h. die innere Klammer in (3.30) vernachlässigt werden.

In dem äußeren Bereich wird die turbulente Viskosität mit:

$$v_T^o = k_o F_{WAKE} F_{KLEB} \quad (3.31)$$

berechnet. Darin ist k_o eine Konstante und:

$$F_{WAKE} = \text{MIN}(y_{MAX}^2 |\nabla \times \mathbf{u}|_{MAX}, c_{WK} u_{DIFF}^2 / |\nabla \times \mathbf{u}|_{MAX}) \quad (3.32)$$

Hier bezeichnen y_{MAX} und $|\nabla \times \mathbf{u}|_{MAX}$ den Wandabstand und den Betrag der Rotation der Geschwindigkeit an der Stelle, an der $y |\nabla \times \mathbf{u}|$ einen Maximalwert erreicht hat. u_{DIFF} ist der größte Unterschied des Betrages der Geschwindigkeit in einem Strömungsprofil. Das zweite Argument des MIN-Operators in (3.32) stellt eine stark vereinfachte Approximation für F_{WAKE} in Regionen mit abgelöster Strömung dar. Auch in (3.32) wurde die Van-Driest-Korrektur vernachlässigt.

Die Klebanov-Funktion F_{KLEB} sorgt für einen stetigen Verlauf der mit dieser Methode berechneten turbulenten Viskosität zwischen der äußeren Grenzschicht und dem Gebiet in größerer Entfernung von festen Wänden:

$$F_{KLEB} = \left(1 + 5.5 \left(\frac{c_{KLEB} y}{y_{MAX}} \right)^6 \right)^{-1} \quad (3.33)$$

Hier ist c_{KLEB} eine weitere Konstante. Die folgenden Konstanten wurden benutzt:

K	A^+	k_o	c_{WK}	c_{KLEB}
0.41	26	0.0269	0.25	0.3

Die Rotation der Geschwindigkeit wird in einem kontravarianten krummlinigen Koordinatensystem berechnet mit:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \times \mathbf{u}^k \mathbf{e}_k = \frac{1}{J} (J u^k \mathbf{g}^i \times \mathbf{e}_k),_i \quad (3.34)$$

Die Grenze zwischen äußerem und innerem Bereich befindet sich bei dem Wandabstand, bei dem v_T^o und v_T^i den gleichen Wert annehmen, d.h.:

$$v_T = \text{MIN}(v_T^i, v_T^o) \quad (3.35)$$

Bei dem Turbulenzmodell nach Baldwin-Lomax ist es erforderlich, Ebenen zu definieren, auf denen die Hauptströmungen näherungsweise senkrecht stehen. Bei der Berechnung der Umströmung längs angeströmter Schiffe sind dies zum Beispiel die Spantebenen. In diesen Ebenen wird wie oben beschrieben der Maximalwert des Produktes aus Wandabstand und Betrag der Rotation der Geschwindigkeit und der größte auftretende Unterschied des Betrages der Geschwindigkeit gesucht und der Berechnung der Viskosität zugrunde gelegt. Durch die Bestimmung der beschriebenen Maximalwerte vermeidet das Baldwin-Lomax-Modell die Einbeziehung einer Grenzschichtdicke in die Berechnung. In der Maximalwertbestimmung liegt aber auch zugleich eine erhebliche Einschränkung der praktischen Brauchbarkeit dieser Methode. Dies soll am Beispiel einer einfachen ebenen Grenzschichtströmung veranschaulicht werden.

In einer ebenen Grenzschichtströmung ist der Betrag der Rotation der Geschwindigkeit hauptsächlich von der Ableitung der wandparallelen Geschwindigkeit (u^p) nach der wandnormalen Ortskoordinate (y) abhängig, d.h. in der Wandnähe gilt näherungsweise: $|\nabla \times \mathbf{u}| \approx \partial u^p / \partial y$. In der Nähe einer festen Wand mit Haftbedingung hat das Geschwindigkeitsprofil einen logarithmischen Verlauf, d.h. $u^p \sim \ln y$. Daraus resultiert $|\nabla \times \mathbf{u}| \sim \frac{1}{y}$. Das Produkt aus Wandabstand und Betrag der Geschwindigkeitsrotation, das auf die Berechnung der Viskosität in der äußeren Region einen entscheidenden Einfluß hat, ist also näherungsweise eine Konstante. In einem numerischen Näherungsverfahren läßt sich aufgrund von Ungenauigkeiten der Wandabstand, bei dem das beschriebene annähernd konstante Produkt seinen Maximalwert hat, nur mit großen Fehlern bestimmen. Da die turbulente Viskosität aber aus dem Produkt des Betrages der Geschwindigkeitsrotation und dem Quadrat des Wandabstandes berechnet wird, ist dieser Wert mit großer Ungenauigkeit behaftet.

3.5 Randbedingungen der Impuls-, k - und ε -Gleichungen

Die Gleichungen (3.9), (3.16), (3.23) und (3.24), die für eine Lösung der gemittelten Navier Stokes Gleichungen zu lösen sind, sind im stationären Fall elliptische Gleichungen, die die Angabe von Randbedingungen an allen Rändern verlangen. Bei der Umströmung von Schiffskörpern (wie auch bei vielen anderen Strömungsproblemen) werden folgende Randbedingungen vorgesehen:

- Dirichletrandbedingung am Einströmrand:
Etwa eine Schiffslänge vor dem Schiff wird eine parallele Zuströmung angenommen. In einer freien Zuströmung bei einem fahrenden Schiff wird diese Zuströmung als konstant und turbulenzfrei angenommen. Ist das Fahrzeug in einem strömenden tiefenbegrenzten Gewässer verankert, wird ein Zuströmungsprofil angesetzt, das die Haftbedingung am Boden erfüllt.
- Neumannrandbedingung am Ausströmrand:
Am Ausströmrand wird angenommen, daß sich die Geschwindigkeit normal zum Rand nicht mehr ändert, d.h. die randnormalen Ableitungen verschwinden. Für die turbulente kinetische Energie wird angenommen, daß sie sich nur noch durch ihre Dissipationsrate ändert.
- Haftbedingung an festen Wänden:
Am Schiffskörper und bei tiefenbegrenzten Gewässern wird eine Haftbedingung vorgesehen, die in dem hier vorgestellten Verfahren durch Wandfunktionen realisiert wird.
- Schubspannungsfreie Wände an den seitlichen Begrenzungen des Berechnungsgebietes:
An den seitlichen Begrenzungen des Berechnungsgebietes wird angenommen, daß die randnormale Geschwindigkeitskomponente und die wandnormale Ableitung der wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten verschwinden. Auch die wandnormalen Ableitungen der turbulenten kinetischen Energie und ihrer Dissipationsrate verschwinden hier. Diese Randbedingung wird auch in der Wasserlinienebene realisiert.

Bei Strömungen auf flachem Wasser um ein verankertes Schiff ist die Zuströmung nicht konstant, sondern hat ein logarithmisches Profil. Dieses Profil erhält man beispielsweise aus Versuchsdaten. In diesem Fall muß auch die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate am Einströmrand gegeben sein. Die turbulente kinetische Energie ergibt sich aus einer Abschätzung der Turbulenzintensität, die für viele Strömungsprobleme aus Versuchsdaten bekannt ist. Mit der Turbulenzintensität T_u und

dem Betrag der gemittelten Hauptströmung u erfolgt eine Abschätzung der turbulenten kinetischen Energie:

$$k = \frac{3}{2} T_u^2 u^2 \quad (3.36)$$

Die Dissipationsrate am Einströmrand wird mit einer Abschätzung des turbulenten Längenmaßes angenähert:

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l} \quad (3.37)$$

Hier ist l das turbulente Längenmaß. Im Bodenbereich wird für l etwa der zweieinhalbfache Bodenabstand angenommen. Zwischen zwei Wänden ist l näherungsweise konstant ein Zehntel des Abstandes der Wände. Außerhalb der Grenzschicht gehen beide Turbulenzparameter gegen 0.

Am Ausströmrand verschwinden die randnormalen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten, d.h. im Diffusionsterm der Impulserhaltungsgleichung verschwinden die randnormalen Ableitungen.

Für die Berechnung der Turbulenzparameter wird folgendermaßen vorgegangen: Um das Berechnungsgebiet nicht so weit hinter das Schiff auszudehnen, bis sich eine turbulenzfreie Strömung eingestellt hat, wird davon ausgegangen, daß sich die turbulente kinetische Energie k am Ausströmrand nur noch durch Konvektion und die Dissipationsrate ändert, d.h.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^n k_{,n} = -\varepsilon \quad (3.38)$$

mit dem randnormalen kontravarianten Basisvektor \mathbf{g}^n und der Ableitung von k nach der kontravarianten Ortskoordinate ξ^n . Dieser Ausdruck wird in den Diffusionsterm von (3.23) eingeführt, wobei der Quellterm an dieser Stelle gleich Null gesetzt wird. Analog erhält man für die Dissipationsrate:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^n \varepsilon_{,n} = -c_5 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.39)$$

3.5.1 Logarithmische Wandfunktionen an festen Wänden mit Haftbedingung

An festen Wänden muß als Randbedingung die Haftbedingung erfüllt werden, d.h. die Geschwindigkeit der Strömung entspricht hier der Geschwindigkeit der Wand, in der Regel null. In unmittelbarer Wandnähe gilt das k - ε -Turbulenzmodell in der hier beschriebenen Form nicht mehr. Will man den Bereich unmittelbarer Wandnähe genau erfassen, ist hier eine sehr hohe Diskretisierung in Zusammenhang mit einer Variante des k - ε -Turbulenzmodelles - des sogenannten Low Reynolds-Number k - ε -Modells - erforderlich. Um die damit verbundenen Schwierigkeiten - insbesondere die mit der hohen Diskretisierung verbundene Vergrößerung der zu lösenden diskreten Gleichungssysteme - zu vermeiden, werden in dem hier beschriebenen Verfahren sogenannte Wandfunktionen eingesetzt, mit denen eine Beziehung zwischen dem normierten Wandabstand y^+ und der normierten Geschwindigkeit u^+ angegeben wird (z.B. *White (1974)*):

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + B \quad (3.40)$$

Hier ist $u^+ = u / \sqrt{|\tau_w|}$ und $y^+ = y \sqrt{|\tau_w|} / \nu$ mit der wandparallelen Geschwindigkeitskomponente u und dem Wandabstand y , an dem die Geschwindigkeit herrscht. τ_w ist die mit der Dichte normierte Wand Schubspannung, K die v. Karman-Konstante und B eine weitere Konstante:

$$\begin{aligned} K &= 0.41 \\ B &= 5.0 \end{aligned}$$

Das logarithmische Wandgesetz in der Form (3.40) hat einen begrenzten Gültigkeitsbereich:

$$30 < y^+ < 300$$

Um (3.40) in (3.9) einzusetzen, muß (3.40) nach der Wandschubspannung aufgelöst werden. Setzt man die Definition von u^+ und y^+ in (3.40) ein, erhält man:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_w}} = \frac{1}{K} \ln \frac{y \sqrt{\tau_w}}{\nu} + B \quad (3.41)$$

Diese Gleichung läßt sich nicht explizit nach τ_w auflösen. Von verschiedenen Entwicklern wurden Methoden entwickelt, die Wandschubspannung effektiv in (3.9) zu integrieren. In einem iterativen Berechnungsschema kann die neue Wandschubspannung beispielsweise mit dem Wert der letzten Iteration berechnet werden. Bezeichnet n den aktuellen Iterationsschritt, berechnet sich die Wandspannung näherungsweise mit:

$$\tau_w^n = \left(\frac{u}{\frac{1}{K} \ln \frac{y \sqrt{\tau_w^{n-1}}}{\nu} + B} \right)^2 \quad (3.42)$$

Dieses Vorgehen verlangt aber, daß die Wandschubspannung zwischen den einzelnen Iterationsschritten gespeichert wird. Zudem verlangsamt dies die Konvergenz des iterativen Verfahrens.

Hier wird daher ein anderer Weg beschritten. Im Intervall $30 < y^+ < 300$ läßt sich (3.40) mit hoher Genauigkeit mit einer Potenzfunktion approximieren:

$$u^+ = A (y^+)^N \quad (3.43)$$

Mit den Koeffizienten $A=8.14976$ und $N=0.14844$ approximiert diese Funktion (3.40) in dem genannten Gültigkeitsbereich mit einem Fehler kleiner 1.5 %, in weiten Teilen des Gültigkeitsbereiches deutlich darunter (Newman (1977) gibt die Koeffizienten $A=8.7$ und $N=1/7$ an). Weitere einfache Umformungen erlauben eine explizite Angabe der Wandschubspannung:

$$\tau_w = c \left(\frac{\nu}{y}\right)^2 (Re_y)^M \quad (3.44)$$

Hier ist $Re_y = \frac{uy}{\nu}$ die mit dem Wandabstand gebildete örtliche Reynoldszahl, und c und M sind zwei Konstanten:

$$M = \frac{2}{N+1} = 1.7415$$

und

$$c = \frac{1}{A^M} = 0.02590 \quad (3.45)$$

Bei der Wandschubspannung gemäß (3.44) handelt es sich um zweifach kontravariante physikalische Spannungstensorcomponenten. An einer festen Wand treten durch zwei mögliche wandparallele Geschwindigkeitskomponenten zwei kontravariante physikalische Tensorcomponenten $\bar{\tau}^{ij}$ mit $i \neq j$ auf. Mit (3.44) erhält man für die Schubspannungstensorcomponenten ($i \neq j$) an einer festen Wand:

$$\bar{\tau}^{ij} = c \left(\frac{v}{y^{(i)}} \right)^2 \left(\frac{\bar{u}^j y^i}{v} \right)^M \quad (3.46)$$

Dabei ist \bar{u}^j eine der beiden kontravariante physikalischen Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Wand und $y^{(i)}$ der Wandabstand, bei dem diese Geschwindigkeit auftritt:

$$\bar{u}^j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^j h_{(j)} \quad (3.47)$$

mit dem Metriktensor $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$ und $h_i = |\mathbf{g}_i|$. Die Klammerung der Indizes erfolgt hier, damit sichergestellt ist, daß die Einsteinsummenkonvention konsequent angewendet wird, d.h. geklammerte Indizes werden bei der Bildung eines Paares mit jeweils einem gleichlautenden oberen und unteren Index nicht berücksichtigt.

Um die kontravarianten metrischen Wandschubspannungstensorcomponenten in die Erhaltungsgleichung für eine kartesische Geschwindigkeitskomponente einzuführen, müssen sie transformiert werden. Der Tensor $\boldsymbol{\tau}$ in der Impulsgleichung (3.1) läßt sich durch Tensorcomponenten mit verschiedenen Basisvektoren ausdrücken:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau^{ik} \mathbf{g}_i \mathbf{e}_k = \bar{\tau}^{ij} \frac{1}{h_{(i)} h_{(j)}} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (3.48)$$

Hier bezeichnet τ^{ik} die gemischt kontravariant - kartesische Spannungstensorcomponente, wie sie in (3.9) für die Berechnung der Impulscomponente u^k benötigt wird, $\bar{\tau}^{ij}$ bezeichnet den kontravarianten metrischen Spannungstensor in (3.46). Man erhält daraus die Transformation:

$$\tau^{ik} = \bar{\tau}^{ij} \frac{1}{h_{(i)} h_{(j)}} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{e}^k \quad (3.49)$$

An festen Wänden existieren nur Schubspannungskomponenten. Die Normalspannungskomponente verschwindet an der Wand aufgrund der Divergenzbedingung, wie auf der folgenden Seite gezeigt wird. Auch die sich aus den transponierten Geschwindigkeitsgradienten ergebenden Tensorcomponenten verschwinden an festen Wänden. Dies läßt sich einfach zeigen, indem man die vollständigen Schub- und Normalspannungstensorcomponenten an einer festen Wand mit Haftbedingung als kontravariante metrische Tensorcomponenten in Abhängigkeit von wandparallelen und wandnormalen Ortskoordinaten und Geschwindigkeitskomponenten ausdrückt. Mit den beiden wandparallelen Ortskoordinaten ξ^i ($i=1,2$) und der wandnormalen Ortskoordinate η sowie den entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten u^{ξ^i} bzw. u^η lautet der Schubspannungstensor an einer Wand mit Haftbedingung:

$$\tau^{\eta \xi^i} = v \left(\frac{\partial u^{\xi^i}}{\partial \eta} + \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi^i} \right) \quad (3.50)$$

und der Normalspannungstensor:

$$\tau^{\eta \eta} = 2v \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} \quad (3.51)$$

In unmittelbarer Wandnähe muß aber der Masseerhaltungssatz (Divergenzbedingung) gelten, d.h.:

$$\frac{\partial u^{\xi^1}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial u^{\xi^2}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} = 0 \quad (3.52)$$

Da aber auf einer Wand mit Haftbedingung die Geschwindigkeit (relativ zur Wand) in jedem Fall (konstant) 0 ist, verschwinden auch die Ableitungen jeder Geschwindigkeitskomponente nach der

wandparallelen Ortskoordinate ξ^i . Das bedeutet, daß die Normalspannung gemäß (3.51) verschwindet, die Schubspannung entsprechend (3.50) reduziert sich auf:

$$\tau^{\eta\xi^i} = \nu \frac{\partial u^{\xi^i}}{\partial \eta} \quad (3.53)$$

Diese wird wie oben beschrieben mit den logarithmischen Wandfunktionen angenähert.

Bei der Verwendung logarithmischer Wandfunktionen ergeben sich Randbedingungen für die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate aus der Annahme, daß in der unmittelbaren Wandnähe Dissipation und Produktion turbulenter kinetischer Energie im Gleichgewicht sind. Dann erhält man für die turbulente kinetische Energie in der Wandzone:

$$k_W = \frac{\tau_W}{\sqrt{c_1}} \quad (3.54)$$

und ihre Dissipationsrate:

$$\varepsilon_W = \frac{\tau_W^{3/2}}{K y} \quad (3.55)$$

mit der Wandschubspannung τ_W , dem Wandabstand y und den Konstanten K und c_1 wie zuvor beschrieben.

3.5.2 Feste Wände mit Gleitbedingung

An Wänden mit Gleitbedingung treten per Definition keine Schubspannungen auf. Es treten aber neben dem Druck noch Normalspannungen auf. Die kontravariante physikalische Normalspannungstensor-Komponente, gebildet mit der auf dem Rand senkrecht stehenden Geschwindigkeitskomponente \bar{u}^i , ist:

$$\bar{\tau}^{i(i)} = 2\nu \partial \bar{u}^i / \partial y^{(i)} \quad (3.56)$$

wobei y^i der Wandabstand der Geschwindigkeitskomponente ist. Diese kontravariante physikalische Geschwindigkeitskomponente wird wie oben beschrieben transformiert. Man erhält dann mit (3.49):

$$\tau^{ik} = 2\nu \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial y^{(i)} h_{(i)} h_{(i)}} (\mathbf{g}_{(i)} \cdot \mathbf{e}^k) \quad (3.57)$$

wobei τ^{ik} die Spannungstensor-Komponente in (3.9) an Rändern mit Gleitbedingung bezeichnet. Auch hier wurde die Klammerung der Indizes eingeführt, um der Einsteinschen Summenkonvention zu genügen.

3.6 Randbedingung der Druckkorrekturgleichung

Zur Lösung der Druckkorrekturgleichung (3.16) werden ebenfalls Randbedingungen benötigt. Dabei wird so vorgegangen, daß nach der Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten mit (3.9) die Geschwindigkeiten auf dem Ausströmrand so korrigiert werden, daß das gesamte Berechnungsgebiet die Divergenzbedingung erfüllt, d.h. die Summe der in das Gebiet durch den Einströmrand einströmenden Wassermassen wird der Summe der ausströmenden Wassermassen durch den Ausströmrand gleichgesetzt. Dazu werden die mit (3.9) berechneten Geschwindigkeiten auf dem Ausströmrand mit einem konstanten Faktor multipliziert, der die Gleichheit der ein- und ausströmenden Wassermassen gewährleistet. Die damit verbundene Verletzung der Impulsgleichung verschwindet, wenn die rechte Seite der Druckkorrekturgleichung verschwindet, d.h. wenn eine konvergierte Lösung erreicht ist.

Die Randbedingung für die Druckkorrekturgleichung wird dann so festgelegt, daß die Geschwindigkeitskorrektur durch den Rand Null ist, d.h. auf den Rändern des Berechnungsgebietes verschwindet der Ausdruck:

$$\bar{u}^k = -\frac{1}{L^{(k)}} J \mathbf{g}^n \cdot \mathbf{e}^k \bar{p}_{,n} \quad (3.58)$$

Hier bezeichnet $\frac{\partial}{\partial \xi^n}$ eine Ableitung nach der randnormalen Ortskoordinate und \mathbf{g}^n den auf dem Rand senkrechtstehenden kontravarianten Basisvektor.

Eine Randbedingung für den Druck ist in den Navier-Stokes-Gleichungen nicht erforderlich, da diese nicht vom Druck selbst, sondern lediglich vom Druckgradienten abhängt. Es muß aber verhindert werden, daß Drücke berechnet werden, gegen die Druckdifferenzen im Berechnungsgebiet numerisch sehr klein sind, da dies zu großen Fehlern führen kann. Dazu wird die Druckkorrektur an einer ausgewählten Stelle des Berechnungsgebietes ignoriert, überall sonst wird die Druckkorrektur entsprechend reduziert.

4 Numerische Methode zur Lösung der Reynoldsgleichungen

In diesem Kapitel werden Linearisierungen und Vereinfachungen der zu lösenden Gleichungen, die Diskretisierung der Feldvariablen und der partiellen Ableitungen, das Iterationsschema und die Mehrgittermethode zur Beschleunigung der Iteration beschrieben.

4.1 Linearisierung und Vereinfachung der Gleichungssysteme

Zur Linearisierung der Impulsgleichungen wird der Fluß über die Zellgrenzen mit der aus dem letzten Iterationsschritt bekannten Geschwindigkeit berechnet. Mit ihr werden auch die Kreuzableitungen und der transponierte Geschwindigkeitsgradient des Diffusionstermes ermittelt, d.h. diese Anteile der Impulsgleichung werden explizit berechnet, da sie im Vergleich zu den anderen Anteilen der Impulsgleichung klein sind.

Bezeichnet $v=v^k \mathbf{e}_k$ einen bekannten Wert der Geschwindigkeit $\mathbf{u}=u^k \mathbf{e}_k$, lautet die linearisierte vereinfachte Impulsgleichung:

$$(J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{v} u^k - J \tau^{ik}),_i = \quad (4.1)$$

$$-J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}^k p_{,i} + J \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^k + (J(\mathbf{v} + \mathbf{v}_T) \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{v}_{,j} \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{e}^k),_i - \frac{2}{3}(J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}^k k),_i + (J(\mathbf{v} + \mathbf{v}_T) g^{ij} v^k_{,j}),_i^{(i \neq j)}$$

$$\tau^{ik} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}_T) g^{i(i)} u^k_{, (i)}$$

τ^{ik} enthält nach dieser Definition die Kreuzableitungen nicht mehr. In der Druckkorrekturgleichung werden die gemischten Ableitungen vernachlässigt. Die vereinfachte Druckkorrekturgleichung lautet dann:

$$(J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}_k (L^{(k)})^{-1} J \mathbf{g}^{(i)} \cdot \mathbf{e}^k \bar{p}_{, (i)}),_i = (J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}_k u^k),_i \quad (4.2)$$

Wenn $L^{(k)}$ für alle Komponenten des Impulses gleich wäre, könnte dieser Ausdruck weiter vereinfacht werden, indem die kontravarianten Basisvektoren zum kontravarianten metrischen Tensor zusammengefaßt werden. Die kartesischen Basisvektoren fallen dann weg. Wegen der nichtlinearen logarithmischen Wandfunktionen ist dies jedoch hier nicht möglich.

Bei den Gleichungen für die Turbulenzparameter k und ϵ werden der Diffusionsterm und nichtlineare Anteile des Quelltermes in ähnlicher Weise wie die Impulsgleichungen linearisiert. Um während der Iteration negative Werte der turbulenten Energie und ihrer Dissipationsrate auszuschließen, wird ein negativer Quellterm in der entsprechenden Gleichung pseudolinearisiert, indem er durch die turbulente kinetische Energie des letzten Iterationsschrittes dividiert und mit der des aktuellen Iterationsschrittes multipliziert wird. Bezeichnet \bar{k} einen bekannten Schätzwert der turbulenten kinetischen Energie k und $\bar{\epsilon}$ einen bekannten Schätzwert der Dissipationsrate von k , dann lautet die so vereinfachte Gleichung der turbulenten kinetischen Energie¹⁾:

$$(J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u} k - J g^{i(i)} c_2 v_T \bar{k}_{, (i)}),_i - \frac{MIN(0, S_k)}{\bar{k}} k = MAX(0, S_k) \quad (4.3)$$

mit
$$S_k = \left(J g^{ij} c_2 v_T \bar{k}_{, j} \right)^{i \neq j},_i + J (G - \epsilon) \quad (4.4)$$

¹⁾ Bei der Gleichung zur Berechnung der turbulenten kinetischen Energie k ist nur für diese zwischen dem bekannten (überstrichenen) und unbekanntem Wert unterschieden. Für alle anderen Gittervariablen wie die Geschwindigkeit und die Dissipationsrate werden in jedem Fall die bekannten Werte genommen. Dies gilt sinngemäß auch für die Dissipationsrate und die Geschwindigkeitskomponenten.

MIN bezeichnet den kleineren, MAX den größeren Wert des Wertepaares in der nachfolgenden Klammer.

Der positive Anteil des Quellterms der Gleichung für die Dissipationsrate hängt (nach Einsetzen der turbulenten Viskosität in der Produktionsrate G) gar nicht von ϵ ab und wird explizit behandelt. Der negative Anteil wird wie oben linearisiert. Die linearisierte ϵ -Gleichung lautet:

$$(J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u} \epsilon - J g^{i(i)} c_3 v_T \epsilon_{,i} + J c_5 \frac{\epsilon \bar{\epsilon}}{k} - \frac{MIN(0, S_\epsilon)}{\bar{\epsilon}} \epsilon = MAX(0, S_\epsilon) \quad (4.5)$$

mit
$$S_\epsilon = (J g^{ij} c_3 v_T \epsilon_{,j})^{i \neq j} + J c_4 c_1 \frac{G}{v_T} k \quad (4.6)$$

und
$$v_T = c_1 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (4.7)$$

In den Impulsgleichungen tritt eine weitere Nichtlinearität auf, wenn logarithmische Wandfunktionen benutzt werden. Außerdem hängen die Wandspannungen von allen Geschwindigkeitskomponenten ab. Der Schubspannungstensor an einer Wand wird daher ebenfalls linearisiert und in einen implizit und einen explizit zu berechnenden Teil aufgespalten.

Mit dem bekannten Wert v der Geschwindigkeit \mathbf{u} erhält man aus (3.46) eine in \mathbf{u} linearisierte Gleichung der kontravarianten metrischen Wandschubspannung ²⁾:

$$\bar{\tau}^{ij} = \frac{\partial \bar{\tau}^{(j)}}{\partial u^{(i)}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^j h_{(j)} \quad (4.8)$$

mit
$$\frac{\partial \bar{\tau}^{(j)}}{\partial u^{(i)}} = c \left(\frac{v}{y^i} \right)^{2-M} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^{(j)} h_{(j)})^{M-1} \quad (4.9)$$

und den kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^j , den Konstanten c und M , dem Wandabstand y^i , der Viskosität v und dem Betrag des kovarianten Basisvektors \mathbf{g}_i : $h_i = |\mathbf{g}_i|$. Bei einer Diskretisierung wie im nächsten Kapitel beschrieben, ist $y^i = 0.5 / \sqrt{g^{i(i)}}$.

Durch Transformation erhält man Spannungstensorkomponenten τ^{ik} , die an Wänden mit Haftbedingung in Gleichung (3.20) eingesetzt werden können:

$$\tau^{ik} = \frac{\partial \bar{\tau}^{(j)}}{\partial u^{(i)}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^j \frac{1}{h_{(i)}} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{e}^k \quad (4.10)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{u} wird weiter in ihre Komponenten zerlegt:

$$\tau^{ik} = \frac{\partial \bar{\tau}^{(j)}}{\partial u^{(i)}} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{g}^j \frac{1}{h_{(i)}} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{e}^k u^l \quad (4.11)$$

Die Spannungstensorkomponente τ^{ik} setzt sich somit aus sechs Summanden zusammen, da in ihr zwei kontravariante metrische Schubspannungen an der Wand vorkommen (zwei verschiedene j mit $j \neq i$), die jeweils von drei Geschwindigkeitskomponenten abhängen (u^l , $l=1,2,3$). Diese Komponenten werden in implizit zu berechnende ($l=k$) und explizit mit bekannten Geschwindigkeiten zu berechnende Summanden ($l \neq k$) aufgeteilt.

²⁾ Auch hier werden wie in Kapitel 3 geklammerte Indizes benutzt, damit gemäß der Einsteinschen Summenkonvention nur ein gleichlautender nicht geklammerter oberer und unterer Index vorkommt, über den summiert wird.

Die kontravarianten physikalischen Normalspannungstensoranteile $\bar{\tau}^{ij}$ mit $i = j$ werden an schubspannungsfreien Rändern mit einer wandorthogonalen physikalischen Geschwindigkeitskomponente \bar{u}^i , die in einem Abstand y^j von der Wand auftritt, approximiert:

$$\bar{\tau}^{ii} = 2\nu \frac{\bar{u}^i}{y^j} \quad (4.12)$$

Der Wandabstand y^j wird hier ebenfalls mit $y^j = 0.5/\sqrt{g^{(j)}}$ angenommen. Bei einem annähernd orthogonalen Diskretisierungsgitter in der Nähe des Randes gilt hier näherungsweise $h_i = 1/\sqrt{g^{(i)}}$. Die Spannungstensoranteile τ^{ik} in (3.57) berechnet sich dann näherungsweise mit:

$$\tau^{ik} = 4\nu g^{(ii)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^j)(\mathbf{g}_{(i)} \cdot \mathbf{e}^k) \quad (4.13)$$

Diese aufwendigen Ausdrücke für die Berechnung der Spannungstensoren an festen Wänden entstehen, da kartesische Geschwindigkeitskomponenten benutzt werden, die nur in Ausnahmefällen parallel zu den Wänden verlaufen. Die Ausdrücke vereinfachen sich erheblich, wenn statt dessen kontravariante metrische Geschwindigkeitskomponenten verwendet werden. Wie bereits in der Diskussion der Geschwindigkeitsnotationen in Kapitel 3 haben kontravariante Geschwindigkeitskomponenten aber andere Nachteile, die insbesondere bei Mehrgittermethoden überwiegen, so daß die mit kartesischen Geschwindigkeitskomponenten verbundenen komplexen Ausdrücke für den Spannungstensor in Wandnähe akzeptiert werden.

Neben der Komplexität der Berechnung der Spannungstensoren bei kartesischen Geschwindigkeitskomponenten ist ein weiterer Nachteil dieses Vorgehens, daß die Spannungstensoren zum Teil explizit berechnet werden müssen. Dies verlangsamt die Konvergenz des Verfahrens. Bei gegenüber einem kartesischen Koordinatensystem wenig geneigten Wänden ist die Verlangsamung jedoch gering, bei um 45 Grad geneigten Wänden hat sie ein Maximum.

4.2 Diskretisierung der Feldvariablen und der partiellen Ableitungen

Zur Diskretisierung wird das Berechnungsgebiet mit einem strukturierten, krummlinigen Gitter diskretisiert. Die diskreten Werte der variablen Strömungsparameter in diesem Gitter - die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit, der Druck, die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate - sind zusammen jeweils in der Mitte der Zelle angeordnet, d.h. es wird eine zellenzentrierte Notation der Gittervariablen gewählt.

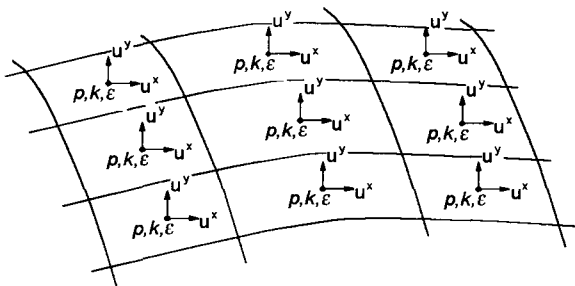


Bild 4.1: Zweidimensionales Diskretisierungsnetz

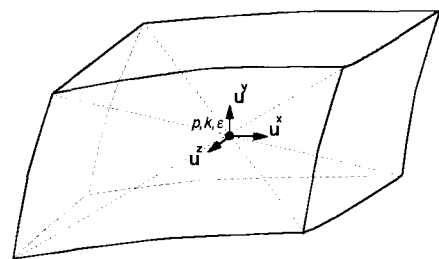


Bild 4.2: Finites Volumen

Das für die Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen benutzte krummlinige Koordinatensystem wird durch das Diskretisierungsgitter so definiert, daß sich die kontravariante Ortskoordinate ξ^i in der Mitte zweier benachbarter Diskretisierungszellen genau um den Betrag 1 unterscheidet. Hat der Zellenmittelpunkt einer beliebigen Zelle die kontravarianten Koordinaten $\xi^1=i$, $\xi^2=j$ und $\xi^3=k$, dann hat der Zellenmittelpunkt der linken Nachbarzelle die Koordinaten $\xi^1=i-1$, $\xi^2=j$ und $\xi^3=k$, der rechte

Nachbarzellenmittelpunkt hat die kontravarianten Koordinaten $\xi^1=i+1$, $\xi^2=j$ und $\xi^3=k$, der untere Nachbar $\xi^1=i$, $\xi^2=j-1$ und $\xi^3=k$ usw. wie in Bild 4.3 (für den ebenen Fall) skizziert.

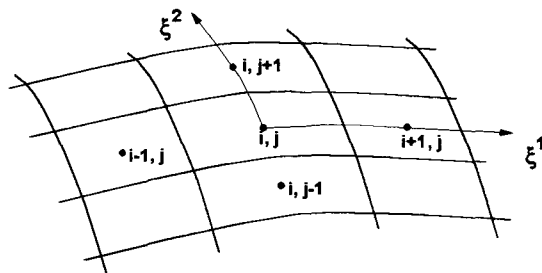


Bild 4.3: Kontravariante Ortskoordinaten

Nach der Überführung der Feldvariablen und Feldgleichungen in Gittervariable und -gleichungen werden die partiellen Ableitungen diskretisiert, d.h. die in den Gleichungen vorkommenden Differentiale werden durch finite Differenzen ersetzt.

In den zu lösenden Gleichungen kommen erste und zweite Ableitungen vor. Die zweiten Ableitungen (Diffusionsterme) werden mit finiten Differenzen der Ordnung $O(h^2)$ diskretisiert. Die ersten Ableitungen des Konvektionstermes wurden zunächst mit Aufwind-Differenzen erster Ordnung diskretisiert. Diese Kombination führt zu einem stabilen Lösungsverfahren mit guter Konditionierung der Matrizen der linearisierten diskreten Gleichungen. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß durch die erster Ordnung genaue Approximation des Konvektionstermes numerische Diffusion entsteht, die von gleicher Größenordnung oder größer als die tatsächliche (physikalische) Diffusion ist und damit das Berechnungsergebnis erheblich verfälscht. Es wurde daher für den Konvektionsterm eine Defekt-Korrektur vorgesehen, die es ermöglicht, den konvektiven Term mit einem gewichteten Mittel aus finiten Differenzen erster und zweiter Ordnung zu berechnen. Diese ist so in das Iterationsschema eingebettet, daß die guten Stabilitätseigenschaften eines erster Ordnung genauen Verfahrens weitgehend erhalten bleiben.

In den folgenden Gleichungen werden die finiten Differenzen einer beliebigen mit ϕ bezeichneten Gittervariablen an der Stelle (i, j, k) nach der kontravarianten Ortskoordinate ξ^l gemäß obiger Skizze gebildet.

