

198 | Oktober 1967

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Peter Boese

# Steuern im regelmäßigen achterlichen Seegang

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

IfS - Bericht Nr. 198

Steuern im regelmässigen achterlichen Seegang

von

Peter Boese

Hamburg, Oktober 1967

# Steuern im regelmässigen achterlichen Seegang

## Einführung

### 1. Die Gierbewegung bei konstanter Geschwindigkeit

1. Die Steuergleichungen im Seegang
2. Verfahren zur Lösung der Steuergleichungen
3. Stabilität und spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen
4. Ergebnisse:  
Einfluss der Geschwindigkeit, des Kurses und der Ruder-  
automatik auf die Kursstabilität und Gierbewegung im  
Seegang
5. Die Gierbewegung des stehenden Schiffes im Seegang

### 2. Die Gierbewegung bei gekoppelter Längsbewegung

1. Die Gleichung für die Längsbewegung und ihre Lösungsmöglichkeiten
2. Verfahren zur Lösung der Gleichungen für die Längs-, Quer- und Gierbewegung
3. Kursstabilität und Gierwinkel bei periodischer Längsbewegung
4. Die Gierbewegung beim Übergang von der periodischen Längsbewegung zum Mitlaufen mit den Wellen
5. Gierwinkel und Kursstabilität für das mit einer Welle mitlaufende Schiff

## Zusammenfassung

Anhang: Berechnung von Querkraft und Giermoment im Seegang

## Nomenklatur

## Literatur

## Einführung

Die Schwierigkeiten, die beim Steuern eines Schiffes im achterlichen Seegang auftreten können, waren Anlass zu einer Anzahl von Untersuchungen.

Für ein mit regelmässigen Wellen mitlaufendes Schiff hat K.S.M. Davidson 1948 [1] durch Versuch und Rechnung nachgewiesen, dass grössere Kurswinkel zum Seegang auch durch Ruderlegen nicht gehalten werden können. Ferner hat er gezeigt, dass ein im glatten Wasser kursstabiles Schiff in einer Welle kursinstabil werden kann. Ähnliche Berechnungen haben später Wahab u. Swaan angestellt [2]. 1950 wurden von Grim [3] die Bedingungen dargestellt, die dazu führen können, dass ein zunächst langsamer als die Wellen fahrendes Schiff von den Wellen mitgenommen wird.

In einer 1963 erschienenen Arbeit [4] hat Grim diese Betrachtungen auf den unregelmässigen Seegang ausgedehnt. Anhand einer Abschätzung wurde gezeigt, dass vor allem die Phase während der das Schiff auf Wellengeschwindigkeit beschleunigt wird, besonders kritisch zu sein scheint. Die Ergebnisse dieser Untersuchung stimmen gut mit Beobachtungen überein, die beim Querschlagen von Schiffen gemacht wurden [5].

In den bisher genannten Arbeiten war bei der Beschreibung der Seegangskräfte berücksichtigt worden, dass sich mit der Gierbewegung der Kurs zum Seegang und damit die Seegangskräfte selbst ändern. Führt das Schiff eine Längsbewegung relativ zur Wellenkontur aus, z.B. wenn das Schiff von den Wellen überholt wird, so sind die Seegangskräfte, wie der Seegang selbst, ausserdem Funktionen des Ortes und der Zeit. Auf die Schwierigkeit bei der Lösung des sich dann ergebenden rheolinen Gleichungssystems wurde 1950 von Weinblum und St. Denis hingewiesen [6].

Bei Vernachlässigung der Abhängigkeit der Seegangskräfte vom Gierwinkel erhält man ein leicht lösbares lineares System. Auf diese Weise wurden von Rydill 1960 [7] und Eda und Crane 1966 [8] die Amplituden der Gierbewegung für regelmässigen, von Rydill auch für unregelmässigen Seegang berechnet. Der Gültigkeitsbereich dieser Lösung ist auf kleine Seegangsamplituden und grosse Begegnungsfrequenzen beschränkt.

In der folgenden Arbeit soll versucht werden, das Gleichungssystem einschliesslich der Abhängigkeit der Seegangskräfte vom Gierwinkel <sup>und der Geschwindigkeit des Schiffes</sup> zu lösen, da vermutlich hiervon das Kursverhalten des Schiffes stark beeinflusst wird.

Die Untersuchung soll zunächst für konstante Schiffsgeschwindigkeit durchgeführt werden. Mit Hilfe der bereits in einem früheren Bericht [9] dargelegten Methoden werden die verschiedenen Möglichkeiten der Längsbewegung berechnet und deren Einfluss auf das Kursverhalten des Schiffes untersucht.

[ ]  
[ ] e  
[ ]



$Y'$  und  $N'$  sind die dimensionslosen äusseren Kräfte und Momente:

$$Y' = \frac{Y}{\rho_{1/2} L^2 T} \quad N' = \frac{N}{\rho_{1/2} L^3 T}$$

Es ist üblich [10], die dimensionslose "Schiffslängenzzeit" einzuführen:

$$ds = \frac{U}{L} dt \quad \text{wobei hier } U = U(t)$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \psi' \frac{U}{L} \\ \dot{\beta} &= \beta' \frac{U}{L} \\ \dot{\delta} &= \delta' \frac{U}{L} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{d\psi'}{dt} \frac{U}{L} + \psi' \frac{dU}{dt} \frac{1}{L} \\ &= \psi'' \frac{U^2}{L^2} + \psi' U' \frac{U}{L} \end{aligned}$$

Hiermit lauten die Steuergleichungen

$$\begin{aligned} -m'_Y \frac{U'}{U} \beta - m'_Y \beta' + (m' - Y'_r) \psi' - Y'_\beta \beta + Y'_\delta \delta &= \frac{L}{U^2} Y' \\ n'_z \psi'' + n'_z \frac{U'}{U} \psi' - N'_\beta \beta - N'_r \psi' - N'_\delta \delta &= \frac{L}{U^2} N' \end{aligned}$$

Im folgenden wird eine einfache Ruderautomatik vorausgesetzt:

$$\delta = -\gamma \psi - \sigma' \psi'$$

Es ist zu erwarten, dass der Einfluss einer endlichen Ruderlegegeschwindigkeit und einer Verzögerung im Ansprechen der Automatik hier, wie in den Untersuchungen von Schiff und Gimprich [10] und Wahab und Swaan [2] von geringem Einfluss ist. Beides wird daher vernachlässigt.

Für einen harmonischen Seegang sind Querkraft und Giermoment ebenfalls harmonisch

$$Y = \bar{Y} \cos(kx_s - \omega t + \epsilon_{f_{yy}})$$

$$N = \bar{N} \cos(kx_s - \omega t + \epsilon_{f_{zz}})$$

$$k = \frac{\omega^2}{g}$$

$$x_s = x_0 \cos \chi_0$$

Die Amplituden dieser Kräfte werden in der Form dimensionsloser Koeffizienten angegeben:

$$f_{yy} = \frac{\bar{Y}}{k \bar{h} \rho g L B T \delta}$$

$$f_{zz} = \frac{\bar{N}}{k \bar{h} \rho g L B T \delta}$$

Mit der dimensionslosen Schiffsmasse

$$m' = \frac{m}{\rho/2 L^2 T} \quad (\text{wobei } m = \rho L B T \delta)$$

und der Froudezahl

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g L}}$$

lauten die rechten Seiten der Steuergleichungen:

und 
$$\frac{1}{Fr^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} f_{yy} \cos(kx_s - \omega t + \epsilon_{f_{yy}})$$

$$\frac{1}{Fr^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} f_{zz} \cos(kx_s - \omega t + \epsilon_{f_{zz}})$$

Zunächst soll der Fall konstanter Geschwindigkeit  $U$  behandelt werden.

Auf den linken Seiten der Steuergleichungen entfallen die Glieder mit  $\frac{U'}{U}$ , die Froudezahl  $Fr$  ist konstant, und ausserdem kann eine mittlere Begegnungsfrequenz  $\omega_e$  definiert werden.

Die Richtung von  $U$  wird im Mittel nicht viel von der Richtung  $\chi_0$  abweichen, d.h.

$$x_0 = Ut \quad x_s = Ut \cos \chi_0$$

Damit lautet die Kreisfunktion der rechten Seiten

$$\cos(\omega_e t + \varepsilon)$$

mit der mittleren Begegnungsfrequenz

$$\omega_e = k U \cos \chi_0 - \omega$$

Führt man die schon benutzte dimensionslose Schiffslängenzzeit  $s = \frac{U}{L} t$  ein, so kann man auch die Begegnungsfrequenz dimensionslos machen:

$$\begin{aligned} \Omega_e &= \omega_e \frac{L}{U} \\ &= (k L \cos \chi_0 - \omega \frac{L}{U}) \\ &= (2\pi \frac{L}{\lambda} \cos \chi_0 - \frac{1}{Fr} \sqrt{2\pi \frac{L}{\lambda}}) \\ &= (2\gamma_e - \frac{1}{Fr} \sqrt{2\gamma}) \end{aligned}$$

wobei  $\gamma = \pi \frac{L}{\lambda}$   
 $\gamma_e = \gamma \cos \chi_0$

Für  $\Omega_e < 0$  wird das Schiff von den Wellen überholt, für  $\Omega_e > 0$  überholt das Schiff die Wellen.

Die Koeffizienten der Amplituden der Seegangskräfte hängen von der Schiffsförm und von  $\lambda/L$  ab, sie sind ausserdem Funktion von  $\chi$ , dem Kurs zum Seegang.

Für gegebenes  $\lambda/L$  kann man diese Funktion an der Stelle  $\chi_0$  durch die ersten zwei Glieder der Taylorreihe annähern:

$$\begin{aligned} f_{yy}(\chi) &= f_{yy}(\chi_0) + \left(\frac{\partial f_{yy}}{\partial \chi}\right)_{\chi_0} \psi \\ f_{zz}(\chi) &= f_{zz}(\chi_0) + \left(\frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi}\right)_{\chi_0} \psi \end{aligned}$$

mit  $\chi = \chi_0 + \psi$

somit lauten die Steuergleichungen im Seegang:

$$\begin{aligned}
 & -m'_y \beta' + (m' - Y_r') \psi' - Y_\beta' \beta + Y_\delta' \delta = \\
 & \quad \frac{1}{F_r^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} \left[ f_{yy}(\chi_0) \cos(\Omega_e s + \varepsilon_{fyy}) + \psi \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \cos(\Omega_e s + \varepsilon_{dfyy}) \right] \\
 \\
 & n'_z \psi'' - N_\beta' \beta - N_r' \psi' - N_\delta' \delta = \\
 & \quad \frac{1}{F_r^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} \left[ f_{zz}(\chi_0) \cos(\Omega_e s + \varepsilon_{fzz}) + \psi \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \cos(\Omega_e s + \varepsilon_{dfzz}) \right]
 \end{aligned}$$

Abgesehen von der Schiffsform sind die Koeffizienten der Gleichungen nur noch von dimensionslosen Parametern der Geschwindigkeit und des Seeganges abhängig.

Unter Zugrundelegung der Froude-Kryloff-Hypothese sind die Koeffizienten der Querkraft und des Giermomentes von Weinblum und St. Denis [6] für ein Schiff mit parallelen Seitenwänden und parabolischer Wasserlinie angegeben worden (s. Anhang).

