

496 | Oktober 1989

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Ronald Horn

**Beiträge zur Behandlung des
Zugspannungsabbaus in gashaltigem
Wasser mit Methoden der
Blasendynamik und der
Thermodynamik**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Beiträge zur Behandlung des Zugspannungsabbaus in gashaltigem Wasser mit Methoden der Blasendynamik und der Thermodynamik

Ronald Horn, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1989

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 496

Beiträge zur Behandlung des Zugspannungsabbaus
in gashaltigem Wasser mit Methoden der Blasen-
dynamik und der Thermodynamik

von

Ronald Horn

Oktober 1989

Inhaltsverzeichnis

	Liste der verwendeten Symbole	2
1	Einleitung	4
2	Das Verhalten von Kavitationsblasen in umgebenden, ebenfalls Blasen enthaltenden Wasser als kompressibles Strömungsfeld	7
	2.1 Annahmen der Theorie	7
	2.2 Grundgleichungen	7
	2.3 Modellannahmen	9
	2.4 Lösung des Gleichungssystems	11
	2.5 Ergebnisse	16
	2.6 Abbildungen	22
3	Das Verhalten von Kavitationsblasen in einem durch das Druckfeld geprägten Clustervolumen	58
	3.1 Grundgleichungen	58
	3.2 Modellannahmen	58
	3.3 Lösung des Gleichungssystems	60
	3.4 Ergebnisse	61
	3.5 Abbildungen	63
4	Zustandsgleichung	66
	4.1 Diskussion eines Ansatzes	66
	4.2 Diskussion eines Ansatzes	66
	4.3 Diskussion eines Ansatzes	70
	4.4 Gewinnung einer brauchbaren Interpolationsformel	72
	4.5 Abbildung	77
	Literatur	78

Liste der verwendeten Symbole

a	Radius der Mittelpunktsblase
α_{**}	Beiwert des Zugspannungsabbaus nach Chao [6]
B_j	Virialkoeffizient (Komponente j)
β	Gasvolumenverhältnis
C_j	Virialkoeffizient (Komponente j)
χ	Chemisches Potential
F	Freie Energie
$\vec{e}$	Einheitsvektor
k	Boltzmannkonstante
L	Umgebungsradius
m	Molekülmasse
μ	Viskosität
N	Molekülanzahl
$\vec{n}$	Normalenvektor
ν	Zähigkeitsbeiwert
p	Druck
Φ	Geschwindigkeitspotential
R	Blasenradius
ρ	Dichte
$\vec{r}$	Ortsvektor
ρ	Dichte
σ	Koeffizient der Oberflächenspannung
T	Temperatur
t	Zeit
U	Wechselwirkungspotential
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor
V	Volumen
v	Molekülvolumen
W	Fluidgeschwindigkeit
w	Keimbildungswahrscheinlichkeit
ζ	Blasendichte

Indices

G	Gas
id	ideal
ind	induziert
L	Luft
(n)	Kugelschalenindex
v	Dampf
W	Wasser
o	Anfangswert
$*$	Koordinatensystem O_*

Konstanten

$$p_v = 0.023 \text{ [bar]}$$

$$\rho_w = 10^{-6} \text{ [bar} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}]$$

$$\sigma = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ [bar} \cdot \text{cm}]$$

Der vorliegende Institutsbericht entstand während meiner Tätigkeit in den Jahren 1987 bis 1989 am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg.

Ich möchte Herrn Professor Dr.-Ing. W. H. Isay für die zahlreichen Anregungen sowie für seine stets vorhandene Diskussionsbereitschaft danken.

1. Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung von instabilen Blasenauflösungsprozessen in einem Nichtgleichgewichtsfluid, bestehend aus Wasser als Trägermedium sowie mit Luft und Wasserdampf gefüllten Gasblasen. In diesem System (eine Komponente, zwei Phasen) ergibt sich die Dampfdruckkurve als Lösung der Gleichung von Clausius-Clapeyron. Eine Überschreitung der Koexistenzlinie im (p, T) -Diagramm um mehr als $30^\circ C$ ist z.B. durch adiabatische Expansion von reinem, unterkühltem Dampf möglich, ehe eine Keimbildung der flüssigen Phase in Form von winzigen Tröpfchen einsetzt. Auch überhitzte Flüssigkeiten können zunächst als metastabile Phase im Dampfgebiet des (p, T) -Diagramms existieren.

Reduziert man das System auf reines Wasser, kann ein isothermer Phasenübergang flüssig $\rightarrow$ gasförmig nur durch Absenkung des Drucks erreicht werden. Hierzu beschreibt die statistische Mechanik die Keimbildungswahrscheinlichkeit als Funktion der freien Energien vor (I) bzw. nach (II) der Keimbildung. Die Stabilität eines Keimes im Zustand II setzt die Übereinstimmung der chemischen Potentiale voraus, während in der Beziehung für die Drücke die Oberflächenspannung berücksichtigt werden muß. Ein Einfluß der Temperatur wird im Rahmen dieses Berichtes nicht behandelt. Zur Rechtfertigung sei auf [1] verwiesen. Insbesondere ergeben die dort dargestellten Berechnungen zur Blasendynamik, daß auftretende Temperaturgradienten nur einen unbedeutenden Einfluß auf z.B. Verdampfungs- und Aufweitungsvorgänge haben, b.z.w. erst im letzten Stadium des Zusammenfalls von Blasen bedeutsam werden. Für einen isothermen Phasenübergang von reinem Wasser bei Raumtemperatur genügt es jedoch nicht, den Druck auf $p = 0$ [bar] abzusinken; vielmehr ist ein negativer Druck, d.h. das Auftreten von Zugspannung für den Phasenübergang notwendig. Dieser setzt dann ein, wenn die Zugspannung ihr Maximum, die "Zerreißspannung", erreicht. Frenkel [5] schätzte 1942 den Wert der Zerreißspannung mit Hilfe des Gleichgewichtsradius

$$r^* = \frac{2\sigma}{p_\infty - p_0} \quad (1.1)$$

ab, indem er den kleinsten Wert r^* , der der Entstehung eines Dampfbläschens entspricht, dem mittleren Molekülabstand δ gleichsetzte. Mit $\delta = 10^{-8}$ [cm] und $\sigma = 100$ [dyn/cm] berechnete er den Wert $p_\infty - p_0 = 10^4$ [bar]. Diese Abschätzung lieferte sicherlich einen zu hohen Wert, da der Radius des Wassermoleküls bei $p = -1000$ [bar] deutlich größer gegenüber $r = 1,93 \cdot 10^{-8}$ [cm] bei $p = 1$ [bar] und darüberhinaus $\delta \geq 2r$ zu setzen ist. Nach [1] ist eine Zerreißspannung von $p = 1000$ Bar realistisch.

Die Tatsache, daß in realen Flüssigkeiten in der Dampfphase winzige Flüssigkeitstropfen bzw. in der flüssigen Phase Dampfkeime/Feststoffpartikelchen vorhanden sind, hat die Auswirkung, daß bereits eine freie Oberfläche existiert, an die sich (z.B. in der flüssigen Phase) Wasserdampf anlagern kann. Man benötigt deshalb keine hohen Zugspannungen, die das Wasser "aufreißen". Vielmehr ist es schwierig, die Reinheit von Wasser entsprechend zu optimieren, daß Messungen den o.a. realistischen Wert bestätigen können.

Die bislang in hochreinem Wasser erreichten Zerreispannungen von $p = 280 \text{ Bar}$ verdeutlichen, daß schon geringste Mengen von Verunreinigungen die Zugspannung stark herabsetzen. In realen Fluiden sind derartige Kavitationskeime in sehr großer Zahl vorhanden und im gesamten Volumenbereich der für die Aufweitungsprozesse relevanten Druckabsenkung homogen verteilt.

Deshalb sind Modelle, die einen Clusterradius $a(t)$ vorgeben [2], besser zur Beschreibung von Zusammenfallsprozessen geeignet. Da in diesem Fall ein Blasencluster bereits entstanden ist, kann man in einer realistischen Näherung innen ein homogenes Volumenverhältnis und außen nahezu reines Wasser ($\beta \approx 0$) annehmen. Die Existenz von Keimen in realen Fluiden ist Ursache dafür, daß (z.B. mit der Profiltheorie berechnete) Zugspannungen an der Vorderkante von Tragflügeln abgebaut werden. Dementsprechend würde eine Nichtberücksichtigung dieser Tatsache den Kavitationseinsatz zu früh voraussagen. Für die Beschreibung des Zugspannungsabbau existiert bis heute nur eine empirische Formel [3], die den treibenden Druck in der Blasengleichung (Rayleigh-Plesset-Gleichung) durch einen vom Gasvolumenverhältnis β abhängigen, geeignet normierten Faktor reduziert.

In Kap. 2 wird zunächst ein Modell für das Verhalten einer 'mittleren' Umgebungsblase aufgestellt und der Impulssatz, Blasenerhaltungssatz sowie die Kontinuitätsgleichung formuliert. Durch Integration des Impulssatz' ergibt sich (den Modellannahmen entsprechend) die Blasengleichung, so daß die betrachteten zeit- und ortsabhängigen Feldfunktionen (Dichte ρ , Radius R , Fluiddruck p und Fluidgeschwindigkeit W) durch ein System von vier Differentialgleichungen beschrieben werden. Das Modell geht von einer im gesamten Volumen homogenen Verteilung der Kavitationskeime aus. Im Gegensatz zur Rayleigh-Plesset-Gleichung (eine Blase, treibender Druck p_∞ , $W_\infty = 0$) wird zur Aufstellung der Blasengleichung für jede "mittlere" Umgebungsblase im Abstand $2L$ die Bernoulli-Gleichung zwischen der Blasenwand und dem Mittelpunkt $r_* = (2n+1)L$ zur jeweils äußeren Blase gelöst. Die Berechnung des durch den Aufweitungsproze induzierten Drucks am Ort $r_* = (2n+1)L$ führt dort zu einer Modifikation des treibenden Drucks in den Blasengleichungen, so daß eine vorhandene Zugspannung iterativ aufgehoben wird. Die Frage, wieviele Umgebungsblasen des Ortes $r_* = (2n+1)L$ noch signifikant zum induzierten Gesamtdruck beitragen, kann nicht exakt beantwortet werden, da für den Einfluß der Geschwindigkeitsfelder 'näher' gelegener, instabil aufweitender Blasen auf die induzierten Drücke entfernterer Blasen keine befriedigende Theorie vorliegt. Um letzteren Einfluß explizit zu berechnen, muß zudem ein geometrisches Modell zugrundegelegt werden. Insgesamt erhält man eine Beschreibung der real in kompressiblen Fluiden wirkenden Dämpfung des Aufweitungsvorgangs. Trotz einer im Vergleich zu [3] umfassenderen Behandlung des Zugspannungsabbau im kompressiblen Fluid gibt das hier vorgestellte Modell die Aufhebung negativer Drücke nicht vollständig ohne Modellannahmen wieder.

Bereits zuvor wurde die Tatsache angesprochen, daß die Vorgabe eines Clusterradius $a(t)$ zur Beschreibung von Aufweitungsvorgngen ungeeignet und nur sehr beschränkt verwend-

bar ist. Da für $r > a(t)$ eine inkompressible Flüssigkeit zugrundegelegt wird, bleibt die instabile Aufweitung der real auch außerhalb des Clusterradius' $a(t)$ existierenden Kavitationskeime ohne Berücksichtigung. In Kap. 3 soll deshalb eine nach außen hin kontinuierlich abklingende Verteilung des Gasvolumenverhältnisses vorgegeben werden. Insbesondere kann durch diese Vorgabe das Geschwindigkeitsfeld (nach Integration der Kontinuitätsgleichung) analytisch gelöst werden. Es zeigt sich jedoch, daß die Verzögerung des Aufweitungsprozesses entscheidend von dem Parameter abhängt, der (rein formal) die Funktion des nach außen abklingenden Gasvolumenverhältnisses bestimmt.

Letztendlich scheitern damit beide Modelle an der Aufstellung einer Druck– Dichte– Beziehung für das Vielblasenfluid mit rein strömungsmechanischen Mitteln. In Kap. 4 soll deshalb versucht werden, diese Beziehung mit Hilfe einer thermodynamisch– molekulartheoretischen Betrachtungsweise aufzustellen. Hierzu wird die Maxwellbeziehung zwischen Druck und freier Energie herangezogen. Mit $F = -kT \cdot \ln Z$ gehen dabei die Eigenschaften des Mehrphasenfluids in die Zustandssumme Z ein. Mit geringfügigen Modifikationen wird eine Interpolationsformel aufgestellt, die die an die Druck– Dichte– Beziehung gestellten Forderungen erfüllt und den Übergang zu den reinen Phasen ($\beta \mapsto 0$ bzw. $\beta \mapsto 1$) erlaubt.

2. Das Verhalten von Kavitationsblasen in umgebendem, ebenfalls Blasen enthaltenden Wasser als kompressibles Strömungsfeld

2.1 Annahmen der Theorie

Die Fluidgeschwindigkeit wird durch den Gradienten eines skalaren Potentials beschrieben. In der flüssigen und gasförmigen Phase herrscht die gleiche Temperatur. Damit treten insbesondere an der Phasentrennfläche keine Temperaturgrenzschichten auf; es entfällt der Beitrag der Wärmeleitung. Wasser ist ein Mehrphasen- und Mehrkomponentenfluid. So setzt sich die gasförmige Phase, z.B. das Innere einer Blase, aus Luft und Wasserdampf zusammen. Umgekehrt enthält die flüssige Phase Wasser auch einen Anteil an gelöster Luft. Im folgenden wird von der allgemein üblichen Vereinfachung Gebrauch gemacht, nur den ungelösten Gasgehalt des Fluids zu berücksichtigen. In realen Fluiden wird der ungelöste Gasgehalt sowohl durch die von der Strömung mitgeführten Blasen als auch durch Porenkeime repräsentiert, die sich an der Oberfläche von Schwebeteilchen stabilisieren können. Letztere werden zugunsten von kugelförmigen Blasen vernachlässigt. Die Zustandsänderungen der Komponenten Luft und Wasserdampf im Innern einer Blase sollen isotherm verlaufen. Im Bereich der Blasendynamik (vgl. [1,Kap.7]) ist diese Voraussetzung lediglich dann weniger gut erfüllt, wenn sich die Blase im fortgeschrittenen Stadium des Zusammenfalls befindet. Bestandteile der Blase sind Wasserdampf und Luft. Bei isothermer Zustandsänderung ist der Dampfdruck p_v als konstant anzusehen. Allen Rechnungen liegt der Wert $p_v = 0.023 \text{ [bar]}$ zugrunde, der Druck des gesättigten Wasserdampfes bei Raumtemperatur. Für den Luftanteil der Blase wird die ideale Gasgleichung zugrundegelegt. Strömungsvorgänge im Blaseninnern bleiben unbeachtet; die Phasentrennfläche kann in guter Näherung als echte Materiegrenze angesehen werden. Die Blasen werden dann von der Strömung ohne Relativbewegungen reibungsfrei mitgeführt; ein Massenfluß infolge Verdampfung bzw. Kondensation findet nicht statt. Die flüssige Phase des reinen Wassers wird inkompressibel behandelt, die Materiedichte ρ_w ist damit konstant. Allen Rechnungen liegt der Wert $\rho_w = 10^{-6} \text{ [bar} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}]$ zugrunde. Auf das Fluid sollen keine äußeren Kräfte (z.B. Schwerkraft) wirken.

2.2 Grundgleichungen

Mit den Materiedichten ρ_w und ρ_G von Wasser bzw. Wasserdampf ist die Dichte des kompressiblen Fluids gegeben durch

$$\rho = \rho_w (1 - \beta) + \rho_G \beta \quad (2.1)$$

mit dem Gasvolumenverhältnis

$$\beta = \frac{V_{Gas}}{V_{gesamt}} = \frac{V_G}{V_G + V_w} \quad (2.2)$$

Der Anteil der Gasdichte

$$\rho_G = \frac{M_v + M_L}{V_G} \quad (2.3)$$

wird im folgenden vernachlässigt; es gilt dann in sehr guter Näherung

$$\rho \approx \rho_w (1 - \beta) \quad . \quad (2.4)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet allgemein

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Mit der Annahme kugelsymmetrischer Strömung besitzt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ nur eine Komponente $W(r, t)$, d.h.

$$\vec{v} = W(r, t) \cdot \vec{e}_r \quad (2.6)$$

und damit

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2}{r} \cdot W \quad . \quad (2.7)$$

Nach Einsetzen von Gl.(2.6),(2.7) in Gl.(2.5) ergibt sich

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2}{r} \cdot W \right) + W \cdot (\vec{e}_r \nabla \rho) = 0 \quad . \quad (2.8)$$

Mit der Dichte ρ nach Gl.(2.4) erhält man endgültig die Kontinuitätsgleichung für das kompressible Fluid:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + W \cdot \frac{\partial \beta}{\partial r} = (1 - \beta) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2}{r} \cdot W \right) \quad . \quad ((2.9)$$

Der Impulssatz lautet allgemein

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{4}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2.10)$$

Der Viskositätseinfluß wird n.V. vernachlässigt ($\mu = 0$). Mit Gl.(2.4),(2.6) und (2.7) ergibt sich für das kompressible Fluid:

$$\rho_w (1 - \beta) \left(\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Hierbei ist $p = p(r, t)$ der Felddruck im Strömungsmedium. Es sei $\zeta = \zeta(r, t)$ die Anzahl der Blasen pro Volumeneinheit [cm^3] im Fluid. Die Gesamtzahl der Blasen ist Erhaltungsgröße, d.h.

$$\frac{d}{dt} \int \zeta dV = \int \frac{\partial \zeta}{\partial t} dv + \int \zeta \cdot \vec{v} \vec{n} dF = 0$$

bzw.

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{t} + \vec{v}\nabla\zeta = -\zeta\nabla\vec{v} = +\frac{\zeta}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} \quad . \quad (2.12)$$

Dann gilt der Blasenerhaltungssatz (wenn Zusammenwachs Vorgänge und Diffusionseffekte vernachlässigt werden)

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \equiv -\frac{1}{1-\beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{1-\beta} \frac{d}{dt}(1-\beta) \quad . \quad (2.13)$$

Ein Vergleich der äußeren Terme liefert nach elementarer Integration

$$\frac{\zeta}{\zeta_0} = \frac{1-\beta}{1-\beta_0} \quad . \quad (2.14)$$

2.3 Modellannahmen

Die o.a. Gleichungen (2.9),(2.11) und (2.14) reichen zur Bestimmung der vier Feldgrößen ζ, β, p und W noch nicht aus. Zur Gewinnung weiterer Gleichungen werden deshalb die Verhältnisse in der Umgebung O_* einer beliebig herausgegriffenen Blase (Abb. 2.1) genauer analysiert. Es sei O der Mittelpunkt des betrachteten Koordinatensystems; O_* der Mittelpunkt der im Abstand r liegenden Blase vom Radius $R(r, t)$. In der Umgebung jeder Blase setzen wir reines Wasser in Form einer Kugel vom Radius $L(r, t)$ voraus.

Für den Strömungsbereich $R \leq r_* \leq L$ kann dann inkompressible Potentialströmung angenommen werden. Das Geschwindigkeitspotential lautet

$$\Phi_* = -\frac{R^2 \dot{R}}{r_*}, \quad \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial r_*} \right)_R = \dot{R} \quad . \quad (2.15)$$

Die Kenntnis des Geschwindigkeitspotentials Φ_* ermöglicht die Aufstellung der Bernoullischen Gleichung, aus der die Blasengleichung gewonnen wird. So kann z.B. die Gleichung von Rayleigh und Plesset

$$R \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{p_\infty} \cdot \left(p(R) + p_v - \frac{2\sigma}{R} - p_\infty \right) \quad (2.16)$$

aus der Bernoullischen Gleichung abgeleitet werden, die hierzu zwischen $r_* = R$ und $r_* = \infty$ gelöst wird; auch [2],[3] legen Ihren Arbeiten Gl.(2.16) - mit entsprechenden Modifikationen - zugrunde.

Die Annahme, daß eine Druckabsenkung p_∞ in sehr großer Entfernung von der jeweils betrachteten Blase eine Expansion bewirkt, die das Verhalten des kompressiblen Viel-Blasen-Fluids zufriedenstellend beschreibt, ist als unrealistisch zu bezeichnen; vielmehr sind die Druckverhältnisse in unmittelbarer Umgebung der Blase maßgeblich für

ihre Dynamik. Aus diesem Grund wird die Bernoullische Gleichung zwischen der Blasenwand $r_* = R$ und dem Mittelpunkt $r_* = L$ zur nächsten Nachbarblase aufgestellt:

$$\left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial t}\right)_R + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial r_*}\right)_R^2 + \frac{p(R,t)}{\rho_w} = \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial t}\right)_L + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial r_*}\right)_L^2 + \frac{p(L,t)}{\rho_w} . \quad (2.17)$$

Wir nehmen an, daß

$$p(L,t) = p(r,t) \quad (2.18)$$

dem Fluiddruck an der Stelle r entspricht. Der Gesamtdruck im Innern der Blase setzt sich aus den Partialdrücken der Bestandteile Gas und Luft zusammen. Bei konstanter Luftmasse in der Blase gilt dann die Beziehung

$$p(R,t) = p_L + p_v - \frac{2\sigma}{R} = p_{L0} \frac{R_o^3}{R^3} + p_v - \frac{2\sigma}{R} , \quad (2.19)$$

mit den Partialgasdrücken p_L, p_v und dem Koeffizient der Oberflächenspannung σ . Die letzte Umformung basiert auf der Annahme einer isothermen Zustandsänderung ($p_L \cdot v^\kappa = \text{const}$; $\kappa = 1$; $p_L/p_{L0} = R_o^3/R^3$). Mit Gl.(2.15),(2.17)..(2.19) ergibt sich nach Einsetzen der partiellen Ableitungen von Φ_* :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{4R}{3L} + \frac{1}{3} \frac{R^4}{L^4}\right) + R \left(\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right) \left(1 - \frac{R}{L}\right) = \\ = \frac{1}{\rho_w} \left(p_{L0} \frac{R_o^3}{R^3} + p_v - \frac{2\sigma}{R} - p(r,t)\right) . \end{aligned} \quad (2.20)$$

In (2.20) stellt $R = R(r,t)$ den Blasenradius und $L = L(r,t)$ den Umgebungsradius dar und es ist mit $V \equiv L^3$

$$\beta = \frac{R^3}{L^3} . \quad (2.21)$$

Wegen

$$\zeta = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{L^3} \quad (2.22)$$

gilt neben (2.14) auch

$$(1 - \beta)L^3 = (1 - \beta_o)L_o^3 \quad (2.23)$$

als Blasenerhaltungssatz. Wenn wir die Variable ζ gemäß Gl. (2.14),(2.23) ersetzen, genügen die Gleichungen (2.9), (2.11),(2.20),(2.21) und (2.23) vollständig zur Bestimmung der fünf Feldfunktionen p, W, β, R und L . Mit der Einführung von β gemäß (2.21) in die übrigen Relationen erhält man endgültig das folgende System

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + W \frac{\partial \beta}{\partial r} = (1 - \beta) \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2}{r} W \right) \quad (2.24a)$$

$$\rho_w (1 - \beta) \left(\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.24b)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \beta^{1/3} + \frac{1}{3} \beta^{4/3} \right) + R \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} (1 - \beta^{1/3}) = \frac{1}{\rho_w} \left(p_L o \frac{R_o^3}{R^3} + p_v - \frac{2\sigma}{R} - p \right) \quad (2.24c)$$

$$\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\beta_o}{1 - \beta_o} = \frac{R_o^3}{R^3} \quad (2.24d)$$

2.4 Lösung des Gleichungssystems

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird für $t < t_o$ von einem Gleichgewichtszustand ausgegangen. Es gilt dann $R = R_o$, $\beta = \beta_o$, $p = p_o = p_\infty = 1$ [bar]. Dieser Druck herrscht an jedem Ort des kompressiblen Fluids; es ist $p(R) = p(L) = p_o$ und $\partial R / \partial t = \partial^2 R / \partial t^2 = 0$. Im Zeitpunkt $t = t_o$ wird das Gleichgewicht durch eine (durch äußere, dynamische Effekte erzwungene) Druckabsenkung der Form $p(r, t)$ gestört. Hierzu wird der Umgebungsdruck kontinuierlich abgesenkt, bis er nach einer vorgegebenen Zeit Δt ein Minimum erreicht. Dieses Druckminimum beträgt

$$p_{min}(r) = p_\infty + (p_{min} - p_\infty) \cdot e^{-k \cdot L} \quad (2.25a)$$

für die Umgebung der bei $r = 0$ liegenden Aufpunktblase und

$$p_{min} = p_\infty + (p_{min} - p_\infty) \cdot e^{-k \cdot 2nL} \quad (2.25b)$$

für die übrigen Blasen am Ort $r = 2nL$ mit $p_{min} = p_{min}(0)$ als Abkürzung. Der erreichte Minimaldruck bleibt im weiteren Verlauf der zeitlichen Entwicklung des Systems konstant. Die Druckabsenkung lautet explizit

$$p(r, t) = \begin{cases} p_\infty - (p_\infty - p_{min}(r)) \cdot t / \Delta t, & t \leq \Delta t \\ p_{min}(r), & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.26)$$

An dieser Stelle muß betont werden, daß Gl.(2.26) für sich noch keine Lösung des Gleichungssystems (2.24a-d) darstellt.

Durch Lösen der Differentialgleichung (2.24c) mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4.Ordnung erhält man $(R(r, t))_{t=t_1}$, $\left(\frac{\partial R(r, t)}{\partial t} \right)_{t=t_1}$ sowie $\left(\frac{\partial^2 R(r, t)}{\partial t^2} \right)_{t=t_1}$. Der Blasenerhaltungssatz (2.24d) ermöglicht dann die Berechnung von $(\beta(r, t))_{t=t_1}$, $\left(\frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t} \right)_{t=t_1}$ sowie $\left(\frac{\partial^2 \beta(r, t)}{\partial t^2} \right)_{t=t_1}$ durch das folgende, nacheinander auflösbare System:

$$(\beta(r, t))_{t=t_1} = \frac{1}{\frac{R_o^3}{R(r, t_1)^3} \cdot \frac{1 - \beta_o}{\beta_o} + 1} \quad (2.27a)$$

$$\left(\frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t} \right)_{t=t_1} = \frac{3 \cdot \beta(r, t_1) (1 - \beta(r, t_1)) \frac{\partial R(r, t_1)}{\partial t}}{R(r, t_1)} \quad (2.27b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \beta(r, t)}{\partial t^2} \right)_{t=t_1} = & \frac{3}{R(r, t_1)} \left(\beta(r, t_1) (1 - \beta(r, t_1)) \left(\frac{\partial^2 R(r, t_1)}{\partial t^2} - \frac{\frac{\partial R(r, t_1)}{\partial t}^2}{R(r, t_1)} \right) \right) + \\ & \frac{3}{R(r, t_1)} \left(\frac{\partial \beta(r, t_1)}{\partial t} \frac{\partial R(r, t_1)}{\partial t} (1 - 2\beta(r, t_1)) \right) \end{aligned} \quad (2.27c)$$

Durch die Expansion der Blasen nimmt das Geschwindigkeitsfeld $W(r, t)$ von Null verschiedene Werte an; der hierdurch am Ort $r_* = L$ induzierte Druck $P_{ind}(L, t)$ stellt einen Zusatzdruck dar, der der erzwungenen Druckabsenkung (Gl.(2.26)) hinzuzufügen ist (für $t = t_o$ gilt $p_{ind}(L, t) = 0$ wegen $W_o = 0$).

Die zur Integration des Impulssatzes notwendige Kenntnis der partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung gewonnen werden, die sich auch in der Form

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\ln(r^2(1 - \beta))) \cdot W = \frac{1}{1 - \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (2.28)$$

schreibt. Man erhält nach Integration über den Ort r (mit einer noch freien Zeitfunktion $c_1(t)$):

$$W = \frac{c_1(t)}{r^2(1 - \beta)} + \frac{1}{r^2(1 - \beta)} \int^r \frac{\partial \beta}{\partial t} s^2 ds \quad (2.29)$$

Die Funktion $c_1(t)$ bestimmt man aus der Randbedingung

$$W(r, t) = \frac{\partial a(t)}{\partial t} ; \quad r = a(t) . \quad (2.30)$$

Dabei bezeichnet $a(t) = R(0, t)$ den Radius der im Nullpunkt des Koordinatensystems liegenden Aufpunktblase. Einsetzen von Gl.(2.30) in Gl.(2.29) liefert

$$c_1(t) = a^2 \frac{\partial a}{\partial t} \cdot (1 - \beta(0, t)) - \int^{a(t)} \frac{\partial \beta}{\partial t} s^2 ds .$$

Damit ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld

$$W(r, t) = \frac{a^2(t) \cdot \frac{\partial a}{\partial t}}{r^2} \cdot \frac{1 - \beta(0, t)}{1 - \beta(r, t)} + \frac{1}{r^2 \cdot (1 - \beta(r, t))} \cdot \int_{a(t)}^r \frac{\partial \beta}{\partial t} s^2 ds \quad (2.31)$$

Mit Hilfe von Gl.(2.31) kann nun der durch die Aufweitung jeder Einzelblase induzierte Druck $p_{ind}(r, t)$ durch Integration des Impulssatzes (Gl.(2.11)) berechnet werden; wegen $p_{ind}(\infty, t) = 0$ bar bietet sich eine Integration von L bis ∞ an:

$$\begin{aligned} - \int_L^\infty \frac{\partial p_{ind}}{\partial r} dr &= \rho_w \int_L^\infty (1 - \beta(r, t)) \frac{\partial W(r, t)}{\partial t} dr + \frac{1}{2} \rho_w \int_L^\infty (1 - \beta(r, t)) \frac{\partial}{\partial r} W^2(r, t) dr \\ &= p_{ind}(L, t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Druckabsenkung wird, wie schon ausgeführt, für jeden Zeitschritt vorgegeben, während alle anderen Feldgrößen iterativ berechnet werden müssen. Dabei ist der nach Gleichung (2.32) berechnete induzierte Druck $p_{ind}(L, t)$ von den Feldgrößen der jeweils zuletzt gelösten Blasengleichung abhängig, in die sowohl der Stördruck als auch der induzierte Druck $p_{ind}(L, t_{-1})$ als treibender Druck eingehen.

Für $\frac{\partial W(r, t)}{\partial t}$ folgt mit Gl.(2.31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(r, t)}{\partial t} &= \\ &= \left(\left(2a(t) \left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} \right)^2 + a(t)^2 \frac{\partial^2 a(t)}{\partial t^2} \right) (1 - \beta(0, t)) - \frac{\partial \beta(0, t)}{\partial t} \cdot a^2(t) \frac{\partial a}{\partial t} \right) \cdot \frac{1}{r^2 (1 - \beta(r, t))} \\ &+ \left((1 - \beta(0, t)) a^2(t) \frac{\partial a}{\partial t} \right) \cdot \frac{\frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t}}{r^2 (1 - \beta(r, t))^2} + \frac{\frac{\partial \beta(r, t)}{\partial r}}{r^2 (1 - \beta(r, t))^2} \cdot \int_{a(t)}^r \frac{\partial \beta(s, t)}{\partial t} s^2 ds \\ &+ \frac{1}{r^2 (1 - \beta(r, t))} \cdot \int_{a(t)}^r \frac{\partial^2 \beta(s, t)}{\partial t^2} s^2 ds - \frac{\frac{\partial \beta(0, t)}{\partial t} a^2(t) \frac{\partial a(t)}{\partial t}}{r^2 (1 - \beta(r, t))} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Integration von Gl. (2.32) setzt die Kenntnis der r -Abhängigkeit von $\beta(r, t)$, $\frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 \beta(r, t)}{\partial t^2}$ voraus. Diese kann jedoch nicht vorgegeben werden, sondern muß für jeden Zeitschritt neu bestimmt werden.

Hierzu stellt man sich einen kugelförmigen Flüssigkeitsbereich vor (vgl.[2]). Jede auf einer Kugelschale angeordnete Blase umgibt dann ein Bereich des inkompressiblen Fluids innerhalb $r_* = L$ um ihren Mittelpunkt. Die Kugelschalen haben die Radien $r_n = 2Ln$ (Abb.2.2). Auf der n -ten Kugelschale der Oberfläche $O_n = 4\pi(2Ln)^2$ befinden sich $N_n = 4\pi n^2$ Blasen, jeweils mit der Umgebungsfläche $(2L)^2$. Dann beträgt die Gesamtzahl N_i der Blasen im Gebiet der n_i -ten Kugelschale mit Radius $r_i = 2(n_i + 1)L$

$$N_i = 1 + 4\pi \sum_{n=1}^{n_i} n^2 = \frac{4\pi}{3} n_i^3 \left(1 + \frac{1 + 3n_i}{2n_i^2} \right) + 1$$

und das Gasvolumenverhältnis berechnet sich zu

$$\beta = \frac{N_i \frac{4\pi}{3} R^3}{(2n_i + 1)^3 \frac{4\pi}{3} L^3} \approx \frac{\pi}{6} \left(\frac{R}{L} \right)^3 \quad (2.34)$$

Da L eine zeitunabhängige Größe bleiben soll (diese Annahme ist natürlich nur eine Näherung), gilt Gl.(2.34) auch für die Anfangswerte $R(r, t_0) = R_0$, $\beta(r, t_0) = \beta_0$ und es folgt für alle weiteren Zeiten

$$L = L_0 = R_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\beta_0}} \quad (2.35)$$

Zur Berechnung der r -Abhängigkeit von $\beta(r, t)$, $\frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 \beta(r, t)}{\partial t^2}$ wird die Blasengleichung an den Orten $r = 2Ln$ gelöst. Der Umgebungsdruck für die Aufpunktblase bei $r = 0$ ist dann $p = p(L_0, t)$; für die allgemeine Kugelschalenblase mit Radius $R(2Ln_i, t)$ wird als treibender Außendruck $p = p(2Ln, t)$ verwendet. Die Bestimmung des örtlichen Gasvolumenverhältnis' gemäß Gl.(2.27a,b,c) gestattet dann mit Hilfe eines Splines die Berechnung der r -Abhängigkeit der o.a. Größen. Somit bleibt in Gl.(2.32) nach Multiplikation mit $(1 - \beta(r, t))$ die numerische Auswertung der Integrale

$$I_1 = \int_L^\infty \frac{\frac{\partial \beta}{\partial t}}{r^2(1 - \beta(r, t))} dr$$

$$I_2 = \int_L^\infty \frac{\frac{\partial \beta}{\partial t}}{r^2(1 - \beta(r, t))} \cdot \left(\int_{a(t)}^L \frac{\partial \beta}{\partial t} s^2 ds \right) dr$$

Für das zweite Integral von Gl.(2.32) ergibt sich nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_L^\infty (1 - \beta(r, t)) \frac{\partial W^2(r, t)}{\partial r} dr &= [(1 - \beta(r, t)) W^2(r, t)]_L^\infty - \int_L^\infty W^2(r, t) \cdot \left(-\frac{\partial \beta}{\partial r} \right) dr \\ &= - (1 - \beta(L, t)) \cdot W(L, t)^2 + \int_L^\infty W^2(r, t) \frac{\partial \beta}{\partial r} dr \end{aligned}$$

Auch das Integral

$$I_3 = \int_L^\infty W^2(r, t) \frac{\partial \beta}{\partial r} dr$$

wird numerisch ausgewertet; die hier benötigte r -Abhängigkeit von $\frac{\partial \beta}{\partial r}$ ergibt sich wie zuvor aus einem Spline.

Die so berechnete Größe $p_{ind}(L, t)$ stellt den durch die Aufpunktblase am Ort $r_* = L$ induzierten Zusatzdruck dar. Eine wirksame Anhebung der erzwungenen Druckabsenkung (= treibender Druck in der Blasengleichung) wird jedoch von allen Kugelblasen induziert, deren Geschwindigkeitsfeld am Ort L noch nicht vernachlässigbar klein ist. Es ist daher zu prüfen, wieviele der "mittleren" Umgebungsblasen neben der Aufpunktblase am Ort L einen Zusatzdruck induzieren.

Legt man zugrunde, daß das Geschwindigkeitsfeld nach außen annähernd mit $W(r, t) \approx r^{-2}$ abfällt (dies gilt streng nur für ein inkompressibles Fluid, vgl. Gl.(2.31)), so folgt mit Gl.(2.32) $p_{ind}(r, t) \approx r^{-1}$. Die Absolutwerte der von den relevanten Umgebungsblasen gemäß Gl.(2.31)..(2.33) induzierten Drücke $p_{ind}(2Ln, t)$ sind daher zunächst mit der angegebenen Proportionalität (r^{-1}) bezüglich $r_* = L$ zu normieren.

Die Frage, ob neben den Umgebungsblasen der unmittelbar benachbarten Kugelschale der Einfluß noch weiter außen liegender Blasen berücksichtigt werden muß, kann nur im Zusammenhang mit der Stärke der durch die Druckabsenkung hervorgerufenen Geschwindigkeitsfelder beantwortet werden. Da in Gl.(2.32) der zweite Summand gegenüber dem ersten vernachlässigbar gering ist, wird der induzierte Druck im wesentlichen durch den Faktor $\frac{\partial W(r,t)}{\partial t}$ bestimmt. Da $W(r,t)$ (und damit $\frac{\partial W(r,t)}{\partial t}$) nach außen abfällt und die Geschwindigkeitsfelder weiter außen liegender Blasen aufgrund weniger stark treibender Drücke insgesamt geringere Werte annehmen, kommt es durch die Superposition mit den Geschwindigkeitsfeldern der unmittelbaren Nachbarblasen zu einem "Abschirmungseffekt" für weitere Druckanhebungen im Abstand L zur jeweils betrachteten Blase (Abb.2.3). Damit gehen in die Berechnung des induzierten Gesamtdrucks im wesentlichen die 'mittlere' Anzahl der nächsten Nachbarblasen des Ortes $r_* = L$ ein. Abb (2.4) zeigt hierzu die räumliche Struktur, die dem Modell der Umgebungsblase zugrundeliegt. An jedem Ort der Oberfläche $O = 2Lr_*$ wird (neben der Blase bei $r_* = 0$) im Mittel von vier Blasen der ersten Kugelschale ein Zusatzdruck induziert. Unter Berücksichtigung der Geometrie und der Normierungsblasen wird der von einer Blase der ersten Kugelschale bei (deren Abstand!) $r_{*,1} = L$ induzierte Druck mit dem Faktor 3.2 (statt einem Faktor 4, s. Abb.2.5) multipliziert und zu dem induzierten Druck der Mittelpunktsblase addiert.

Das Gleichungssystem (2.24) kann jetzt iterativ gelöst werden: treibender Druck in der Blasengleichung (2.24c) des nächsten Zeitschritts ist die Summe aus dem Stördruck gemäß Gl.(2.26) und dem induziertem Gesamtdruck.

2.5 Ergebnisse

Die in Kap. 2.4 angegebene Lösung des Gleichungssystems (2.24) läßt die Wahl verschiedener Parameter zu. Neben den Anfangswerten der Feldgrößen (Blasenradius R_o , Gasvolumenverhältnis β_o) kann die Druckabsenkung bzgl. ihres Minimums im Nullpunkt des Koordinatensystems $p_{min}(r_* = 0)$ und ihrer Form (Parameter k in Gl. (2.25)) verändert werden. In allen betrachteten Fällen gilt $W_o = 0$ sowie für $t < t_o$: $p_o = p_\infty = 1$ [bar]. Tabelle (2.1) enthält eine Übersicht über die unterschiedlichen Variationen der Werte; diese werden im Anschluß diskutiert (Kap. 2.5.1 ... 2.5.5).

Nr.	R_o [cm]	β_o	p_{min} [bar]	k [cm ⁻¹]
1	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-7}	-0.25	0.25
2	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-7}	-2.50	1.00
3	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-7}	-10.0	1.50
4	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-6}	-0.25	0.50
5	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-7}	-0.25	0.10

Tab. 2.1 Variation der Ausgangsparameter

2.5.1

Mit $R_o = 5 \cdot 10^{-4}$ cm und $\beta_o = 10^{-7}$ ergibt sich gemäß Gl.(2.40) ein Blasenabstand von $2L = 0.1736$ [cm], entsprechend einer mittleren Blasendichte von $\zeta = 191$ [cm⁻³] mit

$$\beta_o = \frac{4\pi}{3} \zeta R_o^3 \quad .$$

Abb.(2.6) zeigt den zeitlichen Verlauf der Druckabsenkung (Stördruck). Für die einzelnen Blasen erhält man Minima (in [bar], Numerierung von der Aufpunktblase (0) nach außen) von

0	1	2	3	4	5
-0.223	-0.197	-0.146	-0.097	-0.051	-0.006

Damit weiten neben der Aufpunktblase vier Nachbarblasen in jeder Richtung instabil auf. Ihr Verhalten wird in den folgenden vier Abbildungen dargestellt. Jede Kurve bricht ab, sobald die jeweils betrachtete Blase mit der nächstäußeren zusammenwächst ($R(i, t) + R(i + 1, t) = 2L$). Spätestens hier verliert jede für eine Einzelblase aufgestellte Gleichung ihre Bedeutung, da ein mit Wassertropfen behaftetes Kavitationsgebiet vorliegt; dieses Kavitationsgebiet erfüllt auch nicht mehr die Voraussetzung der Kugelsymmetrie.

Entsprechend der Druckverteilung weitet die Aufpunktblase am stärksten auf (Abb. (2.7)); dieses Verhalten trifft ebenfalls auf die Entwicklung des Gasvolumenverhältnisses (Abb.

(2.8)) zu, d.h. das o.a. Abbruchkriterium wird für weiter außen liegende Blasen zu einem jeweils späteren Zeitpunkt erfüllt. Der durch die Umgebungsblasen am Ort $r_* = L$ (bzgl. jeder Einzelblase) induzierte Druck p_{ind} erreicht nach $t = 2 \cdot 10^{-4} s$ seinen Sättigungswert (Abb. (2.9)). Zu diesem Zeitpunkt gilt: $R(0, 2 \cdot 10^{-4} s) \approx 100 R_o$, $\beta(0, 10^{-4} s) \approx 0.1$; zum Vergleich: die Berechnung des Radius der Aufpunktblase wird erst nach $t = 4.2 \cdot 10^{-4} s$ abgebrochen). Der Umgebungsdruck (Summe aus induziertem Druck und Stördruck) ist zusätzlich in Abb. (2.10) dargestellt. Bis zur vollständigen Expansion der äußersten, noch instabil aufweitenden Blase tragen zum Mittelwert des Umgebungsdruckes (2.32) noch Zugspannungen bei, obwohl weiter innen liegende Blasen bereits zusammengewachsen sind. Eine Beschreibung des gesamten, instabilen Volumenbereichs müßte streng die physikalisch korrekte Beschreibung des Kavitationsgebietes einbeziehen. Eine befriedigende Behandlung dieses Gebietes liegt aber bis heute nicht vor. Die mit Hilfe des Impulsatzes berechneten induzierten Drücke sind im wesentlichen von den Geschwindigkeitsfeldern der Umgebungsblasen abhängig. Deshalb werden Blasen, die ihren Maximalradius erreicht haben, vernachlässigt. Da diese mit dem Berühren der Nachbarblasen ihren Charakter als Einzelblase verlieren, sollen sie nicht mehr zum zusätzlich induzierten Druck beitragen. Da schon vor Erreichen des Stördruckminimums ein Zusatzdruck induziert wird, sinkt der Umgebungsdruck insgesamt nicht vollständig auf die o.a. Minima ab. Im Mittel wird bei einer Druckabsenkung auf $p_{min}(r_* = 0) = -2.5 [bar]$ der Umgebungsdruck im Minimum um 11% angehoben. Danach wird die Zugspannung sehr schnell abgebaut. Die Forderung, daß auch bei instationärer Rechnung der Umgebungsdruck auf den Dampfdruck angehoben wird, ist bei weiter außen liegenden Blasen insgesamt besser erfüllt. So bleibt für die Aufpunktblase im Sättigungsfall ein Umgebungsdruck von $p_{ind,st} = -0.05 [bar]$ erhalten, der bei fortschreitender Expansion der Aufpunktblase zu ihren Nachbarblasen nicht mehr interpretiert werden kann. Da im Endstadium der Aufweitung in der Blase praktisch Dampfdruck herrscht, kann eine Druckdifferenz an der Blasenwand nur durch den Oberflächenspannungsterm kompensiert werden. Dieser wird aber schon vor dem Berührungsfall vernachlässigbar klein. Da sich der Sättigungswert iterativ ergibt (in [3] wird der Endwert p_v vorgegeben), kann das Verbleiben einer - noch so geringen - Zugspannung nur im Zusammenhang mit den Modellannahmen diskutiert werden. Mögliche Ursachen hierfür sind, verbunden mit Ergebnissen weiterer Rechnungen, in Kap. 2.5.6 dargestellt.