Bei der Berechnung der konvektiven Änderung $(Jg^m \cdot u \phi)$, m muß neben der Änderung der Gittervariablen auch die Änderung des Flusses berücksichtigt werden, da der Konvektionsterm zur Verbesserung der Stabilität konservativ formuliert wurde. Bezeichnet f^m den Fluß in Richtung ξ^m , d.h.

$$f^m \phi = J g^m \cdot u \phi \quad (4.14)$$

mit der Jakobischen J , dem kontravarianten Basisvektor g^m und der Geschwindigkeit u , dann berechnet sich die konvektive Änderung der Gittervariablen ϕ an der Stelle (i, j, k) in Richtung ξ^l (d.h. $m=l$) mit der Differenzenformel erster Ordnung:

$$(f^l \cdot \phi)_{,1} \approx f^l(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot \phi(i + \frac{1}{2}, j, k) - f^l(i - \frac{1}{2}, j, k) \cdot \phi(i - \frac{1}{2}, j, k) \quad (4.15)$$

wobei:

$$\begin{aligned}
f^1(i - \frac{1}{2}, j, k) > 0 &\Rightarrow \phi(i - \frac{1}{2}, j, k) = \phi(i - 1, j, k) \\
f^1(i - \frac{1}{2}, j, k) < 0 &\Rightarrow \phi(i - \frac{1}{2}, j, k) = \phi(i, j, k) \\
f^1(i + \frac{1}{2}, j, k) > 0 &\Rightarrow \phi(i + \frac{1}{2}, j, k) = \phi(i, j, k) \\
f^1(i + \frac{1}{2}, j, k) < 0 &\Rightarrow \phi(i + \frac{1}{2}, j, k) = \phi(i + 1, j, k)
\end{aligned}$$

Der Diffusionsterm $(J\Gamma g^{mn} \phi, m), n$ der Gittervariablen ϕ mit der Jakobischen J , der Diffusivität Γ und dem kontravarianten metrischen Tensor g^{mn} wird in ähnlicher Weise diskretisiert. Der symmetrische Anteil des Diffusionstermes ($m=n$) wird in Richtung ξ^l (d.h. $m=n=l$) mit der folgenden Differenzenformel approximiert:

$$\begin{aligned}
(J\Gamma g^{11} \phi, 1), 1 &\approx J(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot \Gamma(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot g^{11}(i + \frac{1}{2}, j, k) \cdot (\phi(i + 1, j, k) - \phi(i, j, k)) \\
&\quad - J(i - \frac{1}{2}, j, k) \cdot \Gamma(i - \frac{1}{2}, j, k) \cdot g^{11}(i - \frac{1}{2}, j, k) \cdot (\phi(i, j, k) - \phi(i - 1, j, k))
\end{aligned} \tag{4.16}$$

In diesen Differenzenformeln werden Variablen an der Stelle $(i+1/2, j, k)$ durch Mittelung der Variablen an den Stellen (i, j, k) und $(i+1, j, k)$ gewonnen. Dies bedeutet in der Regel, daß die Position $(i+1/2, j, k)$ nicht mit der Grenze zwischen den Zellen (i, j, k) und $(i+1, j, k)$ übereinstimmt.

Bei der Defekt-Korrektur wird der mit Differenzenformeln erster Ordnung implizit berechnete konvektive Term mit einem explizit berechneten gewichteten Mittel aus Differenzenformeln erster und zweiter Ordnung korrigiert. Für die folgenden Differenzenformeln wird von einer eindimensionalen Betrachtung ausgegangen. Bezeichnet f den Fluß über die Zellgrenzen eines eindimensionalen Gitters, ξ die Ortskoordinate und i ihren aktuellen Wert sowie ϕ^κ die Gittervariable ϕ des Iterationsschrittes κ , dann berechnet sich die konvektive Änderung von ϕ mit der Differenzenformel:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \approx f(i + \frac{1}{2}) \cdot \phi(i + \frac{1}{2}) - f(i - \frac{1}{2}) \cdot \phi(i - \frac{1}{2}) \tag{4.17}$$

mit:

$$\begin{aligned}
f(i - \frac{1}{2}) > 0 &\Rightarrow \phi(i - \frac{1}{2}) = \phi^\kappa(i - 1) - \alpha \left(\phi^{\kappa-1}(i - 1) - \phi^{\kappa-1}(i - \frac{1}{2}) \right) \\
f(i - \frac{1}{2}) < 0 &\Rightarrow \phi(i - \frac{1}{2}) = \phi^\kappa(i) - \alpha \left(\phi^{\kappa-1}(i) - \phi^{\kappa-1}(i - \frac{1}{2}) \right) \\
f(i + \frac{1}{2}) > 0 &\Rightarrow \phi(i + \frac{1}{2}) = \phi^\kappa(i) - \alpha \left(\phi^{\kappa-1}(i) - \phi^{\kappa-1}(i + \frac{1}{2}) \right) \\
f(i + \frac{1}{2}) < 0 &\Rightarrow \phi(i + \frac{1}{2}) = \phi^\kappa(i + 1) - \alpha \left(\phi^{\kappa-1}(i + 1) - \phi^{\kappa-1}(i + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned}$$

Der Wichtungsfaktor α ist ein nach Stabilitätskriterien zwischen 0 und 1 festzulegender Parameter. Die Differenzenformel (4.17) ist zweiter Ordnung genau bei $\alpha=1$ und erster Ordnung genau bei $\alpha=0$, da sich die Gittervariablen ϕ^κ und $\phi^{\kappa-1}$ im konvergierten Zustand nach Abbruch der Iteration nur noch um einen vernachlässigbaren Schwellenwert unterscheiden. Die Konditionierung der Koeffizientenmatrix der linearisierten Gleichungssysteme, die aus den Differenzenformeln (4.15) und (4.17) resultieren, unterscheiden sich nicht. In beiden Fällen lassen sich die daraus resultierenden, linearisierten Gleichungssysteme mit einem iterativen Lösungsverfahren gut lösen.

In den Impulsgleichungen wird ebenfalls eine Approximation des Druckgradienten benötigt. Er wird nichtkonservativ mit zentralen Differenzen berechnet:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi^1} \approx p_e - p_w \tag{4.18}$$

Dabei bezeichnen p_e und p_w die linear interpolierten Drücke auf dem rechten (EAST) und linken (WEST) Rand der Diskretisierungszelle i . Diese Drücke werden nicht durch Mittelung, sondern durch lineare Interpolation gewonnen, um mit dem kontravarianten Basisvektor konsistent zu sein, der mit der Druckdifferenz den Druckgradienten bildet.

4.3 Globales Iterationsschema

parameter linearisiert, vereinfacht und diskretisiert werden, um ein System von Gleichungen mit diagonaldominanten Koeffizientenmatrizen. In diesen sind neben der Hauptdiagonalen im zweidimensionalen Fall nur vier, im dreidimensionalen Fall nur sechs Nebendiagonalen besetzt. Bei Außerachtlassung der Koppelungen zwischen diesen Gleichungssystemen lassen sich diese einzeln leicht mit einem iterativen Verfahren lösen.

Eine Lösung, die alle Impuls-, Druckkorrektur und Turbulenzgleichungen in der nichtlinearisierten Form simultan erfüllt, wird mit der globalen SIMPLE-Iteration berechnet. Der SIMPLE-Iterationszyklus setzt sich wie folgt zusammen:

SIMPLE - Iterationszyklus:

- (i) Festlegen von Startwerten für die Geschwindigkeitskomponenten, den Druck und die Turbulenzparameter, Interpolation der Flüsse über die Zellgrenzen.
- (ii) Sukzessive Berechnung einer Näherung der Geschwindigkeitskomponenten mit den unterrelaxierten, linearisierten diskreten Impulsgleichungen auf Basis des bekannten Druckes und der bekannten Zellgrenzenflüsse.
- (iii) Berechnung der Flüsse über die Zellgrenzen mit einer Interpolationsmethode, die den örtlichen Druckgradienten an den Zellgrenzen berücksichtigt (spezielle Geschwindigkeitsinterpolation, s. Kap 4.3.3).
- (iv) Berechnung der Druckkorrektur mit Hilfe der Druckkorrekturgleichung und dem Massedefekt, der sich aus den oben berechneten Flüssen ergibt. Berechnung der Geschwindigkeitskorrektur mit Hilfe der Geschwindigkeitskorrekturgleichung.
- (v) Addition der Korrekturgeschwindigkeiten zu den unter (ii) berechneten Geschwindigkeiten, Addition der unterrelaxierten Druckkorrektur zum bekannten Druck. Korrektur der Massenflüsse über die Zellgrenzen.
- (vi) Berechnung einer Näherung der Turbulenzparameter mit den entsprechenden linearisierten diskreten Gleichungen, die ebenfalls unterrelaxiert werden.
- (vii) Berechnung des Residuums, gegebenenfalls Speicherung von Zwischenergebnissen.
- (viii) Wiederholung der Schritte (ii) bis (vii) bis das Residuum einen vorgegebenen Schwellenwert erreicht hat.

Die SIMPLE-Iteration ist also eine zweifach geschachtelte Iteration. In der inneren Iteration werden Näherungslösungen der linearisierten Gleichungssysteme berechnet, in der äußeren Iteration werden die Linearisierungen aufgelöst und eine Lösung bestimmt, die simultan alle Erhaltungsgleichungen erfüllt.

In den folgenden Kapiteln wird auf einige spezielle Aspekte des beschriebenen Iterationsschemas eingegangen.

4.3.1 Startwerte, Unterrelaxation und Residuen

Am Beginn der SIMPLE-Iteration müssen Startwerte für die Geschwindigkeitskomponenten, den Druck und die Turbulenzparameter festgelegt werden.

Für die Geschwindigkeiten ist es grundsätzlich unerheblich, welche Startwerte verwendet werden. Bei einem iterativen Verfahren kann eine geeignete Wahl von Startwerten die notwendige Anzahl von Iterationszyklen erheblich reduzieren. Bei Testrechnungen hat es sich als vorteilhaft erwiesen, Startwerte zu nehmen, die in jeder Diskretisierungszelle die Divergenzbedingung erfüllen, d.h. die aus den Geschwindigkeiten interpolierten Flüsse über die Zellgrenzen müssen in jeder Zelle 0 bilanzieren. Die Reduktion notwendiger globaler Iterationszyklen hierdurch war erheblich.

Um solche Startwerte zu erhalten, wurde folgendermaßen vorgegangen: Zunächst wurde die Geschwindigkeit im ganzen Berechnungsgebiet auf die Geschwindigkeit des Einströmrandes gesetzt. Bei längs angeströmten Schiffsförmern sind dies bereits relativ gute Startwerte. Mit diesen Geschwindigkeiten wird die Druckkorrekturgleichung gelöst. Nach Berechnung der Druckkorrektur wird mit dieser eine Geschwindigkeitskorrektur berechnet und zur geschätzten Startgeschwindigkeit addiert, so daß der Massenerhaltungssatz zumindest annähernd erfüllt ist. Die Druckkorrektur wird ignoriert, d.h. sie wird nicht zum Startdruck addiert, der damit den Wert 0 im ganzen Berechnungsgebiet behält. Dieses Ignorieren der ersten Druckkorrektur ist für das Konvergenzverhalten entscheidend, da die ersten Druckkorrekturen physikalisch unplausible Druckspitzen enthalten, die durch die in einigen Diskretisierungszellen unvermeidlichen Massendefekte der ersten Geschwindigkeitsschätzung entstehen. Das Verfahren arbeitet auch, wenn eine erste Schätzung der Geschwindigkeiten nicht möglich ist und daher überall 0 angenommen wird, solange nirgends im Berechnungsgebiet die Viskosität 0 gesetzt ist. Allerdings ist es in diesem Fall günstiger, in der Druckkorrekturgleichung (4.2) für L^k den Kehrwert eines sehr kleinen Zeitintervalls anzunehmen. Bei einem Euler-Problem ist dieses sogar zwingend notwendig. Das Zeitintervall ist so klein zu wählen, daß die Courant-Bedingung erfüllt ist. Praktisch bedeutet dies, es wird die Druckkorrekturgleichung berechnet, die aus einer voll expliziten Berechnung der Impulsänderung hervorgeht.

Die Annahme von 0 als Startwert für die Turbulenzparameter ist nicht möglich, da beide im Nenner vorkommen, so daß hier sinnvolle von 0 verschiedene Werte angenommen werden. Der Startwert der turbulenten kinetischen Energie wird mit einer Referenzgeschwindigkeit gebildet:

$$k_{init} = c_k u_{ref} \quad (4.19)$$

Bei Schiffsumströmungen ist u_{ref} die ungestörte Parallelströmung weit vor dem Schiff, c_k ist eine Konstante. Der Anfangswert der Dissipationsrate ϵ wird so bestimmt, daß die mit den Anfangswerten berechnete turbulente Viskosität in einem sinnvollen Verhältnis zur laminaren Viskosität steht:

$$\epsilon_{init} = c_1 \frac{k_{init}^2}{\nu c_\epsilon} \quad (4.20)$$

Hier ist c_1 eine bereits im letzten Kapitel beschriebene Konstante des k - ϵ -Turbulenzmodells, ν die molekulare Viskosität und c_ϵ eine weitere Konstante. c_ϵ wird so festgelegt, daß die aus den Anfangswerten k_{init} und ϵ_{init} gebildete turbulente Viskosität in einem sinnvollen Verhältnis zur laminaren Viskosität steht. Im hier beschriebenen Verfahren wurden folgende Konstanten benutzt:

$$\begin{aligned} c_k &= 0.01 \\ c_\epsilon &= 0.1 \text{ bis } 1.0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Unterrelaxation:

Die Unterrelaxation der Geschwindigkeiten und der Turbulenzparameter wird in die entsprechenden Gleichungssysteme integriert. Im folgenden bezeichnet

$$L_C \phi_C^\kappa + \sum_{NB} L_{NB} \phi_{NB}^\kappa = r \quad (4.22)$$

die linearisierte Gleichung zur Lösung einer diskreten Strömungsvariablen ϕ_C , in der L_C die Koeffizienten der Hauptdiagonale, L_{NB} die Koeffizienten der Nebendiagonalen und ϕ_{NB} die Strömungsvariablen der benachbarten Gitterzellen bezeichnen. Der Hochindex κ bezeichnet den aktuellen Iterationsschritt. Eine lineare Unterrelaxation berechnet die unterrelaxierte Strömungsvariable ϕ_ω aus einem mit dem Relaxationsfaktor ω gewichteten Mittel der Strömungsparameter des aktuellen Iterationsschrittes κ und des letzten Iterationsschrittes $\kappa-1$:

$$\phi_\omega^\kappa = \omega \phi_C^\kappa + (1 - \omega) \phi_C^{\kappa-1} \quad (4.23)$$

Durch Umformen und Einsetzen von (4.23) in (4.22) erhält man ein Gleichungssystem für die Berechnung der unterrelaxierten Strömungsvariablen:

$$\frac{L_C}{\omega} \phi_w^\kappa + L_{NB} \phi_{NB}^\kappa = r + \frac{1-\omega}{\omega} L_C \phi_C^{\kappa-1} \quad (4.24)$$

Die Unterrelaxation des Druckes ist einfach durchzuführen. Nach Berechnung der Druckkorrektur wird nur ein Teil dieser Druckkorrektur zum Druck addiert:

$$p_{korr} = p + \omega_P \partial p \quad (4.25)$$

Hier bezeichnet p_{korr} den korrigierten Druck, p den unkorrigierten Druck, wie er der Berechnung der Geschwindigkeiten zugrundegelegt wird, ∂p bezeichnet die Druckkorrektur und ω_P den Unterrelaxationsfaktor für den Druck. In dem vorliegenden Verfahren wurden in der Regel folgende Relaxationsfaktoren benutzt:

$\omega_V = 0.8$	für die Geschwindigkeitskomponenten
$\omega_P = 0.2$	für die Druckkorrektur
$\omega_k = \omega_\epsilon = 0.7$	für die Turbulenzparameter k und ϵ

Genauere Hinweise hierzu werden bei der Beschreibung der Berechnungsbeispiele gegeben.

Residuum:

Zur Berechnung des Residuums wurde entweder die Max-Norm oder die 1-Norm benutzt. Bezeichnet ∂r_i das Residuum einer bestimmten Zelle und n die Anzahl aller Zellen, berechnet sich die 1-Norm mit:

$$\|\partial r\|_1 = \sum_{i=1}^n |\partial r_i| \quad (4.26)$$

und die Max-Norm:
$$\|\partial r\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad (4.27)$$

Das so berechnete Residuum wurde mit dem Residuum normiert, das sich aus dem Startwert 0 ergibt, d.h. es wurde durch die entsprechende Norm der rechten Seite dividiert.

Das Residuum wurde für die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten, den Volumenfluß und die Turbulenzparameter berechnet. Die globale Iteration wurde abgebrochen, wenn der größte dieser sechs Werte einen Schwellenwert unterschritten hatte.

4.3.2 Diskrete Druckkorrekturgleichung

Bei der Lösung der Druckkorrekturgleichung (4.2) wird eine Näherung des kombinierten Konvektions-Diffusionsoperators $L^{(k)}$ benötigt. In der diskretisierten linearisierten Impulsgleichung ist $L^{(k)}$ die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems. Aufgrund der iterativen Berechnung genügt in der Druckkorrekturgleichung jedoch eine Näherung dieser Matrix, damit die Inversion vereinfacht wird. Es wurden zwei verschiedene Näherungen verwendet.

Die linearisierte diskrete Form der Gleichung (4.1) zur Berechnung einer diskreten Geschwindigkeitskomponente u_c^k der Zelle "C" kann geschrieben werden als:

$$l_C^{(k)} u_C^k + \sum_{NB} l_{NB}^{(k)} u_{NB}^k = r^k \quad (4.28)$$

wobei u_{NB}^k die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten der benachbarten Diskretisierungszellen bezeichnet, $l_C^{(k)}$ und $l_{NB}^{(k)}$ sind die dazugehörigen Koeffizienten, d.h. das Hauptdiagonalelement und die Nebendiagonalelemente der aktuellen Zeile der Koeffizientenmatrix.

Im SIMPLE-Schema wird als Näherung für die Koeffizientenmatrix $L^{(k)}$ in der Druckkorrekturgleichung (4.2) nur die Hauptdiagonale verwendet, d.h. in der diskreten Form der Druckkorrekturgleichung gilt:

$$L^{(k)} \approx l_C^{(k)} \quad (4.29)$$

Die Vernachlässigung der Nebendiagonalelemente vereinfacht die Lösung der diskreten Druckkorrekturgleichung erheblich. Sie beeinträchtigt das Ergebnis nicht, da die Druckkorrekturgleichung im konvergierten Zustand am Ende der globalen Iteration homogen ist und die Druckkorrektur dementsprechend verschwindet. Durch die Vernachlässigung der Nebendiagonalen ist allerdings eine Unterrelaxation des Druckes erforderlich, wie im vorigen Kapitel bereits beschrieben wurde.

Durch eine Erweiterung der SIMPLE-Methode, die im Kapitel 2 bereits diskutierte SIMPLEC-Methode, wird die erhebliche Unterrelaxation des Druckes überflüssig. Bei der SIMPLEC-Methode wird die Näherung der Koeffizientenmatrix der Impulsgleichung, die in der Druckkorrekturgleichung benötigt wird, wie folgt berechnet:

$$L^{(k)} \approx l_C^{(k)} + \sum_{NB} l_{NB}^{(k)} \quad (4.30)$$

Diese Näherung beruht auf der Annahme, daß sich die Geschwindigkeit von einer Diskretisierungszelle zur nächsten nur wenig unterscheidet. Durch die SIMPLEC-Methode ist es möglich, auf eine Unterrelaxation des Druckes zu verzichten. Allerdings ist es dann erforderlich, den Unterrelaxationsfaktor der Geschwindigkeiten zu reduzieren. Bei den mit der SIMPLEC-Methode durchgeführten Berechnungen wurden folgende Unterrelaxationsfaktoren benutzt:

$$\begin{aligned} \text{SIMPLEC-Unterrelaxation:} \quad \omega_P &= 1.0 \\ \omega_V &= 0.5 \end{aligned}$$

Mit diesen Unterrelaxationsfaktoren wurde in vereinzelt Testrechnungen ein im Vergleich zum Standard-SIMPLE-Verfahren deutlich besseres Konvergenzverhalten ermittelt. Diese Verbesserung war jedoch nicht bei allen Strömungsproblemen zu erreichen. Die notwendige Reduzierung der

Unterrelaxation der Geschwindigkeiten hat nämlich einen Einfluß auf die Geschwindigkeitsinterpolation zur Berechnung der Flüsse an den Zellgrenzen, wie im folgenden Kapitel beschrieben. Dadurch sind bei Strömungsproblemen mit Hindernissen Stabilitätsprobleme aufgetreten. Die SIMPLEX-Methode wurde daher in der Regel nicht benutzt.

4.3.3 Geschwindigkeitsinterpolation

Zur Berechnung des Volumendefektes als rechter Seite der Druckkorrekturgleichung ist es erforderlich, die Geschwindigkeiten auf den Rändern der finiten Volumina durch Interpolation zu ermitteln. Um Oszillationen des Druckes zu vermeiden, muß die Geschwindigkeit hier vom lokalen Druckgradienten abhängig sein, d.h. der Druckgradient an dieser Stelle wird als Differenz der Drücke der beiden zu diesem Rand gehörenden Zellen berechnet. Um dies zu erreichen, wurde die spezielle Geschwindigkeitsinterpolation von *Rieh and Chow (1983)* vorgesehen.

Im folgenden wird nur die Grenze zweier in ξ^1 - Richtung benachbarter Zellen betrachtet, an der der Zellgrenzenfluß mit der speziellen Geschwindigkeitsinterpolation bestimmt werden soll. Bezeichnungskonventionen sind im folgenden Bild enthalten. Die Positionen der Zellenmitte werden mit "C" und "E", die involvierten Zellgrenzen mit "w", "e" und "ee" gemäß Skizze bezeichnet:

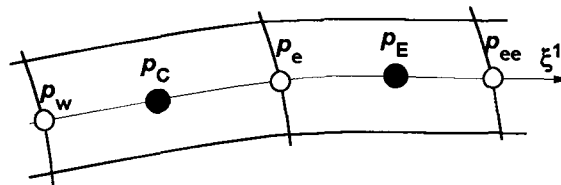


Bild 4.4: Geschwindigkeitsinterpolation an der Grenze benachbarter Zellen

Die Geschwindigkeitsinterpolation arbeitet prinzipiell folgendermaßen: Die Geschwindigkeiten in den Zellenmitten C und E werden um den Einfluß der dortigen Druckgradienten reduziert. Aus diesen reduzierten Geschwindigkeiten wird durch Interpolation die reduzierte Geschwindigkeit an der Position e bestimmt. Dort wird der Einfluß des Druckgradienten wieder hinzugefügt, wobei bei der Berechnung des Druckgradienten jetzt nur die Drücke p_C und p_E berücksichtigt werden.

Die reduzierte Geschwindigkeitskomponente \hat{u}^k im Punkt C berechnet sich aus:

$$\hat{u}_C^k = u_C^k + \frac{J_C \mathbf{g}_C^1 \cdot \mathbf{e}^k (p_e - p_w)}{l_C^{(k)}} \quad (4.31)$$

Darin bezeichnet u_C^k die Geschwindigkeitskomponente k im Punkt C, J_C und \mathbf{g}_C^1 die Jakobische und den kontravarianten Basisvektor an dieser Stelle, \mathbf{e}^k den kartesischen Basisvektor, $l_C^{(k)}$ bezeichnet den zentralen Koeffizienten der diskreten Gleichung zur Berechnung von u^k gemäß (4.28) und p_e bzw. p_w sind die Drücke an den Zellgrenzen der Zelle C, wie sie in (4.18) zur Berechnung des Druckgradienten im Punkt C benutzt wurden.

Mit dieser reduzierten Geschwindigkeit im Punkt C und einem sinngemäß berechneten Wert im Punkt E wird die reduzierte Geschwindigkeit im Punkt e berechnet:

$$\hat{u}_e^k = \frac{\hat{u}_C^k + \hat{u}_E^k}{2} \quad (4.32)$$

unterschiedlichem Seitenverhältnis. Für die Besetzung der Matrizen bedeutet dies, daß sich die Größenordnungen der Nebendiagonalelemente einer Zeile stark unterscheiden. Für derartige Berechnungen eignet sich die SOR-Methode wenig. Sie konvergiert nur dann gut, wenn die Zellen eine nahezu quadratische Form haben. LGS-Methoden sind gut geeignet, wenn alle Zellen entweder ein quadratisches bis sehr kleines oder ein quadratisches bis sehr großes Seitenverhältnis haben. Durch die Approximation der Hafrandbedingung mit dem logarithmischen Wandgesetz kann die notwendige Diskretisierung in unmittelbarer Wandnähe zwar deutlich gesenkt werden, bei Strömungen mit Reynoldszahlen in der Größenordnung um $5 \cdot 10^6$ bei längs angeströmten Schiffen sind aber Zellenseitenverhältnisse von $1/_{300}$ bis 300 praktisch nicht zu vermeiden.

In diesem Fall zeigt die SIP-Methode das beste Konvergenzverhalten. Bei dieser Methode handelt es sich um eine unvollständige Links-Rechts-Zerlegung, bei der die zerlegten Dreiecksmatrizen wie die entsprechenden linken und rechten Seiten der Ausgangsmatrix besetzt sind. Durch eine geeignete Manipulation der Ausgangsmatrix ist das Produkt der zerlegten Dreiecksmatrizen eine Approximation der Ausgangsmatrix, die zu einem stabilen Lösungsverfahren führt.

Innerhalb eines SIMPLE-Zyklus ist nicht immer die vollständige Lösung der linearisierten Gleichungssysteme erforderlich. Die folgende Tabelle beschreibt die Anzahl der SIP-Iterationszyklen, die in einem SIMPLE-Zyklus zur Berechnung der linearen Gleichungssysteme durchgeführt wurde:

Lineares Gleichungssystem	SIP - Iterationszyklen
Geschwindigkeitskomponenten	1 bis 2
Druckkorrektur	bis vorgegebenes Maximalresiduum unterschritten ist
Turbulenzparameter k und ϵ	1 bis 2

Bei der Berechnung praktischer Strömungsprobleme werden heute üblicherweise Diskretisierungsgitter mit etwa 50.000 bis 500.000 Gitterzellen verwendet. Das bedeutet, daß innerhalb eines globalen Iterationszyklus sechsmal ein lineares Gleichungssystem mit 50.000 bis 500.000 Unbekannten näherungsweise gelöst werden muß. Bei vielen Strömungsproblemen werden etwa 50 bis 500 globale Iterationszyklen durchgeführt. Der hieraus resultierende Rechenaufwand ist die Ursache dafür, daß man nach Verfahren gesucht hat, mit dem die iterativen Algorithmen beschleunigt werden können. In dem hier vorgestellten Verfahren wurde hierfür die **Mehrgittermethode** implementiert. Sie wird in den nächsten Kapiteln beschrieben.

4.4 Mehrgittermethode

Die Mehrgittermethode ist eine allgemeine Methode für die Beschleunigung iterativer Lösungsverfahren. Sie wurde grundlegend von *Hackbusch (1985)* und von *Stüben und Trottenberg (1981)* beschrieben. Die hier vorgestellte Methode ist angelehnt an das Verfahren von *Peric (1990)*, der die Strömung über eine rückwärts springende Stufe in einem orthogonalen zweidimensionalen Gitter berechnet.

4.4.1 Grundprinzip

Ein beliebiges diskretes lineares oder nichtlineares Gleichungssystem (GLS) wird fortan mit:

$$L(\phi) = r \tag{4.36}$$

bezeichnet, wobei L einen Operator bezeichnet, der auf die Unbekannte ϕ angewendet wird, und r bezeichnet die rechte Seite des Gleichungssystems (GLS). Wenn dieses GLS iterativ gelöst wird - z.B.

durch einfache oder im nichtlinearen Fall wiederholte Anwendung des SIP-Lösers - ,erhält man nach einigen Iterationszyklen eine Näherungslösung für ϕ , die das Gleichungssystem nur bis auf ein Residuum δr erfüllt:

$$L(\bar{\phi}) = r + \delta r \quad (4.37)$$

wobei $\bar{\phi}$ die Näherungslösung für ϕ und δr das Residuum bezeichnet. Für eine Lösung muß man $\bar{\phi}$ um eine Korrektur $\delta\phi$ ergänzen, mit der das GLS erfüllt ist:

$$L(\bar{\phi} + \delta\phi) = r \quad (4.38)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Korrektur $\delta\phi$, um die $\bar{\phi}$ ergänzt werden muß, damit das Residuum δr verschwindet, erhält man durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen:

$$L(\bar{\phi} + \delta\phi) = L(\bar{\phi}) - \delta r \quad (4.39)$$

Wenn L ein linearer Operator ist, vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für $\delta\phi$:

$$L(\delta\phi) = -\delta r \quad (4.40)$$

Man hat nun festgestellt, daß die meisten iterativen Lösungsverfahren in der Lage sind, hochfrequente Fehler, d.h. eine Verteilung des Residuums im Gitter, die sich von Gitterzelle zu Gitterzelle stark ändert, sehr schnell zu reduzieren. Es stellt sich dann eine relativ glatte niederfrequente Fehlerverteilung ein, die von den gebräuchlichen iterativen Lösern nur schlecht reduziert wird. Man spricht in diesem Fall von den Glättungseigenschaften eines iterativen Lösers bzw. von einem Glätter.

Die Mehrgittermethode macht sich diese Eigenschaft iterativer Löser zunutze. Bei ihr werden Lösungen des GLS, d.h. in unserem Fall die Erfüllung der diskretisierten Erhaltungssätze, auf mehreren Gittern bestimmt. Man berechnet zunächst eine Näherung der Lösung auf dem feinsten Gitter. Es stellt sich eine glatte Fehlerverteilung ein. Auf einem gröberen Gitter wird dann eine Korrektur der Lösung berechnet. Dies ist aus zweierlei Gründen auf dem groben Gitter einfacher. Zum einen hat eine niederfrequente Fehlerverteilung auf einem feinen Gitter in einem groben Gitter bereits eine höhere Fehlerverteilungsfrequenz, zum anderen bestehen die korrespondierenden Gleichungssysteme auf dem gröberen Gitter aus sehr viel weniger Unbekannten als auf dem feinen Gitter.

In dem hier vorgestellten Verfahren wird eine volumenorientierte Gittervergrößerung benutzt, d.h. eine Zelle des groben Gitters entsteht im zweidimensionalen Fall wie im nachfolgenden Bild durch Zusammenfassen von vier Zellen des feinen Gitters, dreidimensional durch Zusammenfassen von acht Feingitterzellen.

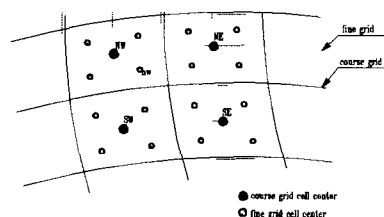


Bild 4.5: Feingitter und Grobgitter

Der Mehrgitter-Berechnungsalgorithmus setzt sich dann wie folgt zusammen:

- Auf dem feinen Gitter - gekennzeichnet mit dem Index h - wird eine Näherungslösung von ϕ berechnet, die das GLS bis auf ein Residuum δr^h erfüllt:

$$L^h(\bar{\phi}^h) = r^h + \delta r^h \quad (4.41)$$

- Bei einem sogenannten Full Approximation Scheme (FAS) werden die Näherungslösung und das Residuum des Feingitters auf das gröbere Gitter übertragen. Man spricht dabei von der Restriktion. In der folgenden Gleichung bezeichnet I_h^H den Restriktionsoperator für die Gittervariablen, \hat{I}_h^H bezeichnet den Restriktionsoperator für das Residuum:

$$\bar{\phi}^H = I_h^H \bar{\phi}^h, \quad \delta r^H = \hat{I}_h^H \delta r^h \quad (4.42)$$

- Auf dem groben Gitter wird die Grobgitterlösung $\bar{\bar{\phi}}^H$ des GLS berechnet mit:

$$L^H(\bar{\bar{\phi}}^H) = \hat{L}^H(\bar{\phi}^H) - \delta r^H \quad (4.43)$$

Wenn L ein nichtlinearer Operator ist, unterscheiden sich L^H und \hat{L}^H . L^H wird mit $\bar{\bar{\phi}}^H$ gebildet und \hat{L}^H mit $\bar{\phi}^H$.

- Aus der Grobgitterlösung wird die Grobgitterkorrektur berechnet:

$$\delta\phi^H = \bar{\bar{\phi}}^H - \bar{\phi}^H \quad (4.44)$$

- Wenn L ein linearer Operator ist, kann die Grobgitterkorrektur direkt berechnet werden, ohne daß die Gittervariable auf das Grobgitter übertragen werden müssen (Correction Scheme, CS):

$$L^H \delta\phi^H = -\delta r^H \quad (4.45)$$

- Die Korrektur auf dem groben Gitter wird auf das feine Gitter übertragen und dort zur angenäherten Feingitterlösung addiert. Der Vorgang wird Prolongation genannt. Bezeichnet I_H^h den Prolongationsoperator vom groben auf das feine Gitter, berechnet sich die korrigierte Feingitterlösung $\bar{\bar{\phi}}^h$ mit:

$$\bar{\bar{\phi}}^h = \bar{\phi}^h + I_H^h \delta\phi^H \quad (4.46)$$

Die so korrigierte Lösung des feinen Gitters erfüllt in der Regel das GLS noch nicht, da durch die Prolongation neue Fehler eingeführt werden. Das Residuum ist allerdings hochfrequent und kann daher leicht durch einige zusätzliche Iterationszyklen mit dem Glätter reduziert werden.

Das Verfahren kann rekursiv angewendet werden, d.h. die Lösung auf dem groben Gitter kann berechnet werden, indem nur eine Näherungslösung bestimmt und diese nach dem gleichen Verfahren mit der Korrektur eines noch größeren Gitters verbessert wird. Benutzt man ein FAS-Verfahren, wird die Konvergenz des Verfahrens nochmals verbessert, indem man mehrere FAS-Zyklen hintereinander durchführt, d.h. der Zyklus aus Berechnung der Feingitterapproximation (Pre-Iteration), Restriktion, Berechnung der Grobgitterkorrektur, Prolongation und Post-Iteration wird mehrfach wiederholt.

Die Restriktion wird in dem hier beschriebenen Verfahren wie folgt berechnet: Das Residuum einer Grobgitterzelle wird durch Addition der Residuen der entsprechenden Feingitterzellen bestimmt. Die Grobgittervariablen werden als mit der Jakobischen gewichtetes Mittel der entsprechenden Feingittervariablen bestimmt. Bezeichnen mit h^i indizierte Größen die zu einem Grobgitter gehörenden Feingitterzellen, dann lautet die Restriktion des Residuums:

$$\delta r^H = \sum_{h^i \in H} \delta r^{h^i} \quad (4.47)$$

Die Restriktion der Gittervariablen ergibt mit der Jakobischen J^{h^i} der Feingitterzellen und der Jakobischen J^H der Grobgitterzelle:

$$\bar{\phi}^H = \frac{1}{J^H} \sum_{h^i \in H} J^{h^i} \bar{\phi} \quad (4.48)$$

Das Residuum ist grundsätzlich der Fehler einer Bilanz der Flüsse über die Zellgrenzen eines finiten Volumens - seien dies Masse-, Volumen- oder Energieflüsse. Es läßt sich daher leicht veranschaulichen, daß sich das Grobgitterresiduum aus der Summe der Feingitterresiduen zusammensetzt. Die Gittervariablen des Grobgitter ergeben sich nach (4.48) als mit dem jeweiligen Zellvolumen gewichtetes Mittel der Feingittervariablen. Die verwendeten Gittervariablen sind im vorliegenden Fall grundsätzlich koordinatensysteminvariant (d.h. Skalare oder Tensoren mit konstanten Basisvektoren). Die gewichtete Mittelung ist lediglich eine vereinfachte Interpolation der Gittervariablen in der Zellenmitte der Grobgitterzelle aus den Gittervariablen in der Zellenmitte der Feingitterzellen.

Die Prolongation der Grobgitterkorrektur auf das feine Gitter erfolgt hier in zweidimensionalen Gittern mit einer bilinearen bzw. im dreidimensionalen Gitter mit einer trilinearen Interpolation. Besondere Beachtung muß man dieser Interpolation an den Rändern des Berechnungsgebietes widmen. Auf Einströmrandern ist die Korrektur null, auf Ausströmrandern ist die Änderung der Korrektur senkrecht zum Rand null. Dementsprechend wird die Geschwindigkeitskorrektur auf der randnahen Feingitterzelle durch Interpolation des Wertes der wandnahen Grobgitterzelle auf 0 bestimmt. Die Korrektur der Druckes der wandnahen Feingitterzelle wird auf den Wert der Korrektur des Druckes der wandnahen Grobgitterzelle gesetzt.