K.S.M. Davidson hat 1948 in seiner Arbeit über das Kursverhalten des Schiffes im Seegang versucht, neben den Verdrängungskräften die durch die Orbitalbewegung der Wasserteilchen in einer Welle auf das Schiff ausgeübten Kräfte abzuschätzen. Mittlerweile hat sich die sogenannte Streifenmethode zur Berechnung der hydrodynamischen Seegangskräfte für die Vertikalbewegung gut bewährt, so dass es naheliegt, die Kräfte für die Horizontalbewegung auf ähnliche Art zu berechnen. Unter Benutzung der Ergebnisse von Tamura [11] für beliebige Sprantprofile ist von Takaiski [12] für verschiedene Schiffsformen die Querkraft berechnet worden. Ein Einfluss der Geschwindigkeit ist in diesen Rechnungen allerdings noch nicht enthalten.

Im Anhang sind die Koeffizienten der Querkraft und des Giermomentes nach der hydrodynamischen Theorie berechnet worden. Der Vergleich mit Ergebnissen nach der Froude-Kryloff-Hypothese zeigt, dass die Werte z.T. mehr als doppelt so gross sind.

### 1.2. Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Steuergleichungen haben die Form inhomogener linearer D.Gln. mit periodischen Koeffizienten:

$$g_1 \beta' + g_2 \beta + g_3 \psi' + g_4 \psi + \psi g_5 \cos(\Omega_e s + E_{dfyy}) = g_7 \cos(\Omega_e s + E_{fyy})$$

$$G_1 \psi'' + G_2 \psi' + G_3 \psi + G_4 \beta + \psi G_5 \cos(\Omega_e s + E_{dfzz}) = G_7 \cos(\Omega_e s + E_{fzz})$$

Wenn man für den Ruderwinkel einführt

$$\delta = -\gamma \psi - \sigma' \psi'$$

so lauten die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} g_1 &= -m_y' & G_1 &= m_z' \\ g_2 &= -Y_\beta' & G_2 &= -N_r' + N_\delta' \sigma' \\ g_3 &= (m' - Y_r') - Y_\delta' \sigma' & G_3 &= N_\delta' \gamma \\ g_4 &= -Y_\delta' \gamma & G_4 &= -N_\beta' \\ g_5 &= \frac{1}{Fr^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} \left( \frac{\partial f_{yy}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} & G_5 &= -\frac{1}{Fr^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \\ g_7 &= -\frac{1}{Fr^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} f_{yy}(\chi_0) & G_7 &= \frac{1}{Fr^2} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} f_{zz}(\chi_0) \end{aligned}$$

Teilt man die Periode der Kreisfunktion  $T_e = \frac{2\pi}{\Omega_e}$  in eine endliche Zahl Intervalle  $M$  und hält für jedes Intervall die periodischen Glieder konstant, so sind die Gleichungen innerhalb des Intervalles lösbar

$$g_1 \beta' + g_2 \beta + g_3 \psi' + g_4 \psi = g_9$$

$$G_1 \psi'' + G_2 \psi' + G_4 \beta + G_3 \psi = G_9$$

Aus beiden Gln. kann  $\beta$  eliminiert werden, und es bleibt

$$\psi''' + r_1 \psi'' + r_2 \psi' + r_3 \psi = r_4$$

Mit  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$ , den reellen oder komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung, lauten die speziellen Lösungen:

$$\psi = \sum_{n=1}^3 C_n e^{\lambda_n s} + C_4 \quad \psi' = \sum_{n=1}^3 C_n \lambda_n e^{\lambda_n s}$$

und

$$\beta = \frac{1}{G_4} (G_3 - G_1 \psi'' - G_2 \psi' - G_3 \psi)$$

Die Anfangsbedingungen für jedes folgende Intervall entsprechen den Lösungen für das Ende des vorhergehenden Intervalles für  $\psi, \psi'$  und  $\beta$ , so dass diese drei Grössen im Verlauf der Rechnung stetige Funktionen bleiben.

Ändert sich bei zunehmender Schrittzahl  $M$  die Lösung in immer geringerem Masse, so kann man annehmen, dass das Verfahren konvergiert.

Schon ab einer Schrittzahl von  $M=10$  waren in der charakteristischen Zahl der Übergangsmatrix keine Veränderungen in der 3. Stelle mehr vorhanden. (Siehe Diagramm 1). Die Rechnungen wurden in der Regel mit einer Schrittzahl von  $M=25$  durchgeführt.

### 1.3. Stabilität und spezielle Lösungen der Bewegungsgleichungen

Durch Substitution von

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix} \\ \psi'(s) &= \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix} = z(s) \\ \beta(s) &= \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

werden die Steuergleichungen in ein System erster Ordnung übergeführt:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ G_1 z_2' &= - [G_3 + G_5 \cos(\Omega_e s + \epsilon_{dfxx})] z_1 - G_2 z_2 - G_4 z_3 + G_7 \cos(\Omega_e s + \epsilon_{fxx}) \\ g_1 z_3' &= - [g_4 + g_5 \cos(\Omega_e s + \epsilon_{dfyy})] z_1 - g_3 z_2 - g_2 z_3 + g_7 \cos(\Omega_e s + \epsilon_{fyy}) \end{aligned}$$

Es hat die Form

$$z'(s) = A(s) z(s) + r(s)$$

Die Matrix  $A(s)$  und der Vektor  $r(s)$  sind periodisch

$$A(s) = A(s + T_e)$$

$$r(s) = r(s + T_e)$$

#### 1.3.1. Allgemeine Lösung

Der homogene Teil des Gleichungssystems  $z'(s) = A(s) z(s)$

hat den allgemeinen Lösungsvektor

$$z(s) = \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ z_3(s) \end{pmatrix}$$

Drei der möglichen Lösungsvektoren bilden ein "Fundamentalsystem"

$$Z(s) = \begin{pmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) & z_{13}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) & z_{23}(s) \\ z_{31}(s) & z_{32}(s) & z_{33}(s) \end{pmatrix}$$

da jede Spalte eine Lösung ist, kann das System auch geschrieben werden

$$Z'(s) = A(s) Z(s)$$

Ähnlich wie bei der Mathieu'schen Gleichung ist die Lösung darstellbar in der Form:

$$Z(s) = C(s) e^{Bs}$$

worin  $C(s) = C(s+T_e)$  eine periodische und

$B$  eine konstante Matrix ist.

Die Lösung nach einer Periode lautet

$$Z(s+T_e) = C(s+T_e) e^{Bs} e^{BT_e}$$

$$Z(s+T_e) = Z(s) e^{BT_e}$$

setzt man  $e^{BT_e} = U$ , so kann man schreiben

$$Z(s+T_e) = Z(s) U$$

$U$  wird Übergangsmatrix genannt.

Gesucht sind nun Lösungen  $z(s)$ , die sich jeweils nach einer Periode, vermehrt um einen konstanten Faktor  $k$ , wiederholen, d.h.

$$z(s+T_e) = k z(s)$$

Dazu wird die Lösung mit Hilfe eines konstanten Vektors und des Fundamentalsystems dargestellt:

$$z(s) = Z(s) v$$

und

$$z(s + T_e) = Z(s) U v$$

Die Bedingung

$$Z(s) U v = k Z(s) v$$

führt auf die Eigenwertgleichung

$$(U - kE) v = 0$$

$E$  = Einheitsvektor

Nichttriviale Lösungen für  $v$  existieren nur, wenn

$$\det(U - kE) = 0$$

D.h. der Faktor  $k$ , um den sich die Lösung nach einer Periode reproduziert, ist die "charakteristische Zahl" der Übergangsmatrix. Die Lösung kann auch in folgender Form dargestellt werden:

$$z(s + T_e) = e^{q T_e} z(s)$$

Der "charakteristische Exponent" ergibt sich aus der Beziehung

$$e^{q T_e} = k$$

Eine Lösung der kubischen Gleichung für  $k$  ist immer reell, die restlichen beiden können reell oder konjugiert komplex sein.

Für  $k$  reell ist

$$q = \frac{1}{T_e} \ln |k|$$

Für  $k$  komplex ist der

Realteil  $q_r = \frac{1}{T_e} \ln \sqrt{k_r^2 + k_i^2}$

und der

Imaginärteil  $q_i = \frac{1}{T_e} \operatorname{arctg} \frac{k_i}{k_r}$

Somit hat diese Lösung eine ähnliche Form wie die Lösung der D.Gln. mit konstanten Koeffizienten, wie sie im glatten Wasser gelten, und die charakteristischen Exponenten sind unmittelbar vergleichbar.

Hier wie dort bildet der absolut kleinste reelle Wert für  $q$  ein Mass für die Stabilität. Die Lösung ist für

$$\operatorname{Re}(q) < 0 \quad \text{stabil (period. Lösung 2.Art)}$$

$$\operatorname{Re}(q) = 0 \quad \text{stabil ( " " 1.Art)}$$

$$\operatorname{Re}(q) > 0 \quad \text{instabil ( " " 2.Art)}$$

Auch wenn das System wie hier nur numerisch integriert werden kann, ist die Übergangsmatrix  $U$  relativ leicht zu bestimmen.

Durch eine dreimal wiederholte Integration mit den Spalten der Einheitsmatrix als jeweilige Anfangsbedingung bestimmt man das sog. normierte Fundamentalsystem. Das normierte Fundamentalsystem nach Ablauf einer Periode  $T_e$  entspricht der gesuchten Übergangsmatrix  $U$ .

### 1.3.2. Spezielle Lösung

Mit Hilfe des normierten Fundamentalsystems  $\bar{z}(s)$  kann die Lösung des homogenen Systems für beliebige Anfangsbedingungen angegeben werden:

$$z_1(s) = A \bar{z}_{11}(s) + B \bar{z}_{12}(s) + C \bar{z}_{13}(s)$$

$$z_2(s) = A \bar{z}_{21}(s) + B \bar{z}_{22}(s) + C \bar{z}_{23}(s)$$

$$z_3(s) = A \bar{z}_{31}(s) + B \bar{z}_{32}(s) + C \bar{z}_{33}(s)$$

Die Lösung des inhomogenen Systems ergibt sich durch Über-

lagerung der speziellen Lösung  $z_0(s)$  und der allgemeinen Lösung:

$$z_1(s) = z_{01}(s) + A \bar{z}_{11}(s) + B \bar{z}_{12}(s) + C \bar{z}_{13}(s)$$

$$z_2(s) = z_{02}(s) + A \bar{z}_{21}(s) + B \bar{z}_{22}(s) + C \bar{z}_{23}(s)$$

$$z_3(s) = z_{03}(s) + A \bar{z}_{31}(s) + B \bar{z}_{32}(s) + C \bar{z}_{33}(s)$$

Wenn für die Berechnung der speziellen Lösung  $z_0(s)$  die Anfangswerte

$$z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

benutzt werden, dann muss für  $s=0$  gelten:

$$z_1(0) = A$$

$$z_2(0) = B$$

$$z_3(0) = C$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems muss auch die rein periodische Lösung einschliessen, die sich einstellt, wenn der Einschwingvorgang abgeklungen ist.