Neben dem Verhalten der Einzelblase können Angaben über das 'mittlere' Verhalten im Instabilitätsbereich gemacht werden. Hierzu zeigen die Abb. (2.11)...(2.14) die zeitliche Entwicklung von Blasenradius, Gasvolumenverhältnis, induziertem Druck und Umgebungsdruck, jeweils gemittelt über das Volumen der instabil aufweitenden Einzelblasen. Man sieht, daß die Expansion der 'mittleren' Blase bzw. die Zunahme des Gasvolumens abgebremst wird. Der Umgebungsdruck fällt auf ein Minimum von $p_{ind+st} = -0.135 [bar]$ und steigt danach auf $p_{ind+st} = -0.01 [bar]$ an. Damit verbleibt auch bei der Betrachtung der Mittelwerte eine physikalisch unrealistische Zugspannung im Fluid. Der Sättigungswert des insgesamt induzierten Druckes beträgt $p_{ind} = 0.135 [bar]$.

2.5.2

Der Stördruck wird jetzt um einen Faktor 10 stärker als in Kap. 2.5.1 abgesenkt, nämlich

auf $p_{min} = -2.5$ [bar]. Da die übrigen Parameter nicht verändert wurden, bleibt der Blasenabstand von $2L = 0.1736$ [cm] und die mittlere Blasendichte von $\zeta = 191$ [cm⁻³] erhalten. Abb.(2.15) zeigt den zeitlichen Verlauf der Druckabsenkung. Da sowohl für die iterative Berechnung als auch für die Mittelwertbildung alle instabil aufweitenden Blasen berücksichtigt werden müssen, ist zusätzlich die Konstante k auf den Wert $k = 1$ [cm⁻¹] erhöht worden. Für die einzelnen Blasen erhält man Minima (in [bar], Numerierung s.o.) von

0	1	2	3	4	5	6
-2.21	-1.94	-1.47	-1.08	-0.748	-0.469	-0.235

Damit weiten neben der Aufpunktblase sechs Nachbarblasen in jeder Richtung instabil auf. Das Abbruchkriterium ($R(i, t) + R(i+1, t) = 2L$) bleibt für alle weiteren Parametervariationen erhalten. Dies gilt ebenfalls für die Expansion der Aufpunktblase gegenüber den weiter außen liegenden, weniger stark aufweitenden Blasen (Abb.(2.16), (2.17)). Entsprechend der Druckverteilung erreicht die Aufpunktblase nach $t = 1.35 \cdot 10^{-4}$ s ihren Maximalradius von $R(0, t) = 250 \cdot R_o = 0.125$ cm (der erste Blasenkranz: $R(1, t) = 200 \cdot R_o = 0.1$ cm). Dies entspricht einem Gasvolumenverhältnis von $\beta(0, t) = 0.58$ ($\beta(1, t) = 0.4$). Auch der durch die Umgebungsblasen am Ort $r_* = L$ (bzgl. jeder Einzelblase) induzierte Druck p_{ind} erreicht nach ca. $t = 6 \cdot 10^{-5}$ s seinen Sättigungswert (Abb. (2.18); alle aufgeführten Werte werden im Vergleich zu Kap. 2.5.1 ca 70% früher erreicht.

Abb. (2.19) zeigt die Summe aus Stördruck und induziertem Druck: die Anhebung des Umgebungsdruckes bleibt neben dem Abbau der Zugspannung ebenfalls erhalten. So werden bei Erreichen der Stördruckminima die Umgebungsdrücke der instabil aufweitenden Blasen um ca. 25% angehoben; gegenüber Kap. 2.5.1 also ein entsprechend stärkerer Effekt. Die zum Zeitpunkt $t = 1.35 \cdot 10^{-4}$ s erreichten Umgebungsdrücke $p_{ind,st}(0, t) = -0.4$ [bar] bzw. $p_{ind,st}(1, t) = -0.25$ [bar] können nicht als Gleichgewichtswerte für Dampfblasen von $R = 0.1$ cm angesehen werden (s. Kap. 2.5.6).

Abschließend sind in den Abb. (2.20)...(2.23) die zeitliche Entwicklung von Blasenradius, Gasvolumenverhältnis, induziertem Druck und Umgebungsdruck, jeweils gemittelt über das Volumen der instabil aufweitenden Einzelblasen, dargestellt. Die Dämpfung der Blasen aufweitung zeigen im einzelnen Abb.(2.20) (Radienentwicklung) bzw. Abb.(2.21) (Gasvolumenverhältnis). Der Umgebungsdruck fällt entsprechend der stärkeren Absenkung im Mittleren auf ein Minimum von $p_{ind+st} = -0.8$ [bar] (Abb.2.22); der Sättigungswert des im Mittel induzierten Druckes beträgt $p_{ind} = 0.88$ [bar] (Abb.2.23).

2.5.3

Gegenüber Kap. 2.5.1 und 2.5.2 wird nun eine deutlich stärkere Absenkung des Stördruckes betrachtet, nämlich $p_{min} = -10$ [bar] (Abb.2.24). Die Konstante k wird auf den Wert $k = 1.5$ [cm^{-1.5}] erhöht (s.o.); hierdurch bleibt nicht zuletzt die Rechenzeit der Programme in einem vertretbaren Rahmen. Für die einzelnen Blasen erhält man Minima (in [bar], Numerierung s.o.) von

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-8.66	-7.48	-5.53	-4.04	-2.88	-1.99	-1.30	-0.776	-0.369	-0.055

Damit weiten neben der Aufpunktblase acht Nachbarblasen in jeder Richtung instabil auf (s. Abb. (2.25),(2.26)). Entsprechend der Druckverteilung erreicht die Aufpunktblase bereits nach $t = 7.1 \cdot 10^{-5} s$ ihren Maximalradius, der durch die Umgebungsblasen am Ort $r_* = L$ (bzgl. jeder Einzelblase) induzierte Druck p_{ind} (Abb.(2.27) nimmt nach ca. $t = 3.5 \cdot 10^{-5} s$ seinen Sättigungswert an. Der Vergleich zwischen Aufpunktblase und den Blasen des ersten Kranzes bei $t = 6 \cdot 10^{-5} s$ liefert $R(0, t) = 0.1 cm$ gegenüber $R(1, t) = 0.08 cm$; dem entspricht ein Gasvolumenverhältnis von $\beta = 0.46$ bzw. 0.28 . Abb. (2.28) zeigt die Summe aus Stördruck und induziertem Druck; die Anhebung des Umgebungsdruckes steigt deutlich gegenüber den Druckanhebungen auf $p_{min}(r_* = 0) = -2.5 [bar]$ bzw. $p_{min}(r_* = 0) = -0.25 [bar]$ an. So wird für die Aufpunktblase bei Erreichen des Minimums bereits ein Druck von $p_{ind} = 4.1 [bar]$ induziert, entsprechend einem (relativen) Zugspannungsabbau von über 45% (zum Vergleich: Abbau der Zugspannung von $2.21 [bar]$ auf $1.62 [bar]$ (-27%) in 2.5.4).

Die über den Instabilitätsbereich gemittelte zeitliche Entwicklung von Blasenradius, Gasvolumenverhältnis, induziertem Druck und Umgebungsdruck zeigen die Abb.(2.29)...(2.32). Das Anwachsen von Blasenradius und Gasvolumenverhältnis wird deutlich abgeschwächt.

Wie schon zuvor ausgeführt, ist die Anhebung des Umgebungsdruckes auf den Dampfdruck für weiter innen liegende Blasen weniger gut erfüllt. Die in der Umgebung der innersten Blasen verbleibenden Zugspannungen sind umso größer, je stärker der Stördruck abgesenkt wird. Bei $p_{st} = -10 [bar]$ ist der Sättigungswert $p_{ind,st} = -1.45 [bar]$ des Umgebungsdruckes als unrealistisch zu bezeichnen. Die Mittelwerte in den Abb.(2.31),(2.32) steigen daher erst mit zunehmender Zahl sich berührender Blasen an.

2.5.4

Wir betrachten ein Anfangsgasvolumenverhältnis von $\beta_o = 10^{-6}$ (Erhöhung um den Faktor 10 gegenüber Kap. 2.5.1). Bei gleichen Anfangsradien steigt die Blasendichte auf $\zeta = 1910 cm^{-1}$ und der Blasenabstand verringert sich auf $L = 8.06 \cdot 10^{-2} cm$ (Faktor $10^{-1/3}$). Mit $k = 0.5 cm^{-1}$ ergeben sich die örtlichen Druckminima

0	1	2	3	4
-0.225	-0.201	-0.153	-0.108	-0.064

Neben der Aufpunktblase weiten vier Nachbarblasen instabil auf.

Die Aufpunktblase erreicht ihren Maximalradius $R(0, t)/R_o = 114$ nach $t = 2 \cdot 10^{-4} s$ (Abb. 2.34), das Gasvolumenverhältnis beträgt zu dieser Zeit $\beta(0, t) = 0,6$ (Abb.2.35). Gegenüber Kap 2.5.1 werden diese Maxima ca. 46% früher erreicht. Dies entspricht, da die Druckminima (Abb. (2.33),(2.6)) nahezu übereinstimmen, dem o.a. Faktor $10^{-1/3}$ für das Erreichen des Berührungsfalles ($L/R = 81$ gegenüber $L/R = 171$ in Kap. 2.5.1). Im Abstand $r_* = L$ der Aufpunktblase wird ein Sättigungsdruck von $p_{ind} = 0.2 [bar]$ induziert (Abb. 2.36), damit verbleibt ein Umgebungsdruck von $p_{st,ind} = -0.02 [bar]$. In den Abb.

(2.38)...(2.41) ist die zeitliche Entwicklung der Mittelwerte von R/R_o , β/β_o , p_{ind} und $p_{st,ind}$ dargestellt.

2.5.5

Die Erhöhung des Anfangsradius' $R_o = 2 \cdot 10^{-3} cm$ senkt bei gleichem Anfangsgasvolumen die Dichte der Blasen auf $\zeta = 2.98 cm^{-3}$ (Faktor 4^{-3}); der Blasenabstand vergrößert sich auf $2L = 0.695 cm$. Die Konstante k wurde deshalb auf $k = 0.1 cm^{-1}$ erniedrigt, so daß insgesamt drei Blasen instabil aufweiten. Der Anfangsluftdruck in der Blase erniedrigt sich auf $p_{Lo} = 1.0495 [bar]$ gegenüber $p_{Lo} = 1.0495 [bar]$ (alle anderen Fälle). Für die Stördrücke ergibt sich (Nomenklatur s.o.)

0	1	2
-0.207	-0.166	-0.088

Bei sonst unveränderten Parametern wird die Aufweitung der im Vergleich zu Kap. 2.5.1 größeren Blasen erheblich stärker abgeschwächt. Die Aufpunktblase erreicht nach $t = 5 \cdot 10^{-4} s$ die Werte $R(0, 5 \cdot 10^{-4} s) = 75 R_o$, $\beta(0, 5 \cdot 10^{-4} s) = 0.036$ (Abb.(2.43),(2.44)). Beide werden in Kap. 2.5.1 übereinstimmend zur Zeit $t \approx 1.4 \cdot 10^{-4} s$ angenommen.

Der Umgebungsdruck (Abb.(2.45),(2.46)) erreicht ein Minimum von $p_{ind,st} = -0.18 [bar]$ ($r_* = 0$) und liegt damit über dem vergleichbaren Wert von $p_{ind,st} = -0.21 [bar]$ (mit $r_* = 0$, Kap. 2.5.1). Dies ist, verbunden mit einem insgesamt geringeren Zugspannungsabbau, konsistent mit der stärkeren Dämpfung des Aufweitungsprozesses. Das gleiche Verhalten geht aus der zeitlichen Entwicklung der Mittelwerte (Abb(2.47)...(2.50)) hervor.

2.5.6 Wertung der vorangegangenen Beispiele

Die zuvor dargestellten Ergebnisse haben gezeigt, daß mit dem Gleichungssystem (2.24) der Zugspannungsabbau qualitativ beschrieben werden kann; die iterative Lösung gibt jedoch den Anstieg des Umgebungsdruckes auf $p = p_v$ nur bedingt wieder. Ohne dieses Verhalten wird - rein strömungsmechanisch - die Druck-Dichte-Beziehung nicht korrekt beschrieben. Landau und Lifschitz [6] bezeichnen es in diesem Zusammenhang als unmöglich, mit makroskopisch-strömungsmechanischen Methoden eine Formel aufzustellen, die die Eigenschaften einer Flüssigkeit quantitativ beschreibt, da die Eigenschaften der Molekülwechselwirkungen stark von der konkreten Natur der Flüssigkeit abhängen. Insbesondere kann nicht explizit angegeben werden, in welchem Umfang expandierende Nachbarblasen berücksichtigt werden müssen, deren Geschwindigkeitsfelder an einem bestimmten Ort r_* zusätzliche Drücke induzieren. Die alleinige Einbeziehung der unmittelbaren Nachbarblasen führt deshalb bei stärker treibenden Drücken zu einer entsprechend höheren (verbleibenden) Zugspannung, da die Vernachlässigung weiter außen liegender Blasen immer weniger gerechtfertigt wird. Deshalb wird untersucht, inwieweit der Sättigungswert des Umgebungsdruckes von dem Faktor 3.2 der Berücksichtigung des Einflusses der Umgebungsblasen (im folgenden mit E bezeichnet; s.S. 11, Abb.(3.2)) abhängt.

Für die Parametervariation Nr.2 ($p_{min} = -10 [bar]$, stärkster treibender Druck) wurden Rechnungen mit $E = 10, 15, 20, 25, 30$ und 35 durchgeführt. Die Ergebnisse zei-

gen die Abb. (2.51)..(2.66). Da der induzierte Druck mit E steigt, wird die Blasen-
aufweitung entsprechend stärker abgeschwächt. Damit verbunden ist der zunehmende An-
stieg des Umgebungsdruckes. Sowohl sein Minimum als auch die erreichten Endwerte neh-
men mit E zu. Im Fall $E = 35$ beträgt letzterer $p_{umg} = -0.18 \text{ [bar]}$. Dies ist ge-
genüber $p_{umg} = -1.6 \text{ [bar]}$ ($E = 3.22$) eine deutliche Verbesserung; es wird jedoch
noch kein Dampfdruck erreicht. Insbesondere zeigt dieser Wert, daß (mindestens) die in-
duzierten Drücke von Blasen des dritten Kranzes heranzuziehen sind, um eine wei-
tere Anhebung des Umgebungsdruckes zu erzielen. Dies ist zwar nicht unrealistisch,
da eine sehr starke Druckabsenkung betrachtet wird, zeigt aber gleichzeitig die Gren-
zen des Modells auf. Selbst bei Aufstellung einer Funktion, die jedem Wert p_{min} des Aus-
gangsstördruckes einen Wert E zuordnet, kann gegenüber [3] keine entscheidende Verbes-
serung erzielt werden.

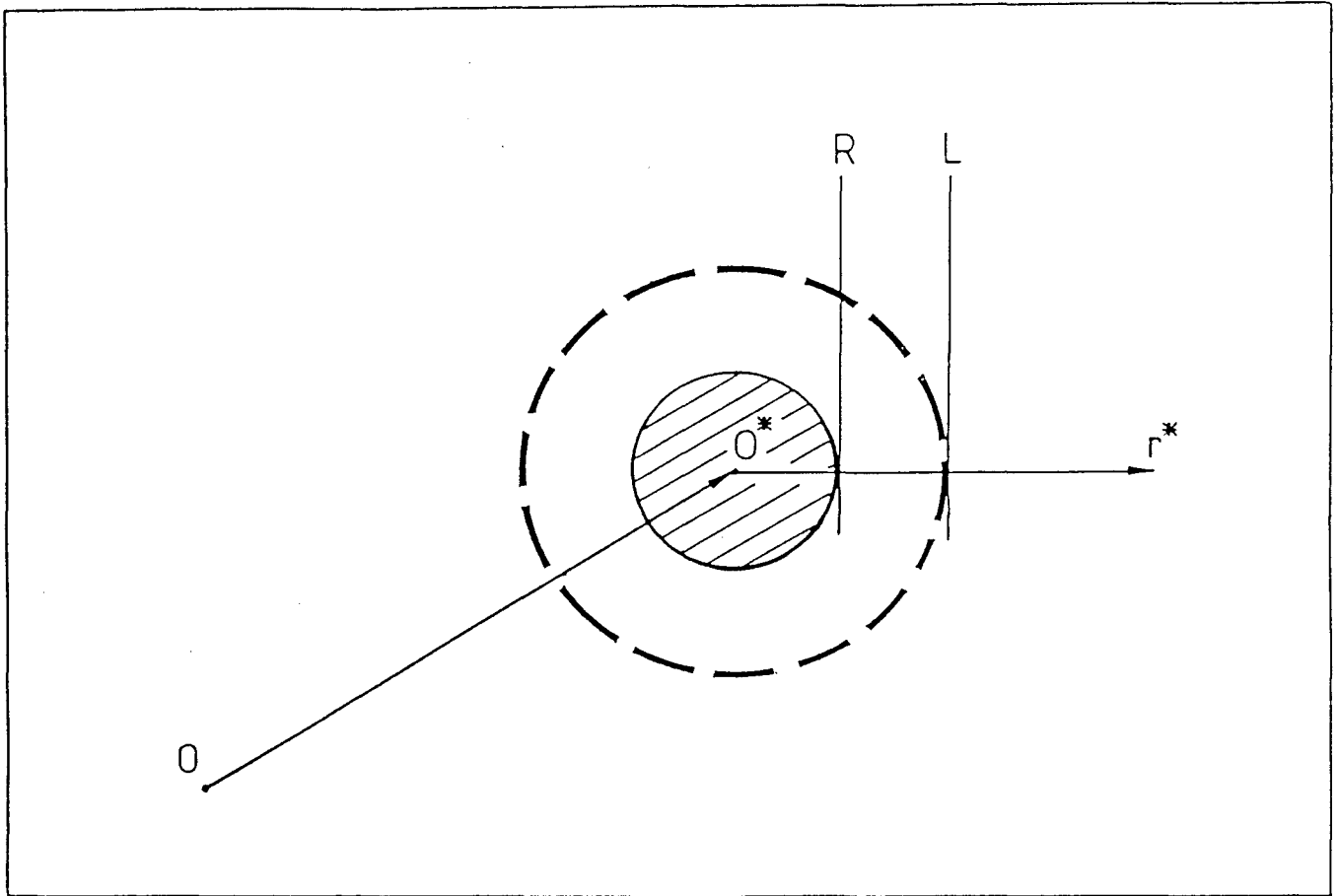


Abb.(2.1)

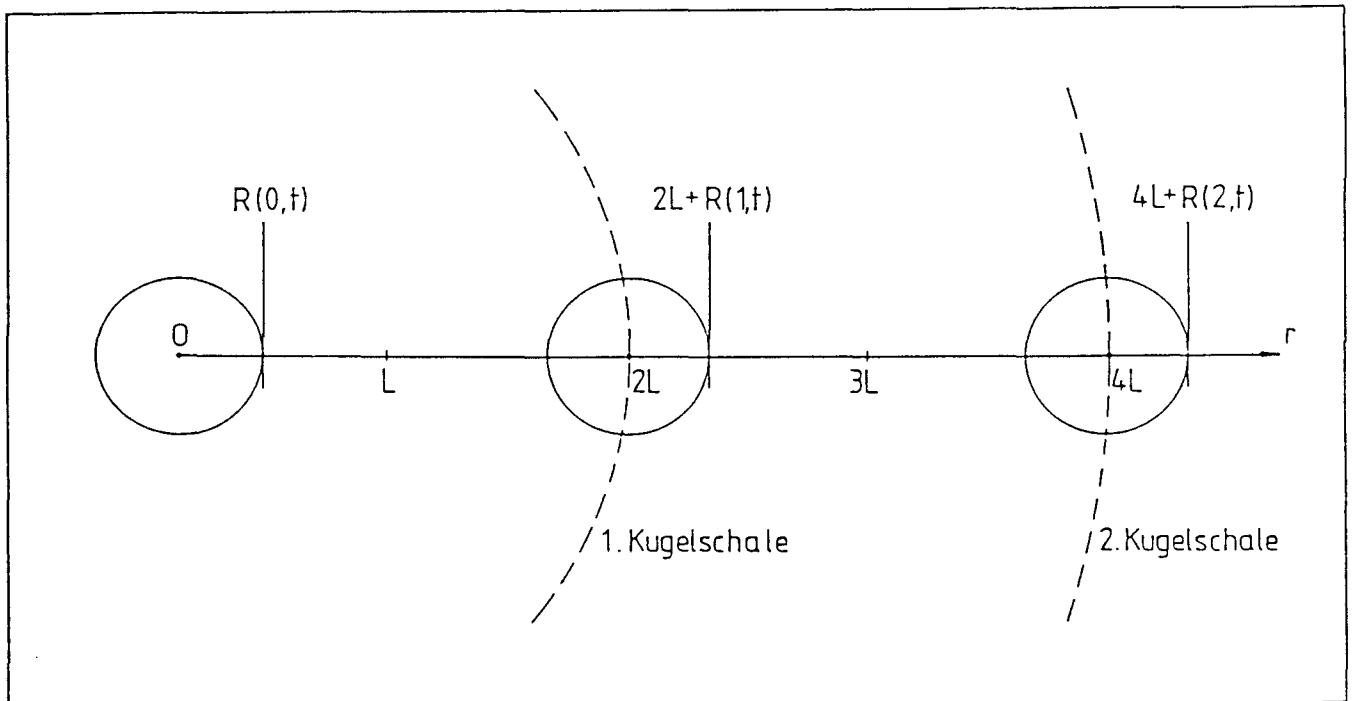


Abb.(2.2)

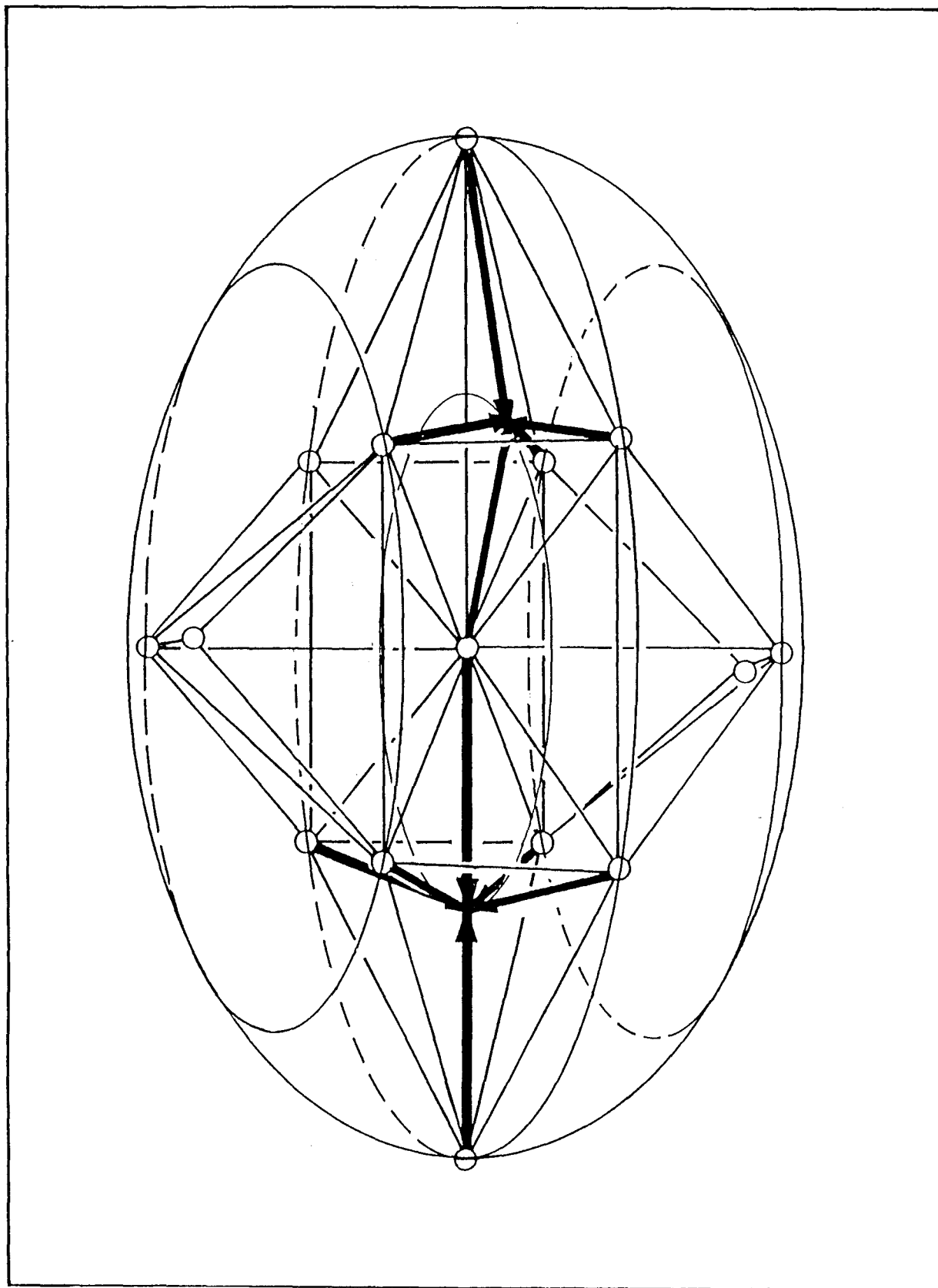


Abb.(2.4)

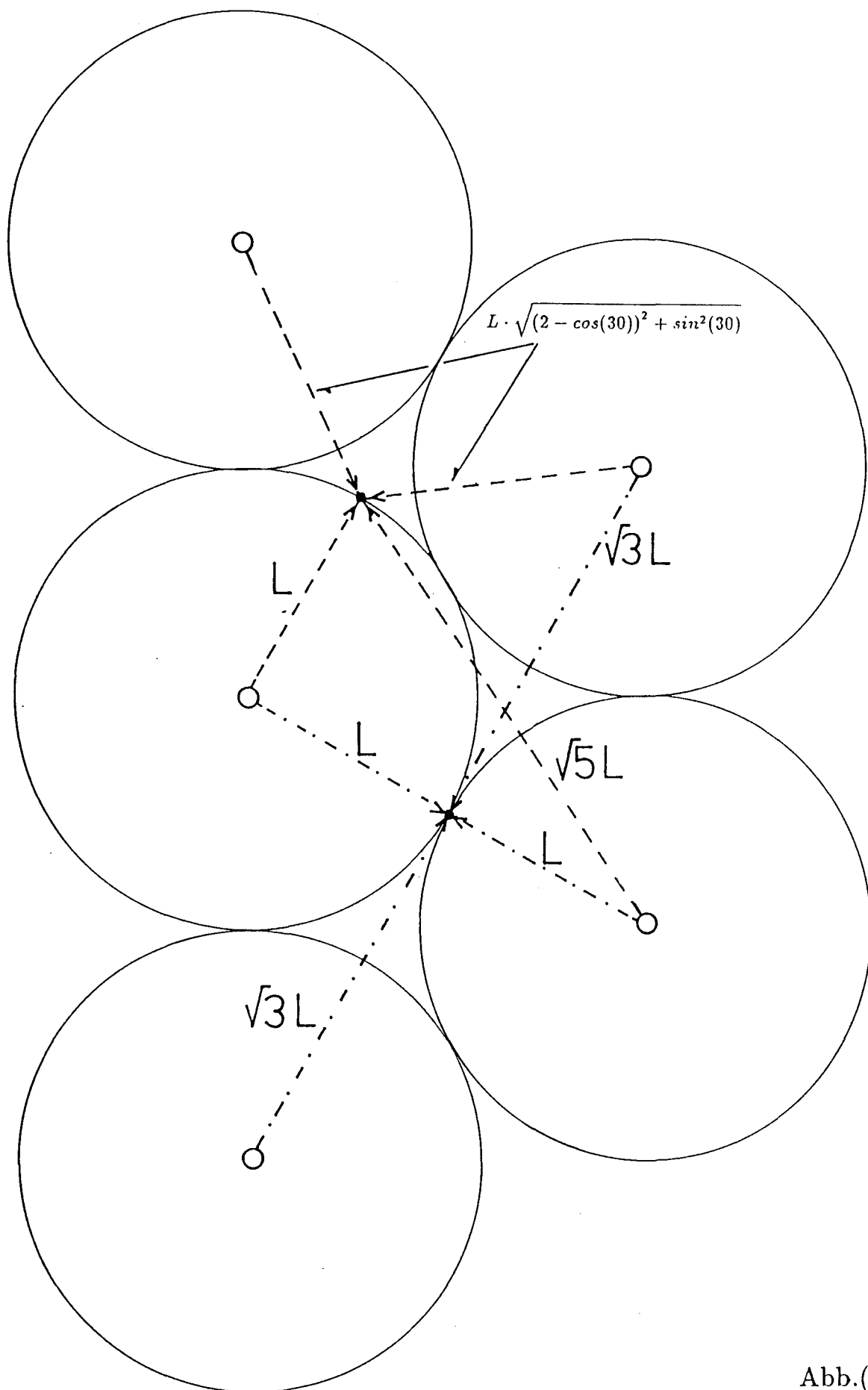


Abb.(2.5)

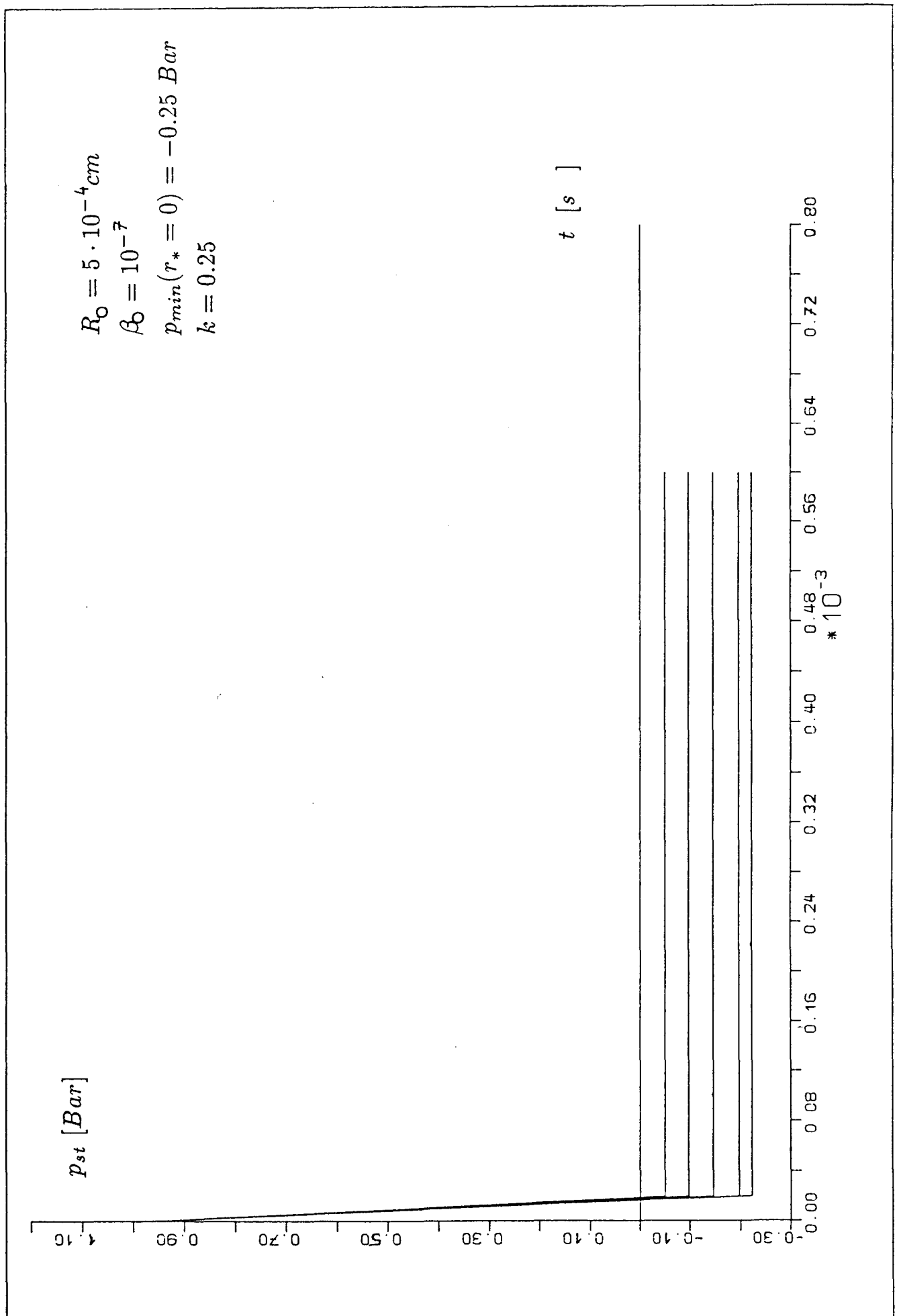


Abb.(2.6): Druckabsenkung (2.4.1)

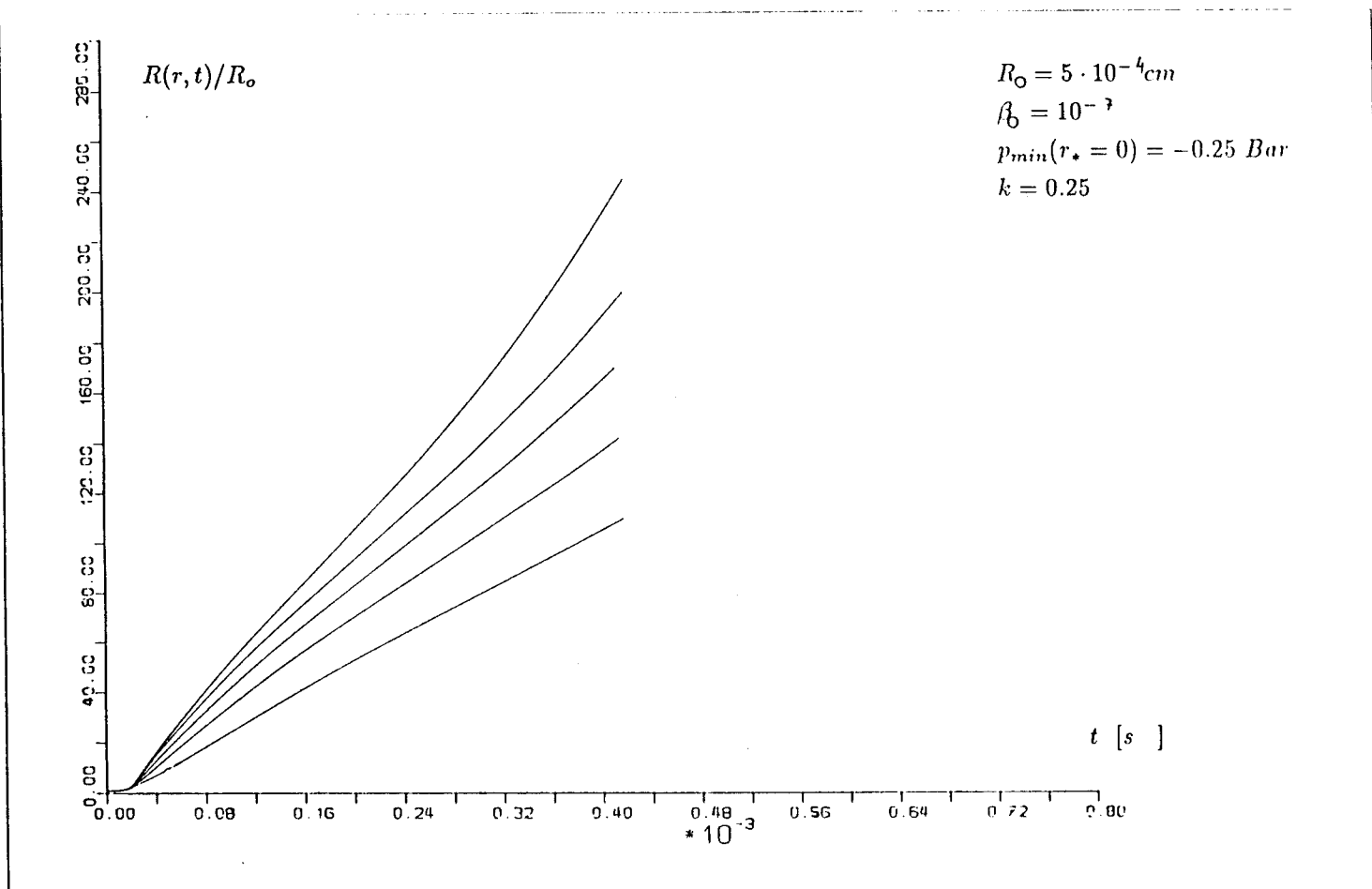


Abb.(2.7): Radienentwicklung (2.4.1)

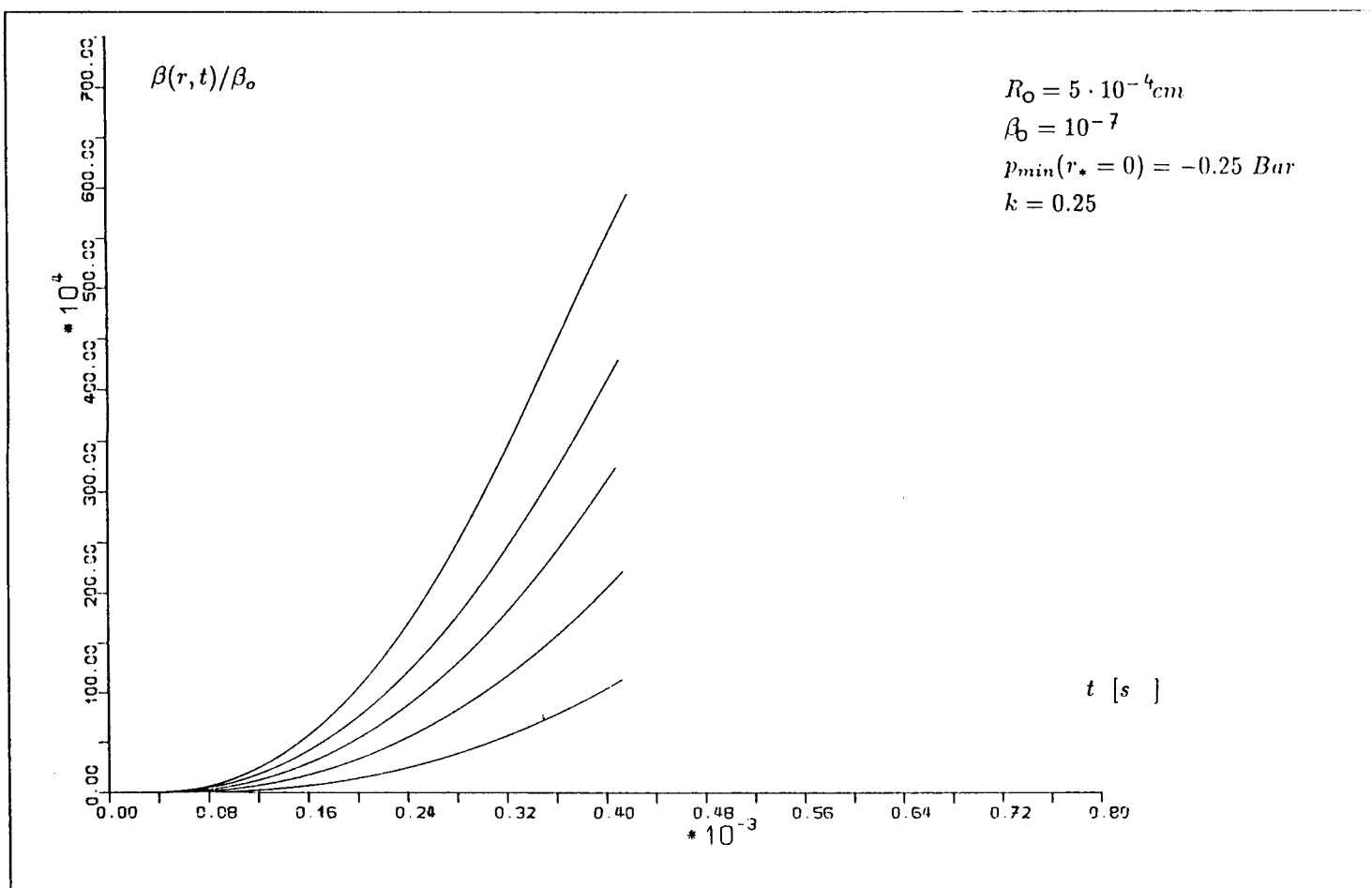


Abb.(2.8): Gasvolumenverhältnis (2.4.1)

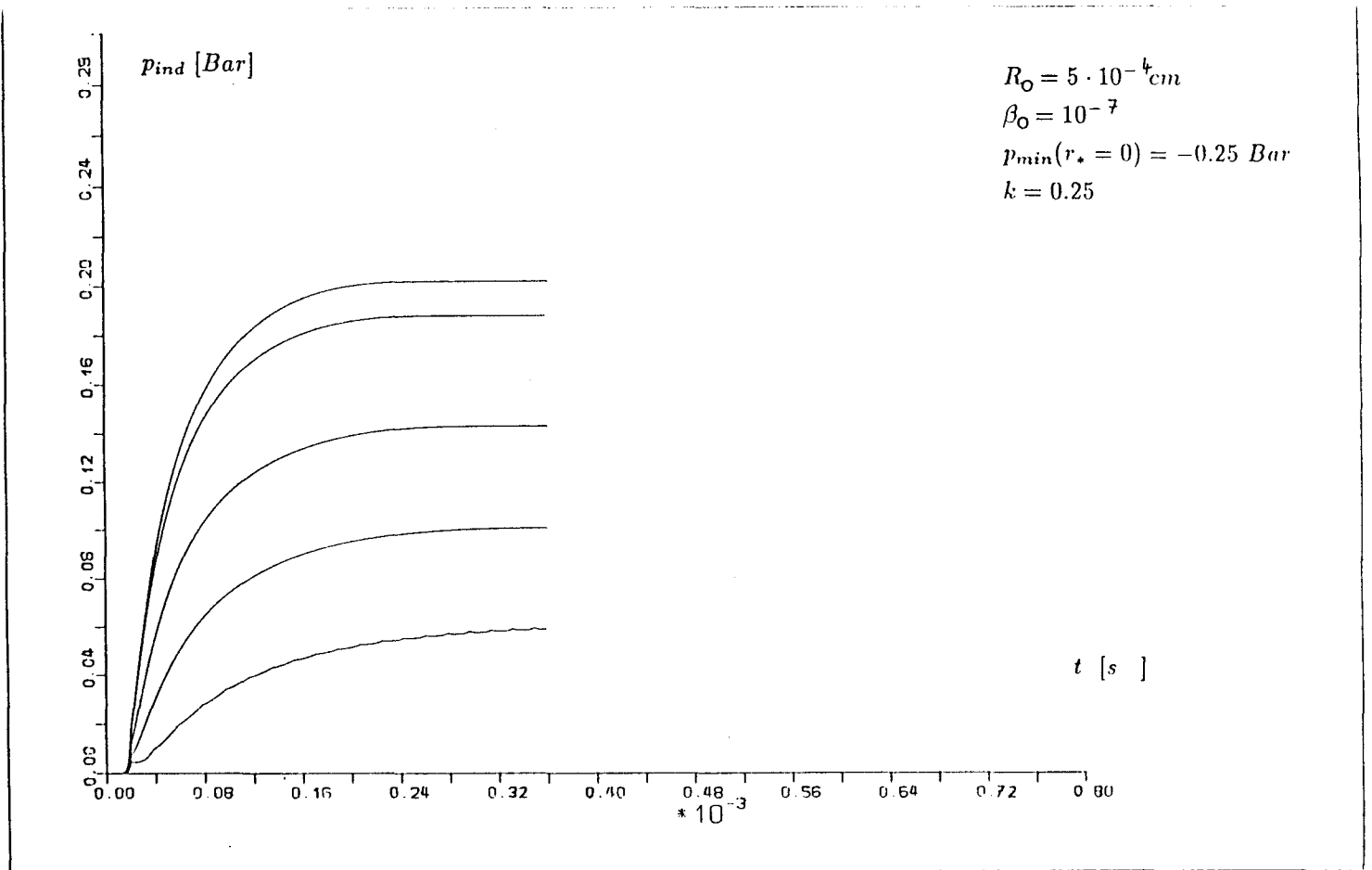


Abb.(2.9): Induzierter Druck (2.4.1)

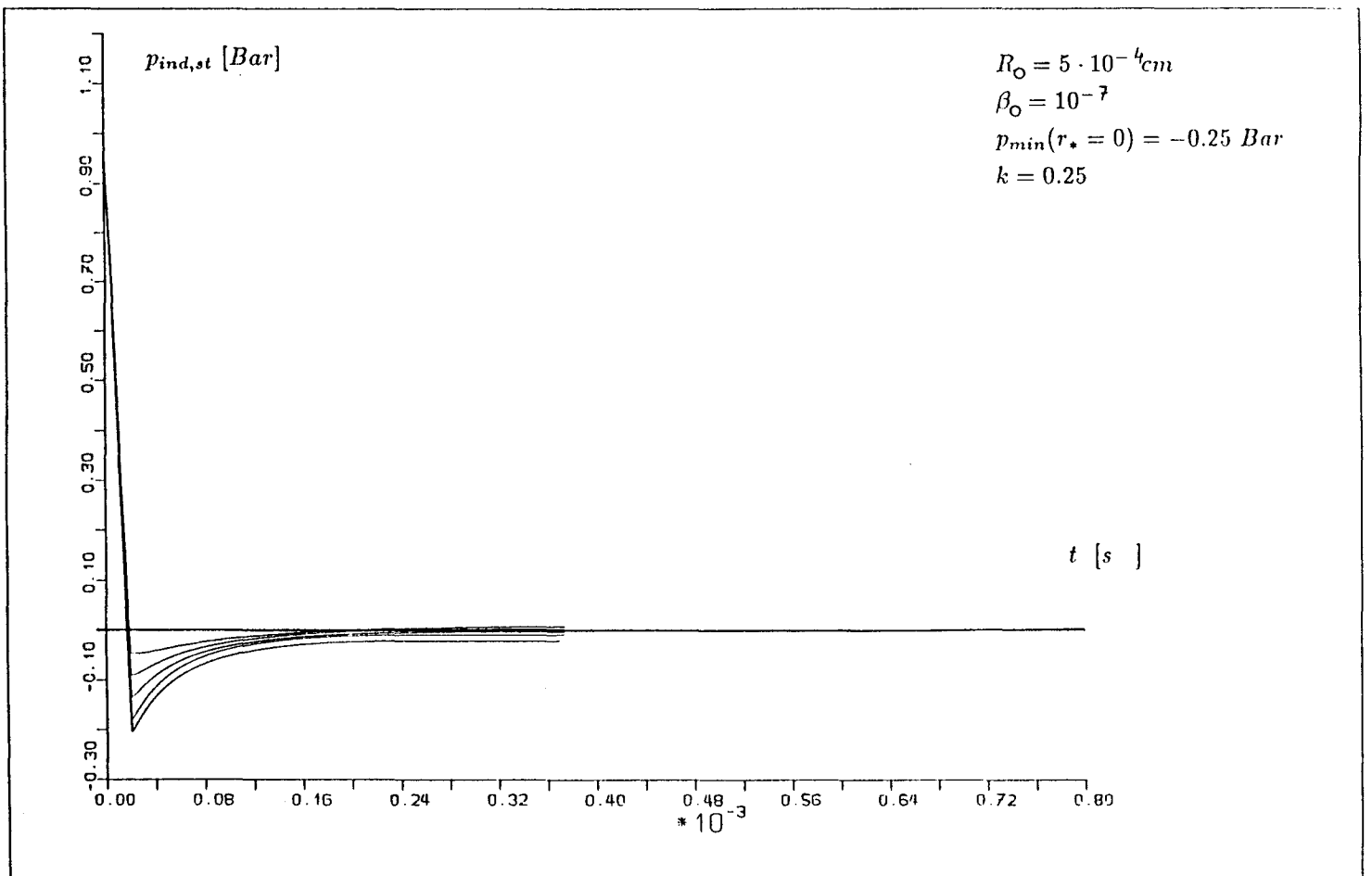


Abb.(2.10): Umgebungsdruck (2.4.1)

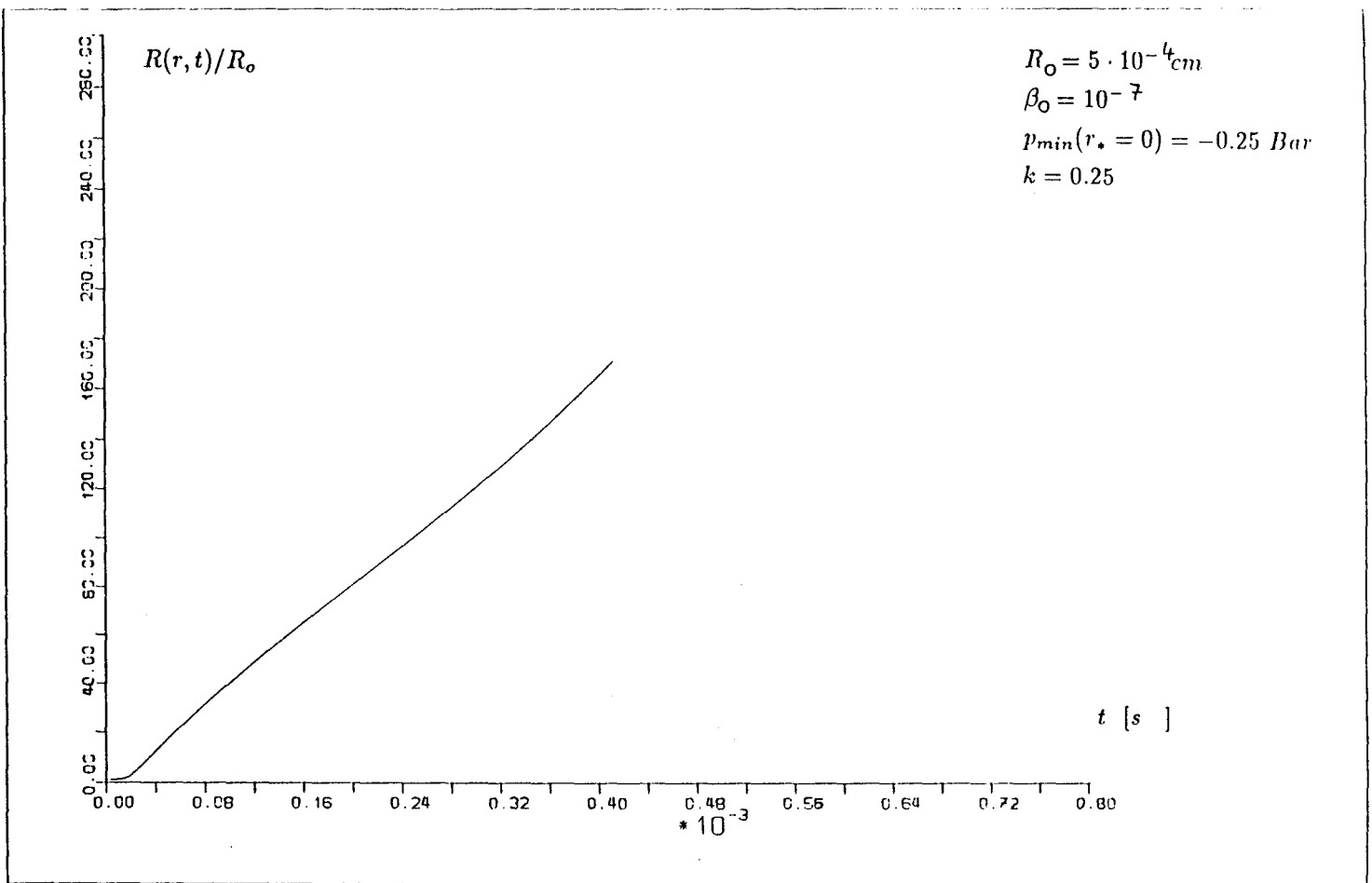


Abb.(2.11): Radienentwicklung (Mittelwert) (2.4.1)

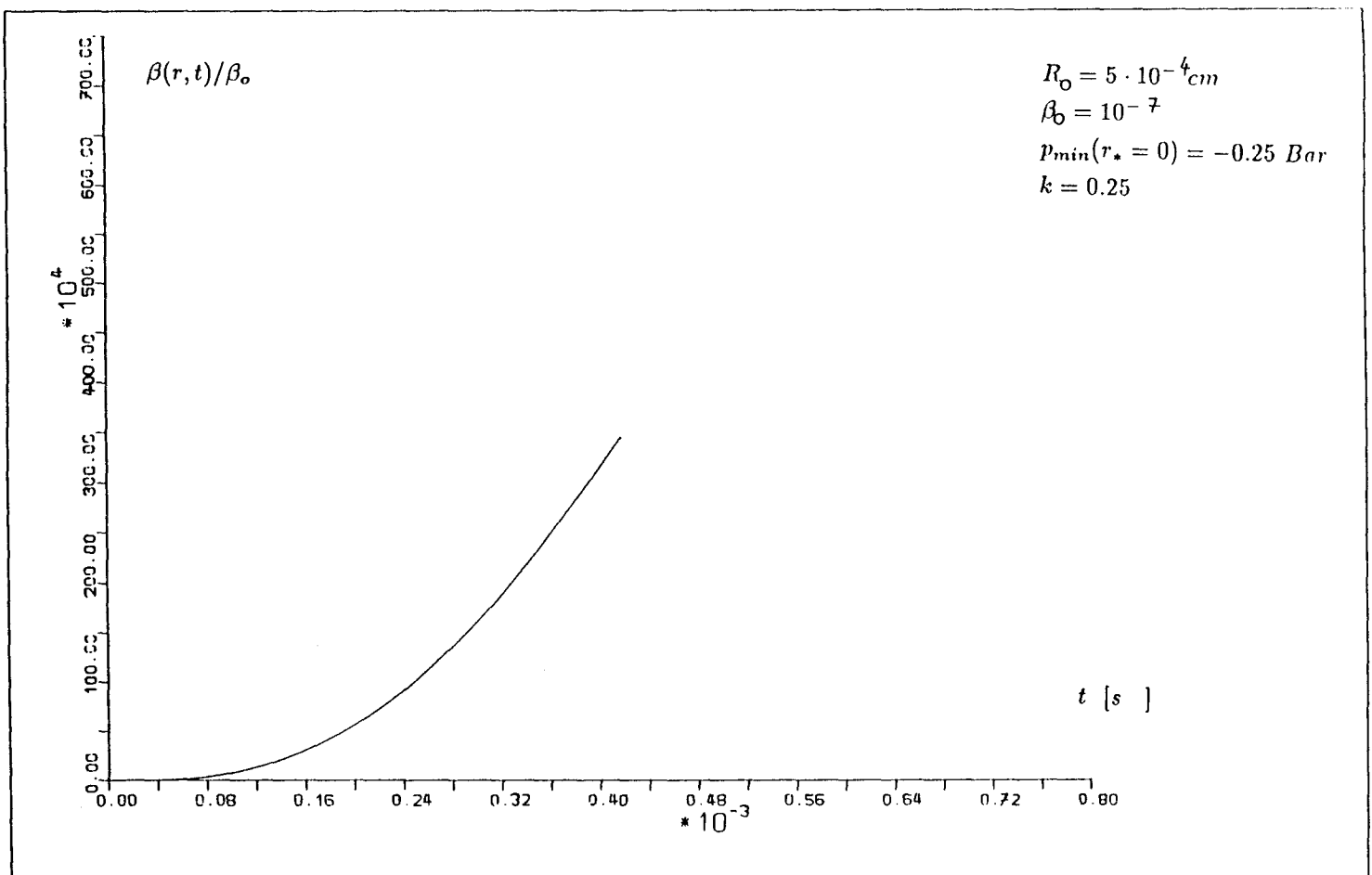


Abb.(2.12): Gasvolumenverhältnis (Mittelwert) (2.4.1)

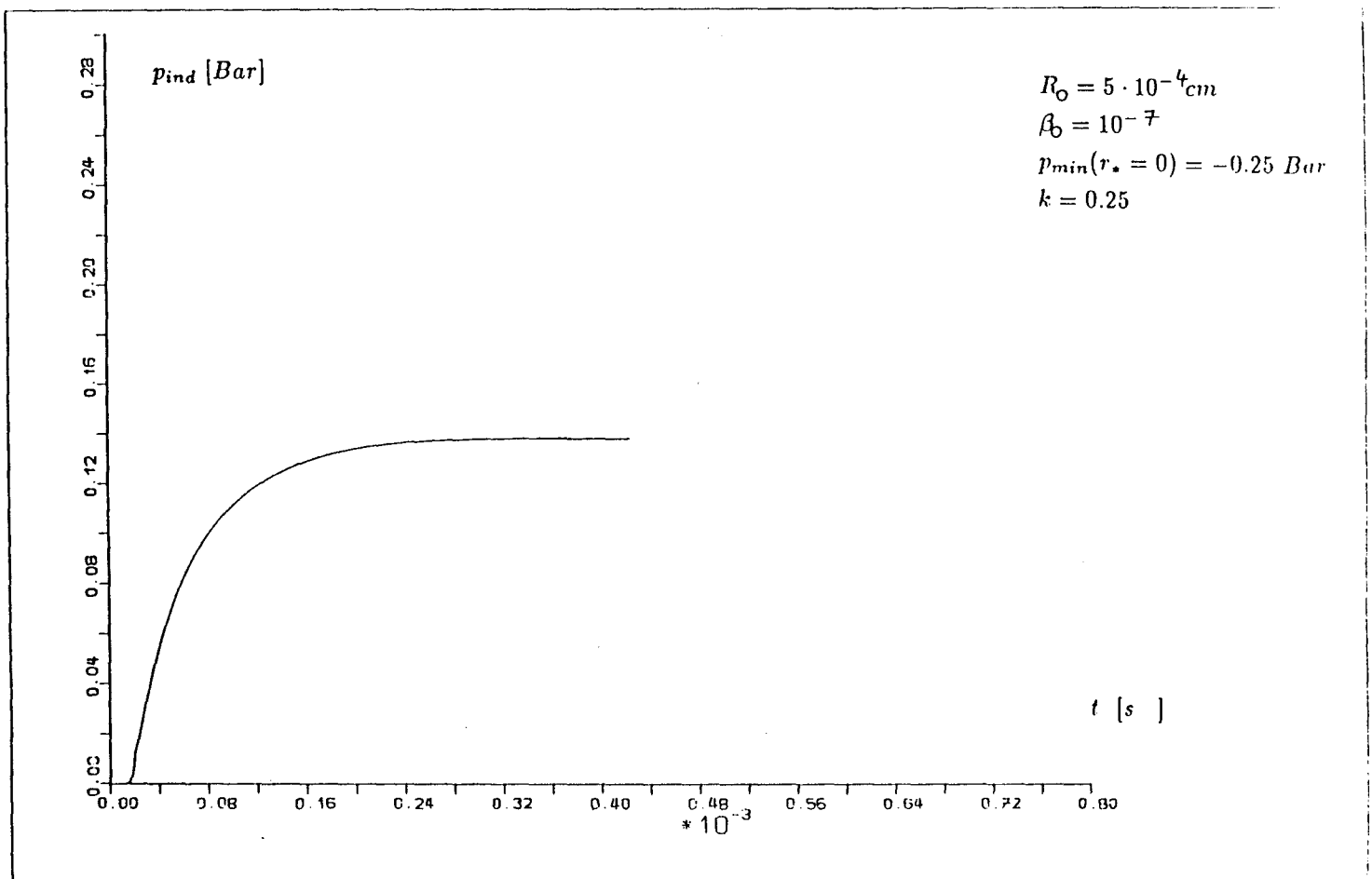


Abb.(2.13): Induzierter Druck (Mittelwert) (2.4.1)

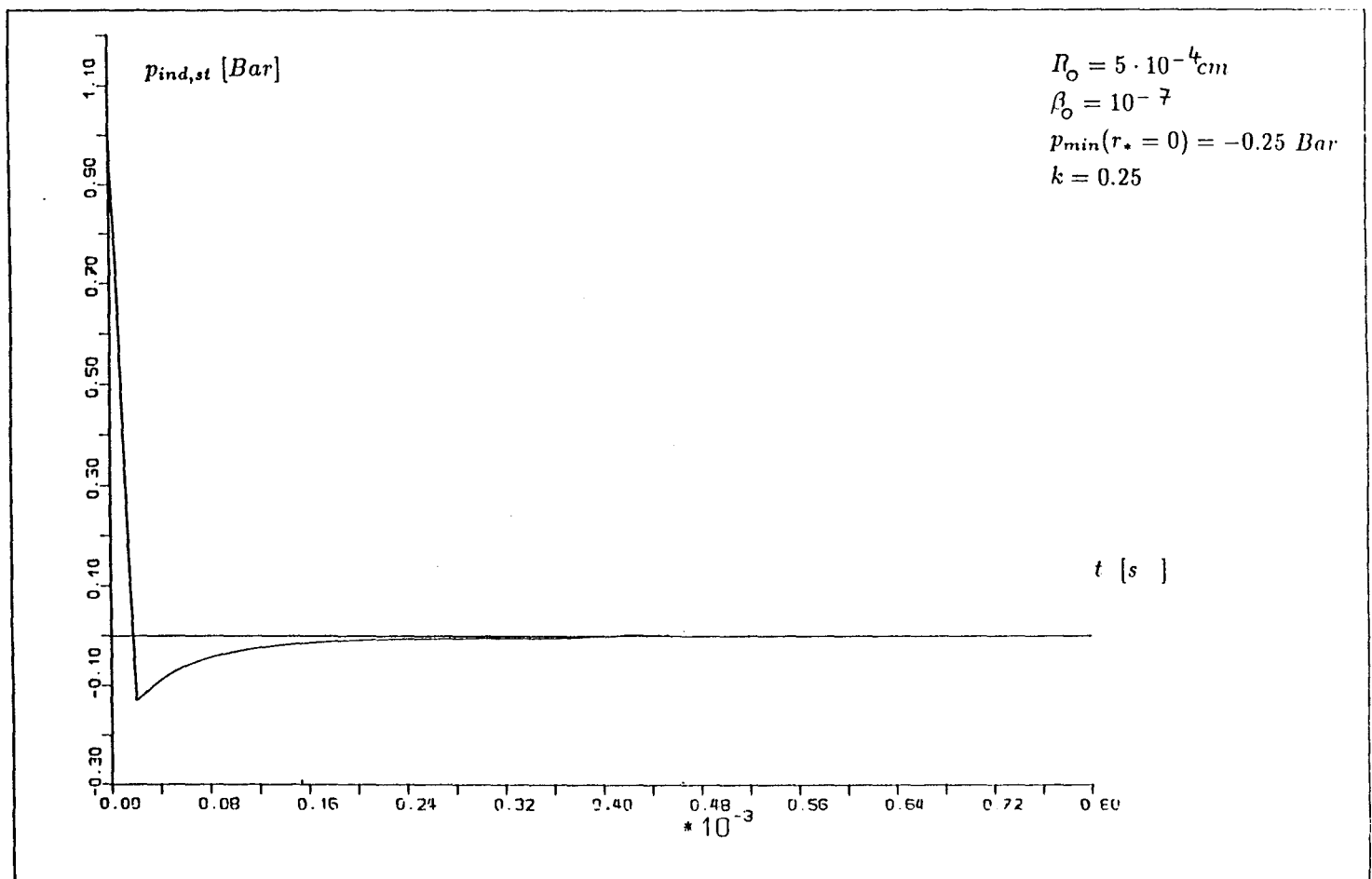


Abb.(2.14): Umgebungsdruck (Mittelwert) (2.4.1)

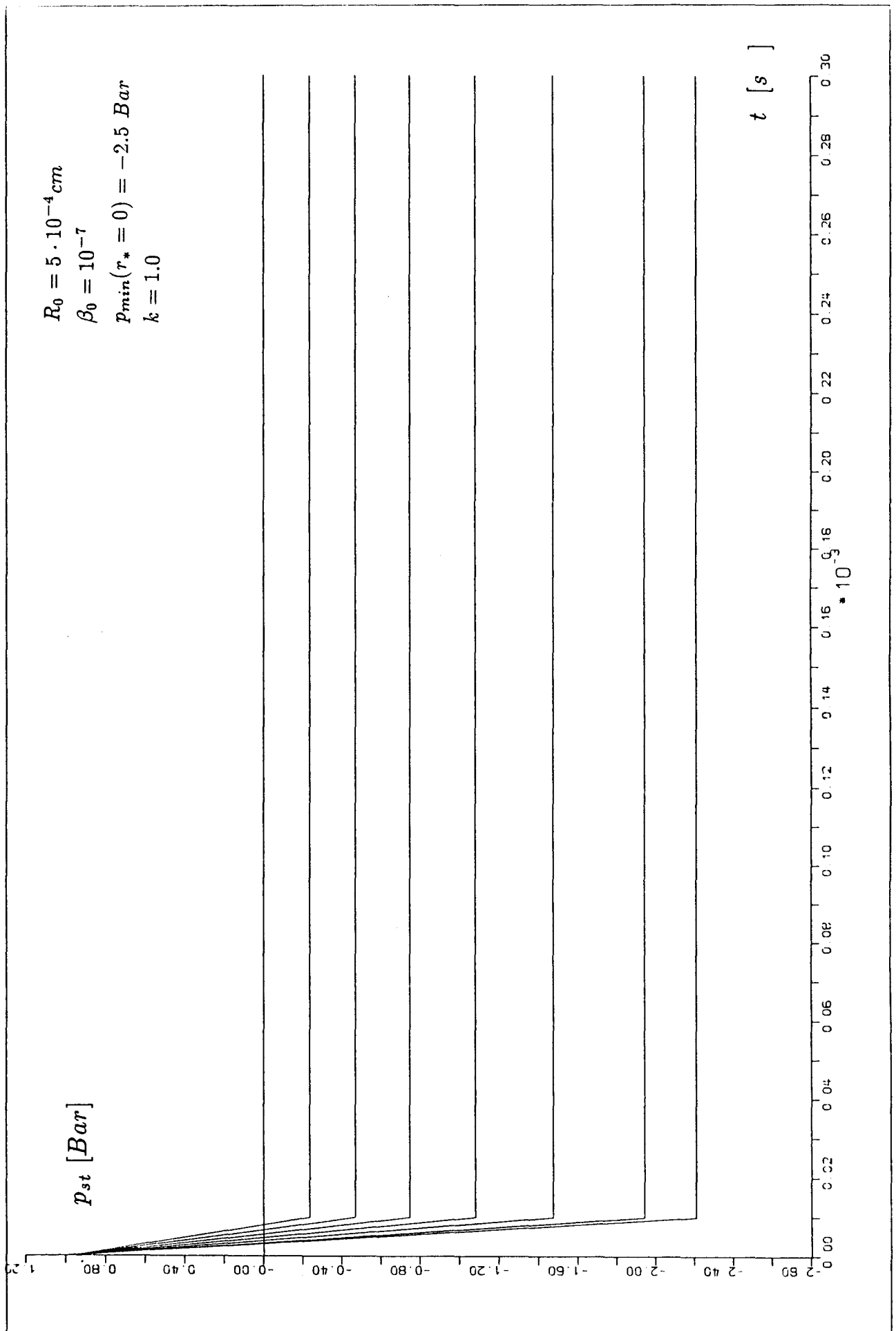


Abb.(2.15): Druckabsenkung (2.4.2)

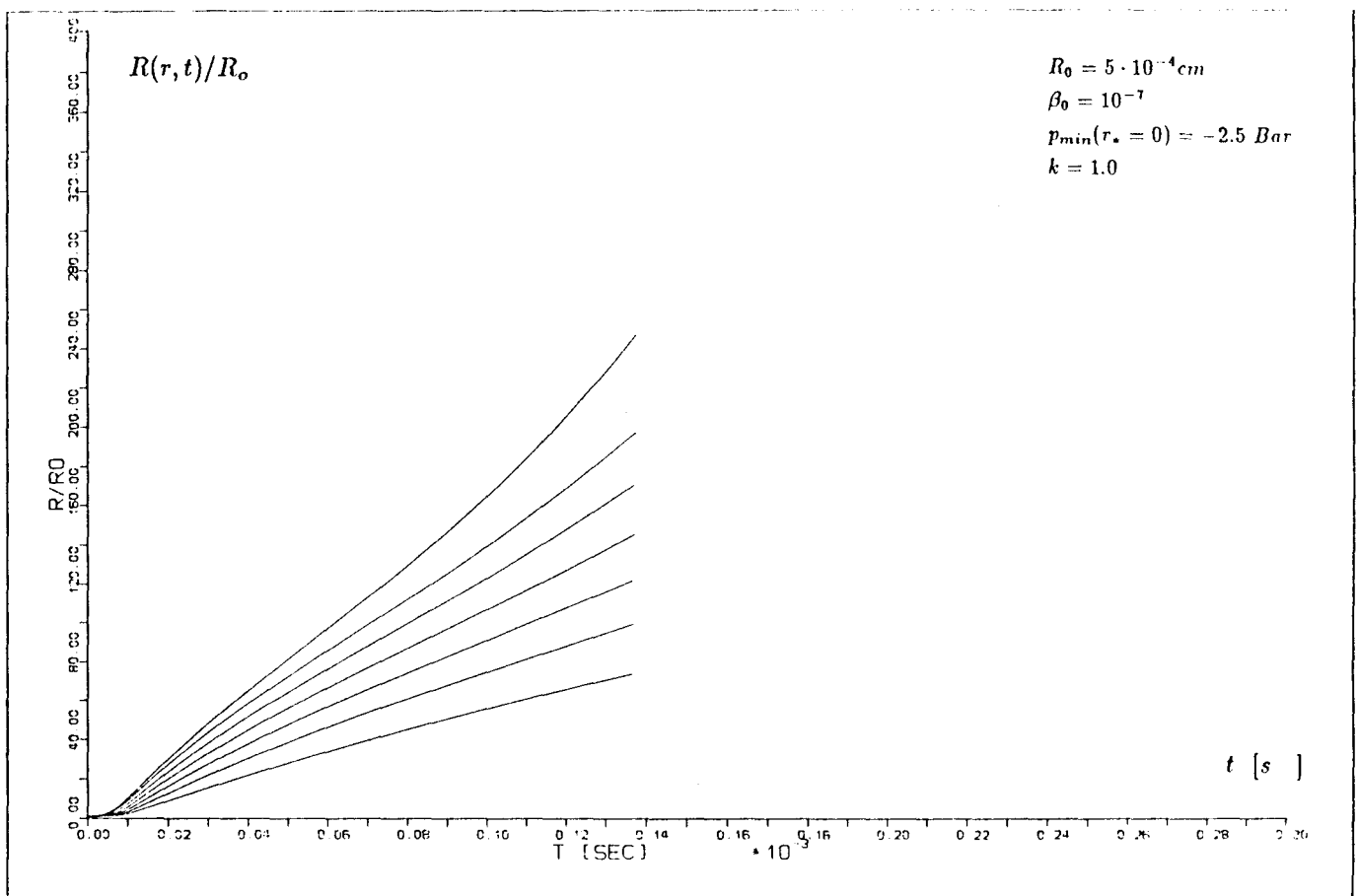


Abb.(2.16): Radienentwicklung (2.4.2)

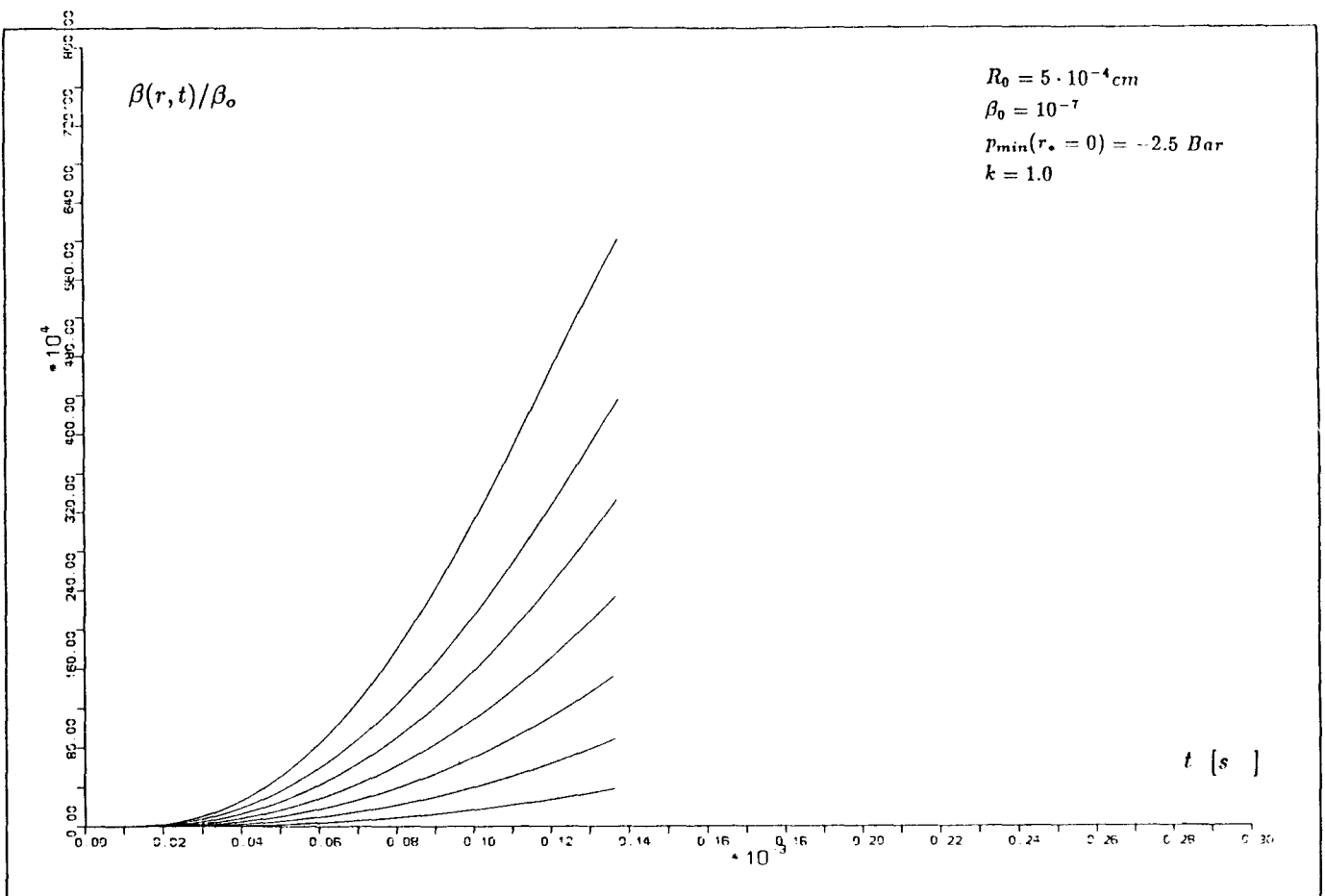


Abb.(2.17): Gasvolumenverhältnis (2.4.2)

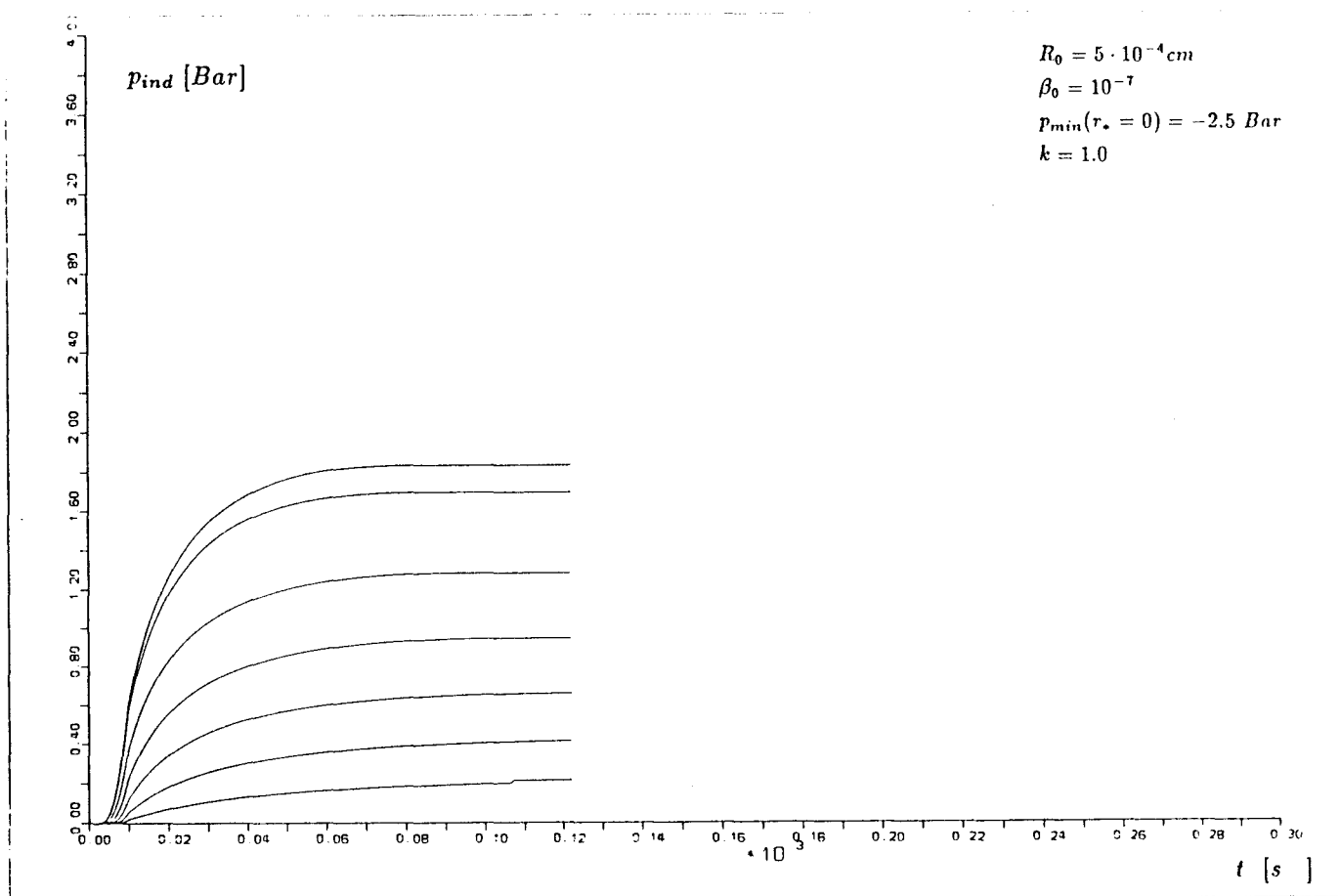


Abb.(2.18): Induzierter Druck (2.4.2)

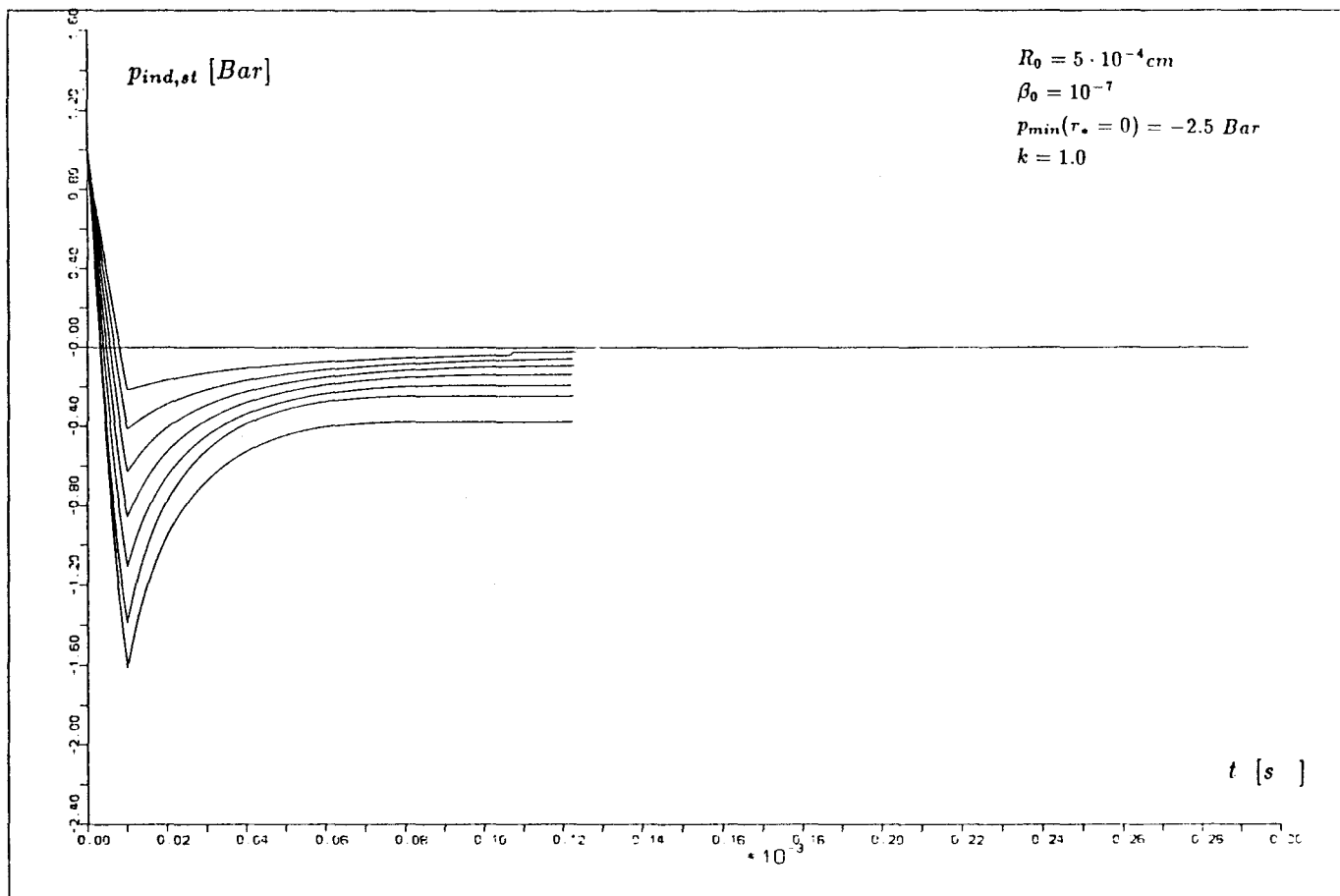


Abb.(2.19): Umgebungsdruck (2.4.2)

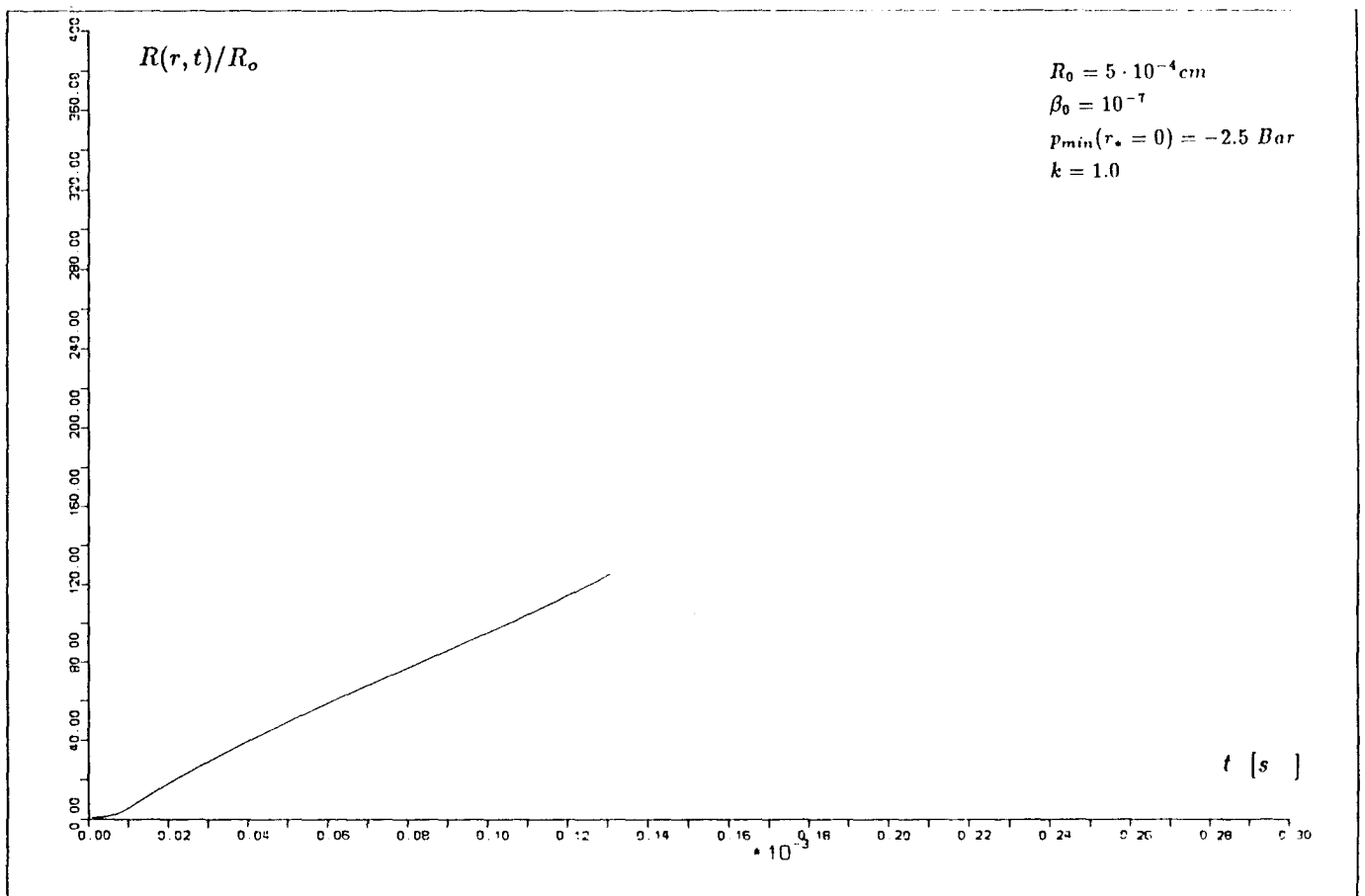


Abb.(2.20): Radientwicklung (Mittelwert) (2.4.2)

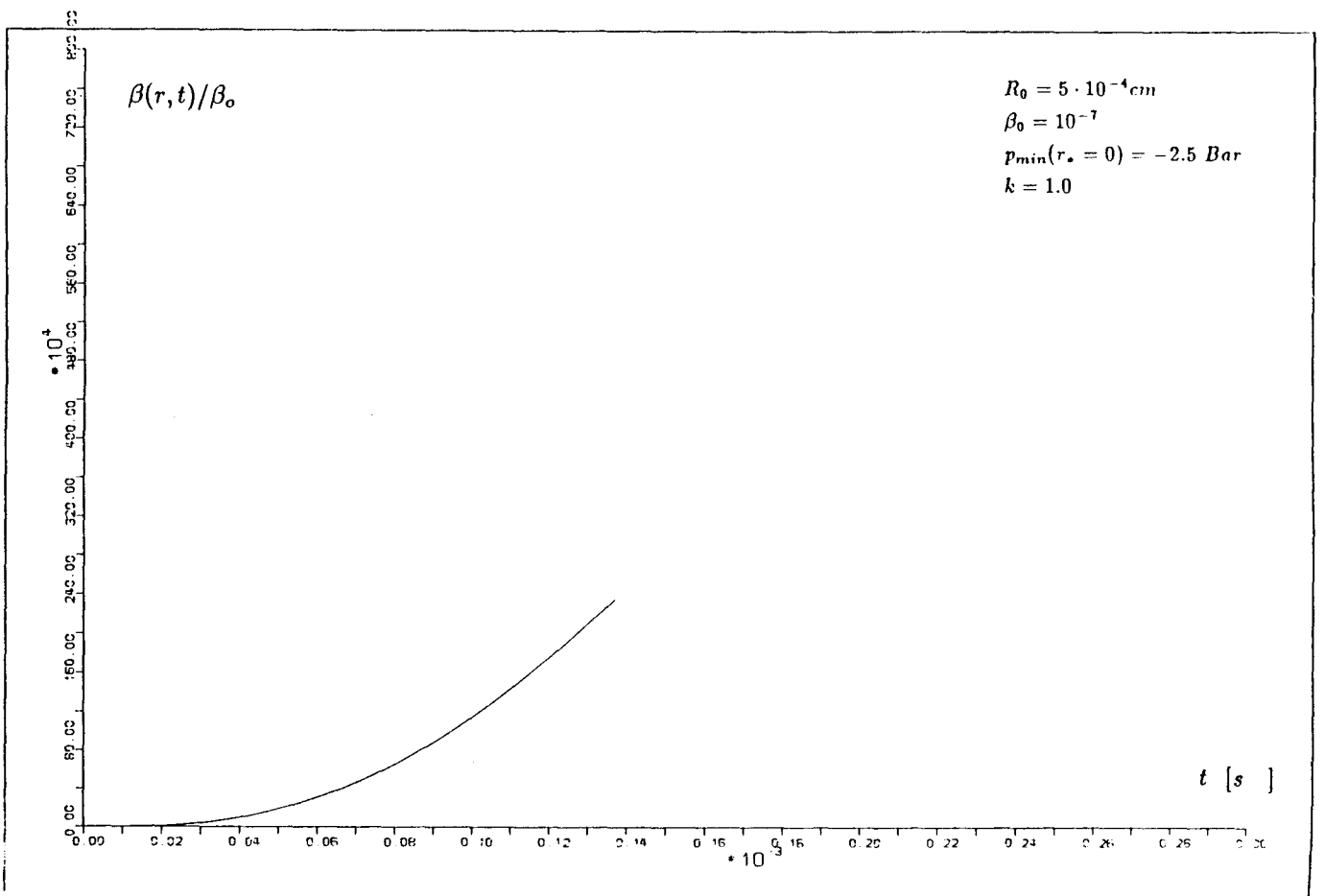


Abb.(2.21): Gasvolumenverhältnis (Mittelwert) (2.4.2)

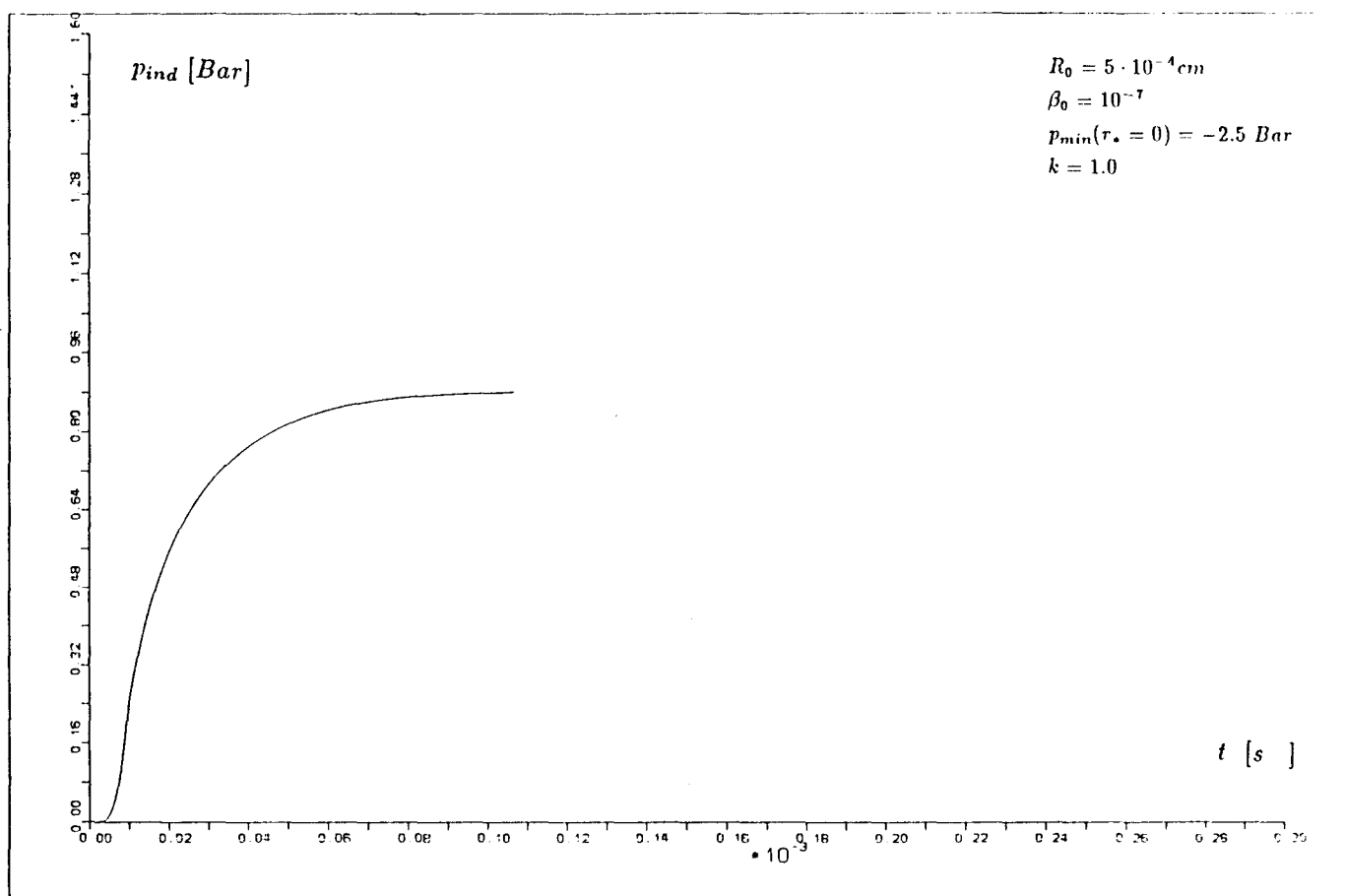


Abb.(2.22): Induzierter Druck (Mittelwert) (2.4.2)

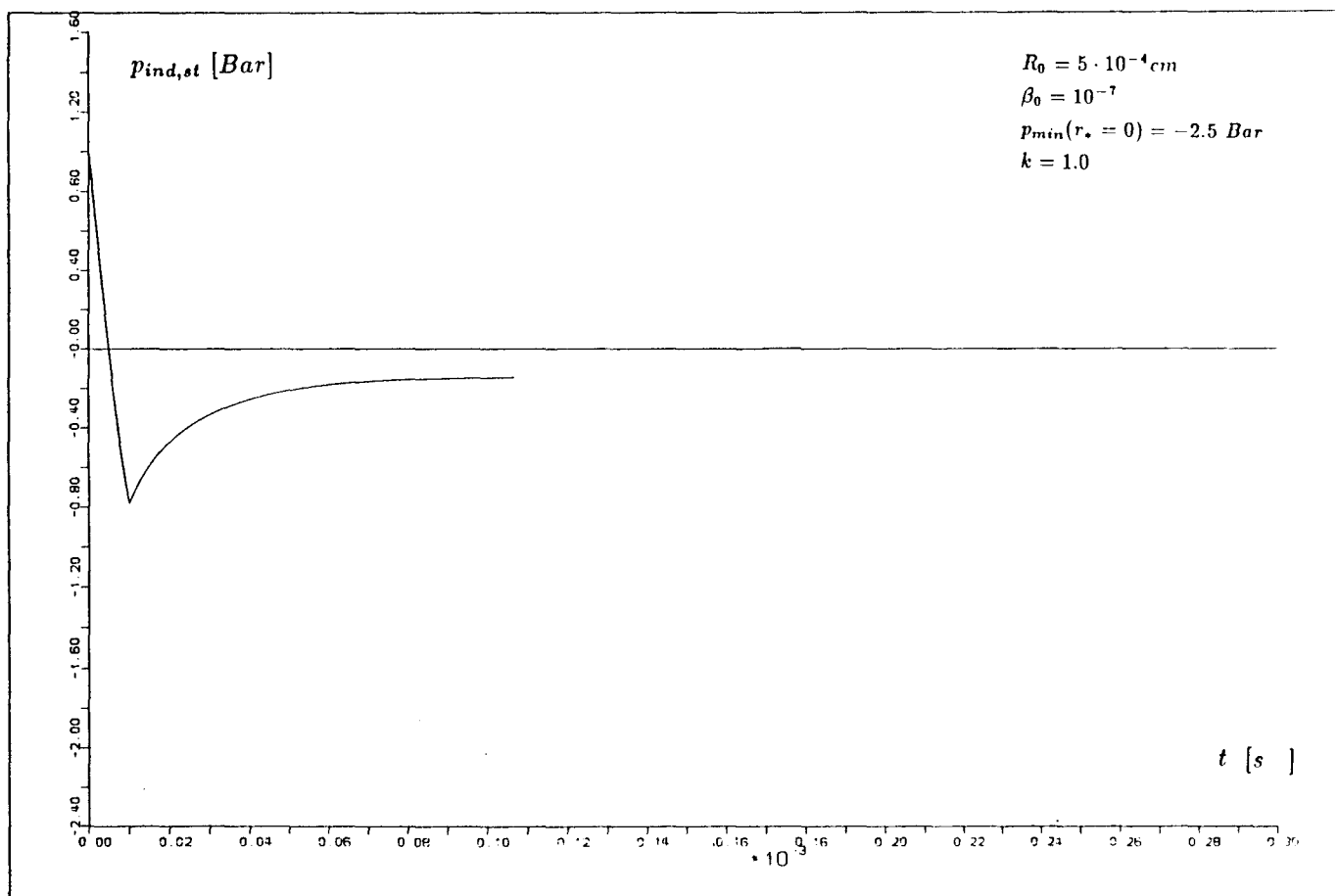


Abb.(2.23): Umgebungsdruck (Mittelwert) (2.4.2)

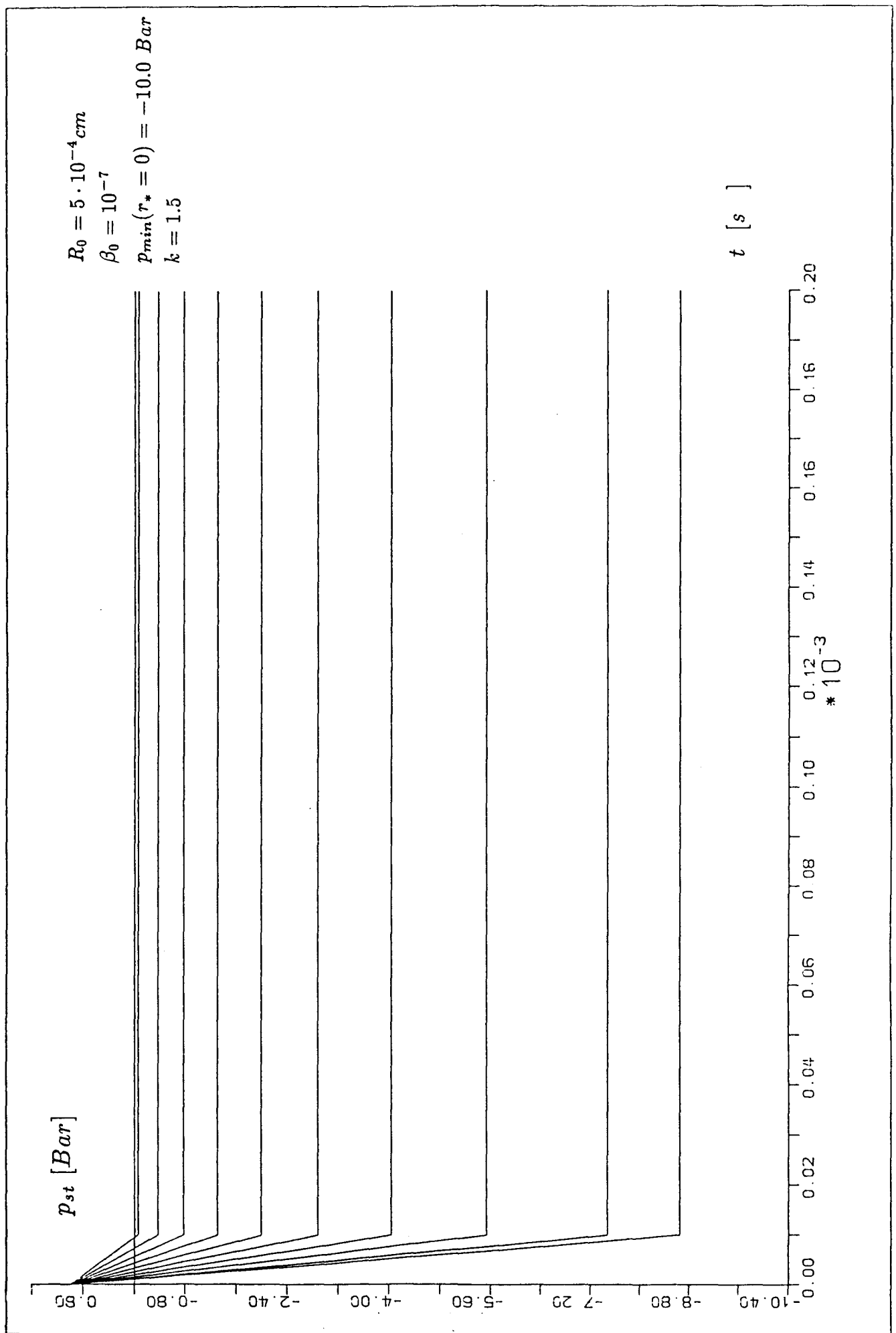


Abb.(2.24): Druckabsenkung (2.4.3)

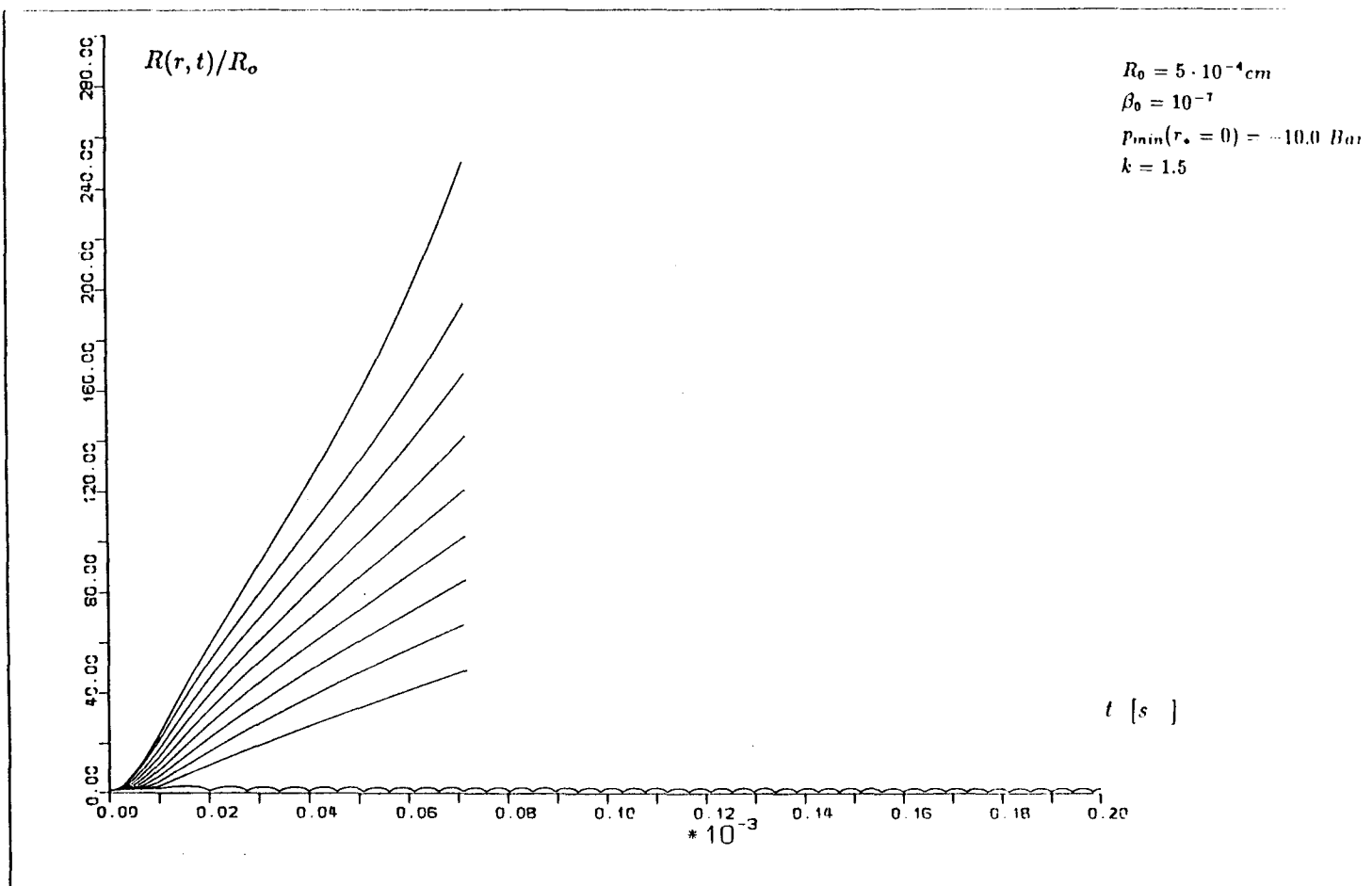


Abb.(2.25): Radientwicklung (2.4.3)

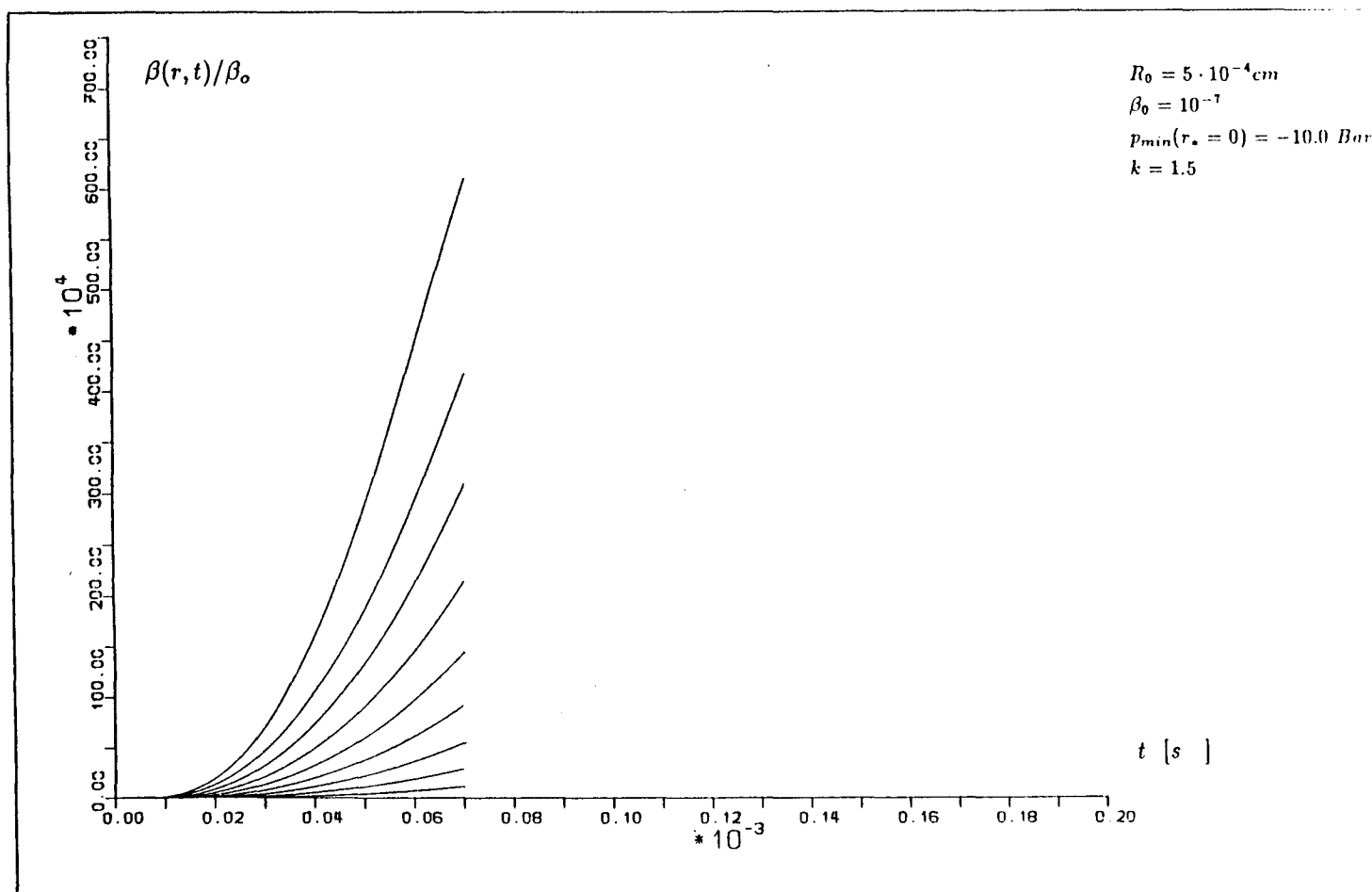


Abb.(2.26): Gasvolumenverhältnis (2.4.3)

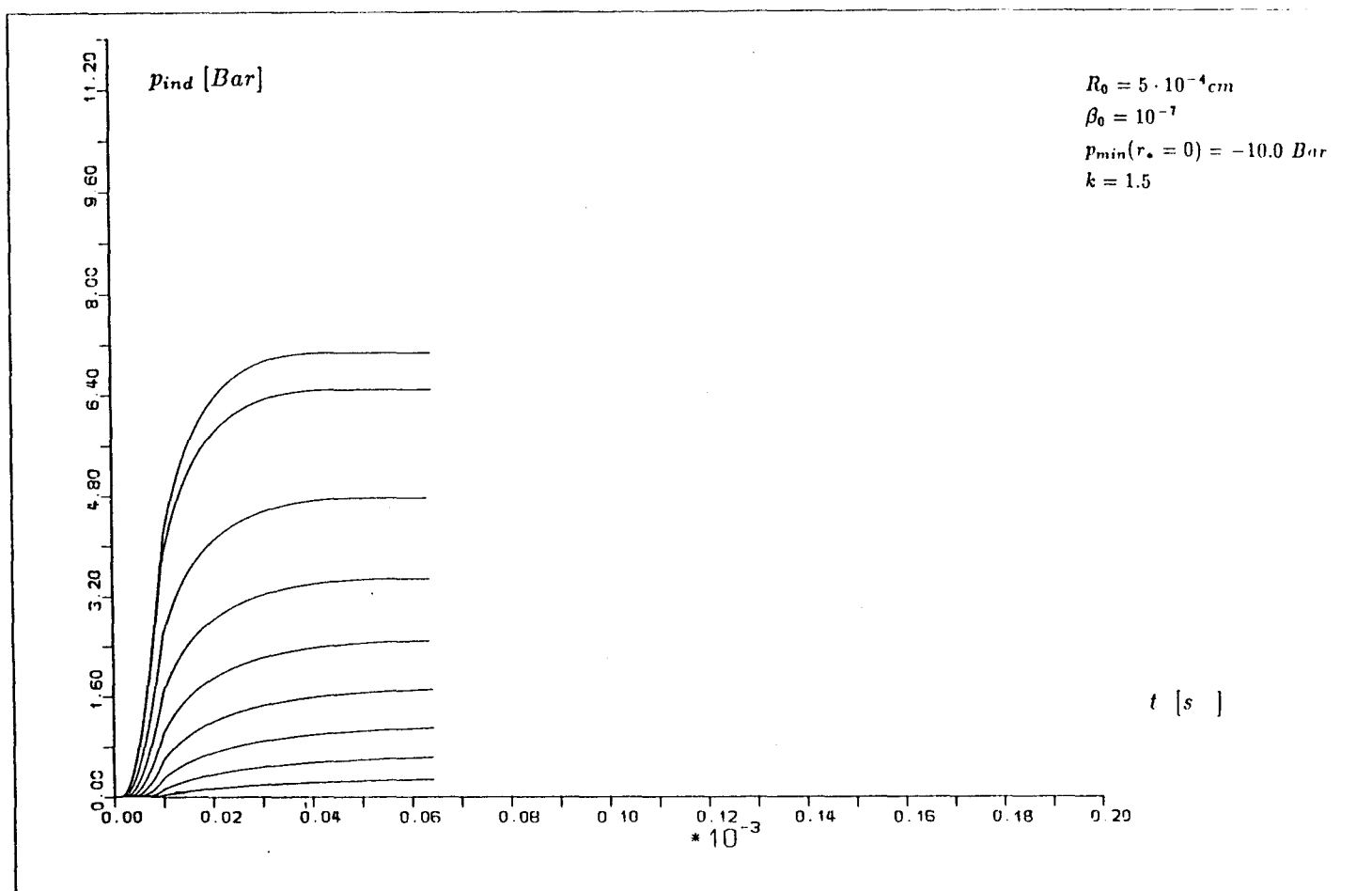


Abb.(2.27): Induzierter Druck (2.4.3)

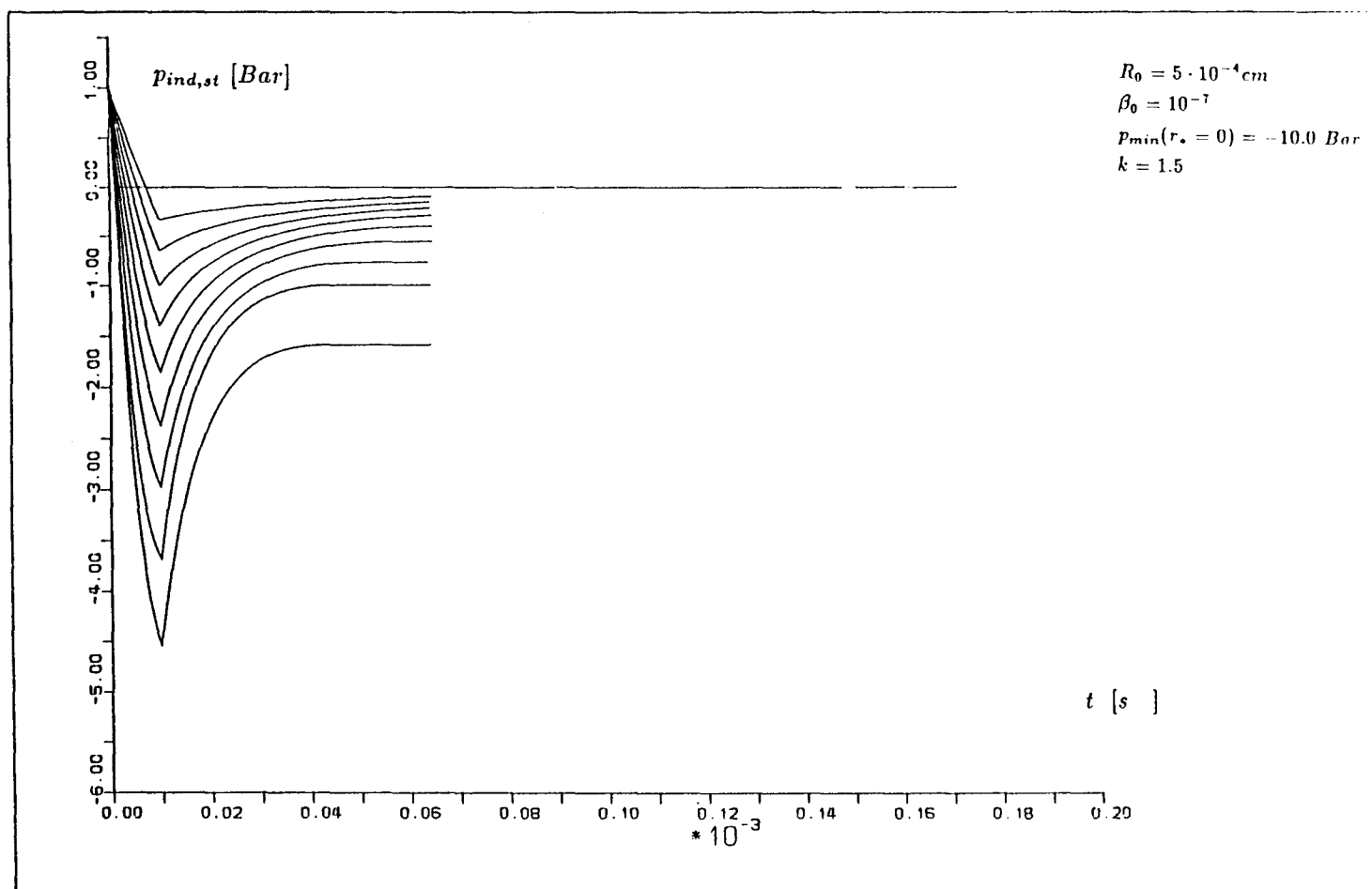


Abb.(2.28): Umgebungsdruck (2.4.3)

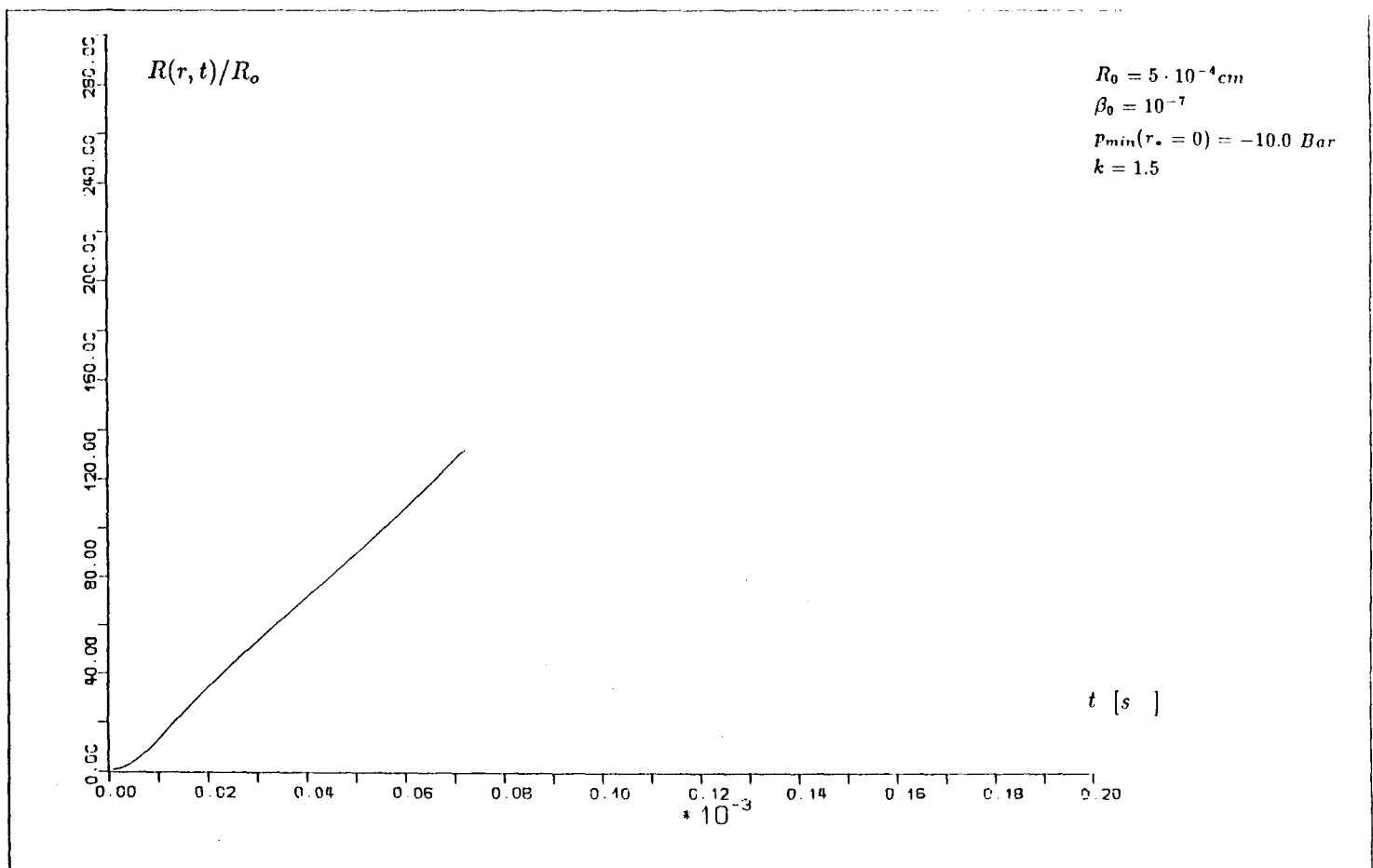


Abb.(2.29): Radientwicklung (Mittelwert) (2.4.3)

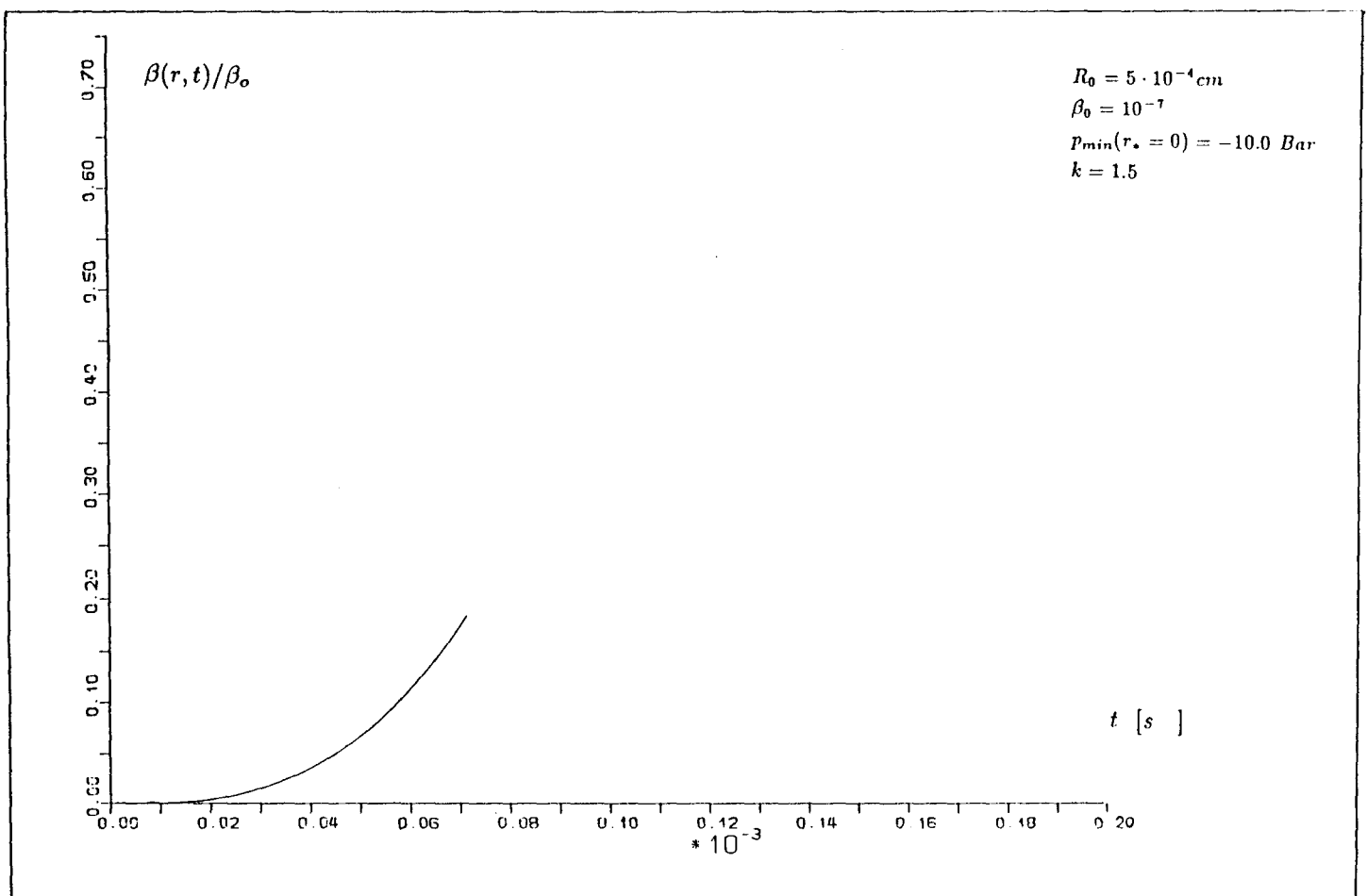


Abb.(2.30): Gasvolumenverhältnis (Mittelwert) (2.4.3)

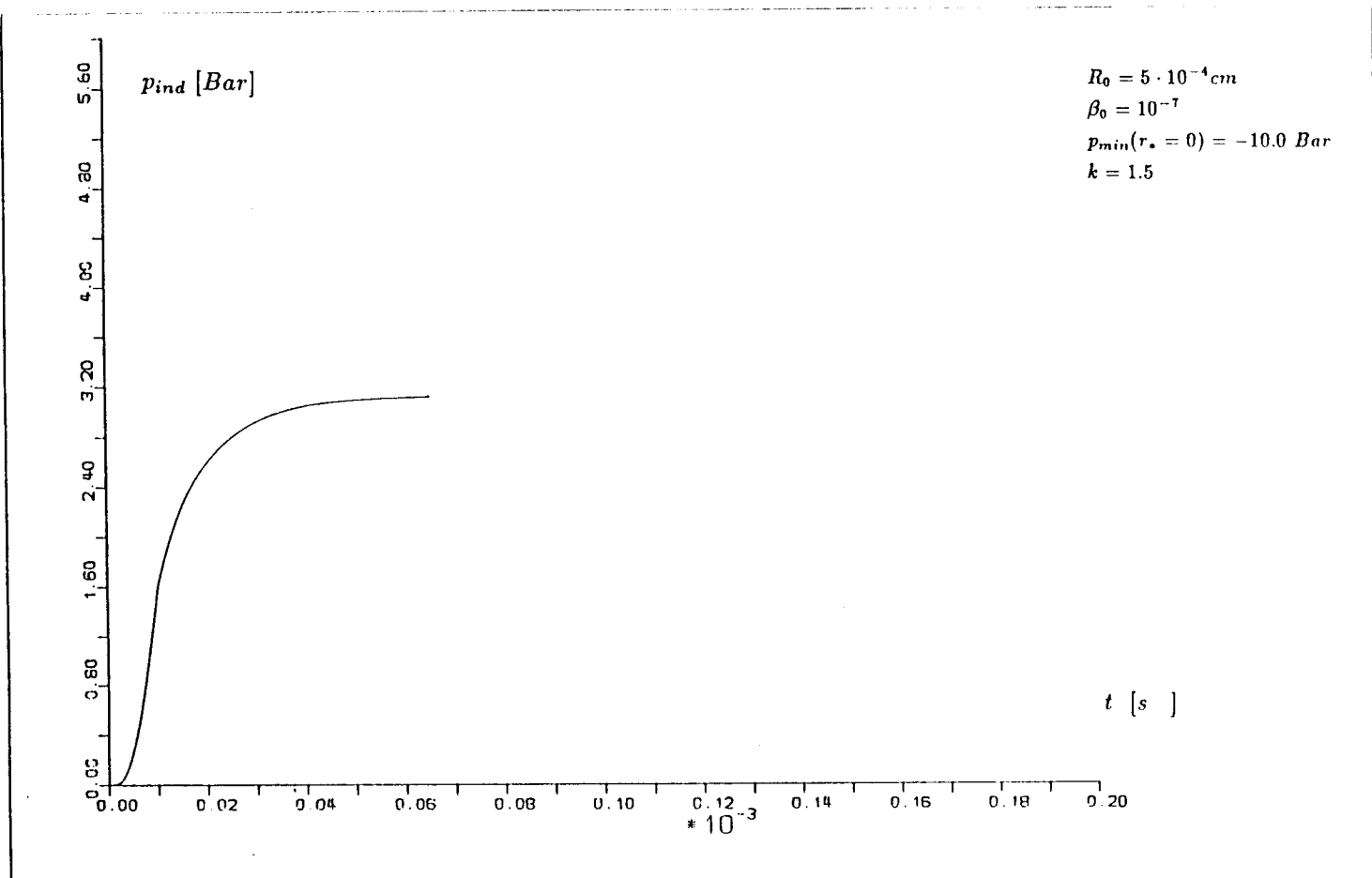


Abb.(2.31): Induzierter Druck (Mittelwert) (2.4.3)

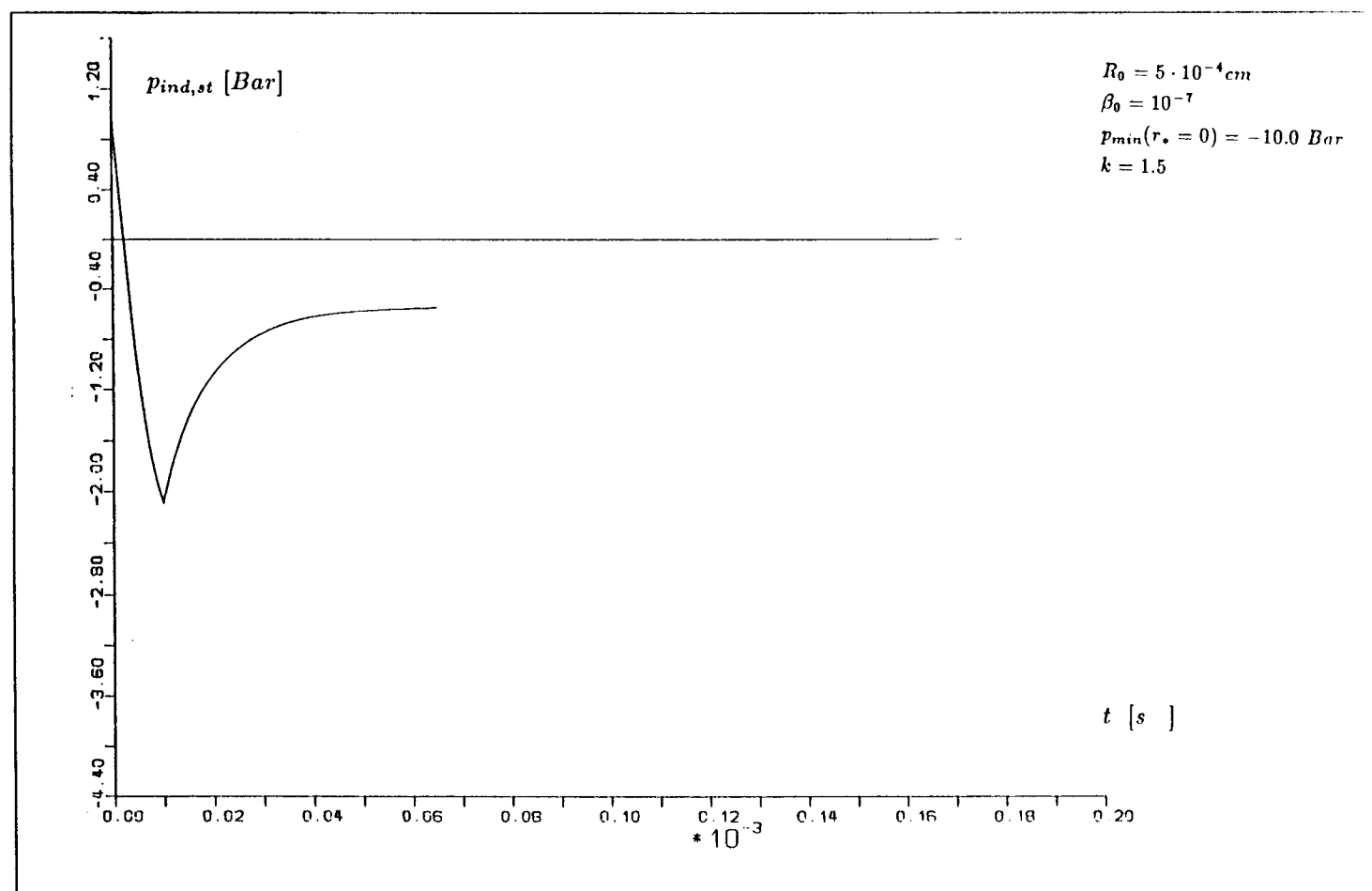


Abb.(2.32): Umgebungsdruck (Mittelwert) (2.4.3)

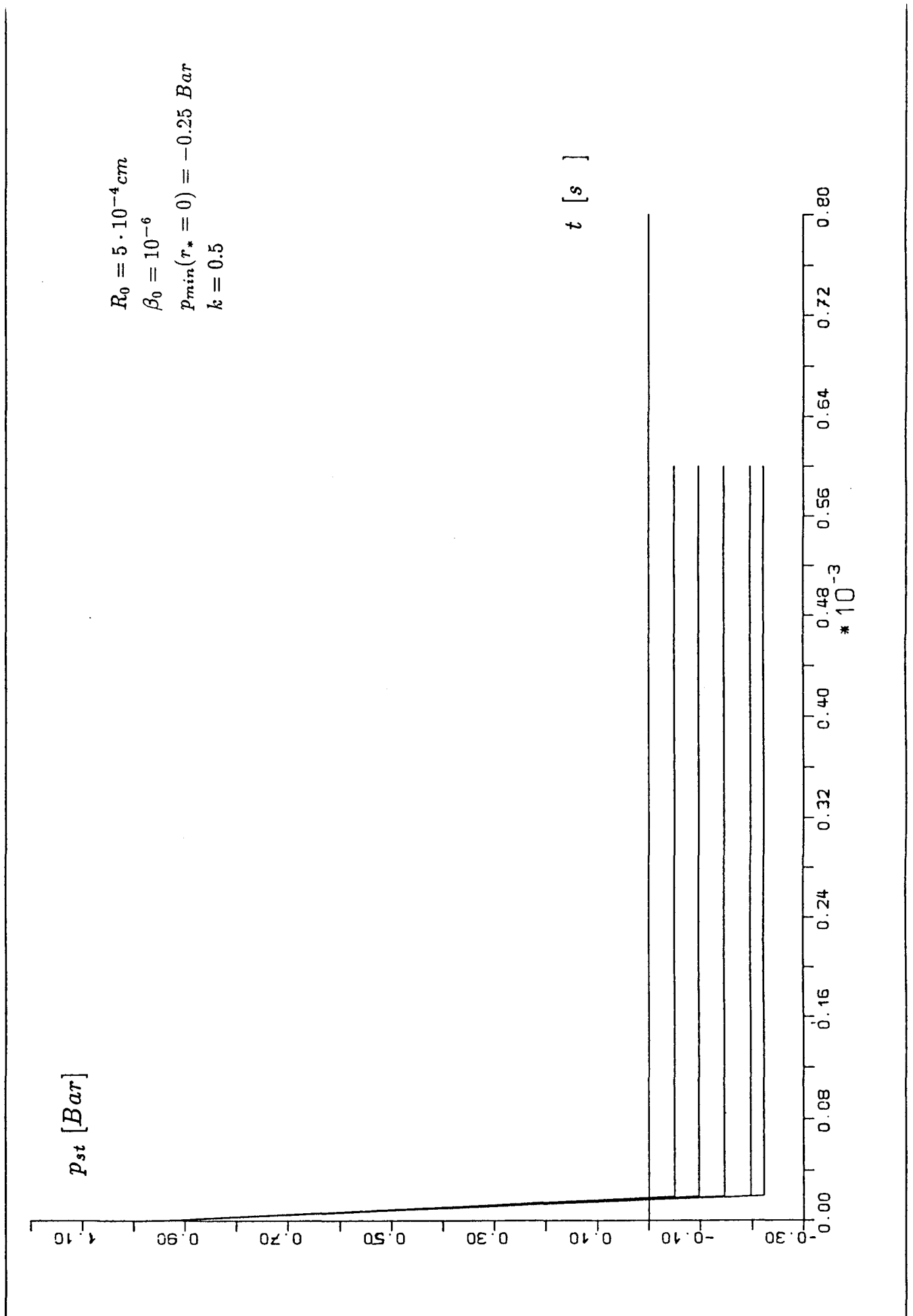


Abb.(2.33): Druckabsenkung (2.4.4)

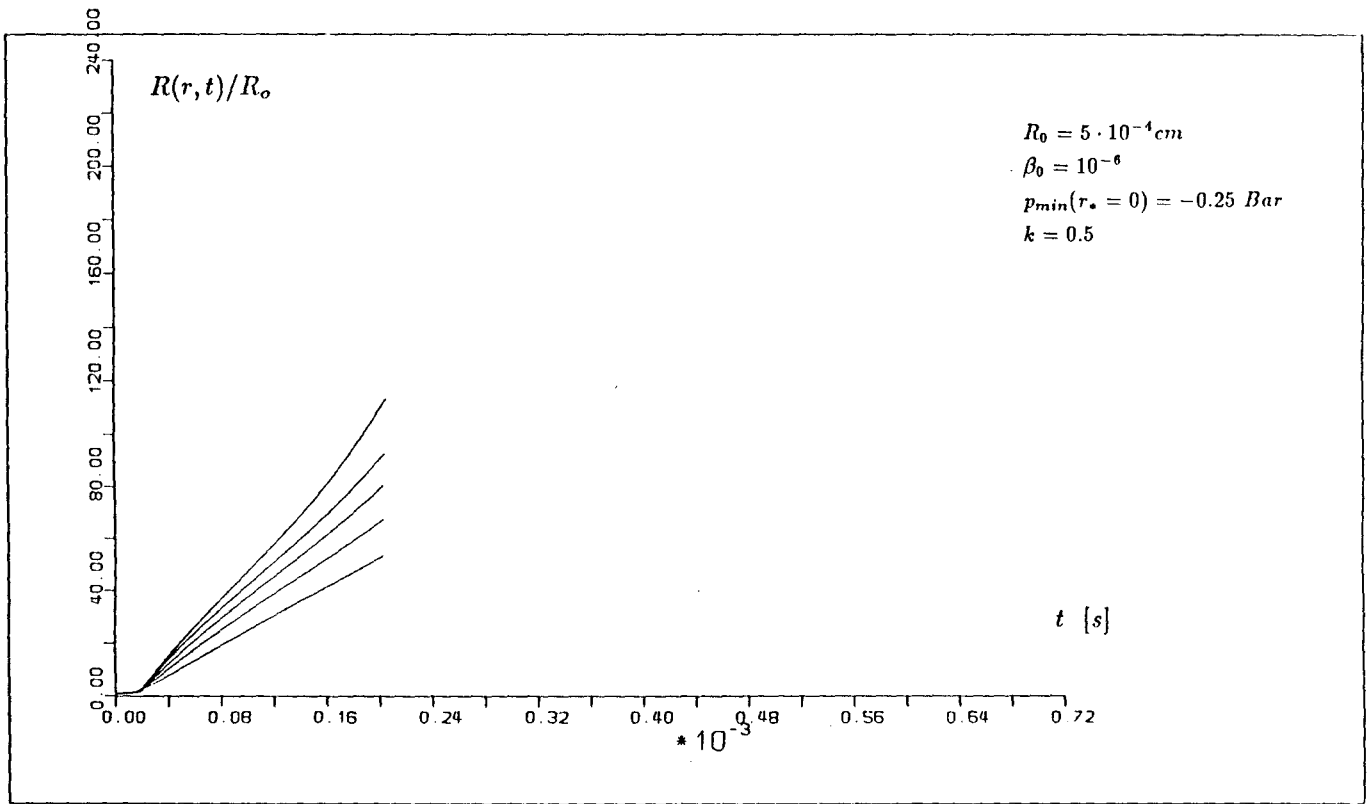


Abb.(2.34): Radienentwicklung (2.4.4)

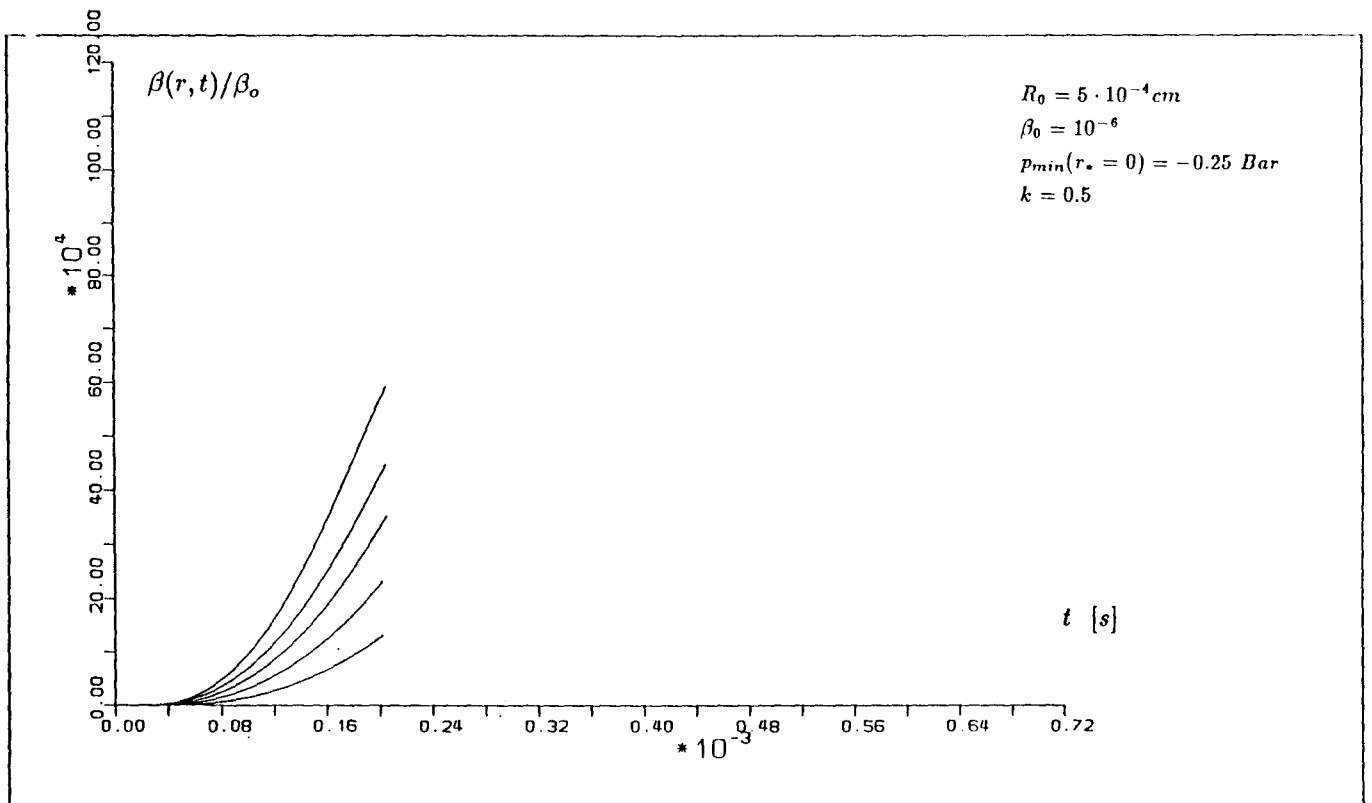


Abb.(2.35): Gasvolumenverhältnis (2.4.4)

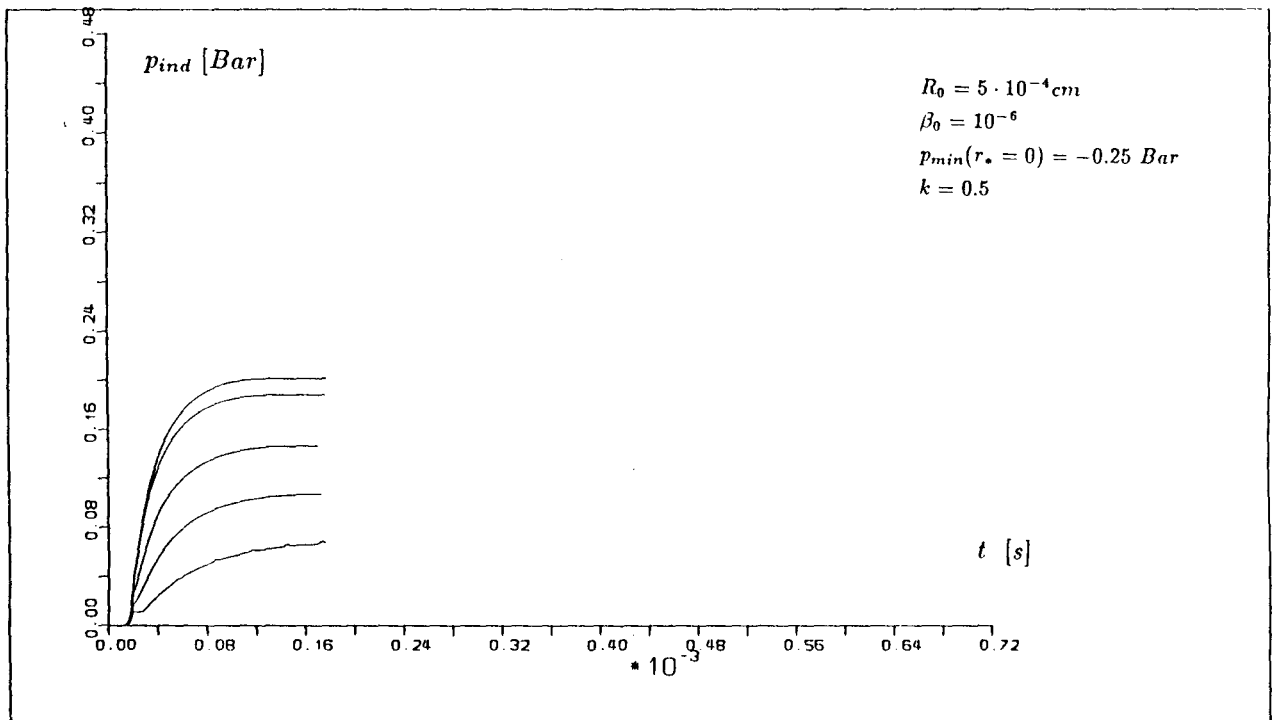


Abb.(2.36): Induzierter Druck (2.4.4)

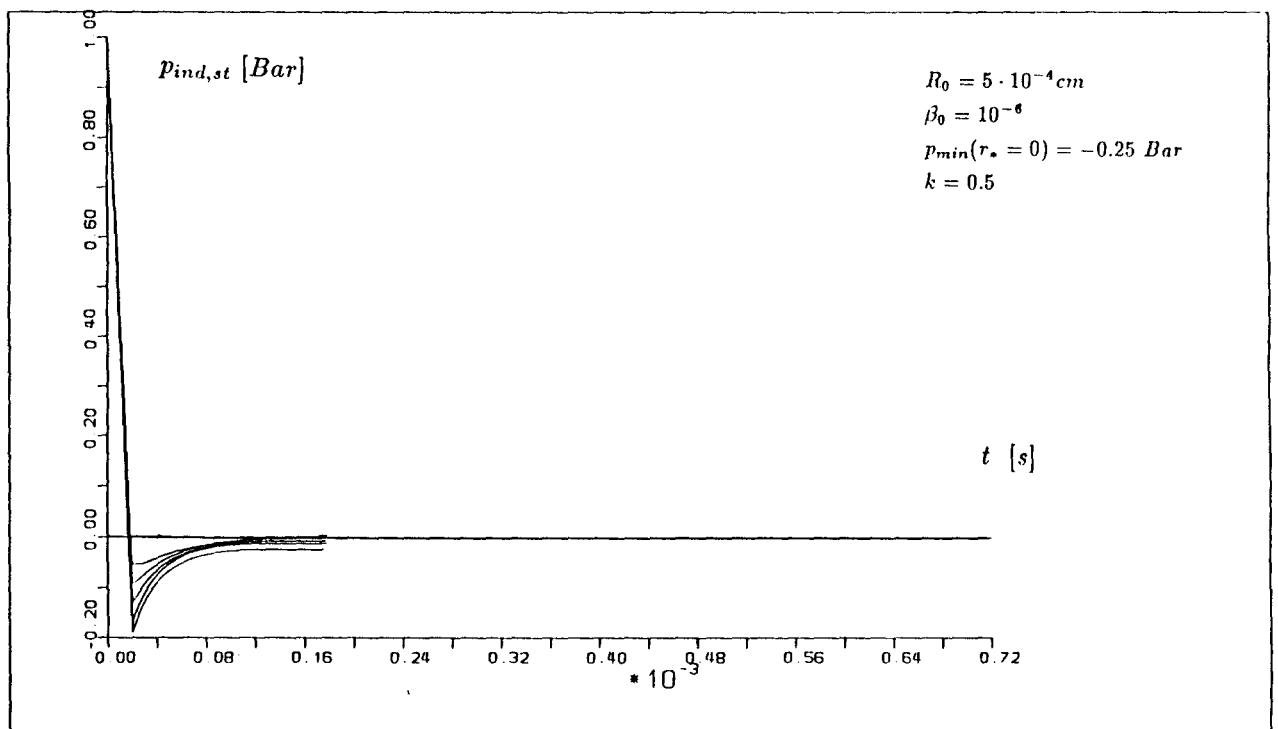


Abb.(2.37): Umgebungsdruck (2.4.4)

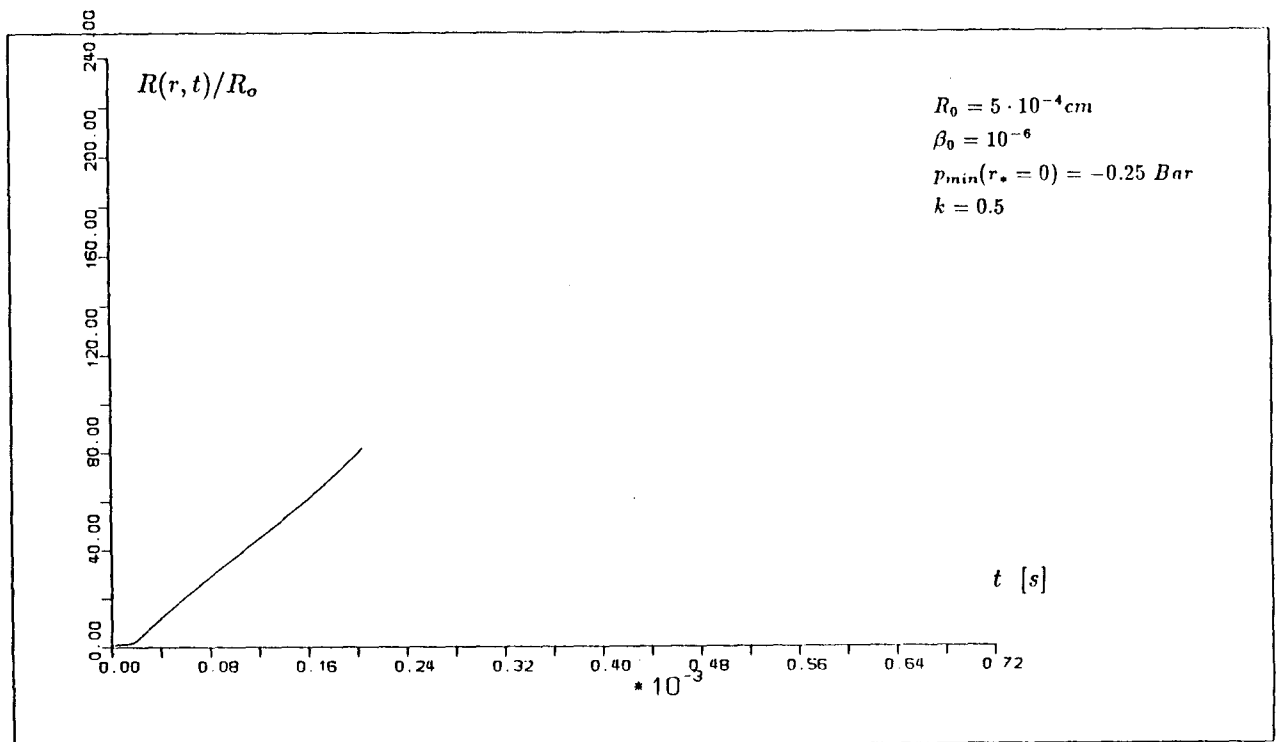


Abb.(2.38): Radientwicklung (Mittelwert) (2.4.4)

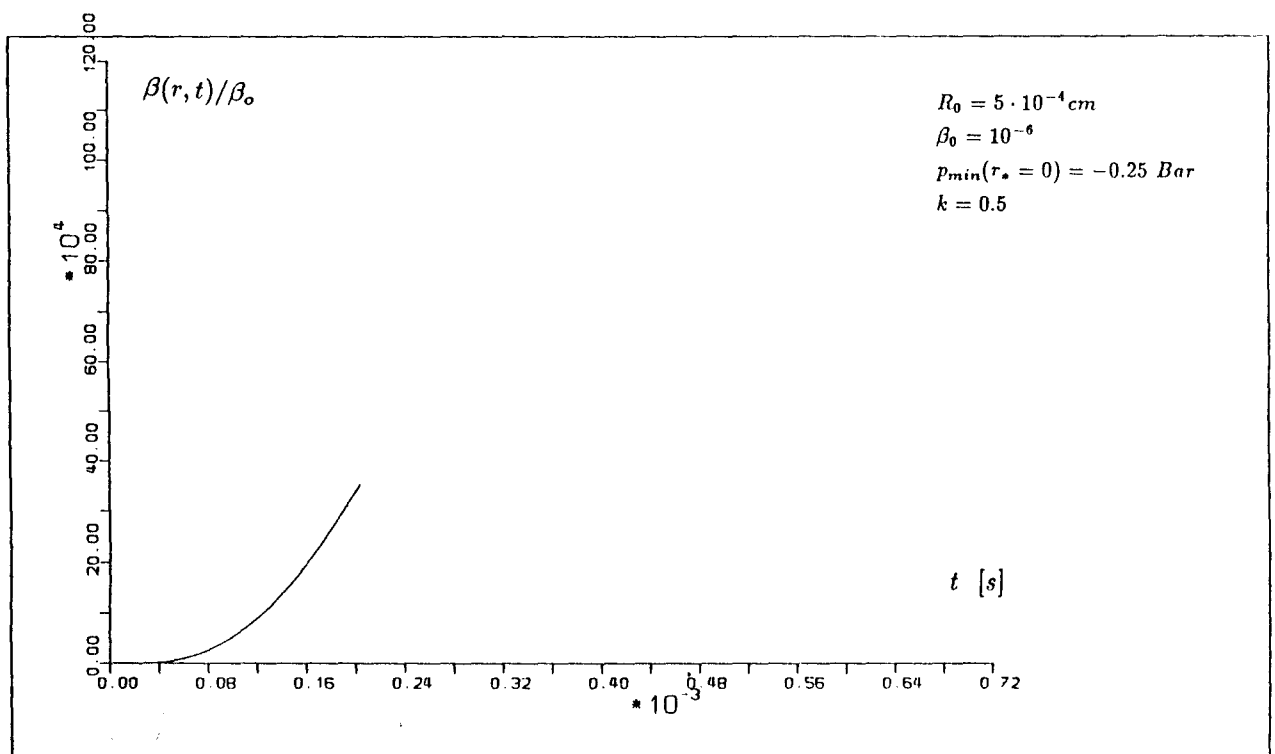


Abb.(2.39): Gasvolumenverhältnis (Mittelwert) (2.4.4)

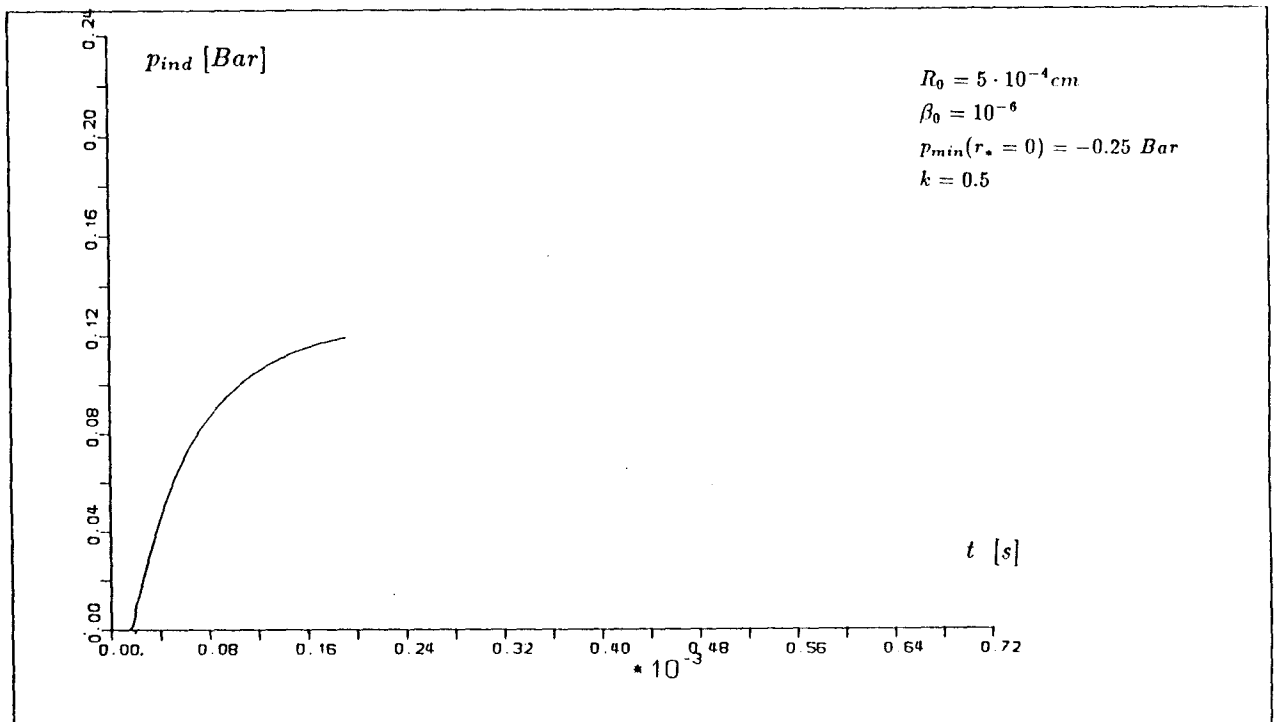


Abb.(2.40): Induzierter Druck (Mittelwert) (2.4.4)

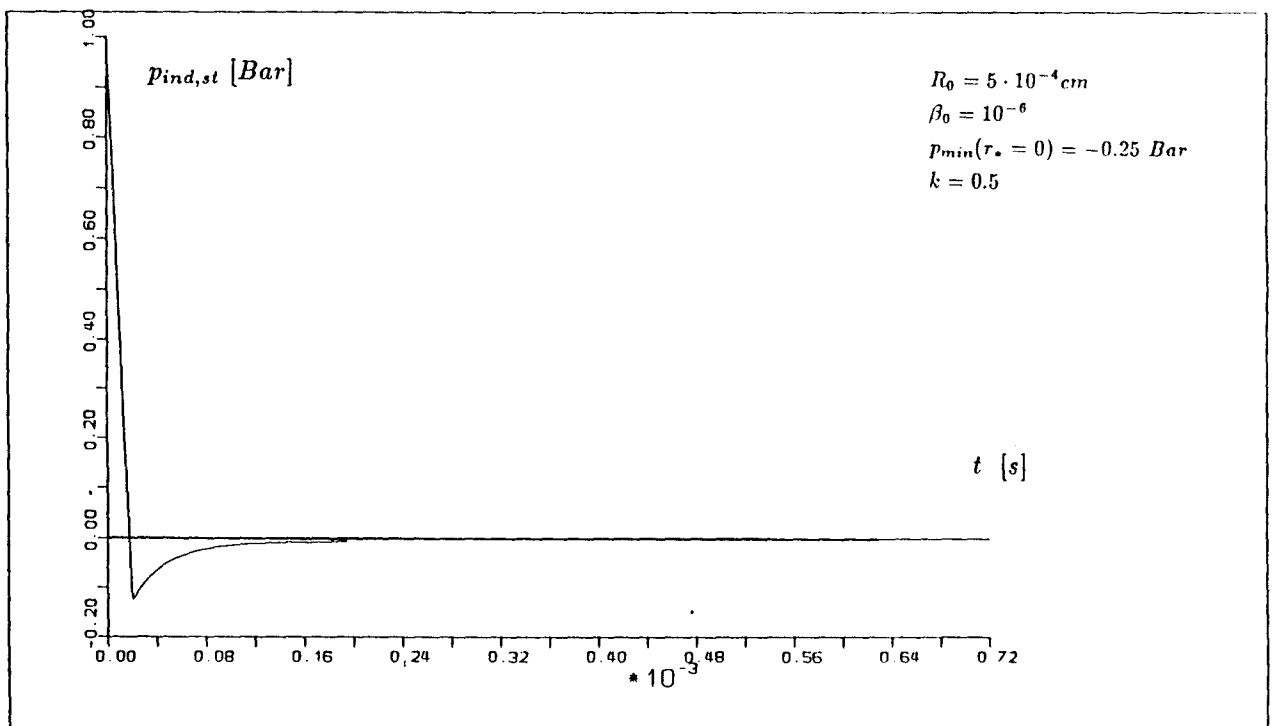


Abb.(2.41): Umgebungsdruck (Mittelwert) (2.4.4)

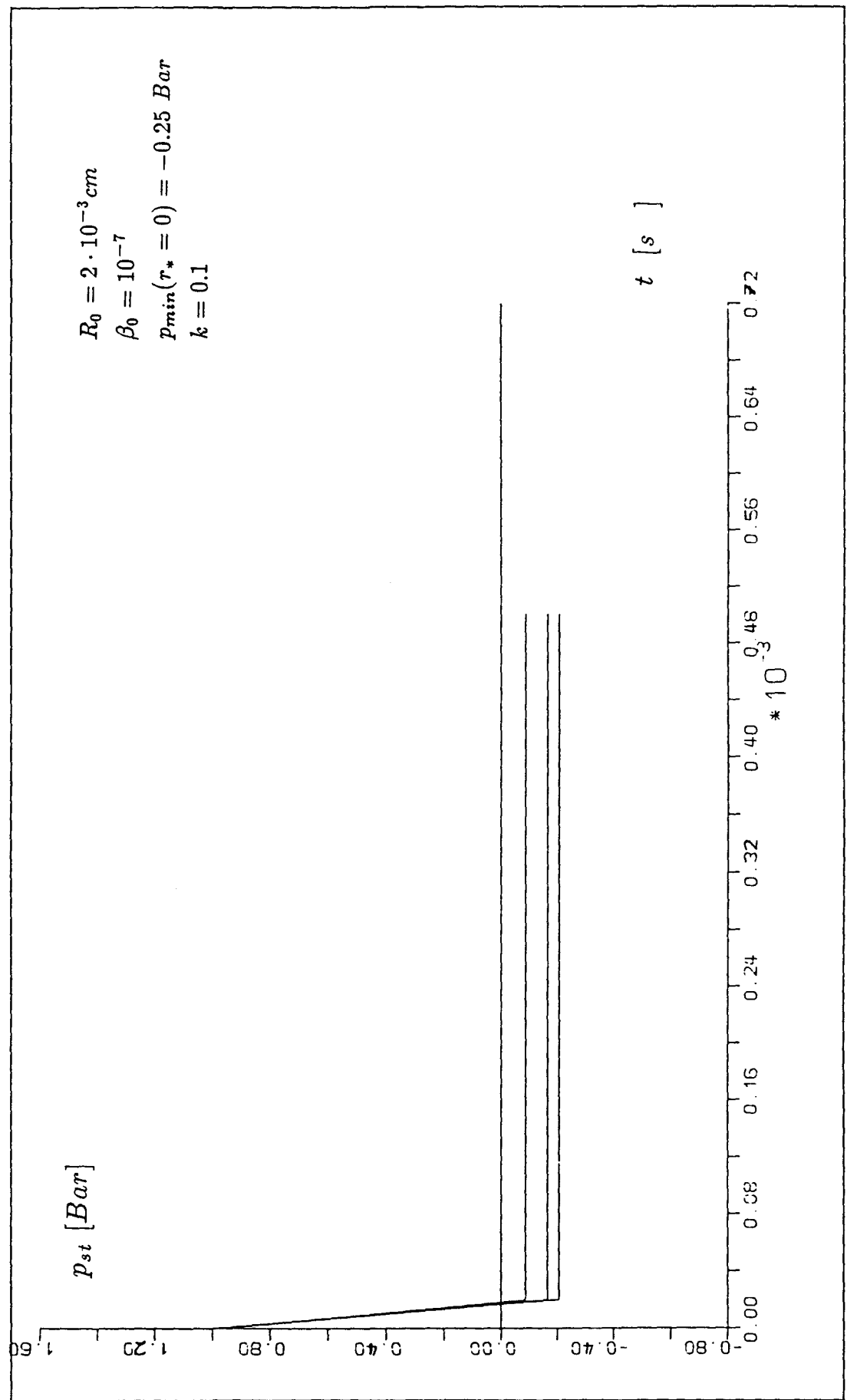


Abb.(2.42): Druckabsenkung (2.4.5)

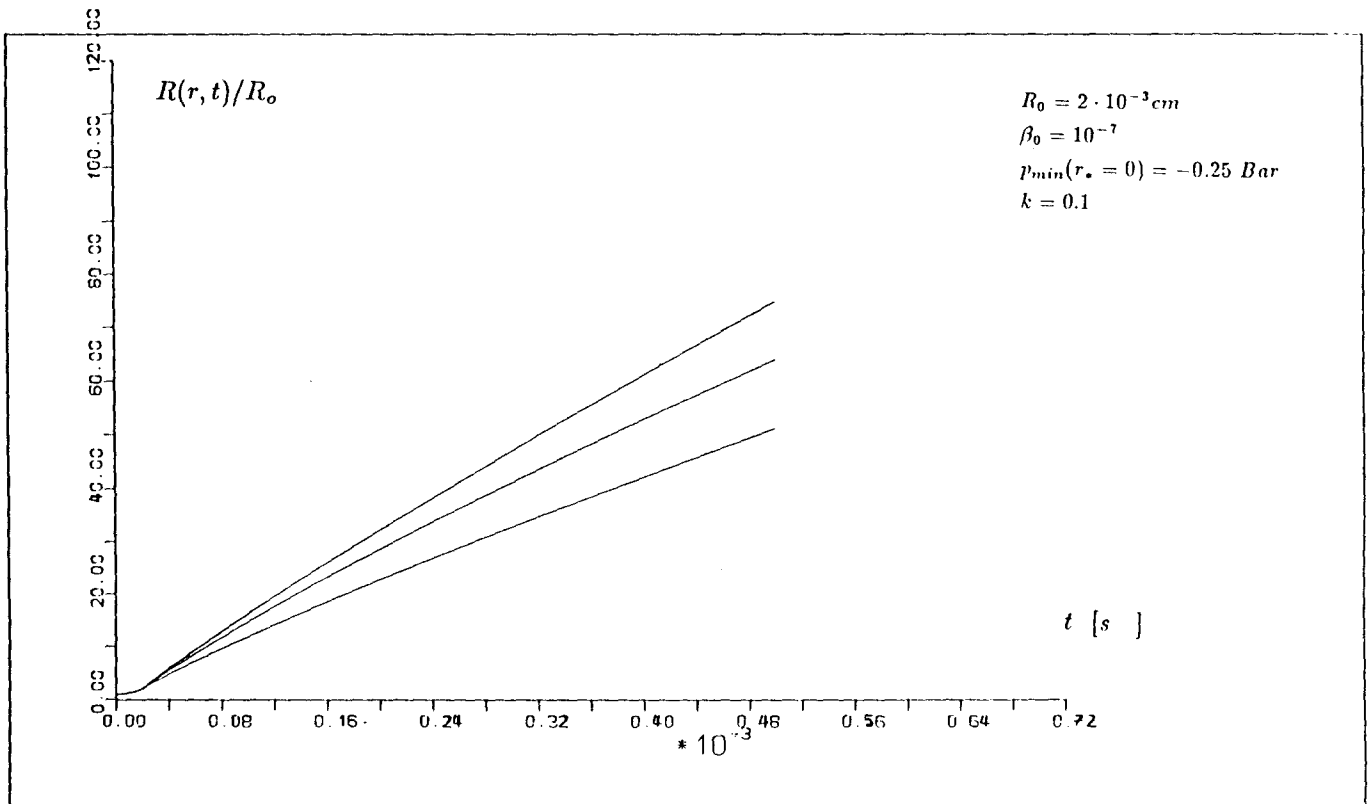


Abb.(2.43): Radienentwicklung (2.4.5)

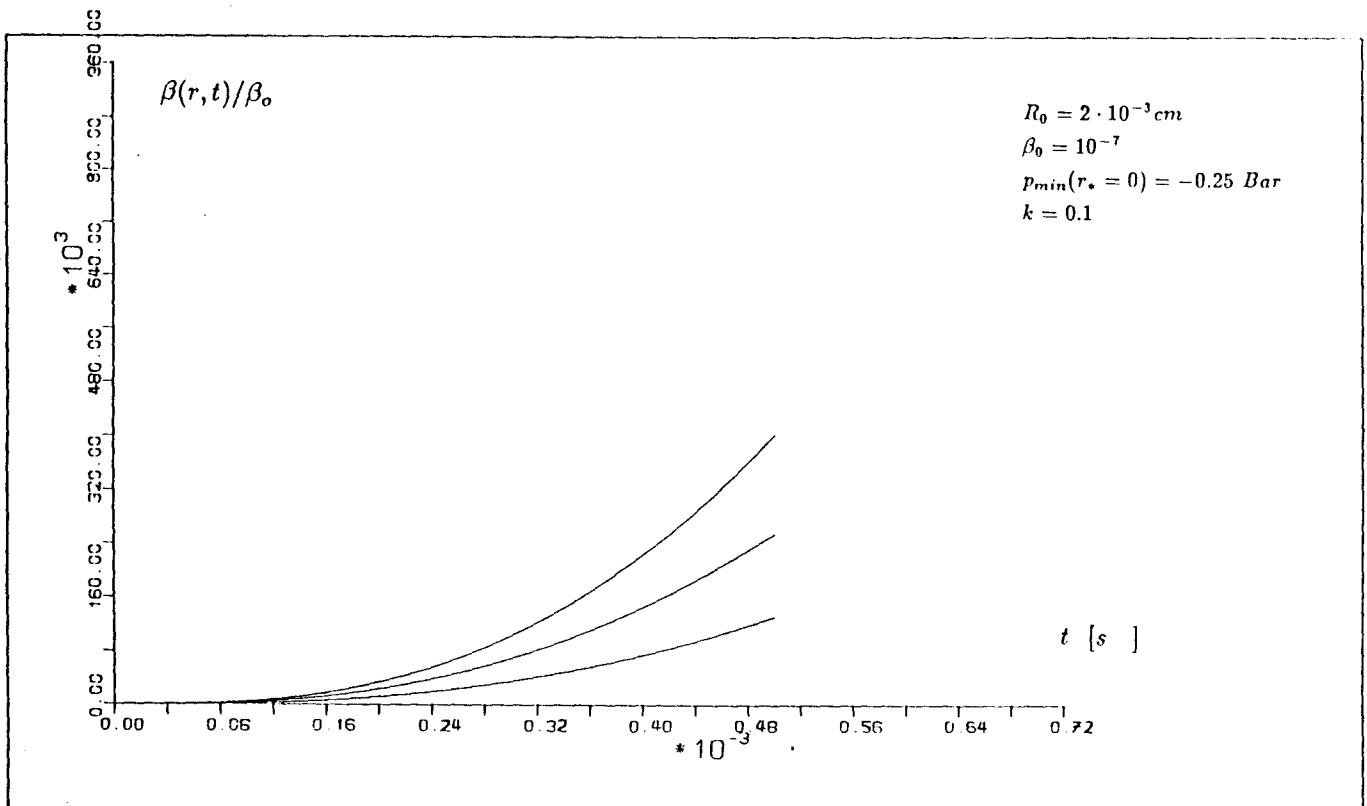


Abb.(2.44): Gasvolumenverhältnis (2.4.5)

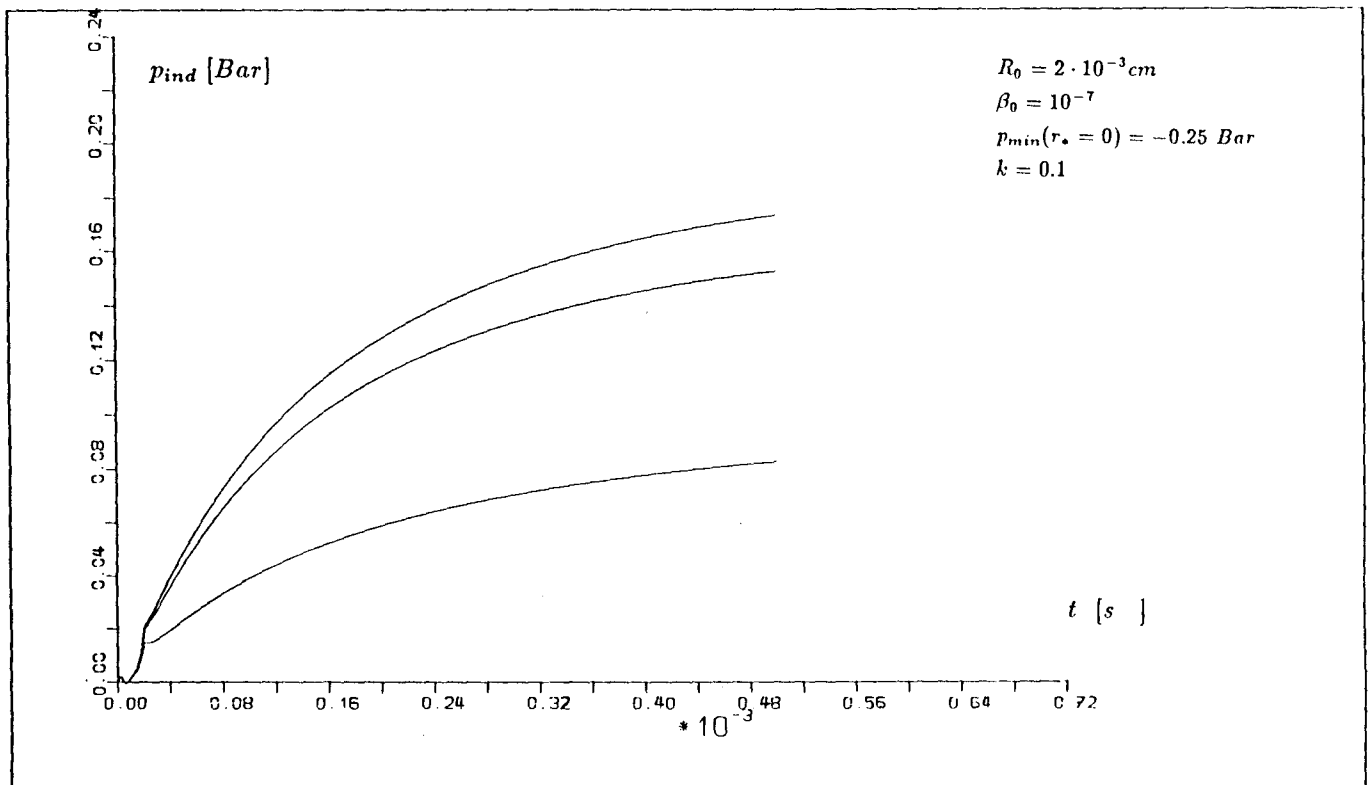


Abb.(2.45): Induzierter Druck (2.4.5)

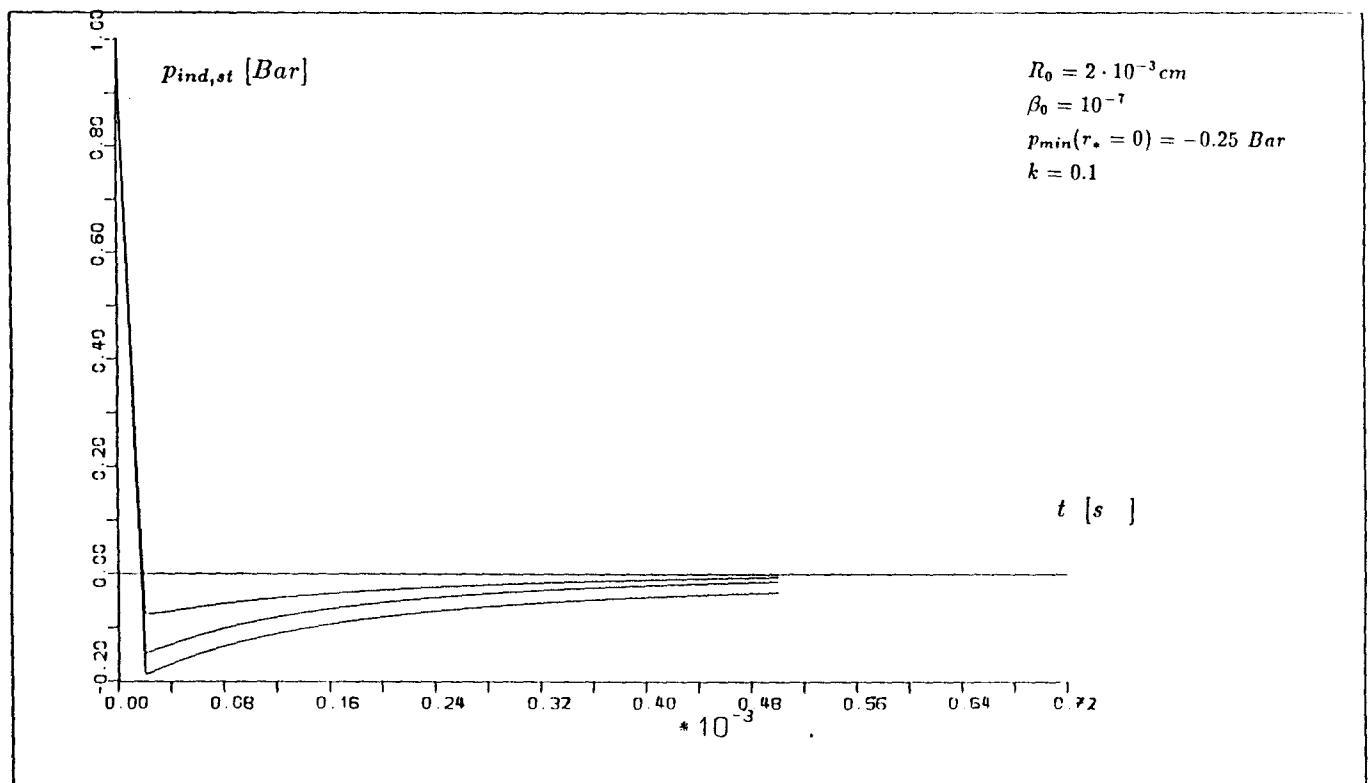


Abb.(2.46): Umgebungsdruck (2.4.5)

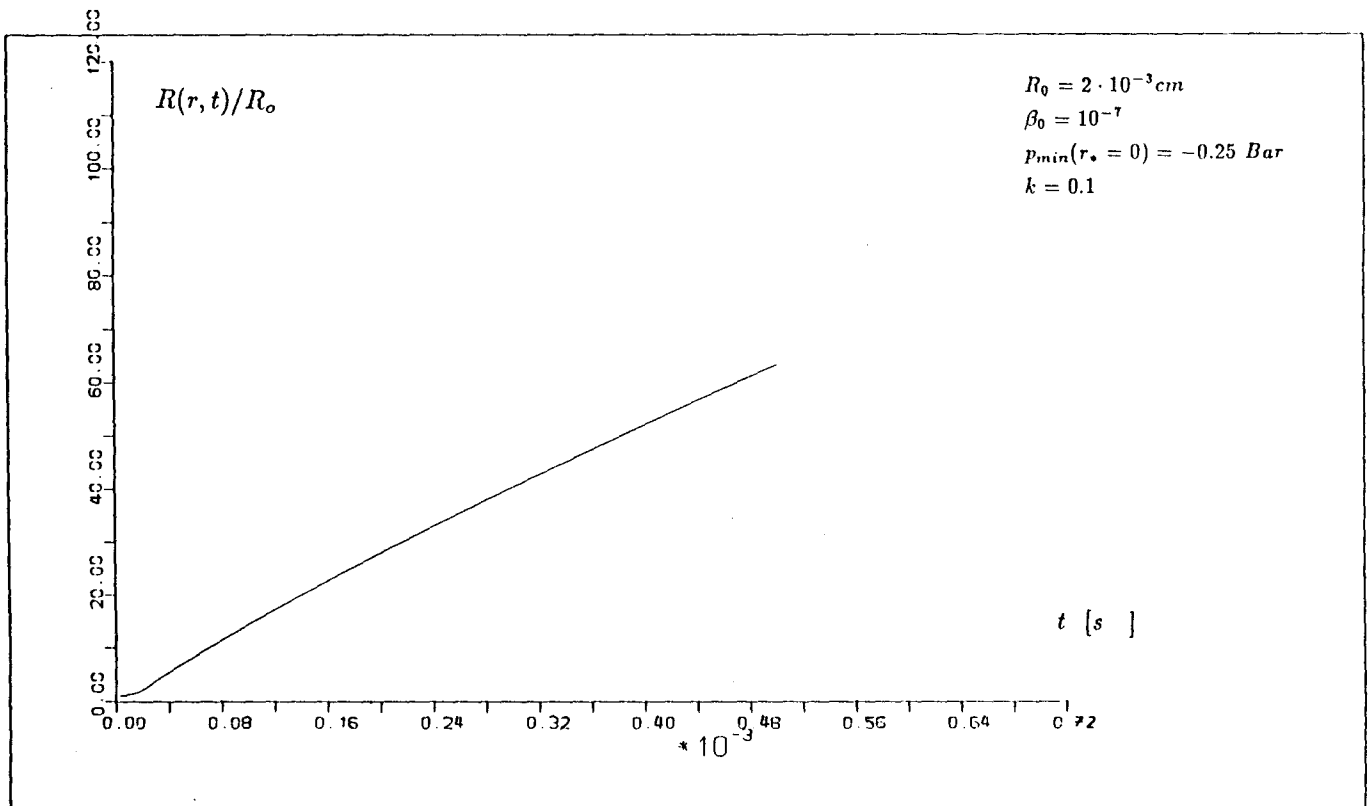


Abb.(2.47): Radienentwicklung (Mittelwert) (2.4.5)

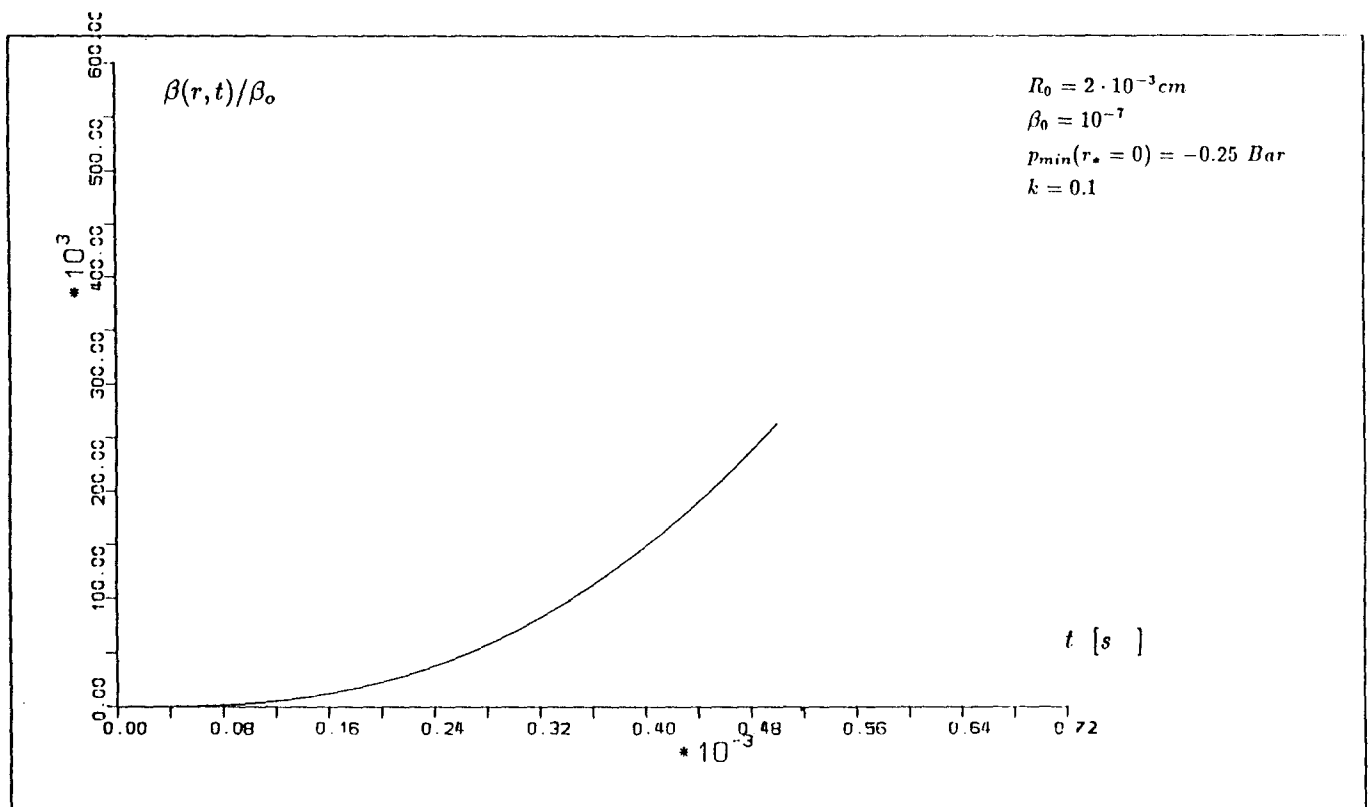


Abb.(2.48): Gasvolumenverhältnis (Mittelwert) (2.4.5)

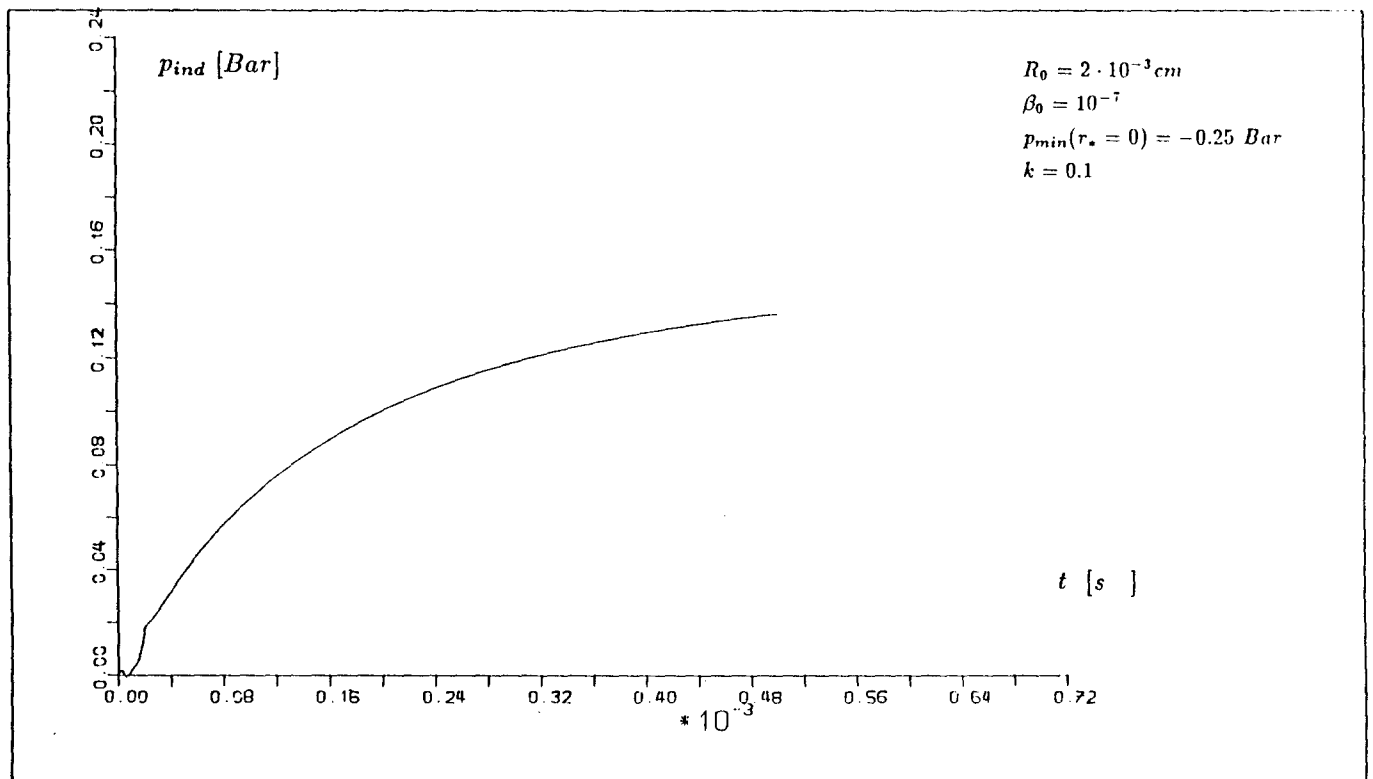


Abb.(2.49): Induzierter Druck (Mittelwert) (2.4.5)

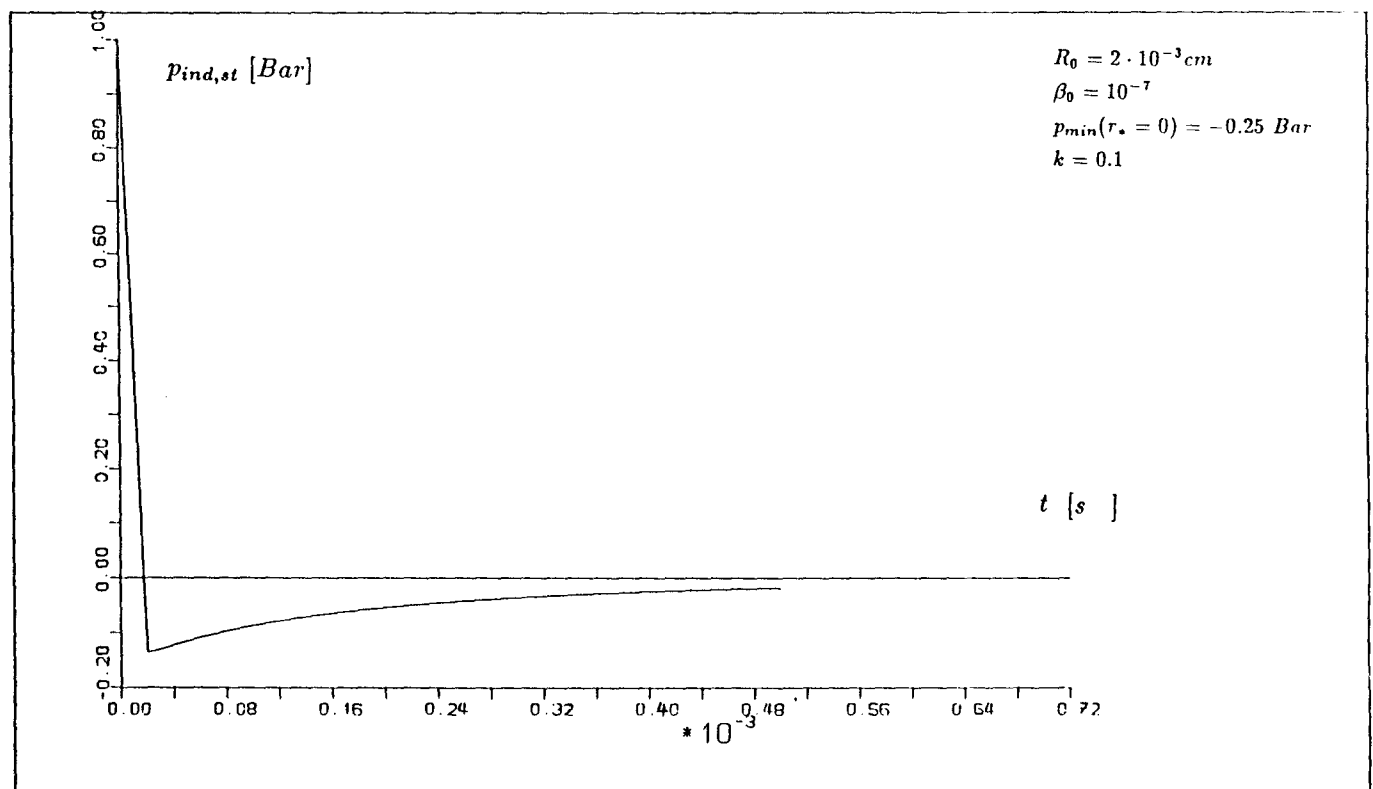


Abb.(2.50): Umgebungsdruck (Mittelwert) (2.4.5)

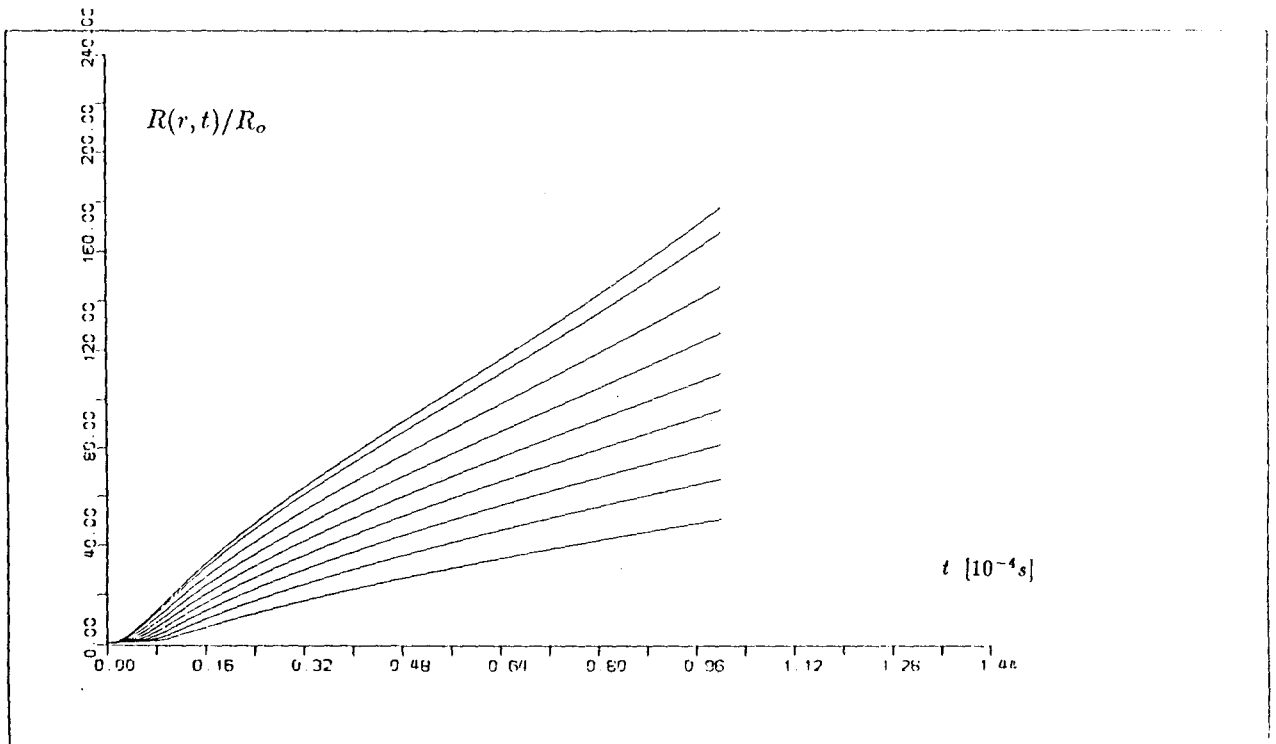


Abb.(2.51): Radientwicklung, $E=15$

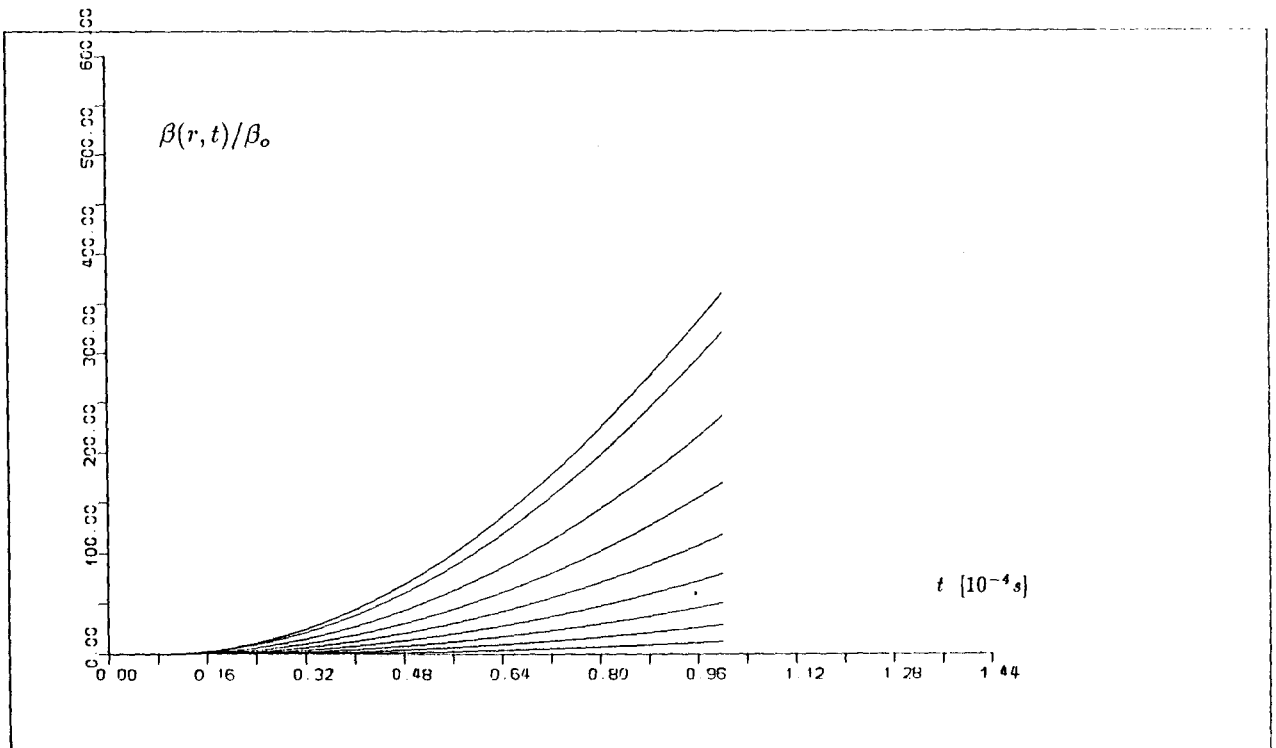


Abb.(2.52): Gasvolumenverhältnis, $E=15$

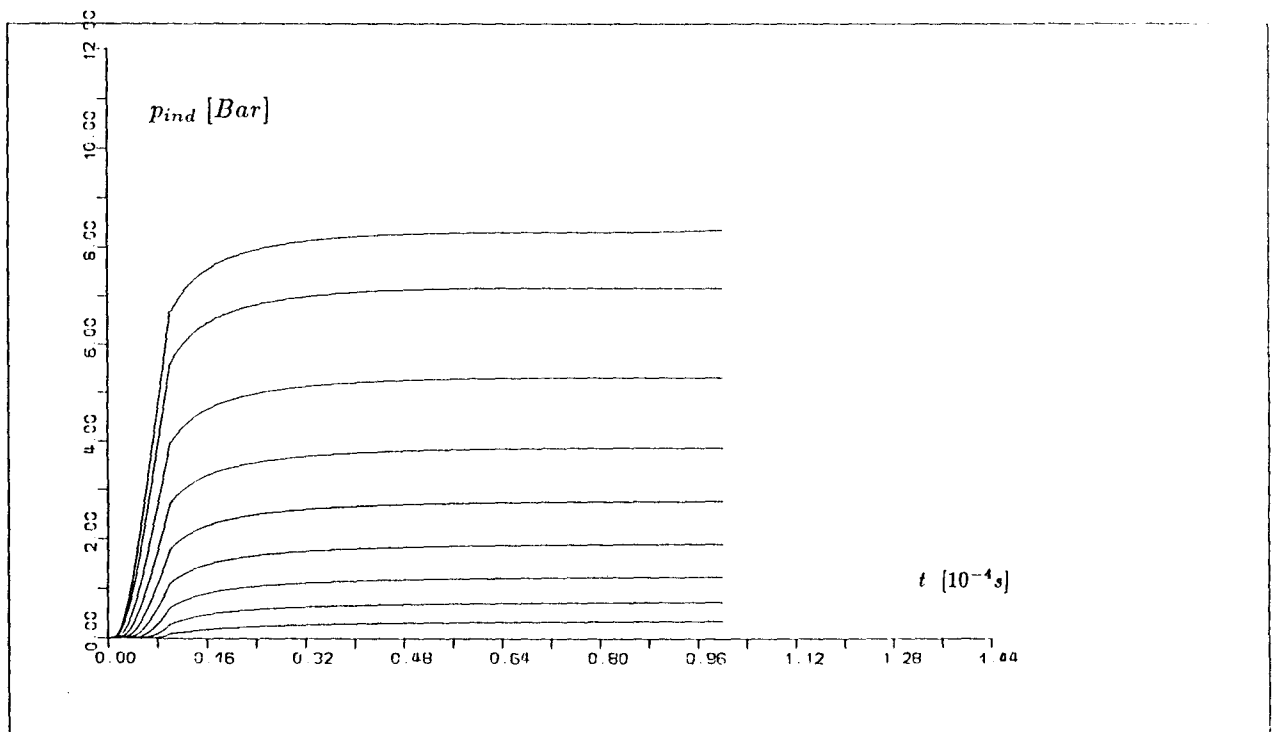


Abb.(2.53): Induzierter Druck, $E=15$

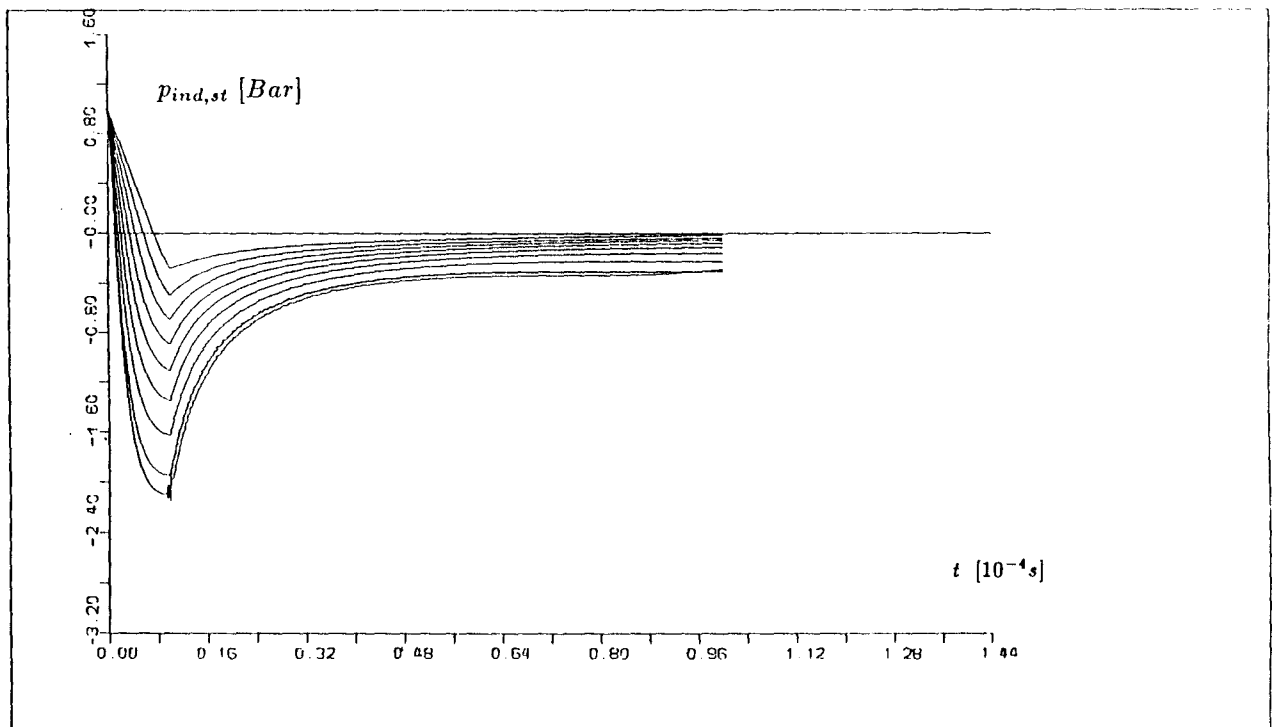


Abb.(2.54): Umgebungsdruck, $E=15$

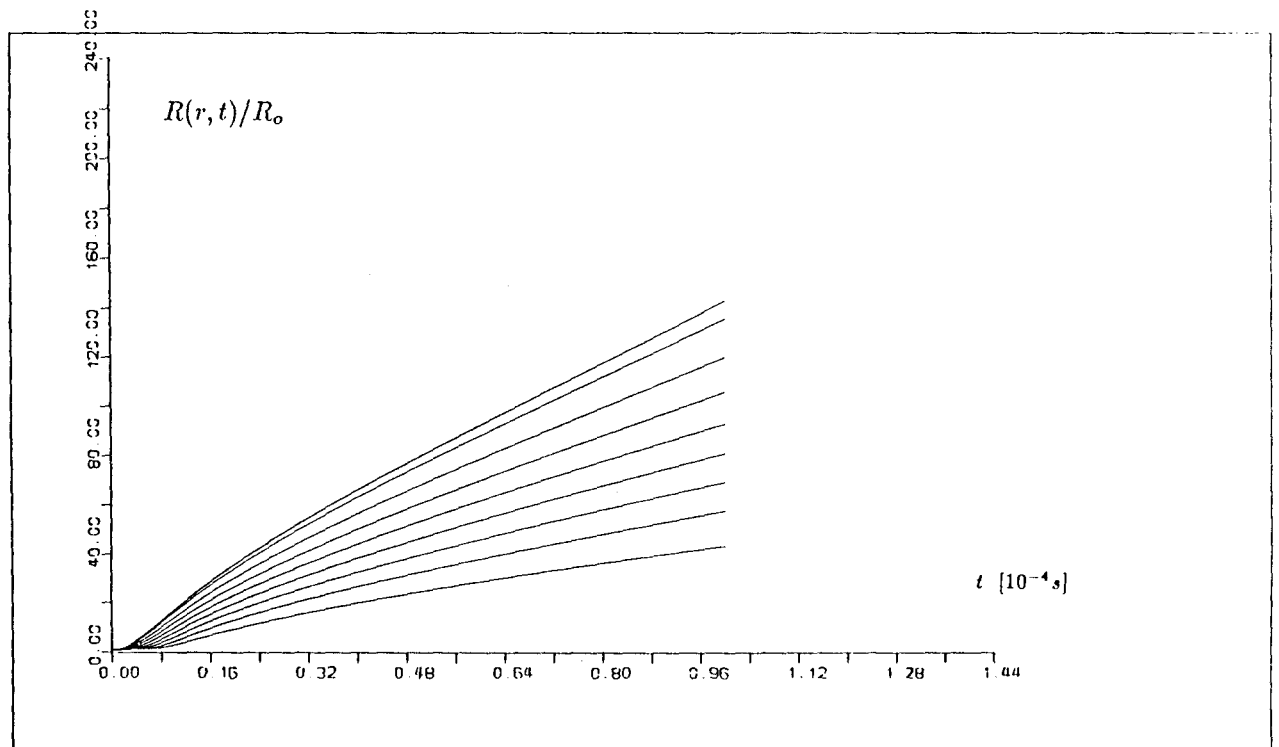


Abb.(2.55): Radienentwicklung, $E=25$

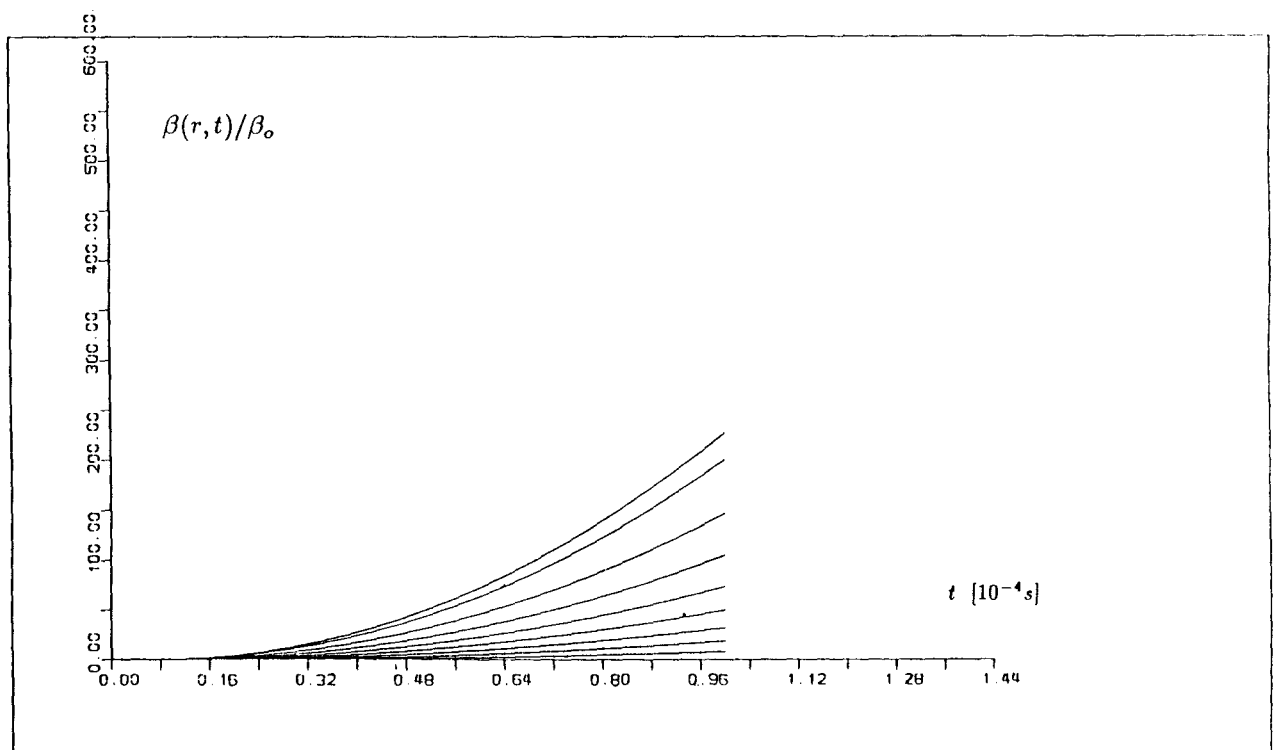


Abb.(2.56): Gasvolumenverhältnis, $E=25$

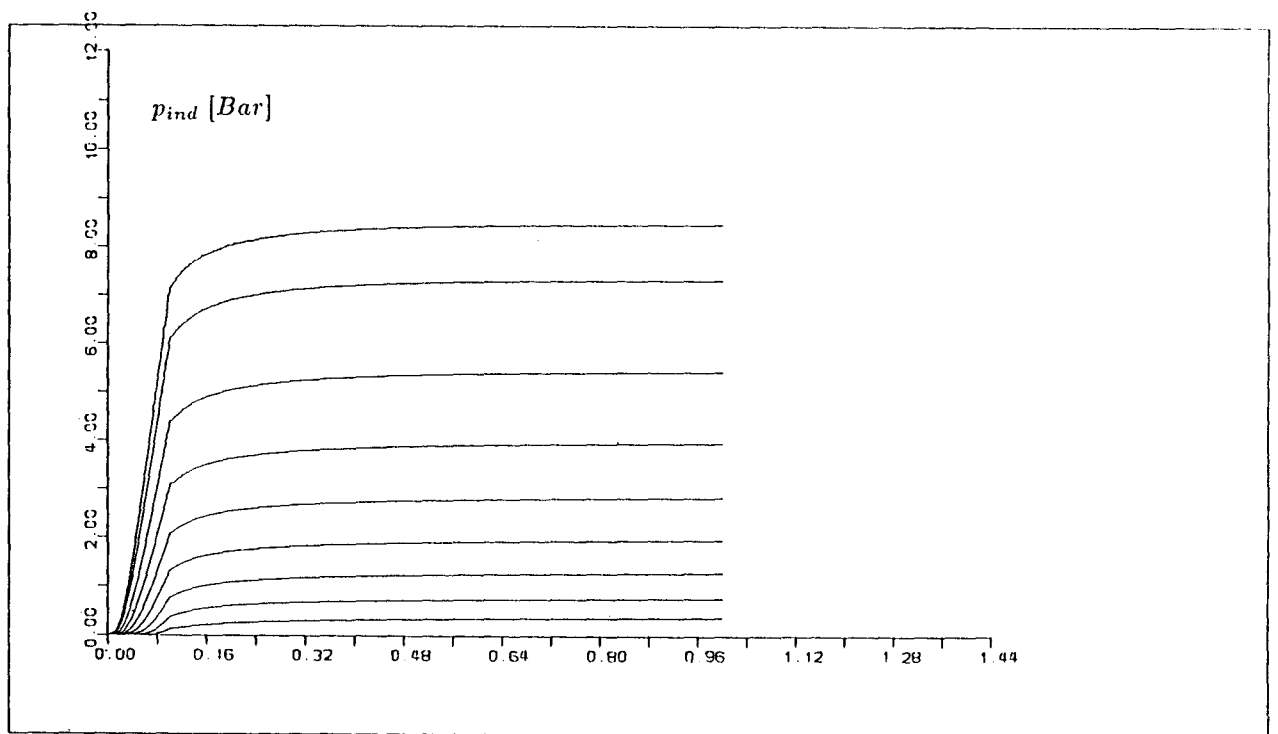


Abb.(2.57): Induzierter Druck, $E=25$

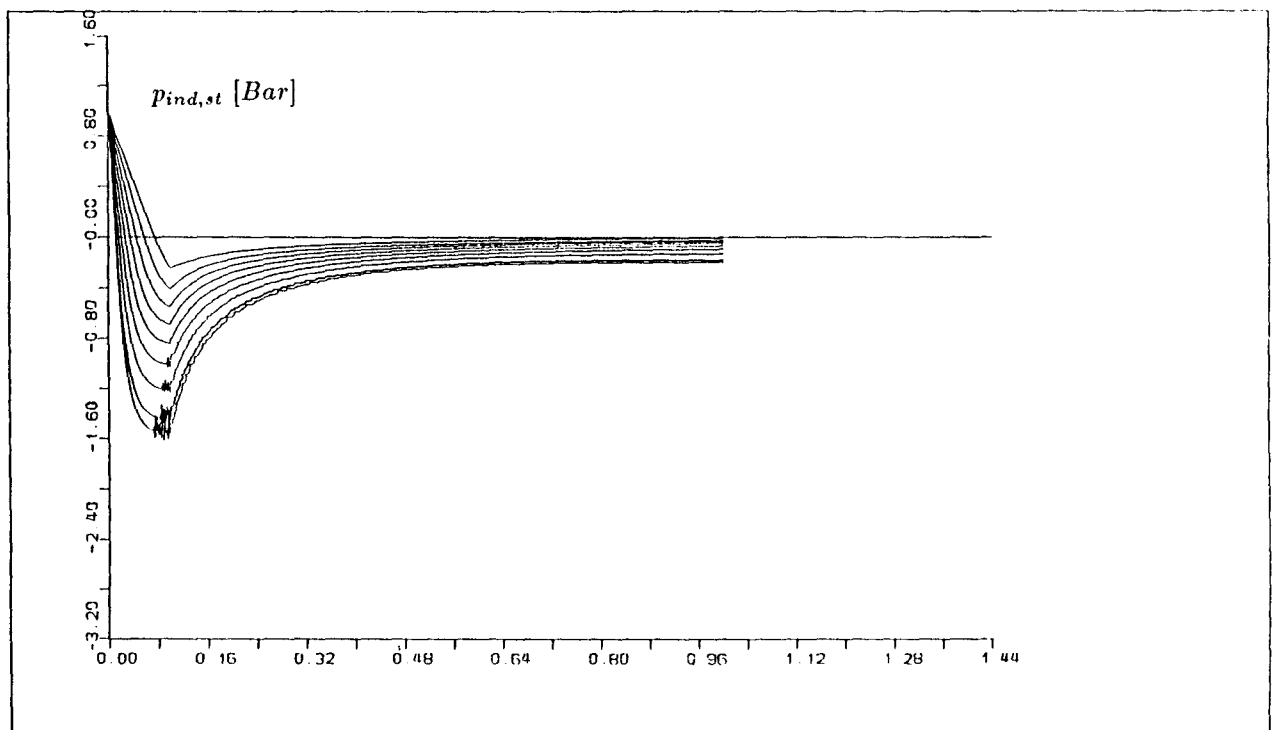


Abb.(2.58): Umgebungsdruck, $E=25$

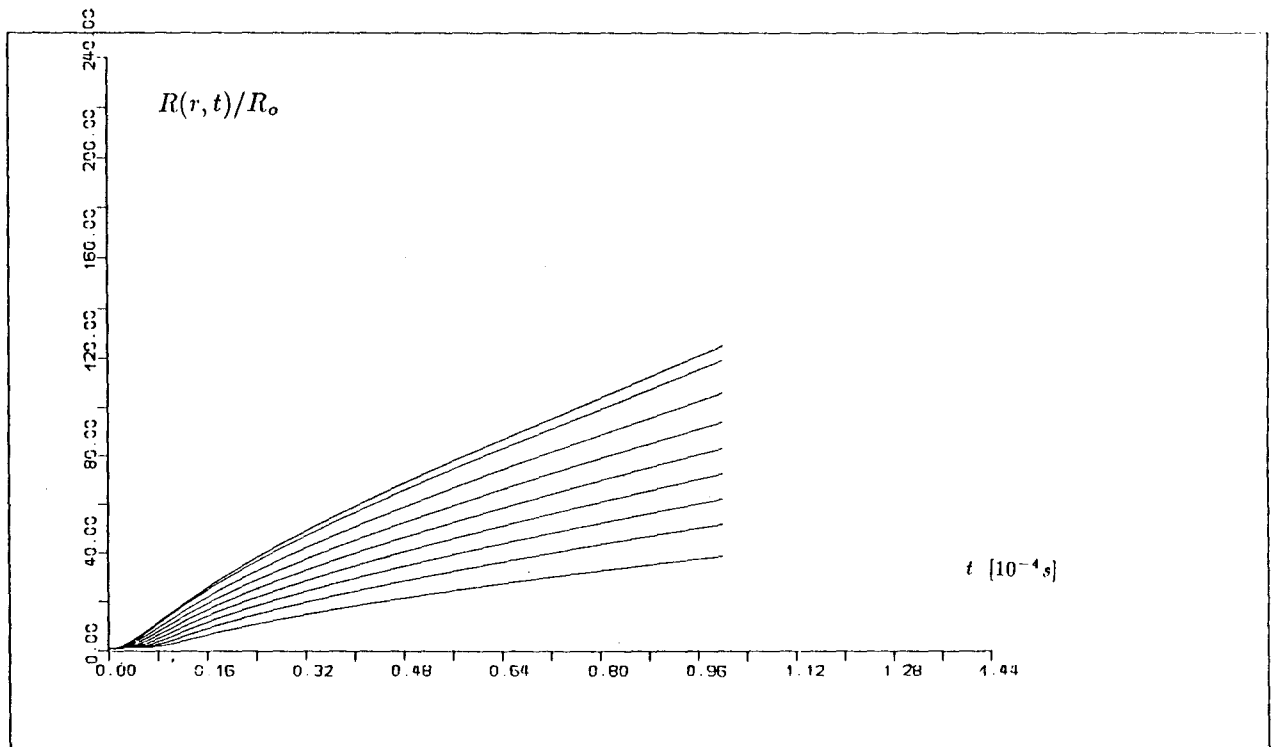


Abb.(2.59): Radientwicklung, $E=35$

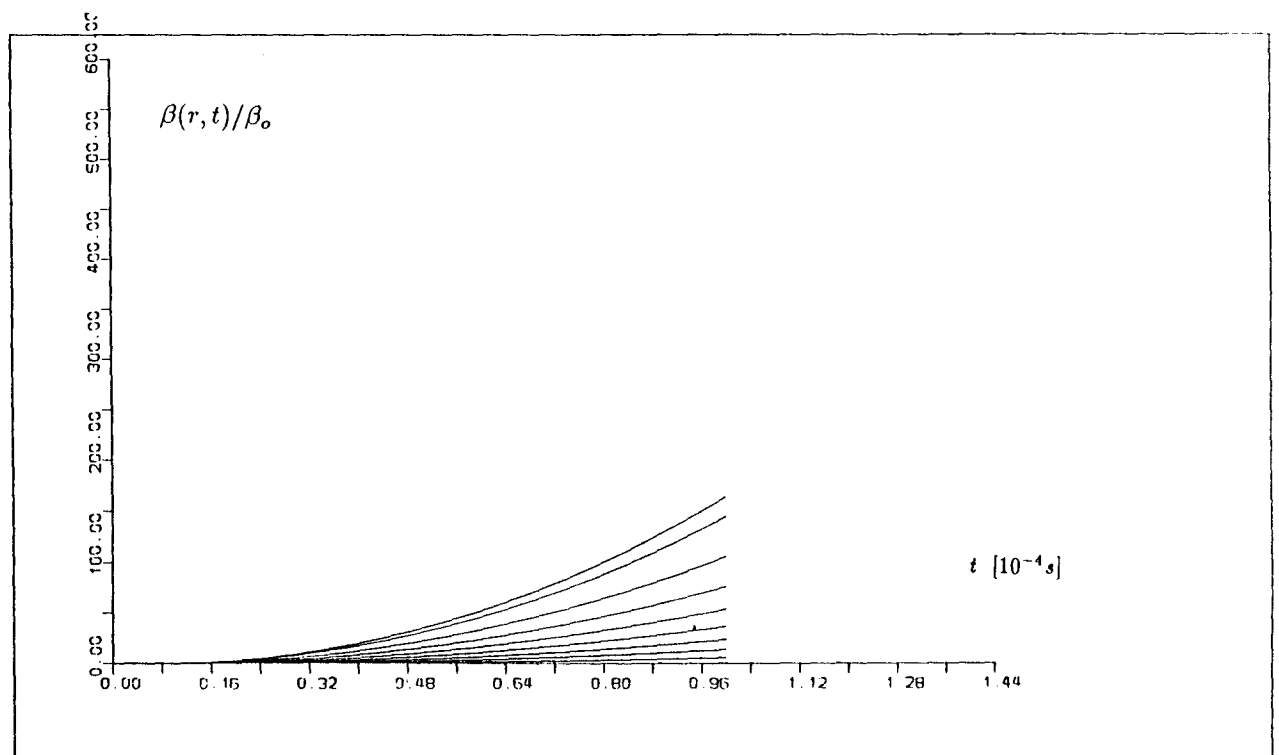


Abb.(2.60): Gasvolumenverhältnis, $E=35$

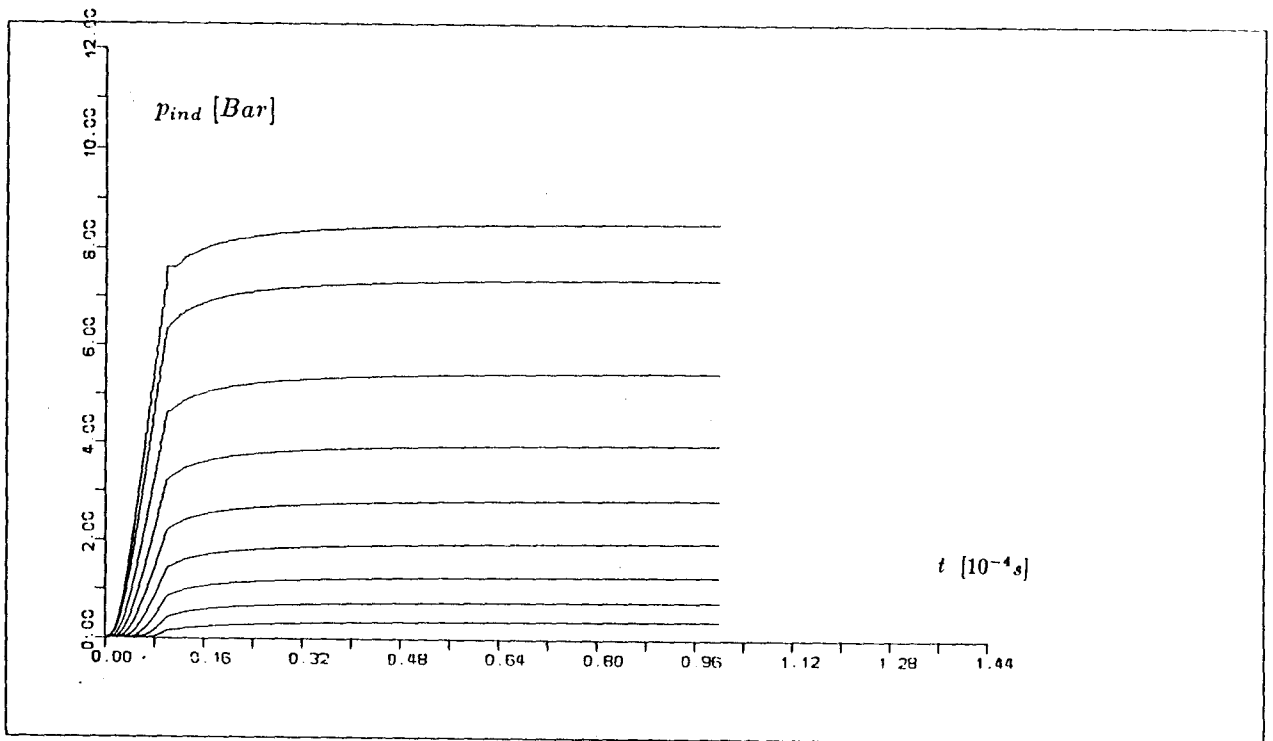


Abb.(2.61): Induzierter Druck, $E=35$

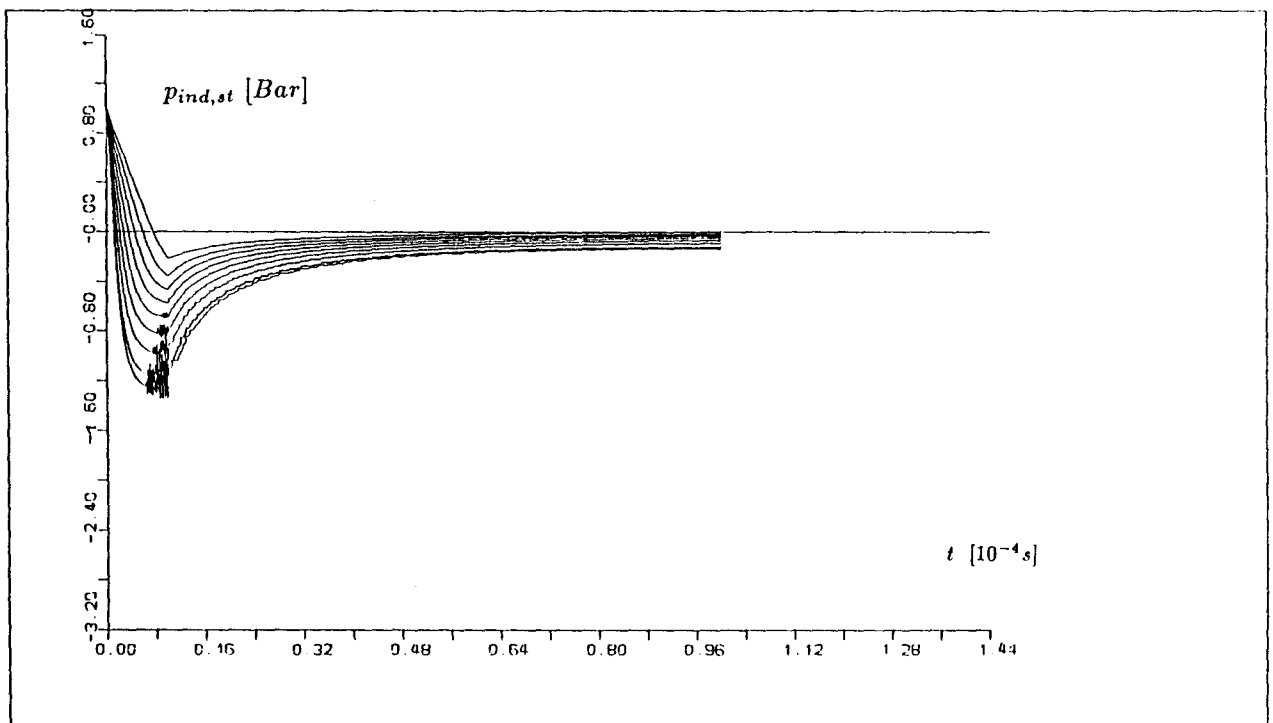


Abb.(2.62): Umgebungsdruck, $E=35$

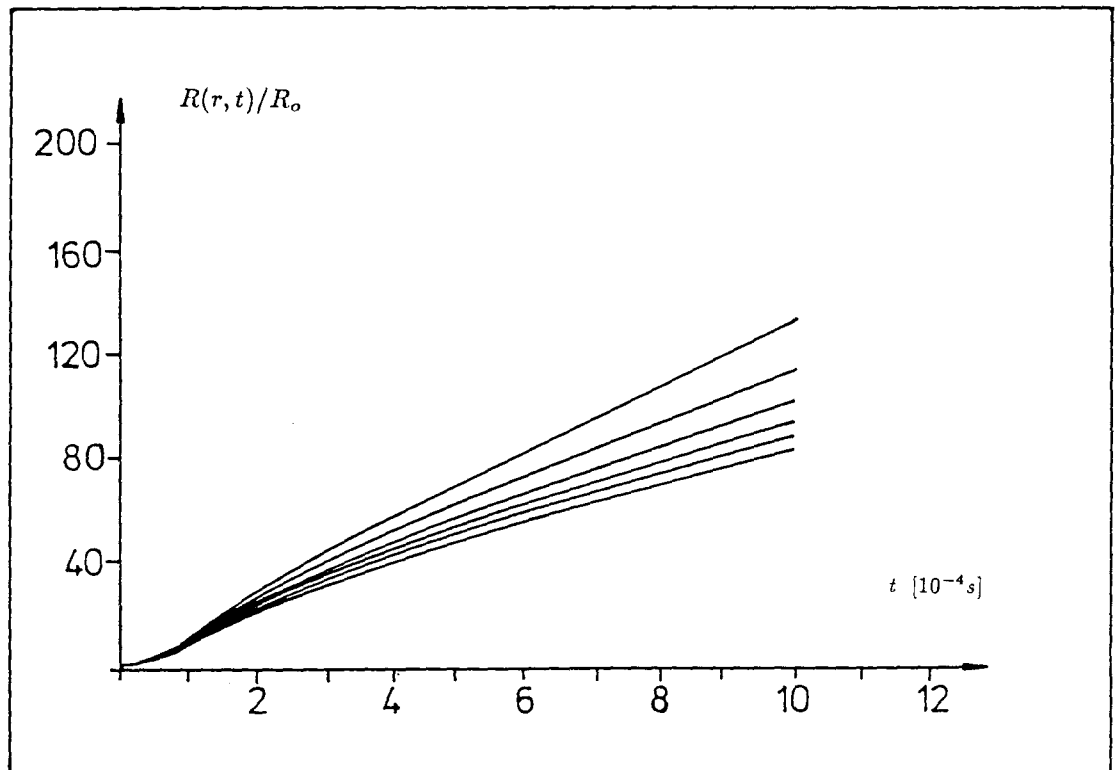


Abb.(2.63): Radienentwicklung (Mittelwert), $E=10,15,20,25,30,35$

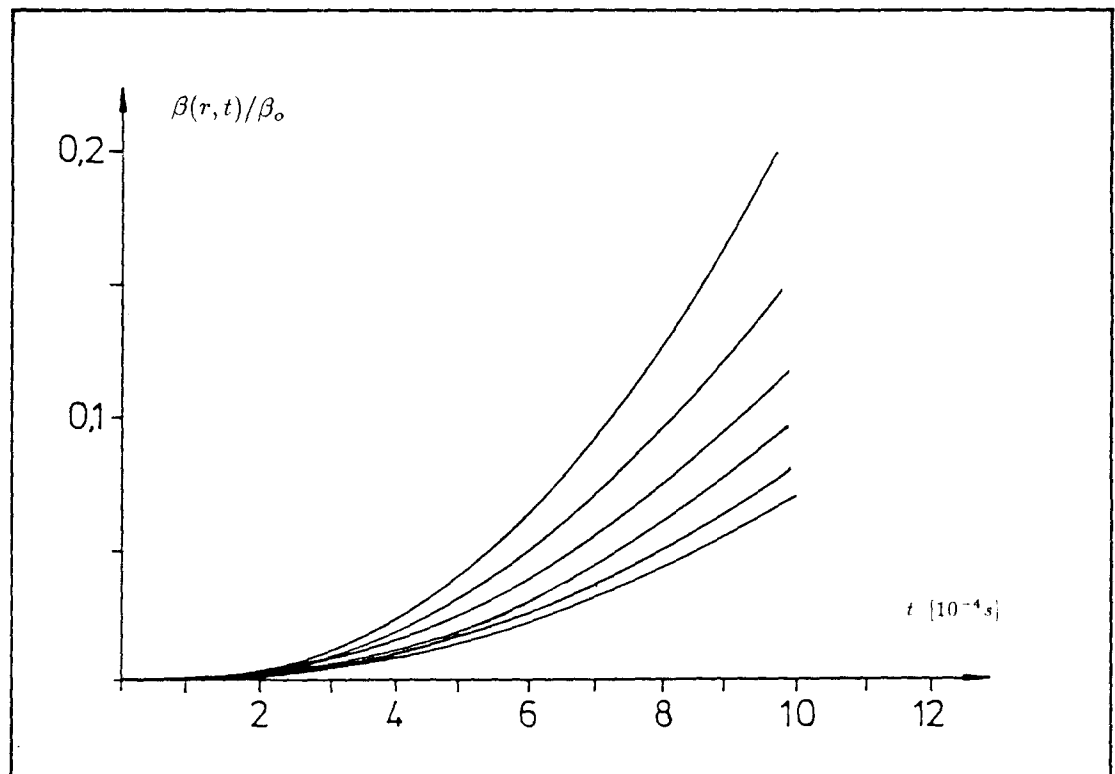


Abb.(2.64): Gasvolumenverhältnis (Mittelwert), $E=10,15,20,25,30,35$

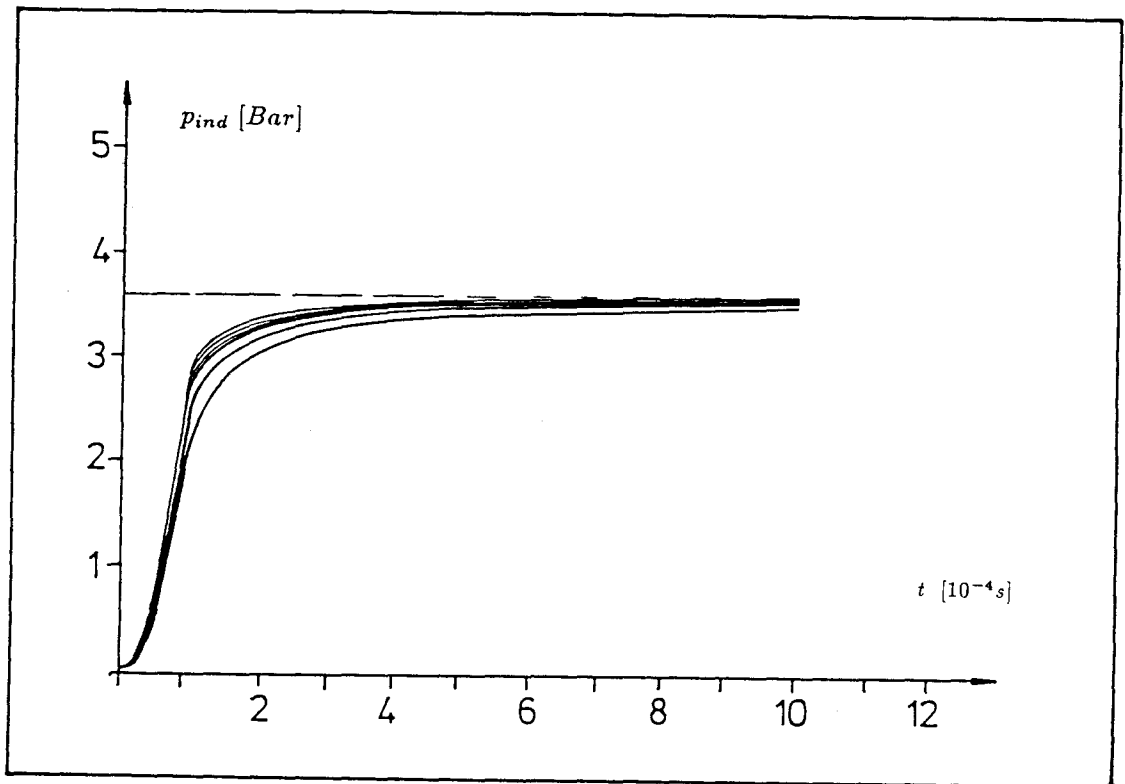


Abb.(2.65): Induzierter Druck (Mittelwert), $E=10,15,20,25,30,35$

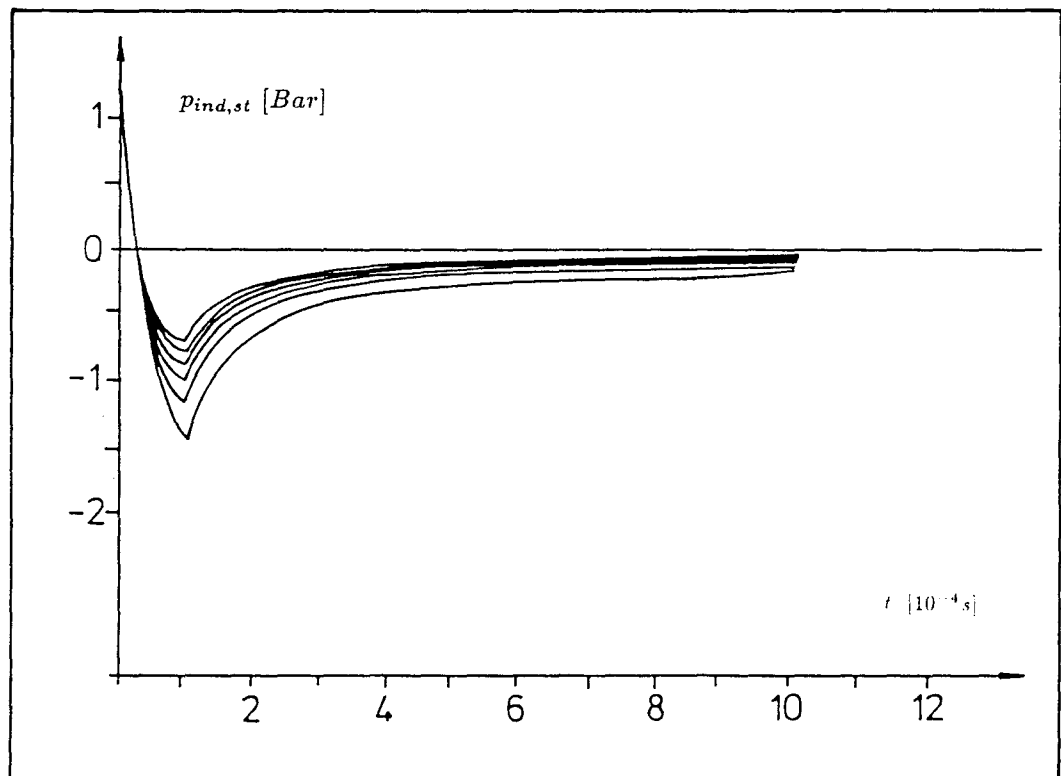


Abb.(2.66): Umgebungsdruck (Mittelwert), $E=10,15,20,25,30,35$

3. Das Verhalten von Kavitationsblasen in einem durch das Druckfeld geprägten Clustervolumen

3.1 Grundgleichungen

Zunächst bleiben die in Kapitel 2.1 genannten Annahmen bis auf die Einführung eines Geschwindigkeitspotentials weitestgehend erhalten. Insbesondere ist die Dichte des kompressiblen Fluids durch

$$\rho = \rho_w (1 - \beta) + \rho_g \beta \quad (3.1)$$

gegeben. Die partiellen Ableitungen von ρ lauten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_w \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} + \rho_g \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} = (\rho_g - \rho_w) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (3.2)$$

sowie

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = (\rho_g - \rho_w) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial r} \quad (3.3)$$

Der Zusammenhang zwischen β und ρ ergibt nach Gl.(3.1) zu

$$\beta = \frac{\rho - \rho_w}{\rho_g - \rho_w} \quad (3.4)$$

mit den partiellen Ableitungen entsprechend Gl.(3.2),(3.3). Die Kontinuitätsgleichung für das Fluid lautet wie schon zuvor

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + W \cdot \frac{\partial \beta}{\partial r} = \left(\frac{\rho_w}{\rho_w - \rho_g} - \beta \right) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{2}{r} \cdot W \right) \quad (3.5)$$

Speziell für $\beta \mapsto 1$ gilt

$$\frac{\rho_w}{\rho_w - \rho_g} - \beta \mapsto \frac{\rho_g}{\rho_w - \rho_g} \quad (3.6)$$

Der Impulssatz lautet mit $\rho \approx \rho_w (1 - \beta)$ (vgl. Gl.(2.11))

$$\rho_w (1 - \beta) \left(\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.7)$$

Aus dem Blasenerhaltungssatz folgt nach Integration (Gl.(2.12)..(2.14))

$$\frac{\zeta}{\zeta_o} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta_o} \quad (3.8)$$

3.2 Modellannahmen

Die Lösung der Kontinuitätsgleichung, die sich auch in der Form

$$\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\ln(r^2(1 - \beta))) \cdot W = \frac{1}{1 - \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (3.9)$$

schreibt, lautet mit einer noch freien Zeitfunktion $c_1(t)$

$$W = \frac{c_1(t)}{r^2(1-\beta)} + \frac{1}{r^2(1-\beta)} \int^r \frac{\partial \beta}{\partial t} s^2 ds \quad . \quad (3.10)$$

Statt des Clustermodells [2],[3] soll jetzt $\beta(r, t)$ kontinuierlich nach außen abklingen. Dieses trägt der Tatsache Rechnung, daß Kavitationskeime im gesamten Wasser homogen verteilt sind und Aufweitungsprozesse nur dort einsetzen, wo der Druck (örtlich) absinkt. Ein möglicher Ansatz, der der Forderung $W \mapsto 0$ für $r \mapsto \infty$ genügt, wäre

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \cdot e^{-\kappa r} \quad ; \kappa > 0 \quad . \quad (3.11)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich für die Fluidgeschwindigkeit $W(r, t)$ die Lösung

$$W(r, t) = \frac{c_1(t)}{r^2(1-\beta)} - \frac{1}{\kappa(1-\beta)} \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \left(1 + \frac{2}{\kappa} + \frac{2}{r^2 \kappa^2} \right) e^{-\kappa r} \quad (3.12)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} (1-\beta) \frac{\partial W(r, t)}{\partial t} = & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial c_1(t)}{\partial t} + \frac{c_1(t) \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} e^{-\kappa r}}{1-\beta} \right) \\ & - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial^2 c_2(t)}{\partial t^2} + \frac{\left(\frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \right)^2 e^{-\kappa r}}{1-\beta} \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{\kappa r} + \frac{2}{\kappa^2 r^2} \right) e^{-\kappa r} \end{aligned} \quad (3.12a)$$

sowie

$$\begin{aligned} (1-\beta) \frac{\partial W}{\partial r} = & - \frac{1}{r^2} \left(\frac{2c_1(t)}{r} + \frac{c_1(t)c_2(t)\kappa e^{-\kappa r}}{1-\beta} \right) \\ & - \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \left(1 + \frac{2}{\kappa r} + \frac{4}{\kappa^2 r^2} + \frac{4}{\kappa^3 r^3} \right) e^{-\kappa r} \\ & - \frac{c_2(t)}{1-\beta} \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \left(1 + \frac{2}{\kappa r} + \frac{2}{\kappa^2 r^2} \right) e^{-2\kappa r} \quad . \end{aligned} \quad (3.12b)$$

Die elementare Integration von Gl (3.11) ergibt mit der Randbedingung $\beta = 0$ für $r \mapsto \infty$

$$\beta(r, t) = c_2(t) \cdot e^{-\kappa r} \quad (3.11a)$$

und man erhält den Impulssatz

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = (1 - c_2(t)e^{-\kappa r}) \cdot W(r, t) + \frac{1}{2} (1 - c_2(t)e^{-\kappa r}) \frac{\partial W(r, t)^2}{\partial r} \quad . \quad (3.13)$$

Nach Einsetzen von Gl.(3.12),(3.12a),(3.12b) und (3.11a) in den Impulssatz Gl.(3.13) liefert die Integration

$$\begin{aligned} \frac{r, t) - p_\infty}{\rho w} = & \int_r^\infty \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial c_1(t)}{\partial t} + \frac{c_1(t) \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} e^{-\kappa r}}{1 - \beta} \right) \\ & - \frac{1}{\kappa} \int_r^\infty \left(\frac{\partial^2 c_2(t)}{\partial t^2} + \frac{\left(\frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \right)^2 e^{-\kappa r}}{1 - \beta} \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{\kappa r} + \frac{2}{\kappa^2 r^2} \right) e^{-\kappa r} dr \\ & - \frac{c_2(t) \kappa}{2} \int_r^\infty \frac{e^{-\kappa r}}{(1 - c_2(t) e^{-\kappa r})^2} \cdot \left(\frac{c_1(t)}{r^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \left(1 + \frac{2}{\kappa r} + \frac{2}{\kappa^2 r^2} \right) e^{-\kappa r} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} (1 - c_2(t) e^{-\kappa r})^{-1} \cdot \left(\frac{c_1(t)}{r^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \left(1 + \frac{2}{\kappa r} + \frac{2}{\kappa^2 r^2} \right) e^{-\kappa r} \right)^2 \quad (3.14) \end{aligned}$$

Die in G.(3.14) auftretenden Integrale können durch eine Reihenentwicklung der Form

$$\frac{1}{1 - c_2(t) e^{-\kappa r}} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_2(t) e^{-\kappa r})^n \quad (3.15)$$

dargestellt werden. Dann lassen sich alle Integrale mit Hilfe der Regressionsformel

$$I_{m,q} := \int_r^\infty \frac{e^{-mr}}{r^q} dr = \frac{1}{q-1} \frac{e^{-mr}}{r^{q-1}} - \frac{m}{q-1} \cdot I_{m,q-1} \quad (3.16)$$

auf

$$-E_i(-mr) = \int_r^\infty \frac{e^{-mr}}{r} dr = I_{m,1} \quad (3.17)$$

zurückführen. Das Integral $I_{m,1}$ wird numerisch berechnet.

3.3 Lösung des Gleichungssystems

Mit dem Ansatz nach Gl.(3.11) sowie Impulssatz, Kontinuitätsgleichung und Blasenerhaltungssatz sind die Feldfunktionen R , β , p und W eindeutig festgelegt. Die von der Lösung $W(r,t)$ Gl.(3.12) zu erfüllende Randbedingung lautet $W(r,t) = \frac{\partial R(r,t)}{\partial t}$ für $r = R$. Damit kann die freie Zeitfunktion $c_1(t)$ durch Einsetzen der Randbedingung in Gl.(3.12) bestimmt werden zu

$$c_1(t) = R(r,t)^2 \frac{\partial R(r,t)}{\partial t} (1 - c_2(t) e^{-\kappa r}) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial c_2(t)}{\partial t} \left(R(r,t)^2 + \frac{2R(r,t)}{\kappa} + \frac{2}{\kappa^2} \right) e^{-\kappa r} \quad (3.18)$$

Für die Berechnung der Funktion $c_2(t)$ kann der Blasenerhaltungssatz an der Stelle $r = R$ verwendet werden. Es gilt

$$\frac{\beta(r,t)}{1 - \beta(r,t)} = \frac{R(r,t)^3}{R_0^3} \cdot \frac{\beta_0}{1 - \beta_0} = \frac{c_2(t)}{e^{\kappa r} - c_2(t)}$$

und damit

$$c_2(t) = \frac{R(r,t)^3}{R_0^3} \cdot \frac{\beta_0}{1-\beta_0} e^{\kappa r} \left(1 + \frac{R(r,t)^3}{R_0^3} \cdot \frac{\beta_0}{1-\beta_0} \right)^{-1} \quad (3.19)$$

Für die Ableitungen der Zeitfunktionen $c_1(t), c_2(t)$ erhält man mit der Abkürzung $c = \beta_0 \cdot (1 - \beta_0) \cdot R_0^{-3}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1(t)}{\partial t} = & \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \left(\frac{R^2}{1+cR^3} + \left(R^2 + \frac{2R}{\kappa} + \frac{2}{\kappa^2} \right) \cdot \left(\frac{cR^2(3+\kappa R)}{\kappa(1+cR^3)} - \frac{3c^2 R^5}{\kappa(1+cR^3)^2} \right) \right) \\ & + \frac{\partial R^2}{\partial t} \cdot \left(\frac{2R+c\kappa R^5}{1+cR^3} + \left(2R + \frac{2}{\kappa} \right) \left(\frac{cR^2(3+\kappa R)}{\kappa(1+cR^3)} - \frac{3c^2 R^5}{\kappa(1+cR^3)^2} \right) \right) \\ & + \frac{\partial R^2}{\partial t} \cdot \left(\frac{cR}{\kappa(1+cR^3)} \left((3+\kappa R)^2 - 3 \right) - \frac{6c^2 R^4(4+\kappa R)}{\kappa(1+cR^3)^2} \right) \cdot \left(R^2 + \frac{2R}{\kappa} + \frac{2}{\kappa^2} \right) \\ & + \frac{\partial R^2}{\partial t} \cdot \left(\frac{18c^3 R^7}{\kappa(1+cR^3)^3} - \frac{cR^2(3+\kappa R)}{(1+cR^3)} + \frac{3c^2 R^5}{(1+cR^3)^2} \right) \cdot \left(R^2 + \frac{2R}{\kappa} + \frac{2}{\kappa^2} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

sowie

$$\frac{\partial c_2(t)}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} \cdot \left(\frac{cR^2(3+\kappa R)e^{\kappa R}}{1+cR^3} - \frac{3c^2 R^5 e^{\kappa R}}{(1+cR^3)^2} \right) \quad (3.21)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_2(t)}{\partial t^2} = & \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} \cdot \left(\frac{cR^2(3+\kappa R)e^{\kappa R}}{1+cR^3} - \frac{3c^2 R^5 e^{\kappa R}}{(1+cR^3)^2} \right) \\ & - \frac{\partial R^2}{\partial t} \cdot \left(\frac{cR e^{\kappa R}}{1+cR^3} \left((3+\kappa R)^2 - 3 \right) + \frac{18c^3 R^7 e^{\kappa R}}{(1+cR^3)^3} \right) \\ & - \frac{\partial R^2}{\partial t} \cdot \frac{6c^2 R^4 e^{\kappa R} (4+\kappa R)}{(1+cR^3)^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die obigen Beziehungen können jetzt in Gl.(3.14) eingesetzt und das Integral gem. Gl.(3.16),(3.17) gelöst werden. Die Blasengleichung ergibt sich im Fall $r = R$ mit

$$p(R,t) = p_{L0} \frac{R_0^3}{R(r,t)^3} - \frac{2\sigma}{R(r,t)} + p_v \quad (3.23)$$

3.4 Ergebnisse

Für die Berechnungen wird ein Anfangsradius von $R_0 = 5 \cdot 10^{-4} [cm]$ zugrundegelegt. Dies entspricht bei einem Gasvolumenverhältnis von $\beta_0 = 10^{-7}$ (10^{-5}) der Konzentration von $\zeta = 191 [cm^{-3}]$ ($19100 [cm^{-3}]$). Im Gleichgewichtsfall ($p_\infty = 1 [bar]$, $R(r,t) = R_0$) errechnet sich der Partialluftdruck zu $p_{L0} = 1.267 [bar]$ (Partialgasdruck $p_v = 0.023 [bar]$, Oberflächenspannung $\sigma = 7.25 \cdot 10^{-5} [bar \cdot cm]$, Dichte des inkompressiblen Fluids $\rho =$

$10^{-6} \text{ [bar cm}^{-2} \text{ s}^2\text{]})$. p_{L0} und p_v können nach [1] in sehr guter Näherung als Konstante behandelt werden.

Abb.(3.1) zeigt die zeitliche Entwicklung des Blasenradius' im Fall der instabilen Blasenaufweitung. Hierzu wurde Gl.(3.14) mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4.Ordnung numerisch gelöst ($p_\infty = -0.1 \text{ [bar]}$). In Abhängigkeit der nach Gl.(3.11) gewählten Werte von κ ergibt sich eine verschieden starke Dämpfung des Aufweitungsprozesses. Alle Rechnungen weisen in Übereinstimmung mit [2],[3] das Ergebnis auf, daß bei kleineren Werten von κ - entsprechend einer stärkeren Berücksichtigung des kompressiblen Fluidvolumens um die betrachtete Aufpunktblase - eine größere Verlangsamung des Aufweitungsprozesses erzielt wird.

Zum Vergleich sind in Abb.(3.2) die Ergebnisse für eine erhöhten Druckabsenkung $p_{min} = -0.2 \text{ [bar]}$ bzw. in Abb.(3.3) für ein erhöhtes Gasvolumenverhältnis $\beta_0 = 10^{-5}$ gegenüber Abb.(3.1) dargestellt. Bei stärkerer Druckabsenkung ergeben sich entsprechend beschleunigte Blasenaufweitungsvorgänge. Dieses Verhalten wird qualitativ auch bei stärker gashaltigem Wasser erzielt.

Erhalten bleibt für alle gewählten Parameter ($\beta_0 = 10^{-7}$ bzw. 10^{-5} , $p_\infty = -0.1 \text{ [bar]}$ bzw. -0.2 [bar]) aber auch die insgesamt unbefriedigende Eigenschaft, daß die mit dem Modell der nach außen kontinuierlich abklingenden β -Verteilung erzielten Ergebnisse von einem frei wählbaren, nicht durch das betrachtete System zu bestimmenden Parameter abhängen. Ein Ansatz der Form (3.11) bzw. (3.11a) stellt deshalb gegenüber [2],[3],[4] keine weitere Verbesserung dar.

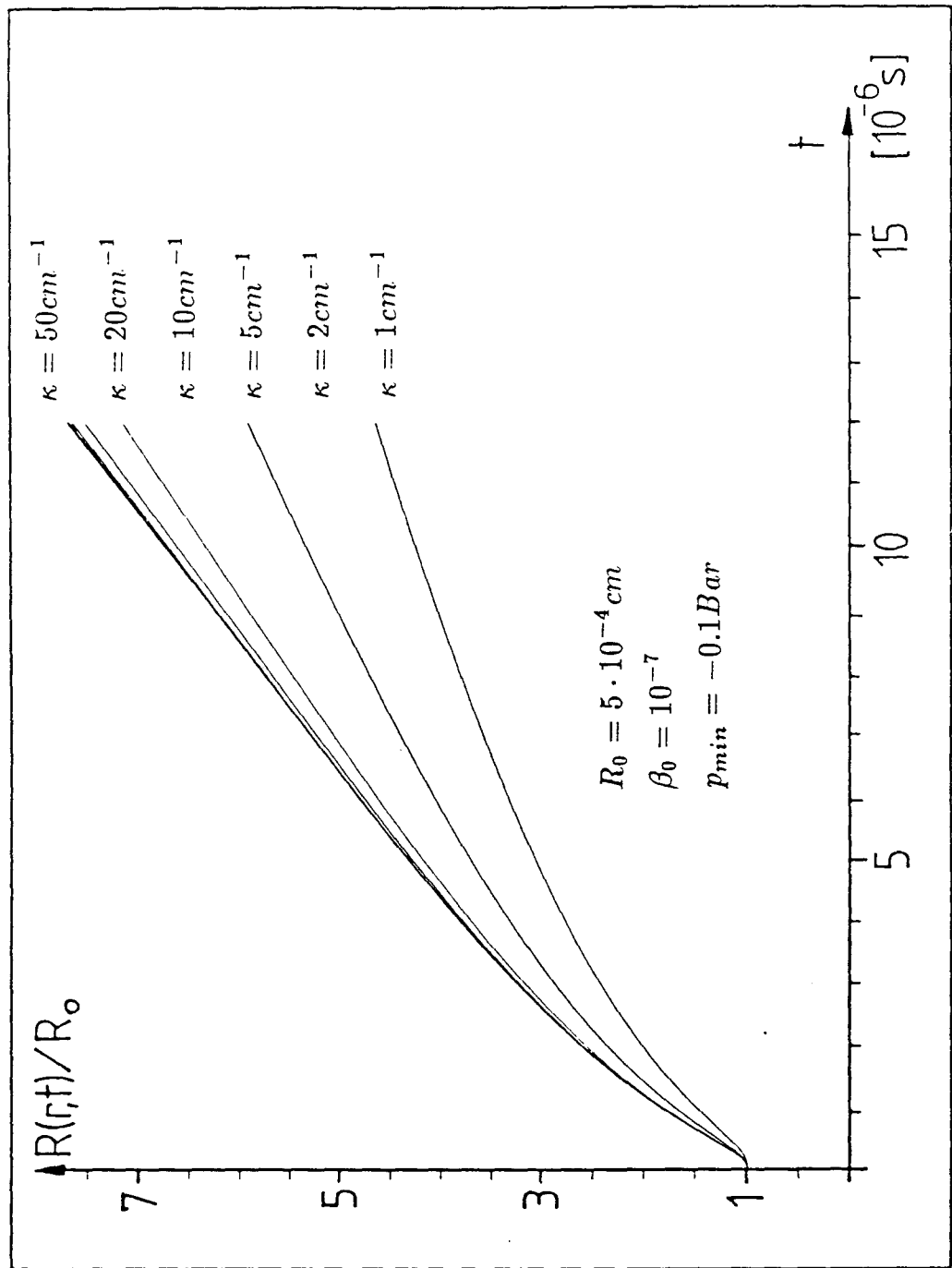


Abb. (3.1)

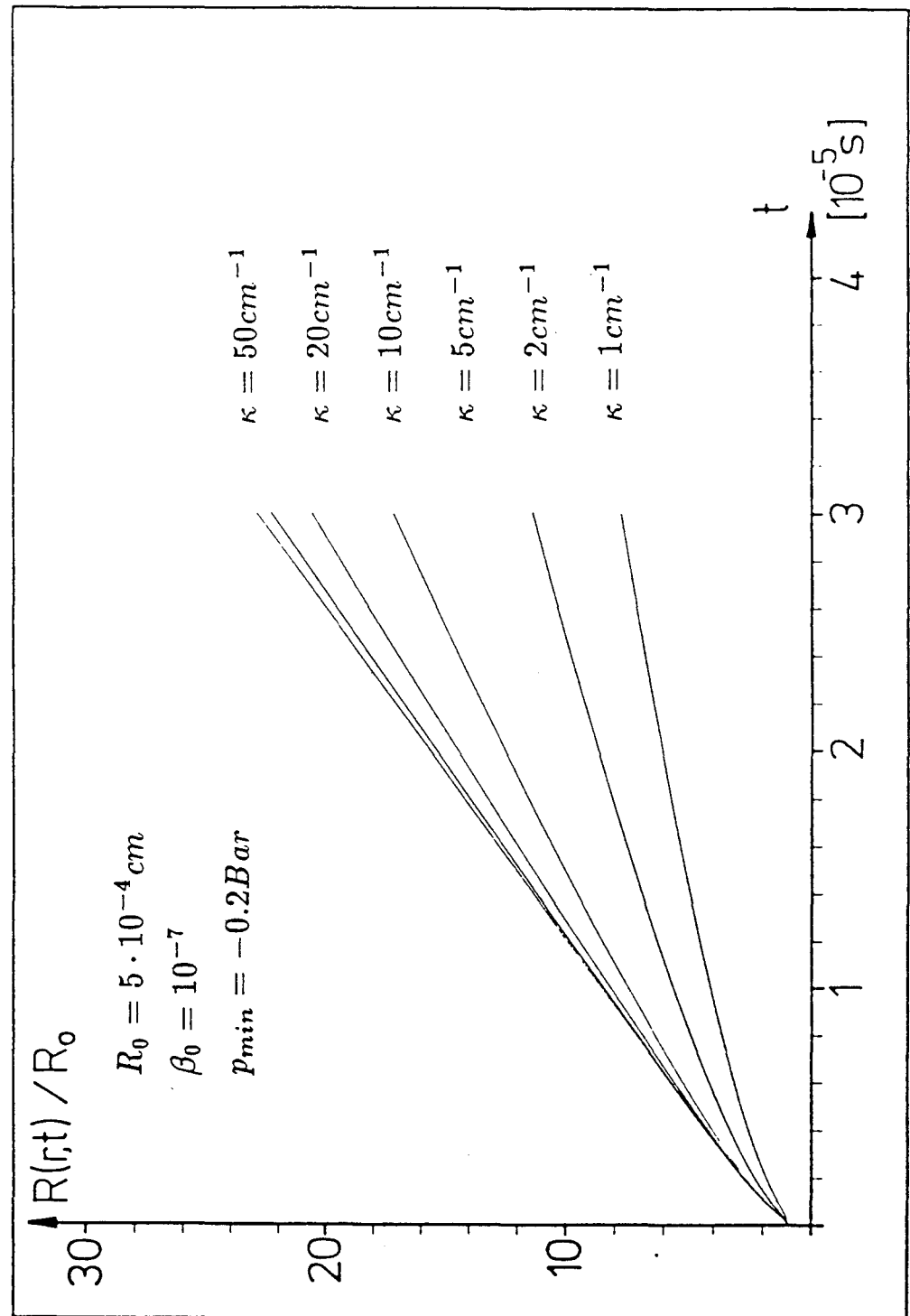


Abb. (3.2)

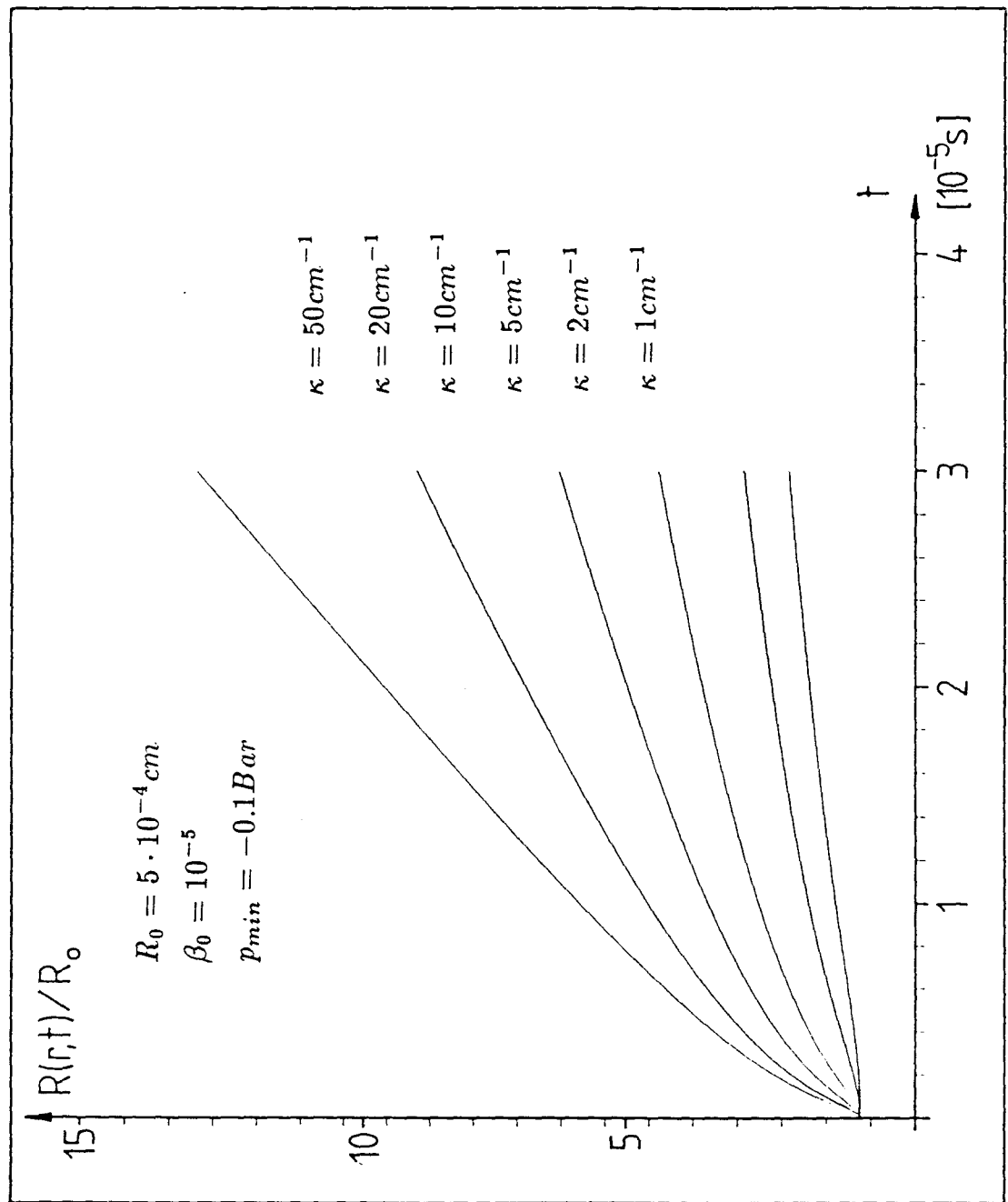


Abb. (3.3)

4. Die Zustandsgleichung

Vorgestellt werden verschiedene Modelle, die bei isothermer Zustandsänderung ($T = 293 \text{ [K]}$) den Zusammenhang zwischen Druck und (Molekül-) Volumen von gashaltigem Wasser korrekt beschreiben. Die Zustandsgleichung muß im einzelnen wiedergeben, daß ein Volumen $v < v_w = 3 \cdot 10^{-23} \text{ [cm}^3\text{]}$ nur bei sehr hohen Drücken angenommen wird, da Wasser nahezu inkompressibel ist. Zu höheren Volumina setzt sich der entsprechend steile Druckabfall solange weiter fort, bis die der Reinheit äquivalente Zerreißspannung erreicht ist. Für eine steigende Gasvolumenkonzentration muß die Zerreißspannung früher, d.h. bei entsprechend geringeren Volumina erreicht werden und das kritische Volumen kleinere Werte annehmen.

Die reine Dampfphase liegt bei $\beta = 1$ vor. In der Kavitationsphysik ist hierfür eine Beschreibung durch die ideale Gasgleichung ($pV = NkT$) ausreichend genau [1]. Diese Gleichung muß sich als Grenzfall ($\beta \mapsto 1$) ergeben.

4.1 Diskussion eines Ansatzes

Zur Beschreibung realer Gase ist von vielen Autoren die ideale Gasgleichung nach Potenzen der Dichte bzw. nach Potenzen von $1/v$ entwickelt worden:

$$\frac{p(v)}{kT} = \left(\frac{1}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v^3} \right)$$

(siehe hierzu die sehr gute Darstellung und Übersicht in [7]). Die Möglichkeit, durch Anpassung der Virialkoeffizienten B , C und D an die Bedingungen $p(v_v) = p_v$ (oder 0 [bar]), $p(v_w) = 1 \text{ [bar]}$ (oder $p_v, 0 \text{ [bar]}$) sowie $p_k = -1000 \text{ [bar]}$ eine Interpolationsformel aufzustellen, erweist sich jedoch insgesamt als unbefriedigend, da nach Überschreiten des Minimalvolumens ($v \geq v_k$) die Zugspannung unrealistisch langsam aufgehoben wird. Grund hierfür sind die niedrigen Ordnungen von v^{-1} in der Virialgleichung, die eine Beschreibung steiler Druckabfälle/-anstiege nicht ermöglichen. Rechnungen mit einer "allgemeinen" Zustandsgleichung der Form $\frac{p}{kT} = v^{-m} - v^{-n}$ ergeben die Bedingung $m \gg n > 5$. Dieses ist auch physikalisch sinnvoll, da der n .te Virialkoeffizient den Anteil von n wechselwirkenden Gasmolekülen (in der Beschreibung realer Gase) repräsentiert.

4.2 Diskussion eines Ansatzes

Die Zustandsgleichung kann mit Hilfe einer Maxwell-Relation aus der freien Energie F bestimmt werden. Es gilt [4]:

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} . \quad (4.1)$$

Die Verwendung dieser Formel bedingt die korrekte Formulierung der Zustandssumme unter Berücksichtigung folgender Modellannahmen: Wir betrachten ein Volumen V mit

N identischen Molekülen. Die gerichtete Bindung der Wasserstoffatome wird zugunsten eines kugelförmigen Moleküls vernachlässigt. Das mittlere Volumen beträgt

$$v = N/V = 4 \cdot \pi \cdot R^3/3 \quad .$$

Alle durchgeführten Rechnungen beziehen sich zunächst auf ein einatomiges Molekül, die Freiheitsgrade der Rotation und Schwingung sind eingefroren; zur Gesamtenergie tragen nur das Potential und die Translation bei. Der allgemeine Ausdruck für die freie Energie F lautet[4]:

$$F = -kT \cdot \ln \int' \exp(-E(p, x)/kT) d\Gamma \quad (4.2)$$

mit der Energie

$$E(p, x) = \sum_{j=1}^N (p_{1j}^2 + p_{2j}^2 + p_{3j}^2)/2m + U(x_i) \quad (4.3)$$

und dem Phasenraumvolumen

$$d\Gamma = h^{-B} dp_1 dp_2 dp_3 dv; \quad B = 3N \quad .$$

Die Integration über die Impulse liefert:

$$F = -NkT \cdot \ln \left(\frac{eV}{N} \cdot \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right) - kT \cdot \ln \left(\frac{1}{V^N} \cdot \int_{1 \dots i \dots N} \exp(-U(x_i)/kT) dx_i^N \right) \quad (4.4)$$

mit

$$\int' \dots = \frac{1}{N!} \int \dots$$

sowie

$$N! \approx N^N e^{-N} \quad .$$

Die Integration in Gl.(4.2) bezieht sich auf die verschiedenen Zustände im Phasenraum. Sie kann bei gleichzeitiger Division mit $N!$ auf das Gesamtvolumen ausgedehnt werden [4]. Gleichung (4.4) ergibt sich mit der Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2/2mkT) dp = \sqrt{2\pi mkT}$$

Dabei ist

$$dx_i = dV = dx_{1i} dx_{2i} dx_{3i} \quad \text{und} \quad B = 3$$

Für $U(x_i) = 0$ liefert die Integration im zweiten Summanden von (4.4) den Wert V^N und es bleibt

$$F = F_{ideal} = -NkT \cdot \ln \left(\frac{eV}{N} \cdot \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right) \quad . \quad (4.5)$$

Für Entfernungen $R > R_o$ (R_o Gleichgewichtsabstand) liefert das Wechselwirkungspotential einen anziehenden Beitrag, z.B.

$$U(R) \sim R^{-6} \quad .$$

Mit steigender Entfernung vom Aufpunktmolekül wird $U(R)$ schließlich vernachlässigbar klein und wir bezeichnen die Anzahl der noch signifikant zur Wechselwirkung beitragenden Moleküle mit Q . Ist die Struktur durch die Wechselwirkung dieser Q Moleküle geprägt, so gibt es [4]

$$\binom{N}{Q} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-Q+1)}{Q!}$$

unabhängige Wechselwirkungen. Wegen der Voraussetzung $Q \ll N$ vereinfacht sich $\binom{N}{Q}$ zu $N^Q/Q!$ und damit die freie Energie F zu

$$F = F_{id} - kT \cdot \ln \left(\frac{N^Q}{Q! \cdot V^N} \cdot \int_{1 \dots i \dots N} (\exp(-U(x_1, \dots, x_Q)/kT) - 1) dx_i^N + 1 \right) \quad . \quad (4.6)$$

Der letzte Integrand ist immer dann zu vernachlässigen, wenn das Wechselwirkungspotential $U \approx 0$ gesetzt werden kann. Mit den o.a. Modellannahmen können deßhalb $N - Q$ Integrationen durchgeführt werden:

$$F = F_{id} - kT \cdot \ln \left(\frac{N^Q}{Q! \cdot V^Q} \cdot \int_{1 \dots i \dots Q} (\exp(-U(x_1, \dots, x_Q)/kT) - 1) dx_i^Q + 1 \right) \quad . \quad (4.7)$$

Unter der Voraussetzung, daß das Integral in Gl.(4.7) kleiner als 1 ist, entwickeln wir $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ [s.auch [4,7]] und erhalten

$$\begin{aligned} F = F_{id} + kT \cdot \frac{N^Q}{Q! V^Q} \cdot \int_{1 \dots i \dots Q} (1 - \exp(-U(x_1, \dots, x_Q)/kT)) dx_i^Q \\ + \frac{kt}{2} \cdot \frac{N^{2Q}}{(Q! V^Q)^2} \cdot \left(\int_{1 \dots i \dots Q} (1 - \exp(-U(x_1, \dots, x_Q)/kT)) dx_i^Q \right)^2 \quad . \quad (4.8) \end{aligned}$$

Vor Anwendung von Gleichung (4.1) ist noch eine weitere Vereinfachung der letzten beiden Integrale möglich. Mit der Annahme, daß das Wechselwirkungspotential in Gl.(4.8) nur von dem Relativabstand der beteiligten Moleküle abhängt, kann bei gleichzeitiger Substitution aller Koordinaten x_i durch Relativkoordinaten ξ_i bzgl. eines Aufpunktmoleküls eine weitere Raumintegration vollzogen werden:

$$\int_{1 \dots i \dots Q} (1 - \exp(-U(x_1, \dots, x_Q)/kT)) dx_i^Q = V \cdot \int_{1 \dots i \dots Q-1} (1 - \exp(-U(\xi_i, \dots, \xi_{Q-1})/kT)) d\xi^{Q-1} \quad (4.9)$$

und mit (4.1) folgt die Zustandsgleichung

$$p(V) = \frac{NkT}{V} + kt \cdot \frac{N^Q}{V^Q} \cdot \frac{Q-1}{Q!} \cdot \int_{1 \dots i \dots Q-1} (1 - \exp(-U(\xi_1, \dots, \xi_{Q-1})/KT)) d\xi_i^{Q-1} \\ + kT \cdot \frac{N^{2Q}}{V^{2Q-1}} \cdot \frac{Q-1}{(Q!)^2} \cdot \left(\int_{1 \dots i \dots Q-1} (1 - \exp(-U(\xi_1, \dots, \xi_{Q-1})/kT)) d\xi_i^{Q-1} \right)^2 \quad (4.10)$$

Mit der Abkürzung

$$J = \frac{1}{Q!} \cdot \int_{1 \dots i \dots Q-1} (1 - \exp(-U(\xi_1, \dots, \xi_{Q-1})/kT)) d\xi_i^{Q-1} \quad (4.11)$$

ergibt sich schließlich die auf das Molekül bezogene Zustandsgleichung in der Form

$$\frac{pv}{kT} = 1 + \frac{(Q-1)J}{v^{Q-1}} + \frac{(Q-1)NJ^2}{v^{2Q-2}} \quad (4.12)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite repräsentiert die Zustandsgleichung von Wasserdampf ($pv/kT = 1$), während die weiteren Terme durch den zusätzlichen Einfluß des Wassers bedingt sind und für $U = 0$ bzw. $Q = 1$ entfallen würden.

Die Gültigkeit der hier dargestellten Gleichungen hängt im besonderen Maße davon ab, ob die Reihenentwicklung des Logarithmus' zulässig ist, bzw. nur auf die ersten zwei Glieder beschränkt werden darf. Mit der Abkürzung (4.11) folgt aus der exakten Formel (4.7):

$$F = F_i d - kT \cdot \ln \left(1 - \frac{NJ}{v^{Q-1}} \right) \quad (4.13)$$

Hieraus folgt die Zustandsgleichung in der Form

$$\frac{p}{kT} = \frac{1}{v} \cdot \left(1 + \frac{J(Q-1)}{v^{Q-1} - NJ} \right) \quad (4.14)$$

und Gl.(4.1) führt auf die Bestimmungsgleichung

$$0 = 1 + \frac{J(Q-1)}{v_m^{Q-1} - NJ} + \frac{J(Q-1)^2 v_m^{Q-1}}{(v_m^{Q-1} - NJ)^2}$$

bzw.

$$v_m^{Q-1} = J \cdot \left(N + \frac{Q}{2} - \frac{Q^2}{2} \right) \pm J(Q-1) \cdot \sqrt{Q^2/4 - N} \quad (4.15)$$

Man sieht sofort, daß die Wurzel in (4.15) für $Q^2 < 4N$ imaginär wird. Ein Ansatz in dieser Form ist daher ungeeignet, da $Q \ll N$ als Bedingung vorausgesetzt wird.

4.3 Diskussion eines Ansatzes

Wir schreiben die freie Energie F gemäß (4.4) (s.2. Ansatz) und setzen das Potential in der Form

$$U(x_i) = U_I(x_1, \dots, x_Q) + U_{II}(x_1, \dots, x_R) \quad (4.16)$$

an. U_I beschreibt hierbei den Nahanteil des Potentials mit Q wechselwirkenden Molekülen, U_{II} den Fernanteil mit $R > 0$ Molekülen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(-U_I/kT - U_{II}/kT) &= 1 - (1 - \exp(-U_I/kT)) - (1 - \exp(-U_{II}/kT)) + \dots \\ &\dots + (1 - \exp(-U_I/kT)) \cdot (1 - \exp(-U_{II}/kT)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

und mit den Näherungen

$$\binom{N}{Q} \approx \frac{N^Q}{Q!}, \quad \binom{N}{R} \approx \frac{N^R}{R!} \quad (4.18)$$

folgt für die freie Energie F

$$\begin{aligned} F &= F_{id} - kT \cdot \left(1 - \frac{N^Q}{Q!V^N} \cdot \int_{1 \dots N} (1 - \exp(-U_I/kT)) dx_i^N - \dots \right. \\ &\dots - \frac{N^R}{R!V^N} \cdot \int_{1 \dots N} (1 - \exp(-U_{II}/kt)) dx_i^N + \dots \\ &\dots \left. + \frac{N^{R+Q}}{R!Q!V^N} \cdot \int_{1 \dots N} (1 - \exp(-U_I/kT)) \cdot (1 - \exp(-U_{II}/kT)) dx_i^N \right) \quad (4.19) \end{aligned}$$

Analog zum 2. Ansatz führen wir eine Koordinatentransformation durch (U_I hängt nur von $Q - 1$, U_{II} nur von $R - 1$ Relativkoordinaten ab) und definieren die Abkürzungen J_I , J_{II} und J_{III} gemäß Gl.(4.11):

$$J_I = \frac{1}{Q!} \cdot \int_{1 \dots Q-1} (1 - \exp(-U(\xi_1, \dots, \xi_{Q-1})/kT)) d\xi_i^{Q-1} \quad (4.20a)$$

$$J_{II} = \frac{1}{R!} \cdot \int_{1 \dots R-1} (1 - \exp(-U(\xi_1, \dots, \xi_{R-1})/kT)) d\xi_i^{R-1} \quad (4.20b)$$

und

$$J_{III} = \frac{1}{Q!R!} \cdot \int_{1 \dots R-1} (1 - \exp(-U_I/kT)) \cdot (1 - \exp(-U_{II}/kT)) d\xi_i^{R-1} \quad (4.20c)$$

Dann kann die freie Energie F mit $J_* = J_{II} - N^Q \cdot J_{III}$ endgültig in der Form

$$F = F_{id} - kT \cdot \ln \left(1 - \frac{N J_I}{v^{Q-1}} - \frac{N J_*}{v^{R-1}} \right) \quad (4.21)$$

geschrieben werden und man erhält mit Gl.(4.1) die Zustandsgleichung

$$\frac{p}{kT} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \cdot \frac{\frac{(Q-1)J_I}{v^{Q-1}} + \frac{(R-1)J_*}{v^{R-1}}}{1 - \frac{NJ_I}{v^{Q-1}} - \frac{NJ_*}{v^{R-1}}} \quad (4.22)$$

Die Nullstellen von $p(v)$ ergeben sich aus der Bestimmungsgleichung

$$1 = \frac{(N-Q+1)J_I}{v_o^{Q-1}} + \frac{(N-R+1)J_*}{v_o^{R-1}} \quad (4.23)$$

bzw.

$$v_o^{R-1} - (N-Q+1)J_I \cdot v_o^{R-Q} - (N-R+1)J_* = 0 \quad (4.24)$$

Gleichung (4.24) stellt für $R-1 = 2(Q-1)$ eine quadratische Gleichung in v_o^{Q-1} dar mit den Lösungen

$$v_o^{Q-1} = \frac{J_I(N-Q+1)}{2} \pm \sqrt{\frac{J_I^2(N-Q+1)^2}{4} + J_*(N-2Q+2)} \quad (4.25)$$

die mit v_v und v_w identifizieren können. Mit $N \gg Q+1$ läßt sich (4.25), umgeformt auf

$$v_o^{Q-1} = \frac{J_I(N-Q+1)}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4J_*}{NJ_I^2} \cdot \frac{1 - \frac{2(Q-1)}{N}}{\left(1 - \frac{Q-1}{N}\right)^2}} \right) \quad (4.26)$$

mit der Näherung

$$\left(1 - \frac{2(Q-1)}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{Q-1}{N}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{(Q-1)^2}{N^2} \quad (4.27)$$

entwickeln:

$$v_o^{Q-1} = \frac{J_I(N-Q+1)}{2} \cdot \left(1 \pm \left(1 + \frac{2J_*}{NJ_I^2} - \frac{2J_*^2}{N^2 J_I^4} \right) \right) \quad (4.28)$$

Es ergibt sich für v_w und v_v :

$$v_w^{Q-1} = -\frac{J_*}{J_I} \left(1 - \frac{Q-1}{N} \right) \left(1 - \frac{J_*}{J_I^2 N} \right) \quad (4.29)$$

bzw.

$$v_v^{Q-1} = J_I(N-Q+1) \left(1 + \frac{J_*}{J_I^2 N} - \frac{J_*^2}{J_I^4 N^2} \right) \quad (4.30)$$

Für die Verwendung von (4.22) als Zustandsgleichung ist es notwendig, daß der Radikant positiv bleibt, d.h. es muß $J_I > 0$ und $J_* < 0$ gefordert werden. Wir bringen Gl.(4.22) zur Untersuchung möglicher Singularitäten auf die Form ($R = 2(Q-1)$)

$$\frac{pv}{kT} = \frac{(v^{Q-1} - v_w^{Q-1}) \cdot (v^{Q-1} - v_v^{Q-1})}{v^{2Q-2} - nJ_I v^{Q-1} - NJ_*} \quad (4.31)$$

Die Nullstellen des Nenners sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} v_{\infty}^{Q-1} &= \frac{NJ_I}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2 J_I^2}{4} + NJ_*} \\ &\approx \frac{NJ_I}{2} \left(1 \pm \left(1 + \frac{2J_*}{NJ_I^2} - \frac{2J_*^2}{N^2 J_I^4} \right) \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die Polstellen lauten explizit

$$v_{\infty,1}^{Q-1} = -\frac{J_*}{J_I} \left(1 - \frac{J_*}{J_I^2 N} \right) \quad (4.33)$$

bzw.

$$v_{\infty,2}^{Q-1} = +NJ_I \left(1 + \frac{J_*}{J_I^2 N} - \frac{J_*^2}{J_I^4 N^2} \right) \quad (4.34)$$

Die Polstellen nach Gl.(4.33),(4.34) dürfen unter der Voraussetzung $J_I > 0$ und $J_* < 0$ nicht im Bereich $v_w < v < v_v$ auftreten. Ein Vergleich mit Gl.(4.29),(4.30) ergibt

$$v_{\infty,1}^{Q-1} > v_w^{Q-1}, \quad v_{\infty,2}^{Q-1} > v_v^{Q-1} \quad . \quad (4.35)$$

Damit ist $v_{\infty,1}$ Polstelle und die Lösung unbrauchbar.

4.4 Gewinnung einer brauchbaren Interpolationsformel

Abschließend wird gezeigt, daß sich Gl.(4.22) nach geringfügiger Änderung als Interpolationsformel eignet. Wir übernehmen aus Ansatz 3 die Bezeichnungen bis (4.20c), schreiben aber die Zustandsgleichung in der modifizierten Form

$$\frac{pv_v}{kT} = 1 + A(Q-1) \cdot \frac{J_I v^{Q-1} + 2J_*}{v^{2Q-2} - NJ_I v^{Q-1} - NJ_*} \quad . \quad (4.36)$$

Der Druck soll für $v = v_w$ den Wert $p = kT/v_v$, d.h. Dampfdruck annehmen. In (4.36) muß deshalb der zweite Summand wegfallen und wir können J_* mit Hilfe von

$$2J_* = -J_I v_w^{Q-1} \quad (4.37)$$

ausdrücken. Einsetzen von Gl.(4.37) in (4.36) liefert

$$\frac{pv_v}{kT} = 1 + \frac{A(Q-1)J_I}{v_w^{Q-1}} \cdot \frac{\left(\frac{v}{v_w}\right)^{Q-1} - 1}{\left(\frac{v}{v_w}\right)^{2(Q-1)} - \frac{NJ_I}{v_w^{Q-1}} \cdot \left(\left(\frac{v}{v_w}\right)^{Q-1} - \frac{1}{2}\right)} \quad . \quad (4.38)$$

Wie schon im Ansatz 3 darf der Nenner auf der rechten Seite von Gl.(4.38) keine Nullstellen im Bereich $v_w < v < v_v$ aufweisen. Die Untersuchung ergibt eine quadratische Gleichung in $\left(\frac{v_\infty}{v_w}\right)^{Q-1}$. Sie lautet

$$\left(\frac{v_\infty}{v_w}\right)^{Q-1} = \frac{NJ_I}{2v_w^{Q-1}} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2v_w^{Q-1}}{NJ_I}}\right) \quad (4.39)$$

mit den Lösungen ($2v_w^{Q-1} \ll |NJ_I|$ und Entwicklung der Wurzel):

$$\left(\frac{v_\infty}{v_w}\right)_1^{Q-1} = \frac{NJ_I}{v_w^{Q-1}} \cdot \left(1 - \frac{v_w^{Q-1}}{2NJ_I}\right) < 0 \quad (4.40)$$

bzw.

$$\left(\frac{v_\infty}{v_w}\right)_2^{Q-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{v_w^{Q-1}}{2NJ_I}\right) \quad (4.41)$$

Mit $J_I < 0$ ergibt Gl.(4.40) einen negativen, physikalisch irrelevanten Wert. Somit liefert Gl.(4.41) die einzige Singularität und mit den Näherungen vor Gl.(4.40) ergibt sich

$$\frac{v_\infty}{v_w}_2 \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(Q-1)} \quad (4.42)$$

Die Singularität tritt also für $v < v_w$ auf und gibt damit den der (nahezu) Inkompressibilität entsprechenden steilen Druckanstieg wieder. Insbesondere wird die Bedingung $p < 0$ für $v > v_w$ erfüllt. Zur Bestimmung des Extremaldrucks differenzieren wir Gl.(4.3) nach v . Man erhält eine quadratische Gleichung der Form $x^2 - 2x + c = 0$ für $x = (v_k/v)^{Q-1}$, $c = NJ_I/v_w^{Q-1}$ mit der Lösung

$$\left(\frac{v_k}{v_w}\right)^{Q-1} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{NJ_I}{2v_w^{Q-1}}} \quad (4.43)$$

Vor dem Wurzelausdruck gilt das positive Vorzeichen wegen $J_I < 0$. Gleichung (4.43) kann umgeformt werden auf

$$-\frac{NJ_I}{2v_w^{Q-1}} = \left(\left(\frac{v_k}{v_w}\right)^{Q-1} - 1\right)^2 - 1$$

und damit ist die o.a. Voraussetzung $2v_w^{Q-1} \ll N|J_I|$ offenbar immer erfüllt, d.h. es bietet sich die allgemeine Definition

$$B \equiv -\frac{NJ_I}{2v_w^{Q-1}} > 0 \quad (4.44)$$

an. Die Singularität und der kritische Wert von v lautet dann

$$\left(\frac{v_k}{v_w}\right)^{Q-1} = \sqrt{1+B} + 1 \quad (4.45)$$

bzw.

$$\left(\frac{v_\infty}{v_w}\right)^{Q-1} = \sqrt{B^2 + B} - B \quad . \quad (4.46)$$

Einsetzen von B in die Zustandsgleichung liefert

$$\frac{pv_v}{kT} = 1 - \frac{2B(Q-1)}{N} \cdot \frac{\left(\left(\frac{v}{v_w}\right)^{Q-1} - 1\right) \cdot A}{\left(\frac{v}{v_w}\right)^{2(Q-1)} + 2B\left(\frac{v}{v_w}\right)^{Q-1} - B} \quad . \quad (4.47)$$

Für den Extremaldruck folgt dann

$$\frac{p_k v_v}{kT} = 1 - \frac{AB(Q-1)/N}{\sqrt{1+B} \cdot (1 + \sqrt{1+B})} \quad . \quad (4.48)$$

Wir setzen A gemäß Gl.(4.46) in (4.45) ein und erhalten die Zustandsgleichung in endgültiger Form:

$$\frac{pv_v}{kT} = 1 - 2\left(1 - \frac{p_k v_v}{kT}\right) \cdot \frac{(1 + B + \sqrt{1+B}) \cdot \left(\left(\frac{v}{v_w}\right)^{Q-1} - 1\right)}{\left(\frac{v}{v_w}\right)^{2(Q-1)} + 2B\left(\frac{v}{v_w}\right)^{Q-1} - B} \quad . \quad (4.49)$$

Diese Gleichung erfüllt alle geforderten Bedingungen:

$$\begin{aligned} p &\mapsto \infty, \text{ mit } \frac{v}{v_w} = \frac{v_\infty}{v_w} = \left(\sqrt{B^2 + B} - B\right)^{1/(Q-1)} \\ p &= p_v, \text{ mit } \frac{v}{v_w} = 1 \\ p &= p_k, \text{ mit } \frac{v}{v_w} = \frac{v_k}{v_w} = \left(\sqrt{1+B} + 1\right)^{1/(Q-1)} \\ p &= p_v, \text{ mit } \frac{v}{v_w} = \frac{v_v}{v_w} \gg 1 \quad . \end{aligned}$$

Abb.(4.1) zeigt die Zustandsgleichung in Abhängigkeit verschiedener Parameter b und Q . Die Beziehung zwischen dem Gasvolumenverhältnis β bzw. β_k und B kann wie folgt abgeleitet werden: Wir verstehen $v = V/N$ als das mittlere Molekylvolumen von N Molekülen im Volumen V . Von diesen befinden sich N_v im dampfförmigen und N_w im flüssigen Zustand. Dann gilt

$$N = N_v + N_w, \quad vN = v_v N_v + v_w N_w$$

und damit

$$v = v_v \cdot \frac{N_v}{N} + v_w \cdot \left(1 - \frac{N_v}{N}\right) \quad . \quad (4.50)$$

Wir drücken N_v/N und N_w/N mit Hilfe der Volumina v, v_w, v_v aus

$$\frac{N_v}{N} = \frac{v - v_w}{v_v - v_w}, \quad \frac{N_w}{N} = \frac{v_v - v}{v_v - v_w} \quad (4.51)$$

und erhalten für das Gasvolumenverhältnis β

$$\beta = \frac{N_v v_v}{N_w v_w} = \frac{N_v/N}{1 - N_v/N} \cdot \frac{v_v}{v_w} = \frac{v - v_w}{v_v - v} \cdot v_v \cdot v_w \quad . \quad (4.52)$$

Der letzte Ausdruck nimmt für $v = v_k$ unter Berücksichtigung von $v_k \ll v_v$ die bereits verwendete Form $v_k = v_w \cdot (1 + \beta_k)$ an. Der Zusammenhang mit der in Gl.(4.44) definierten Größe B lautet:

$$\sqrt{1 + B} = (1 + \beta_k)^{Q-1} - 1 \quad (4.53)$$

Dabei ist mit Gl.(4.20),(4.44)

$$B = -\frac{N}{2Q!} \int (1 - \exp(-U(\xi_1, \dots, \xi_{Q-1}))) \frac{d\xi_i^{Q-1}}{v_w^{Q-1}} \quad (4.54)$$

(durch die Modifikation der Zustandsgleichung kann die Bedeutung von B nicht mehr durch ein Wechselwirkungspotential erklärt werden). Zur Abschätzung von $B(Q)$ nehmen wir an, daß man

$$\frac{d\xi_i^{Q-1}}{v_w^{Q-1}} \approx \zeta^{Q-1}$$

ansetzen kann mit $\zeta > 1$. Dann ist in der Zustandsgleichung der Ausdruck $\zeta^{Q-1}/Q! \mapsto 0$ für steigende Werte Q zu untersuchen. Es ergibt sich, daß B mit wachsendem Q abnimmt. Mit der Gleichung für den Extremaldruck trifft dieses Verhalten auch auf β_k zu, entsprechend einer verstärkten intermolekularen Wechselwirkung.

Die Definition von B liefert in Verbindung mit Gl.(4.53) das Minimum von Q :

$$Q > 1 + \frac{\log(2)}{\log(1 + \beta_{krit})} \quad (4.55)$$

Damit ergibt sich in Gl.(4.55) ein Ansteigen des Minimums von Q für sinkende Werte von β_{krit} .

Dieses ist physikalisch nur dann sinnvoll, wenn das kritische Volumen v_{krit} bzw. β_{krit} mit ansteigender Zugspannung entsprechend abnimmt. Im Gegensatz dazu liefert die Bestimmung von β_{krit} mit Hilfe der Tait-Gleichung [1]:

$$\beta_{krit} = \left(1 + \frac{p_{krit}}{3000}\right)^{-\frac{1}{7}} - 1 \approx \frac{-p_{krit}}{21000} \quad . \quad (4.56)$$

Die Näherung nach der Tait-Gleichung ist insbesondere im Bereich negativer Drücke unzuverlässig, da die im Gegensatz zum Wassermolekül überproportional große Aufweitung der Dampfgebiete nicht berücksichtigt wird. Eine Abnahme der Zugschpannung bedeutet aber gerade, daß Dampfkeime in größerer Anzahl vorhanden sind und β_{krit} einen der stärkeren Aufweitung entsprechend höheren Wert annimmt.

Die quasistationäre Untersuchung über das Stabilitätsverhalten von Kugelkeimen [1] gestattet die Berechnung der kritischen Systemgrößen, für die eine Einzelblase gerade noch stabil aufweitet. Der dem Radius R_{krit} entsprechende Druck p_{krit} wird im folgenden als Zerreißspannung angenommen, da eine weitere Absenkung des Drucks für $R > R_{krit}$ infolge der instabilen Aufweitung nicht möglich sein sollte. 1

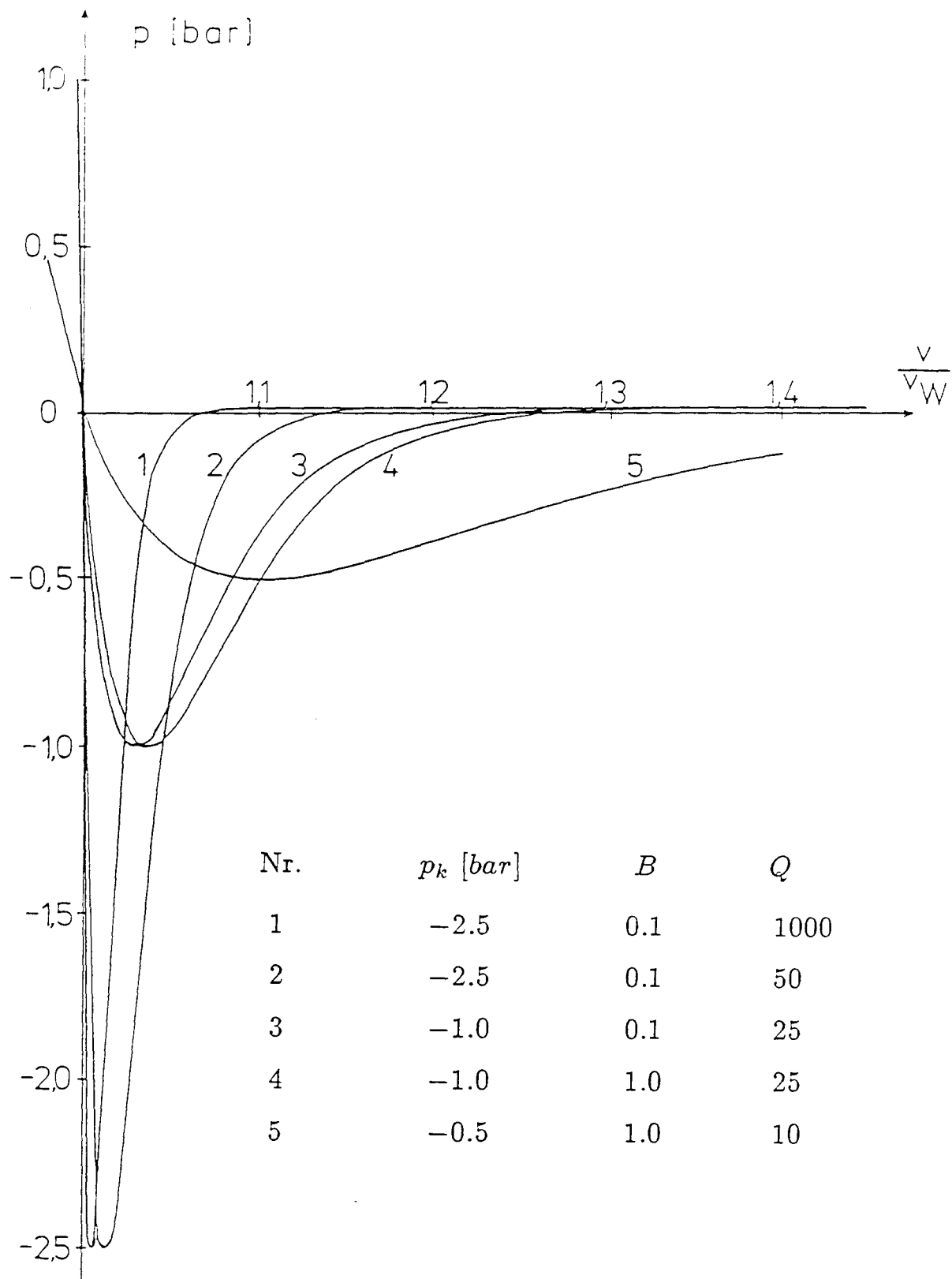


Abb. (4.1)

Literaturverzeichnis

- [1] Isay, W.H. : 'Kavitation'
Schiffahrts-Verlag "Hansa", C.Schroedter & Co., Hamburg 1989
- [2] Steindor, M. : 'Berechnung der Profilkavitation mit der Theorie für Kavitationsblasen in asymmetrischen Druckfeldern und Vielblasensystemen'
Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr.475,
Hamburg 1987
- [3] Chao, K.Y. : 'Beiträge zur Berechnung von Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern'
Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr.369,
Hamburg 1978
- [4] Landau, L.D., Lifschitz, E.M. : 'Lehrbuch der Theoretischen Physik', Bd. V.,
Akademie-Verlag, Berlin (1975)
- [5] Frenkel, J.I. : 'Kinetische Theorie der Flüssigkeiten'
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957
- [6] Steindor, M. : 'Systeme von zusammenfallenden Kavitationsblasen in kugelsymmetrischen Strömungsfeldern'
Schiffstechnik, **32** (1985) S. 122
- [7] Hirschfelder, J.O., Curtiss, C.F. und Bird, R.B. : 'Molecular theory of gases and liquids'
John Wiley & Sons Inc., New York 1964
- [8] Hansen, J.P. und McDonald, I.R. : 'Theory of simple liquids'
Academic Press Inc., London 1986