Ein Berechnungszyklus, der sich aus einigen Feingitteriterationszyklen (den Prä-Iterationszyklen), der Berechnung der Grobgitterkorrektur mit anschließender Prolongation und einigen weiteren Feingitteriterationszyklen (den Post-Iterationszyklen) zusammensetzt, wird auch V-Zyklus genannt. Dies trifft auch zu, wenn zur Berechnung der Grobgitterkorrektur rekursiv noch gröbere Gitter eingesetzt werden. Bei der Lösung eines nichtlinearen Problems mit dem FAS werden in der Regel mehrere V-Zyklen hintereinander ausgeführt, wobei jeweils nur wenige Post-Iterationszyklen durchgeführt werden. Nach jeder Restriktion oder Prolongation werden die Koeffizienten des Gleichungssystems neu berechnet, d.h. dementsprechend auch nach jedem V-Zyklus. Bei einem linearen Problem, das mit dem CS gelöst wird, bleiben die Koeffizienten des Gleichungssystems auf allen Gitterebenen konstant. Es ist daher sinnvoll, nur einen V-Zyklus mit im Vorwege ermittelten Koeffizienten des Gleichungssystems zu berechnen. Dabei werden wie bei dem FAS nur wenige Prä-Iterationszyklen berechnet, nach der Prolongation aber so viele Post-Iterationszyklen, wie zur Unterschreitung des vorgegebenen Residuums notwendig sind.

Für die ersten Iterationszyklen auf dem feinen Gitter wird nach wie vor eine erste Schätzung der Lösung als Startwert der Iteration benötigt. Im sogenannten Prolongation Scheme (PG) wird ein erster Schätzwert des Feingitters dadurch gewonnen, daß man zunächst auf dem groben die Lösung berechnet und diese auf das feine Gitter prolongiert. Bei der Prolongation der Grobgitterlösung benutzt man die gleiche Interpolationsoperation wie bei der Prolongation der Grobgitterkorrektur. Lediglich in der Nähe von Rändern des Berechnungsgebietes kann diese abweichen.

Die Kombination von FAS und PG wird FAS / Full Multigrid, FAS/FMG, genannt. Dabei wird zunächst eine Grobgitterlösung bestimmt und diese auf das feine Gitter übertragen. Dort bestimmt man dann eine Näherungslösung und überträgt diese und das Residuum wiederum auf das grobe Gitter. Dort wird eine Grobgitterkorrektur berechnet und auf das feine Gitter prolongiert, um die Feingitterapproximation zu korrigieren. Auch dieser Algorithmus ist rekursiv, d.h. man beginnt auf dem größten Gitter

und berechnet dann sukzessive mit FAS / FMG die Lösung auf mehreren Gitterebenen bis man die Lösung auf dem feinsten Gitter gefunden hat. Man nennt dies auch einen Sägezahnalgorithmus.

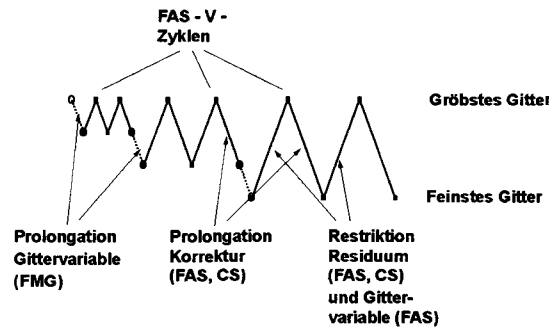


Bild 4.6: Sägezahnalgorithmus

4.4.2 Mehrgitteralgorithmus für die Navier-Stokes-Gleichungen

Bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ist zu beachten, daß der konvektive Term in der Impulsgleichung nichtlinear von der Geschwindigkeit, der Druckgradient hingegen linear vom Druck abhängig ist. Außerdem ist die rechte Seite der diskreten linearisierten Impulsgleichungen wegen der Querableitungen und wegen der explizit behandelten Anteile der konvektiven Änderungen und der Wandspannungen ebenfalls von der Geschwindigkeit abhängig.

Mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u} = u^k \mathbf{e}_k$ kann die diskretisierte Impulserhaltungsgleichung der NSE für die Geschwindigkeitskomponente u^k folgendermaßen geschrieben werden:

$$l^k(\mathbf{u}) \cdot u^k = d^k(p) + r^k(\mathbf{u}) \quad (4.49)$$

Dabei bezeichnet l^k den kombinierten Konvektions-Diffusionsoperator für die Geschwindigkeitskomponente u^k , d.h. die von \mathbf{u} abhängige Koeffizientenmatrix der diskreten Impulsgleichung. $d^k(p)$ bezeichnet die k -te Komponente des Druckgradienten und $r^k(\mathbf{u})$ die wegen der Querableitungen und der explizit behandelten Anteile der konvektiven Änderungen und der Wandspannungen schwach von der Geschwindigkeit abhängige rechte Seite.

Nach der Durchführung einiger SIMPLE-Iterationszyklen auf dem feinen Gitter ist eine Näherung der Geschwindigkeit und des Druckes gefunden, die die Impulsgleichung bis auf ein Residuum erfüllt (die Indizes h bzw. H für die Bezeichnung der Gitterebenen werden fortan weggelassen):

$$l^k(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{u}^k = d^k(\bar{p}) + r(\bar{\mathbf{u}}) + \delta r \quad (4.50)$$

Hier bezeichnet $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}^k \mathbf{e}_k$ die Näherungslösung der Geschwindigkeit, \bar{p} die des Druckes und δr das Residuum. Mit einer korrigierten Geschwindigkeit und einer Korrektur des Druckes wird die Impulsgleichung:

$$l^k(\bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}) \cdot (\bar{u}^k + \delta u^k) = d^k(\bar{p} + \delta p) + r(\bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}) \quad (4.51)$$

mit den Korrekturen der Geschwindigkeit $\delta \mathbf{u} = \delta u^k \mathbf{e}_k$ und des Druckes δp erfüllt. Durch Subtraktion der letzten beiden Gleichungen erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Korrekturen, die das Residuum verschwinden lassen:

$$l^k(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}^k = d^k \cdot \delta p + r(\bar{\mathbf{u}}) + \underbrace{l^k(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}^k - r(\bar{\mathbf{u}}) - \delta r}_{\text{konstant}} \quad (4.52)$$

mit
$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}^k = \bar{\mathbf{u}}^k + \delta u^k \quad ; \quad \bar{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u} \quad (4.53)$$

Zunächst wird mit einigen SIMPLE-Iterationszyklen auf dem feinen Gitter eine Näherungslösung der Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}^k \mathbf{e}_k$ und des Druckes \bar{p} berechnet. Sie erfüllt die Impulsgleichung bis auf ein Residuum δr entsprechend (4.50). Die angenäherten Geschwindigkeiten und das Residuum werden jetzt in der beschriebenen Weise auf das grobe Gitter restringiert, der Druck jedoch nicht, da auf dem groben Gitter nur eine Druckkorrektur berechnet wird. Es wird also für die Geschwindigkeiten wegen der Nichtlinearitäten ein Full Approximation Scheme benutzt, für den Druck genügt ein Correction Scheme.

Auf dem groben Gitter wird zunächst der Ausdruck $l^k(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{u}}^k - r(\bar{\mathbf{u}}) - \delta r$ explizit berechnet. Er bleibt bei der nun folgenden SIMPLE - Iteration auf dem Grobgitter konstant und wird zur rechten Seite der Grobgitter-Impulserhaltungsgleichung addiert. Mit (4.52) werden nun auf dem groben Gitter die Grobgitterlösung der Geschwindigkeit $\bar{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\bar{u}}^k \mathbf{e}_k$, die Grobgitter-Druckkorrektur δp und mit (4.53) die Grobgitterkorrektur der Geschwindigkeit δu^k berechnet. Als Startwerte der SIMPLE - Iteration auf dem groben Gitter wird für die Geschwindigkeit die Restriktion der approximierten Feingittergeschwindigkeit benutzt. Für die Druckkorrektur auf dem Grobgitter δp ist der Startwert null. Die Grobgitterkorrekturen δu^k und δp werden auf das feine Gitter prolongiert und dort zu den Feingitter - Näherungswerten \bar{u}^k und \bar{p} addiert. Einige weitere SIMPLE-Iterationszyklen auf dem feinen Gitter glätten Fehler, die durch Ungenauigkeiten der Prolongation der Korrekturen auf das Feingitter entstehen.

Bei der Berechnung turbulenter Strömungen mit dem $k-\varepsilon$ - Modell geht man sinngemäß vor. Wegen der Nichtlinearitäten ist hier wieder ein Full Approximation Scheme erforderlich. Die rechte Seite ist wiederum von k bzw. ε abhängig. Man berechnet auf dem feinen Gitter innerhalb des SIMPLE Algorithmus eine Näherung der Turbulenzparameter \bar{k} und $\bar{\varepsilon}$ sowie das Residuum dieser Näherung. Die Grobgitterlösung ergibt sich dann zu:

$$l(\bar{\bar{k}}) \cdot \bar{\bar{k}} = r(\bar{\bar{k}}) + l(\bar{k}) - r(\bar{k}) - \delta r \quad (4.54)$$

mit der Grobgitterlösung $\bar{\bar{k}}$, der restringierten Feingitterlösung \bar{k} und dem restringierten Residuum δr . Die Grobgitterkorrektur:

$$\delta k = \bar{\bar{k}} - \bar{k} \quad (4.55)$$

wird auf das feine Gitter prolongiert und dort zur Feingitternäherung addiert. Entsprechend geht man auch bei der ε - Gleichung vor.

Wie beschrieben kann der Algorithmus mit einem FMG-Verfahren zur Schätzwertermittlung kombiniert werden. Außerdem kann zur Bestimmung der Grobgitterlösung ein noch gröberes Gitter zur Beschleunigung der Konvergenz verwendet werden.

Das beschriebene FAS / FMG - Schema ist ein Verfahren zur Beschleunigung der SIMPLE-Iteration, die bereits weiter oben als äußere Iteration bezeichnet wurde. Der SIMPLE-Algorithmus selbst nimmt auf den unterschiedlichen Ebenen die Funktion eines Glätters ein. Innerhalb des SIMPLE-Algorithmus

auf den verschiedenen Gitterebenen wird immer die Massenerhaltung mit Hilfe der linearisierten Druckkorrekturgleichung und einer Korrektur der Geschwindigkeiten und des Druckes erfüllt. Hierzu wird ebenfalls ein iteratives Schema angewendet, das als innere Iteration bezeichnet wird. Hierbei kann man - sofern man sich nicht auf dem größten Gitter befindet - ein Korrekturschema verwenden. Man bestimmt zunächst eine Näherungslösung der Druckkorrektur \bar{p} auf dem aktuellen Gitter (h), so daß die Divergenzbedingung bis auf ein Residuum erfüllt ist:

$$I^h \cdot \bar{p}^h = r^h + \delta r^h \quad (4.56)$$

Diese Näherung der Druckkorrektur wird auf dem nächst größeren Gitter weiter korrigiert, wozu das Residuum zuvor auf das gröbere Gitter restringiert werden muß:

$$I^H \cdot \delta \bar{p}^H = -I_h^H \delta r^h \quad (4.57)$$

Die Grobgitterkorrektur der Druckkorrektur wird auf das feine Gitter prolongiert und dort zur Näherungslösung der Druckkorrektur addiert:

$$\bar{\bar{p}}^h = \bar{p}^h + I_H^h \delta \bar{p}^H \quad (4.58)$$

$\bar{\bar{p}}^h$ ist die Lösung der Druckkorrektur auf dem feinen Gitter, mit der die Geschwindigkeitskorrektur berechnet wird.

Es ist zu beachten, daß in einem SIMPLE-Verfahren grundsätzlich kein Druck direkt berechnet wird, sondern (auch ohne Mehrgitterverfahren) lediglich eine Druckkorrektur. Mit dem Mehrgitterkorrekturschema wird dann eine Korrektur dieser Druckkorrektur berechnet. Dies gilt für einen SIMPLE-Algorithmus auf dem feinsten Gitter. Bei einer SIMPLE-Iteration auf einem größeren Gitter ist der Druck auf dieser Gitterebene selbst eine Druckkorrektur für das nächst feinere Gitter. Mit der Druckkorrekturgleichung dieser Gitterebene wird eine Korrektur dieser Druckkorrektur berechnet. Die Iteration zur Berechnung dieser Korrektur der Druckkorrektur kann wiederum durch ein Mehrgitterkorrekturschema beschleunigt werden, mit dem eine Korrektur der Korrektur der Druckkorrektur berechnet wird.

Bei der praktischen Implementation müssen einige weitere Punkte berücksichtigt werden:

- Bei einem Zweigitterverfahren wird die SIMPLE-Iteration auf dem Grobgitter abgebrochen, wenn das Residuum dort zwei Größenordnungen kleiner ist als das letzte Residuum der Feingitterebene vor der Restriktion. Eine weitere Reduzierung des Grobgitterresiduums führt in der Regel nicht zu einer Verbesserung der Feingitterkorrektur. Bei einem Mehrgitteralgorithmus wird so auf der größten Gitterebene verfahren.
- Bei einem Mehrgitteralgorithmus kann die Feingitterkorrektur nach einem V-Zyklus innerhalb einer FAS-Iteration geringer sein als bei einem Zweigitteralgorithmus, da bei einem Mehrgitteralgorithmus nicht sichergestellt ist, daß das Residuum der zweitfeinsten Gitterebene tatsächlich zwei Größenordnungen kleiner ist als das der feinsten vor der Restriktion. Bei einem Zweigitteralgorithmus ist dies jedoch gegeben (s.o.).
- Bei der Restriktion der Geschwindigkeiten auf das grobe Gitter kann durch Ungenauigkeiten der Interpolation ein zusätzlicher Massedefekt entstehen. Wenn man die Flüsse über die Grobgitterzellgrenzen durch Restriktion der Flüsse der Feingitterzellen berechnet, entstehen zwar zunächst keine zusätzlichen interpolationsbedingten Massedefekte, jedoch korrespondieren dann die Grobgittergeschwindigkeiten und die Grobgitterflüsse vor allem in stark gekrümmten Gitterbereichen nicht. In beiden Fällen entstehen Störungen, die die auf dem Grobgitter berechnete und dann prolongierte Korrektur verschlechtern. In dem hier beschriebenen Verfahren werden daher auf dem Grobgitter nach der Restriktion der Gittervariablen und vor der SIMPLE-Iteration die Zellgrenzenflüsse aus

den zellenzentrierten Geschwindigkeiten berechnet und der daraus resultierende Massedefekt in den Zellen bei der Berechnung der Druckkorrektur innerhalb der SIMPLE-Iteration von der rechten Seite der Druckkorrekturgleichung abgezogen.

- Analog muß man vermeiden, daß durch die Prolongation der Korrekturen auf das feine Gitter zusätzliche Massedefekte entstehen. In diesem Fall wird einmalig vor Beginn der SIMPLE-Iteration nach der Prolongation die Druckkorrekturgleichung gelöst und die Geschwindigkeiten korrigiert. Die Druckkorrektur wird ignoriert. Bei Testrechnungen hat sich aber gezeigt, daß diese Korrektur dann nicht notwendig ist, wenn bei der Lösung der Druckkorrekturgleichung auf dem groben Gitter ein kleineres Residuum erreicht wird als auf dem feineren Gitter.
- Ein negatives restringiertes Residuum der Transportgleichungen für die Turbulenzparameter kann während der Iteration zu negativen Werten für k und ϵ führen. Dementsprechend werden negative restringierte Residuen auf dem groben Gitter wie die negativen Terme der rechten Seite der Transportgleichungen behandelt.
- Bei der Prolongation der Korrekturen der Turbulenzparameter können durch Interpolationsungenauigkeiten negative Werte für k und ϵ auftreten. In diesem Fall wird die Korrektur ignoriert (man darf an dieser Stelle weder verschwindende noch sehr kleine Turbulenzparameter annehmen).
- Es hat sich für die Stabilität des Verfahrens ebenfalls als günstig erwiesen, die turbulente Viskosität ebenfalls nur auf dem feinsten Gitter des aktuellen FAS - Zyklusses zu berechnen und auf den größeren Gittern restringierte Werte der turbulenten Viskosität des Feingitters zu benutzen, die konstant bleiben. Der FAS-Algorithmus für die Turbulenzparameter wird jedoch beibehalten. Dies bedeutet, daß die Berechnung der Geschwindigkeiten auf dem Grobgitter von der Berechnung der Turbulenzparameter auf dem Grobgitter entkoppelt ist.

Bei der Berechnung praktischer Probleme, d.h. in gekrümmten, an bestimmten Stellen stark zusammengezogenen Gittern, treten zwei weitere Probleme auf, die das Konvergenzverhalten verschlechtern und sogar zu einem nicht konvergierenden Verhalten der Iteration führen können:

- Bei dem angegebenen Gittervergrößerungsschema entstehen Grobgitter, die deutlich weniger glatt sind als das nächst feinere Gitter. Bei einem Feingitter, das an einer Stelle des Diskretisierungsgebietes zusammengezogen ist und dessen Zellenabmessungen von dieser Stelle ausgehend mit jeder Zelle um einen bestimmten Faktor wachsen, entsteht daraus ein Grobgitter, bei dem sich die Abmessungen benachbarter Zellen um das Quadrat dieses Faktors unterscheiden. Durch die Reduzierung der Glattheit der größeren Gitter verschlechtert sich die Lösung, die auf diesem Gitter erzielt wird, und damit die Grobgitterkorrektur, die auf das feine Gitter prolongiert wird.
- Eine weitere Verschlechterung des Konvergenzverhaltens kann durch das Verfahren entstehen, mit dem während der Iteration negative Werte der turbulenten kinetischen Energie k und ihrer Dissipationsrate ϵ vermieden werden. Die Koeffizientenmatrizen der linearisierten Gleichungssysteme für k und ϵ sind M-Matrizen (Minkowski-Matrizen), bei denen nur dann negative Ergebnisse entstehen können, wenn die rechte Seite des Gleichungssystems negativ ist. Um dies grundsätzlich auch für Zwischenergebnisse der iterativen Berechnung zu vermeiden, werden negative rechte Seiten pseudolinearisiert, d.h. sie werden durch die Lösung des letzten Iterationsschrittes dividiert und mit der unbekanntem Lösung des aktuellen Iterationsschrittes multipliziert. Auf diese Weise erhält man auf der rechten Seite der Gleichung 0 und eine höhere Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix.

Die linearisierte Gleichung zur Bestimmung eines diskreten Wertes ϕ_c (ϕ kann die turbulente kinetische Energie oder ihre Dissipationsrate sein) lautet:

$$l_C \phi_C + l_{NB} \phi_{NB} = r \quad (4.59)$$

mit den Gitternachbarn ϕ_{NB} von ϕ_C und dem Hauptdiagonalelement l_C sowie den Nebendiagonalelementen l_{NB} der Koeffizientenmatrix. Wenn $r < 0$ ist, werden negative Werte für ϕ_C vermieden, indem r durch den Wert von ϕ_C des letzten Iterationsschrittes dividiert und mit dem aktuellen Wertes multipliziert wird. Bezeichnet κ den aktuellen Iterationsschritt, dann erhält man nach dieser Umformung aus (4.59):

$$\left(l_C - \frac{r}{\phi_C^{\kappa-1}} \right) \phi_C^\kappa + l_{NB} \phi_{NB}^\kappa = 0 \quad (4.60)$$

Durch diese Umformung wird die Gleichung unterrelaxiert, wobei der resultierende Relaxationsfaktor:

$$\omega^- = \frac{\phi_C^{\kappa-1} l_C}{\phi_C^{\kappa-1} l_C - r} \quad (4.61)$$

lautet. Diese Unterrelaxation tritt immer auf, wenn r einen negativen Wert annimmt, also auch ohne Mehrgitterbeschleunigung der Iteration. In einem "Full Approximation Scheme" enthält r auf dem groben Gitter allerdings auch das restringierte Residuum des Feingitters. Der Betrag von r kann dann so groß werden, daß daraus ein sehr kleiner Unterrelaxationsfaktor entsteht. Bei Testrechnungen traten auf Grobgittern Unterrelaxationsfaktoren bis $1/1000$ auf. Als Folge konvergierte das Gleichungssystem für k und ε sehr langsam. Der Unterrelaxationsfaktor ändert sich allerdings auf jeder Gitterebene und bei jedem SIMPLE-Iterationsschritt.

Mit einer begrenzten Diskretisierung läßt sich ein glattes Feingitter nicht immer realisieren, so daß die Grobgitter umso weniger glatt werden. Die starke Unterrelaxation läßt sich durch eine geeignete Wahl von Startwerten nur bedingt vermeiden. Beides verlangsamt die Konvergenz des Mehrgitteralgorithmus. Das Berechnungsergebnis verschlechtert sich jedoch nicht.

5 Programmentwicklung und Programmbenutzung

Das beschriebene Verfahren wurde als Rechnerprogramm in der Programmiersprache C entwickelt. Die Entscheidung für C im Gegensatz zu dem bei numerischer Programmierung eher üblichen FORTRAN ist im wesentlichen eine persönliche Präferenz des Entwicklers gewesen. C ist eine kompakte Programmiersprache. Sie bietet im Vergleich zu Standard-FORTRAN einige Vorteile, die sie auch für numerische Programmierung attraktiv macht:

➤ Rekursion:

C erlaubt die Programmierung eines rekursiven Funktionsaufrufes, FORTRAN nicht. Für die Programmierung eines Mehrgitter -"Full Approximation Scheme" ist die rekursive Programmierung eine starke Vereinfachung. Folgende Zeilen Pseudocode erläutern die einfache Programmierung unter Ausnutzung rekursiver Funktionsaufrufe:

```
procedure fas ( gitterebene h)
    simple_iterationszyklen ( gitterebene h );
    restringiere ( von gitter h nach gitter h+1 );
    if ( h <= hMAX) call procedure fas ( gitterebene h+1 );
    prolongiere( von gitter h+1 nach gitter h );
    simple_iterationszyklen ( gitterebene h );
end procedure fas
```

Grundsätzlich ist auch ohne Rekursion die Programmierung eines Mehrgitteralgorithmus möglich. Dies ist jedoch umständlich. Durch rekursive Programmierung wird die Umstellung des Verfahrens von einem Zweigitteralgorithmus auf einen Mehrgitteralgorithmus sehr stark vereinfacht. Dies kommt dem Verständnis des Programmflusses, der Lesbarkeit des Programmcodes und damit einer späteren Programmpflege und Erweiterung zugute.

➤ Dynamisch allokierte Datenfelder:

C erlaubt die Programmierung einmalig angelegter Datenfelder, deren Größe erst zur Laufzeit festgelegt wird. In FORTRAN wird die Größe von Datenfeldern zur Compile-Zeit festgelegt. Die Festlegung der allokierten Feldgrößen zur Compile-Zeit ist oft eine Verschwendung von Rechnerressourcen, da immer so viel Speicher allokiert wird, wie für das komplexeste Strömungsproblem notwendig ist.

Die aktuelle Programmversion ist in ANSI-C geschrieben. Sie wurde ohne Änderungen am Sourcecode erfolgreich auf folgenden Systemen angewendet:

- SUN Sparcstation SunOS 4.1.x und Solaris 2.1
- HP 9000 Serie 700, HP-UX 8.0.x
- MS-DOS 5.0

Das Programm besteht aus:

- 14 C-Quelldateien
- 16 Deklarationsdateien
- 4980 Zeilen Programmquelltext
- davon etwa 2000 Zeilen Kommentar

Um ein lauffähiges Programm zu erzeugen, eignet sich jeder ANSI-C-Compiler. Zusätzliche Laufzeitbibliotheken sind neben der Standard-C-Bibliothek nicht erforderlich.

Parallel zum Berechnungsprogramm, das "FLOWC" genannt wird, wurde ein Strömungsvisualisierungsprogramm entwickelt.

Der zu "FLOWC" gehörende Postprozessor "POSTFLOW" ist ebenfalls in der Sprache C entwickelt worden. Als graphische Bibliothek setzt er das interaktive dreidimensionale Graphikpaket PHIGS+ ein. PHIGS+ ist ein Standard, der die Portierung auf andere Rechnerplattformen erleichtert. "POSTFLOW" ist gegenwärtig auf SUN Sparcstations implementiert und voll in das auf diesen Rechnern laufende Window-System integriert. Das Programm ist sehr leicht und intuitiv zu bedienen und erlaubt eine vollständig dreidimensionale Sicht auf das Berechnungsgebiet mit allen Strömungsparametern und beliebiger Skalierung, Rotation und Verschiebung.

Die Kombination von "FLOWC" und "POSTFLOW" ermöglicht Strömungsberechnungen mit einem Einarbeitungsaufwand, der im Vergleich zu kommerziellen Strömungsberechnungsprogrammen sehr klein ist.

Zur Benutzung des Programmes ist eine Eingabedatei zu erstellen, deren Name beim Programmaufruf als Argument übergeben wird. Das Programm erzeugt als Ergebnis der Berechnung eine Ausgabedatei, die die berechneten Gittervariablen in beliebigen Iterationsschritten enthält. Ein- und Ausgabedatei werden vom Postprozessor gelesen, um die berechneten Gittervariable, graphisch darzustellen.

Die Eingabedatei ist eine Textdatei, in der alle Berechnungsparameter, Startwerte und Steuerparameter festgelegt werden können. Dies geschieht mittels Variable-Attribut-Wertepaaren. In dem folgenden Beispiel wird ein Full Approximation Scheme für die globale Iteration aktiviert und die laminare Viskosität festgelegt:

FAS:	ON	schaltet FAS ein
NUE:	1.19E-6	legt die laminare Viskosität fest

Zwischen den Variable-Attribut-Paaren können beliebige Kommentare stehen. Fehlen diese Angaben, werden Standardwerte angenommen. Dadurch ist es möglich, ein Strömungsproblem mit sehr wenigen Eingaben zu definieren. Die Standardwerte sind so festgelegt, daß für den Fall einer vollständig fehlenden Angabe von Variable-Attribut-Paaren eine ebene laminare Rohrströmung in einem orthogonalen Netz von $20 * 10$ Zellen mit einer Zellgröße von 1^2 berechnet wird.

Im Anhang ist eine Beispieleingabedatei beschrieben. Dort befindet sich auch eine Tabelle, die alle Variable-Attribut-Paare zur Modellierung eines Strömungsproblem es mit ihren Vorgabewerten und Eingabegrenzen beschreibt. Der Anhang enthält ferner eine Abbildung des Postprozessors.

6 Validierungsberechnung "Wall Driven Cavity"

Zur Validierung des Verfahrens wurde der Strömungsfall "Wall Driven Cavity" untersucht. Dabei wird ein Fluid in einem ebenen quadratischen Strömungsgebiet, das von Wänden mit Haftbedingungen begrenzt wird, in eine Zirkulationsbewegung versetzt, in dem eine der Begrenzungswände tangential mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird.

Das Strömungsproblem "Wall Driven Cavity" wird vielfach als Testfall für numerische Berechnungsverfahren reibungsbehafteter Strömungen benutzt. Hier werden zum Vergleich die Untersuchungen von *Ghia et al. (1982)* und *Barcus et al. (1988)* herangezogen. Der Vergleich beschränkt sich auf eine Reynoldszahl von $Re = 1000$, gebildet mit der Tangentialgeschwindigkeit der bewegten Wand und der Seitenlänge des quadratischen Berechnungsgebietes.

Für den Vergleich mit den Ergebnissen von *Ghia et al.* wurden Berechnungen auf einem Diskretisierungsgitter von $128 * 128$ quadratischen Zellen durchgeführt. Der konvektive Term wurde mit einem 85 %-igen Anteil finiter Differenzen zweiter und einem 15 %-igen Anteil finiter Differenzen erster Ordnung diskretisiert.

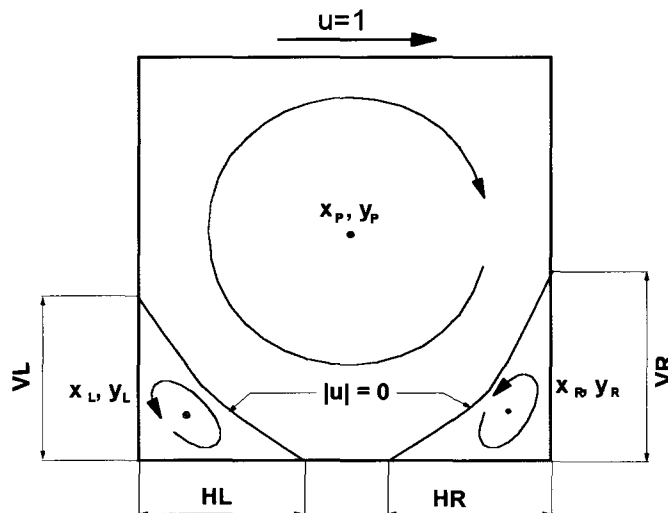


Bild 6.1: Berechnungsgebiet "Wall Driven Cavity"

Bild 6.2 zeigt links den Primärwirbel und rechts als Ausschnitt den linken Sekundärwirbel.

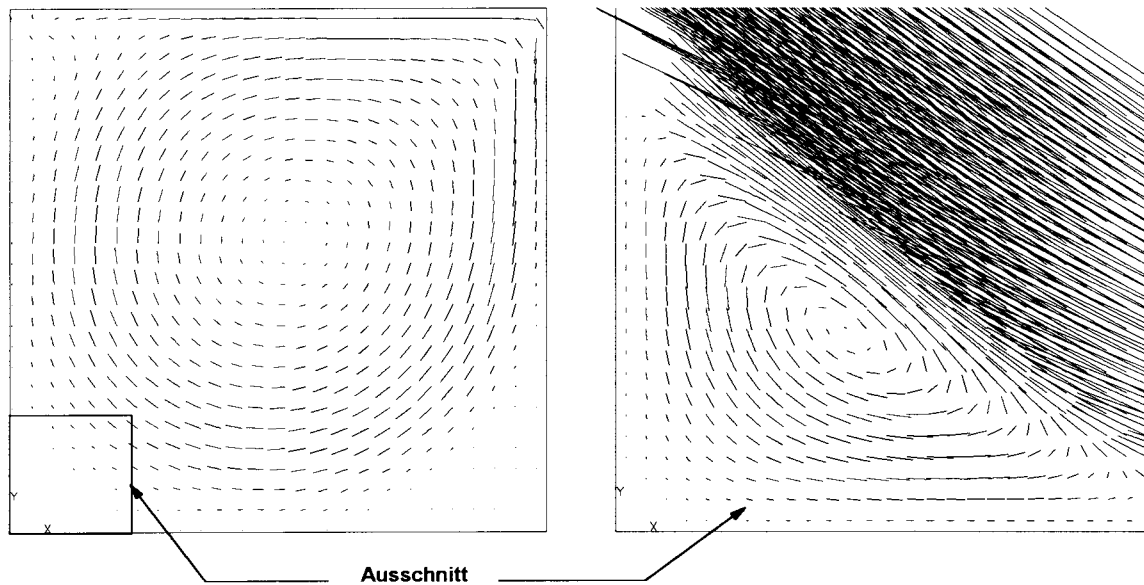


Bild 6.2: Primär- und linker Sekundärwirbel des Berechnungsfalles "Wall Driven Cavity"

In Tabelle 6.1 werden die Koordinaten des Zentrums des Primärwirbels x_p, y_p sowie des linken und des rechten Sekundärwirbels x_L, y_L bzw. x_R, y_R mit den Ergebnissen von *Ghia et al.* verglichen. Die Größen HL, VL, HR und VR bezeichnen die horizontale bzw. vertikale Lage des Punktes, an dem eine Vorzeichenumkehr der Tangentialgeschwindigkeit in unmittelbarer Wandnähe auftritt.

	vorliegendes Verfahren	<i>Ghia</i>	Prozentuale Abweichung bezogen auf Seitenlänge
x_p	0.5338	0.5313	0.25 %
y_p	0.5729	0.5625	1.04 %
x_L	0.0875	0.0859	0.16 %
y_L	0.0738	0.0781	0.43 %
x_R	0.8379	0.8594	2.50 %
y_R	0.1078	0.1094	0.60 %
HL	0.2305	0.2188	1.70 %
VL	0.1602	0.1680	0.80 %
HR	0.3496	0.3034	4.20 %
VR	0.3789	0.3536	2.30 %

Tabelle 6.1: Vergleich der Koordinaten des primären und der sekundären Wirbel

Die Tabelle zeigt Abweichungen mit einem Mittelwert von 1,3 %. Die Vergleichsmöglichkeit wird eingeschränkt, da die Angaben von *Ghia et al.* vermuten lassen, daß die Koordinaten der Wirbelzentren auf die der nächstliegenden Gitterknoten gerundet wurden. Weitere Gründe für die Abweichungen sind die unterschiedliche Diskretisierung des konvektiven Terms (3. Ordnung bei *Ghia*) und ein geringfügig anderes Diskretisierungsgitter.

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens wurde ein Gitter mit $80 * 80$ Zellen benutzt, um die Vergleichbarkeit mit *Barcus et al.* herzustellen. Es wurden finite Differenzen der Ordnung 1 für die Diskretisierung des konvektiven Terms verwendet. Der Relaxationsfaktor für die Geschwindigkeit war

$\omega_U=0.8$, für den Druck wurde $\omega_p=0.4$ verwendet. Die verwendeten Mehrgittermethoden beschränken sich auf eine Beschleunigung der globalen Iteration. Vier verschiedene Berechnungsverfahren wurden miteinander verglichen:

- Eingitterverfahren (SG): SIMPLE-Iterationszyklen nur auf dem feinsten Diskretisierungsgitter
- Prolongation Scheme (PGM): Dabei wird zunächst eine Lösung auf einem groben Gitter (5×5 Gitterzellen) bestimmt und diese dann auf das nächst feinere Gitter übertragen. Hier wird wiederum eine Lösung bestimmt und auf das feinere Gitter übertragen usw., bis das feinste Gitter erreicht ist.
- Full Approximation Scheme (FAS) in der in Kap. 4 beschriebenen Weise. Auf jeder Gitterebene wird jeweils ein SIMPLE-Iterationszyklus berechnet.
- Full Multigrid (FMG) als Kombination aus PGM und FAS

Bild 6.3 zeigt den Verlauf des Residuums der x-Komponente der Geschwindigkeit über den globalen Iterationszyklen.

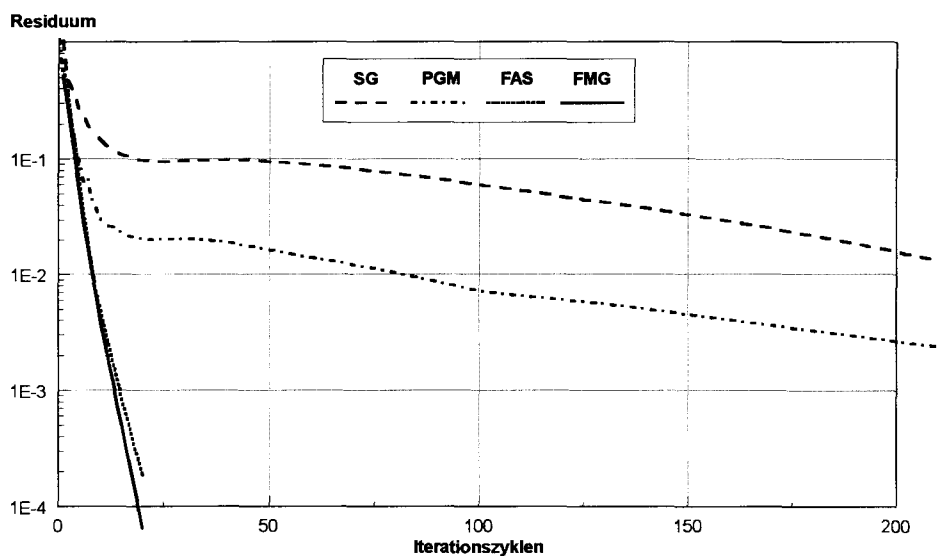


Bild 6.3: Konvergenzverhalten der globalen Iteration

Bild 6.3 zeigt eindrucksvoll, wie mittels Mehrgittermethoden eine Beschleunigung der globalen Konvergenz erreicht wird. Die größte Beschleunigung der Konvergenz wird mit dem FMG-Verfahren erreicht, das aber im Vergleich zum FAS-Verfahren nur unwesentlich schneller ist. Die Ergebnisse wurden mit denen von *Barcus et al.* verglichen. Er benutzt ebenfalls ein "Full Multigrid Scheme", berechnet Korrekturen auf einer Gitterebene allerdings nicht mit einem "Full Approximation Scheme", sondern mit einem "Correction Scheme".

Tabelle 6.2 zeigt im Vergleich die Anzahl notwendiger Iterationszyklen zur Reduzierung des Residuums auf 0.1 % des Anfangswertes.

Verfahren	Hier	<i>Barcus</i>
SG	380	389
PGM	301	299
FMG	14	17

Tabelle 6.2: Vergleich der Iterationszyklen

Die Tabelle zeigt gute Übereinstimmung für das Eingitterverfahren und das PGM-Schema. Beim FMG zeigt sich ein etwas geringerer Rechenbedarf für das hier beschriebene Verfahren, der auf die Benutzung des "Full Approximation Scheme" zur Bestimmung von Korrekturen zurückzuführen sein dürfte.