Daraus ergibt sich die Forderung, dass die Lösungen für  $s=0$  und  $s = T_e$  übereinstimmen:

$$z_{01}(T_e) + A \bar{z}_{11}(T_e) + B \bar{z}_{12}(T_e) + C \bar{z}_{13}(T_e) = A$$

$$z_{02}(T_e) + A \bar{z}_{21}(T_e) + B \bar{z}_{22}(T_e) + C \bar{z}_{23}(T_e) = B$$

$$z_{03}(T_e) + A \bar{z}_{31}(T_e) + B \bar{z}_{32}(T_e) + C \bar{z}_{33}(T_e) = C$$

Hieraus können die Koeffizienten A, B und C bestimmt werden, die in die allgemeine Lösung eingesetzt, die rein periodische Lösung zu jedem Zeitpunkt  $s$  liefern.

Hier sei noch darauf hingewiesen, dass auch in dem Fall der instabilen homogenen Gleichung eine periodische Lösung der inhomogenen Gl. angegeben werden kann.

#### 1.4. Ergebnisse

Einfluss der Geschwindigkeit, des Kurses und der Ruderautomatik auf die Kursstabilität und Gierbewegung im Seegang.

Die Rechnung wurde für die bereits von Schiff und Gimprich [13] benutzten Schiffe "A", "B" und "C" durchgeführt.

Die Koeffizienten der Steuergleichungen lauten:

	Schiff "A"	"B"	"C"
$m' =$	0.122	0.218	0.074
$m'_y =$	0.235	0.409	0.142
$n'_z =$	0.0116	0.024	0.0085
$N'_\rho =$	0.069	0.126	0.092
$Y'_\rho =$	0.356	0.353	0.256
$N'_r =$	- 0.069	- 0.0588	- 0.032
$Y'_r =$	0.063	0.0207	0.009
$N'_\delta =$	0.0287	0.0333	0.0143
$Y'_\delta =$	0.0630	0.0715	0.0312

Stabilitätsindex des ungesteuerten Schiffes im glatten Wasser:

$$q = \quad -1.18 \quad + 0.16 \quad -0.35$$

Als Koeffizienten der Amplituden der Seegangskräfte wurden die nach der Froude-Kryloff-Hypothese für ein Elementarschiff berechneten benutzt. Wie bereits erwähnt, sind die Seegangskräfte, berechnet nach der Streifenmethode unter Einbeziehung der hydrodynamischen Kräfte wesentlich grösser. Dagegen ist die Phasendifferenz zwischen Querkraft und Giermoment etwa  $-\frac{\pi}{2}$  und damit die gleiche wie nach der Froude-Kryloff-Hypothese (s. Anhang). Aus diesem Grunde kommt man, wie eine Kontrollrechnung zeigte, in etwa zu den gleichen Ergebnissen, wenn man bei Benutzung der Froude-Kryloff-Hypothese die Wellensteilheit entsprechend vergrössert.

Man wird also zu einigermaßen realistischen Werten gelangen, wenn man berücksichtigt, dass die effektive Wellensteilheit nur 50 - 60% der in den Diagrammen angegebenen beträgt.

Fährt das Schiff in regelmässigen Wellen mit konstanter Geschwindigkeit, so kann sein Kursverhalten unter zwei Aspekten gesehen werden:

Wie ist die Kursstabilität des Schiffes? a).

Im Gegensatz zum unregelmässigen Seegang kann unter dem periodisch sich wiederholenden Einfluss des regelmässigen Seeganges genauso wie im glatten Wasser mit Hilfe der Exponenten der Lösung des homogenen Gleichungssystems der Begriff Kursstabilität definiert werden.

Wie sieht die Gierbewegung aus? b).

Die spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems gibt Auskunft über die Grösse der auftretenden Winkelausschläge. Vor allem aber ist daran zu erkennen, inwieweit ein geforderter mittlerer Kurs überhaupt eingehalten werden kann.

a) Kursstabilität im Seegang.

Wie in der Auftragung Diagr. 2 ersichtlich, wird der Realteil der beiden konjugiert komplexen Lösungen  $\varrho$  für kleiner werdende Geschwindigkeiten in negativer Richtung grösser, als der Wert, der für das glatte Wasser gilt, d.h. die Kursstabilität nimmt zu. Dies ist auf die bei rheoleinen Systemen bekannte Erscheinung zurückzuführen, dass ein instabiles System durch periodische Kräfte stabilisiert werden kann. (Beispiel: Stabpendel, dessen obere labile Gleichgewichtslage durch periodische Erschütterungen der Aufhängung stabilisiert wird).

Eine genauere Untersuchung des Grenzfalles für gegen Null gehende Geschwindigkeit folgt im nächsten Abschnitt.

Für den Fall des gegen die See fahrenden Schiffes ändert sich nur die Begegnungsfrequenz und die Phasenlage des Giermomentes verschiebt sich um  $\pi$ . Aus diesem Grunde hat in diesem Fall der Exponent einen ähnlichen Verlauf über der Geschwindigkeit wie bei achterlichem Seegang.

Einer der drei Exponenten ist wie bei den Steuergleichungen im glatten Wasser immer reell. Da er einen relativ grossen negativen Wert besitzt, ist er für die Stabilitätsbetrachtungen ohne Belang.

In bestimmten Geschwindigkeitsbereichen sind die Exponenten reell und je nach der Grösse der Wellensteilheit kann der absolut kleinere der beiden Exponenten grösser als Null werden, d.h. das Schiff ist in diesen Fällen kursunstabil.

Diese Erscheinung beruht auf Resonanz, denn sie tritt immer in der Nähe der Geschwindigkeiten auf, für die die Periode der Erregung ein ganzzahliges Vielfaches der halben Eigenperiode ist.

$$T_e = \frac{T_0}{2} n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$T_e =$  Erregerperiode  
 $T_0 =$  Eigenperiode

Die Erregerperiode ergibt sich aus der Begegnungsfrequenz:

$$T_e = \frac{2\pi}{\Omega_e}$$

Wenn das Schiff von den Wellen überholt wird, d.h. wenn

$$Fr < \frac{1}{\cos \chi_0 \sqrt{2\pi L_\lambda}}, \quad \text{dann ist}$$

$$|\Omega_e| = \frac{1}{Fr} \sqrt{2\pi L_\lambda} - 2\pi \frac{L_\lambda}{\lambda} \cos \chi_0$$

Die Eigenfrequenz entspricht dem Imaginarteil des komplexen Exponenten der allgemeinen Lösung:

$$\omega_0 = q_i \quad T_0 = \frac{2\pi}{q_i}$$

$Fr_0$ , die Geschwindigkeit, bei der Resonanz auftritt, erhält man aus der Bedingung

$$T_e = \frac{T_0}{2} n$$

$$\frac{2}{\Omega_e} = \frac{n}{q_i}$$

$$Fr_0 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{L_\lambda}{\lambda}}{\frac{q_i}{n} + \pi \frac{L_\lambda}{\lambda} \cos \chi_0}$$

Die auf diese Weise berechneten Resonanzstellen sind in den Diagr. 2 bis 6 eingetragen. Die Ziffern I, II, ... entsprechen den ganzzahligen Verhältnissen  $n$  in denen Erregerperiode und halbe Eigenperiode zueinanderstehen.

Die Übereinstimmung mit den tatsächlichen Resonanzstellen ist für die erste (I) und zweite Stelle (II) gut, bei den folgenden treten kleine Abweichungen auf. Hier macht sich der Unterschied der Eigenperiode für die betreffenden Wellensteilheiten von der Eigenperiode für glattes Wasser bemerkbar. Von Interesse ist vor allem die erste Resonanzstelle, da sie bei der niedrigsten Geschwindigkeit auftritt und die grössten Abweichungen von der Glattwasserstabilität aufweist. Für das Schiff "C" liegt diese Resonanzstelle im Bereich der Froude-Zahl 0.3. Alle Massnahmen, die die Eigenperiode des Schiffes verringern, z.B. grösseres  $\gamma$  (andere Ruderautomatik), oder kleineres Drehträgheitsmoment bringen die Resonanzstellen in den Bereich kleinerer Geschwindigkeiten (z.B. ist für  $\gamma = 3$   $Fr_0 = 0,25$ ).

Für das nichtgesteuerte Schiff ( $\gamma = 0, \sigma' = 0$ ) existiert bei glattem Wasser keine periodische Lösung. Aber schon bei kleinen Werten  $\bar{h}/\lambda$  wird der Exponent komplex und so kann auch in diesem Fall eine Eigenperiode angegeben werden (Diagr. 4).

Kurswinkel zum Seegang und Wellenlänge wirken sich nur auf die Amplitude der periodischen Koeffizienten und auf die Erregerfrequenz aus.

Für Werte, die grösser sind als  $\mathcal{M} = 1$  verschieben sich die Resonanzstellen zu höheren Fr-Zahlen. Bei kleineren Werten kommt man zwar in einen Bereich kleinerer Geschwindigkeiten, dafür sind allerdings die Seegangskräfte wesentlich kleiner. Die Rechnungen wurden nur für den ungünstigsten Fall  $\mathcal{M} = 1$  durchgeführt.

Fährt das Schiff nicht mehr in Seegangsrichtung ( $\chi_0 \neq 0$ ), dann ändert sich das homogene System in dem Masse, wie sich der Gradient der Seegangskräfte ändert. Damit nimmt der Stabilitätsindex an den Resonanzstellen andere Werte an. Vor allem aber verschieben sich mit der Begegnungsfrequenz die Resonanzstellen zu höheren Geschwindigkeiten (Diagr.3).

Die Stabilitätsgrenzen für verschiedene Kurse sind in Diagr. 7 aufgetragen.

Offensichtlich hängt die Kursstabilität an den Resonanzstellen von der Grösse des Stabilitätsindex für glattes Wasser und von dem Betrag, um den er bei der jeweiligen Wellensteilheit abweicht, ab. Daher wird wie im glatten Wasser für wachsende Ausschläge der winkelproportionalen Steuerung (Koeffizient  $\gamma$ ) die Stabilität nur im geringen Masse verbessert (Diagr.4 u.5), während bei Einführung eines drehgeschwindigkeitsproportionalen Gliedes (Koeffizient  $\sigma'$ ) das Schiff in keinem der betrachteten Fälle kursunstabil wird (Diagr.5).

Die Abhängigkeit des Stabilitätsindex von der Wellensteilheit an den Resonanzstellen ist fast linear (Diagr.8).

Die Auftragung des Stabilitätsindex für die Schiffe "A" und "B" (Diagr.6) zeigt ebenfalls, dass das sehr kursstabile Schiff auch im Seegang nicht unstabil wird. Aus Diagr.6 ist ferner ersichtlich, wie das nichtgesteuerte Schiff "B", das im glatten Wasser kursunstabil ist, bei kleinen Geschwindigkeiten im Seegang kursstabil wird.

b) Gierwinkel im Seegang.

Für das kursstabile Schiff ist die Lösung des homogenen Gleichungssystems trivial, d.h.  $\psi = 0$ .