7 Berechnungen ebener Strömungen

Als ebener Strömungsfall wurde die Umströmung eines pontonförmigen Querschnittes, der in einem tiefenbegrenzten strömenden Gewässer fest verankert ist. Bild 7.1 zeigt das Berechnungsgebiet sowie die Längspositionen, an denen gemessene Geschwindigkeitsprofile vorlagen.

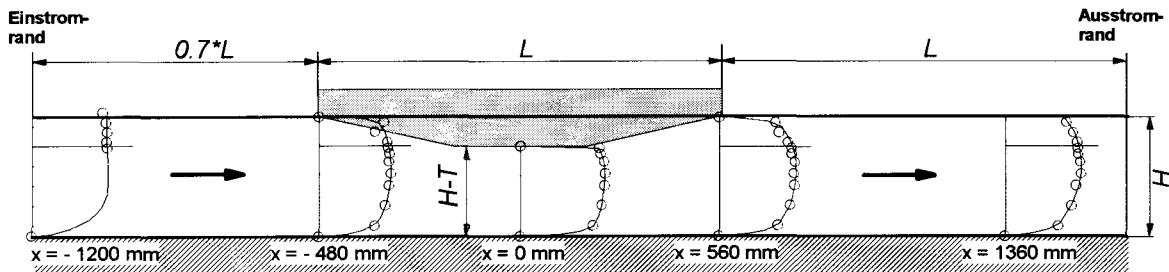


Bild 7.1: Geometrie des Berechnungsgebietes

Die Berechnungen und Messungen wurden mit einem fixierten Modell der Länge $L=1100$ mm und einem Tiefgang $T=73$ mm bei einer Wassertiefe von $H=300$ mm durchgeführt. Der Gillungswinkel des Modelles betrug etwa 15 Grad und lief in einem Radius von etwa 200 mm in die Bodenplatte ein. Die Reynoldszahl - gebildet mit der Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche und der Fahrzeuglänge - betrug $0.958 \cdot 10^6$. Die Länge des diskretisierten Flüssigkeitsgebietes beträgt bei allen folgenden Berechnungen etwa $2.7 \cdot$ Länge des Modells, wobei der Bereich hinter dem Modell etwa eine Modelllänge beträgt.

Die Ergebnisse der Berechnung werden mit Meßergebnissen aus dem Modellversuchstank verglichen, siehe *Bechteler et.al. (1991)*. Die Versuche wurden am Institut für Wasserwesen der Universität der Bundeswehr München in einer etwa 50 m langen Kipprinne durchgeführt. Im Versuch wurden fest verankerte Modelle an der freien Wasseroberfläche untersucht ($F_n=0.304$, $F_{n_H}=0.583$). Im Gegensatz hierzu wurden die Berechnungen mit einer Symmetrierandbedingung in der Wasserlinie der Modelle durchgeführt, d.h. berechnet wurde die Umströmung des tiefgetauchten Doppelrumpfes. Für die Vergleichbarkeit der Ergebnisse von Messung und Berechnung ist dies eine Einschränkung, die sich vor allem im Bugbereich des Fahrzeuges auswirkt.

7.1 Testrechnung mit einem Diskretisierungsgitter von $64 \cdot 24$ Zellen

Diese Rechnung soll vor allem die beiden implementierten Turbulenzmodelle miteinander vergleichen und unterschiedliche Glätter der inneren mehrgitterbeschleunigten Iteration untersuchen. Die folgende Abbildung zeigt das Diskretisierungsgitter, das aus $64 \cdot 24$ Gitterzellen bestand:

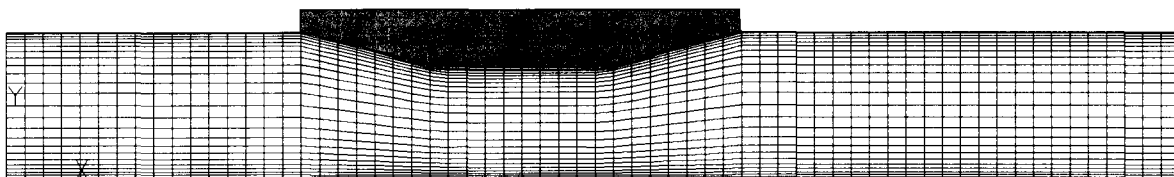


Bild 7.2: Diskretisierungsgitter $64 \cdot 24$

Die konvektive Änderung wird mit Aufwind-Differenzen erster Ordnung berechnet. Unter dem Fahrzeugboden und am Gewässerboden wurde eine Hafrandbedingung vorgesehen, die mit logarithmischen Wandfunktionen mit einem mittleren dimensionslosen Wandabstand von $y^+ = 110$ realisiert wurde.

Zur Beschleunigung der inneren Iteration wurde ein Mehrgitter-Korrekturschema verwendet, während die äußere Iteration ohne Mehrgitterbeschleunigung durchgeführt wurde. Als Glätter innerhalb des Mehrgitterschemas zur Lösung der Druckkorrekturgleichung wurden mehrere iterative Verfahren miteinander verglichen: Gauss Seidel Iteration, Punkt-Überrelaxation, Linien-Gauss-Seidel und Strongly Implicit Procedure von Stone (1968).

Die Ergebnisse wurden mit einem SIMPLEC-Schema ohne Unterrelaxation des Druckes berechnet. Der Unterrelaxationsfaktor für die Geschwindigkeit mußte für die beiden untersuchten Turbulenzmodelle unterschiedlich gewählt werden. Während beim $k-\epsilon$ -Modell eine Geschwindigkeitsunterrelaxation von 0.5 ausreichend war, zeigten die Berechnungen mit dem Baldwin-Lomax-Modell erst mit einer Geschwindigkeitsunterrelaxation von 0.3 eine konvergierende globale Iteration. Während mit dem $k-\epsilon$ -Modell 120 globale Iterationszyklen ausreichend waren, um das Residuum auf 10^{-4} zu reduzieren, waren mit dem Baldwin-Lomax-Modell aufgrund der geringeren Unterrelaxation der Geschwindigkeit nahezu 300 Iterationszyklen notwendig.

Bild 7.3 zeigt den Vergleich gemessener und mit den beiden Turbulenzmodellen gerechneter Geschwindigkeitsprofile:

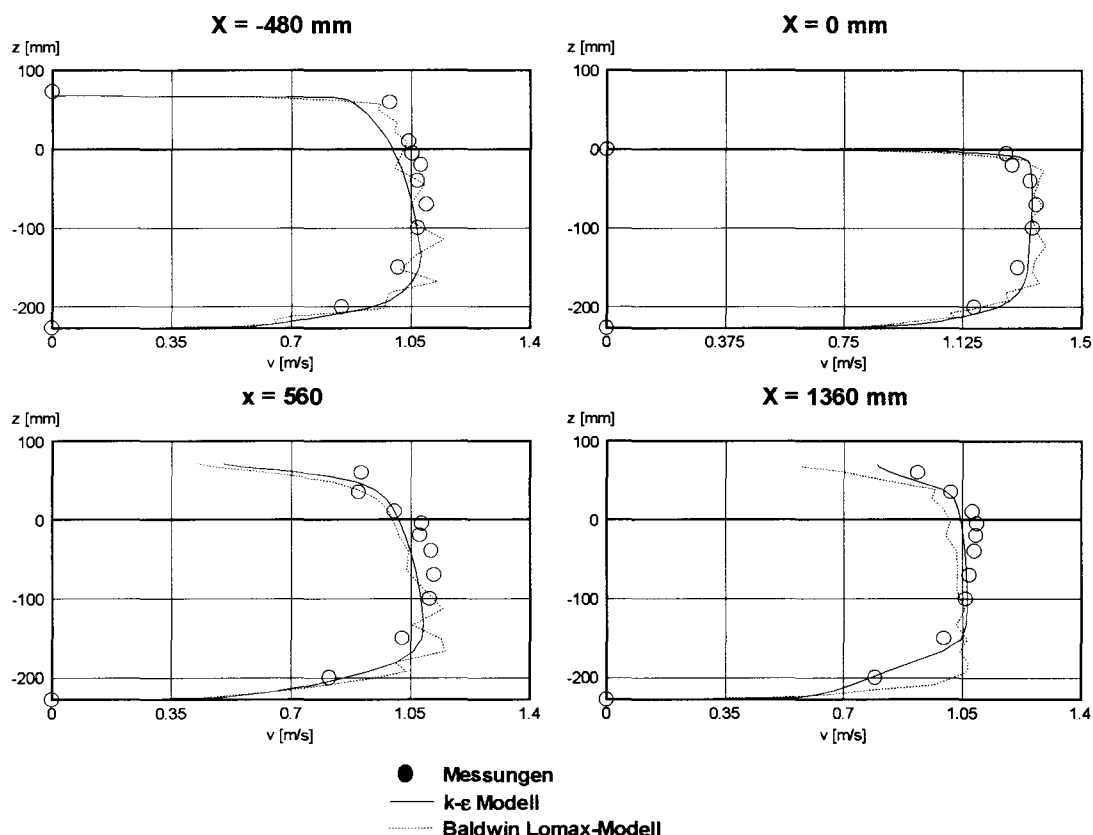


Bild 7.3: Gemessene und berechnete Geschwindigkeitsprofile

Der Vergleich gemessener und berechneter Geschwindigkeitsprofile zeigt Abweichungen von durchschnittlich 10 %, in den meisten Bereichen deutlich darunter, an einigen Stellen jedoch auch erheblich darüber. Für die dominierende Längskomponente der Geschwindigkeiten ist dies nicht in jeder Beziehung zufriedenstellend. Ursache hierfür sind Fehler bei der Schätzung des Geschwindigkeitsprofils und der Turbulenzparameter am Einströmrand sowie das grobe Diskretisierungsgitter.

Ein Vergleich zeigt zudem erhebliche Unterschiede zwischen den Geschwindigkeitsprofilen beider Turbulenzmodelle. Es ist anzunehmen, daß dies an der turbulenten Viskosität in Wandnähe liegt, die bei den beiden Turbulenzmodellen sehr unterschiedlich ausfällt. Das folgende Bild zeigt den Verlauf der Gesamtviskosität (also der Summe aus turbulenter und laminarer Viskosität) unter dem Fahrzeugboden.

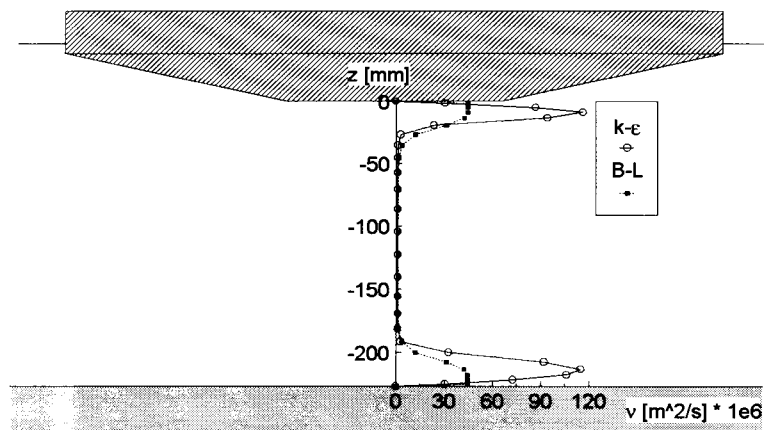


Bild 7.4: Gesamtviskosität unter dem Fahrzeugboden

Bild 7.4 zeigt, daß der mit dem $k-\epsilon$ -Modell berechnete Maximalwert der turbulenten Viskosität um den Faktor 2.5 größer ist als der mit dem Baldwin-Lomax-Modell berechnete.

Die Geschwindigkeitsprofile des Baldwin-Lomax-Modelles zeigen zudem Oszillationen, d.h. die Geschwindigkeiten variieren in physikalisch nicht plausibler Weise um einen Mittelwert. Dies liegt - wie bereits in Kapitel 3.4.2 beschrieben - daran, daß es in einem numerischen Verfahren sehr schwer ist, den Maximalwert des Produktes aus dem Betrag der Rotation der Geschwindigkeit und dem Wandabstand zu bestimmen, da dieses Produkt in einem logarithmischen Geschwindigkeitsprofil annähernd eine Konstante ist.

Ein Vergleich des unter dem Fahrzeugboden gemessenen Druckverlaufes mit den entsprechenden Ergebnissen der Berechnung (Bild 7.5) zeigt eine befriedigende Übereinstimmung.

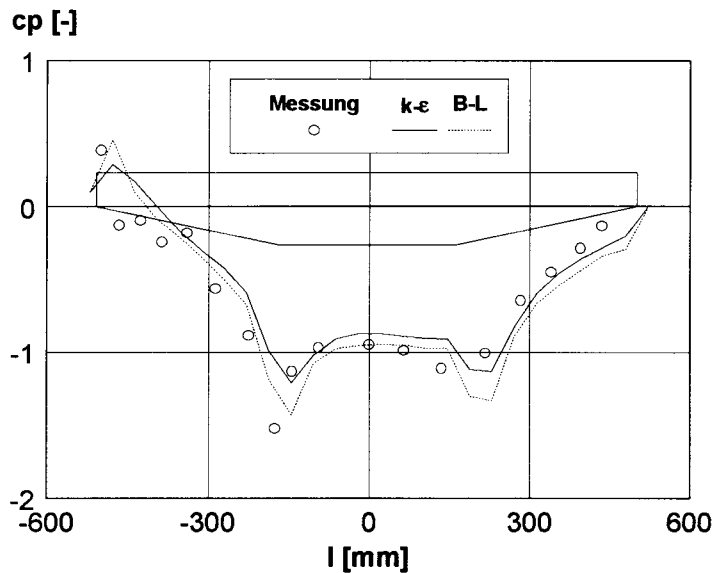


Bild 7.5: Druckverlauf unter dem Fahrzeugboden

Im Bugbereich und unter dem vorderen Gillungseinlauf in den Boden treten allerdings erhebliche Abweichungen auf. Die Abweichungen im Bugbereich beruhen auf der hier nicht zulässigen Substitution der freien Wasseroberfläche durch eine Symmetrieebene. Sie ist ein inhärenter Nachteil des hier beschriebenen Verfahrens, bei dem eine bessere Berücksichtigung der freien Wasseroberfläche nicht möglich ist. Die Abweichung im Gillungseinlauf dürfte an der nicht ausreichenden Diskretisierung an dieser Stelle liegen.

Obwohl der Aufwand zur Berechnung der turbulenten Viskosität mit dem algebraische Baldwin-Lomax-Modell grundsätzlich geringer ist als bei einem Zweigleichungsmodell, verringerte sich in dem hier gezeigten Rechenfall der Gesamtberechnungsaufwand nicht. Wegen der geringeren erforderlichen Unterrelaxation der Geschwindigkeit steigt die Anzahl der bis zum Erreichen eines gegebenen Residuums notwendigen globalen Iterationszyklen erheblich, so daß der Rechenaufwand bis zum Erreichen einer konvergierten Lösung etwa konstant blieb.

Wegen der auftretenden Geschwindigkeitsoszillationen wurde bei allen weiteren Berechnungen das Baldwin-Lomax-Turbulenzmodell nicht mehr berücksichtigt. Auch die SIMPLEC-Methode wurde bei allen weiteren Untersuchungen nicht mehr berücksichtigt, da die erforderliche Geschwindigkeitsunterrelaxation im Zusammenhang mit der Geschwindigkeitsinterpolation an den Zellenrändern problematisch ist.

.2 Variation der Diskretisierung des Berechnungsgebietes

Mit einer Verbesserung des Diskretisierungsgitters und einer Untersuchung von Gitterabhängigkeiten soll versucht werden, eine bessere Übereinstimmung der Ergebnisse mit den Messungen zu erzielen. Dabei wurden die folgenden Diskretisierungsgitter untersucht:

52 * 16 Gitterzellen
 104 * 32 Gitterzellen
 208 * 32 Gitterzellen
 208 * 64 Gitterzellen

Bild 7.6 zeigt das Gitter mit 104 * 32 Zellen.

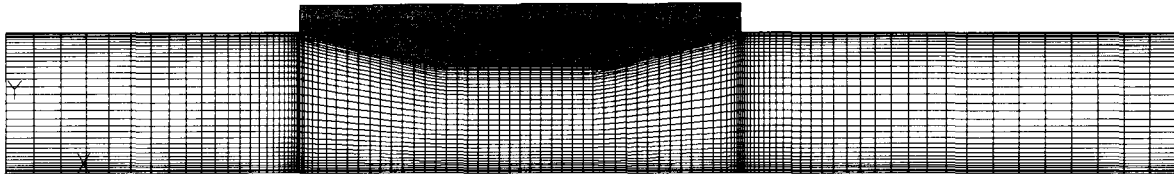


Bild 7.6: Diskretisierungsgitter 104 * 32

Die Berechnungen wurde mit einer konstanten Geschwindigkeit am Einströmrand durchgeführt, da es sich als schwierig erwies, bei den unterschiedlichen Diskretisierungen ein logarithmisches Einströmprofil zu modellieren, das den Vergleich der Ergebnisse der einzelnen Gitter zuließ. Auf allen Gittern wurde mit dem k - ϵ -Turbulenzmodell mit logarithmischen Wandfunktionen gerechnet. Der Konvektionsterm wurde mit finiten Differenzen der Ordnung $O(h)$ diskretisiert.

In den folgenden Diagrammen sind der Druckverlauf, der Verlauf der Schubspannungen am Fahrzeugboden und das Geschwindigkeitsprofil unter dem Hauptspant vergleichend für alle Gitter aufgetragen.

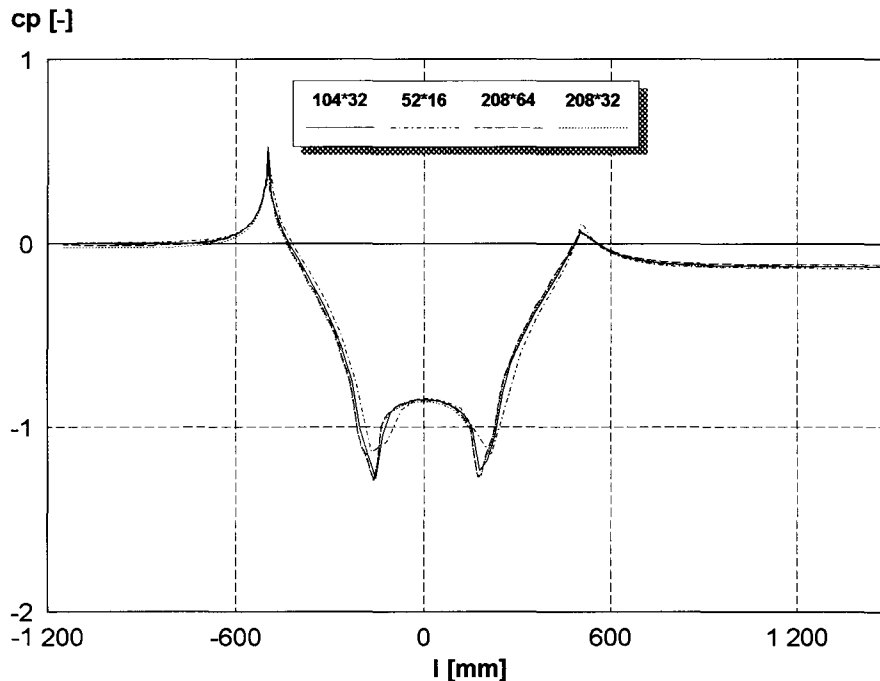


Bild 7.7: Druckbeiwert bei unterschiedlichen Diskretisierungsgittern

Ein Vergleich der berechneten Druckbeiwerte zeigt, daß sich die Ergebnisse der feineren Gitter kaum voneinander unterscheiden. Lediglich das Gitter mit 52 * 16 Zellen weicht von den anderen Ergebnissen stärker ab.

Ein ähnliches Bild zeigt sich auch bei der Darstellung des Geschwindigkeitsprofils unter dem Hauptspant. Bild 7.8 zeigt stark vergrößert einen Ausschnitt des Geschwindigkeitsprofils. Die mit den verschiedenen Gittern berechneten Maximalwerte der Geschwindigkeiten weichen lediglich um 0.85 % voneinander ab. Auch hier tritt bei dem Übergang vom größten auf das nächst feinere Gitter die größte Änderung des Maximalwertes auf. Die Maximalgeschwindigkeiten der feineren Gitter unterscheiden sich lediglich um etwa $\frac{1}{600}$ des Betrages der Geschwindigkeit.

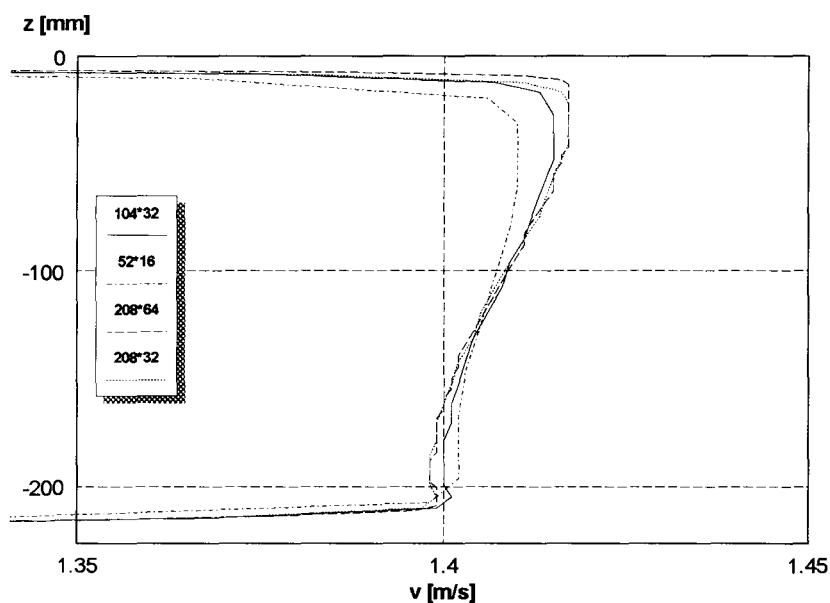


Bild 7.8: Geschwindigkeitsprofil bei unterschiedlichen Diskretisierungsgittern

Der Vergleich der mit den unterschiedlichen Gittern berechneten Schubspannungen hingegen zeigt nicht den gewünschten Verlauf.

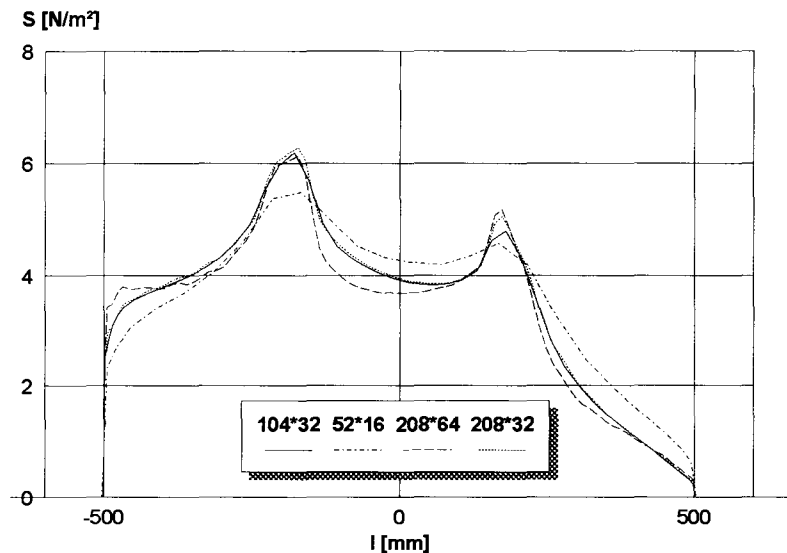


Bild 7.9: Schubspannungen bei unterschiedlichen Diskretisierungsgittern

Während die Ergebnisse der Gitter 208×32 und 104×32 gute Übereinstimmung zeigen, weicht der Scherspannungsverlauf des Gitters 52×16 erwartungsgemäß stark ab. Das trifft jedoch auch für das Gitter mit 208×64 Zellen zu, vermutlich weil die untere Grenze des Gültigkeitsbereiches der logarithmischen Wandfunktionen unterschritten wird. Bei einer Wandspannung von 4 N/m^2 ist der dimensionslose Wandabstand $y^+ < 40$. Als Gültigkeitsgrenzen der Wandspannungen werden in der Literatur vielfach $100 < y^+ < 300$ angegeben. Das Diagramm von *White (1974)* S. 473 zeigt einen Gültigkeitsbereich von $60 < y^+ < 600$.

Die Gitteränderungsuntersuchung läßt eine Reihe von Schlüssen zu. So zeigte sich, daß der Druckverlauf am unempfindlichsten auf Gitterveränderungen reagiert. Es müssen bei einer Variation der Diskretisierung daher immer auch Schubspannungs- und Geschwindigkeitsprofile betrachtet werden. Das Mittel der Gitterverfeinerung zur Verbesserung der Genauigkeit findet beim Einsatz von Wandfunktionen bereits frühzeitig eine Grenze, wenn der dimensionslose Wandabstand Werte außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Wandfunktionen annimmt. Insgesamt betrachtet sind im vorliegenden Fall die Diskretisierungsgitter von 104×32 und 208×32 gut geeignet, wobei das feinere der beiden Gitter vor allem den Längsverlauf der Schubspannung im Bereich der Gillungseinläufe in den Boden besser wiedergibt.

.3 Vergleich der Berechnungsergebnisse mit Meßergebnissen

Der Vergleich von Messungen und Berechnungen wurde mit dem Diskretisierungsgitter von 104×32 Zellen durchgeführt. Bei diesen Berechnungen wurde ebenfalls das k - ϵ -Turbulenzmodell in Verbindung mit logarithmischen Wandfunktionen benutzt. Die konvektive Änderung des Impulses wurde hier mit finiten Differenzen der Ordnungen $O(h)$ und $O(h^2)$ diskretisiert. Am Einströmrand wurde jetzt ein logarithmisches Strömungsprofil über die halbe Wassertiefe angenommen.

Die Berechnungen wurden mit dem SIMPLE-Schema durchgeführt. Dabei wurden folgende Unterrelationsfaktoren verwendet:

$$\begin{aligned}\omega_v &= 0.8 \\ \omega_p &= 0.2 \\ \omega_K = \omega_\varepsilon &= 0.7\end{aligned}$$

Die Wahl eines relativ großen Unterrelaxationsfaktors für die Geschwindigkeiten und eines kleinen Unterrelaxationsfaktors für den Druck stellt sicher, daß die Geschwindigkeits-Unterrelaxation die spezielle Geschwindigkeitsinterpolation zur Berechnung der Flüsse über die Zellgrenzen kaum beeinflusst. Die globale Iteration wird abgebrochen, wenn das Residuum kleiner als 10^{-5} war. Die innere Iteration zur Lösung der Druckkorrekturgleichung wurde immer dann abgebrochen, wenn der vor Beginn der Iteration festgestellte Massedefekt um den Faktor 10^{-1} reduziert war.

Die folgenden Diagramme zeigen einen Vergleich der berechneten und gemessenen Geschwindigkeitsprofile an den in Bild 7.1 gezeigten Querschnitten. In den Diagrammen bezeichnet α (Alpha) die Wichtung der zentralen Differenzen bei der Berechnung des Konvektionstermes der Impulsgleichung (s. Kap. 5.2). Ein Wert von $\alpha=0.0$ bezeichnet eine Diskretisierung erster Ordnung des Konvektionstermes der Impulsgleichung, ein Wert von $\alpha=1.0$ bezeichnet eine Diskretisierung zweiter Ordnung .

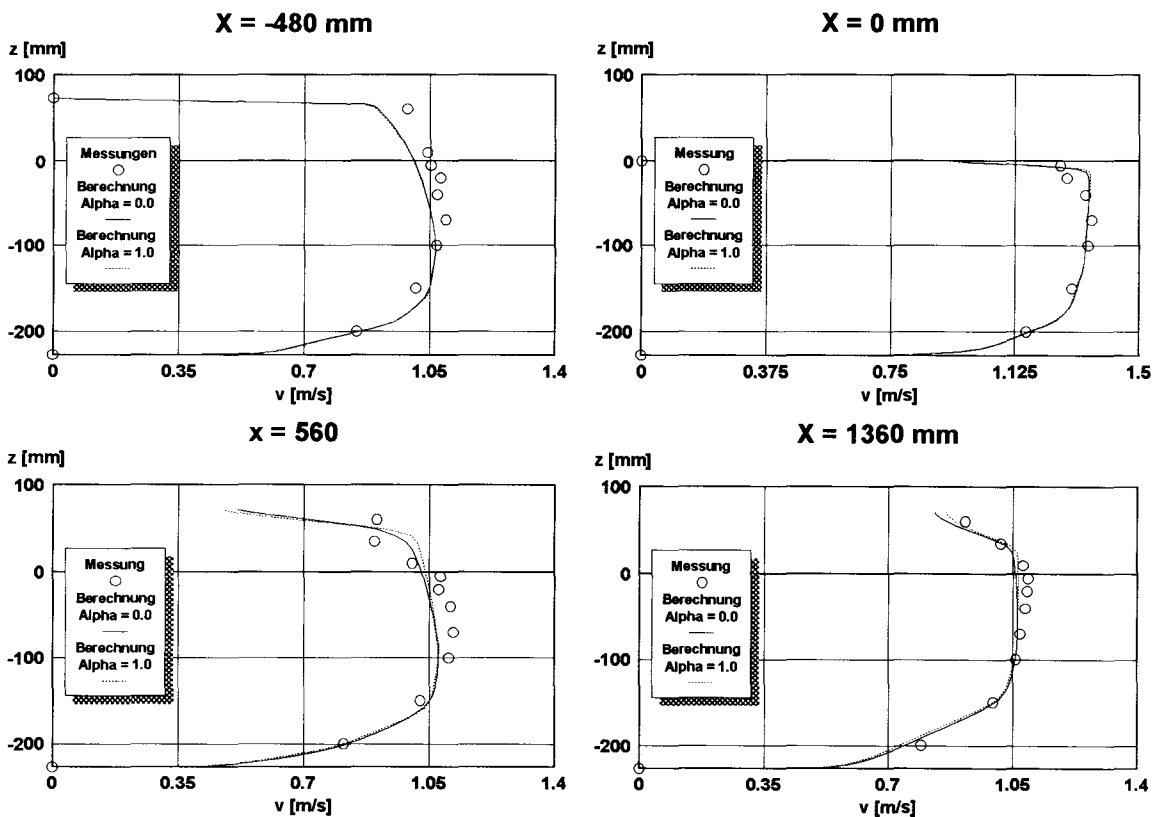


Bild 7.10: Vergleich berechneter und gemessener Geschwindigkeitsprofile
Diskretisierungsgitter 104×32

Im Vergleich zu den in Bild 7.3 gezeigten Ergebnissen wurde eine deutliche Reduzierung der Abweichungen der Berechnungsergebnisse von den Messungen erreicht. Dies ist zum einen durch die feinere Diskretisierung des Berechnungsgebietes, zum anderen durch die bessere Anpassung des Einstromprofils an die Gegebenheiten des Modellversuches erreicht worden. Die Ordnung der Diskretisierung des Konvektionsterms hat nur einen geringen Einfluß auf den Verlauf des Geschwindigkeitsprofils. Der Unterschied ist in allen Fällen kleiner als die Abweichung zwischen Berechnungs- und Meßergebnissen.

Allerdings ist bei dem vorliegenden Strömungsproblem der Verlauf der Stromlinien fast äquidistant zu den Gitterlinien. Dadurch wird das Auftreten numerischer Diffusion reduziert.

Bei den berechneten Druckverläufen (Bild 7.11) ergibt sich eine relativ große Abweichung zu den Messungen vor allem unter dem Fahrzeugboden und an den Gillungseinläufen in den Boden. Im Vergleich zum Diskretisierungsgitter mit 64×24 Zellen ist die Abweichung zwischen Berechnung und Messung unter dem Fahrzeugboden sogar deutlich gestiegen, was in keiner Weise plausibel ist. Die Berechnungen geben auch die Unterdruckspitze am Einlauf der vorderen Gillung in den Boden nur unzureichend wieder. Hier ist die Abweichung zwischen Messung und Berechnung erheblich.

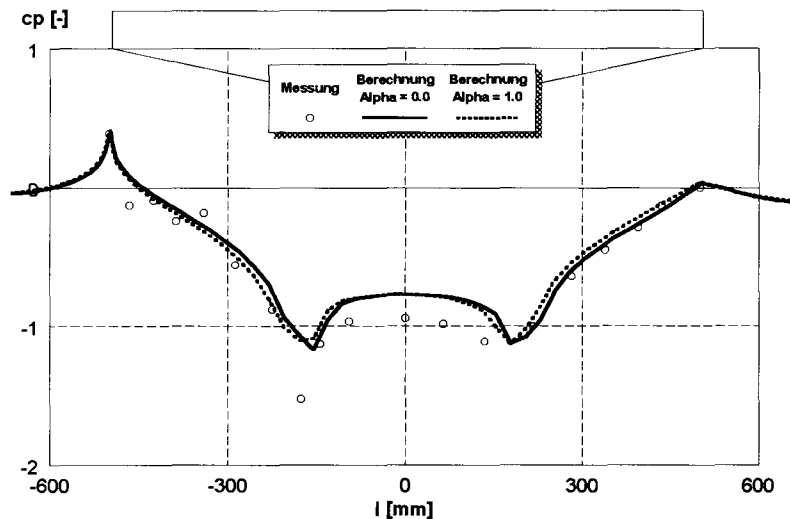


Bild 7.11: Vergleich berechneter und gemessener Druckverlauf unter dem Fahrzeugboden
Diskretisierungsgitter 104×32

Eine Bewertung des hier gezeigten Vergleiches zwischen Messung und Berechnung ist aus zwei Gründen relativ schwierig. Zum einen wurden bei der Messung andere Randbedingungen angenommen als bei der Berechnung. Dies trifft vor allem auf die freie Oberfläche des Versuches zu, die in der Berechnung durch eine Symmetrieebene ersetzt wurde. Außerdem ist die Spezifikation der Turbulenzgrößen auf dem Einströmrand nur durch Abschätzen möglich, da hier keine Meßdaten vorlagen. Ein weiteres Hindernis für eine Bewertung der Qualität der Berechnung sind fehlende Kenntnisse über die Qualität der Meßergebnisse. Die Messungen wurden in einer sogenannten Kipprinne durchgeführt, bei der die Strömungsgeschwindigkeit durch eine Neigung des gesamten Strömungskanales erreicht wird. Dies in Verbindung mit der geringen Kanalbreite von nur einem Meter bei einer Modelllänge von 1.0 m lassen die Vermutung zu, daß reproduzierbare ebene Strömungsverhältnisse über einen längeren Versuchszeitraum nicht immer gesichert sind. Dennoch wird die Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse als ausreichend für ingenieurmäßige Untersuchungen angesehen, mit der zum Beispiel Formoptimierungen mit Hilfe einer Variantenuntersuchung ohne den Rückgriff auf Versuchsdaten möglich sind.

.4 Konvergenzverhalten des Berechnungsverfahrens

.4.1 Einfluß der Druckkorrekturgleichung auf die globale Konvergenz

Für das globale Konvergenzverhalten der SIMPLE-Iteration ist die Genauigkeit, mit der die Näherung der Druckkorrekturgleichung bestimmt wird, von entscheidender Bedeutung. Die Erfüllung der Massenerhaltungsbedingung, d.h. die Lösung der Druckkorrekturgleichung, beansprucht den größten Teil der

Rechenzeit innerhalb einer globalen Iteration. Während jeweils ein bis zwei innere Iterationszyklen für die Näherungslösung der Impuls- und Trubulenzgleichungen ausreichend sind, muß die Druckkorrekturgleichung in jeder globalen Iteration aufs neue sehr genau berechnet werden, damit der Massedefekt klein bleibt.

Für den zulässigen Massedefekt benutzt man in der Regel ein dynamisches Kriterium, d.h. man führt so viele Iterationszyklen durch, bis der Massedefekt einen vorzugebenden Bruchteil des Anfangswertes vor Beginn der Iteration erreicht hat. Testrechnungen ergaben das beste Konvergenzverhalten, wenn die 1-Norm des Massedefektes etwa eine Größenordnung kleiner ist als die 1-Norm des Residuums der Impulsgleichungen in dieser globalen Iteration. Die Vorgabe eines absoluten Abbruchkriteriums für die Druckkorrekturgleichung ist daher unökonomisch.

Bild 7.12 zeigt den Verlauf des Residuums der Impulskomponenten in Abhängigkeit von der Anzahl der globalen SIMPLE-Iterationszyklen. Der Kurvenparameter ist der Massedefekt, bei dem die innere Iteration zur Berechnung der Druckkorrektur abgebrochen wird, im Verhältnis zum Massedefekt vor Beginn der inneren Iteration. Der untersuchte Strömungsfall ist hier die Bargeumströmung mit $104 \cdot 32$ Gitterzellen.

Bei einer Reduzierung des Massedefektes auf ein Zehntel des Anfangswertes oder weniger ist das Konvergenzverhalten der globalen Iteration am besten. Bei einer Reduzierung des Massedefektes auf 20 % des Anfangswertes - ein Wert, der in der Literatur oft genannt wird - ist das Konvergenzverhalten der globalen Iteration immer noch gut, aber nicht immer monoton fallend. Wird die Druckkorrekturgleichung nur so genau gelöst, daß der Massedefekt bei Abbruch der Iterationen zur Lösung der Druckkorrekturgleichungen noch 50 % des Wertes vor Beginn der Berechnung der Druckkorrektur beträgt, verschlechtert sich das globale Konvergenzverhalten deutlich. Es ist also wünschenswert, bei jeder Berechnung der Druckkorrektur den Massedefekt auf 10 % des Startwertes zu reduzieren.

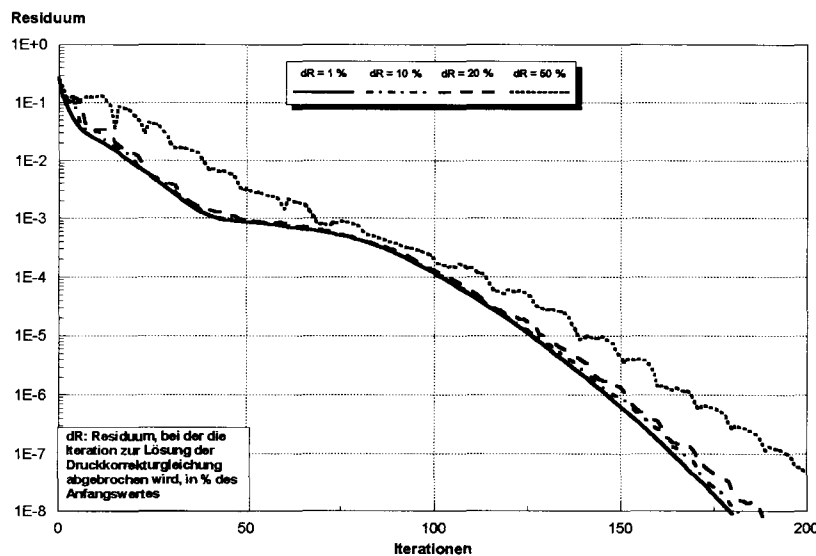


Bild 7.12: Verlauf der globalen Konvergenz in Abhängigkeit des Residuums der Druckkorrekturgleichung

Eine Untersuchung des Einflusses der Startwerte auf das Konvergenzverhalten der globalen Iteration zeigt den erheblichen Einfluß des Massedefektes vor Beginn der globalen Iteration. Vor Beginn der globalen SIMPLE-Iteration müssen Startwerte für alle Geschwindigkeitskomponenten, den Druck und die

Turbulenzparameter festgelegt werden. Bei vielen Strömungsproblemen ist es nicht einfach, Startwerte für die Geschwindigkeiten vorzugeben, die den Massenerhaltungssatz in jeder Diskretisierungszelle erfüllen. In vielen Fällen wird daher als Startwert der Geschwindigkeiten überall 0 angenommen. Aus dem mit dieser Schätzung verbundenen Massedefekt resultiert dann eine sehr hohe Druckkorrektur in der ersten globalen Iteration, die in den folgenden globalen Iterationszyklen nur langsam abgebaut wird. Dies verschlechtert das globale Konvergenzverhalten.

Bei Schiffsumströmungen wie auch bei anderen Umströmungen mit einer dominierenden Hauptströmung, die ihre Richtung nur wenig ändert, besteht die Möglichkeit, als Startwert alle diskreten Geschwindigkeiten im Berechnungsgebiet auf die Geschwindigkeit des Einströmrandes zu setzen. Dies ist in der Regel ein besserer Startwert als der oben beschriebene, er erfüllt aber den Massenerhaltungssatz in der Regel ebenfalls nicht, mit den gleichen Folgen wie im oben beschriebenen Fall.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Lösung des Strömungsproblem es zunächst auf einem gröberen Gitter zu bestimmen, und diese als Startwerte auf das feinste Gitter zu prolongieren. Dies Verfahren wird oft mit einem "Full Approximation Scheme" kombiniert (FAS/FMG), ist aber grundsätzlich unabhängig davon.

Hier wird jedoch ein anderes Verfahren favorisiert. Dabei wird vor der ersten globalen Iteration eine Lösung der Druckkorrekturgleichung bestimmt. Das Geschwindigkeitsfeld wird um die aus der berechneten Druckkorrektur resultierenden Geschwindigkeitskorrektur verbessert, wodurch sich der Massedefekt der Startwerte deutlich reduziert. Die Druckkorrektur hingegen wird nicht zum Startwert des Druckes addiert, sondern ignoriert, d.h. der Startwert des Druckes ist 0.

Bild 7.13 zeigt im Vergleich den Verlauf des Residuums der Impulskomponenten über den globalen Iterationszyklen. Die beschriebenen Methoden zur Ermittlung von Startwerten wurden dabei miteinander verglichen. Bei dem Strömungsmodell handelt es sich wiederum um die Barge mit 104×32 Gitterzellen.

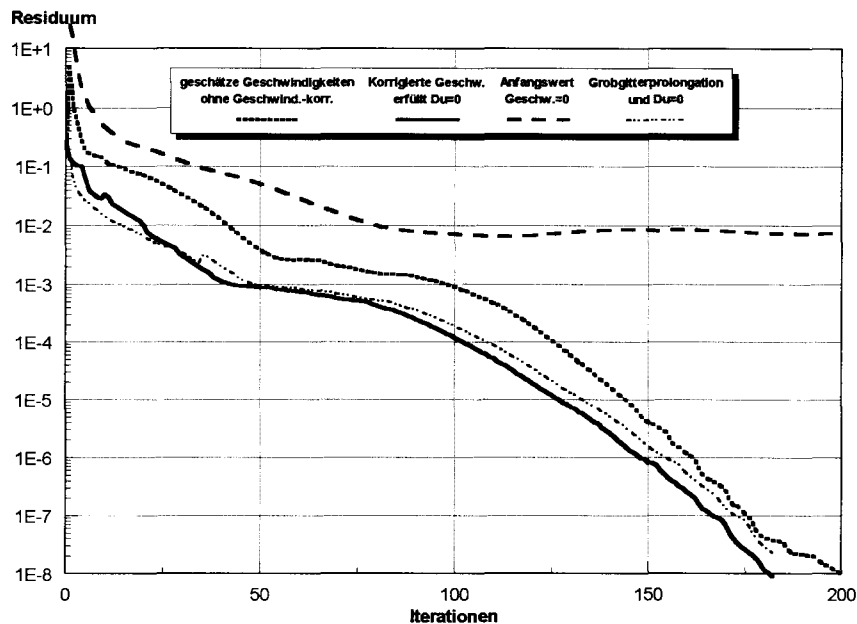


Bild 7.13: Konvergenzverlauf der globalen Iteration mit und ohne Korrektur der Geschwindigkeitsstartwerte

Das Diagramm läßt einen deutlichen Einfluß der Startwerte auf den Konvergenzverlauf der gesamten Iteration erkennen. Insbesondere mit dem Startwert 0 für alle Geschwindigkeiten ist das Residuum von der ersten Iteration an deutlich höher und konvergiert sehr viel langsamer. Mit konstant auf die Einströmgeschwindigkeit gesetzten Startwerten ist der Verlauf des Residuums erwartungsgemäß bereits deutlich günstiger, das Residuum steigt aber auch hier in den ersten Iterationszyklen an.

Sowohl die aus einer prolongierten Grobgitterlösung resultierenden als auch die mit einer aus der Druckkorrektur resultierenden Geschwindigkeitskorrektur verbesserten Startwerte beeinflussen das Konvergenzverhalten günstig. Die beiden Graphen unterscheiden sich nur wenig. Im Vergleich zu den ersten beiden Graphen beträgt die Reduzierung des Rechenaufwandes etwa 10 bis 20 globale Iterationsschritte.

Bei der Startwerterzeugung durch Prolongation einer Grobgitterlösung muß das Strömungsproblem auf dem Grobgitter vollständig gelöst werden. Der Rechenaufwand hierfür kann zwar durch alle Maßnahmen beschleunigt werden, mit denen auch die Feingitterlösung beschleunigt wird (Startwerte, FAS usw.), der Rechenaufwand für die Bestimmung der Grobgitterlösung ist aber nicht vernachlässigbar. Hingegen ist der Rechenaufwand für die einmalige Lösung der Druckkorrekturgleichung zur Berechnung der Geschwindigkeitskorrektur immer geringer als der Rechenaufwand für eine globale Iteration. Bei 200 globalen Iterationszyklen auf dem feinen Gitter fällt der Aufwand dafür kaum ins Gewicht. Die Berechnung der Startwerte durch Lösen der Druckkorrekturgleichung mit anschließender Geschwindigkeitskorrektur - aber ohne Druckkorrektur - ist damit die ökonomischere Methode zur Berechnung von Startwerten, die den Gesamtverlauf der globalen Iteration günstig beeinflussen. Dies bedeutet jedoch auch, daß hinsichtlich der Beschleunigung der globalen Konvergenz durch Mehrgitterverfahren das "Full Approximation Scheme / Full Multigrid" (FAS/FMG) keine Vorteile gegenüber dem einfachen "Full Approximation Scheme" (FAS) hat. Sofern die Startwerte in der beschriebenen Weise richtig berechnet werden, ist das FAS allein vollkommen ausreichend, bei einem etwas geringeren Gesamtberechnungsaufwand. Alle weiteren Untersuchungen werden daher mit der beschriebenen Startwertermittlung und mit einem "Full Approximation Scheme" durchgeführt. Auf die Berechnung von Startwerten durch Prolongation der Grobgitterwerte wird verzichtet.

7.4.2 Einfluß der Diskretisierung des Konvektionstermes

Bild 7.14 zeigt die Abhängigkeit des Residuums von den globalen Iterationszyklen, wobei die Ordinate in diesem Falle die 1-Norm des Residuums der Längsgeschwindigkeitskomponente ist. Der Kurvenparameter α (Alpha) bezeichnet den Anteil der mit zentralen Differenzen berechneten konvektiven Änderung des Impulses.

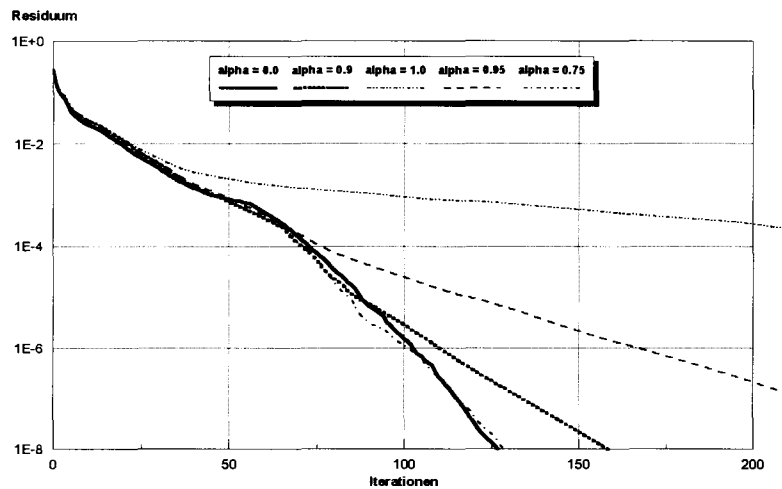


Bild 7.14: Konvergenzverlauf in Abhängigkeit der Wichtung zentraler Differenzen des Konvektionstermes, $104 * 32$ Gitterzellen

Das Diagramm zeigt, daß der Einfluß von α auf das Konvergenzverhalten bis zu einem Wert von $\alpha=0.9$ sehr gering ist. Erst bei Werten $\alpha>0.9$ verschlechtert sich das Konvergenzverhalten deutlich. In der Praxis bedeutet dies, daß es besonders ökonomisch ist, Konvektionsterme mit einem Wert von $\alpha=0.9$ zu berechnen, da hier der rechnerische Aufwand nur geringfügig höher als bei erster Ordnung diskretisiertem Konvektionsterm ist, die Lösung aber nahezu zweiter Ordnung ist.

7.4.3 Mehrgitter-Korrekturschema für die Druckkorrekturgleichung

Wegen der oben gezeigten Bedeutung des Massedefektes auf das Konvergenzverhalten der globalen Iteration und wegen des großen Rechenaufwandes für eine hinreichende Reduzierung des Massedefektes kommt einer ökonomischen Lösung der Druckkorrekturgleichung besondere Bedeutung zu. Aus diesem Grund ist ein Mehrgitter-Korrekturschema in Verbindung mit einem SIP-Glätter zur Beschleunigung der Lösung der Druckkorrekturgleichung vorgesehen worden. Durch das Mehrgitter-Korrekturschema kann der Rechenaufwand für eine einzelne globale Iteration deutlich gesenkt werden. Die Anzahl der notwendigen globalen Iterationszyklen bleibt davon unberührt.

Im ersten untersuchten Strömungsfall - der Bargeumströmung mit $64 * 24$ Zellen - wurde ein Mehrgitterkorrekturschema mit vier Gitterebenen zur Lösung der Druckkorrekturgleichung benutzt. Neben der Eingitter- und Mehrgittermethode wurden auch mehrere iterative Löser beziehungsweise Glätter miteinander verglichen. Tabelle 7.1 zeigt die notwendigen Zyklen der inneren Iteration für die Lösung der Druckkorrekturgleichung in der ersten globalen Iteration. Die innere Iteration terminiert, wenn das maximale Residuum einen Wert von 10^{-4} unterschreitet, d.h. es wird ein absolutes Abbruchkriterium verwendet.

	Gauss-Seidel	Punkt-Überrelaxation	Linien-Gauss-Seidel	Strongly Implicit Procedure (SIP)
		Überrelaxationsfaktor 1.5		Diagonalwichtung 0.9
Eingittermethode	>4000	>4000	1407	412
Mehrgitter-Korrekturschema	146	104	20	8

Tabelle 7.1: Iterationszyklen der ersten inneren Iteration
64 * 24 Diskretisierungszellen

Bei den Tabellenangaben wurde die Anzahl der Iterationszyklen des Mehrgitteralgorithmus auf allen Gitterebenen umgerechnet auf eine äquivalente Anzahl der Iterationszyklen auf dem feinsten Gitter. Bei einem Vergleich der verschiedenen Glätter muß berücksichtigt werden, daß die einzelnen Glätter für einen Iterationsschritt eine unterschiedliche Anzahl von Gleitkommaoperationen verlangen:

Gauss-Seidel	5	Multiplikationen	5	Additionen
Punkt-Überrelaxation	6	Multiplikationen	5	Additionen
Linien-Gauss-Seidel	17	Multiplikationen	13	Additionen
SIP	9	Multiplikationen	9	Additionen

Der SIP-Glätter verlangt zusätzliche Operationen für die LU - Zerlegung der Matrix.

In der folgenden Tabelle handelt es sich um die Bargeumströmung mit 208 * 64 und 104 * 32 Gitterzellen. Angegeben sind die notwendigen Iterationszyklen zur Lösung der Druckkorrekturgleichung vor der ersten Iteration (zur Erfüllung des Massenerhaltungssatzes für die Startwerte der Geschwindigkeiten) und in der ersten Iteration. Der Massedefekt wurde jeweils auf ein Zehntel des Anfangswertes reduziert, d.h. es wurde ein dynamisches Abbruchkriterium verwendet. Die Iterationszyklen auf höheren Gitterebenen wurden umgerechnet auf eine entsprechende Iterationsanzahl auf dem feinsten Gitter. Als iteratives Lösungsverfahren bzw. als Glätter wurde die SIP-Methode eingesetzt.

208 * 64	1 G	2 G	3 G	4 G	5 G	Faktor Reduzierung
Druckkorrektur vor der ersten globalen Iteration	1896	246	32	11	12	158.0
Druckkorrektur in der ersten globalen Iteration	443	61	13	9	8	55.4

104 * 32	1 G	2 G	3 G	4 G	5 G	Faktor Reduzierung
Druckkorrektur vor der ersten globalen Iteration	685	94	167	9		76.1
Druckkorrektur in der ersten globalen Iteration	121	21	9	8		15.1

Tabelle 7.2: Iterationszyklen zur Lösung der Druckkorrekturgleichung mit und ohne Mehrgitterbeschleunigung

In dieser Tabelle wird wie auch schon bei dem Berechnungsfall mit 64 * 24 Zellen die Beschleunigung der Konvergenz durch ein Mehrgitter-Korrekturschema bei der Lösung der Druckkorrekturgleichung eindrucksvoll verdeutlicht. Während beim ersten Berechnungsfall mit 64 * 24 Zellen noch ein absolutes Abbruchkriterium verwendet wurde, das relativ unökonomisch ist, wurde hier der Aufwand für die

Druckkorrekturgleichung auf ein Minimum beschränkt. Dennoch ergibt sich durch den Einsatz von Mehrgittermethoden eine Rechenzeitreduzierung, die bereits bei 3300 Gitterzellen einen Faktor größer als 10 erreicht. Bei 13000 Gitterzellen wächst die Ersparnis auf einen Faktor über 50 in den ersten Iterationszyklen.

In der letzten Tabelle wird allerdings bereits sichtbar, daß sich der Rechenaufwand für die Lösung der inneren Iteration mit jeder weiteren globalen Iteration reduziert. Damit wird auch das Potential für eine Einsparung von Rechenzeit durch den Einsatz des Mehrgitterkorrekturschemas reduziert. Nach 100 oder mehr globalen Iterationszyklen ist der Rechenaufwand zur Lösung der Druckkorrekturgleichung so gering, daß durch Mehrgittereinsatz nur eine geringe Beschleunigung der Konvergenz zu erzielen ist.

7.4.4 Beschleunigung der globalen Iteration

Durch die Beschleunigung der Konvergenz der Druckkorrekturgleichung wird die globale Konvergenz nicht beeinflusst. Um diese zu beschleunigen, wurde für die Berechnungsfälle der Bargeumströmung bei $104 * 32$ Zellen und $208 * 64$ Zellen das Full Approximation Scheme benutzt.

Der FAS-Algorithmus arbeitet mit jeweils zwei SIMPLE-Iterationsschritten vor der Restriktion und nach der Prolongation. Auf dem größten Gitter wurden so viele SIMPLE-Iterationszyklen durchgeführt, bis das Residuum 1 % des letzten Residuums der vorigen Gitterebene unterschritten hat. Dafür werden in der Regel nicht mehr als 30 SIMPLE-Iterationszyklen benötigt. Die zusätzliche Rechenzeit ist schon bei einem 4-Gitter-Algorithmus gegenüber einer einzelnen Iteration auf dem feinsten Gitter vernachlässigbar.

Bild 7.15 zeigt im Vergleich für ein Eingitter (SG) - und ein FAS-Mehrgitterverfahren den Verlauf des Residuums über den globalen Iterationszyklen auf dem feinsten Gitter. Bei dem Berechnungsfall handelt es sich um das Diskretisierungsgitter mit $208 * 64$ Zellen. Es wurden 5 Gitterebenen verwendet. Dabei wurden folgende Berechnungsparameter benutzt:

Unterrelaxation der Geschwindigkeit: $\omega_v = 0.8$
Unterrelaxation der Geschwindigkeit: $\omega_p = 0.2$
Abbruchresiduum der Druckkorrekturberechnung: $\Delta R = 0.1 * \text{Anfangswert}$
2 Prä-Iterationszyklen vor Restriktion bei FAS und CS
2 Post-Iterationszyklen nach Prolongation bei FAS
Diskretisierung der konvektiven Impulsänderung: $\alpha = 0.0$ und $\alpha = 0.9$

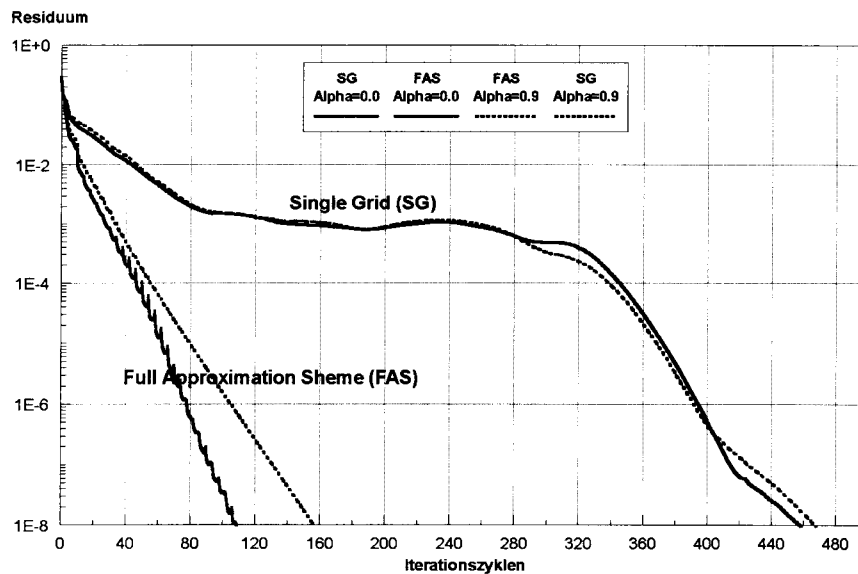


Bild 7.15: Konvergenzverlauf turbulente Strömung, Diskretisierungsgitter $208 * 64$

Durch das Full Approximation Scheme wird eine erhebliche Reduzierung der globalen Iterationszyklen auf dem Feingitter erreicht. Bei einem Residuum von 10^{-4} wird die Anzahl der notwendigen globalen Iterationszyklen von etwa 360 auf 50 reduziert. Das Diagramm zeigt auch, daß eine 90 %-ige Berücksichtigung zentraler Differenzen bei der Diskretisierung des Konvektionsterms erst bei einem Residuum kleiner als 10^{-4} einen nennenswerten Einfluß auf das Konvergenzverhalten hat, d.h. auch mit einer Diskretisierung, die zu 90 % Differenzen zweiter Ordnung benutzt, erhöht sich der Berechnungsaufwand im Vergleich zu Aufwindifferenzen nur unwesentlich.

Die Beschleunigung der Konvergenz fällt auf größeren Gittern geringer aus, so daß dort die Anwendung der Mehrgittermethode keinen Vorteil bringt (Bild 7.16).

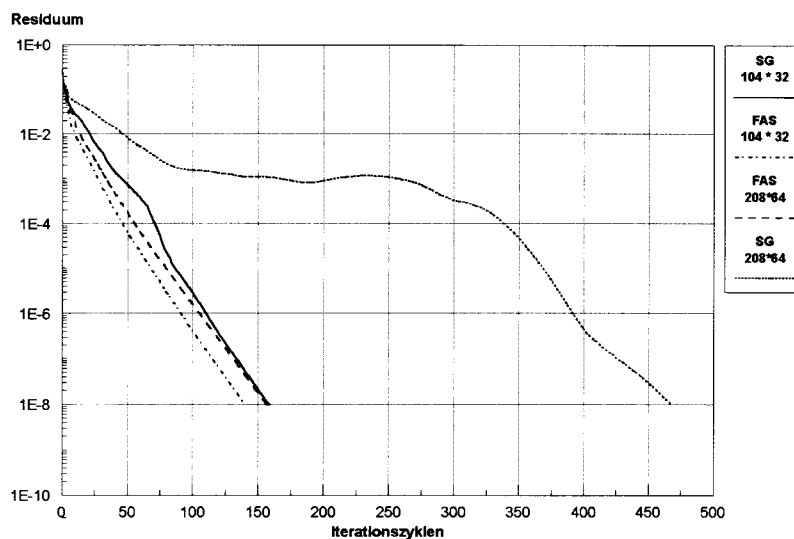


Bild 7.16: Vergleich der Konvergenzverläufe mit $104 * 32$ bzw. $208 * 64$ Diskretisierungszellen

Bild 7.16 läßt erkennen, daß bei $104 * 32$ Diskretisierungszellen die Konvergenzbeschleunigung durch das FAS sehr gering ausfällt. Interessanter ist aber, daß sich die Anzahl notwendiger Iterationszyklen zur Erreichung eines Residuums beim FAS für beide Diskretisierungsgitter kaum unterscheidet. Da der Rechenaufwand für eine globale Iteration linear von der Anzahl der Diskretisierungszellen abhängt - ein Mehrgitterkorrekturschema für die Lösung der Druckkorrekturgleichung vorausgesetzt - bedeutet dies auch eine nahezu lineare Abhängigkeit des Rechenaufwandes von der Anzahl der Diskretisierungszellen.

Zusammenfassung Mehrgitterbeschleunigung:

Bei den hier beschriebenen Strömungsberechnungen wird die Beschleunigung der Konvergenz durch zwei verschiedene Mehrgitteralgorithmen erreicht. Während die innere Iteration zur Lösung der Druckkorrekturgleichung mit einem Korrekturschema beschleunigt wird, wird bei der äußeren globalen Iteration die FAS-Methode angewandt. Die Beschleunigungsfaktoren durch die beiden Verfahren multiplizieren sich zu einer Gesamtverbesserung.

Bei dem Strömungsproblem mit einer Diskretisierung von $208 * 64$ Zellen wird die Anzahl der inneren Iterationszyklen zur Lösung der Druckkorrekturgleichung in der ersten globalen Iteration von 1896 Iterationszyklen ohne Mehrgitterbeschleunigung auf nur 12 Iterationszyklen mit einem Korrekturschema reduziert. Unabhängig von der inneren Iteration wurde die äußere Iteration mit einer FAS-Methode beschleunigt, die das Konvergenzverhalten deutlich verbessert (Bild 7.15).

Um jedoch Ein- und Mehrgittermethoden eindeutig miteinander zu vergleichen, müssen einige Zusatzeinflüsse berücksichtigt werden, die dazu führen, daß die Rechenzeitbeschleunigung durch die Mehrgittermethode nicht so positiv ausfällt wie zunächst erwartet wurde.

- Die Berechnungen auf den größeren Gittern und die Prolongations- und Restriktionsoperationen verlangen Rechenzeit. Im vorliegenden Berechnungsbeispiel werden in der globalen Iteration bei jedem V-Zyklus 4 globale Iterationszyklen auf jeder Gitterebene durchgeführt. Vier Iterationszyklen auf dem zweitfeinsten Gitter verlangen etwa die gleiche Anzahl von Rechenoperationen wie eine Operation auf dem feinsten Gitter. Der Rechenaufwand für die weiteren größeren Gitter ist praktisch vernachlässigbar. Insgesamt ist ein im Vergleich zu einer Eingitterberechnung gleicher Iterationszahl etwa 30 % höherer Rechenaufwand anzusetzen.
- Die Beschleunigung der Konvergenz der Druckkorrekturberechnung ist besonders eindrucksvoll in den ersten globalen Iterationszyklen. Da im Laufe der globalen Iterationszyklen der Aufwand für die Lösung der Druckkorrekturgleichung kontinuierlich abnimmt, kann naturgemäß auch die Beschleunigung durch das Mehrgitter-Korrekterverfahren nicht mehr so groß sein.

Ein (mit einigen rechnerbedingten Einschränkungen) objektiver Vergleich ist daher nur mit einem Vergleich der Rechenzeiten möglich.

Das folgende Diagramm zeigt die Gesamtberechnungszeiten für die ebene Bargeumströmung bei den vier Diskretisierungen:

52 * 16 Zellen	d.h.	832 Zellen
104 * 32 Zellen	d.h.	3328 Zellen
208 * 32 Zellen	d.h.	6656 Zellen
208 * 64 Zellen	d.h.	13312 Zellen

Bei den folgenden Berechnungszeiten handelt es sich um reine CPU-Zeiten. Die Berechnungen werden in-core und ohne Plattenzugriff durchgeführt. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die größte 1-Norm der fünf berechneten Gittergrößen den Wert 10^{-5} unterschreitet.

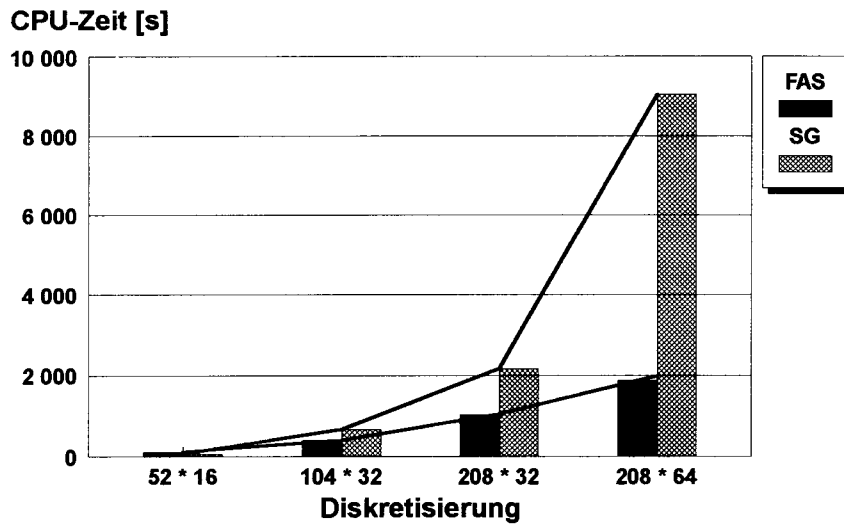


Bild 7.17: Rechenzeit Ein- und Mehrgittermethode für ebene Bargeumströmung

Die gemessene Beschleunigung durch die geschachtelte Mehrgittermethode beträgt demnach im Falle der höchsten Diskretisierung etwa Faktor 5.

Bei der Berechnung unterschiedlich diskretisierter Modelle konnte beobachtet werden, daß die Anzahl der globalen Iterationszyklen zur Erreichung eines bestimmten Residuums bei Einsatz der Mehrgittermethode annähernd konstant blieb. Das bedeutet, die Rechenzeit steigt annähernd linear mit der Anzahl der Zellen des diskretisierten Strömungsproblem. Diese Eigenschaft eines iterativen Lösungsverfahrens wird als "optimales Konvergenzverhalten" bezeichnet.

Eine Regression der im letzten Diagramm dargestellten Berechnungszeiten über der Anzahl der Diskretisierungszellen zeigt ein Ergebnis, das die Beobachtung bestätigt. Werden die vier Diskretisierungen von Bild 7.17 zugrundegelegt, ergibt sich, daß die Rechenzeit etwa proportional der 1.04-ten Potenz der Anzahl der Diskretisierungszellen ist:

$$t_{CPU} \approx n^{1.04}$$

mit der CPU-Rechenzeit t_{CPU} und der Diskretisierung des Strömungsproblem n .

8 Strömungsberechnungen um das Wigley-Schiff

Als dreidimensionaler Strömungsfall wird die Umströmung des Wigley-Schiffes untersucht. Die ursprüngliche Zielsetzung, die Untersuchung einer räumlichen Pontonumströmung auf beschränktem Fahrwasser, scheiterte am Fehlen geeigneter qualitativ hochwertiger Modellversuchsergebnisse. Das Wigley-Schiff hingegen wurde bereits mehrfach experimentell untersucht. Für den Vergleich der Berechnungen mit Messungen werden die Ergebnisse von *Sarda (1985)* herangezogen.

Das Wigley-Schiff hat eine parabolische Wasserlinien- und Spantform. Seine Körperoberfläche wird mit

$$\frac{2y}{B} = \left(1 - \frac{z^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \quad (8.1)$$

beschrieben, wobei ein kartesisches Koordinatensystem benutzt wird, dessen Ursprung mittschiffs am Hauptspant in der Wasserlinie liegt, dessen x -Achse nach hinten und dessen z -Achse nach unten zeigt. B bezeichnet die Schiffsbreite, D den Tiefgang und L die Länge des Schiffes.

Die Berechnungen wurden mit Verhältniswerten durchgeführt, die auch den Modellversuchen von *Sarda* zugrundeliegen, d.h. $L/B = 10$ und $L/D = 16$. Die Reynoldszahl betrug $Re = 4.5 \cdot 10^6$.

Die Berechnungen werden mit einer Reihe von Diskretisierungsgittern mit 840 bis 107000 Gitterzellen durchgeführt. Tabelle 8.1 listet die verwendeten Diskretisierungsgitter auf. In der dritten Spalte ist angegeben, wie viele Gitterebenen bei einem Mehrgitterschema benutzt wurden, in den letzten vier Spalten, welche Strömungsparameter mit Meßwerten verglichen werden. Hier bezeichnet p den Druckverlauf, c_F den Reibungswiderstandsbeiwert, k die turbulente kinetische Energie und u^x die X-Komponente der Geschwindigkeit.

Diskretisierungsgitter (i*j*k)	Gitterzellen	Gitterebenen	p	c_F	k	u^x
96 * 32 * 32	98304	5	•	•	•	•
48 * 32 * 32	49152	5	•			•
56 * 48 * 40	107520	3		•		
56 * 24 * 40	53760	3		•		
56 * 24 * 20	26880	2	•		•	•
28 * 24 * 20	13440	2				
28 * 12 * 20	6720	2	•	•	•	•
14 * 6 * 10	840	1	•	•		

Tabelle 8.1: Diskretisierungsgitter Wigley-Schiff

Es wird eine Gesamtkörperströmung berechnet, d.h. der Einströmrand des Berechnungsgebietes liegt in einer angemessenen Entfernung vor dem Bug des Schiffes. In vielen Fällen von Strömungsberechnungen um Schiffe wird nur die Achterschiffsumströmung berechnet, um das Diskretisierungsgitter möglichst klein zu halten. In diesem Fall liegt der Einströmrand in der Hauptspantebene, in der dann die Geschwindigkeit und die Turbulenzparameter angegeben werden müssen. Eine Möglichkeit, diese Randbedingungen zu bestimmen, besteht darin, eine Vorschiffsumströmung zu berechnen, bei der die Hauptspantebene dann der Ausströmrand ist. Dies ist bei dem zur Hauptspantebene symmetrischen Wigley-Schiff sehr einfach möglich, indem man Einström- und Ausströmrand vertauscht und das Vorzeichen der Geschwindigkeit umkehrt. Im Vergleich zu einer Berechnung der Ganzschiffsumströmung mit einem äquivalenten Gitter bedeutet dies, daß das Strömungsproblem zweimal mit der halben Anzahl an Diskretisierungszellen gelöst wird. Dies kann bei den üblichen Lösungsverfahren eine erhebliche

Reduzierung der Rechenzeit mit sich bringen. Bei einem optimalen iterativen Löser mit einem Berechnungsaufwand proportional zur Anzahl der Diskretisierungszellen verschwindet dieser Vorteil. Die Berechnung der Ganzkörperströmung ist daher rechenökonomisch kein Nachteil, organisatorisch aber viel einfacher. Lediglich die Speichergröße ist bei einer Berechnung der Ganzschiffsumströmung höher.

Bild 8.1 zeigt das Berechnungsgebiet, das bei allen Diskretisierungsgittern gleich ist. Demnach liegt der Einströmrand etwa 30 % der Schiffslänge vor dem vorderen Lot, der Ausströmrand liegt eine Schiffslänge hinter dem hinteren Lot. Das Berechnungsgebiet ist etwa eine Schiffslänge breit und eine halbe Schiffslänge hoch.

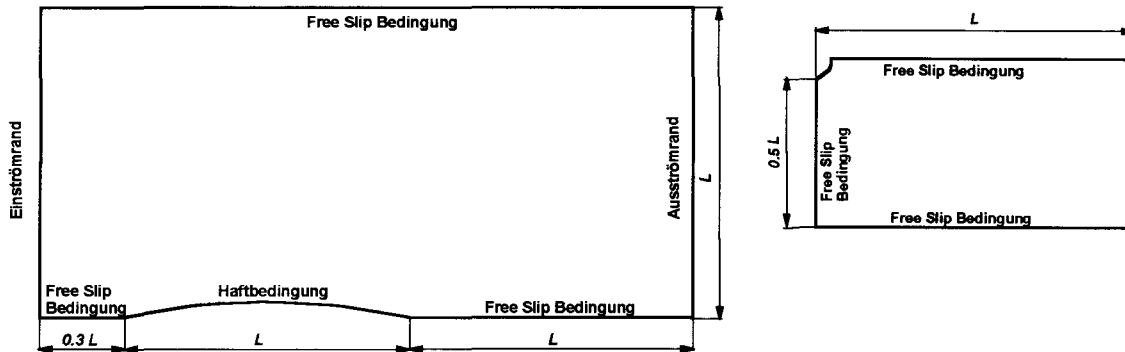


Bild 8.1: Berechnungsgebiet Wigley-Schiff (Wasserlinienebene und Hauptspantebene)

Am Einströmrand wird eine konstante Geschwindigkeit vorgegeben und die turbulente kinetische Energie null gesetzt, d.h. hier herrscht ungestörte parallele Zuströmung. Am Ausströmrand sind die randnormalen Ableitungen für die Geschwindigkeitskomponenten und die Turbulenzparameter 0. In der Mittschiffsebene, auf der seitlichen Berandung und auf dem Boden des Berechnungsgebietes herrscht Schubspannungsfreiheit. Diese Randbedingungen werden auch in der Wasserlinie angenommen, d.h. die freie Oberfläche wird durch eine Symmetrieebene ersetzt. Es wird also die Umströmung des tiefgetauchten Doppelrumpfes berechnet. Dies ist konsistent zu den Versuchen von *Sarda*.