Zur Berechnung der Lösung des inhomogenen Systems für den Fall, dass das Schiff einen mittleren Kurs  $\chi_0$  zur Seegangsrichtung einhält, muss entsprechend dem Taylor-Reihen-Ansatz für die Seegangskräfte dieser Wert  $\chi_0$  bekannt sein. Setzt man voraus, dass dieser mittlere Kurs  $\chi_0$ , der sich erst aus der Rechnung ergeben soll, nur wenig von dem für die Steuerautomatik vorgegebenen Kurs  $\chi_k$  abweicht, so können die Seegangskräfte mit guter Genauigkeit ersatzweise an der Stelle  $\chi_k$  angegeben werden. Ein Fehler ergibt sich dann nur aus dem Unterschied der Gradienten der Seegangskräfte an den Stellen  $\chi_0$  und  $\chi_k$ .

Führt man die Rechnung für das nichtgesteuerte Schiff durch, indem man einen mittleren Kurs vorgibt und korrigiert man diesen dann iterativ, so stellt man fest, dass auch in diesem Fall des zunächst inhomogenen Gleichungssystems die Lösung trivial ist. Das bedeutet, dass das Schiff nur durch einen konstanten Ruderwinkel auf einem bestimmten Kurs zum Seegang gehalten werden kann, da es bestrebt ist, in die Seegangsrichtung einzuschwenken.

Im Falle der winkelproportionalen Steuerung ( $\gamma = 1$ ) weicht der mittlere Kurs für kleine Geschwindigkeiten erheblich vom vorgegebenen Kurs  $\chi_k$  ab, und zwar in die Laufrichtung des Seeganges (Lösung  $\psi < 0$ ).

(In den Auftragungen Diagr. 9 u. 10 ist die eben beschriebene Korrektur dafür, dass  $\chi_o \neq \chi_k$  ist, nicht vorgenommen worden, da der Fehler in der Regel klein ist).

Für Kurse grösser als  $55^\circ$  zum Seegang wird der Gradient des Giermomentes negativ, daher ist in diesen Fällen der mittlere Gierwinkel positiv ( $\psi > 0$ ), d.h. der mittlere Kurs zum Seegang ist grösser als gefordert.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass für den Grenzfall  $Fr \rightarrow 0$  im Falle eines positiven Gradienten des Giermomentes der Kurs  $\chi$  Null ist, und für negativen Gradienten der Kurs  $\chi = 90^\circ$  ist.

Wird die Geschwindigkeit gleich der Wellengeschwindigkeit, so gehen die Ausschläge der Gierbewegung gegen Unendlich, der Mittelwert weicht in positiver Richtung aus, d.h. das Schiff dreht quer.

Eine Auftragung der Lösung für die Gierwinkel über der Wellensteilheit für das lineare und das rheolineare System zeigt deutlich den Einfluss der Nichtlinearität: Der Mittelwert der Bewegung weicht mit zunehmender Wellensteilheit von Null ab (Diagr. 9a). Führt man bei der Ruderautomatik ein drehgeschwindigkeitsproportionales Glied ein ( $\gamma = 1, \sigma' = 1$ ), so kann diese Auswanderung des Mittelwertes weitgehend vermieden werden (Diagr. 9b).

Wie aus dem Diagr. 10 ersichtlich ist, hat der Gierwinkel bei einem Kurs von  $\chi_k = 30^\circ$  seine grössten Anschläge; auch die Abweichung des Mittelwertes von Null ist hier am grössten. Bei  $\chi_k = 75^\circ$  sind die Gierwinkel am kleinsten; auch bei  $90^\circ$  ist noch eine Gierbewegung vorhanden. Die Driftwinkel haben bei grösseren Kurswinkeln ihr Maximum, entsprechend der mit dem Kurswinkel zunehmenden Querkraft.

Um den Verlauf der verschiedenen Lösungen zu veranschaulichen, wurde die numerische Integration über mehrere Perioden durchgeführt. Die Ergebnisse für einige Beispiele sind in den Diagr. 12 a, b u. c für das homogene System und in Diagr. 12 d für das inhomogene System aufgetragen.

### 1.5. Die Gierbewegung des stehenden Schiffes im Seegang

Lässt man in den Steuergleichungen der ursprünglichen Form, in denen noch nicht die Zeit dimensionslos gemacht worden ist, die Geschwindigkeit  $U$  gegen Null gehen, so fallen alle hydrodynamischen Kräfte fort. In der Gleichung für die Querkräfte entfallen auch die Massenkräfte und in der Gleichung für die Momente bleiben nur das Trägheitsmoment und das Giermoment des Seeganges stehen.

$$n'_z L \ddot{\psi} = k \bar{h} g L B T \delta \left[ f_{zz}(\chi_0) \cos(\omega t + \varepsilon_{f_{zz}}) + \psi \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \cos(\omega t + \varepsilon_{f_{zz}}) \right]$$

Der Wegfall der Gleichung für die Querkraft bedeutet nicht, dass keine Querbewegung vorhanden ist. Würde man statt des Driftwinkels  $\beta$  als Koordinate die Querbewegung selbst verwenden, so ergäbe sich auch eine Gleichung für die Querbewegung des stehenden Schiffes.

Die Gleichung für die Gierbewegung enthält kein Dämpfungsglied mehr. Die Dämpfung, die auch für das stehende Schiff noch vorhanden ist, kann aber, wie später gezeigt wird, tatsächlich vernachlässigt werden.

Benutzt man die Seegangskräfte nach der Froude-Kryloff-Hypothese, so ist  $\varepsilon_{f_{zz}} = \varepsilon_{df_{zz}} = -\frac{\pi}{2}$ .

Damit lautet die Gleichung für die Gierbewegung

$$\ddot{\psi} = \frac{k \bar{h} g L B T \delta}{n'_z L} \left[ f_{zz}(\chi_0) + \psi \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \right] \sin(\omega t)$$

Dies ist eine inhomogene Mathieu'sche D.Gl., sie hat die Form

$$\ddot{\psi} - \psi \varepsilon \sin(\omega t) = \nu \sin(\omega t)$$

mit  $\varepsilon = \frac{k \bar{h} g m'}{n'_z L} \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0}$

$$\nu = \frac{k \bar{h} g m'}{n'_z L} f_{zz}(\chi_0)$$

und  $m' = \rho L B T \delta$

Hier interessiert insbesondere die erste halbperiodische Lösung, für die folgender Fourier-Reihen-Ansatz gemacht wird:

$$\psi = \psi_0 + \sum_{k=1}^M [a_k \cos(k \frac{\omega}{2} t) + b_k \sin(k \frac{\omega}{2} t)]$$

Zunächst genügt eine Betrachtung nur der ersten Glieder ( $M=1$ ). Durch Einsetzen des Lösungsansatzes und Koeffizientenvergleich der Glieder gleicher Ordnung erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \omega^2 a_1 - \frac{1}{2} \varepsilon b_1 &= 0 \\ -\frac{1}{2} \varepsilon a_1 - \frac{1}{4} \omega^2 b_1 &= 0 \\ -\varepsilon \psi_0 &= \nu \end{aligned}$$

a) Stabilität der Bewegung.

Die homogenen Gleichungen haben eine nichttriviale und zugleich instabile Lösung, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} \omega^2 & -\frac{1}{2} \varepsilon \\ -\frac{1}{2} \varepsilon & -\frac{1}{4} \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \omega^4 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0.5$$

Bei Berücksichtigung weiterer Glieder des Fourier-Ansatzes erhält man den genaueren Wert:

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0.45 \quad (\text{Ince-Strutt'sche Karte } [14] \quad )$$

Die Bedingung für Stabilität der Bewegung lautet:

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2} < 0.45$$

$$\frac{k \bar{h} g m'}{n_z^2 L \frac{2\pi g}{\lambda}} \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} < 0.45$$

$$\frac{m'}{n_z^2} \frac{\bar{h}}{L} \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} < 0.45$$

Durch den Einfluss einer kleinen Dämpfung wird diese Grenze nur unwesentlich erhöht [14].

Für das Beispiel Schiff "C" ist  $m' = 0.074$   $n'_z = 0.0085$  ;  
für  $\chi_0 = 0$  ist  $\partial f_{zz} / \partial \chi = 0.145$  und mit  $\lambda_L = 1$  ergibt sich eine Bedingung für die Wellensteilheit:

$$\frac{\bar{h}}{\lambda} < 0.36$$

Die Bewegung würde also bei einer praktisch unmöglichen Wellensteilheit unstabil werden. Die zwei charakteristischen Exponenten der Mathieu'schen D.Gl. lassen sich nach einer ähnlichen numerischen Methode berechnen, wie sie unter den Abschnitten 1.2. und 1.3. für die Steuergleichungen beschrieben wurde.

Eine Auftragung des reellen Exponenten über der Wellensteilheit zeigt Diagr. 13.

Zum Vergleich wurden mit dem bisher benutzten Rechenprogramm für die vollständigen Steuergl. die charakteristischen Exponenten für eine sehr kleine Geschwindigkeit ( $Fr = 0,05$ ) berechnet (Diagr.14). Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, dass auch hier das Schiff bei einer unrealistischen Wellensteilheit von  $\frac{\bar{h}}{\lambda} > 0.29$  kursunstabil wird.

b) Spezielle Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung.

Aus dem Koeffizientenvergleich für den Fourier-Reihen-Ansatz ergab sich die unabhängige Bestimmungsgleichung für den Mittelwert der speziellen Lösung:

$$-\varepsilon \psi_0 = \nu$$

$$\psi_0 = -\frac{\nu}{\varepsilon}$$

$$\psi_0 = -\frac{f_{zz}(\chi_0)}{\left(\frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi}\right)_{\chi_0}}$$

Für  $\chi_0 \rightarrow 0$  ist  $f_{zz}(\chi_0) = \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0=0} \cdot \chi_0$  und damit ist

$$\psi_0 = -\chi_0 \quad \text{d.h.} \quad \chi = 0$$

Für  $\chi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ist  $f_{zz}(\chi_0) = - \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0=\frac{\pi}{2}} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \chi_0 \right)$

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \chi_0 \quad \text{d.h.} \quad \chi = \frac{\pi}{2}$$

Das stehende Schiff dreht also in die Seegangsrichtung, solange der Gradient des Giermomentes positiv ist, im anderen Fall legt sich das Schiff quer zur See.