Bild 8.2 und Bild 8.3 zeigen das Diskretisierungsgitter in der Wasserlinie und in der Spantebene für das Gitter 96*32*32.

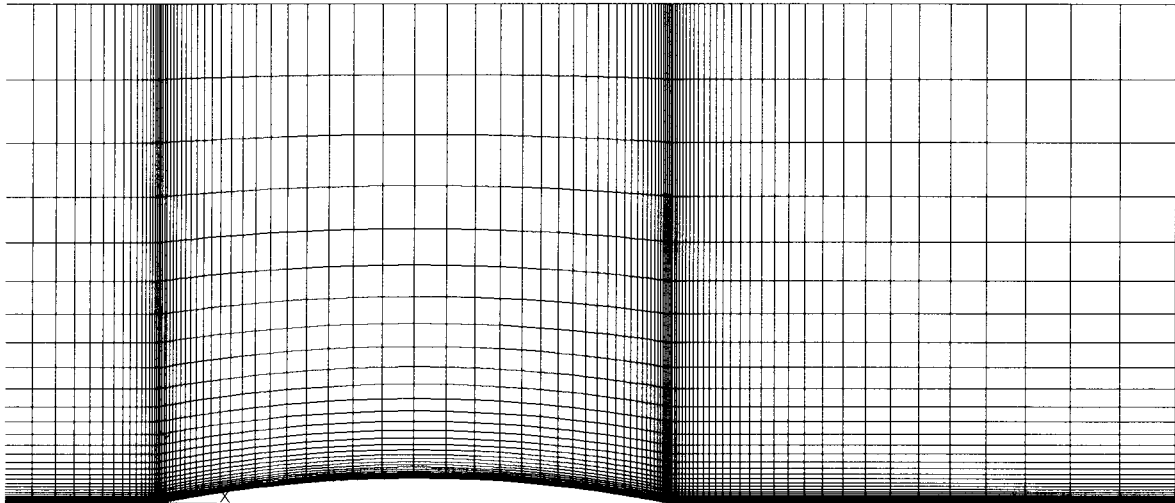


Bild 8.2: Wasserlinie des Diskretisierungsgitters 96*32*32

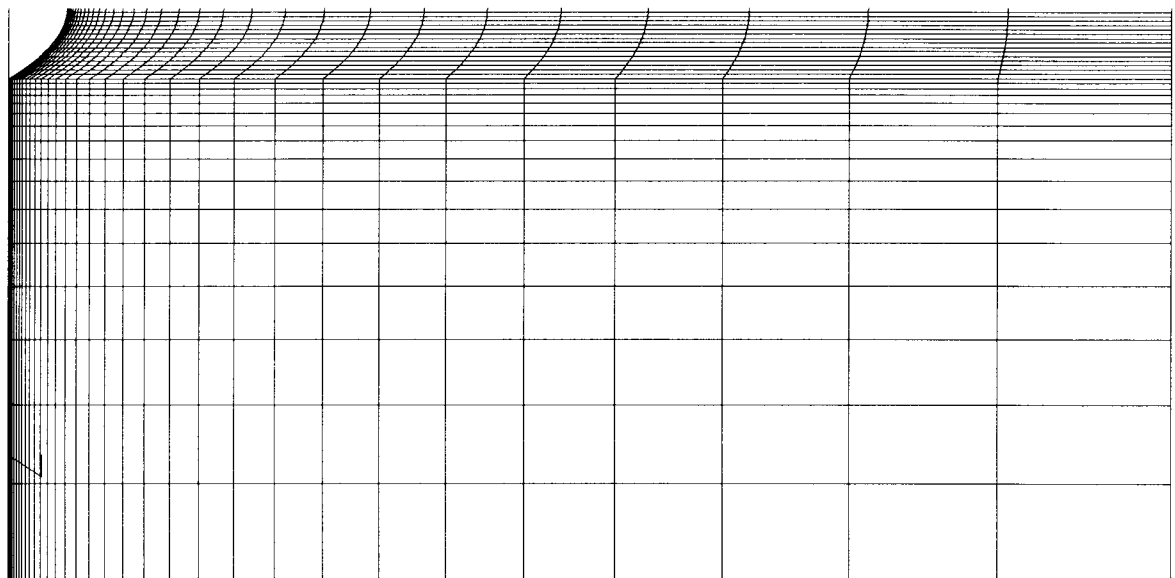


Bild 8.3: Hauptspantebene des Diskretisierungsgitters 96 * 32 * 32

Die im folgenden Kapitel gezeigten Berechnungsergebnisse wurden alle mit dem gleichen Satz an Berechnungskoeffizienten durchgeführt:

- Der konvektive Term wurde mit einem 10 %igen Anteil erster Ordnung genauer Upwind-Differenzen und einem 90 %igen Anteil zweiter Ordnung genauer zentraler Differenzen berechnet.
- Der dimensionslose Wandabstand betrug auf fast allen Gittern $50 < y^+ < 120$. Lediglich auf dem Gitter mit 6720 Zellen war der Gitterabstand $y^+ \approx 240$. Auf dem Gitter mit 840 Zellen war der dimensionslose Wandabstand deutlich außerhalb des gültigen Bereiches. Direkt am Bug sind die Gültigkeitsgrenzen der Wandfunktionen ebenfalls nicht eingehalten, da hier sehr dünne Grenzschichten liegen (am vorderen Lot mit einer gegen null gehenden Dicke).

8.1 Vergleich von Berechnungs- und Meßergebnissen

Druckverlauf in der Wasserlinie:

Der Vergleich von Messungen und Berechnungen des Druckverlaufes wurde auf der Schiffskörperkontur in Höhe der Wasserlinie durchgeführt. Der Vergleich umfaßt Berechnungen mit den Diskretisierungsgittern $96 \times 32 \times 32$, $48 \times 32 \times 32$, $56 \times 24 \times 20$, $28 \times 12 \times 20$ und $14 \times 6 \times 10$, d.h. auf 5 Gittern von 840 bis 98304 Gitterzellen. Bei der Auswahl der Gitter für den Vergleich wurde vor allem auf eine Variation der Längsauflösung geachtet.

Bild 8.4 zeigt den Druckbeiwert c_p über der Längenkoordinate. Das vordere Lot des Schiffes liegt bei $l=0$, das hintere Lot bei $l=3048$ mm. Der Druckbeiwert $c_p = (p - p_0)/(0.5\rho v^2)$ wurde so definiert, daß p_0 der Druck am Einströmrand in der Höhe der Wasserlinie ist, d.h. an dieser Stelle ist $c_p=0$.

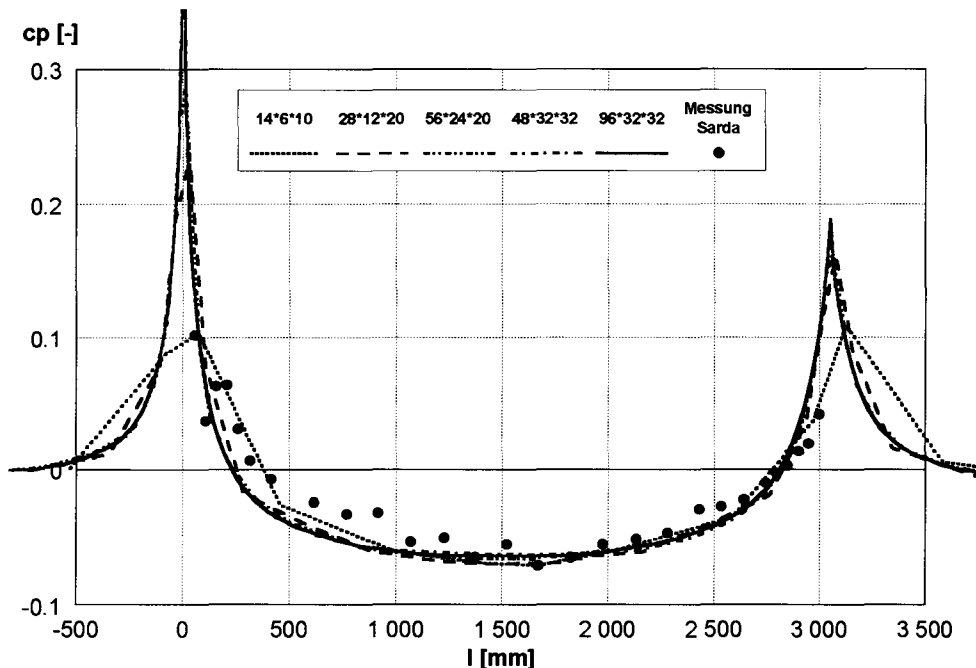


Bild 8.4: Druckverlauf in der Wasserlinie

Der Vergleich der Berechnungskurven zeigt, daß sich der berechnete Druckverlauf mit zunehmender Netzverfeinerung einer Lösung annähert, die bereits mit dem mittleren Gitter ($56 \times 24 \times 20$, 26880 Gitterzellen) erreicht ist. Die beiden gröberen Gitter zeigen eine deutliche Abweichung. Der Unterschied der drei feinsten Gitter (26880, 49152 und 98304 Gitterzellen) ist praktisch unbedeutend, d.h. bereits mit 26880 Diskretisierungszellen ist hier eine nahezu gitterinvariante Lösung gefunden worden. Der Vergleich dieser Lösung mit den Meßergebnissen zeigt allerdings vor allem im Vorschiffsbereich deutliche Unterschiede. Bezogen auf den Staudruck der Anströmung treten hier Abweichungen bis 5 % auf. Im Achterschiff ist die Übereinstimmung besser. Grundsätzlich fällt ein auf geglätteten Meßwerten basierender Vergleich besser aus.

Schubspannungen:

Der berechnete Schubspannungsverlauf wurde auf der Schiffskörperkontur in Spantebenen mit den entsprechenden Messungen verglichen. Dabei wurde der Reibungswiderstandsbeiwert c_f über der mit dem Schiffstiefgang normierten Höhenkoordinate Z/D aufgetragen. Der Reibungswiderstandsbeiwert wird in ähnlicher Weise aus der Schubspannung auf der Körperkontur ermittelt wie der Druckbeiwert aus dem

Druck. Er berechnet sich mit $c_F = \tau_{\text{Wand}} / (0.5\rho v^2)$ mit der Wandschubspannung τ_{Wand} , der Dichte ρ und der ungestörten Zuströmgeschwindigkeit v .

Bild 8.5 zeigt im Vergleich den gemessenen und die berechneten Reibungswiderstandsbeiwerte. Die Berechnungen wurden mit den Diskretisierungsgittern $96 * 32 * 32$, $56 * 48 * 40$, $56 * 24 * 40$, $28 * 12 * 20$ und $14 * 6 * 10$ durchgeführt. In diesem Fall wurde insbesondere die Auflösung der räumlichen Ausdehnung normal zur Wand variiert. Die vier gezeigten Diagramme unterscheiden sich in der Längsposition der Messung. $2X/L=0.0$ bezeichnet dabei die Position des Hauptspantes und $2X/L=1.0$ das hintere Lot.

Am Hauptspant ($2X/L=0.0$) wird eine große Abweichung der Berechnungswerte von den Messungen festgestellt. Hier ist auch eine deutliche Abhängigkeit des Ergebnisses von der Diskretisierung zu erkennen. Mit zunehmender Auflösung des Berechnungsgebietes senkrecht zur Wand wird die Abweichung der berechneten Schubspannung zu den Meßwerten immer größer. Die Abweichung beträgt hier bis zu 40 %. Bei einer Annäherung an das achtere Lot werden die Unterschiede zwischen den einzelnen Berechnungsgittern wie auch die Differenz zwischen Berechnung und Messung immer geringer. Das Diskretisierungsgitter $14 * 6 * 10$ zeigt jedoch immer eine deutliche Abweichung sowohl zu den Berechnungsergebnissen der anderen Gitter als auch zu den Meßwerten. Dies ist jedoch wegen des großen Wandabstandes dieses groben Gitters ein erwartetes Ergebnis und trifft zu einem geringeren Grade auch noch für das nächstfeinere Gitter $28 * 12 * 20$ zu. Die Berechnungsergebnisse der anderen Gitter fallen nahezu zusammen, mit Abweichungen bis 3 %, meistens deutlich darunter. Das logarithmische Wandgesetz ist eine empirische, mit Ungenauigkeiten behaftete Funktion, so daß bei einer Abweichung von 3 % zwischen den einzelnen Gittern bereits von einer nahezu gitterinvarianten Lösung gesprochen werden kann.

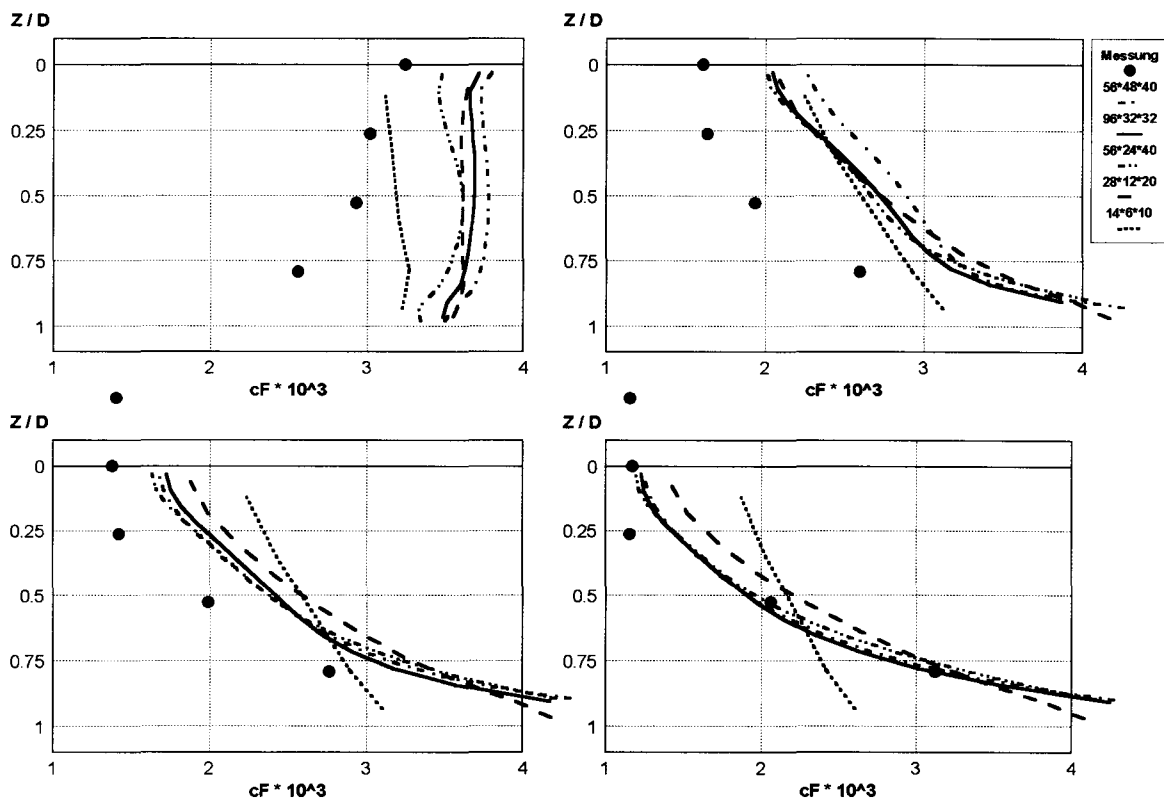


Bild 8.5: Schubspannungen in Spantebenen $2X/L = 0.0, 0.8, 0.9$ und 0.9666

Die Übereinstimmung dieser gitterinvarianten Lösung mit den Meßwerten nimmt zu, je näher die Meß- bzw. Berechnungspunkte am hinteren Lot liegen. Unmittelbar vor dem hinteren Lot ist die gemittelte Abweichung der gitterinvarianten Lösung von den Meßwerten 6 %. Ursache für die Zunahme der Genauigkeit bei Annäherung an das hintere Lot ist vermutlich die Zunahme der Grenzschichtdicke. Am Hauptspant ist die Grenzschicht so dünn, daß sie nur durch drei bis vier Gitterlinien senkrecht zur Wand aufgelöst wird. Am hinteren Lot hingegen beträgt die Grenzschichtdicke etwa eine halbe Schiffsbreite und wird damit von 20 und mehr Gitterlinien senkrecht zur Wand diskretisiert. Dies ist ein inhärenter Nachteil der Berechnung dünner Grenzschichten mit Wandfunktionen. Eine höhere Auflösung des unmittelbaren Wandbereiches ist bei dünneren Grenzschichten in der Regel nicht möglich, weil dann der Gültigkeitsbereich des dimensionslosen Wandabstandes y^+ unterschritten wird.

Geschwindigkeitsprofile:

Messungen der Geschwindigkeitsprofile werden mit Berechnungen auf drei verschiedenen Gittern verglichen. Es werden Profile in den Höhenpositionen Wasserlinie und $0.2 \cdot$ Tiefgang über Oberkante Kiel (OKK) und den Längspositionen Hauptspant, hinteres Lot sowie $0.4 \cdot$ Länge hinter dem hinteren Lot für den Meßwertvergleich herangezogen. In den folgenden Diagrammen bezeichnet $2X/L=0$ die Längsposition des Hauptspantes, $2X/L=1.0$ die Längsposition des hinteren Lotes, $Z/D=0$ bezeichnet die Höhenposition Wasserlinie und $Z/D=0.8$ bezeichnet die Höhenposition $0.2 \cdot$ Tiefgang über dem Kiel.

In den Diagrammen in Bild 8.6 und Bild 8.7 ist die Längskomponente der Geschwindigkeit über dem Abstand zur Wand aufgetragen. Die Geschwindigkeit wurde dabei mit der der ungestörten parallelen Zuströmung vor dem Schiff und der Wandabstand mit der halben Schiffsbreite normiert.

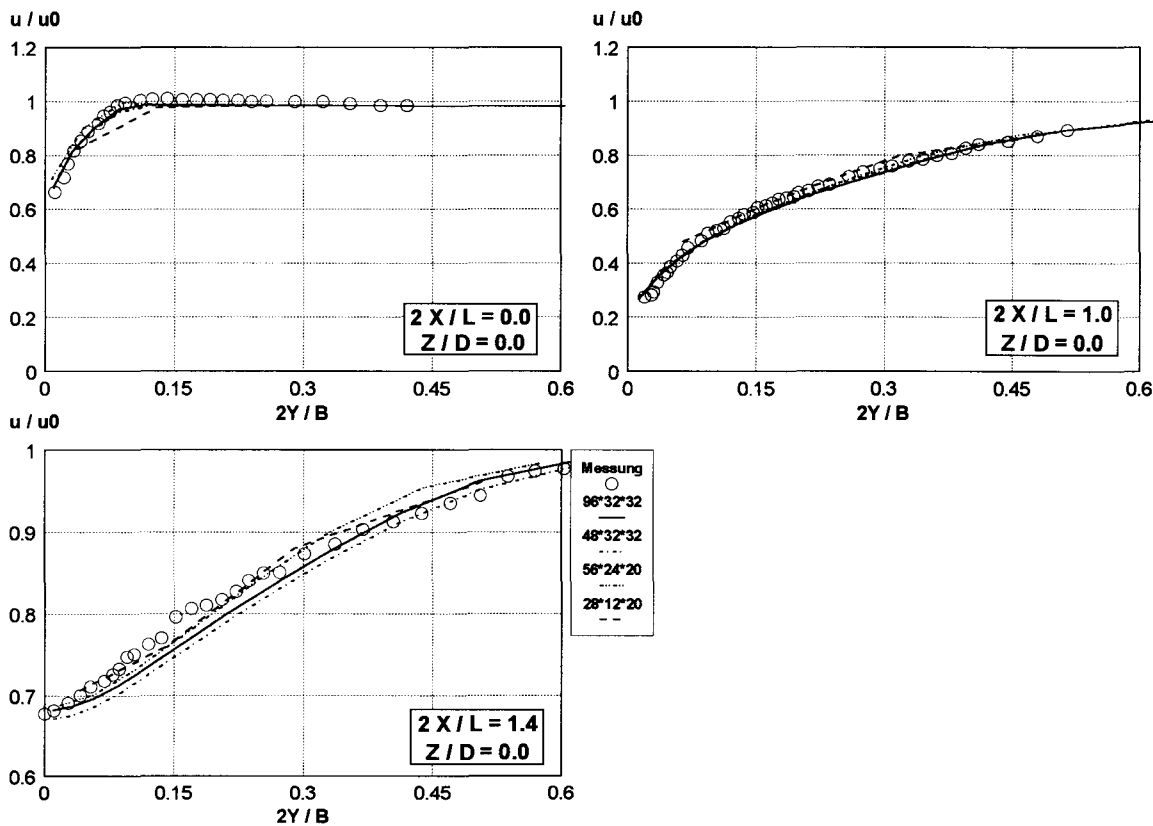


Bild 8.6: Geschwindigkeitsprofile in der Wasserlinie

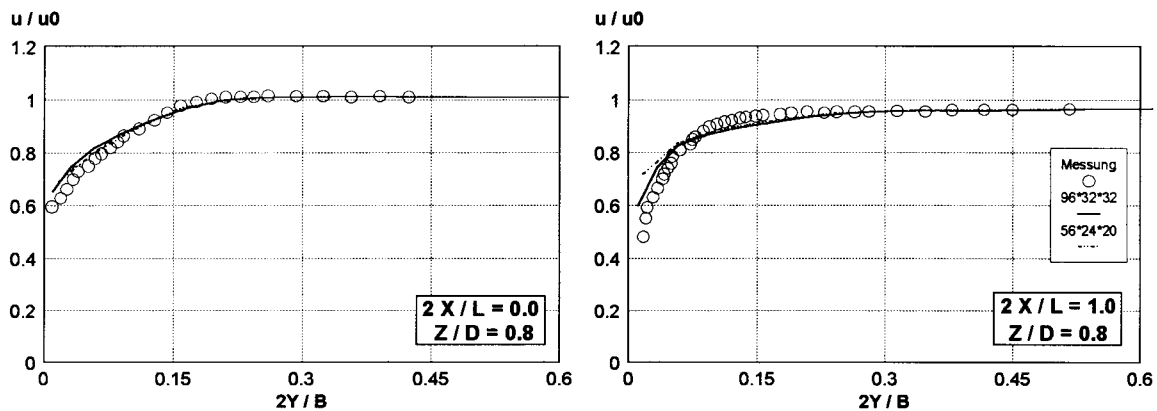


Bild 8.7: Geschwindigkeitsprofile 0.2 * Tiefgang über Kiel

Bei einer genaueren Betrachtung der Meßwerte kann beobachtet werden, daß die Längsgeschwindigkeit neben dem Schiff am Hauptspant nur über einen sehr kleinen Bereich die Geschwindigkeit der ungestörten Zuströmung erreicht. Insbesondere in größerer Entfernung vom Schiff ist die Geschwindigkeit geringer als die der ungestörten Zuströmung. Bei Berechnungen und Messungen in einem vollständig geschlossenen Kanal ist dies nicht möglich. Vielmehr wird neben dem Schiff durch dessen Verdrängung und durch die zusätzliche Verdrängungsgrenzschichtdicke eine Übergeschwindigkeit induziert. Bei den vorliegenden Messungen hingegen geht offensichtlich Masse aus der näheren Umgebung des Schiffes (dem Berechnungsgebiet) verloren. Hier sind die Messungen entweder sehr ungenau oder sie wurden nicht in einem geschlossenen Kanal, sondern z.B. in einem längs geschlitzten runden Kanal durchgeführt, wie er auch am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg eingesetzt wird.

Um trotzdem die Vergleichbarkeit von Berechnungen und Messungen zu gewährleisten, werden die Berechnungswerte so um einen konstanten Betrag korrigiert, daß Berechnungs- und Meßwerte in großer Entfernung zur Schiffskontur übereinstimmen. Diese Korrekturen waren notwendig am Hauptspant sowie am hinteren Lot für die Geschwindigkeitsprofile in der Wasserlinie. Bei den Geschwindigkeitsprofilen weit hinter dem Schiff und auf 0.2 * Tiefgang über dem Kiel war die Korrektur nicht notwendig. Hier stimmten die berechneten und gemessenen Geschwindigkeiten in großer Entfernung vom Schiff überein.

Unter Berücksichtigung der Korrektur zeigt sich insbesondere in der Wasserlinienebene eine erfreulich gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den auf den feineren Gittern berechneten Geschwindigkeitsprofilen. Lediglich bei dem Diskretisierungsgitter 28 * 12 * 20 zeigt sich eine größere Abweichung von den Meßergebnissen. Alle Geschwindigkeitsprofile der feineren Gitter fallen nahezu zusammen. Die Abweichungen von den Meßwerten betragen am Hauptspant und am hinteren Lot weniger als 2 %. Bei der Längsposition 0.4 * Länge des Schiffes hinter dem hinteren Lot treten Abweichungen von den Meßwerten bis zu 4 % auf. Auch hier sind die Abweichungen deutlich geringer, wenn für den Meß- und Berechnungsvergleich ein geglättetes Geschwindigkeitsprofil der Meßwerte zugrunde gelegt wird. In der horizontalen Ebene 0.2 * Tiefgang über OKK treten größere Abweichungen zwischen Messung und Berechnung auf. Sie betragen am hinteren Lot in unmittelbarer Wandnähe vereinzelt bis zu 30 %.

Turbulente kinetische Energie:

Der Verlauf der turbulenten kinetischen Energie wurde in der Wasserlinienebene am hinteren Lot und bei den Längspositionen 0.2 * Länge und 1.0 * Länge des Schiffes hinter dem hinteren Lot mit den entsprechenden Meßwerten verglichen. Der Vergleich weit hinter dem Schiff sollte vor allem die

Möglichkeit des Transportes turbulenter kinetischer Energie im $k-\varepsilon$ - Turbulenzmodell verifizieren, die als wesentlicher Vorteil dieses Turbulenzmodelles im Vergleich zu algebraischen Turbulenzmodellen gilt.

In Bild 8.8 bezeichnet $2X/L=0.0$ die Hauptspantposition und $2X/L=1.0$ das hintere Lot. In den Diagrammen ist die turbulente kinetische Energie aufgetragen über dem horizontalen Abstand zur Wand bzw. zur Mittschiffsebene. Die Profile liegen bei $Z/D=0.0$, d.h. in der Wasserlinie. Die turbulente kinetische Energie ist mit dem Quadrat der ungestörten Anströmgeschwindigkeit normiert, der Abstand zur Wand mit der halben Schiffsbreite.

Am hinteren Lot in unmittelbarer Wandnähe ist die gemessene turbulente kinetische Energie doppelt so groß wie die berechnete. In etwas größerer Entfernung zur Wand wie auch hinter dem Schiff ist die Übereinstimmung besser. Die Fehler betragen jedoch vielfach bis zu 30 %.

Alle Diagramme zeigen eine deutlich erkennbare Abhängigkeit der Berechnungsergebnisse von der Gitterdiskretisierung. In allen Fällen ist die auf den gröberen Gittern berechnete turbulente kinetische Energie geringer als die auf den feineren Gittern berechnete. Dies ist auch zu erwarten, da auf gröberen Gittern der Geschwindigkeitsgradient und damit auch die Produktionsrate turbulenter kinetischer Energie unterschätzt wird. Eine noch feinere Auflösung des Berechnungsgebietes war jedoch aus Gründen fehlender Rechenkapazität nicht möglich.

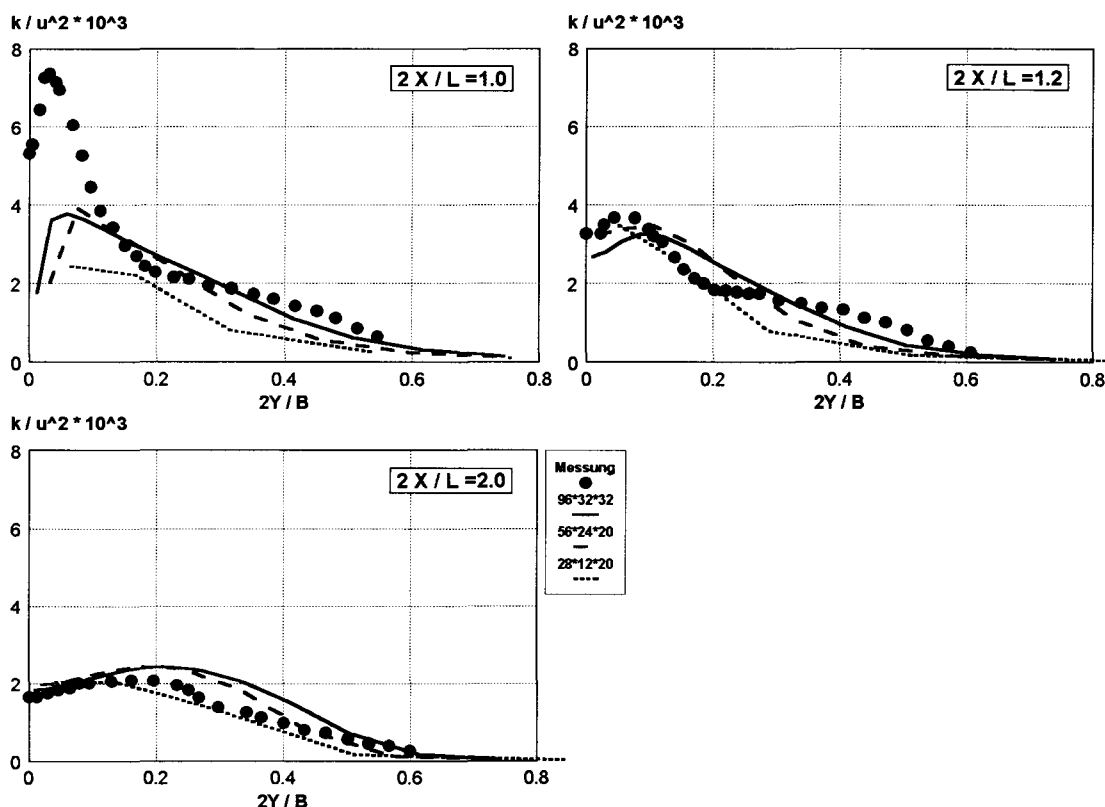


Bild 8.8: Verlauf der turbulenten kinetischen Energie

Zusammenfassung:

Der Vergleich von Berechnungs- und Meßwerten zeigt ein uneinheitliches Bild. Der Druckverlauf wird im Bereich des Vorschiffes nur mit mäßiger Genauigkeit wiedergegeben, im Hauptspantbereich

und im Achterschiff fällt der Vergleich günstiger aus, vor allem wenn dabei geglättete Meßwerte zugrunde gelegt werden. Der Schubspannungsverlauf zeigt im Hauptspantbereich Abweichungen bis zu 30 %, die aber in Richtung des hinteren Lotes abnehmen. Wesentlich besser ist der Berechnungs-Meßwertvergleich bei den Geschwindigkeitsprofilen, deren Abweichung nur an einzelnen Stellen 2 % überschreitet. Bei der turbulenten kinetischen Energie wiederum ist die Abweichung der Berechnungswerte von den Meßwerten am hinteren Lot unakzeptabel.

Beim Druckverlauf, den Schubspannungen und den Geschwindigkeitsprofilen wird eine nahezu gitterinvariante Lösung bereits mit $56 * 24 * 40$ bzw. $48 * 32 * 32$ Diskretisierungszellen, d.h. mit etwa 50000 Gitterzellen, festgestellt. Eine Erhöhung der Gitterdiskretisierung in Längsrichtung und in Höhenrichtung hat keine Verbesserung der Ergebnisse gebracht. Bei einer sehr hohen Diskretisierung in Querrichtung, d.h. senkrecht zu Wänden mit Haftbedingung, muß vor allem berücksichtigt werden, daß der minimale Wandabstand y^+ nicht unterschritten wird.

Es ist zu vermuten, daß die Schubspannungen im Bereich dünner Grenzschichten, d.h. am und vor dem Hauptspant, mit einer höheren Gitterauflösung genauer berechnet werden können. Auch die Genauigkeit der Berechnung der turbulenten kinetischen Energie kann unter Umständen von einer verbesserten Auflösung senkrecht zur Wand profitieren. Wegen beschränkter Rechnerkapazitäten konnte eine weitere Steigerung der Diskretisierung jedoch nicht untersucht werden.

8.2 Konvergenzverhalten des Mehrgitteralgorithmus

8.2.1 Beschleunigung der inneren Iteration

In Tabelle 8.2 werden die notwendigen Feingitteriterationszyklen für unterschiedliche Mehrgitteralgorithmen verglichen (Iterationszyklen auf gröberen Gitterebenen wurden dabei umgerechnet auf eine äquivalente Anzahl von Feingitteriterationszyklen). "1 GE" bezeichnet dabei den Eingitteralgorithmus (eine Gitterebene), während bei "4 GE" neben dem Feingitter noch drei weitere Grobgitterebenen benutzt wurden. In der Tabelle sind sowohl die notwendigen inneren Iterationszyklen aufgeführt, die vor der ersten globalen Iteration zur Herstellung guter Startwerte benötigt werden, als auch die inneren Iterationszyklen in der ersten globalen Iteration. Als notwendige Iterationszyklen werden dabei die Anzahl Iterationszyklen bezeichnet, die benötigt werden, um das Residuum auf 10 % seines Wertes vor Beginn der Berechnung zu reduzieren.

	1 GE	2 GE	3 GE	4 GE
innere Iterationszyklen vor der ersten globalen Iteration	343	79	65	63
innere Iterationszyklen in der ersten globalen Iteration	47	10	10	12

Tabelle 8.2: Iterationszyklen zur Lösung der Druckkorrekturgleichung bei konstanten Startwerten

Aus der Tabelle geht eine Reduzierung der notwendigen Iterationszyklen durch das Mehrgitterverfahren auf ein Fünftel des Eingitterwertes hervor. Diese Reduzierung ist deutlich geringer als bei der Pontonumströmung festgestellt wurde. Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß es beim Wigley-Schiff relativ einfach ist, Startwerte zu erzeugen, die den Massenerhaltungssatz erfüllen. Mit der konstanten Geschwindigkeit des Einströmrandes im ganzen Berechnungsgebiet werden Startwerte vorgegeben, die nur in unmittelbarer Wandnähe des Wigley-Schiffes den Massenerhaltungssatz nicht erfüllen. Der Fehler, d.h. der Massedefekt, tritt dementsprechend nur lokal auf, die Fehlerverteilung ist hier hochfrequent. Bei solchen Bedingungen hat auch ein iterativer Löser ohne Mehrgitterbeschleunigung gutes

Konvergenzverhalten. Dies wird auch dadurch bestätigt, daß bereits mit einem Zweigitteralgorithmus fast die gleiche Beschleunigung der Iteration erreicht werden kann wie mit einem Viergitteralgorithmus. Während auf der zweitfeinsten Gitterebene die Fehlerverteilung immer noch relativ hochfrequent ist, kann sie auf der größten Gitterebene praktisch nicht mehr abgebildet werden.

8.2.2 Beschleunigung der äußeren Iteration

Die äußere Iteration wird wie in Kap. 7 auch bei der Berechnung der Umströmung des Wigley-Schiffes mit einem Full Approximation Scheme beschleunigt. Es werden mehrere V-Zyklen mit jeweils zwei Prä- und zwei Post-Iterationszyklen und mit bis zu 30 Iterationszyklen auf dem größten Gitter durchgeführt. Auf dem feinen Gitter werden zunächst Startwerte ermittelt durch einmaliges Lösen der Druckkorrekturgleichung und Korrektur der Geschwindigkeit. Die innere Iteration wird abgebrochen, wenn das Residuum der Druckkorrekturgleichung 10 % des Anfangswertes unterschreitet.

Mit diesen Berechnungsparametern werden die Konvergenzverläufe von Eingitter- und Mehrgitterverfahren verglichen, und zwar mit den Gittern $28 * 12 * 20$, $56 * 24 * 40$, $96 * 32 * 32$ und $48 * 32 * 32$.

Bild 8.9 zeigt im Vergleich das Residuum der Impulsgleichung zur Bestimmung der Längsgeschwindigkeit, aufgetragen über der Anzahl der globalen Iterationszyklen.

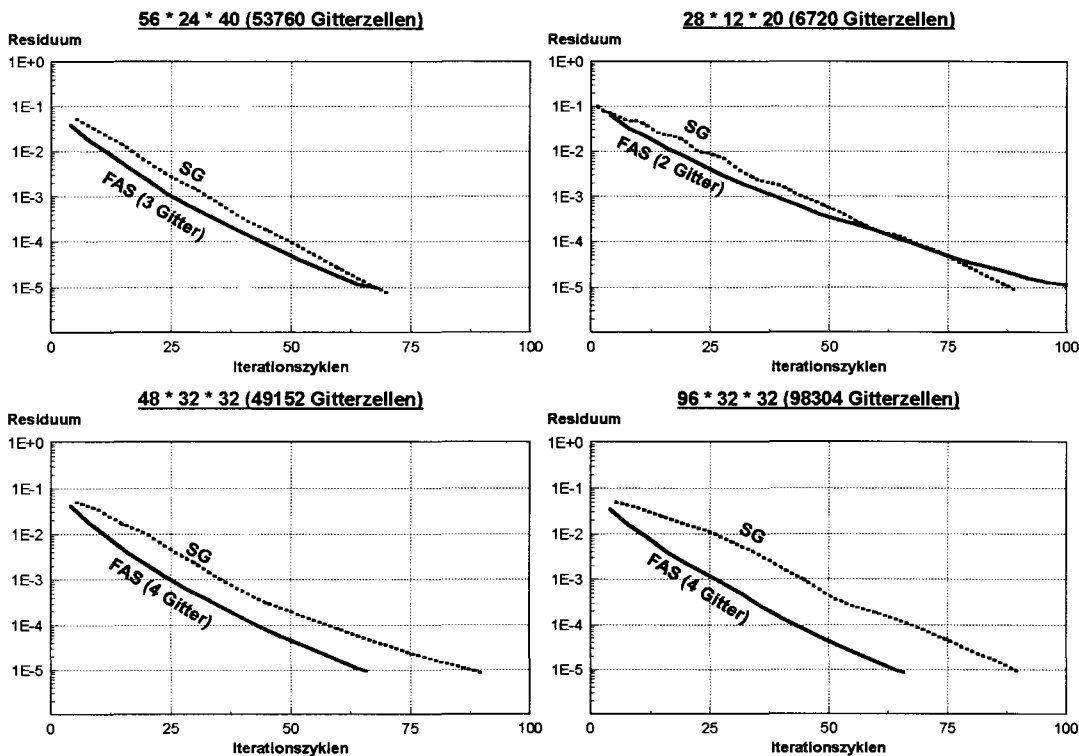


Bild 8.9: Vergleich Eingittermethode (SG) und Full Approximation Scheme (FAS)

In den beiden oberen Diagrammen ist zu erkennen, daß mit Hilfe des "Full Approximation Scheme" (FAS) keine wesentliche Reduzierung der globalen Iterationszyklen erreicht werden kann. Dies ist zwar bei dem Gitter mit 6720 Gitterzellen nicht verwunderlich. Bei dem feineren Gitter mit 53760 Zellen wurde allerdings eine deutliche Beschleunigung der Konvergenz durch FAS erwartet. In den beiden

unteren Diagrammen ist zwar eine Verbesserung des Konvergenzverhaltens durch FAS erkennbar, sie fällt jedoch gering aus.

Für diese geringe Beschleunigung durch FAS kommen mehrere Gründe in Frage. Es ist möglich, daß die gröberen Gitter nicht glatt genug sind, so daß die prolongierte Grobgitterkorrektur auf dem feinen Gitter nur zu einer geringeren Verbesserung des Ergebnisses führt. Im Falle des Gitters $56 * 24 * 40$ werden nur zwei Grobgitterebenen eingesetzt, was ebenfalls die Beschleunigung der Konvergenz beeinträchtigen kann. Zudem ist es möglich, daß auf den gröberen Gittern wegen restriktionsbedingter starker Unterrelaxation der Gleichungssysteme für die Turbulenzparameter ein sehr schlechtes Konvergenzverhalten herrscht. Dies sind Gründe für eine Verschlechterung des Konvergenzverhaltens des FAS. Ein weiterer Grund dafür, daß FAS nicht die erwartete Beschleunigung bringt, ist auch gegeben, wenn bereits der Eingitteralgorithmus gute Konvergenzeigenschaften aufweist. Dann ist naturgemäß das Beschleunigungspotential durch FAS gering. Für diesen letzten Grund spricht einiges:

Das Ergebnis ist nur auf den ersten Blick enttäuschend. Die Diagramme in Bild 8.9 lassen noch eine weitere Beobachtung zu. Zum einen werden bereits mit einem Eingitterverfahren bei etwa 100000 Gitterzellen nur 90 Iterationszyklen zur Verkleinerung des Residuums auf 10^{-5} des Anfangswertes benötigt. Dies ist ein erfreulich niedriger Wert. Andererseits ist erstaunlich, daß sich trotz unterschiedlich feiner Diskretisierung selbst bei den Eingitterverfahren die Anzahl notwendiger Iterationszyklen zur Erreichung eines bestimmten Residuums nur wenig unterscheidet. Während die Diskretisierung in den vier Beispielen von 6720 bis 98304 Gitterzellen reicht, werden in allen Fällen zwischen 65 und 95 globale Iterationszyklen bis zum Residuum von 10^{-5} benötigt. Geht man davon aus, daß die Rechenzeit für eine globale Iteration etwa linear mit der Anzahl der Diskretisierungszellen wächst - Mehrgitterbeschleunigung der inneren Iteration vorausgesetzt - , dann bedeutet dies, daß bereits der Eingitteralgorithmus (der äußeren Iteration) nahezu optimales Konvergenzverhalten hat.

In Bild 8.10 wird das Konvergenzverhalten des Eingitterverfahrens für sieben sehr unterschiedliche Diskretisierungsgitter miteinander verglichen. Auch hier fallen alle Graphen sehr dicht zusammen. Das im Vergleich zu den feineren Gittern sogar schlechtere Konvergenzverhalten der gröberen Gitter liegt darin begründet, daß in einem gegebenen Berechnungsgebiet ein grobes Gitter bei den gegebenen Grenzen für den Wandabstand der wandnächsten Zellen notwendigerweise nicht sehr glatt sein kann. Dies wirkt sich ungünstig auf das Konvergenzverhalten aus. Es bleibt aber festzustellen, daß die notwendigen globalen Iterationszyklen zur Unterschreitung eines Residuums nur gering von der Anzahl der Diskretisierungszellen im Gitter abhängig sind.

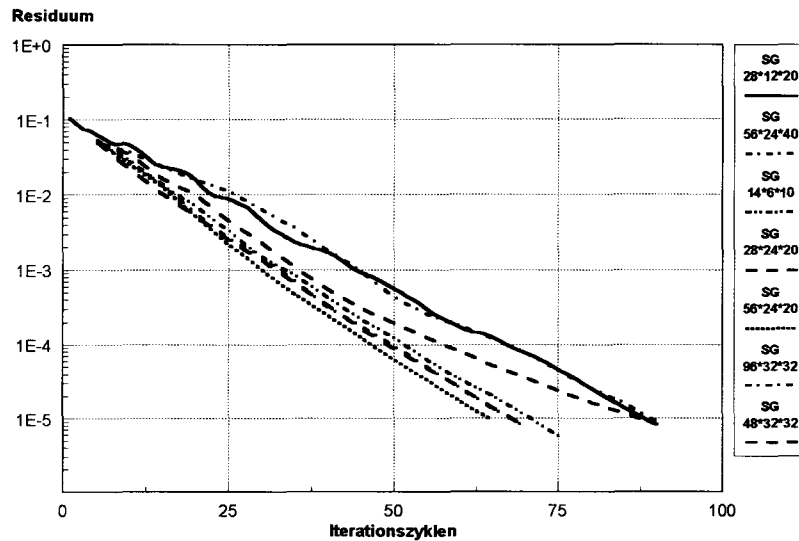


Bild 8.10: Vergleich des Konvergenzverhaltens mit verschiedenen Gittern

Wenn bereits der Eingitteralgorithmus ein nahezu optimales Konvergenzverhalten hat, dann kann dieses natürlich nicht mehr durch einen Mehrgitteralgorithmus beschleunigt werden. Die geringe Verbesserung der Konvergenz, die mit FAS bei dem Gitter $96 * 32 * 32$ erzielt worden ist, rechtfertigt den zusätzlichen Aufwand für die auf den größeren Gittern durchzuführenden Iterationszyklen nicht.

Die Begründung für das nahezu optimale Laufzeitverhalten des Eingitteralgorithmus liegt in der hohen Reynoldszahl des untersuchten Strömungsfalles im Zusammenhang mit der Methode zur Berechnung optimaler Startwerte. In dem vorliegenden Verfahren werden zunächst im gesamten Gebiet konstante, auf den Wert des Einströmrandes gesetzte Geschwindigkeiten als Startwerte angenommen. Diese Startwerte werden dann mit einer Geschwindigkeitskorrektur so verändert, daß sie den Massenerhaltungssatz (mit einem geringen Fehler) erfüllen. Die Geschwindigkeitskorrektur wird dabei in der beschriebenen Weise aus einer einmaligen Berechnung der Druckkorrektur bestimmt.

Die so bestimmten Startwerte erfüllen nicht nur den Massenerhaltungssatz, sondern in weiten Teilen des Berechnungsgebietes auch den Impulssatz. Durch geeignete Startwertvorgaben (sehr kleine Werte) sind auch die Erhaltungsgleichungen für die turbulente kinetische Energie und ihre Dissipationsrate fast überall erfüllt. Nur in unmittelbarer Wandnähe sind die genannten Gleichungen nicht erfüllt. Nicht verschwindendes Residuum ist somit lokal beschränkt und dementsprechend hochfrequent.

Dies trifft insbesondere bei Strömungen mit sehr hoher Reynoldszahl zu, bei denen die Grenzschichten dünner sind als bei laminaren Strömungen. Bei einer Vorgabe von Startwerten in der oben beschriebenen Weise ist das Residuum nur in unmittelbarer Wandnähe groß. Die Verteilung des Residuums ist um so hochfrequenter, je höher die Reynoldszahl ist. Diese hochfrequente lokal beschränkte Fehlerverteilung kann jedoch am besten auf dem feinsten Gitter mit einem iterativen Verfahren reduziert werden. Auf größeren Gittern können diese Fehler nur schlecht abgebildet und damit auch nur wenig reduziert werden.

Um diese Vermutungen zu stützen, wurden Untersuchungen gemacht, bei denen die Umströmung des Wigley-Schiffes bei sehr unterschiedlichen Reynoldszahlen berechnet wurde. Die Reynoldszahl wurde von $4.5 * 10^6$ über $4.5 * 10^5$ bis $4.5 * 10^4$ reduziert. Der letzte Fall wurde laminar gerechnet, d.h. ohne

k - ϵ -Turbulenzmodellierung. Verglichen wurde das Konvergenzverhalten mit und ohne Mehrgitterbeschleunigung.

Bild 8.11 zeigt das Ergebnis dieses Vergleiches. Wie in den Diagrammen zuvor wurde hier das Residuum der Impulsgleichung für die Längskomponente der Geschwindigkeit über den globalen Iterationszyklen aufgetragen. Die Berechnung wurde mit dem Diskretisierungsgitter $48 * 32 * 32$, d.h. 49152 Zellen, durchgeführt.

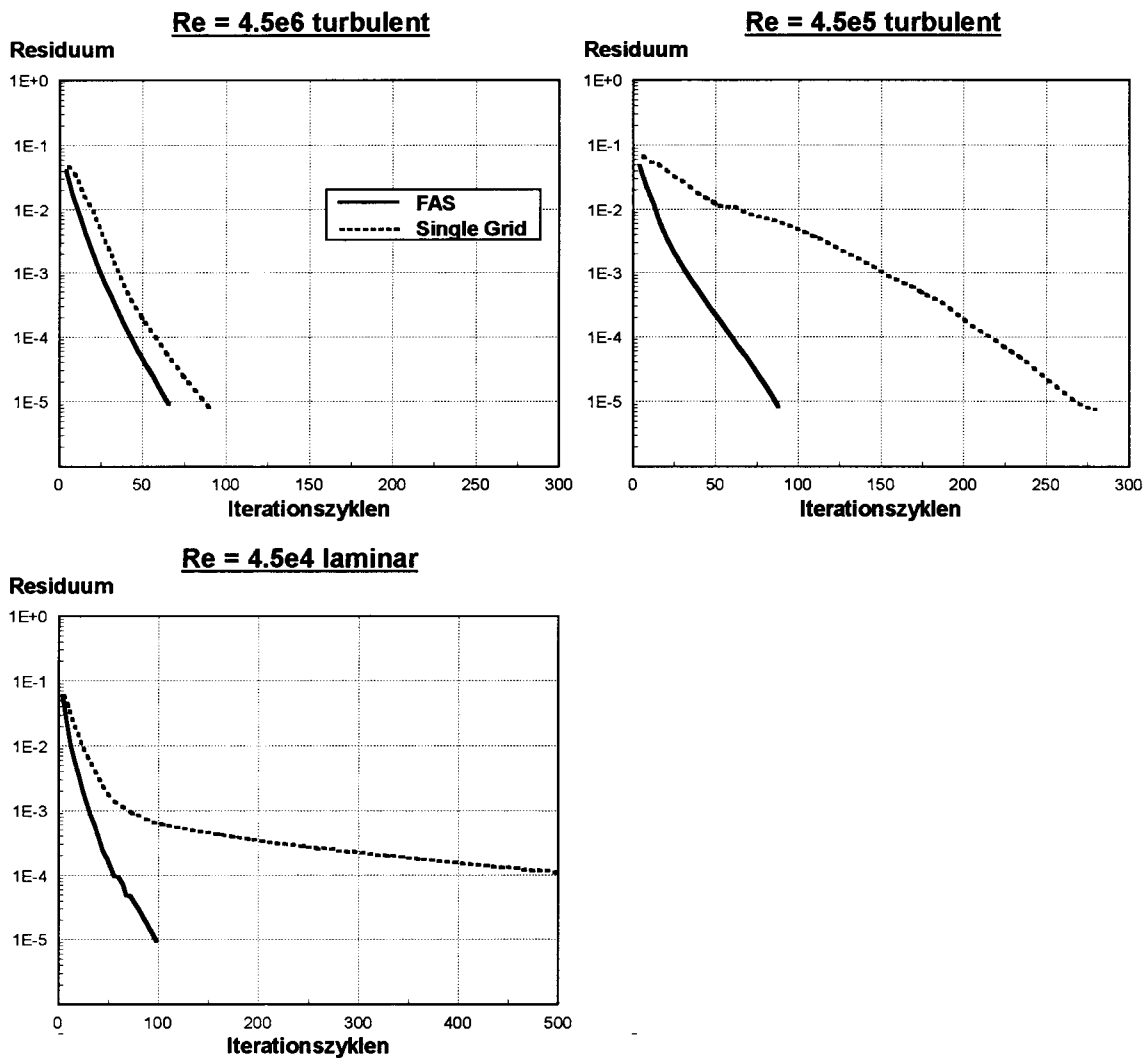


Bild 8.11: Vergleich Eingitter- und Mehrgittermethode, Variation der Reynoldszahl

Die Diagramme zeigen deutlich den Zusammenhang zwischen Mehrgitterbeschleunigung und Reynoldszahl. Grundsätzlich nehmen mit fallender Reynoldszahl die für ein bestimmtes Residuum notwendigen Iterationszyklen zu, und zwar sowohl für die Eingitter- als auch für die Mehrgittermethode. Mit der Zunahme der notwendigen Iterationszyklen steigt aber auch die mit dem Mehrgitteralgorithmus erzielbare Beschleunigung. Während bei einer Reynoldszahl von $4.5 * 10^6$ nur eine minimale Beschleunigung mit dem FAS erzielt werden konnte, so beträgt die Beschleunigung der Konvergenz bei $Re = 4.5 * 10^5$ bereits etwa Faktor 5. Im Falle der laminaren Strömung (ohne k - ϵ - Turbulenzmodellierung) ist die Beschleunigung zunächst gering. Die Konvergenz des Eingitteralgorithmus verlangsamt sich aber mit

zunehmenden Iterationszyklen, so daß mit einem Mehrgitterverfahren bei einem Residuum von 10^{-4} bereits eine Beschleunigung um den Faktor 10 erreicht wird.

Das Ergebnis der Reynoldszahl-Variation ist also, daß mit zunehmender Reynoldszahl die Beschleunigung durch Mehrgittermethoden immer geringer wird. Dies heißt jedoch nicht, daß der Mehrgitteralgorithmus mit steigender Reynoldszahl grundsätzlich schlechter arbeitet. Vielmehr ist bei hohen Reynoldszahlen bereits der Eingitteralgorithmus sehr effektiv und zeigt nahezu optimales Konvergenzverhalten. Dementsprechend reduzieren sich damit die Möglichkeit zur Beschleunigung der Konvergenz mit Mehrgittermethoden.

Zusammenfassung Mehrgitterbeschleunigung:

Bei der Berechnung der Umströmung des Wigley-Schiffes mit dem geschachtelten Mehrgitterverfahren wurde eine sehr viel geringere Beschleunigung der Konvergenz als im Falle der ebenen Bargeumströmung festgestellt. Es zeigte sich dabei, daß die Beschleunigung durch Mehrgitterverfahren sehr stark von der Reynoldszahl abhängig ist. Beim Wigley-Schiff mit einer Reynoldszahl von $4.5 \cdot 10^6$ ist eine Konvergenzverbesserung der globalen SIMPLE-Iteration durch Mehrgitterverfahren praktisch nicht gegeben. Die innere Iteration zur Lösung der linearisierten Druckkorrekturgleichung konnte immerhin noch um den Faktor 5 beschleunigt werden.

Die geringe Beschleunigung der Konvergenz lag allerdings nicht an einem Versagen des Mehrgitterverfahrens. Vielmehr zeigte sich, daß bei höheren Reynoldszahlen bereits ein Eingitteralgorithmus für die globale Iteration (in Kombination mit einem Mehrgitter-Korrekturschema für die innere Iteration) ein effektives Lösungsverfahren mit einem nahezu optimalen Laufzeitverhalten hat. Das Potential für Konvergenzverbesserungen durch ein FAS ist dann naturgemäß gering.

Dieses gute Konvergenzverhalten des Eingitterverfahrens ist jedoch eng an die Vorgabe von Startwerten gekoppelt, die die Erhaltungsgleichungen in weiten Teilen des Berechnungsgebietes erfüllen und nur in unmittelbarer Wandnähe einen Fehler mit hochfrequenter Verteilung haben. In allen anderen Fällen, bei denen solche Startwerte à priori nicht definiert werden können - das sind Strömungen mit niedrigerer Reynoldszahl, aber auch Strömungen mit Ablösungen und Rezirkulationen oder Strömungen in komplexen Geometrien - hat die Eingittermethode kein optimales Konvergenzverhalten. In diesen Fällen bleibt die Mehrgittermethode ein effektives Verfahren zur Beschleunigung der Konvergenz, mit der ein nahezu optimales Konvergenzverhalten, d.h. ein annähernd lineares Ansteigen der Rechenzeit mit der Anzahl Unbekannter, erreicht werden kann.

9 Schlußbemerkungen

Im vorliegenden Aufsatz wurde ein numerisches Verfahren zur Berechnung der Umströmung von Schiffen und kleineren Booten vorgestellt. Es beschränkt sich auf die Erfassung viskoser turbulenter Phänomene unter Vernachlässigung der Schiffsbewegungen und der freien Wasseroberfläche.

Das Verfahren basiert auf der numerischen Lösung der diskreten zeitgemittelten Navier Stokes Gleichung. Turbulente Effekte wurden mit der Wirbelviskositätshypothese berücksichtigt, wobei zur Berechnung der turbulenten Viskosität das $k-\epsilon$ - Turbulenzmodell zur Anwendung kam. Das Verfahren arbeitet mit einer zellenzentrierten Diskretisierung der Geschwindigkeitskomponenten, des Druckes und der Turbulenzparameter in einem dreidimensionalen, krummlinigen, nichtorthogonalen Gitter. Partielle Ableitungen in den beherrschenden Gleichungen werden mit finiten Differenzen erster bis zweiter Ordnung diskretisiert. Das numerische Lösungsverfahren ist an das bekannte SIMPLE-Schema angelehnt. Dabei werden zunächst die Erhaltungsgleichungen des Impulses auf Basis eines geschätzten Druckes näherungsweise berechnet. Daran schließt sich eine Korrektur des Druckes und der Geschwindigkeiten an, durch die der Masseerhaltungssatz befriedigt wird. Anschließend werden die Transportgleichungen der Turbulenzparameter näherungsweise erfüllt. Der Berechnungsablauf wird zyklisch wiederholt, bis sich ein konvergierter Zustand eingestellt hat.

Bei derartigen Verfahren ist der Rechenaufwand zur numerischen Lösung der algebraischen Gleichungssysteme sehr hoch. Ein Schwerpunkt der Entwicklung war daher von Beginn an die Implementation eines leistungsfähigen Mehrgitter-basierten Lösungsverfahrens. Das hier verwendete Mehrgitter-Schema beschleunigt sowohl die innere Iteration mit Hilfe eines linearen Korrektur-Schemas als auch die äußere Iteration mit einem "Full Approximation Scheme". Als Glätter wurde in der inneren Iteration ein unvollständiges LU-Zerlegungsverfahren und in der globalen Iteration der SIMPLE-Algorithmus benutzt. Eine Schlüsselrolle nimmt dabei die Bestimmung optimaler Startwerte der iterativen Berechnung ein.

Das Lösungsverfahren zeigte bei den hier durchgeführten Testrechnungen nahezu optimales Verhalten, d.h. ein annähernd lineares Ansteigen der Rechenzeit mit zunehmender Anzahl von Diskretisierungszellen. Das Laufzeitverhalten verbesserte sich mit steigender Reynoldszahl. Bei einer Reynoldszahl von $Re=4.5 \cdot 10^6$ war für ein optimales Laufzeitverhalten keine Mehrgitterbeschleunigung der äußeren Iteration erforderlich. Für die Berechnung der Umströmung des Wigley-Schiffes bei dieser Reynoldszahl wurde mit einem Diskretisierungsgitter von etwa 100000 Gitterzellen eine Rechenzeit von unter $1\frac{1}{2}$ Stunden auf einer HP 730 benötigt.

Die Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse mit Messungen ist noch nicht in jeder Beziehung zufriedenstellend. Während berechnete Geschwindigkeitsprofile auch im wandunmittelbaren Bereich relativ gut mit Messungen übereinstimmen, werden die Schubspannungen im Bereich dünner Grenzschichten nur unbefriedigend genau berechnet. Druckbeiwerte werden mit einer für Variantenuntersuchungen hinreichenden Genauigkeit berechnet, während der Vergleich berechneter und gemessener Werte der turbulenten kinetischen Energie Abweichungen bis nahezu 100 % zeigt.

Schubspannungen an festen Wänden werden mit der wandnächsten diskreten Geschwindigkeit berechnet. Da letztere bei weitem nicht die Ungenauigkeiten der Schubspannungen aufweisen, sind hier die logarithmischen Wandfunktionen in der verwendeten Form offenbar unzureichend. Verschiedene Entwickler schlagen Modifikationen der logarithmischen Wandfunktionen vor, die die Wandschubspannungen vor allem bei Vorhandensein eines Druckgradienten oder einer Krümmung der Wand besser modellieren. Da auch die turbulente kinetische Energie im Wandbereich sehr ungenau ist und diese wiederum direkt aus der Wandspannung hervorgeht, kann auch hier mit einer besseren Übereinstimmung mit Meßwerten gerechnet werden, wenn es gelingt, die Genauigkeit der Berechnung der Wandspannungen zu erhöhen. In der vorliegenden Studie wurde eine Untersuchung in diesem Sinne aber aus Zeitgründen nicht durchgeführt.

Wird mit einem fehlerhaften Reibungsbeiwert der Reibungswiderstand eines Schiffes berechnet, so wird der relative Fehler des integralen Wertes die gleiche Größenordnung haben wie der Fehler des Reibungsbeiwertes. Dies trifft jedoch für den Druckwiderstand eines Schiffes nicht zu. Hier wird in der Regel der Fehler des integrierten Druckfeldes bedeutend größer sein als der mittlere Fehler des Druckbeiwertes. Berechnet man das Druckintegral über das Vor- und Achterschiff getrennt, so erhält man zwei vom Betrag etwa gleich große Zahlen, die fehlerbehaftet und von verschiedenem Vorzeichen sind. Der Druckwiderstand ist dann die Summe dieser beiden Zahlen, deren Fehler in der Regel viel größer ist als der Fehler des Vor- oder Achterschiffsintegrales. In diesem Sinne sind an die Genauigkeit der Berechnung des Druckes viel höhere Anforderungen zu stellen als an die Scherspannung. Die in den beiden Beispielen gezeigte Übereinstimmung zwischen Berechnung und Messung ist daher für eine integrale Betrachtung der Ergebnisse noch viel zu ungenau.

Für Variantenuntersuchungen hingegen dürfte die Genauigkeit ausreichend sein und eine systematische Untersuchung - etwa zu Formoptimierungen - zulassen. Bei Variantenuntersuchungen, bei denen eine Reihe von Berechnungen mit variiertem Formgebung durchgeführt werden, ist das günstige Laufzeitverhalten des Programmes vorteilhaft. Da eine gitterinvariante Lösung der Umströmung des Wigley-Schiffes auf einem Arbeitsplatzrechner in deutlich unter 2 Stunden bestimmt werden kann, ist es im Rahmen einer Formoptimierung unproblematisch, fünf bis zehn und mehr verschiedene Varianten zu berechnen. Die Zeit und die Kosten hierfür sind fast verschwindend im Vergleich zum Aufwand für die Netzgenerierung und die Auswertung einer solchen Untersuchung.

Zahlreiche Aspekte der numerischen Berechnung von Schiffsumströmungen mit einem Navier-Stokes-Solver konnten aus Zeitmangel in der vorliegenden Entwicklung nicht berücksichtigt werden. Wünschenswerte Erweiterungen verbessern sowohl die physikalische Modellierung als auch die numerischen Eigenschaften und die Laufzeiteigenschaften des Programmes. Auch das Spektrum der untersuchten Strömungsbeispiele ist nicht umfassend genug für eine allgemeine Aussage.

Für die Berechnung von Schiffsumströmung wäre eine Berücksichtigung der freien Oberfläche besonders wünschenswert. Dabei ist entscheidend, ob das stationäre Wellenbild einer Schiffsumströmung mit begrenztem Aufwand ermittelt werden kann. Die im Vorwege dieser Studie untersuchten Methoden ermittelten eine stationäre freie Oberfläche mittels einer instationären abklingenden Störung derselben, wobei in dem entsprechenden Zeitschrittverfahren so kleine Zeitschritte gewählt werden mußten, daß die Änderung der freien Oberfläche die Courant-Bedingung erfüllte. Dies führt zu sehr hohen Rechenzeiten. Neuere Verfahren vermeiden diesen Nachteil. Bei ihnen wird die freie Oberfläche mittels bewegter Gitter berechnet, wobei sich die Verschiebung der Gitterknoten jedoch nicht unmittelbar aus der Geschwindigkeit ergibt - dies würde wiederum ein Zeitschrittverfahren mit sehr kleinen Zeitschritten verlangen - sondern aus dem in den Diskretisierungszellen festgestellten Massendefekt nach Berechnung der Impulsgleichungen. Aus Zeitgründen konnten im Rahmen der vorliegenden Studie jedoch keine Versuche mit diesem interessanten Verfahren durchgeführt werden.

Als weitere Verbesserung der physikalischen Modellierung wäre eine genauere Berechnung der turbulenten kinetischen Energie in Wandnähe erforderlich. Ein vielverwendeter möglicher Ansatz hierfür ist das sogenannte Low-Reynoldszahl- $k-\epsilon$ -Turbulenzmodell, bei dem auf Wandfunktionen verzichtet und die unmittelbare Wandregion höher aufgelöst wird. Problematisch für praktische Schiffsumströmungen ist hierbei die Berücksichtigung von Wandrauhigkeiten, da das Low-Reynoldszahl- $k-\epsilon$ -Turbulenzmodell von hydraulisch glatten Wänden ausgeht. Während dies für die Berechnung von Umströmungen von Modellen in der Regel kein Problem darstellt, ist die Annahme einer hydraulisch glatten Außenhaut bei wirklichen Schiffen nicht gegeben. Auch diese Problematik bleibt im vorliegenden Verfahren aus Zeitgründen unbehandelt.

Bei der Implementation des numerischen Verfahrens sind ebenfalls einige Verbesserungen möglich. So ist die Methode, mit der während der Iteration negative Werte der turbulenten kinetischen Energie und ihrer Dissipationsrate vermieden werden, unbefriedigend, da sie wie beschrieben zu einer erheblichen Unterrelaxation führt, die das Konvergenzverhalten sehr negativ beeinflusst. Grundsätzlich ist es

wünschenswert, die Robustheit des iterativen Verfahrens zu verbessern, die sehr stark von optimalen Unterrelaxationsparametern abhängt. Ein möglicher Ansatzpunkt hierfür ist eine Verbesserung der diskreten Druckkorrekturgleichung. In ihrer jetzigen Form verlangt sie eine starke Unterrelaxation der Druckkorrektur. Der SIMPLEC-Algorithmus bietet hier nur teilweise Abhilfe, da er zwar die Unterrelaxation des Druckes vermeidet, aber einen kleineren Unterrelaxationsfaktor für die Geschwindigkeitskomponenten verlangt. Verbessert werden sollte hier die Näherung der Inversen der Koeffizientenmatrix der linearisierten Impulsgleichungen ($(L^k)^{-1}$ in Gleichung (4.2)). Im SIMPLE-Algorithmus werden lediglich die Hauptdiagonalelemente invertiert. Auch die Linearisierung der rechten Seite der Transportgleichungen für die Turbulenzparameter verlangt starke Unterrelaxation. Bei der Wahl geeigneter Unterrelaxationsfaktoren steht man daher immer vor dem Problem, daß kleine Unterrelaxationsfaktoren die Robustheit des Verfahrens verbessern, die Rechenlaufzeit aber ungünstig beeinflussen. Um Rechnerressourcen optimal zu nutzen, werden immer größtmögliche Unterrelaxationsfaktoren gewählt, wobei das Risiko einer divergierenden Berechnung gegeben ist. Die Robustheit des Verfahrens bleibt daher noch für einige Zeit ein Fokus zukünftiger Entwicklungsaktivitäten.

Hinsichtlich der Beurteilung der Berechnungszeiten und der Übereinstimmung mit Meßergebnissen reichen die beiden untersuchten Strömungsbeispiele sicherlich nicht für eine allgemeine Aussage aus. Insbesondere treten in beiden Beispielen keine Strömungsablösungen auf. Testrechnungen mit einem getauchten Spiegelheck eines Motorbootes zeigen, daß hier von längeren Rechenlaufzeiten auszugehen ist. Dabei erleichtert die gegebene Position des Strömungsabrisses den Einsatz von Mehrgittermethoden. Bei abgelösten Strömungen mit einem a priori nicht bekannten Ablösepunkt haben Testrechnungen gezeigt, daß eine Mehrgitterbeschleunigung der globalen Iteration problematisch ist, da die Lage des Ablösepunktes besonders empfindlich auf die Diskretisierung reagiert und auf einem groben Gitter, wenn überhaupt, dann nur mit geringer Genauigkeit berechnet werden kann.

Unüberprüft ist auch, ob eine weitere Steigerung der Zellenzahl eine Verbesserung der Übereinstimmung mit Meßwerten ergibt. Zwar werden für den Druck und für die Geschwindigkeitsprofile annähernd gitterinvariante Lösungen gefunden. Dies trifft aber für die Schubspannungen und die turbulente kinetische Energie nur bedingt zu. Gegen eine weitere Steigerung der Diskretisierung spricht weniger der dafür notwendige Rechenaufwand als vielmehr der begrenzte Arbeitsspeicher des benutzten Rechners. Der Speicherbedarf für das Berechnungsbeispiel der turbulenten Wigleyschiffs-Umströmung mit Mehrgitterlöser beanspruchte bei 100000 Diskretisierungszellen 40 MB Kernspeicher. Eine Reduzierung dieses Speicherbedarfes kostet Rechenzeit, da dann einige geometrische Variablen nicht einmalig zu Beginn, sondern in jedem Iterationszyklus neu berechnet werden müssen. Für Berechnungen mit wesentlich mehr Zellen wäre es daher wünschenswert, auf einen Arbeitsspeicher von mehreren hundert Megabyte zurückgreifen zu können. Dies ist auch für Arbeitsplatzrechner keineswegs unrealistisch und hinsichtlich der Kosten überschaubar.

Überprüft wurde außerdem nicht, ob die den Berechnungsbeispielen - insbesondere der Wigleyschiffs-Umströmung - zugrundegelegte Größe des Berechnungsgebietes richtig gewählt war. Hier wurden Erfahrungswerte anderer Entwickler genommen. Wenn das Berechnungsgebiet verkleinert werden kann, ist es unter Umständen möglich, die Diskretisierung im wandnahen Bereich zu vergrößern und damit die Genauigkeit zu steigern, ohne daß die Gesamtzahl der Diskretisierungszellen erhöht werden muß.

Die Aufzählung dieser Punkte zeigt den noch immer recht hohen Entwicklungs- und Untersuchungsbedarf, bis Navier-Stokes-Löser zur Berechnung von Schiffsumströmungen hinsichtlich ihrer Genauigkeit wie auch hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit mit Modellversuchen konkurrieren oder diese partiell substituieren können. Bei allen Studien und Entwicklungen zu diesem Thema ist es erforderlich, Schwerpunkte zu setzen. In der vorliegenden Arbeit ist dieser Schwerpunkt die Beschleunigung der iterativen Lösung mit einem effektiven Mehrgitterverfahren. Wenn auch die Beschleunigung des Lösungsvorganges mittels Mehrgittermethoden hinter den Erwartungen zurückbleibt, ist dennoch ein Lösungsverfahren mit gutem Laufzeitverhalten entstanden, das auf kleinen Rechenmaschinen eingesetzt werden kann.