## 2. Die Gierbewegung bei gekoppelter Längsbewegung

### 2.1. Die Gleichung für die Längsbewegung und ihre Lösungsmöglichkeiten

Die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte im achterlichen Seegang in Längsrichtung führt auf folgende Bewegungsgleichung [9]:

$$\ddot{X}_0 + N\dot{X}_0 = A \cos(kX_s - \omega t + \varepsilon_{fx}) + Nv$$

- mit  $X_0$  Komponente der Schiffsbewegung in Seegangsrichtung  
 $X_s$  Koordinate der mittleren Bewegungsrichtung des Schiffes  
 $N$  Dämpfungskoeffizient  
 $A = \frac{\bar{X}}{m}$  Amplitude der Längskraft  
 $v$  Geschwindigkeit im glatten Wasser

Zur Beschreibung der Längsbewegung des Schiffes in Seegangsrichtung wird die Koordinate  $\xi(t)$  (Bogenmaß) benutzt, deren Ursprung mit der Wellenform mitwandert:

$$kX_s = \xi_\alpha + ct + \xi(t)$$

$$X_0 = \frac{\xi_\alpha}{k \cos \chi} + \frac{c}{\cos \chi} t + \frac{\xi(t)}{k \cos \chi}$$

- $\xi_\alpha$  zunächst beliebige Anfangslage für  $t=0$   
 $c$  Wellengeschwindigkeit

Die neue Koordinate wird in die Bewegungsgleichung eingeführt:

$$\ddot{\xi}(t) + N\dot{\xi}(t) = A k \cos[\xi_\alpha + \xi(t) + \varepsilon_{fx}] + N k \cos \chi \left( v - \frac{c}{\cos \chi} \right)$$

Wie die Amplituden von Giermoment und Querkraft wird auch die Amplitude der Längskraft in der Form eines dimensionslosen Koeffizienten angegeben, der nur von  $\lambda/L$  und  $\chi$  abhängt:

$$f_{xx} = \frac{\bar{X}}{k h m g}$$

und

$$A = k \bar{h} g f_{xx}(\lambda, \chi)$$

$$= 2\pi g \frac{\bar{h}}{\lambda} f_{xx}(\lambda, \chi)$$

Der Einfluß der Abweichung des momentanen Gierwinkels  $\chi$  von seinem Mittelwert  $\chi_0$  auf die Längsbewegung wird klein sein. Hier wird er daher vernachlässigt; so kann die Gleichung für die Längsbewegung unabhängig von der Gierbewegung gelöst werden.

Die Längskraft kann ähnlich wie die Querkraft und das Giermoment unter Zugrundelegung der Froude-Kryloff-Hypothese berechnet werden (Anhang). Die Phasenverschiebung ist dann  $\varepsilon_{f_{xx}} = 0$ .

$$\ddot{\xi}(t) + N\dot{\xi}(t) = A k \cos \chi_0 \cos[\xi_a + \xi(t)] + N k \cos \chi_0 \left( v - \frac{c}{\cos \chi_0} \right)$$

Der Einfluß der dynamischen Seegangskräfte auf das Schiff ist sicherlich in Längsrichtung kleiner als in Querrichtung. Die nach der Froude-Kryloff-Hypothese berechnete Längskraft wird daher eine gute Näherung darstellen, wie auch der Vergleich mit Versuchsergebnissen von Grim [3] für den Bereich um  $\lambda = 1$  zeigt.

Setzt man in der Bewegungsgleichung  $\ddot{\xi}(t), \dot{\xi}(t) = 0$ , so erhält man eine Bedingung für die Gleichgewichtslagen, außerdem soll hierfür  $\xi(t) = 0$  sein

$$N k \cos \chi_0 \left( v - \frac{c}{\cos \chi_0} \right) = - A k \cos \chi_0 \cos \xi_a$$

Für  $\xi_a$ , die Ordinate der Gleichgewichtslage, gilt so-mit

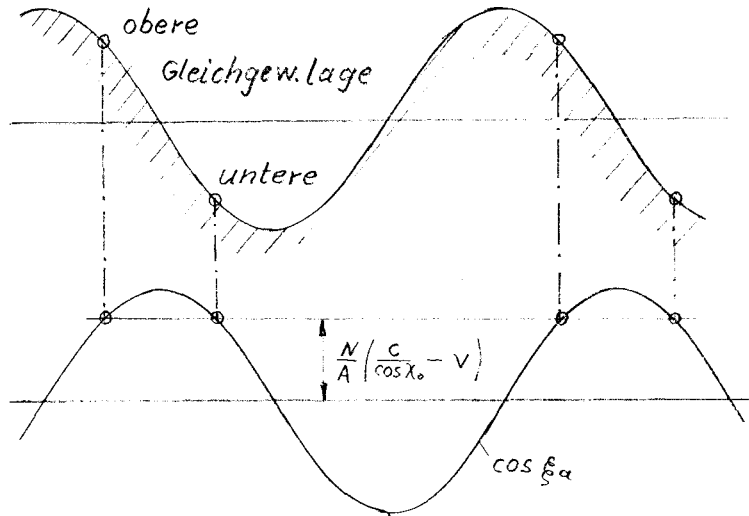
$$\cos \xi_a = \frac{N}{A} \left( \frac{c}{\cos \chi_0} - v \right)$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt für

$$-1 \leq \frac{N}{A} \left( \frac{c}{\cos \chi_0} - v \right) \leq +1$$

Entlang der Wellenkontur gibt es je Periode zwei Gleichgewichtslagen, eine im oberen und eine im unteren Bereich der schieben-

den Wellenflanke. Nur in der unteren Lage ist das Gleichgewicht stabil [9].



Neben der stationären Lösung  $\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t) = 0$  für das mit den Wellen mitlaufende Schiff gibt es noch zwei weitere Lösungen:

Ist  $v$  klein genug gegen  $\frac{c}{\cos \chi_0}$ , dann stellt sich eine periodische Lösung für  $\dot{\xi}(t)$  ein, wobei immer  $\dot{\xi}(t) < 0$  ist, d.h. das Schiff wird laufend von den Wellen überholt.

Ist  $v$  groß genug gegen  $\frac{c}{\cos \chi_0}$ , dann ist die Lösung ebenfalls periodisch, aber  $\dot{\xi}(t) > 0$ , d.h. das Schiff überholt die Wellen.

Im folgenden wird nur der Fall  $v < \frac{c}{\cos \chi_0}$  behandelt.

## 2.2. Verfahren zur Lösung der Gleichungen für die Längs-, Quer- und Gierbewegung

Zunächst soll die Gleichung für die Längsbewegung in eine dimensionslose Form übergeführt werden.

Die Gleichung lautete

$$\ddot{\xi}(t) + N\dot{\xi}(t) = Ak \cos \chi_0 \left\{ \cos[\xi_a + \xi(t)] - \cos \xi_a \right\}$$

mit

$$\cos \xi_a = \frac{N}{A} \left( \frac{c}{\cos \chi_0} - v \right)$$

oder

$$\cos \xi_a = \frac{N}{A} \sqrt{gL} (Fr_c - Fr_v)$$

worin

$$Fr_v = \frac{v}{\sqrt{gL}}, \quad \text{Froudezahl des Schiffes im glatten Wasser}$$

$$Fr_c = \frac{c}{\cos \chi_0 \sqrt{gL}} \\ = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_e}} \quad \text{"Wellen-Froudezahl"}$$

außerdem wird gesetzt

$$N\sqrt{gL} = N'$$

Damit kann der Dämpfungsfaktor  $N'$  als Gradient der Funktion der Widerstands- und Schubänderung über der Froudezahl gedeutet werden.

Für die im folgenden durchgeführten Rechnungen genügte eine Abschätzung des Dämpfungsfaktors:

$$N' = 2,2 \cdot Fr_{\text{mittel}}$$

Zur Normierung der Bewegungsgleichung selbst wird die neue dimensionslose Zeit  $\tau$  eingeführt:

$$\tau = t \frac{\sqrt{gL} \cos \chi_0}{\lambda}$$

damit wird

$$\dot{\xi} = \xi' \frac{\sqrt{gL} \cos \chi_0}{\lambda} \quad \ddot{\xi} = \xi'' \frac{gL \cos^2 \chi_0}{\lambda^2}$$

(Strich ' bedeutet "Ableitung nach  $\tau$ ").

Hiermit lautet die Bewegungsgleichung:

$$\xi''(\tau) \frac{gL \cos^2 \chi_0}{\lambda^2} + \xi'(\tau) \frac{N\sqrt{gL} \cos \chi_0}{\lambda} = A \frac{2\pi \cos \chi_0}{\lambda} [\cos(\xi_a + \xi(\tau)) - \cos \xi_a]$$

die Koeffizienten der folgenden Gleichung sind dimensionslos:

$$\xi''(\tau) + \xi'(\tau) N' \frac{\lambda/L}{g \cos \chi_0} = A \frac{2\pi \lambda/L}{g \cos \chi_0} [\cos(\xi_a + \xi(\tau)) - \cos \xi_a]$$

Zur Lösung dieser nichtlinearen Differentialgleichung wird die rechte Seite für kleine Intervalle  $\Delta \xi$  jeweils konstant gesetzt. Dann kann die Gleichung stückweise integriert werden, wobei die Anfangsbedingung für  $\xi'(\tau)$  für jedes Intervall der Lösung für  $\xi'(\tau)$  des vorhergehenden Intervalls entspricht.

Die Integration liefert den Verlauf über der Wellenkontur  $\xi$  folgender Werte:

$$\Delta \tau(\xi), \xi'(\xi) \text{ und } \xi''(\xi)$$

Die Gleichungen für die Quer- und Gierbewegung bei veränderlicher Geschwindigkeit lauten:

$$\begin{aligned} -m'_y \beta' + (m' - Y_r') \psi' - [Y_\beta' + m'_y \frac{U'(\xi)}{U(\xi)}] \beta + Y_\delta' \delta = \\ \frac{1}{Fr^2(\xi)} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} \left[ f_{YY}(\chi_0) \cos(\xi_a + \epsilon_{f_{YY}} + \xi) + \psi \left( \frac{\partial f_{YY}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \cos(\xi_a + \epsilon_{df_{YY}} + \xi) \right] \\ m'_z \psi'' - N'_\beta \beta - [N'_r - m'_z \frac{U'(\xi)}{U(\xi)}] \psi' - N'_\delta \delta = \\ \frac{1}{Fr^2(\xi)} 2\pi m' \frac{\bar{h}}{\lambda} \left[ f_{zz}(\chi_0) \cos(\xi_a + \epsilon_{f_{zz}} + \xi) + \psi \left( \frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi} \right)_{\chi_0} \cos(\xi_a + \epsilon_{df_{zz}} + \xi) \right] \end{aligned}$$

Sie werden entsprechend dem unter Abschnitt 1.2. beschriebenen Verfahren integriert. Werden für die stückweise Integration dieselben Intervalle  $\Delta \xi$  benutzt, für die auch die Gleichung für die Längsbewegung gelöst wurde, so können die in den Koeffizienten der Steuergleichungen auftretenden Veränderlichen  $U, U'$  und  $Fr$  aus  $\Delta \tau(\xi), \xi'(\xi)$  und  $\xi''(\xi)$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} U(t) &= \dot{\chi}_0(t) \\ &= \frac{c}{\cos \chi_0} - \frac{|\dot{\xi}(t)|}{k \cos \chi_0} \end{aligned}$$

Statt  $\dot{\xi}(t)$  wird für jedes Intervall die mittlere Geschwindigkeit  $\frac{\Delta \xi}{\Delta t} = \frac{\Delta \xi}{\Delta \tau} \frac{\sqrt{gL} \cos \chi_0}{\lambda}$  benutzt:

$$U(\xi) = \frac{c}{\cos \chi_0} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \tau(\xi)} \frac{\sqrt{gL}}{2\pi}$$

oder als Froudezahl:

$$Fr(\xi) = Fr_c - \frac{\Delta \xi}{\Delta \tau(\xi)} \frac{1}{2\pi}$$

Das Verhältnis  $\frac{U'}{U}$  kann folgendermaßen berechnet werden

$$\frac{U'}{U} = \dot{U}(t) \frac{L}{U^2(t)}$$

worin

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \frac{1}{k \cos \chi_0} \ddot{\xi}(t) \\ &= \frac{g \cos \chi_0}{2\pi \lambda/L} \xi''(\xi) \end{aligned}$$

$\xi''(\xi)$  wird durch das arithmetische Mittel der Beschleunigungen zu Beginn und Ende jedes Intervalls angenähert.

Weiterhin muß die Zeit umgerechnet werden:

$$\Delta s = \Delta t \frac{U}{L}$$

$$\Delta s(\xi) = \Delta \tau(\xi) Fr(\xi) \frac{\lambda/L}{\cos \chi_0}$$

### 2.3. Kursstabilität und Gierwinkel bei periodischer Längsbewegung

Für folgende drei Bewegungsmöglichkeiten des Schiffes im achterlichen Seegang soll die Gierbewegung berechnet werden:

Periodische Längsbewegung (das Schiff wird laufend von den Wellen überholt).

Übergangsphase (das Schiff, das zunächst von den Wellen überholt wurde, wird von einer Welle zum Mitlaufen gezwungen).

Stationäre Lösung (das Schiff läuft mit einer Welle mit).

In diesem Abschnitt wird die periodische Längsbewegung behandelt.

Die reinperiodische Lösung für die Längsbewegung wird durch fortlaufende Integration über mehrere Perioden (5 bis 10), bis der Einschwingvorgang abgeklungen ist, gefunden. Da die unter Abschnitt 1.3. abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten nicht auf Differentialgleichungen mit harmonischen Koeffizienten beschränkt sind, sondern ganz allgemein für Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten gelten, können sie auch auf die Steuergleichungen bei gekoppelter Längsbewegung angewandt werden.

Die Rechnungen wurden für das Beispiel-Schiff "C" durchgeführt.

In den Diagrammen 15 und 17 sind als Lösung der Gleichung für die Längsbewegung die größte, kleinste und mittlere Geschwindigkeit im Seegang aufgetragen.

Die Auftragung des Stabilitätsindex (Diagramm 16) zeigt ein ähnliches Bild wie für den Fall konstanter Geschwindigkeit. Allerdings tritt Resonanz schon bei einer Geschwindigkeit  $Fr = 0.26$  ein. Das liegt einmal an der etwas größeren Eigen-

frequenz ( $q_i = 1.22$  gegen  $q_i = 1.00$  ohne Längsbewegung) und zum anderen an der Geschwindigkeitserhöhung im Seegang.

Selbst für gegen Null gehende Glattwassergeschwindigkeiten ist im achterlichen Seegang eine mittlere Geschwindigkeit vorhanden. Aus diesem Grunde verschwinden die hydrodynamischen Kräfte nicht völlig und Stabilitätsindex (Diagramm 16) sowie Gierwinkel (Diagramm 18) nehmen in diesem Bereich andere Werte an, als im Fall konstanter Geschwindigkeit.

#### 2.4. Gierbewegung beim Übergang von der periodischen Längsbewegung zum Mitlaufen mit den Wellen

Zuerst wird die reinperiodische Lösung bestimmt, und zwar für eine Glattwassergeschwindigkeit bzw. Wellensteilheit, die dicht unter dem Wert liegt, für den das Schiff von den Wellen mitgenommen wird ( $Fr = 0,25$ ).

Um zu erreichen, daß das Schiff von einer Wellen mitgenommen wird, muß der Schub nach dem Überschreiten der oberen Gleichgewichtslage ausreichend erhöht werden. Eine Schuberhöhung ist gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Glattwassergeschwindigkeit; auch eine Vergrößerung der Wellensteilheit hätte die gleiche Wirkung.

Das Schiff durchläuft dann noch einmal das folgende Wellental. Es erreicht aber die folgende obere Gleichgewichtslage nicht mehr, sondern kehrt die Bewegungsrichtung um. Danach schwingt das Schiff auf die untere (stabile) Gleichgewichtslage ein.

Beginnend mit den Werten für die periodische Lösung werden die Gleichungen für die Quer- und Gierbewegung über dem eben beschriebenen Bewegungsablauf numerisch integriert.

Die Rechnung wurde am 2. Umkehrpunkt der gedämpften Schwingung um die untere Gleichgewichtslage abgebrochen, da sich dieser Vorgang sicherlich im unregelmäßigen Seegang nicht so deutlich ausprägen wird. Von besonderem Interesse ist der Verlauf der Gierbewegung während der ersten Umkehr der Bewegung.

Da es sich hier nicht wie bisher um einen periodischen Vorgang handelt, kann der Begriff Kursstabilität nur so definiert werden, daß während des einmaligen Vorganges der Gierwinkel derart anwächst, daß das Schiff durch Ruderlegen nicht auf dem gewünschten Kurs zu halten ist.

Aus der Auftragung des Ergebnisses (Diagr. 19) ist zu erkennen, daß der Gierwinkel im Verlauf der Übergangsphase nicht wesentlich größer wird, als während der periodischen Bewegung. Bewegt sich das Schiff nach der ersten Umkehr zurück in Richtung der hemmenden Wellenflanke, so vergrößert sich zwar der Kurs zum Seegang, aber am 2. Umkehrpunkt nimmt der Kurswinkel wieder ab, so daß auch dieser Bewegungsablauf nicht kritisch zu sein scheint.

Das ist daraus zu erklären, daß die Umkehrpunkte, an denen das Schiff länger verharret, in der Nähe der Wellenberge und damit im stabilisierenden Bereich (siehe nächster Abschnitt) liegen.

Die Umkehrpunkte würden unter folgenden Bedingungen weiter zum Wellental und damit in den destabilisierenden Bereich rücken:

- a) Wenn die Gleichgewichtslagen, bestimmt durch die Beziehung

$$\cos \xi_{\alpha} = \frac{N'}{A} (Fr_c - Fr_v)$$

dichter an der vorderen Wellenflanke liegen würden. Der Dämpfungsfaktor  $N'$  ist im allgemeinen relativ klein. Außerdem kann nur dann, wenn die Amplitude der Wellensteilheit und die Glattwassergeschwindigkeit groß genug sind, das Schiff in die Lage kommen, von den Wellen mitgenommen zu werden. Daher liegen die Gleichgewichtslagen immer in der Nähe des Wellenberges bzw. Tales.

- b) Wenn die Schuberhöhung derart groß ist, daß das Schiff schon weit vor dem Erreichen der oberen Gleichgewichtslage die Bewegung umkehrt. Dieser Fall tritt nur bei unrealistisch großen Schuberhöhungen ein.

In diesem Beispiel wurde der Schub derart erhöht, daß die Glattwassergeschwindigkeit gleich der Wellengeschwindigkeit ist, dabei änderte sich die Lage der Umkehrpunkte nur unwesentlich.

In dem hier betrachteten Bewegungsablauf im regelmäßigen Seegang ist die Kursstabilität nicht gefährdet.

Im unregelmäßigen Seegang ist jedoch der Fall denkbar, daß das Schiff nach einer relativ ruhigen Periode plötzlich von einer steilen Welle zum Mitlaufen gezwungen wird. In diesem Fall würde es längere Zeit in der Nähe des Wellentales verharren und wäre somit stärker der destabilisierenden Kräften ausgesetzt.

## 2.5. Gierwinkel und Kursstabilität für das mit einer Welle mitlaufende Schiff

Obwohl das mit einer Welle mitlaufende Schiff nur in einer bestimmten Lage zur Wellenform - der unteren Gleichgewichtslage - verharren kann, ist es wichtig, sein Kursverhalten auch in anderen Lagen zur Wellenkontur zu kennen. Während der Übergangsphase durchläuft das Schiff die Wellenkontur relativ langsam, und verharrt in der Nähe der Totpunkte der Pendelbewegung besonders lange.

Ruht das Schiff relativ zur Wellenkontur, so bleiben die periodischen Glieder in den bisher benutzten Gleichungen für die Quer- und Gierbewegung konstant.

Die Lösungen können in geschlossener Form angegeben werden. Die Gleichungen entsprechen den bei der unter Abschnitt 1.2. stückweisen Integration intervallweise gültigen linearen Gleichungen.

Die allgemeine Lösung lautet

$$\psi = \sum C_n e^{\lambda_n s}$$

Der kleinste reelle Exponent  $Re(\lambda_n)$  dient wie bisher als Stabilitätsindex.

Ferner gibt die spezielle Lösung nach dem Abklingen des Einschwingvorganges den Zustand an, für den alle statischen Kräfte auf das Schiff im Gleichgewicht stehen.

Die Gleichungen für die Quer- und Gierbewegung nehmen dann folgende Form an:

$$g_2/\beta_0 + Y_0' \delta_0 + \psi_0 g_5 \cos \xi_0 = g_7 \cos \xi_0$$

$$G_4/\beta_0 - N_0' \delta_0 + \psi_0 G_5 \sin \xi_0 = G_7 \sin \xi_0$$

$\xi_0$  bezeichnet den jeweiligen Punkt der Wellenkontur  
 $\xi_0 = 0$  liegt auf der vorderen Wellenflanke.

Aus der Forderung, daß ein bestimmter Kurs zum Seegang eingehalten werden soll ( $\psi_0 = 0$ ), ergibt sich der notwendige Ruderwinkel  $\delta_0$ .

$$\delta_0 = \frac{G_7 \sin \xi_0 - \frac{G_4}{g_2} g_7 \cos \xi_0}{-N'_\delta - Y'_\delta \frac{G_4}{g_2}}$$

Das nicht-gesteuerte Schiff ist innerhalb eines großen Bereichs zwischen Wellental und vorderer Wellenflanke kursunstabil (Diagramm 20). Durch die Wirkung der Ruderautomatik kann die Kursstabilität wieder hergestellt werden.

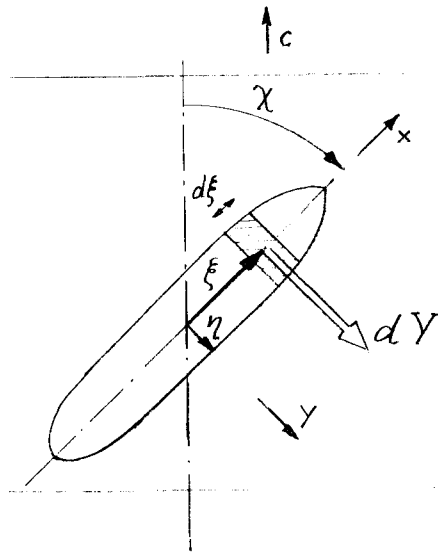
Bei großen Wellensteilheiten kann der konstante Ruderwinkel, der notwendig ist, um das Schiff auf Kurs zu halten, im Wellental und auf dem Wellenberg größer als  $30^\circ$  werden.

Der Bereich zwischen dem Wellental und der schiebenden Wellenflanke ist besonders kritisch, da hier das Schiff nur durch einen großen Ruderwinkel am Querdrehen gehindert werden kann, und da diese Gleichgewichtslage in einigen Fällen kursunstabil ist.

Wenn das Schiff den kritischen Bereich schnell durchläuft, dann können sich die destabilisierenden Kräfte kaum auswirken. Daher zeigte die Berechnung des Gierwinkels für die Übergangsphase kein unstabiles Kursverhalten.

Anhang

Berechnung von Querkraft und Giermoment im Seegang



$$\xi = \frac{x}{L/2} \quad \eta = \frac{y}{L/2}$$

L = Schiffslänge  
 $B_0, T_0, \beta_0$  bezogen auf Hauptspant  
 $B, T, \beta$  bezogen auf den jeweiligen Spant

Die Gleichung für die Wellenkontur in x-Richtung lautet in komplexer Schreibweise:

$$\begin{aligned} h(t, x) &= \bar{h} e^{i(\omega t - x k \cos \chi)} \\ &= \bar{h} e^{i(\omega t - \gamma_e \xi)} \end{aligned}$$

wobei  $\gamma = \pi L / \lambda$   
 $\gamma_e = \gamma \cos \chi$

Die von einer Welle erzeugten horizontalen Kräfte ändern sich mit dem Sinus des Winkels  $\chi$ . Nach der Froude-Kryloff-Hypothese lauten für eine Scheibe  $d\xi$  Kraft und Moment:

$$\begin{aligned} dV &= k \bar{h} \rho g \sin \chi B T \beta d\xi e^{i(\omega t - \gamma_e \xi)} \\ dN &= k \bar{h} \rho g \sin \chi B T \beta \xi d\xi e^{i(\omega t - \gamma_e \xi)} \end{aligned}$$

und für das gesamte Schiff

$$Y = k \bar{h} \rho g \sin \chi L B_0 T_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} e^{-i\chi \xi} d\xi e^{i\omega t}$$

$$N = k \bar{h} \rho g \sin \chi L B_0 T_0 \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} \xi e^{-i\chi \xi} d\xi e^{i\omega t}$$

In Form dimensionsloser Koeffizienten ausgedrückt lauten die Amplituden für Querkraft und Giermoment:

$$f_{YY} = \sin \chi \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} e^{-i\chi \xi} d\xi$$

$$f_{ZZ} = \sin \chi \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} \xi e^{-i\chi \xi} d\xi$$

Die Ableitungen nach  $\chi$  werden ebenfalls benötigt:

$$\frac{\partial f_{YY}}{\partial \chi} = \frac{1}{2} \left[ \cos \chi \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} e^{-i\chi \xi} d\xi + \sin^2 \chi \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} i \chi \xi e^{-i\chi \xi} d\xi \right]$$

$$\frac{\partial f_{ZZ}}{\partial \chi} = \frac{1}{4} \left[ \cos \chi \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} \xi e^{-i\chi \xi} d\xi + \sin^2 \chi \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} i \chi \xi^2 e^{-i\chi \xi} d\xi \right]$$

In reeller Schreibweise hat die dimensionslose Querkraft die folgende Form

$$f_{YY} \cos(\omega t + \epsilon_{f_{YY}})$$

hierin ist

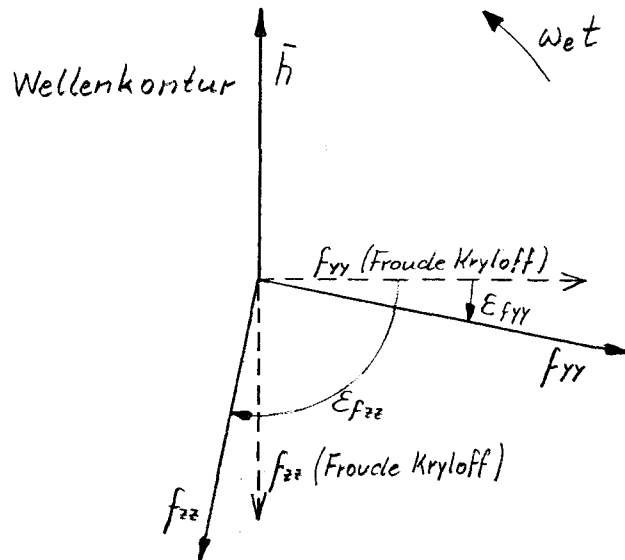
$$f_{yy} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(f_{yy}) + \operatorname{Im}^2(f_{yy})}$$

und

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{f_{yy}} = \frac{\operatorname{Im}(f_{yy})}{\operatorname{Re}(f_{yy})}$$

Die Formeln für das Giermoment und die Ableitungen von Querkraft und Giermoment lauten entsprechend.

Zur Veranschaulichung der Phasenlagen von Querkraft und Giermoment diene folgendes Zeigerbild:



Von Weinblum und St. Denis sind  $f_{yy}$  und  $f_{zz}$  für ein Elementarschiff folgender Form berechnet worden [6] :

$$T = T_0 \quad \text{und} \quad \beta = 1$$

die Wasserlinie hat die Form  $\eta = 1 - \xi^2$ , so daß  $\delta = \frac{V}{L B_0 T_0} = \frac{2}{3}$

$$f_{yy} = 3 \sin \chi \frac{\sin \gamma_e - \gamma_e \cos \gamma_e}{\gamma_e^3}$$

$$f_{zz} = \frac{3}{2} \sin \chi \frac{(3 - \gamma_e^2) \sin \gamma_e - 3 \gamma_e \cos \gamma_e}{\gamma_e^4}$$

Die Längskraft lautet ähnlich wie die Querkraft:

$$f_{xx} = 3 \cos \chi \frac{\sin \gamma_e - \gamma_e \cos \gamma_e}{\gamma_e^3}$$

Der Phasenwinkel ist für  $f_{xx}$  und  $f_{yy}$   $\epsilon_{f_{xx}}, \epsilon_{f_{yy}} = 0$  und für  $f_{zz}$   $\epsilon_{f_{zz}} = -\frac{\pi}{2}$

Für die Ableitungen  $\frac{\partial f_{yy}}{\partial \chi}$  und  $\frac{\partial f_{zz}}{\partial \chi}$  ist ebenfalls  $\epsilon_{df_{yy}} = 0$  und  $\epsilon_{df_{zz}} = -\frac{\pi}{2}$ .

Zur Berechnung von Querkraft und Giermoment nach der hydrodynamischen Theorie werden die Ergebnisse von Tamura für zweidimensionale Körper benutzt [11].

In Abhängigkeit von dem dimensionslosen Frequenzparameter  $\frac{B}{2} \frac{\omega^2}{g}$ , von  $\frac{B}{2T}$  und  $\beta$  sind der Real- und Imaginärteil der Querkraft bekannt:

$$\frac{K_r}{\rho g \sqrt{k h}} \quad \text{und} \quad \frac{K_i}{\rho g \sqrt{k h}}$$

Die Koeffizienten für Querkraft und Giermoment für das gesamte Schiff können dann nach der Streifenmethode berechnet werden:

$$f_{yy} = \sin \chi \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} \left[ \frac{K_r}{\rho g \sqrt{k h}} + i \frac{K_i}{\rho g \sqrt{k h}} \right] e^{-i \gamma_e \xi} d\xi$$

$$f_{zz} = \sin \chi \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{BT\beta}{B_0 T_0} \left[ \frac{K_r}{\rho g \sqrt{k h}} + i \frac{K_i}{\rho g \sqrt{k h}} \right] \xi e^{-i \gamma_e \xi} d\xi$$

Die Formeln für  $\frac{\partial f_{yy}}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f_{xx}}{\partial x}$  lauten entsprechend.  
Die Phasenwinkel können jetzt beliebige Werte annehmen.

Zum Vergleich mit den nach der Froude-Kryloff-Hypothese berechneten Werten sind die Ergebnisse nach der hydrodynamischen Theorie für das gleiche Elementarschiff in Diagramm 21 gegenübergestellt.

Außerdem wurde die Rechnung für ein Taylor-Modell mit den Parametern entsprechend Schiff "C" [10] durchgeführt:

$$\frac{B_0}{T_0} = 3,1 \quad \frac{L}{B_0} = 8 \quad \varphi = 0,65 \quad \beta_0 = 0,945 \quad c_v = 3 \cdot 10^{-3}$$

Es zeigt sich, daß die Kräfte für dieses Schiff zwar kleiner sind als für das Elementarschiff, trotzdem liegen sie noch um 50 - 80% über den nach der Froude-Kryloff-Hypothese berechneten Werten (Diagramm 22).

## Literatur

- [1] Davidson, K.S.M.:  
A Note on the Steering of Ships in Following Seas.  
VII. Intern. Congress of Applied Mechanics, London,  
Sept. 1948.
- [2] Wahab, R. und W.A. Swaan:  
Coursekeeping and Broaching of Ships in Following  
Seas.  
Intern. Shipbuilding Progr., No. 119, 1964.
- [3] Grim, O.:  
Das Schiff in von achtern auflaufender See.  
Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellschaft, Bd. 45, 1951.
- [4] Grim, O.:  
Surging Motion and Broaching Tendencies in a Severe  
Irregular Sea.  
Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Bd. 16, 1963.
- [5] Du Cane, P. und G.J. Goodrich:  
The Following Sea, Broaching and Surging.  
Roy. Inst. Nav. Arch., Quart. Trans. vol. 104, 1962.
- [6] Weinblum, G. und M. St. Denis:  
On the Motions of Ships at Sea.  
Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., Trans. vol. 58, Nov. 1950.
- [7] Rydill, L.J.:  
A Linear Theory for the Steered Motion of Ships in  
Waves.  
Roy. Inst. Nav. Arch., Trans. vol. 101, 1959.
- [8] Eda, H. und C.L. Crane:  
Steering Characteristics of Ships in Calm Water and  
Waves.  
Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., Trans. vol. 73, 1965.

- [ 9] Boese, P.:  
Die Gier- und Längsbewegung im achterlichen Seegang.  
Inst. f. Schiffbau Hamburg, Ber. Nr. 179, 1966.
- [10] Davidson, K.S.M. und L.I. Schiff:  
Turning and Course-Keeping Qualities.  
Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., Trans. vol 54, 1946.
- [11] Tamura, K.:  
The Calculation of Hydrodynamical Forces and Moments  
Acting on the Two-Dimensional Body According to the  
Grim's Theory.  
Journal of Seibu Zosen Kai, 1963.
- [12] Takaishi, Y. und O. Grim:  
Das Rollmoment in schräglaufernder Welle.  
Schiff und Hafen, Bd. 17, 1965.
- [13] Schiff, L.I. und M. Gimprich:  
Automatic Steering of Ships by Proportional Control.  
Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., Trans. vol. 57, 1949.
- [14] Klotter, K.:  
Technische Schwingungslehre, Bd. 1.  
Springer Verlag, 1951.

## Zusammenfassung

Zur Beschreibung des Kursverhaltens von Schiffen im Seegang wurden die linearisierten Gleichungen für die Gier- und Querbewegung (Steuergleichungen) um einige Glieder erweitert, um die im regelmäßigen Seegang auftretenden Kräfte zu berücksichtigen. Da eine lineare Abhängigkeit der Seegangskräfte vom Gierwinkel angenommen wurde, führte dieser Ansatz auf ein rheolines Gleichungssystem, d.h. ein lineares Gleichungssystem mit periodischen Koeffizienten. Mit Hilfe eines numerischen Verfahrens wurde dieses System unter Voraussetzung konstanter und veränderlicher Geschwindigkeit integriert. Stabilität und spezielle Lösung für die periodische Gierbewegung konnten aus der Integration über nur eine Periode gewonnen werden, so daß der Rechenaufwand relativ gering blieb.

Es zeigte sich, daß insbesondere bei kleinen Geschwindigkeiten die periodischen Kräfte des Seeganges eine stabilisierende Wirkung auf die Gierbewegung ausüben.

Bei gewissen Geschwindigkeiten stehen die Eigenperiode des Schiffes und Erregerperiode des Seeganges in Resonanz und die Kursstabilität verringert sich. Wenn die Kursstabilität im glatten Wasser gering ist, so kann das Schiff an den Resonanzstellen kursunstabil werden. Alle Maßnahmen, die einen günstigen Einfluß auf die Kursstabilität im glatten Wasser ausüben, wie z.B. eine Verbesserung der Ruderautomatik, verringern auch das un stabile Verhalten an den Resonanzstellen.

Ein mäßig kursstabiles Schiff (z.B. Schiff "C") ist im Resonanzfall bei einer Wellensteilheit von  $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{30}$  kursunstabil; unter Berücksichtigung der hydrodynamischen Seegangskräfte, wie sie im Anhang berechnet wurden, schon bei einer Wellensteilheit von etwa  $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{50}$ . Das sehr kursstabile Schiff (z.B. Schiff "A") wurde selbst bei extrem steilen Wellen nicht kursunstabil.

Die Resonanzstellen lagen bei den hier untersuchten Schiffen im Bereich höherer Geschwindigkeiten (ab  $Fr = 0,3$ ). Durch Maßnahmen wie Verstärkung der winkelproportionalen Steuerung ( $\gamma = 2$ ), wird zwar die Kursstabilität verbessert, aber die Resonanzstelle rückt in den Bereich geringerer Geschwindigkeiten ( $Fr = 0,27$ ).

Das nichtgesteuerte Schiff ist bestrebt, in die Laufrichtung des Seeganges zu drehen, solange der Gradient des Giermomentes positiv ist, d.h. bis zu einem Kurs von etwa  $\chi = 55^\circ$ . Bei größeren Kurswinkeln dreht das Schiff quer. Das gleiche Resultat erhält man für das stehende Schiff.

Zunächst scheint es der Erfahrung zu widersprechen, daß das Schiff ohne Ruderbetätigung in Seegangsrichtung dreht. Daß diese Erscheinung noch nicht beobachtet wurde kann daran liegen, daß andere Wirkungen, wie die Unregelmäßigkeit des Seeganges und der Wind, den Effekt überdecken.

Auch das gesteuerte Schiff hält nicht den der Ruderautomatik vorgegebenen Kurs. Solange der Gradient des Giermomentes positiv ist, weicht der mittlere Kurs in Seegangsrichtung vom vorgeschriebenen Kurs ab. Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten (unter  $Fr = 0,02$ ) kann diese Abweichung durch einen mittleren Ruderwinkel nicht mehr ausgeglichen werden.

Hier zeigt sich neben der erwähnten Änderung der Kursstabilität ein weiterer Einfluß der Nichtlinearität.

Im Fall einer periodischen Längsbewegung, d.h. wenn das Schiff von den Wellen überholt wird, tritt eine mittlere Geschwindigkeitserhöhung auf. Die Lösung der Steuergleichungen bei gekoppelter Längsbewegung zeigt im wesentlichen kein anderes Bild als die Lösung für konstante Geschwindigkeit. Die mittlere Geschwindigkeitserhöhung machte sich derart bemerkbar, daß Resonanz schon bei einer 10% kleineren Geschwindigkeit (im glatten Wasser) auftrat. Da die Resonanzstelle dicht unter der Geschwindigkeitsgrenze liegt, bei der das Schiff von den Wellen mitgenommen wird, ist in diesem

Fall die Resonanzschwingung weniger wichtig als das "Mitgenommen-Werden".

Erhöht man den Schub eines Schiffes, das laufend von den Wellen überholt wird, so kann es plötzlich von einer Welle mitgenommen werden. Für diese Möglichkeit der Längsbewegung wurde die Gierbewegung berechnet. Es zeigte sich kein übermäßiges Anwachsen des Gierwinkels, was auf eine Tendenz zum Querschlagen hingedeutet hätte. Dies braucht nicht zu bedeuten, daß auch im unregelmäßigen Seegang dieser Bewegungsablauf uninteressant sei. Im Gegensatz zum regelmäßigen Seegang, wo das Schiff bei der Umkehr der Bewegungsrichtung in der Nähe des Wellenberges länger verharret, kann sich dieser Vorgang im unregelmäßigen Seegang im Wellental abspielen.

Für das sich gegenüber der Welle in Ruhe befindende Schiff wurde gezeigt, daß besonders das Wellental kritisch ist. Hier ist die Kursstabilität z.T. stark vermindert und außerdem kann bei großen Wellensteilheiten ( $\frac{h}{\lambda} > \frac{1}{30}$ ) das Schiff selbst durch einen Ruderwinkel von  $30^\circ$  nicht am Querdrehen gehindert werden.

Abschließend seien noch einmal die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung genannt:

- Die nichtlinearen Einflüsse, verursacht durch die Kursabhängigkeit der Seegangskräfte, äußern sich in einer Änderung der Kursstabilität und in einem Auswandern des Mittelwertes der Gierbewegung.
- Die Kursstabilität wird bei kleinen Geschwindigkeiten durch den Seegang erhöht.
- Bei höheren Geschwindigkeiten können Resonanzstellen auftreten, an denen sich die Kursstabilität verringert.
- Die Kursstabilität an den Resonanzstellen hängt in erster Linie von der Größe der Kursstabilität im glatten Wasser ab.

- Für kleinere Eigenperioden des Schiffes verschieben sich die Resonanzstellen zu kleineren Geschwindigkeiten.
- Durch die Längsbewegung rücken die Resonanzstellen in den Bereich kleinerer Geschwindigkeiten.
- Der mittlere Kurs eines Schiffes weicht besonders bei kleinen Geschwindigkeiten von dem vorgegebenen Kurs ab. Der geforderte Kurs kann nur durch einen von Null verschiedenen mittleren Ruderwinkel gehalten werden.
- Die Übergangsphase, in der das Schiff von einer regelmäßigen Welle mitgenommen wird, ist im Hinblick auf das Kursverhalten nicht kritisch.
- Das mit einer Welle mitlaufende Schiff kann im Wellental kursunstabil sein, außerdem sind große Ruderwinkel nötig, um es am Querdrehen zu hindern.
- Um weitere Aufschlüsse über das Querschlagen im achterlichen Seegang zu erhalten, ist vor allem eine Untersuchung des Vorganges des "Mitgenommen-Werdens" im unregelmäßigen Seegang notwendig.

## Nomenklatur

$x_0, y_0$	raumfeste Koordinaten in Richtung des mittleren Kurses
$x_s, y_s$	raumfeste Koordinaten in Laufrichtung des Seeganges
$x, y$	schiffsfeste Koordinaten
$\eta, \xi$	dimensionslose Koordinaten der Wasserlinie
$\chi$	momentaner Kurs (Richtung von $x$ gegen $x_s$ )
$\chi_0$	mittlerer Kurs (Richtung von $x_0$ gegen $x_s$ )
$\psi$	Gierwinkel (Richtung von $x$ gegen $x_0$ )
$\psi_0$	mittlerer Gierwinkel
$\beta$	Driftwinkel
$\xi$	Koordinate in Seegangsrichtung $x_s$ zur Beschreibung der Lage des Schiffes relativ zur Wellenform
$\xi_a$	Koordinate der Gleichgewichtslage
$\xi_0$	Koordinate des relativ zur Wellenform in Ruhe befindlichen Schiffes
$U$	momentane Schiffsgeschwindigkeit
$v$	Schiffsgeschwindigkeit im glatten Wasser
$L$	Schiffslänge
$t$	Zeit
$s$	dimensionslose Zeit ( $ds = \frac{U}{L} dt$ )
$\tau$	dimensionslose Zeit ( $\tau = \frac{\sqrt{gL}}{\lambda} \cos \chi_0 t$ )
$\dot{\psi}, \dot{\beta}, \dot{U}$	Ableitungen nach $t$
$\psi', \beta', U'$	Ableitungen nach $s$
$r'$	dimensionslose Drehgeschwindigkeit ( $r' = \psi'$ )
$\dot{\xi}$	Ableitung nach $t$
$\xi'$	Ableitung nach $\tau$
$m$	Schiffsmasse
$m'$	dimensionslose Schiffsmasse
$m_y'$	dimensionslose Schiffsmasse einschließlich hydrodynamischer Masse für Bewegung in $y$ -Richtung
$n_z'$	dimensionsloses Massenträgheitsmoment einschließlich hydrodynamischer Masse

$Y_r', Y_\beta', Y_\delta'$	dimensionslose Ableitungen der hydrodynamischen Kräfte in y-Richtung nach $r, \beta, \delta$
$N_r', N_\beta', N_\delta'$	dimensionslose Ableitungen der hydrodynamischen Momente nach $r, \beta, \delta$
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{N}$	Amplituden der Seegangskräfte bzw. -momente
Kr, Ki	Real- und Imaginärteil der Seegangskraft auf zweidimensionalen Körper
$f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}$	dimensionslose Koeffizienten der Seegangskräfte
$\varepsilon_{f_{xx}}, \varepsilon_{f_{yy}}, \varepsilon_{f_{zz}}$	Phasenwinkel der Seegangskräfte
N	Dämpfungskoeffizient der Längsbewegung
N'	dimensionsloser Dämpfungskoeffizient ( $N' = N \sqrt{gL'}$ )
A	Amplitude der Längskraft ( $A = \frac{\bar{X}}{m}$ )
$\lambda$	Wellenlänge
$\bar{h}$	Wellenamplitude
k	Wellenzahl
c	Wellengeschwindigkeit
$\omega$	Seegangsfrequenz
$\omega_e$	Begegnungsfrequenz
$\Omega$	dimensionslose Frequenz ( $\Omega = \omega \frac{L'}{U}$ )
$T_e$	dimensionslose Begegnungsperiode
$T_o$	dimensionslose Eigenperiode der Gierbewegung
$\lambda_n$	charakteristische Exponenten der Lösung der linearen Bewegungsgleichungen
$q_n$	charakteristische Exponenten der Lösung der Bewegungsgleichung mit periodischen Koeffizienten
$\delta$	Ruderwinkel
$\gamma$	Koeffizient des winkelproportionalen Gliedes
$\sigma'$	dimensionsloser Koeffizient des winkelgeschwindigkeitsproportionalen Gliedes der Steuerung
$\chi_k$	der Ruderautomatik vorgegebener Kurs
$B_o, T_o, \beta$	Breite, Tiefe und Völligkeit der Hauptspantfläche
$B, T, \beta$	Breite, Tiefe und Völligkeit eines beliebigen Schiffsquerschnittes
$\delta$	Völligkeitsgrad
$\varphi$	Schärfegrad
$C_v$	Schlankheitsgrad