10 Literaturverzeichnis

- Baldwin, B.S. and Lomax, H. (1978): Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*
16th AIAA Aerospace Science Meeting
- Barcus, M., Peric, M. and Scheuerer, G. (1988): A Control Volume Based Full Multigrid Procedure for the Prediction of Two-Dimensional, Laminar, Incompressible Flows*
Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 20
Verlag Vieweg
- Brand, A. (1984): Multigrid Techniques: 1984 Guide with Applications to Fluid Mechanics*
GMD Studie Nr. 85, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung
St. Augustin
- Bechteler, P., Nujic, H., Sattel, K., Schätz, K.H. und Tasdemir, A.(1991): Validierungsberechnungen an Pontonfähren*
Tagungsband 7. Arbeitstreffen BMVg Rü T III 1
Universität der Bundeswehr München
- Cebeci, T. and Smith, A.M.O. (1970): A Finite Difference Method for Calculating Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers*
J. Basic Engineering, Trans. ASME
- Cebeci, T., Chang, K.C. and Kaups, K. (1989): A General Method for Calculating Three Dimensional Laminar and Turbulent Boundary Layers on Ship Hulls*
Proc. 12. Symposium Naval Hydrodynamics
- Chen, H.C., Patel, V.C. and Ju, S. (1989): Solutions of Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations for Three Dimensional Incompressible Flows*
Proc. 5. Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics
Hiroshima
- Demirdzic, I. (1982): A Finite Volume Method for Computation of Flow in Complex Geometries*
PhD. Thesis, Imperial College of Science and Technology
Univ. London
- Demirdzic, I., Gosman, A.D., Issa, R.I. and Peric, M.(1986): A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries*
Computers and Fluids
Vol. 12, No. 3
- Fletcher, C.A.J. (1991): Computational Techniques for Fluid Flow, Vol. I und Vol. II*
Springer Verlag, Berlin
- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. (1982): High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*
Journal of Computational Physics
No. 48

- Graf, K. (1992): Calculation of Viscous Flow Around Barge-Like Ship Hulls*
 Ship Technology Research
 Vol. 39, No. 3
- Hackbusch, W. (1985): Multigrid Methods and Applications*
 Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
- Hirsch, C. (1988): Numerical Computation of Internal & External Flows*
 Vol. 1: Fundamentals of Numerical Discretisation
 Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows
 J. Wiley & Sons
 Chichester, UK
- Hirt, C.W. and Nichols, B.D. (1981): Volume of Fluid Method for the Dynamics of Free Boundaries*
 J. Computational Physics
 Vol. 39
- Hino (1989): Computation of a Free Surface around an Advancing Ship by the Navier Stokes Equations*
 Proc. 5. Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics
 Hiroshima
- Hoekstra, M. and Raven, H.C. (1985): Ship Boundary Layer and Wake Calculation with a parabolised Navier Stokes Solution System*
 4. Int. Conf. Num. Ship Hydrodynamics
 Washington D.C.
- Issa, R.I. (1986): Solution of the Implicit Discretised Fluid Flow Equations by Operator Splitting*
 J. Comp. Physics
 Vol. 62
- Klingbeil, E. (1989): Tensorrechnung für Ingenieure*
 BI-Hochschultaschenbücher; Bd. 197
 Mannheim, Wien
- Lauder, B.E. and Spalding, D.B. (1974): The Numerical Calculation of Turbulent Flows*
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
 Vol. 3
- Lauder, B.E. and Leschziner, M.A. (Herausgeber)(1992): Proceedings of the 5th UMIST CFD Colloquium*
 University Manchester
 UK
- Leonard, B.P. (1977): A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation*
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
 Vol. 19
- Lichnerowitz, A. (1966): Einführung in die Tensoranalysis*
 BI - Hochschultaschenbücher
 Mannheim

- Lien, F.S. and Leschziner, M.A. (1992): A General Non-Orthogonal Collocated FV Algorithm for Turbulent Flow at all Speeds incorporating Second Moment Closure*
UMIST University of Manchester
Report TFD/92/4
- Majumdar, S. (1988): Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow With Non-Staggered Grids*
Numerical Heat Transfer
Vol. 13
- Marsal, D. (1989): Finite Differenzen und Elemente*
Springer-Verlag
Berlin, Heidelberg
- Masuko, A. and Ogiwara, S. (1989): Numerical Simulation of Viscous Flow around Practical Ship Hulls*
Proc. 5. Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics
Hiroshima
- Miyata, H., Sato, T. and Baba, N. (1987): Difference Solution of a Viscous Flow with Free-Surface Wave about an Advancing Ship*
J. Computational Physics
Vol. 72
- Newman, J.N. (1977): Marine Hydrodynamics*
MIT Press,
Cambridge, London
- Oh, K. J., Kang, S.H. and Kobayashi, T. (1989), Numerical Calculation of the Viscous Flow over a Ship Stern by Fully Elliptic and Partially Parabolic Navier Stokes Equations*
Proc. 5. Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics
Hiroshima
- Patankar, S. V. (1980): Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*
Hemisphere Publishing Corporation
New York, London
- Patankar, S.V. and Spalding, D.B. (1972): A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flow*
Int. J. Heat Mass Transfer
Vol. 15
- Peyret, R. and Taylor, T.D. (1983): Computational Methods for Fluid Flow*
Springer-Verlag, New York
- Peric, M. (1985): A Finite Volume Method for the Prediction of Three Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts*
PhD. Thesis, Imperial College of Science and Technology
Univ. London

- Peric, M., Rüger, M. und Scheuerer, G. (1989): A Finite Volume Multigrid Method for Calculating Turbulent Flows*
Proc. 7. Symposium on Turbulent Shear Flows
Stanford University
- Piquet, J. and Visonneau, M. (1989): Computation of Flow Past Shiplike Hulls*
Proc. 5. Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics
Hiroshima
- Rieh, C.M. and Chow, W.L. (1983): Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation*
AIAA Journal, No. 11, Vol 21
- Sarda, O.P. (1986): Turbulent flow past ship hulls - An experimental and computational study*
Ph.D. thesis
University of Iowa
- Schönung, B.E. (1990): Numerische Strömungsmechanik*
Springer-Verlag
Berlin, Heidelberg
- Stüben, K. and Trottenberg, U. (1981): Multigrid Methods: Fundamental Algorithms, Model Problem Analysis and Applications*
in: Lecture Notes in Mathematics 960
Springer Verlag, Heidelberg
- Stock, H.W. and Haase, W. (1989): Determination of Length Scale in Algebraic Turbulence Models*
AIAA Journal
Vol. 27
- Stone, H. (1968): Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations*
SIAM J. of Numerical Analysis
Vol. 5, No 3
- Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W. (1985): Numerical Grid Generation*
Elsevier Science Publisher B.V.
Amsterdam
- Tsabiras, G.D. and Loukakis, T.A. (1989): On the Numerical Solution of the Turbulent Flow-Field Past Double Ship Hulls at Low and High Reynold Numbers*
Numerical Ship Hydrodynamics
- Wesseling, P. (1991): An Introduction to Multigrid Methods*
John Wiley & Sons Ltd.
Chichester, Great Britain
- White, F.M. (1974): Viscous Fluid Flow*
Mc Graw Hill
New York

Van Doormal, J.P. and Raithby, G.D. (1984): Enhancements of the SIMPLE Method for predicting Incompressible Fluid Flow
Numerical Heat Transfer, Vol. 7

Yang, H.Q., Yang, K.T. and Lloyd, J.R. (1990): A Control Volume Finite Difference Method for Buoyant Flow in Three-Dimensional Curvilinear Non-Orthogonal Coordinates
Int. J. Numerical Methods in Fluids
Vol. 10

Zhu, M., Miyata, H. and Kajitani, H. (1989): Finite Difference Simulations of a Viscous Flow about a Ship of Arbitrary Configuration
Proc. 5. Int. Conf. Ship Hydrodynamics
Hiroshima

Anhang

A: Tensoralgebra und Tensoranalysis

Bei der Formulierung von partiellen Differentialgleichungen in einem krummlinigen Koordinatensystem ist die Tensorrechnung sehr hilfreich. Die hier verwendeten Sätze der Tensorrechnung wurden aus *Lichnerowitz (1955)*, *Klingbeil (1989)* und *Thompson (1985)* zusammengetragen, einheitlich formuliert und so umgeformt, daß sie für die gewünschten Herleitungen in geeigneter Form vorliegen.

In der Tensorrechnung wird häufig die Einstein-Summenkonvention benutzt, d.h. über gleich bezeichnete obere und untere Indizes wird summiert:

$$a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 \quad (A.1)$$

im dreidimensionalen Raum. Dies gilt ebenfalls für Ableitungen, d.h.:

$$\mathbf{g}^i \phi_{,i} = \mathbf{g}^1 \phi_{,1} + \mathbf{g}^2 \phi_{,2} + \mathbf{g}^3 \phi_{,3}$$

wobei der Ausdruck:

$$\phi_{,i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \phi$$

eine partielle Ableitung nach der kontravarianten Ortskoordinate ξ^i bezeichnet.

Im folgenden werden Tensoren mit fettgedruckten Variablen, z. B. \mathbf{u} und \mathbf{v} , sowie ihre Komponenten mit indizierten kursiven Variablen, z.B. u^k und v^i beschrieben. Ein Tensor wird mit Hilfe seiner Komponenten und der dazugehörigen Basisvektoren beschrieben. Ein Tensor erster Stufe lautet beispielsweise:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i \quad (A.2)$$

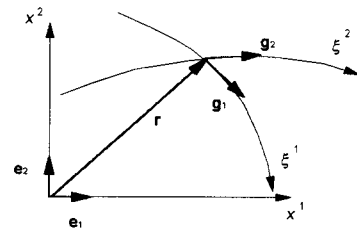
Ein Tensor zweiter Stufe ist z. B.:

$$\mathbf{w} = w^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (A.3)$$

u^i ist eine einfach kontravariante Tensorkomponente, w^{ij} eine zweifach kontravariante Tensorkomponente und \mathbf{g}_i ($i=1,2,3$) sind die kovarianten Basisvektoren eines beliebigen krummlinigen Koordinatensystemes.

Krummliniges Koordinatensystem:

Das kartesische Koordinatensystem wird mit den drei Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 (oder \mathbf{e}^1 , \mathbf{e}^2 und \mathbf{e}^3) beschrieben. Die kartesischen Ortskoordinaten in diesem Koordinatensystem lauten x^1 , x^2 und x^3 (bzw. x_1 , x_2 und x_3).



Ein krummliniges Koordinatensystem wird im dreidimensionalen Raum durch drei Basisvektoren \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 und \mathbf{g}_3 beschrieben, die in Betrag und Richtung ortsabhängig sind. Die Basisvektoren werden in einem Raumpunkt durch die partielle Ableitung eines Vektors \mathbf{r} zu diesem Raumpunkt nach den kontravarianten Komponenten ξ^i gebildet:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_{,i} \quad (A.4)$$

Mit Hilfe der kovarianten Basisvektoren definiert man im dreidimensionalen Raum die Jakobische J :

$$J = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = \mathbf{g}_2 \cdot (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1) = \mathbf{g}_3 \cdot (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \quad (A.5)$$

wobei eckige Klammern das Spatprodukt der drei Vektoren, \cdot das Skalarprodukt und \times das Kreuzprodukt zweier Vektoren bezeichnen.

Aus den kovarianten Basisvektoren werden die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^j gebildet mit

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (A.6)$$

wobei δ_i^j das Kroneckersymbol bezeichnet. Mit $\partial \mathbf{r} = \partial x^j \mathbf{e}_j$ und dem Nabla-Operator $\nabla = \mathbf{e}^k \partial / \partial x^k$ folgt aus (A.4) und (A.6):

$$\mathbf{g}^i = \nabla \xi^i \quad (A.7)$$

Mit (A.5) und (A.6) kann man zeigen, daß im dreidimensionalen Raum gilt:

$$\mathbf{g}^1 = \frac{1}{J} \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \quad (A.8)$$

und entsprechende Ausdrücke für \mathbf{g}^2 und \mathbf{g}^3 .

Man bildet ferner die kovarianten metrischen Tensoren $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ und die kontravarianten metrischen Tensoren $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$.

Partielle Ableitungen der Basisvektoren und der Jakobischen:

Mit $\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_{,i}$ sowie $\mathbf{r}_{,ij} = \mathbf{r}_{,ji}$ und $a \times b = -b \times a$ kann nachgewiesen werden, daß:

$$(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)_{,1} + (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1)_{,2} + (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)_{,3} = 0 \quad (A.9)$$

Mit (A.8) ergibt sich dann:

$$(J \mathbf{g}^i)_{,i} = 0 \quad (A.10)$$

Dieser Ausdruck ist oft hilfreich für die Vereinfachung partieller Ableitungen, denn für die allgemeine Variable ϕ (Skalar oder Tensor) gilt:

$$(J \mathbf{g}^i \phi)_{,i} = J \mathbf{g}^i \phi_{,i} + \underbrace{(J \mathbf{g}^i)_{,i}}_0 \phi$$

Tensorprodukte:

Mit \mathbf{uv} wird das tensorielle Produkt der beiden Tensoren \mathbf{u} und \mathbf{v} bezeichnet. Das tensorielle Produkt zweier Tensoren erster Stufe:

$$\mathbf{uv} = u^i v^j \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (A.11)$$

ist somit ein Tensor zweiter Stufe. Das verjüngende Produkt zweier Tensoren $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ entsteht durch skalare Multiplikationen der zugehörigen Basisvektoren. Für einstufige Tensoren (Vektoren) ist es mit dem Skalarprodukt identisch, d.h. das verjüngende Produkt zweier einstufiger Tensoren \mathbf{u} und \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i v^j \mathbf{g}_{ij} \quad (A.12)$$

ist ein Tensor nullter Stufe, ein Skalar. Bei der Multiplikation von Tensoren und bei der Kombination von tensorieller und verjüngender Multiplikation muß man beachten, daß die beiden Produkte in Vektorschreibweise - also inklusive ihrer Basisvektoren - in der Regel nicht kommutativ sind. Betrachtet man einen zweistufigen Tensor $\mathbf{w} = w^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j$ und einen einstufigen Tensor $\mathbf{u} = u_k \mathbf{g}^k$, dann ergeben die Produkte

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = u_k w^{ij} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = u_i w^{ij} \mathbf{g}_j \quad (A.13)$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = w^{ij} u_k \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^k = u_j w^{ij} \mathbf{g}_i \quad (A.14)$$

die nur gleich sind, wenn w^{ij} symmetrisch ist.

Nabla-Operator

Der Nabla-Operator $\nabla = \mathbf{e}^k \partial / \partial x^k$ wird so umformuliert, daß er mit partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten ξ^i des krummlinigen Koordinatensystems gebildet werden kann. Mit (A.7) folgt:

$$\nabla = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (A.15)$$

Der Gradient eines Skalars p berechnet sich damit wie folgt:

$$\nabla p = \mathbf{g}^i p_{,i} \quad (A.16)$$

oder mit dem Hilfssatz (A.10):

$$\nabla p = \frac{1}{j} (J \mathbf{g}^i p)_{,i}$$

In der Tensoranalysis ist es sinnvoll, den Nabla-Operator zusammen mit der tensoriellen oder der verjüngenden Multiplikation zu benutzen. Der Nabla-Operator wird dabei wie ein Tensor erster Stufe behandelt. Das mit dem Tensor erster Stufe \mathbf{u} gebildete Tensorprodukt:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{g}^i \mathbf{u}_{,i} \quad (A.17)$$

ist also ein Tensor zweiter Stufe und entspricht Grad \mathbf{u} . Auch hier ist zu beachten, daß das Tensorprodukt nicht kommutativ ist.

Will man Komponenten und Basisvektoren trennen, sich aber hinsichtlich \mathbf{u} noch nicht für einen Basisvektor entscheiden, kann man auch schreiben:

$$\nabla \mathbf{u} = \underbrace{ij \mathbf{g}_i (\mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^k)}_{\mathbf{g}^i} \mathbf{g}_k$$

bzw.
$$\nabla \mathbf{u} = ij (\mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^k) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_k \quad (A.18)$$

Daraus folgt dann unmittelbar:

$$(\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{g}^{kj} (\mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}^i) \mathbf{g}_i \mathbf{g}_k = \mathbf{u}_{,i} \mathbf{g}^i \quad (A.19)$$

Das verjüngende Produkt:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}_{,i} \quad (A.20)$$

ist ein Skalar und entspricht $\text{div } \mathbf{u}$. Einige zusätzliche Manipulationen erlauben eine konservative Schreibweise der Gleichungen. Mit Hilfe von (A.10) wird:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{J} (J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u})_{,i} \quad (A.21)$$

und:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \frac{1}{J} (J \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}\mathbf{u})_{,i} \quad (A.22)$$

Mit $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij}$ kann man ferner herleiten:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{g}^j \cdot (\mathbf{g}^i \mathbf{u}_{,i})_{,j} = \frac{1}{J} (J g^{ij} \mathbf{u}_{,i})_{,j} \quad (A.23)$$

und:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{g}^j \cdot (\mathbf{u}_{,i} \mathbf{g}^i)_{,j} = \frac{1}{J} (J \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{u}_{,i} \mathbf{g}^i)_{,j} \quad (A.24)$$

Es läßt sich zeigen, daß dieser Ausdruck verschwindet, wenn die Divergenzbedingung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ erfüllt ist. Bezeichnen \mathbf{e}_k und \mathbf{e}^i ein kartesisches Koordinatensystem und $\frac{\partial}{\partial x^i}$ die partielle Ableitung nach der kartesischen Ortskoordinate x^i , erhält man für den Geschwindigkeitsgradienten:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} u^k \mathbf{e}_k = \delta^{ij} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \quad (A.25)$$

und entsprechend für den transponierten Geschwindigkeitsgradienten:

$$(\nabla \mathbf{u})^T = \delta^{kj} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \quad (A.26)$$

Die Divergenz des transponierten Geschwindigkeitsgradienten lautet damit:

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \delta^{kj} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta^{kj} \frac{\partial u^i}{\partial x^j \partial x^i} \mathbf{e}_k \quad (A.27)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch null, wenn gilt: $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0$.

Man beachte, daß (A.21) eine skalare Gleichung ist, (A.22), (A.23) und (A.24) aber Gleichungen von Tensoren erster Stufe, d.h. Vektorgleichungen sind.

B: Überprüfung des Potenz-Wandgesetzes

Mit einigen Testrechnungen wurde die Genauigkeit des Potenzgesetzes (3.43) überprüft.

In der folgenden Tabelle ist die Abweichung des Potenz-Wandgesetzes vom logarithmischen Wandgesetz dargelegt.

y^+	$\frac{1}{K} \ln y^+ + B$	$A(y^+)^N$	% Abw.	y^+	$\frac{1}{K} \ln y^+ + B$	$A(y^+)^N$	% Abw.
10	10.6161	11.4706	8.0492	210	18.0417	18.0242	0.0974
20	12.3067	12.7136	3.3069	240	18.3674	18.3850	0.0957
30	13.2956	13.5023	1.5548	270	18.6547	18.7093	0.2925
40	13.9973	14.0914	0.6726	300	18.9117	19.0042	0.4891
60	14.9862	14.9656	0.1376	350	19.2876	19.4440	0.8108
80	15.6879	15.6185	0.4421	400	19.6133	19.8333	1.1215
100	16.2321	16.1445	0.5398	450	19.9006	20.1831	1.4195
120	16.6768	16.5874	0.5361	500	20.1576	20.5012	1.7048
150	17.2211	17.1460	0.4356	550	20.3900	20.7933	1.9779
180	17.6657	17.6164	0.2793	600	20.6023	21.0636	2.2395

Tabelle B.1: Vergleich logarithmisches und Potenz-Wandgesetz

Der Gültigkeitsbereich des logarithmischen Wandgesetzes ist: $30 < y^+ < 300$. In diesem Intervall beträgt die Abweichung des Potenzgesetzes nirgends mehr als 1.56 %. Im Bereich $40 < y^+ < 300$ ist die Abweichung sogar kleiner als 0.68 %.

Eine mit dem Potenz-Wandgesetz berechnete Wandspannung muß unabhängig von y^+ sein, solange der Gültigkeitsbereich eingehalten wird. Um dies zu überprüfen, wird eine turbulente Rohrströmung mit einer Reynoldszahl von $Re=10^5$ mit unterschiedlichen Diskretisierungsgittern und daraus resultierend unterschiedlichem y^+ berechnet. Das Diskretisierungsgitter bestand aus $96 * 24$ Zellen bei $y^+ < 175$, und aus $96 * 8$ Zellen bei $y^+ > 175$. Bild B.1 zeigt die Änderung der berechneten Wandspannung in Abhängigkeit von y^+ . Dabei wird die Wandspannung bei $y^+=175$ als Referenzwert zugrundegelegt.

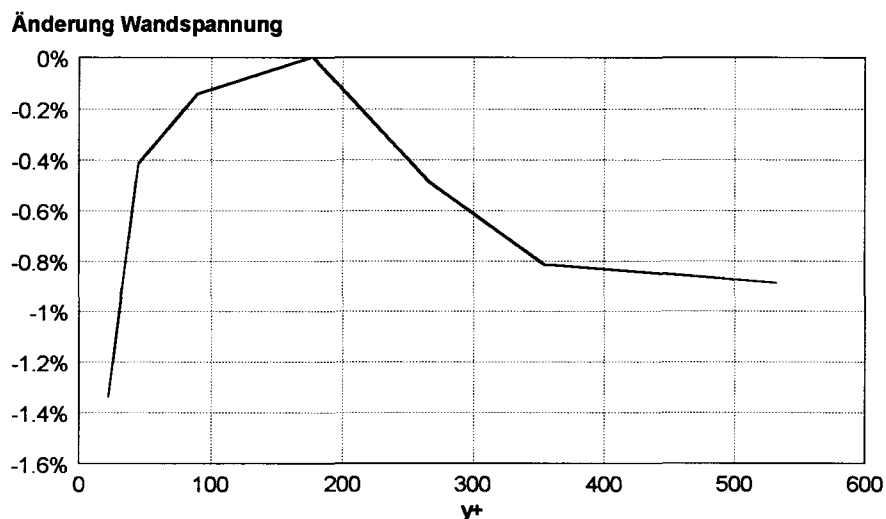


Bild B.1: Änderung der berechneten Wandspannung in Abhängigkeit von y^+

Im Gültigkeitsbereich der logarithmischen Wandfunktionen beträgt die Abweichung an keiner Stelle mehr als 0.7 %.

In einer dritten Testrechnung wird der Widerstand einer längs angeströmten Platte bei verschiedenen Reynoldszahlen mit den Ergebnissen bekannter Widerstandsformeln verglichen. Bild B.2 zeigt das Ergebnis dieses Vergleiches.

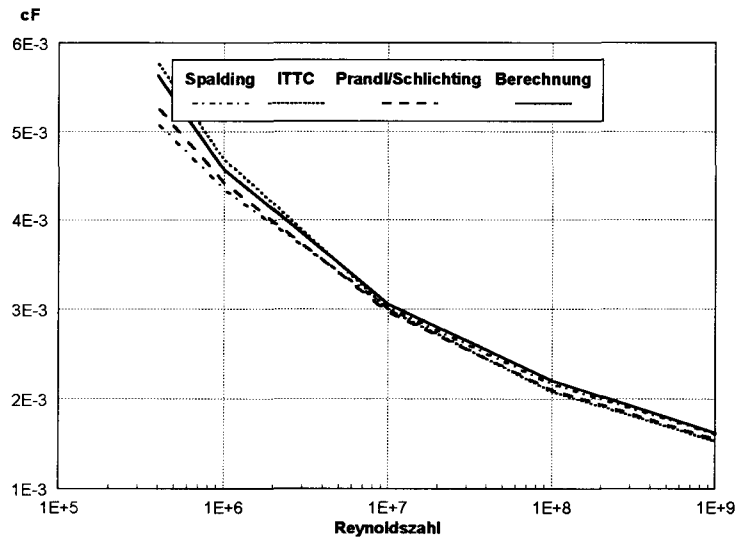


Bild B.2: Widerstandsbeiwert der längs angeströmten Platte

Zum Vergleich wurden Formeln für den Widerstandsbeiwert von Spalding und Prandl/Schlichting (s. *White (1974)*) sowie die im Schiffbau gebräuchliche ITTC-Reibungslinie herangezogen. Im gesamten untersuchten Bereich liegen mit dem Potenz-Wandgesetz berechnete Widerstandsbeiwerte zwischen denen der Widerstandsbeiwertformeln. Vor allem die Übereinstimmung mit der Formel von Spalding ist gut. Dies war jedoch auch zu erwarten, da Spalding die gleichen Konstanten in (3.43) zugrundelegt. Eine bessere Übereinstimmung mit der ITTC-Reibungslinie kann durch eine Anpassung dieser Konstanten erreicht werden.

C: Verzeichnis der benutzten Symbole

A^+	Ackermann - Konstante, $A^+ = 0.26$
\mathbf{a}	Tensor
B	Konstante der logarithmischen Wandfunktion $B = 5.0$
α^i	Einfach kontravariante Tensorkomponente
C	Index des Mittelpunktes der aktuellen Zelle
c	Konstante der logarithmischen Wandfunktion, $c = 0.02316$
c_1, c_2, \dots, c_5	Konstanten des k - ε - Turbulenzmodelles
c_{WK}, c_{KLEB}	Konstanten des Baldwin-Lomax-Turbulenzmodells
c_k, c_ε	Konstanten zur Startwertberechnung
\mathbf{g}_i	Kovarianter Basisvektor eines krummlinigen Koordinatensystems
\mathbf{g}^i	Kontravarianter Basisvektor eines krummlinigen Koordinatensystems
$\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_k$	Kartesischer Basisvektor
F_{KLEB}	Klebanov-Funktion
F_{WAKE}	Wake Function des Baldwin-Lomax-Turbulenzmodells
\mathbf{f}	Volumenspezifische, durch die Dichte dividierte Körperkraft
f, f^i	Fluß, Fluß durch die Fläche, auf der \mathbf{g}^i senkrecht steht
G	Produktionsrate turbulenter kinetischer Energie
g^{ij}	Kontravarianter metrischer Tensor
H, h	Indizes für Gitterebenen in einem Mehrgitterverfahren
h_i	Betrag des kovarianten Basisvektors
i, j, k, l, m	Indizes
J	Jakobische
J^H, J^h	Jakobische des Grobgitters, Jakobische des Feingitters
\bar{k}	Turbulente kinetische Energie
\bar{k}	Bekannter Wert bzw. Approximation der turbulenten kinetischen Energie
k_{init}	Startwert der turbulenten kinetischen Energie
k_w	Turbulente kinetische Energie in der wandnahen Zone
k_o	Konstante des Baldwin-Lomax-Turbulenzmodells, $k_o = 0.0269$
K	v. Karman - Konstante, $K = 0.41$
L	Operator für lineares oder nichtlineares Gleichungssystem
$L^{(k)}$	Konvektions-Diffusionsoperator, $L^{(k)}u^k = (J\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u}u^k - \mathcal{J}\tau^{ik}),_i$
$l_c^{(k)}$	Diskreter approximierter Konvektions-Diffusionsoperator
l	Turbulentes Längenmaß
M	Konstante der logarithmischen Wandfunktion, $M = 1.7453$
NB	Kürzel für Nachbar, d.h. i.d.R. Index der benachbarten Diskretisierungszelle
p	Druck / Dichte
p_e, p_E	Druck am östlichen Zellenrand, in der Mitte der östlichen Zelle
\bar{p}	Approximation des Druckes
\mathbf{R}	Reynoldsspannungstensor / Dichte
r	rechte Seite
δr	Residuum
T_u	Turbulenzintensität
\mathbf{u}	Geschwindigkeit
u_{DIFF}	Maximale Geschwindigkeitsdifferenz im Strömungsprofil
u^k	Geschwindigkeitskomponente
u^+	Dimensionslose Geschwindigkeit in Wandnähe
u^k	Turbulente Fluktuation der Geschwindigkeitskomponente
\bar{u}^k	Approximation der Geschwindigkeitskomponente
\hat{u}_C^k	Reduzierte Geschwindigkeitskomponente in der Zelle C
\mathbf{v}	Bekannter Wert der Geschwindigkeit
y	Wandabstand
y^+	Dimensionsloser Wandabstand

∂	Operator partielle Ableitung
δ^{ij}	Kronecker-Delta
∇	Nabla-Operator
ε	Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie
$\bar{\varepsilon}$	Bekannter Wert bzw. Approximation der Dissipationsrate
$\varepsilon_{\text{init}}$	Startwert der Dissipationsrate
ε_w	Dissipationsrate in der wandnahen Region
ϕ	Feldfunktion, Gitterfunktion
Γ	Diffusivität
η	Koordinate des wandnormalen metrischen Basisvektors
κ	Iterationsschrittzähler
ν	Kinematische Zähigkeit, üblich auch: Laminare Viskosität / molekulare Viskosität
ν_T	Turbulente Viskosität
ν_T^o, ν_T^i	Turbulente Viskosität in der äußeren, inneren Wandregion
τ	Spannungstensor / Dichte
τ^{ij}	Spannungstensorkomponente
$\bar{\tau}^{ij}$	Kontravariante metrische Spannungstensorkomponente
τ_w	Wandschubspannung
ω	Unterrelaxationsfaktor
ξ^i	Kontravariante Ortskoordinate

D: Eingabedatei und Postprozessor zum Programm "flowc"

Die folgenden Zeilen stellen eine Eingabedatei zur Berechnung der ebenen Umströmung eines Pontons dar. Die Eingabe der Netzknoten ist nicht vollständig wiedergegeben.

```
Testfall für ebene Strömung barge2d_ke.in
NUE:          1.19e-6      Kinematische Viskosität
Gz:           0.0         z-Komponente Körperkraft
MAX_GLOBAL_ITERS: 200     globale Iterationen
MAX_ITERS:     100        Iterationen Druckkorrektur
RELAX:        0.9         Relaxationsfaktor/Weight für SOR / SIP
OMG_EPS:      0.7         Unterrelaxation für Eps-GLS
MAX_SIMPLE_ERR: 1.0e-5    max. Fehler, SIMPLE - Abbruchbedingung
MAX_PRE_ITERS: 2          Anzahl Iterationen vor Restriktion
MAX_POST_ITERS: 3         Anzahl Iterationen nach Prolongation

MULTIGRID_LEVELS: 3      Anzahl der größeren Gitter
MAX_V_CYCLES:     10     Anzahl der FAS - V-Zyklen
FMG_STARTLEVEL:  3      Gitterebene, auf der FMG beginnt
FAS:             ON      OFF | ON: Full Approximation Scheme
TURBULENCE:      K_EPSILON | NONE: Turbulenzmodell
SOLVER:          SIMPLE  EXPLICIT | SIMPLE | SIMPLEC
LOG_WALL_FUNCTION: ON    ON | OFF: Logarithmisches Wandgesetz
SMOOTHER:        SIP     SIP | SOR Iterativer Glätter / Löser
DIMENSION:       2_D     2_D | 3_D: Ebene oder räumliche Strömung
STORE_TIMESERIES: 0      Speicherung jeder n-ten Iteration
LOGFILE:         ON      ON | OFF: Erzeugung eines Logfiles
BC_WEST:         DIRICHLET Rate mal
BC_EAST:         NEUMANN
BC_SOUTH:        WALL
BC_NORTH:        RIGID_FREE_SLIP
U_WEST.x:        2.24    Einströmgeschwindigkeit am DIRICHLET Rand
OBSTACLES:
17 25 40 33
INITIAL_VELOCITIES:
-10 -10 1000 1000 2.24 0.0

imported from SUPERTAB...
X_CELLS:         64
Y_CELLS:         24
MESH_NODES:
0 0 0.0000 0.0000
0 1 0.0000 0.0030
0 2 0.0000 0.0079
...
usw.
```

In der folgenden Tabelle sind alle Variable-Attribut-Paarungen, die angegeben werden können, aufgeführt.

Name	Typ ¹⁾	Default Value	Legal Values	Bedeutung	Bemerkung
X_CELLS: Y_CELLS: Z_CELLS:	int	20, 10, 10 ²⁾	1 ... 1000	Anzahl der Diskretisierungszellen in jeder der drei Raumrichtungen	
NUE:	real	1.1e-6	0.0 ... 200.0	Viskosität	
GX: GY: GZ:	real	0.0	-100.0 ... 100.0	Spezifische Körperkraft bezogen auf die Masse	Strömungen bei Schwerkräfteinfluß: Gz: -9.81
DT:	real	0.1	0.0 ... 100.0	Berechnungszeitschritt	nur bei SOLVER: EXPLICIT
MAX_GLOBAL_ITERS:	int	5	0 ... 10000	Anzahl globaler Iterationen	nur bei SOLVER: SIMPLE oder SIMPLEC
MAX_TIMESTEPS:	int	5	0 ... 10000	Anzahl der Zeitschritte	nur bei SOLVER: EXPLICIT
MAX_ITERS:	int	1.000	0 ... 100000	Max. Anzahl Iterationen für die Lösung der Druckkorrekturgleichung	
MAX_U_ITERS: MAX_K_E_ITERS:	int	2	0 ... 1000	Anzahl der inneren Iterationen für Impuls- und Turbulenzgleichungen	
RELAX:	real	1.0	0.1 ... 2.0	Relaxationsfaktor für innere Iteration	
OMG_P: OMG_V: OMG_K: OMG_EPS:	real	0.8, 0.2, 0.7, 0.7	0.0 ... 1.0	Relaxationsfaktoren für Geschwindigkeit, Druck, turbulente kinetische Energie und Dissipationsrate	OMG_V: nur bei impliziter Berechnung, OMG_K und OMG_EPS: nur bei Turbulenz
MAX_ERR:	real	0.01	0.000001 ... 1.0	Max. Residuum, bei dem die Iteration endet	Massedefekt
MAX_PRE_ITERS:	int	\$MAX_ITERS: 3)	0 ... 100000	Anzahl der Iterationen vor der Restriktion	nur bei Mehrgitter
MAX_POST_ITERS:	int	\$MAX_GLOBAL_ITERS:	0 ... 100000	Anzahl der Iterationen nach Prolongation	nur bei FAS
MULTIGRID_LEVELS:	int	0	0 ... 10	Anzahl der Grobgitterebenen	0 wenn gar kein Mehrgitter
MAX_V_CYCLES:	int	1	1 ... 1000	Anzahl der FAS-Zyklen	nur bei FAS
FMG_STARTLEVEL:	int	0	0 ... \$MULTIGRID_LEVELS	Gitterebene, auf der ein Full Multigrid-Scheme beginnt	
FAS:	boolean	OFF	OFF ⁴⁾ ON	Full-Approximations-Scheme	
TURBULENCE:	literal	NONE	NONE K_EPSILON ⁵⁾	Turbulente Strömungen mit oder ohne Turbulenzmodell	
SOLVER:	literal	EXPLICIT	EXPLICIT SIMPLE SIMPLEC	Lösungsverfahren: Explizites Zetschrittverfahren oder eine SIMPLE-Iteration für stationäre Strömung	
LOG_WALL_FUNCTION:	boolean	OFF	OFF ON	Logarithmische Wandfunktionen ein / aus	
SMOOTHER:	literal	SOR	SOR SIP	Iterativer Löser / Glätter der inneren Iteration: Successive Overrelaxation oder Strongly Implicit Procedure	
DIMENSION:	literal	2_D	2_D 3_D	Ebene oder räumliche Strömung	
STORE_TIMESERIES:	int	0	0 ... 10000	Speicherindex	
LOGFILE:	boolean	OFF	ON OFF	Schreiben eines Logfiles mit der Extension .log	
BC_WEST: BC_EAST: BC_SOUTH: BC_NORTH: BC_FRONT: BC_BACK:	literal	RIGID_FREE_SLIP	RIGID_FREE_SLIP DIRICHLET NEUMANN WALL	Randbedingung an den Rändern des blockförmigen Berechnungsgebietes	

Name	Typ ¹⁾	Default Value	Legal Values	Bedeutung	Bemerkung
U_WEST: U_EAST: U_SOUTH: U_NORTH: U_FRONT: U_BACK:	literal	CONST	CONST VARIABLE_I NFLOW	Geschwindigkeitsprofil am DIRICHLET-Rand, bei CONST muß entsprechend U_WEST.x, U_SOUTH.z usw. definiert werden, bei VARIABLE_INFLOW siehe unten	nur bei Definition eines DIRICHLET-Randes
U_WEST.x U_WEST.y U_WEST.z U_EAST.x U_EAST.y U_EAST.z U_SOUTH.x U_SOUTH.y U_SOUTH.z usw.	real	1.0	-100.0 ... 100.0	Geschwindigkeit am Einströmrand, wenn U_WEST: CONST bzw. U_EAST: CONST usw.	
VARIABLE_INFLOW:	{ int int int real real real }	int: 0 real: 0.0	int: 0 ... \$(YZ)_CELL S: ⁶⁾ + 1 real: -100.0 ... 100.0	Angabe eines Geschwindigkeitsprofils bei U_WEST: VARIABLE_INFLOW, usw. Die drei Integer-Werte bezeichnen den Knotenbereich, die drei Real-Werte die drei Geschwindigkeitskomponenten	
OBSTACLES:	{ int int int int int int }	0	0 ... \$(YZ)_CELL S: + 1	Angabe von Zellen, die als Hindernisse ausgespart sind und auf denen eine Haftbedingung herrscht	
INITIAL_VELOCITIES: INITIAL_K_VALUES: INITIAL_EPS_VALUES:	{int int int real real real }	int: 0 real: 0.0	int: 0 ... \$(YZ)_CELL S: + 1 real: -100.0 ... 100.0	Startwerte der Iteration bzw. der Zeitreihenberechnung. Angabe der Werte wie bei VARIABLE_INFLOW	
MESH_NODES:	3_D: {int int int real real real } 2_D: {int int real real }	int: 0 real: 0.0	int: 0 ... \$(YZ)_CELL S: + 1 real: -100.0 ... 100.0	Netzgeometrie: die ersten drei Ganzzahlwerte nennen die strukturierte Knotennummer, die drei Realzahlen sind die drei kartesischen Koordinaten	
¹⁾ int: Ganzzahl, real: Gleitkommazahl, boolean: Ja/Nein-Wert, literal: Zeichenkette, {diese Klammer } Mehrfachnennung ²⁾ Der Wert für Z_CELLS: hat nur eine Bedeutung, wenn DIMENSION: 3_D ³⁾ \$ bedeutet: "der Wert von ..." ⁴⁾ bedeutet: "oder" ⁵⁾ frühere Programmversionen erlaubten außerdem: BALDWIN_LOMAX ⁶⁾ X(YZ)_CELLS: bedeutet: gilt für X_CELLS: und Y_CELLS: und Z_CELLS:					

Die folgende Abbildung zeigt das Basisfenster des Postprozessors POSTFLOW:

