

Erweiterung energiebasierter  
Boundary-Elemente-Methoden für  
Hochfrequenzprobleme

Vom Promotionsausschuss der  
Technischen Universität Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von  
Matthias Wolf Christian Ram

aus  
Hamburg

2024

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Otto von Estorff
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Martin Ochmann

Tag der mündlichen Prüfung: 25.06.2024

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Modellierung und Berechnung der Technischen Universität Hamburg entstanden.

Zuerst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Professor Otto von Estorff bedanken. Seine Unterstützung und wertvollen Ratschläge haben diese Dissertation maßgeblich geprägt. Darüber hinaus gilt mein Dank Professor Martin Ochmann für die Übernahme des Zweitgutachtens und die damit einhergehende, intensive Auseinandersetzung mit meiner Arbeit. Professor Thorsten Alexander Kern danke ich für den Vorsitz der Prüfungskommission.

Mein Dank gilt weiterhin Sören Keuchel, Boris Dilba, Joscha Piepiorka, Nicolai Rehbein und Kim Marcel Beiroth für den regelmäßigen fachlichen Austausch und die fruchtbare Zusammenarbeit rund um die Boundary-Elemente-Methode.

Für die gute Zusammenarbeit, die tolle Arbeitsatmosphäre und viele anregende Diskussionen möchte ich mich bei allen Kollegen am Institut bedanken. Besonders die zahlreichen Gespräche mit Thorben Schröder, Patrick Cordes, Joscha Piepiorka, Jonas von Pein und Gerrit Weiser werden mir stets in guter Erinnerung bleiben.

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden, die mich durch diese ganze Reise begleitet haben. Eure Geduld, euer Verständnis und eure ständigen Aufmunterungen haben mir die notwendige Motivation gegeben, weiterzumachen. Hervorheben möchte ich dabei auch die fortwährende Unterstützung durch meine Eltern während meiner gesamten akademischen Ausbildung, die vieles erst ermöglicht hat.

Von Herzen danke ich zudem meiner Frau Katja, die während der vergangenen Jahre einige Entbehrungen auf sich genommen hat, um mir den nötigen Raum für meine Arbeit zu verschaffen und dabei nie das Vertrauen mich verloren hat.

Hamburg im Juli 2024

Matthias Ram



# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit trägt zur Weiterentwicklung numerischer Vorhersageverfahren für akustische Hochfrequenzprobleme bei.

Bei der hierzu untersuchten Klasse der Energiemethoden werden anstatt der stark oszillierenden Feldgrößen Druck und Partikelgeschwindigkeit zur Charakterisierung des Schallfelds zeitlich und örtlich gemittelte energetische Feldgrößen betrachtet. Zur Formulierung einer entsprechenden numerisch lösbaren Differentialgleichung sind weitreichende Annahmen erforderlich, so dass die Genauigkeit der Lösung gegenüber klassischen, wellenauflösenden Verfahren im Allgemeinen reduziert ist. Diesem Nachteil stehen eine sehr hohe Berechnungsgeschwindigkeit und große Robustheit gegenüber. In einem ersten Entwicklungsschritt werden verschiedene Formulierungen der Energiemethoden untersucht und zueinander in Kontext gesetzt.

Damit mittels der zu entwickelnden Methode eine Abschätzung der akustischen Eigenschaften möglichst einfach und früh im Entwicklungsprozess geleistet werden kann, soll sie bestmöglich in den Prozess integriert werden können. Um den Weg hierzu zu ebnen, wird sie als isogeometrische Boundary-Elemente-Methode (BEM) umgesetzt. Dabei werden die in CAD-Systemen zur Geometrierepräsentation genutzten Non-Uniform Rational B-Splines auch als Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Randwertverläufe der Feldgrößen genutzt. Ein besonderes Augenmerk liegt hierbei auf der effizienten numerischen Auswertung der in der BEM auftretenden singulären Integrale. Für die sogenannten quasi-singulären Integrale wird zudem eine neuartige Integrationsstrategie vorgeschlagen.

Ein Nachteil der Umsetzung als BEM gegenüber einer Finite-Elemente-Methode liegt im üblicherweise höheren numerischen Aufwand. Um diesen Nachteil zu kompensieren, wird das vorgeschlagene Berechnungsverfahren zudem als Fast-Multipole-Methode (FMM) umgesetzt. Hierzu wird die FMM für die Helmholtz-Gleichung so modifiziert, dass sie für eine energetische Formulierung anwendbar ist.

Abschließend wird das entwickelte Verfahren verifiziert und an repräsentativen Beispielen demonstriert.

# Abstract

This thesis contributes to the further development of numerical prediction methods for acoustic high-frequency problems.

The class of energy methods which are for this purpose, relies on temporally and spatially averaged energetic field quantities to characterize the sound field instead of the strongly oscillating field quantities pressure and particle velocity. To formulate the respective numerically solvable differential equation, some broad assumptions have to be made, such that the accuracy of the solution is generally reduced compared to classical, wave-resolving methods. This disadvantage is balanced by a very high calculation speed and great robustness. In a first development step, different formulations of the energy methods are examined and put into context with each other.

To ensure that the method to be developed can be used to estimate the acoustic properties as easily and early on in the development process as possible, it should be integrated into the process in the best possible way. To pave the way for this, it will be implemented as an isogeometric boundary element method (BEM). The non-uniform rational B-splines used in computer aided design systems for geometry presentation are also used as ansatz functions to describe the boundary value of the field variables. Particular attention is paid to the efficient numerical evaluation of the singular integrals occurring in the BEM. Furthermore, a novel integration strategy is proposed for the so-called nearly singular integrals.

A disadvantage of the implementation as BEM compared to a finite element method is the usually higher numerical effort. To compensate for this disadvantage, the proposed calculation method is also implemented as a fast multipole method (FMM). For this purpose, the FMM for the Helmholtz equation is modified, in a way that it can be used for an energetic formulation.

Finally, the developed method is verified and demonstrated using representative examples.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Stand der Forschung . . . . .	3
1.3	Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Akustische Felder und energetische Betrachtung im Hochfrequenzbereich</b>	<b>7</b>
2.1	Mathematische Modellierung von Fluidschall im ruhenden, quellfreien Medium . . . . .	7
2.2	Klassische numerische Verfahren zur Lösung des Randwertproblems . . . . .	10
2.2.1	Finite-Elemente-Methode . . . . .	10
2.2.2	Boundary-Elemente-Methode . . . . .	12
2.3	Hochfrequenzmethoden . . . . .	14
2.3.1	Ray Tracing . . . . .	14
2.3.2	Statistische Energie Analyse . . . . .	15
2.4	Energie-Methoden . . . . .	16
2.4.1	Die Energieflussgleichung . . . . .	17
2.4.2	Die modifizierte Energieflussgleichung . . . . .	20
2.4.3	Der Intensity-Potential-Approach . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Energie-Boundary-Elemente-Methode</b>	<b>23</b>
3.1	Diskussion der Energiemethoden und Auswahl einer Variante . . . . .	23
3.2	Die energetische Randintegralgleichung . . . . .	30
3.3	Randbedingungen . . . . .	35
3.4	Berücksichtigung von Inhomogenitäten . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Diskretisierung und Aufstellen des Gleichungssystems</b>	<b>39</b>
4.1	Klassische Diskretisierung mittels Lagrange-Elementen . . . . .	39
4.1.1	Geometriediskretisierung . . . . .	40
4.1.2	Interpolation der Randwerte . . . . .	41
4.1.3	Aufbau des Gleichungssystems mittels der Kollokationsmethode . . . . .	43

4.2	Isogeometrische Analyse . . . . .	45
4.2.1	B-Splines und NURBS . . . . .	46
4.2.2	NURBS-Flächen . . . . .	50
4.2.3	NURBS-Ansatzfunktionen in der BEM . . . . .	51
4.2.4	Definition von Kollokationspunkten und Vorgabe von Randwerten . . . . .	55
4.3	Lösung des Gleichungssystems . . . . .	56
4.4	Ergebnisse . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>65</b>
5.1	Reguläre Integration . . . . .	66
5.2	Singuläre Integration . . . . .	68
5.2.1	Polarkoordinatentransformation . . . . .	69
5.2.2	Reparametrisierung . . . . .	71
5.3	Quasi-Singuläre Integration . . . . .	72
5.3.1	Unterteilung des Integrationsgebiets . . . . .	73
5.3.2	Die sinh-Transformation . . . . .	74
5.3.3	Quasi-singuläre Integration innerhalb eines Patches . . . . .	76
5.3.4	Vergleich der Verfahren zur quasi-singulären Integration . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Die Fast-Multipole-Methode als Beschleunigungsverfahren in der EBEM</b>	<b>83</b>
6.1	Multipole-Entwicklung . . . . .	84
6.2	Algorithmus . . . . .	85
6.3	Imaginäre Argumente der Besselfunktionen für die FM-EBEM . . . . .	89
6.4	Operatoren . . . . .	91
6.5	Ergebnisse . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Anwendung der Methode</b>	<b>99</b>
7.1	Monopolquelle im Freifeld . . . . .	99
7.2	Monopolquelle im Innenraum . . . . .	102
7.2.1	Modellbildung . . . . .	102
7.2.2	Referenzlösung . . . . .	103
7.2.3	Ergebnisse . . . . .	104
7.3	Lautsprecher-simulation im Innenraum . . . . .	106
7.3.1	Fahrzeugmodell und Prüfstand . . . . .	107
7.3.2	Lautsprechermodellierung . . . . .	108
7.3.3	EBEM Modell . . . . .	109
7.3.4	Ergebnisse . . . . .	112
7.4	Diskussion und Fazit . . . . .	115

---

<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
8.1 Zusammenfassung . . . . .	117
8.2 Ausblick . . . . .	119
<b>A NURBS-Parametrisierung der Kreisfläche und analytische Lösungen der Integrale</b>	<b>121</b>
A.1 NURBS-Kreisfläche . . . . .	121
A.2 Quasi-singuläres Integral normal zum Patch . . . . .	121
A.3 Quasi-singuläres Integral in Patch-Ebene . . . . .	122
A.4 Singuläres Integral . . . . .	123
<b>B Geometrie des Fahrzeuginnenraummodells</b>	<b>125</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>



# Nomenklatur

## Funktionen und Skalare

$a$	Kantenlänge
$a$	effektiver Membranradius
$c$	Randfaktor
$c$	Schallgeschwindigkeit
$c_g$	Gruppengeschwindigkeit
$d$	Abstand zum Integrationsgebiet
$f$	Frequenz
$f_c$	Mittelfrequenz
$f_c$	Schroeder-Frequenz
$g_f$	Integrationsordnung im entfernten Bereich
$g_n$	Integrationsordnung im Nahbereich
$g_m$	Integrationsordnung im mittleren Bereich
$h$	Charakteristische Länge
$h_n^{(1)}, h_n$	sphärische Hankelfunktion erster Art
$j_n$	sphärische Besselfunktion
$k$	Wellenzahl
$k(n)$	Eigenwert
$\tilde{p}$	Akustischer Druck
$p$	Amplitude des akustischen Drucks
$p$	Entwicklungslänge der Multipole-Entwicklung
$r$	Abstand
$t$	Zeit
$u$	elektrische Spannung
$q$	Fluss
$q$	Intensität
$v$	Geschwindigkeit, Schallschnelle
$w$	Energiedichte
$w$	Gewichte der NURBS-Basisfunktionen

---

$x$	Raumrichtung des kartesischen Koordinatensystems
$y$	Raumrichtung des kartesischen Koordinatensystems
$z$	Raumrichtung des kartesischen Koordinatensystems
$A$	Amplitude
$B_i^p$	B-Spline Basisfunktion
$Bl$	Kraftfaktor
$C_{MS}$	Nachgiebigkeit der Aufhängung
$D$	Durchmesser
$G$	Greensche Funktion der Energieflussgleichung
$G$	Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung
$\tilde{G}$	Greensche Funktion der modifizierten Energieflussgleichung
$G_0$	Greensche Funktion der Laplace-Gleichung
$H_n$	Struvefunktion
$He$	Helmholtz-Zahl
$I$	Wert eines Integrals
$I_n$	modifizierte Besselfunktion erster Art
$J_n$	Besselfunktion erster Art
$K_n$	modifizierte Besselfunktion zweiter Art
$L_E$	Induktivität der Schwingspule
$L$	Länge
$L_{ij}^p$	Lagrange-Polynom
$L_q$	Schallintensitätspegel
$L_p$	Schalldruckpegel
$L_{pw}$	äquivalenter Schalldruckpegel auf Basis der Energiedichte
$L_n^m$	lokaler Koeffizient der Multipole-Entwicklung
$M_{MD}$	Masse von Membran und Schwingspule
$M_n^m$	Multipole-Moment
$N$	Ansatzfunktion
$P_n^m$	assoziertes Legendre-Polynom
$R$	Kreisradius
$R$	radiale Integrationsgrenze
$R_E$	elektrischer Widerstand der Schwingspule
$R_G$	elektrischer Widerstand der Spannungsquelle
$R_{MS}$	Mechanischer Verlustwiderstand der Aufhängung
$R_{ij}^{pq}$	NURBS Basisfunktion
$R_n^m$	Basisfunktion der Multipole-Entwicklung

---

$S$	Monopolamplitude
$S$	Raumoberfläche
$S_D$	effektive Membranfläche
$S_n^m$	Basisfunktion der Multipole-Entwicklung
$V$	Volumen
$\mathcal{W}$	Wichtungsfunktion
$Y_n^m$	Kugelflächenfunktion
$Z$	Impedanz
$\alpha$	Absorptionsgrad
$\alpha_{k,l}$	Gewicht der Gauß-Quadratur
$\alpha_R$	Funktion zur Formulierung der Robin Randbedingung
$\beta_R$	Funktion zur Formulierung der Robin Randbedingung
$\gamma_R$	Funktion zur Formulierung der Robin Randbedingung
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\varepsilon$	infinitesimaler Kugelradius
$\varepsilon$	Parameter zur Definition quasi-singulärer Integration
$\varepsilon_D$	Dirichletfehler
$\varepsilon_m$	Faktor im Translationsoperator der FMM
$\eta$	Verlustfaktor
$\eta$	Koordinate des Parameterraums
$\theta$	Polarwinkel
$\kappa_{1,2}$	Koeffizient der sinh-Transformation
$\mu_{1,2}$	Koeffizient der sinh-Transformation
$\xi$	Koordinate des Parameterraums
$\tilde{\xi}$	Koordinate eines Kollokationspunktes im Parameterraum
$\pi$	Leistungsdichte
$\rho$	Dichte
$\rho$	radiale Koordinate des Polarkoordinatensystems
$\sigma$	Quellstärke
$\tau$	charakteristische Zeit
$\phi$	Ansatzfunktion
$\phi$	Intensitätspotenzial
$\varphi$	Azimutwinkel
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Gamma$	Rand des Berechnungsgebiets

---

$\Psi$	Eigenfunktion
$\Omega$	Berechnungsgebiet

## Matrizen und Vektoren

$\mathbf{b}$	rechte Seite des Gleichungssystems
$\mathbf{c}$	Steuerpunkt einer NURBS-Funktion
$\mathbf{c}$	Vektor unbekannter Koeffizienten
$\mathbf{f}_\Gamma$	Vektor bekannter Randwerte
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\mathbf{r}$	Richtungsvektor
$\mathbf{q}$	vektorielle Intensität
$\mathbf{v}$	vektorielle Geschwindigkeit
$\mathbf{x}$	Ortsvektor
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vektor der Unbekannten
$\mathbf{x}_0$	Ortsvektor des Ladepunkts
$\mathbf{x}_c$	Entwicklungspunkt der Multipole-Entwicklung
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{G}$	Matrix des Gleichungssystems
$\mathbf{H}$	Matrix des Gleichungssystems
$\mathbf{J}$	Jacobimatrix
$\mathbf{L}$	Verlustfaktormatrix
$\mathbf{P}$	Vektor der Eingangsleistungen
$\mathbf{R}$	Systemmatrix des Interpolationsproblems
$\mathbf{U}$	unitäre Matrix der Singulärwertzerlegung
$\mathbf{V}$	unitäre Matrix der Singulärwertzerlegung
$\tilde{\mathbf{W}}$	Vektor der Subsystemenergien
$\mathbf{H}$	Knotenvektor in $\eta$ -Richtung
$\mathbf{E}$	Knotenvektor in $\xi$ -Richtung
$\mathbf{\Sigma}$	diagonale Matrix der Singulärwertzerlegung

## Indizes

Zur Unterscheidung gleichartiger Variablenbezeichnungen und Abkürzungen sind diese durch Beifügung eines Index deklariert. Indizes zu Aufzählungszwecken werden in dieser Nomenklatur nicht einzeln aufgeführt.

ana	analytischer Wert
dis	disspierte Größe
e	elementweise
i	bezieht sich aufs incident-Feld
in	Eingangswert
n	in Normalenrichtung
num	numerischer Wert
mEF	bezieht sich auf die modifizierte Energieflussgleichung
ref	Referenzwert
s	bezieht sich aufs scatter-Feld
D	Dirichlet-Wert
EF	bezieht sich auf die Energieflussgleichung
N	Neumann-Wert
R	Robin-Wert
$\Gamma$	Größe auf dem Rand

## Operatoren und sonstige Symbole

$\langle \dots \rangle$	zeitliche Mittlung der Größe ...
$\bar{\dots}$	räumliche Mittlung der Größe ...
L2L	Local-to-Local Operator der FMM
M2L	Multipole-to-Local Operator der FMM
M2M	Multipole-to-Multipole Operator der FMM
$\mathcal{L}$	linearer Differentialoperator
$\nabla$	Nabla-Operator

## Abkürzungen

BEM	Boundary-Elemente-Methode
CAD	Computer-Aided-Design
EBEM	Energie-Boundary-Elemente-Methode
EFEM	Energie-Finite-Elemente-Methode
FEM	Finite-Elemente-Methode
FMM	Fast-Multipole-Methode
FM-EBEM	Fast-Multipole-Energie-Boundary-Elemente-Methode
GMRES	Generalized Minimal Residual
NURBS	Non-Uniform-Rational-B-Splines
RMSE	Root-Mean-Square Error
SEA	statistische Energie Analyse

# 1 Einleitung

Die Vorhersage akustischer Eigenschaften spielt in verschiedenen Industriezweigen eine zunehmend wichtige Rolle. Dies ist zum einen in strengeren regulatorischen Vorgaben beziehungsweise dem zugrundeliegenden Umwelt- und Gesundheitsschutz (Lärm am Arbeitsplatz, Flug- und Verkehrslärm oder auch Unterwasserschallemissionen bei der Errichtung von Offshore-Windkraftanlagen), zum anderen aber auch in steigenden Komfort- und Qualitätsanforderungen (Fahrzeug- oder Hausgerätetechnik, Unterhaltungselektronik oder Raum- und Bauakustik) begründet.

Neben experimentellen und analytischen Verfahren kommen zur Untersuchung der akustischen Eigenschaften numerische Verfahren zum Einsatz. Gegenüber den analytischen Methoden zeichnen sie sich dadurch aus, dass sie auf eine breitere Klasse an Problemen angewendet werden können und nicht auf wenige Basisgeometrien oder vergleichbare Vereinfachungen beschränkt sind. Im Vergleich zu messtechnischen Untersuchungen können zudem häufig drastische Zeit- und Kostenersparnisse erzielt werden.

Viele der Anwendungsbereiche der numerischen Akustik gehen jedoch mit besonderen Herausforderungen einher, so können je nach Problemstellung Fluid-Struktur-Interaktionen, Nichtlinearitäten, eine strömungsinduzierte Schallausbreitung oder inhomogene Fluideigenschaften besondere Anforderung an die Lösungsverfahren stellen.

In diesem Kontext steht, im Rahmen der vorliegenden Arbeit, die Untersuchung, Erweiterung und Effizienzsteigerung eines spezifischen numerischen Berechnungsverfahrens im Fokus.

## 1.1 Motivation

Für viele Fragestellungen in der numerischen Akustik werden, aufgrund ihrer Variabilität, der hohen Effizienz und des hohen Informationsgehalts der Modelle, Diskretisierungsver-

fahren, wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Boundary-Elemente-Methode (BEM), eingesetzt. Ihnen ist jedoch gemein, dass ihr Einsatz, aufgrund des mit der Frequenz überproportional ansteigenden numerischen Aufwands, im Allgemeinen auf den unteren bis mittleren Frequenzbereich beschränkt ist. Die Verfahren werden dabei dadurch limitiert, dass zur korrekten Darstellung der Rand- beziehungsweise Feldgrößen eine gewisse Anzahl an Elementen pro Wellenlänge erforderlich ist. Mit ansteigender Frequenz nimmt die Wellenlänge ab, so dass insbesondere für dreidimensionale Berechnungsgebiete die erforderliche Zahl der Freiheitsgrade eines Modells sehr stark ansteigt.

Ein Ansatz zur Umgehung dieses Problems stellen Energiemethoden wie die Energie-BEM (EBEM) und die Energie-FEM (EFEM) dar, bei denen nicht die oszillierenden Feldgrößen akustischer Druck beziehungsweise Partikelgeschwindigkeit betrachtet werden, sondern die räumlich und zeitlich gemittelte akustische Energiedichte beziehungsweise die Intensität als Feldgrößen gewählt werden.

Um eine bessere Integration der genannten Verfahren in den Produktentwicklungsprozess zu ermöglichen, soll nachfolgend eine isogeometrische Formulierung entwickelt werden, bei der zur Approximation der Rand- beziehungsweise Feldgrößen die gleichen Ansatzfunktionen wie zur Beschreibung der Geometrie genutzt werden. Der derzeit aufwendige Schritt der Vernetzung kann hierdurch potenziell deutlich beschleunigt werden oder sogar komplett entfallen. Zudem ergeben sich aus numerischer Sicht interessante Eigenschaften, wie der Entfall des Geometriefehlers und die Möglichkeit zur Nutzung neuer Verfeinerungsstrategien.

Die EBEM bietet sich für eine solche isogeometrische Formulierung besonders an, da nur die Oberflächen eines Gebiets diskretisiert werden müssen und nicht das Volumen selbst. Da Computer-Aided-Design-Modelle (CAD-Modelle) üblicherweise ebenfalls oberflächenbasiert definiert werden, entfällt in diesem Fall die aufwendige Ableitung von Volumenmodellen. Um die gegenüber einer EFEM-Formulierung tendenziell geringere numerische Effizienz zu kompensieren, soll zudem die Möglichkeit der Beschleunigung mittels der Fast-Multipole-Methode (FMM) untersucht werden.

In der vorliegenden Arbeit wird dabei ausschließlich Fluidschall im ruhenden homogenen Medium betrachtet.

## 1.2 Stand der Forschung

Die energetische Methode, die in der numerischen Akustik bis heute die weiteste Verbreitung erreicht hat, ist die statistische Energie Analyse (SEA). Ihre Grundlagen wurden in den frühen 1960er Jahren von Lyon, Maidanik und Smith [68, 69, 98] begründet. Sie findet heute in der Automobilindustrie, im Flugzeug- und Schiffbau, in der Bauakustik und vielen weiteren technischen Bereichen Anwendung. Eine grundlegende Übersicht der Methode wird in Unterabschnitt 2.3.2 gegeben. Sie eignet sich besonders für mittlere bis hohe Frequenzen, erlaubt jedoch keine Einsicht in die räumliche Verteilung der akustischen Energie innerhalb eines Subsystems.

Im Bemühen, diesen wesentlichen Nachteil der SEA, nämlich die mangelnde Information über die räumliche Verteilung der Energiedichte, zu überwinden, wurde in den 80er und 90er Jahren die EFEM entwickelt. Erste Veröffentlichungen, in denen eine Energieflussgleichung als Differentialgleichung zur Beschreibung der Energieausbreitung in strukturdynamischen Komponenten formuliert wurden, sind bereits in den 70er und 80er Jahren in der ehemaligen Sowjetunion entstanden [7, 17]. Der Ansatz wurde später durch Nefske, Sung, Wohlever und Bernard [77, 111] aufgegriffen und zunächst unter dem Begriff *Power Flow Analysis* weiterentwickelt. Mit der Implementierung für ungekoppelte und gekoppelte Balken in einer Finite-Elemente-Umgebung begründeten Nefske und Sung dabei die EFEM [77]. In den Folgejahren wurden die EFEM für weitere strukturelle und nicht-strukturelle Grundelemente erweitert [11, 14, 20].

Wie Langley aufzeigt, sind für die Herleitung der EFEM-Grundgleichung für mehrdimensionale Systeme jedoch widersprüchliche Annahmen erforderlich [62], so dass das Abklingen der Energiedichte einer Punktquelle nicht korrekt wiedergegeben werden kann. Trotz weitreichender Annahmen zeigt sich in praktischen Anwendungen aber, dass die EFEM in der Lage ist, valide Abschätzungen des (vibro-) akustischen Verhaltens technischer Systeme zu ermöglichen [51, 58, 74].

Integrale Verfahren, die formal große Ähnlichkeit mit einer indirekten BEM aufweisen, wurden von Le Bot und Bitsie vorgeschlagen [11, 65]. Le Bot geht in seiner Herleitung einer Integralgleichung für Energiegrößen explizit auf das von Langley aufgezeigte Problem der fehlerhaften Wiedergabe von Punktquellen in der EFEM bei mehrdimensionalen Systemen ein und weist darauf hin, dass das von ihm beschriebene Verfahren in der Lage ist, das Abklingen korrekt abzubilden [64]. Sestieri und Carcaterra untersuchen die Gültigkeitsbereiche der jeweiligen Formulierungen und kommen zum Schluss, dass

diese sich stark ähneln [94]. Eine alternative Herleitung der integralen Formulierung unter Vernachlässigung von Fluiddämpfung wird als indirekte EBEM in [106] vorgestellt. Raveendra formulierte zudem eine direkte EBEM zur Lösung der ursprünglichen Energieflussgleichung [86].

Energiemethoden sind grundsätzlich sowohl zur Betrachtung strukturdynamischer als auch akustischer Fragestellungen geeignet. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Ausbreitung akustischer Wellen beziehungsweise Schallenergie in Fluiden im Fokus stehen, da für diese Art von Problemstellungen die untersuchte BEM besonders vorteilhaft ist. Da die Methoden ihre Ursprünge teilweise im strukturdynamischen Kontext haben, wird auf diese entsprechend eingegangen, wo es zweckdienlich erscheint.

## 1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll die EBEM als energetische Hochfrequenzmethode untersucht und weiterentwickelt werden. Die Methode wird dabei vorrangig als Werkzeug zur groben Abschätzung akustischer Eigenschaften im frühen Entwurfsprozess aufgefasst. Es wird daher eine bessere Integration der Methode in den Produktentwicklungsprozess angestrebt. Hierzu soll eine isogeometrische Analyse umgesetzt werden, die die Berechnung direkt auf Grundlage der zur Geometriebeschreibung genutzten Basisfunktionen ohne die übliche Vernetzung mit beispielsweise Lagrange-Elementen erlaubt. Zur Steigerung der Effizienz des vorgeschlagenen Verfahrens wird darüber hinaus die Möglichkeit der Umsetzung einer Fast-Multipole-Methode untersucht und in einer Basisvariante implementiert. Die Gültigkeitskriterien der Energiemethoden selbst beziehungsweise eine umfangreiche Validierung der EBEM stehen dabei nicht im Vordergrund der Untersuchungen.

Es wird zunächst im Kapitel 2 der mathematisch-physikalische Hintergrund der Energiemethoden beleuchtet und diese werden in den Kontext zu klassischen Diskretisierungsverfahren der numerischen Akustik gesetzt. Dabei werden die verschiedenen Varianten der Energieflussgleichung vorgestellt und ihre Implikationen dargelegt.

In Kapitel 3 werden die Unterschiede zwischen den Energieflussgleichungen im Detail untersucht und eine Variante zur Formulierung einer EBEM ausgewählt. Es wird die Herleitung einer Randintegralgleichung beschrieben und die Definition von Randbedingungen unter Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung vorgenommen. Weiterhin

wird auf die Modellierung elementarer Quellen im Berechnungsgebiet eingegangen.

Die Diskretisierung zur numerischen Lösung der aufgestellten Randintegralgleichung wird in Kapitel 4 beschrieben. Dabei wird insbesondere auf die Verwendung von Non-Uniform-Rational-B-Splines (NURBS) als Ansatzfunktionen zur isogeometrischen Analyse eingegangen. Es wird somit erstmals eine isogeometrische EBEM formuliert. Dabei werden die Eigenschaften der NURBS und der Entfall des Geometriefehlers bei ihrer Verwendung besonders beleuchtet. Zudem werden mögliche Verfeinerungsstrategien erläutert.

Die Verwendung von NURBS-Ansatzfunktionen in der EBEM erfordert besondere Sorgfalt bei der numerischen Integration. Die hier eingesetzten Verfahren werden in Kapitel 5 beschrieben. Es wird zudem eine neue Integrationsstrategie für quasi-singuläre Integrale innerhalb eines Patches vorgestellt.

Das Kapitel 6 thematisiert die Beschleunigung des entwickelten Verfahrens mittels der Fast-Multipole-Methode. Die gegenüber einer klassischen Helmholtz-BEM abgewandelte Kernelfunktion der EBEM erfordert dabei eine besondere Berücksichtigung. Die hierzu umgesetzten Modifikationen werden beschrieben und die erforderliche Entwicklungslänge der Multipole-Entwicklung untersucht und letztlich eine neue Funktion zur Abschätzung der Entwicklungslänge semi-empirisch bestimmt.

In Kapitel 7 wird das entwickelte Berechnungsverfahren anhand repräsentativer Beispiele demonstriert. Dabei erfolgt ein Vergleich mit alternativen Berechnungsverfahren und Messdaten. Abschließend werden die Ergebnisse diskutiert.

Die Arbeit schließt im Kapitel 8 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere potenzielle Forschungsgegenstände, die im Kontext der Entwicklung von Interesse sind.



## 2 Akustische Felder und energetische Betrachtung im Hochfrequenzbereich

In diesem Kapitel wird die Ausbreitung akustischer Wellen und die mathematische Bestimmung resultierender Wellenfelder als Lösung eines Randwertproblems erläutert. Es werden die besonderen Herausforderungen bei der Analyse im hohen Frequenzbereich dargelegt und verbreitete Berechnungsverfahren beschrieben. Das Kapitel schließt mit der Einführung energetischer Zustandsgrößen und hierauf basierender Energie-Methoden sowie deren mathematischen Grundlagen.

### 2.1 Mathematische Modellierung von Fluidschall im ruhenden, quellfreien Medium

Schallwellen breiten sich innerhalb eines Fluids im dreidimensionalen Raum in alle Raumrichtungen als reine Longitudinalwellen aus. Sie können somit als Skalarfeld einer einzelnen Zustandsgröße dargestellt werden – üblicherweise wird hierzu der Schalldruck gewählt.

Die gesuchte Schalldruckverteilung kann durch die Lösung der Wellengleichung gefunden werden. Sie ist eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Ausbreitung von Wellen in einem Medium und findet Anwendung in verschiedensten physikalischen Disziplinen. In der linearen Akustik ist ihre homogene Form durch

$$\nabla^2 \tilde{p}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

mit der vom Ortsvektor  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  abhängigen akustischen Druckschwankung  $\tilde{p}$  sowie der Schallgeschwindigkeit  $c$  des Ausbreitungsmediums gegeben. Eine detaillierte

Herleitung sowie ein kurzer Überblick über die historische Entwicklung der Gleichung finden sich beispielsweise in [81].

In vielen ingenieurtechnischen Anwendungen lässt sich der numerische Aufwand zur Lösung von Gleichung 2.1 durch einen Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich erheblich reduzieren. Hierzu werden die Fouriertransformation

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

beziehungsweise die zugehörige Rücktransformation

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.3)$$

herangezogen, wobei  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz zur Frequenz  $f$  und  $i$  die imaginäre Einheit bezeichnen. Durch Anwendung auf die Wellengleichung 2.1 ergibt sich, wie in [110] ausgeführt, schließlich die Helmholtzgleichung mit der Wellenzahl  $k = \omega/c$  zu

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 p(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.4)$$

Die nun komplexwertigen Amplituden des Schalldrucks  $p$  sind bei einer betrachteten Frequenz nur noch vom Ortsvektor  $\mathbf{x}$  abhängig, womit die Anzahl der unabhängigen Variablen um 1 reduziert ist.

Um die Gleichung 2.4 für technische Anwendungen nutzbar zu machen und sie auf einem Gebiet  $\Omega$  zu lösen, ist weiterhin die Definition von Randwerten auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  erforderlich. Es existieren die folgenden Randbedingungstypen:

$$p(\mathbf{x}) = p_{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{D}} \quad \text{Dirichlet-Randbedingung,} \quad (2.5)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = q_{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{N}} \quad \text{Neumann-Randbedingung,} \quad (2.6)$$

$$\alpha_{\text{R}}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) + \beta_{\text{R}}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) = \gamma_{\text{R}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{R}} \quad \text{Robin-Randbedingung.} \quad (2.7)$$

Hierbei stellen  $p_{\Gamma}$ ,  $q_{\Gamma}$  und  $\alpha_{\text{R}}$ ,  $\beta_{\text{R}}$ ,  $\gamma_{\text{R}}$  die vorzuschreibenden Funktionen dar. In Gleichung 2.6 wurde zudem mit dem Fluss  $q$  eine verkürzte Schreibweise für die Normalenableitung des Schalldrucks eingeführt. Mit einer disjunkten Zerlegung des Gebietsrands  $\Gamma = \Gamma_{\text{D}} \cup \Gamma_{\text{N}} \cup \Gamma_{\text{R}}$  ist das Randwertproblem nun vollständig definiert.

Die Definition der Randbedingung 2.6 und 2.7 erfolgt in der Akustik häufig auch in Abhängigkeit der intuitiv besser verständlichen und physikalisch leichter interpretierbaren Schallschnelle  $v_n$ . Der Zusammenhang zwischen der Normalenableitung des Schalldrucks und der Schallschnelle ist dabei unter Annahme eines harmonischen Verlaufs mit der linearisierten Eulergleichung durch

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -i\omega\rho v_n, \quad (2.8)$$

beziehungsweise allgemeiner für den Gradienten des Schalldrucks und die vektorielle Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  als

$$\nabla p = -i\omega\rho\mathbf{v}, \quad (2.9)$$

gegeben, wobei  $\rho$  die Dichte des Fluids bezeichnet. Für die Neumann-Randbedingung 2.6 folgt somit

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = -i\omega\rho v_{n\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N. \quad (2.10)$$

Die Robin-Randbedingung 2.7 wird typischerweise als Impedanz-Randbedingung mit der Wandimpedanz  $Z$  formuliert, die mit

$$Z = p/v_n \quad (2.11)$$

definiert ist. Zur Formulierung der Randbedingung werden  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  nun so gewählt, dass

$$\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} = -\frac{Z_\Gamma(\mathbf{x})}{i\omega\rho} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_R \quad (2.12)$$

gilt.

Bei der Betrachtung von Außenraumproblemen muss zudem die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung [99]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( ikp(r) + \frac{\partial p(r)}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.13)$$

erfüllt werden, wobei  $r$  den Abstand eines Beobachtungspunktes in beliebiger Richtung vom Ursprung der Schallquelle bezeichnet.

## 2.2 Klassische numerische Verfahren zur Lösung des Randwertproblems

Das im vorigen Abschnitt beschriebene Randwertproblem lässt sich im Allgemeinen nicht analytisch lösen. Es kommen daher numerische Verfahren, wie die Finite-Differenzen-Methode, Finite-Volumen-Methode, Finite-Elemente-Methode oder die Boundary-Elemente-Methode, zum Einsatz.

In der numerischen Akustik sind die beiden letztgenannten zusammen mit der statistischen Energieanalyse die meistgenutzten. Da eine ausführliche Einführung in die verschiedenen Verfahren nicht im Fokus dieser Arbeit steht, sollen entsprechend die FEM, BEM und SEA sowie ihre wichtigsten Eigenschaften an dieser Stelle nur kurz gefasst beschrieben werden, wobei die wesentlichen Konzepte der BEM in Kapitel 3 detailliert vorgestellt werden.

Den Ausgangspunkt beider Verfahren bildet eine Reformulierung des Randwertproblems, welche sich durch die Multiplikation der Gleichung 2.4 mit einer beliebigen Wichtungsfunktion  $\mathcal{W}$  und Integration über das Berechnungsgebiet  $\Omega$  zu

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p + k^2 p) \mathcal{W} \, d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

ergibt.

### 2.2.1 Finite-Elemente-Methode

Zur Formulierung einer FEM (vergleiche [76]) werden ebenso die natürlichen Randbedingungen in der Form von Gleichung 2.10 und 2.12 durch Multiplikation mit der Wichtungsfunktion und Integration der Randresiduen berücksichtigt, so dass

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p + k^2 p) \mathcal{W} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + i\omega \rho v_{n\Gamma} \right) \mathcal{W} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_R} \left( \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + \frac{i\omega \rho}{Z_{\Gamma}} p \right) \mathcal{W} \, d\Gamma = 0 \quad (2.15)$$

gefordert wird. Durch Anwendung der ersten Greenschen Identität und die Wahl der Wichtungsfunktionen identisch zu den Ansatzfunktionen für den unbekanntem Druck folgt

die schwache Form des Randwertproblems zu [76]

$$\int_{\Omega} (k^2 p \mathcal{W} - \nabla p \nabla \mathcal{W}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} (i\omega \rho v_{n\Gamma}) \mathcal{W} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_R} \left( \frac{i\omega \rho}{Z_{\Gamma}} p \right) \mathcal{W} \, d\Gamma = 0. \quad (2.16)$$

Die schwache Formulierung 2.16 relaxiert gegenüber der starken Form mit den Gleichungen 2.4-2.7 die Anforderung an Lösungskandidaten für den gesuchten Druck  $p$  deutlich, da nur noch erste Ableitungen gefordert und die Randbedingungen bereits in der Formulierung inkludiert sind.

Das Berechnungsgebiet wird nun in Elemente zerlegt und elementweise Ansatzfunktionen  $N_i^e$  für den Druck definiert, so dass mit den diskreten Stützstellen  $p_i^e$  die Approximation

$$p(\mathbf{x}) = \sum_i N_i^e p_i^e = \mathbf{N}^e \mathbf{p}^e \quad (2.17)$$

gilt. Wie zuvor bereits erwähnt, werden bei dem hier beschriebenen Galerkin-Verfahren die Wichtungsfunktionen gleich der Ansatzfunktionen gewählt, somit lässt sich nach der Diskretisierung elementweise die metrizielle Gleichung

$$(\mathbf{H}^e + i\omega \mathbf{A}^e - \omega^2 \mathbf{Q}^e) \mathbf{p}^e = -i\omega \mathbf{f}^e \quad (2.18)$$

mit

$$\mathbf{H}^e = \int_{\Omega^e} \nabla \mathbf{N}^{eT} \nabla \mathbf{N}^e \, d\Omega, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}^e = \int_{\Gamma_R^e} \frac{\rho}{Z_{\Gamma}} \mathbf{N}_{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}_{\Gamma}^e \, d\Gamma, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e \, d\Omega, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Gamma_R^e} \rho v_{n\Gamma} \mathbf{N}_{\Gamma}^{eT} \, d\Gamma \quad (2.22)$$

aufstellen. Dabei bezeichnet  $\mathbf{N}_{\Gamma}^e$  die Ansatzfunktionsmatrix für die jeweilige Oberfläche. Beim isoparametrischen Konzept werden die Ansatzfunktionen ebenfalls zur Geometriebeschreibung genutzt und die Integrale numerisch beispielsweise mittels der Gauß-Quadratur im Parameterraum gelöst. Die so berechneten Elementmatrizen 2.19-2.22 werden schließlich zu einem globalen Gleichungssystem assembliert, dessen Struktur durch die Forderung eines  $C^0$ -stetigen Druckverlaufs über die Elementgrenzen und eine entsprechende Definition gemeinsamer Knoten gegeben ist.

Die resultierende globale Systemmatrix ist infolgedessen nur dünn besetzt und weist eine Bandstruktur auf. Obwohl das gesamte Berechnungsgebiet und nicht nur dessen Rand diskretisiert werden muss und die Dimension der Systemmatrix somit wesentlich größer als in der BEM ist, ist das Verfahren doch häufig numerisch günstiger als die BEM [44]. Nachteilhaft ist jedoch, dass der Vernetzungsaufwand durch die Volumendiskretisierung höher ist und bei der Betrachtung von Außenraumproblemen die Sommerfeldbedingung 2.13 nicht inhärent erfüllt wird.

### 2.2.2 Boundary-Elemente-Methode

Den Ausgangspunkt der BEM bildet ebenfalls Gleichung 2.14. Wird dort die zweite Greensche Identität angewandt und als Wichtungsfunktion die Fundamentallösung  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  genutzt, ergibt sich die Randintegralgleichung (vergleiche Kapitel 3)

$$c(\mathbf{x}_0) p(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} p(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) q(\mathbf{x}) \, d\Gamma. \quad (2.23)$$

Hierbei bezeichnet  $c(\mathbf{x}_0)$  einen Randfaktor, welcher unter der Annahme glatter Ränder die folgenden Werte annimmt:

$$c(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}_0 \in \Omega, \\ \frac{1}{2} & \mathbf{x}_0 \in \Gamma, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung 2.4 für dreidimensionale Berechnungsgebiete sowie ihre Normalenableitung sind durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} (1 + ikr) \quad (2.26)$$

mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad r = |\mathbf{r}|$$

gegeben [34].

Zur Berechnung der in der Randintegralgleichung 2.23 auftretenden Integralterme und Lösung der Gleichung nach den Funktionsverläufen der unbekanntenen Größen ist im Allge-

meinen wiederum eine Diskretisierung erforderlich. Sowohl die Geometrie selbst als auch der Verlauf der Randwerte werden hierzu mit den  $N$  Ansatzfunktionen  $\phi_j(\mathbf{x})$  approximiert, so dass sich, mit den  $N$  diskreten Stützstellen  $p_j$  beziehungsweise  $q_j$ , die Näherungen

$$p(\mathbf{x}) = \sum_j^N \phi_j(\mathbf{x}) p_j \quad \text{und} \quad q(\mathbf{x}) = \sum_j^N \phi_j(\mathbf{x}) q_j \quad (2.27)$$

ergeben. Die Wahl dieser Ansatzfunktion wird im Kapitel 4 gesondert behandelt.

Mittels der in Unterabschnitt 4.1.3 beschriebenen Kollokationsmethode kann auf Basis der so diskretisierten Randintegralgleichung ein lineares Gleichungssystem der Dimension  $N \times N$  aufgestellt werden. Nach Einsetzen der bekannten Randwerte, sortieren aller unbekanntener Größen auf die linke Seite und Ausmultiplizieren der rechten Seite ergibt sich schließlich ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \quad (2.28)$$

welches mittels geeigneter Löser (siehe Abschnitt 4.3) nach den unbekanntenen Randwerten im Vektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  gelöst wird.

Eine Auswertung an beliebigen Punkten  $\mathbf{x}_0$  im Berechnungsgebiet kann, soweit erforderlich, in einem nachgelagerten Postprocessing-Schritt mittels der numerischen Auswertung von Gleichung 2.23 mit  $c(\mathbf{x}_0) = 1$  und den nun bekannten Funktionen  $p(\mathbf{x})$  und  $q(\mathbf{x})$  erfolgen.

Da in der BEM nur eine Diskretisierung des Randes erforderlich ist und die Dimension des physikalischen Problems somit um eins reduziert ist, ist die Vernetzung der Geometrie gegenüber der FEM stark vereinfacht und die Systemmatrizen sind wesentlich kleiner. Die Matrizen sind jedoch im Allgemeinen vollbesetzt und weisen keine Symmetrien auf, wodurch der Speicher- und Lösungsaufwand verhältnismäßig hoch sind. Die Aufwandsreduktion in der BEM ist ein aktives Forschungsgebiet und es existieren verschiedene Ansätze zur Beschleunigung der Methode wie die  $\mathcal{H}$ -Matrizen [26] und die Fast-Multipole-Methode [52]. Letztere findet in dieser Arbeit ebenfalls Anwendung und ist in Kapitel 6 näher beschrieben.

Die Sommerfeldbedingung 2.13 wird durch die BEM implizit erfüllt, so dass die Modellierung unendlicher Gebiete, wie sie für Außenraumproblemen erforderlich ist, zunächst ohne

weitere Modifikation möglich ist. Um eine Stabilität für den gesamten Frequenzbereich zu garantieren, sind jedoch weitere Maßnahmen erforderlich [52].

## 2.3 Hochfrequenzmethoden

Die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Verfahren liefern für diskrete Frequenzen die voll aufgelösten Wellenfelder und erreichen bei entsprechender Modellqualität eine sehr hohe Genauigkeit. Problematisch ist jedoch, dass zur räumlichen Auflösung der Wellen mit steigender Frequenz zunehmend mehr Elemente zur Diskretisierung erforderlich sind – eine häufig genutzte Faustformel lautet, dass 6-10 Elemente pro Wellenlänge verwendet werden sollten [48, 70]. Die Zahl der Freiheitsgrade und damit der numerische Aufwand steigen aufgrund der Modelldimension also quadratisch zur Frequenz für die BEM und kubisch für die FEM.

Beide Methoden sind daher grundsätzlich auf den unteren bis mittleren Frequenzbereich limitiert. Erschwerend kommt hinzu, dass für die FEM aufgrund des sogenannten *Pollution Effects* [48] die Zahl der erforderlichen Freiheitsgrade noch weiter getrieben wird. Für die BEM hingegen sind bei Außenraumproblemen wegen des Auftretens irregulärer Frequenzen spezielle Formulierungen, wie die Burton-Miller-Formulierung, erforderlich, was den numerischen Aufwand ebenfalls steigert. Ein weiteres Problem, das mit steigender Frequenz häufig zu beobachten ist, ist die steigende Sensibilität gegenüber Unschärfen. Schon geringe Geometrie- oder Parametervariationen können aufgrund von Interferenzerscheinung lokal sehr große Schwankungen der Schalldruckpegel bedingen.

Aus den vorgenannten Gründen wurden für hohe Frequenzen die - mittlerweile in der Akustik weitgehend etablierten - Methoden der statistischen Energie Analyse (SEA) und des Ray Tracings entwickelt. Im Folgenden sollen diese kurz vorgestellt werden.

### 2.3.1 Ray Tracing

Das Ray Tracing, beziehungsweise dessen Derivate, wie Beam Tracing oder Cone Tracing, sind in der Raumakustik [73] aber auch beispielsweise in der Unterwasserakustik [49] verbreitete Methoden.

Es wird angenommen, dass der Schall sich nicht wellen-, sondern strahlenförmig ausbreitet. Ein Strahl kann dabei als Segment einer Kugelwelle mit infinitesimalem

Öffnungswinkel betrachtet werden. Die Eingangsleistung einer Schallquelle wird auf eine Vielzahl von Strahlen aufgeteilt und die Schallausbreitung durch Nachverfolgen der Strahlengänge im Raum modelliert. Trifft ein Strahl auf eine begrenzende Oberfläche, wird er, gegebenenfalls unter Berücksichtigung von Absorption, dort reflektiert. Die Verfolgung eines einzelnen Strahls wird nach Erreichen eines Abbruchkriteriums beendet. Die Energiedichte an einem Empfangsort wird schließlich durch die Superposition aller berechneten Strahlen in einem finiten Kontrollvolumen berechnet.

Eine detaillierte Übersicht zu Anwendungen und Modifikationen des Verfahrens findet sich beispielsweise in [108].

### 2.3.2 Statistische Energie Analyse

Die SEA eignet sich zur Untersuchung komplexer Systeme im mittleren und hohen Frequenzbereich. Ein typischer Anwendungsbereich ist beispielsweise der Flugzeugbau [13, 18]. Das System wird dabei in Subsysteme unterteilt, für die jeweils die zeitlich und räumlich gemittelte Energie errechnet wird. Jedes Subsystem verfügt somit über einen einzigen Freiheitsgrad. Da eine schwache Kopplung der einzelnen Subsysteme vorausgesetzt wird, können diese nicht beliebig granular weiter unterteilt werden. Ein homogenes Fluidvolumen, wie es im Fokus dieser Arbeit steht, bildet in seiner Gesamtheit ein einziges Subsystem, die SEA liefert also keine Informationen über die räumliche Verteilung der Energiedichte oder äquivalenter Feldgrößen innerhalb des Volumens.

Nach der Unterteilung eines Systems beziehungsweise einer Struktur in Subsysteme werden diese über den Leistungsfluss zwischen den Subsystemen gekoppelt. Es ergibt sich schließlich ein Gleichungssystem der Form [13]

$$\mathbf{P} = \omega \mathbf{L} \tilde{\mathbf{W}}. \quad (2.29)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{P}$  den Vektor der bekannten Eingangsleistungen,  $\tilde{\mathbf{W}}$  den Vektor der unbekannt, mit der modalen Dichte normierten Subsystemenergien und  $\mathbf{L}$  die Verlustfaktormatrix, in die die Parameter Dämpfungsverluste, Kopplungsverluste und modale Dichten eingehen. Die Bestimmung dieser Parameter ist dabei eine besondere Herausforderung mit Blick auf den praktischen Einsatz der SEA.

Für eine weitergehende Einführung in die Methode sei beispielsweise auf [31, 68, 79] verwiesen.

## 2.4 Energie-Methoden

Bei den neueren, hier im Fokus stehenden Energiemethoden handelt es sich um Verfahren, die auf ähnlichen Annahmen wie die SEA beruhen, im Gegensatz dazu aber Informationen über die räumliche Verteilung der Energie innerhalb des Fluids oder einer Strukturkomponente liefern.

In diesem Zusammenhang wurden die EFEM und EBEM formuliert. Statt der oszillatorischen Größen Schalldruck  $p$  und Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , die als primäre Zustandsgrößen in FEM und BEM genutzt werden, basieren diese Methoden auf den temporal und lokal gemittelten Größen Schallenergiedichte und Intensität. Ihre glatteren Verläufe erlauben eine weitgehend frequenzunabhängige und wesentlich gröbere Diskretisierung, so dass sich typischerweise kleine, schnell lösbare Gleichungssysteme ergeben.

Allgemein ergibt sich die über eine Periodendauer zeitlich gemittelte Energiedichte als Summe der potentiellen und kinetischen Energiedichten zu [14]

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\rho c^2} p p^* + \rho \mathbf{v}^H \mathbf{v} \right). \quad (2.30)$$

Dabei kennzeichnet  $(\dots)^*$  die Konjugierte einer komplexen Variable,  $(\dots)^H = (\dots)^{*T}$  die Adjungierte einer Matrix (hier Vektor) und der Operator  $\langle \dots \rangle$  die zeitliche Mittelung über eine Periode. Die aktive Komponente der Intensität ist zudem durch

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (p \mathbf{v}^*) \quad (2.31)$$

gegeben.

In den ersten Veröffentlichungen, die im Sinne dieser Arbeit den Energiemethoden zugerechnet werden können, stand der Energiefluss in einfachen strukturmechanischen Subsystemen wie Stäben, Balken und Platten im Vordergrund [7, 17, 77, 111]. In [14] wurde schließlich eine Formulierung für dreidimensionale Fluidkavitäten hergeleitet. Im Folgenden wird zunächst diese beschrieben. Ausgehend hiervon werden dann weitere in Vorarbeiten verschiedener Autoren vorgeschlagene Formulierungen eingeführt.



Die Bilanzgleichung 2.35 bildet den Ausgangspunkt vieler energiebasierter Verfahren. Es sei angemerkt, dass bis zu diesem Punkt noch keine wesentlichen Annahmen oder Einschränkungen hinsichtlich der Gültigkeit getroffen wurden. Mit der *General Energetic Method* (GEM) haben Lase, Ichchou und Jezequel [63] demonstriert, dass auf dieser Basis strukturdynamische Probleme in energetischer Form exakt und in Übereinstimmung mit klassischen verschiebungsbasierten Verfahren gelöst werden können. In der praktischen Anwendung spielt diese Formulierung jedoch keine Rolle, da der numerische Aufwand gegenüber verschiebungsbasierten Verfahren teils drastisch erhöht wird.

Zur Formulierung der Energieflussgleichung, wird die dissipierte Leistungsdichte  $\pi_{\text{dis}}$  proportional zur Energiedichte  $w$  zu

$$\langle \pi_{\text{dis}} \rangle = \eta \omega \langle w \rangle \quad (2.36)$$

angenommen. Hierbei bezeichnet  $\eta$  den Verlustfaktor. Dieses Dämpfungsmodell entspricht dem in der SEA verwendeten [68, 24]. Die zeitliche Mittelung ist eine erste notwendige Annahme zur Herleitung der Energieflussgleichung. Wird sie auf die Bilanzgleichung 2.34 angewendet, ergibt sich mit Gleichung 2.36

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{q} \rangle + \eta \omega \langle w \rangle = \langle \pi_{\text{in}} \rangle. \quad (2.37)$$

Damit die Differentialgleichung 2.37 gelöst werden kann, muss eine weitere Beziehung zwischen den Feldgrößen  $\langle \mathbf{q} \rangle$  und  $\langle w \rangle$  gefunden werden. In der Entwicklung der EFEM wurde zunächst für eindimensionale Strukturen [77, 111] in Analogie zur Wärmeleitungsgleichung eine Beziehung der Form

$$\langle \bar{\mathbf{q}} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta \omega} \nabla \langle \bar{w} \rangle \quad (2.38)$$

hergeleitet. Hierbei bezeichnet  $c_g$  die Gruppengeschwindigkeit des betrachteten Wellentyps. Sie ist im Falle von akustischen Wellen gleichzusetzen mit der Schallgeschwindigkeit  $c_g = c$ . Die Feldgrößen werden nun nicht nur zeitlich, sondern auch örtlich über eine Wellenlänge gemittelt betrachtet, was in Gleichung 2.38 durch die Überstreichungen ( $\bar{\cdot}$ ) kenntlich gemacht wird. In weiteren Arbeiten [11, 14] konnte gezeigt werden, dass für zweidimensionale Strukturen sowie dreidimensionale akustische Kavitäten ebenfalls Gleichung 2.38 genutzt werden kann. Dabei werden, über die räumliche und zeitliche Mittelung hinaus, die folgenden Annahmen getroffen [74] :

- Es wird geringe Dämpfung ( $\eta \ll 1$ ) vorausgesetzt. Im Fall von akustischer Wellenausbreitung ist die Dämpfung im Fluid meist vernachlässigbar und Energie wird vorrangig durch Absorption an Begrenzungsflächen dissipiert. Dieser Vorgang lässt sich durch entsprechende Randbedingungen abbilden. Gehen beide Formen der Dissipation gegen null, konvergiert die Lösung der Energieflussgleichung gegen die räumlich gleichverteilte SEA-Lösung.
- Nur mit dem Fernfeld assoziierte Terme beziehungsweise sich ausbreitende Wellen werden berücksichtigt. Die Vernachlässigung des Nahfelds wird im Allgemeinen ab einer Entfernung von einer Wellenlänge von einer Diskontinuität als zulässig betrachtet. Diese Annahme kommt somit der Bedingung gleich, dass die Wellenlänge gegenüber der untersuchten Geometrie klein beziehungsweise die Frequenz oder genauer die Helmholtz-Zahl groß sein müssen ( $He = kr \gg 1$ ).
- Es wird, auch in höherdimensionalen Gebieten, wie Platten oder akustischen Kavitäten, zunächst ausschließlich die Existenz ebener Wellen beliebiger Orientierung angenommen. Diese Annahme ist in Kombination mit der nachfolgenden, welche die Vernachlässigung von Interferenzen bedingt, im Allgemeinen nicht erfüllt (vergleiche Abschnitt 3.1).
- Die Energiedichten einzelner Wellen können summiert werden und somit gilt ein lineares Superpositionsprinzip. Diese Annahme ist gültig, wenn Interferenzen zwischen den Wellen vernachlässigt werden. Diese recht restriktive Voraussetzung wird durch die räumliche Mittelung gerechtfertigt. Wie in [94] aufgezeigt wird, muss die Mittelung unter Annahme ebener Wellen mit steigender Dämpfung jedoch über größere Gebiete erfolgen.

Den beiden letztgenannten Annahmen kommt in den hier betrachteten Energiemethoden zentrale Bedeutung zu. Sie sind zum einen nur innerhalb relativ enger Grenzen erfüllbar, da in realen Systemen verschiedene Wellenformen und bei Überlagerung kohärenter Wellen auch Interferenzen zwischen diesen auftreten, zum anderen begründen sie die höhere Leistungsfähigkeit gegenüber den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Verfahren, da erst durch die Betrachtung der interferenzfreien, räumlich gemittelten und somit glatteren Energiedichten die grobe Diskretisierung und damit kurze Rechenzeiten möglich werden.

Durch Einsetzen von Gleichung 2.38 in Gleichung 2.37 ergibt sich die Energieflussgleichung zu

$$-\frac{c^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{w} \rangle + \eta\omega \langle \bar{w} \rangle = \langle \pi_{\text{in}} \rangle. \quad (2.39)$$

Wird die homogene Energieflussgleichung (also  $\langle \pi_{\text{in}} \rangle = 0$ ) betrachtet und zu

$$\nabla^2 \langle \bar{w} \rangle - \frac{\eta^2 \omega^2}{c^2} \langle \bar{w} \rangle = 0 \quad (2.40)$$

umgeformt, zeigt sich, dass diese der Helmholtzgleichung 2.4 mit rein imaginärer Wellenzahl  $k' = -i\frac{\eta\omega}{c} = -i\eta k$  entspricht. Ihre Fundamentallösung lautet dementsprechend

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r}. \quad (2.41)$$

Sie ist entgegen der Fundamentallösung 2.25 reellwertig und zeigt daher statt deren oszillatorischen ein glatten Verlauf, der eine gröbere Diskretisierung ermöglicht.

Wie zuerst in [62] aufgezeigt, liefern auf der Energieflussgleichung basierende Berechnungsverfahren aufgrund der Vernachlässigung von Interferenzen teils ungenaue Ergebnisse. Insbesondere kann für zwei- und dreidimensionale Berechnungsgebiete eine Punktlast nicht korrekt abgebildet werden. Das Feld wird nahe der Punktlast unterschätzt und in weiterer Entfernung von ihr überschätzt, so dass die berechnete Energiedichteverteilung wesentlich homogener ist als die tatsächliche.

## 2.4.2 Die modifizierte Energieflussgleichung

Die *modifizierte Energieflussgleichung* [94] beziehungsweise die *Simplified Energy Method* [74, 10] wurde zunächst von Le Bot [64] vorgeschlagen, um den zuvor beschriebenen Widerspruch bei der Lösung der Energieflussgleichung aufzulösen.

Ausgehend von Gleichung 2.37 wird angenommen, dass

$$\langle \bar{\mathbf{q}} \rangle = c \langle \bar{w} \rangle \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.42)$$

gilt. Diese Annahme ist für Kugelwellen einschließlich ebener Wellen als Grenzfall einer Kugel mit unendlichem Radius gültig, wenn Dissipation im Fluid vernachlässigt und die Fernfeldannahme  $kr \gg 1$  getroffen wird. Durch Einsetzen in Gleichung 2.37 ergibt sich

$$\nabla \cdot \left( c \langle \bar{w} \rangle \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \eta \omega \langle \bar{w} \rangle = \langle \pi_{\text{in}} \rangle. \quad (2.43)$$

Da die Ausbreitungsrichtung der Wellenfront  $\mathbf{r}$  im allgemeinen Fall unbekannt ist, wird zunächst eine einzelne Kugelwelle betrachtet, so dass die Ausbreitung nur in radiale Richtung erfolgt. Die Berechnung der Divergenz vereinfacht sich somit stark und nach Übergang in Kugelkoordinaten lässt sich Gleichung 2.43 auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial \langle \bar{w} \rangle}{\partial r} + \left( \frac{2}{r} + \eta k \right) \langle \bar{w} \rangle = \delta(r) \quad (2.44)$$

reduzieren. Ihre Fundamentallösung lautet

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi cr^2}. \quad (2.45)$$

Die Gleichung 2.44 ist nun jedoch von der radialen Koordinate  $r$  und somit der Position der Quelle abhängig. Auf Basis dieser Gleichung kann daher keine direkte Formulierung für beliebige Berechnungsgebiete erfolgen.

Werden inkohärente Quellen angenommen und für die Energiedichte beziehungsweise Intensitäten das lineare Superpositionsprinzip vorausgesetzt, kann eine indirekte Formulierung als Randintegralgleichung

$$\langle \bar{q}_n \rangle(\mathbf{x}_0) = c(\mathbf{x}_0) \sigma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} c \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \sigma(\mathbf{x}) \, d\Gamma. \quad (2.46)$$

mit den unbekanntenen Quellstärken  $\sigma$  getroffen werden [64]. Formal kann diese weitgehend entsprechend einer indirekten Boundary-Elemente-Methode (IBEM, vergleiche [19, 30, 56, 91]), gelöst werden. In Gleichung 2.46 wurde gegenüber [64] lediglich die Notation an die hier verwendete angepasst und zur besseren Vergleichbarkeit auf die in [64] zusätzlich vorgeschlagene Berücksichtigung von Inhomogenitäten in Form von Punktquellen im Berechnungsgebiet sowie die Definition zusätzlicher Direktivitätsfunktionen verzichtet.

### 2.4.3 Der Intensity-Potential-Approach

Die beiden vorhergehenden Ansätze implizieren jeweils ein verlustbehaftetes Ausbreitungsmedium. Wird stattdessen eine verlustfreie Ausbreitung angenommen, folgt aus

Gleichung 2.35 für das quellfreie Ausbreitungsgebiet

$$\nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0. \quad (2.47)$$

Die Intensität wird als rotationsfrei vorausgesetzt und ein Intensitätspotenzial  $\phi$  definiert, so dass

$$-\nabla \phi = \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle \quad (2.48)$$

gilt [2, 103, 104]. Durch das Einsetzen von Gleichung 2.48 in Gleichung 2.47 folgt

$$-\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.49)$$

Dies entspricht der Laplace-Gleichung beziehungsweise in inhomogener Form der Poisson-Gleichung. Die zugehörige Fundamentallösung lautet

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi r}. \quad (2.50)$$

Die Gleichung 2.49 kann mittels der FEM oder BEM gelöst werden. Gegenüber der Energieflussgleichung ist nachteilig, dass keine einfache physikalische Interpretation des Intensitätspotenzials möglich ist. Daher wird die Definition physikalisch bedeutsamer Randbedingungen, insbesondere einer absorbierenden Randbedingung, erschwert [2, 103].

# 3 Grundlagen der Energie-Boundary-Elemente-Methode

In diesem Kapitel werden zunächst die verschiedenen Ansätze der in Kapitel 2 vorgestellten Energiemethoden gegenübergestellt und auf dieser Basis eine EBEM formuliert, die in den nachfolgenden Kapiteln um eine isogeometrische Formulierung und eine Beschleunigung mittels der FMM erweitert wird. Zum Zweck der besseren Lesbarkeit soll fortan eine vereinfachte Notation eingeführt werden, bei der die Operatoren  $\langle \dots \rangle$  und  $\bar{\cdot}$  zur Kennzeichnung der zeitlichen und räumlichen Mittelung der Feldgrößen der Energiemethoden nicht mehr ausgeschrieben werden. Die Feldgrößen unterliegen aber weiterhin den genannten Operationen, so dass im Weiteren  $\mathbf{q} = \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle$  und  $w = \langle \bar{w} \rangle$  gilt.

## 3.1 Diskussion der Energiemethoden und Auswahl einer Variante

Die Energieflussgleichung sowie die darauf basierende Formulierung von EFEM [9, 11, 14, 77] und EBEM [86] stellen die älteste Form der hier betrachteten Energiemethoden dar. Zu ihrer Gültigkeit wurden durch Moens umfangreiche Untersuchungen [74] durchgeführt, sie wurde in zahlreichen praxisnahen Anwendungen erfolgreich eingesetzt [51, 86, 112].

Als größter Kritikpunkt bleibt der von Langley [62] aufgezeigte Widerspruch im Ausbreitungsverhalten bei der Betrachtung von Punktquellen. Es sollte hierbei beachtet werden, dass im Wesentlichen die Energiedichte hiervon betroffen ist, während die Intensität, die sich proportional zum Gradienten der Energiedichte verhält, je nach Dämpfung durchaus ein physikalisch korrektes Abklingverhalten zeigt. Der beschriebene Widerspruch tritt bei der modifizierten Energieflussgleichung sowie dem Intensity-Potential-Approach nicht auf. Tatsächlich wird das Problem bei diesen Ansätzen jedoch nur umgangen, da nur die Intensität als relevante Feldgröße betrachtet wird und die Energiedichte als proportional

zu dieser angenommen oder ganz vernachlässigt wird.

Ein weiterer relevanter Punkt ist die Modellierung von Fluiddämpfung. In der Akustik wird dieser Aspekt bei tiefen und mittleren Frequenzen in vielen Anwendungen vernachlässigt, also  $\eta = 0$  angenommen. Bei hohen Frequenzen gewinnt die Dämpfung jedoch an Einfluss [66]. Da die Gleichung 2.38 für  $\eta = 0$  singular wird, muss für die Lösung der Energieflussgleichung immer ein Dämpfungskoeffizient  $\eta \neq 0$  definiert werden. Diese Einschränkung trifft auf die modifizierte Energieflussgleichung nicht zu. Sie geht jedoch im Grenzfall  $\eta = 0$  in ein Äquivalent zum Intensity-Potential-Approach über. In diesem Fall gilt

$$c\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \equiv \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.1)$$

und Gleichung 2.46 lässt sich zu

$$q(\mathbf{x}_0) = c(\mathbf{x}_0) \sigma(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \sigma(\mathbf{x}) \, d\Gamma \quad (3.2)$$

umformen. Dies entspricht wiederum mit einer entsprechenden Diskretisierung gerade einer indirekten BEM zur Lösung von Gleichung 2.49 mit Intensitätsrandbedingung.

Wenngleich Methoden auf Basis der modifizierten Energieflussgleichung in einigen Veröffentlichungen ebenfalls als indirekte BEM aufgefasst werden [54, 55], sollen sie im Rahmen dieser Arbeit für den allgemeinen Fall mit  $\eta \neq 0$  nicht als solche betrachtet werden. Der Grund hierfür ist, dass die (indirekte) BEM in erster Linie eine numerische Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen darstellt. Bei dem in Unterabschnitt 2.4.2 beschriebenen Verfahren bleibt jedoch letztlich unklar, welche Differentialgleichung gelöst wird und warum hierfür kein anderes Verfahren als eine indirekte BEM anwendbar ist. Insbesondere kann in Hinsicht auf die direkte BEM die formale Äquivalenz von direkter und indirekter BEM gezeigt werden [15], so dass im Falle einer indirekten BEM eine direkte Formulierung ebenso möglich sein sollte.

Anhand eines Fallbeispiels soll im Folgenden kurz dargelegt werden, inwiefern sich das in [64] beschriebene Verfahren von einer BEM unterscheidet. Es wird hierzu der Implementierung einer indirekten BEM analog zu [19] zur Lösung der Energieflussgleichung gegenübergestellt. Zum Aufbau des Gleichungssystems kommt jeweils die Kollokationsmethode [34] zum Einsatz, alle weiteren numerischen Verfahren zur Diskretisierung, Integration und Lösung des Gleichungssystems sind ebenfalls identisch. Die

beiden Verfahren unterscheiden sich aus numerischer Sicht nur durch die abweichenden Kernelfunktionen.

Zum Zweck einer ersten Verifizierung der Implementierungen wird zunächst die Freifeldabstrahlung einer pulsierenden Kugel mit einem Durchmesser von 1 m für beide Verfahren betrachtet. In Bild 3.1 ist das zur Berechnung genutzte Netz bestehend aus 1424 linearen, quadrilateralen Elementen dargestellt. Die Randwerte werden jeweils mit konstanten Ansatzfunktionen approximiert. Für beide Verfahren wird eine Intensitätsrandbedingung mit  $q_{n\Gamma} = -1 \text{ W/m}^2$  auf der gesamten Kugeloberfläche gewählt. Das negative Vorzeichen ergibt sich dabei aus der Definition der Normalen, welche aus dem Berechnungsgebiet hinaus zeigen. Die Schallgeschwindigkeit wird zu  $c = 343 \text{ m/s}$  und die Frequenz zu  $f = 1000 \text{ Hz}$  angenommen. Zur Auswertung der Ergebnisse wird ein Postprocessing entlang einer geraden Linie in radialer Richtung auf dem Abstandsintervall  $[0,6 \text{ m}, 10 \text{ m}]$  zum Kugelmittelpunkt durchgeführt. Aufgrund der besseren Vergleichbarkeit sowie des erwartbar unphysikalischen Verhaltens der Energiedichte wird die Intensität ausgewertet. Betrachtet wird insbesondere der Schallintensitätspegel

$$L_q = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{q}|}{q_{\text{ref}}} \quad (3.3)$$

in dB mit  $q_{\text{ref}} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ .

Die analytische Lösung der Energieflussgleichung 2.40 ist für den Fall der pulsierenden Kugel durch die mit der Amplitude  $A$  skalierte Fundamentallösung  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  gegeben. Für die Intensität folgt somit unter Berücksichtigung von Gleichung 2.38

$$q_{\text{ana,EF}}(r) = -\frac{c}{\eta k} \frac{\partial G}{\partial r} A = \frac{c}{\eta k} \frac{e^{-\eta k r}}{4\pi r^2} (1 + \eta k r) A. \quad (3.4)$$

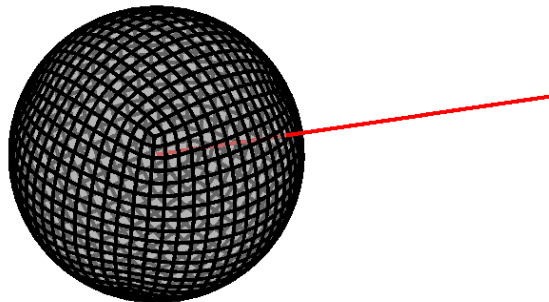


Bild 3.1: Diskretisierung der Kugel mit 1424 linearen Lagrange-Elementen und Auswertelinie (rot, ohne Maßstab)

Entsprechend ergibt sich für die modifizierte Energieflussgleichung 2.43 aufgrund der radialen Ausbreitung unter Berücksichtigung von Gleichung 2.42

$$q_{\text{ana,mEF}}(r) = c\tilde{G}\tilde{A} = \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r^2}\tilde{A} \quad (3.5)$$

als analytische Lösung. Die Amplituden  $A$  beziehungsweise  $\tilde{A}$  können jeweils aus der Randbedingung  $q_n(r_\Gamma) = q_{n\Gamma}$  bestimmt werden.

Die numerischen Ergebnisse sind den analytischen Lösungen in Bild 3.2 gegenübergestellt. Beide Verfahren liefern im Falle geringer Dämpfung für die Intensitätspegel nahezu identische und mit der ungedämpften Helmholtzgleichung konsistente Ergebnisse. Im Falle der starken Dämpfung kann beobachtet werden, dass die modifizierte Energieflussgleichung den Effekt stärker abbildet. Unabhängig hiervon stimmen jedoch in allen Fällen die numerischen Lösungen mit den analytischen sehr gut überein. Die Implementierungen der Verfahren können somit als verifiziert betrachtet werden.

Es wird nun eine quasi-eindimensionale Ausbreitung untersucht. Hierzu wird das in Bild 3.3 dargestellte Modell eines Zylinders betrachtet. Der Durchmesser des Zylinders

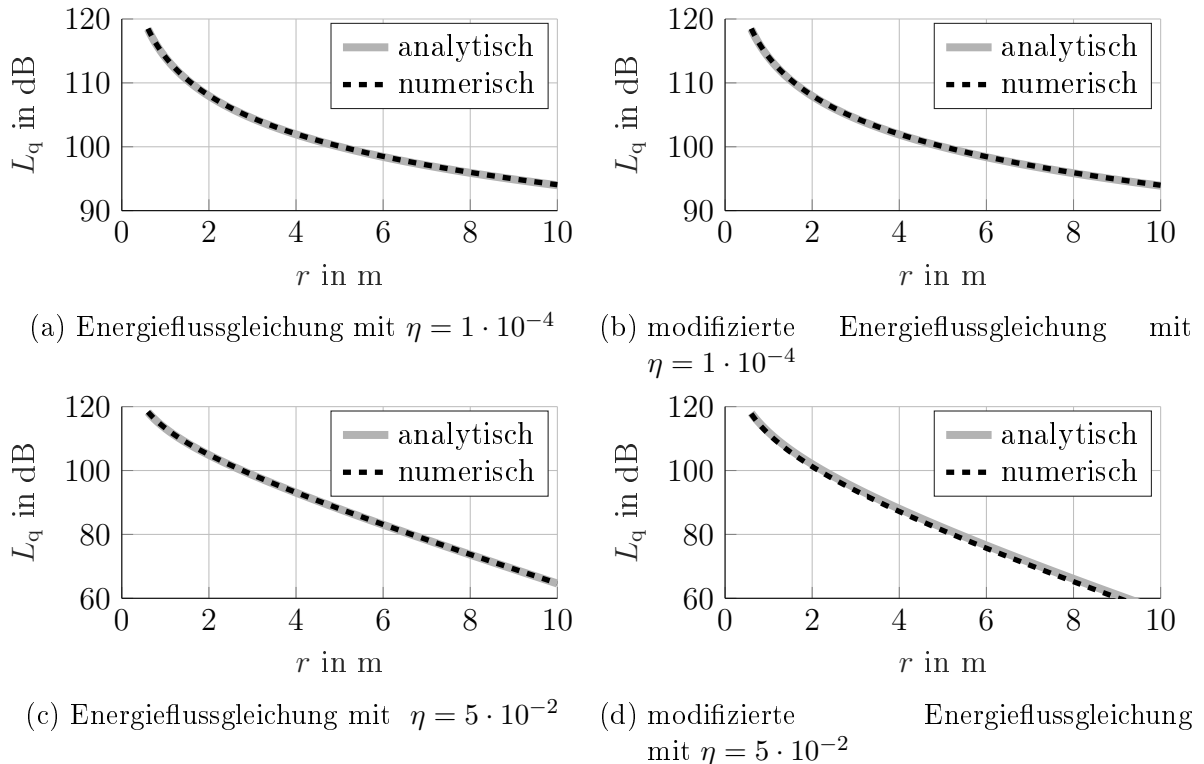


Bild 3.2: Schallintensitätspegel  $L_q$  über radialem Abstand vom Kugelmittelpunkt.

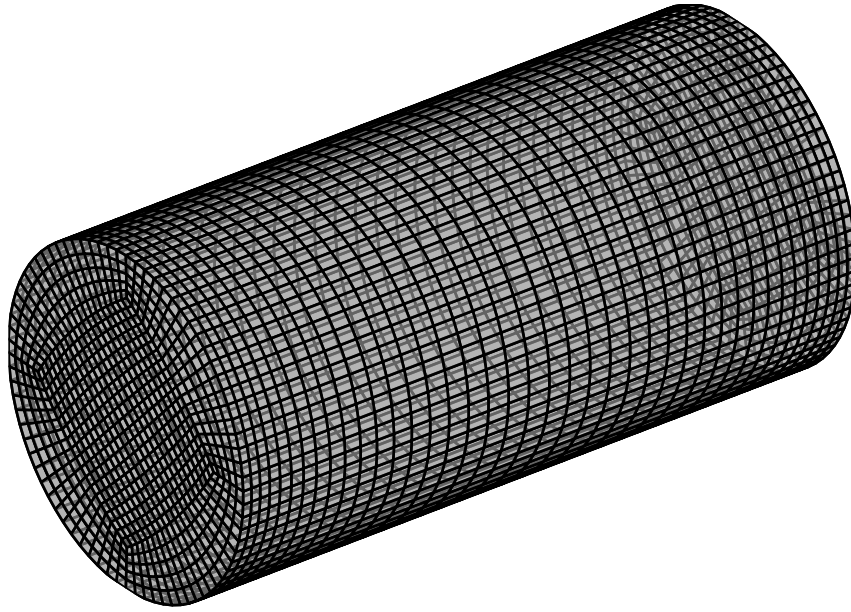


Bild 3.3: Diskretisierung des Zylinders mit 4660 Elementen.

beträgt  $D = 1$  m, seine Länge  $L = 2$  m. Es wird das Innenraumproblem, genauer die Ausbreitung einer normal zu einer Stirnfläche in den Zylinder eintretenden ebenen Wellenfront betrachtet. Die Mantelfläche des Zylinders wird als schallhart ( $q_n = 0$ ) betrachtet, die Wellenfront soll auf der gegenüberliegenden Stirnseite ungehindert austreten können beziehungsweise vollständig absorbiert werden.

Zur Bestimmung der analytischen Lösung wird ein Koordinatensystem definiert, dessen Ursprung im Mittelpunkt einer Stirnfläche liegt und dessen  $x$ -Achse mit der Achse des Zylinders zusammenfällt. Aufgrund des eindimensionalen Charakters des Problems vereinfacht sich für die Energieflussgleichung die partielle Differentialgleichung 2.40 somit zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (\eta k)^2 w = 0. \quad (3.6)$$

Ihre Lösung ist durch

$$w_{\text{ana,EF}} = Ae^{-\eta k x} \quad (3.7)$$

gegeben und für die Intensität folgt

$$q_{\text{ana,EF}} = -\frac{c}{\eta k} \frac{\partial w_{\text{ana,EF}}}{\partial x} = cAe^{-\eta k x}. \quad (3.8)$$

Für die modifizierte Energieflussgleichung vereinfacht sich Gleichung 2.42 zu dem skalaren Zusammenhang

$$q = cw \quad (3.9)$$

und es folgt aus Gleichung 2.43 für eine quellfreies Ausbreitungsgebiet

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \eta kw = 0. \quad (3.10)$$

Die Lösung von Gleichung 3.10 ist wiederum durch

$$w_{\text{ana,mEF}} = Ae^{-\eta kx} \quad (3.11)$$

gegeben, womit für die modifizierte Energieflussgleichung

$$q_{\text{ana,mEF}} = cw_{\text{ana,mEF}} = cAe^{-\eta kx} = q_{\text{ana,EF}} \quad (3.12)$$

folgt. Beide Formulierungen führen in diesem Fall also auf identische analytische Lösungen für die Intensität.

Für das numerische Experiment werden nun Intensitätsrandbedingungen definiert. Dazu wird das Netz in drei Bereiche mit jeweils angepasster Randbedingung aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \text{Einlassseite (Stirnfläche 1):} & \quad q_{\text{n}\Gamma 1} = -q_0, \\ \text{Wand (Mantelfläche):} & \quad q_{\text{n}\Gamma 2} = 0, \\ \text{Auslassseite (Stirnfläche 2):} & \quad q_{\text{n}\Gamma 3} = q_0 e^{-\frac{\eta\omega}{c}L}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Auf der Einlassseite wird die Schallintensität zu  $q_0 = 1 \text{ W/m}^2$  gewählt. Es wird weiterhin  $c = 343 \text{ m/s}$  und  $f = 1000 \text{ Hz}$  angenommen. Die Randwerte werden mit Ansatzfunktionen dritter Ordnung approximiert, so dass sich ein Berechnungsmodell mit 74.560 Freiheitsgraden ergibt.

Die Auswertung der Intensität erfolgt entlang der Symmetrieachse des Zylinders, die numerischen und analytischen Berechnungsergebnisse sind in Bild 3.4 gegenübergestellt. Im Falle geringer Dämpfung liefern beide Verfahren erneut nahezu identische Ergebnisse, die zudem sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zeigen. Wird die Dämpfung erhöht, zeigen sich jedoch starke Abweichungen zwischen den beiden Verfahren. Die numerischen Ergebnisse für die indirekte BEM zur Lösung der Ener-

gieflussgleichung stimmen weiterhin sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Die Lösung des Verfahrens nach Le Bot [64] auf Basis der modifizierten Energieflussgleichung zeigt innerhalb des Berechnungsgebiets jedoch starke Abweichungen von der analytischen Lösung. Es wird somit deutlich, dass das Verfahren nicht geeignet ist, Gleichung 2.43 auf beliebigen Gebieten zu lösen. Die Ursache hierfür liegt offenbar darin, dass die Ausbreitungsrichtung der Wellenfronten unbekannt ist und die vektorielle Gleichung 2.43 daher im Allgemeinen nicht auf die skalare Gleichung 2.44 reduziert werden kann. Das Verfahren, sowie weitere hiervon abgeleitete, kann und soll an dieser Stelle nicht abschließend bewertet werden, es soll jedoch ausdrücklich nicht als BEM klassifiziert werden und wird daher im Weiteren nicht berücksichtigt.

Das dritte in Abschnitt 2.4 beschriebene Verfahren, der Intensity-Potential-Approach, vernachlässigt, entgegen der anderen Verfahren, die Dämpfung im Ausbreitungsmedium. Wie zuvor beschrieben kann es auch als Grenzfall der modifizierten Energieflussgleichung mit  $\eta = 0$  betrachtet werden. Es ist zudem erwähnenswert, dass in [106] eine sehr ähnliche Formulierung ausgehend von klassischen Randintegralgleichungen für Druck und Schnelle gefunden wurde. Sie unterscheidet sich im Wesentlichen in zwei Punkten: Die genutzte Kernelfunktion  $\mathbf{H} \propto \frac{1}{r^2}$  ist mit einem anderen (frequenzabhängigen) Faktor skaliert und

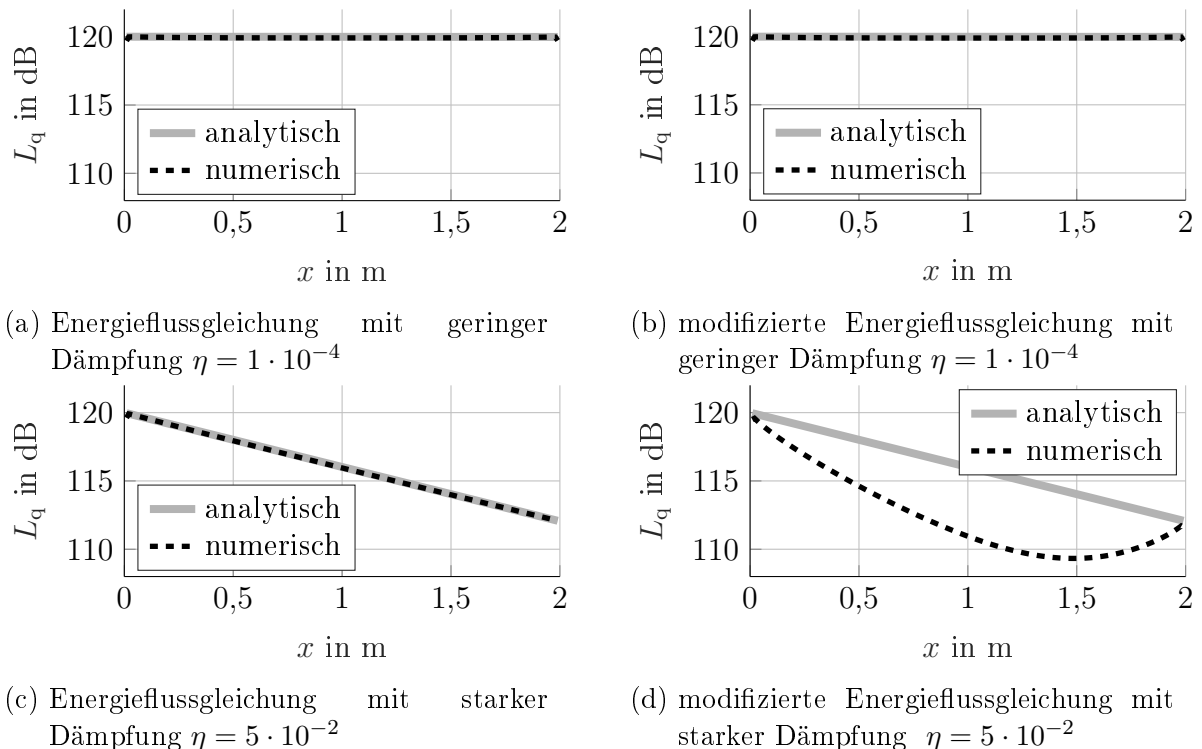


Bild 3.4: Schallintensitätspegel  $L_q$  über axialem Abstand von der Einlassseite des Zylinders.

es wird eine zweite Integration über die Oberfläche ausgeführt, um Randbedingungen in Form der akustischen Eingangsleistung anstatt der Intensität zu definieren. Die beiden vorgenannten Punkte resultieren in einem numerischen Mehraufwand, während der praktische Nutzen nicht unmittelbar offensichtlich wird.

Das theoretische Fundament des Intensity-Potential-Approaches erscheint schon aufgrund der Tatsache, dass die Grundgleichung auf drei verschiedenen Wegen hergeleitet werden kann, robust. Problematisch bleibt jedoch, dass als physikalisch bedeutsame Feldgröße nur noch die Intensität vorliegt und insbesondere die Formulierung von Absorptionsrandbedingungen somit wiederum nur unter weiteren Annahmen möglich ist. Aus diesem Grund und aufgrund der Tatsache, dass die Energieflussgleichung nach Unterabschnitt 2.4.1 in der Literatur am besten untersucht und teils etabliert ist, wird im Weiteren eine EBEM auf deren Basis formuliert und weiterentwickelt. Die Methodik ist dabei prinzipiell auch auf die Laplace-Gleichung des Intensity-Potential-Approaches übertragbar und dort, wo es zweckmäßig erscheint, werden entsprechend mögliche Modifikationen aufgezeigt.

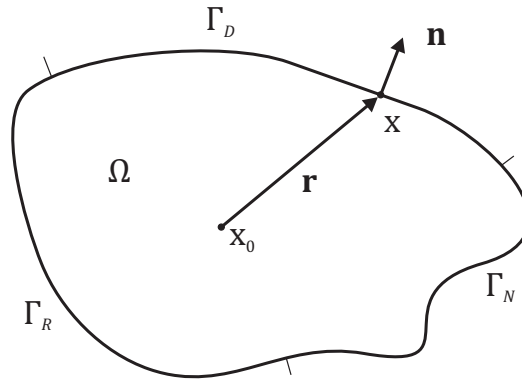
## 3.2 Die energetische Randintegralgleichung

Im Folgenden wird, wie in Unterabschnitt 2.2.2 bereits verkürzt für die Helmholtzgleichung dargestellt, die Energieflussgleichung 2.40 in eine Randintegralgleichung zur Lösung mittels der BEM überführt.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt basieren im Wesentlichen auf den Lehrbüchern von Lothar Gaul und Carlos Brebbia [16, 34]. Es sei vorab darauf hingewiesen, dass insbesondere bei der Wahl der Normalenrichtung sowie der Fundamentallösung eine gewisse Freiheit besteht, so dass sich in der Literatur abweichende Konventionen finden. Wichtig ist jedoch, dass die gewählten Definitionen konsistent gehalten werden. Es wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden das in Bild 3.5 dargestellte Berechnungsgebiet  $\Omega$  mit dem Rand  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$  und dem nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}$  betrachtet.

Ausgangspunkt zur Herleitung der Randintegralgleichung bildet die Gewichtung der Gleichung 2.40 mit einer Wichtungsfunktion  $\mathcal{W}$  und Integration über das Berechnungsgebiet  $\Omega$ , so dass

$$\int_{\Omega} \underbrace{(\nabla^2 w - (\eta k)^2 w)}_{\mathcal{L}(w)} \mathcal{W} \, d\Omega = 0. \quad (3.14)$$

Bild 3.5: Der Rand  $\Gamma$  eines Innenraumproblems mit dem Berechnungsgebiet  $\Omega$ .

folgt. In kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  des  $\mathbb{R}^3$  kann der Laplace-Operator  $\nabla^2$  ausgeschrieben und Gleichung 3.14 zu

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w - (\eta k)^2 w) \mathcal{W} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \mathcal{W} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \mathcal{W} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \mathcal{W} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\eta k)^2 w \mathcal{W} \, d\Omega \quad (3.15)$$

formuliert werden. Durch partielle Integration der ersten drei Terme ergibt sich

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w - (\eta k)^2 w) \mathcal{W} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{W} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x_3} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\eta k)^2 w \mathcal{W} \, d\Omega, \quad (3.16)$$

wobei zur Formulierung des geschlossenen Oberflächenintegrals zunächst auf eine Parameterdarstellung des Rands  $\Gamma$  übergegangen und die jeweiligen Jacobideterminanten als Komponenten des aus dem Berechnungsgebiet  $\Omega$  heraus zeigenden Normalenvektors ausgedrückt wurden. Der daraus resultierende Term  $\nabla w \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  kann mit Gleichung 2.38 auch als  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\eta k}{c} q_n$  identifiziert werden.

Durch erneute partielle Integration des zweiten Integralterms auf der rechten Seite von Gleichung 3.16 folgt

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w - (\eta k)^2 w) \mathcal{W} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{W} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma + \int_{\Omega} \underbrace{(\nabla^2 \mathcal{W} - (\eta k)^2 \mathcal{W})}_{\mathcal{L}^*(\mathcal{W})} w \, d\Omega \quad (3.17)$$

oder

$$\int_{\Omega} \mathcal{W} \nabla^2 w - w \nabla^2 \mathcal{W} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{W} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma. \quad (3.18)$$

In dieser Form ist Gleichung 3.18 auch als *zweite Greensche Identität* bekannt und wird in der Literatur häufig als Ausgangspunkt zur Herleitung von Randintegralgleichungen verwendet.

Um das verbleibende Volumenintegral auf der rechten Seite von Gleichung 3.17 zu eliminieren, ist die Wahl der Wichtungsfunktion  $\mathcal{W}$  entscheidend. Wird sie entsprechend der Fundamentallösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  gewählt, gilt für den in Gleichung 3.17 neu entstandenen Differentialoperator  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^*(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)) = \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - (\eta k)^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.19)$$

Die hier benutzte  $\delta$ -Distribution geht für  $x = x_0$  gegen unendlich und ist sonst null, wobei  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) \, dx = 1$  gilt. Sie besitzt zudem als wesentliches Merkmal die Filtereigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) \, dx = f(x_0). \quad (3.20)$$

Die vektorielle Darstellung in Gleichung 3.19 lässt sich als Produkt eindimensionaler  $\delta$ -Distributionen  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_2^0) \delta(x_3 - x_3^0)$  interpretieren.

Für die Energieflussgleichung im dreidimensionalen Raum ist eine Fundamentallösung, die die Bedingung 3.19 erfüllt durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (3.21)$$

und deren Normalenableitung in  $\mathbf{x}$  durch

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} = -(1 + \eta kr) \frac{e^{-\eta kr}}{r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \quad (3.22)$$

gegeben.

Wird nun  $\mathcal{W} = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  gewählt, folgt mit Gleichung 3.14, 3.17 und 3.19

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) w \, d\Omega = 0. \quad (3.23)$$

Die Energiedichte  $w(\mathbf{x}_0)$  an einem Feldpunkt  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  ergibt sich somit aus Gleichung 3.23 mit der Filtereigenschaft 3.20 zu

$$w(\mathbf{x}_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma, \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega. \quad (3.24)$$

Zur Auswertung der Gleichung 3.24 müssen die Randwerte für Energiedichte und Intensität bekannt sein. Um die noch unbekannt Randwerte zu ermitteln, muss jedoch eine Gleichung gefunden werden, in der nur noch Randgrößen enthalten sind. Dies kann erreicht werden, wenn die Singularität der  $\delta$ -Distribution aus dem Gebiet  $\Omega$  auf den Rand  $\Gamma$  verschoben wird. In diesem Fall kann jedoch nicht mehr einfach über die Singularität „hinweg“ integriert und unmittelbar die Filtereigenschaft 3.20 angewendet werden.

Zur Verlegung der Singularität auf den Rand wird dieser wie in Bild 3.6 dargestellt kugelförmig um den betrachteten Punkt erweitert und der Grenzfall, dass der Kugelradius  $\varepsilon$  gegen null geht, betrachtet. Der Punkt befindet sich somit wieder im Berechnungsgebiet und Gleichung 3.24 bleibt weiterhin gültig. Zur Betrachtung des Grenzübergangs wird das Integral über den Rand nun in die Bereiche  $\Gamma' = \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon$  und  $\Gamma_\varepsilon$  aufgeteilt, somit wird

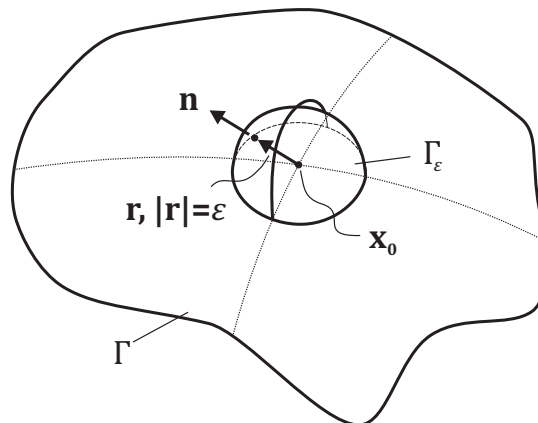


Bild 3.6: Kugelförmige Erweiterung des Randes  $\Gamma$  um den Punkt  $\mathbf{x}_0$  nach [16].

aus Gleichung 3.24

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}_0) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma' + \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \, d\Gamma_\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $\Gamma' \rightarrow \Gamma$  und der erste Integralterm ergibt das Integral über den Originalrand. Für die Betrachtung des zweiten und dritten Terms wird das Flächenintegral in Kugelkoordinaten ausgedrückt und ausgenutzt, dass die Normale stets in radialer Richtung liegt, so dass  $\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = 1$  beziehungsweise  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial r}$  gilt. Damit ergibt sich für den zweiten Term

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \, d\Gamma_\varepsilon = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 0 \tag{3.26}$$

und für den dritten Term

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma_\varepsilon &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\varphi} \int_{\theta} -\frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r^2} (1 + \eta kr) w(\mathbf{x}) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\
&= -\frac{1}{4\pi} w(\mathbf{x}_0) \int_{\varphi} \int_{\theta} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Einsetzen von Gleichung 3.26 und 3.27 in Gleichung 3.25 liefert schließlich die gesuchte Randintegralgleichung

$$c(\mathbf{x}_0) w(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \, d\Gamma, \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma \tag{3.28}$$

beziehungsweise

$$c(\mathbf{x}_0) w(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) \, d\Gamma = -\frac{\eta k}{c} \int_{\Gamma} q_n(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \, d\Gamma, \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma \tag{3.29}$$

mit

$$c(\mathbf{x}_0) = \left( 1 - \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} \int_{\theta} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \right). \tag{3.30}$$

Insbesondere ergibt sich für in  $\mathbf{x}_0$  glatte Ränder eine eindeutige Tangentialebene, so dass die Randerweiterung einer Halbkugel entspricht. Mit den Integrationsgrenzen  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  und  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  gilt dann  $c(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}$ . Durch die ausschließliche Verwendung

diskontinuierlicher Elemente im Rahmen dieser Arbeit kann der Rand immer als glatt vorausgesetzt werden.

Das in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehen für das Innenraumproblem kann durch das Invertieren des Normalenvektors auf das Außenraumproblem übertragen werden.

### 3.3 Randbedingungen

In Gleichung 3.29 können gemischte Randbedingungen in der Form

$$w(\mathbf{x}) = w_\Gamma(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad \text{Dirichlet-Randbedingung} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\eta k}{c} q_{n\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N \quad \text{Neumann-Randbedingung} \quad (3.32)$$

$$\alpha_R(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) + \beta_R(\mathbf{x}) q_n(\mathbf{x}) = \gamma_R(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_R \quad \text{Robin-Randbedingung} \quad (3.33)$$

eingebraucht werden. In der Literatur [11, 74] wird für absorbierende Flächen auf Basis der Sabine'schen Raumakustik eine Robin-Randbedingung

$$\frac{w(\mathbf{x})}{q_n(\mathbf{x})} = \frac{4}{c\alpha(\mathbf{x})} \quad (3.34)$$

mit dem Absorptionsgrad  $\alpha$  formuliert. Alternativ hierzu wird im Folgenden eine Formulierung auf Basis der Wandimpedanz vorgestellt. Mit Gleichung 2.30 und Gleichung 2.31 lässt sich

$$\frac{w(\mathbf{x})}{q_n(\mathbf{x})} = \frac{1}{2\rho c^2} \frac{pp^* + (\rho c)^2 v_n v_n^*}{\text{Re}(pv_n^*)} \quad (3.35)$$

schreiben. Hieraus folgt mit Gleichung 2.11

$$\frac{w(\mathbf{x})}{q_n(\mathbf{x})} = \frac{1}{2\rho c^2} \frac{pp^* + (\rho c)^2 \frac{pp^*}{ZZ^*}}{\text{Re}\left(\frac{pp^*}{Z^*}\right)} \quad (3.36)$$

und schließlich

$$\frac{w(\mathbf{x})}{q_n(\mathbf{x})} = \frac{|Z|^2 + (\rho c)^2}{2\rho c^2 \text{Re}(Z)}. \quad (3.37)$$

Dieses Ergebnis steht nicht im Widerspruch zu Gleichung 3.34: Unter der Annahme eines diffusen Schallfelds lässt sich für  $|Z| \gg \rho c$

$$\alpha \approx \frac{8\rho c}{\text{Re}(Z)} \quad (3.38)$$

abschätzen [75]. Gleichzeitig folgt dann aus Gleichung 3.37 unter zusätzlicher Annahme einer reellwertigen Impedanz

$$\frac{w(\mathbf{x})}{q_n(\mathbf{x})} = \frac{|Z|^2}{2\rho c^2 \operatorname{Re}(Z)} + \frac{\rho c}{2c \operatorname{Re}(Z)} \approx \frac{\operatorname{Re}(Z)}{2\rho c^2}. \quad (3.39)$$

Dasselbe Ergebnis wird durch Einsetzen von Gleichung 3.38 in Gleichung 3.34 erzielt. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Randbedingungen 3.34 und 3.37 für geringe Absorptionsgrade gleichwertig sind. Sie unterscheiden sich formal aber in den zugrunde liegenden Annahmen: Bei der Herleitung von Gleichung 3.37 wurden keine Annahmen zum Schallfeld selbst getroffen, gleichzeitig setzt die Nutzung der Wandimpedanz zur Modellierung eine lokal reagierende Oberfläche voraus. Demgegenüber ist Gleichung 3.34 explizit für diffuse Schallfelder formuliert worden. Praktisch sind aufgrund der Voraussetzungen für die Gültigkeit der Energieflussgleichung (vergleiche Abschnitt 2.4) aber beide Formulierungen auf ähnliche Anwendungsbereiche limitiert und die Wahl der Randbedingung kann sich nach der Verfügbarkeit der Parameter richten.

## 3.4 Berücksichtigung von Inhomogenitäten

Bislang wurde das Berechnungsgebiet stets als quellfrei betrachtet und die homogene Energieflussgleichung 2.40 auf diesem Gebiet gelöst. Wird das in Abschnitt 3.2 beschriebene Vorgehen zur Herleitung der Randintegralgleichung direkt auf die inhomogene Energieflussgleichung angewandt, resultiert der Quellterm in einem zusätzlichen Volumenintegral. Die Lösung dieses Integrals wäre im Allgemeinen aufwendig und soll daher vermieden werden. Für die praktische Anwendung können elementare Quellen, wie Monopolquellen, Punktquellen höherer Ordnung oder auch ebene Wellen wie folgt berücksichtigt werden [30].

Die Feldgrößen werden in einen einfallenden (englisch *incident*) und einen zurückgeworfenen (englisch *scattered*) Anteil aufgetrennt, so dass

$$w = w_i + w_s \quad (3.40)$$

und

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_s \quad (3.41)$$

gilt. Das Scattered-Feld muss die Energieflussgleichung im Berechnungsgebiet erfüllen, so dass sich mit  $w_s = w - w_i$  und  $q_{s,n} = q_n - q_{i,n}$  die Gleichung 3.29 zu

$$c(\mathbf{x}_0) [w(\mathbf{x}_0) - w_i(\mathbf{x}_0)] + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} [w(\mathbf{x}) - w_i(\mathbf{x})] d\Gamma = -\frac{\eta k}{c} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) [q_n(\mathbf{x}) - q_{i,n}(\mathbf{x})] d\Gamma \quad (3.42)$$

ergibt. Gleichzeitig muss die Gleichung 3.29 für das Incident-Feld außerhalb des Berechnungsgebiets, also mit inverser Normalenrichtung erfüllt sein. Aus dieser Forderung ergibt sich

$$c(\mathbf{x}_0) w_i(\mathbf{x}_0) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w_i(\mathbf{x}) d\Gamma = \frac{\eta k}{c} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) q_{i,n}(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (3.43)$$

Aus der Subtraktion der Gleichung 3.43 von Gleichung 3.42 folgt mit  $c(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}$  schließlich

$$\frac{1}{2} w(\mathbf{x}_0) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} w(\mathbf{x}) d\Gamma = -\frac{\eta k}{c} \int_{\Gamma} q_n(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\Gamma + w_i(\mathbf{x}_0), \quad (3.44)$$

die Energiedichte der einfallenden Wellen  $w_i$  ist dabei für eine elementare Quelle bekannt. Randbedingungen werden gemäß Abschnitt 3.3 in Abhängigkeit der Gesamtenergiedichte  $w$  und Normalenintensität  $q_n$  definiert, insbesondere liefert auch die triviale Randbedingung  $q_n = 0$  auf dem gesamten Rand  $\Gamma$  das durch eine schallharte Berandung reflektierte Feld der Elementarquelle.



# 4 Diskretisierung und Aufstellen des Gleichungssystems

Da eine analytische Berechnung der auftretenden Oberflächenintegrale oftmals nicht möglich ist, muss zu deren numerischer Auswertung die Berandung des Berechnungsgebiets diskretisiert werden. Das heißt, dass sowohl die Geometrie der Oberfläche als auch die Randwerte selbst an diskreten Stützpunkten vorgegeben und in den Bereichen dazwischen durch geeignete Interpolationsfunktionen angenähert werden müssen. In diesem Kapitel wird der Übergang von der kontinuierlichen Randintegralgleichung zum diskreten Gleichungssystem im Abschnitt 4.1 unter Verwendung der klassischen Lagrange-Elemente und im Abschnitt 4.2 als isogeometrisches Verfahren auf Basis von NURBS-Geometrien und -Ansatzfunktionen beschrieben. Im Kapitel 5 wird dann auf die spezifischen Eigenschaften der Elementformulierung bei der numerischen Integration eingegangen. Zur Vertiefung der wesentlichen in diesem Kapitel dargestellten Grundlagen sei auf die zugrundeliegende Literatur [5, 34] verwiesen.

## 4.1 Klassische Diskretisierung mittels Lagrange-Elementen

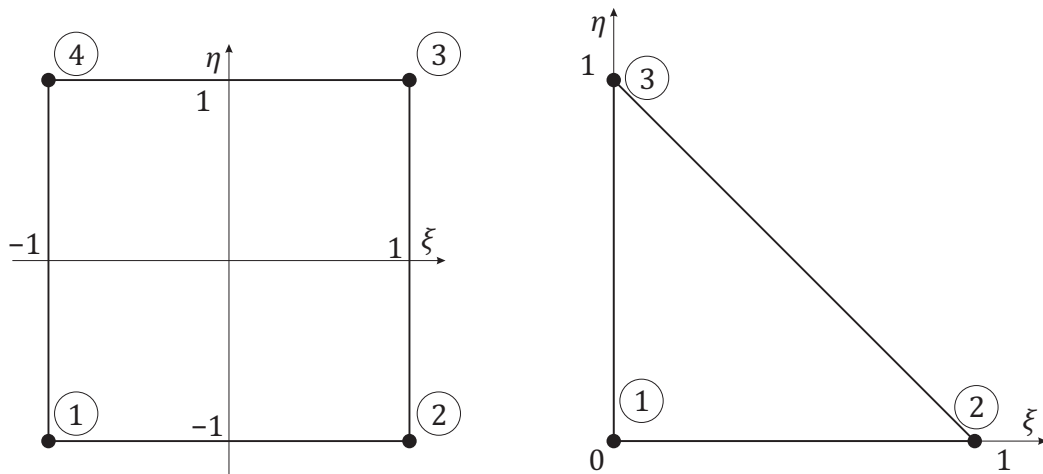
Die Zerlegung der Geometrie in stückweise stetige, drei- oder viereckige Elemente und die Interpolation der Randwerte mittels Polynomen niedriger Ordnungen, wie sie im Folgenden beschrieben wird, ist der etablierte Stand der Technik in der BEM. Die Vernetzung der Geometrie mit numerisch effizienten Elementen ist insbesondere für komplexe Geometrien grundsätzlich nicht trivial. Aufgrund der langjährigen Nutzung mit verschiedenen Diskretisierungsmethoden und umfangreicher Entwicklungsarbeit sind jedoch fortschrittliche kommerzielle und nicht-kommerzielle Werkzeuge zur Erstellung und Modifikation der Netze verfügbar. Beispielhaft hierfür können die Programmpakete *Gmsh*, *HyperMesh* oder *Patran* genannt werden.

### 4.1.1 Geometriediskretisierung

Die einfachste Form der Geometriebeschreibung für die Berandung eines dreidimensionalen Gebiets erfolgt durch zweidimensionale, lineare Randelemente. Höhere Ordnungen der Interpolationspolynome sind möglich, in der Praxis spielen aber neben den linearen allenfalls quadratische Geometrieansatzfunktionen eine Rolle, da eine exakte Darstellung der Geometrie im Allgemeinen auch mit höheren Ordnungen nicht möglich ist. Die folgenden Ausführungen beschränken sich daher auf lineare Elemente.

Es kommen ausschließlich kontinuierliche drei- und viereckige Elemente zum Einsatz. Die  $C_0$ -Kontinuität der Geometrie wird erreicht, indem benachbarte Elemente über geteilte Stützpunkte definiert werden. Somit wird sichergestellt, dass der Rand geschlossen ist. Die Auswertung der Geometrie für die in Kapitel 5 beschriebene numerische Integration erfolgt auf Basis der in Bild 4.1 dargestellten Referenzelemente in deren natürlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$ . Letztere sind für viereckige Elemente auf dem Intervall  $\xi, \eta \in [-1, 1]$  definiert. Die den Knoten ① bis ④ zugeordneten Ansatzfunktionen lauten

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ \phi_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \\ \phi_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta).\end{aligned}\tag{4.1}$$



(a) Viereckelement

(b) Dreieckelement

Bild 4.1: Lineare Referenzelemente.

Für dreieckige Elemente sind die natürlichen Koordinaten auf dem Intervall  $\xi, \eta \in [0,1]$  mit der zusätzlichen Forderung

$$\xi + \eta \leq 1 \quad (4.2)$$

definiert. Die den Knoten ① bis ③ zugeordneten Ansatzfunktionen lauten

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 - \xi - \eta, \\ \phi_2 &= \xi, \\ \phi_3 &= \eta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Transformation von natürlichen in globale kartesische Koordinaten ist mit den  $N_N$  Knotenkoordinaten  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$  eines Elements durch

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_N} \phi_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i \quad (4.4)$$

gegeben. Der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  ergibt sich als normiertes Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen des globalen Koordinatenvektors nach den natürlichen Koordinaten zu

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|}. \quad (4.5)$$

Die Transformation der Differentiale  $d\xi$  und  $d\eta$  auf das infinitesimale Flächenelement  $d\Gamma$  ist durch die Funktionaldeterminante  $|\mathbf{J}|$  mit

$$d\Gamma(\xi, \eta) = |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \left| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta \quad (4.6)$$

gegeben.

### 4.1.2 Interpolation der Randwerte

Analog zur Geometrie müssen auch die Randwerte elementweise interpoliert werden. Hierbei sind auch über die Elementgrenzen hinweg unstetige Verläufe zulässig, was die Nutzung sogenannter diskontinuierlicher Elemente erlaubt. Die Stützstellen der Elemente liegen dabei alle innerhalb der Elementgrenzen, insbesondere sind auch konstante Ansatzfunktionen mit einer einzigen Stützstelle für jedes Element möglich. Vorteilhaft bei der Nutzung diskontinuierlicher Elemente ist, dass für alle Stützstellen ein glatter Rand vorausgesetzt werden kann und sich somit gemäß der Ausführungen in Abschnitt 3.2 stets ein Randfaktor  $c(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}$  ergibt. Nachteilhaft gegenüber kontinuierlichen Elementen

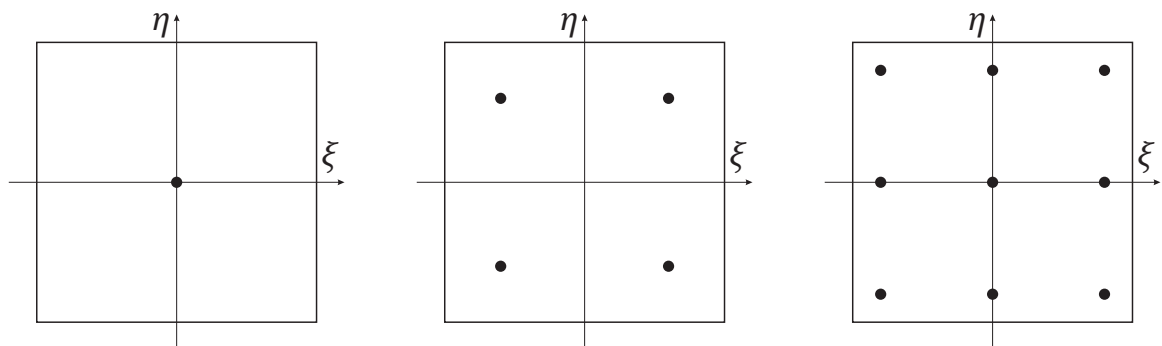
erscheint auf den ersten Blick, dass die globale Anzahl an Freiheitsgraden ab der ersten Ordnung höher ist, da die Elemente keine Stützstellen teilen. Tatsächlich konnte in [71] jedoch gezeigt werden, dass zumindest für niedrige Ordnungen diskontinuierliche Elemente sogar eine effizientere Berechnung erlauben, wenn die Stützstellen an den Nullstellen der Legendre-Polynome platziert werden. Weitergehende Informationen zu diskontinuierlichen Elementen beliebiger Ordnung finden sich beispielsweise in [52].

Für Viereckelemente ergeben sich, für eine beliebige Ordnung  $p$ , die  $p^2$  Ansatzfunktionen allgemein als Produkt der eindimensionalen Lagrange-Polynome zu

$$L_{ij}^p(\xi, \eta) = \left( \prod_{k=0, k \neq i}^p \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \right) \left( \prod_{l=0, l \neq j}^p \frac{\eta - \eta_l}{\eta_j - \eta_l} \right), \quad (4.7)$$

mit den beliebigen Stützstellen  $\xi_i$  und  $\eta_j$ , wobei  $i = 0, \dots, p$  und  $j = 0, \dots, p$  sind. Die kontinuierlichen geometrischen Ansatzfunktionen 4.1 ergeben sich hieraus als Spezialfall mit  $p = 1$  und  $\xi_0 = \eta_0 = -1$  sowie  $\xi_1 = \eta_1 = 1$ . Zur Formulierung der diskontinuierlichen Elemente werden die Stützstellen nun, genau wie die Stützstellen der Gauß-Legendre-Integration, in die Nullstellen der Legendre-Polynome gelegt. Exemplarisch sind in Bild 4.2 die Stützstellen der ersten drei Ordnungen dargestellt.

Für Dreieckelemente ist die Gleichung 4.7 nur eingeschränkt anwendbar. Zwar ist es möglich, wie in Bild 4.3 dargestellt, Dreieckelemente als degenerierte Viereckelemente mit zwei koinzidenten geometrischen Knoten zu betrachten, doch aufgrund der starken Verzerrung und der lokal erhöhten Dichte an Stützstellen ist dieses Vorgehen numerisch nicht sehr effizient. Über die Definition von Flächenkoordinaten [114] ist eine günstigere Formulie-



(a) Konstante Ansatzfunktion (Ordnung 0)      (b) Bilineare Ansatzfunktionen (Ordnung 1)      (c) Biquadratische Ansatzfunktionen (Ordnung 2)

Bild 4.2: Lage der Stützpunkte für diskontinuierliche Viereckelemente.

rung der Ansatzfunktionen analog zu Gleichung 4.3 möglich. Die optimale Platzierung der Stützstellen für diskontinuierliche Elemente ist in diesem Fall jedoch komplexer, für eine detaillierte Beschreibung des für diese Arbeit übernommenen Vorgehens sei auf [52] verwiesen. Exemplarisch ist die Lage der resultierenden Stützpunkte für die ersten drei Ordnungen in Bild 4.4 skizziert.

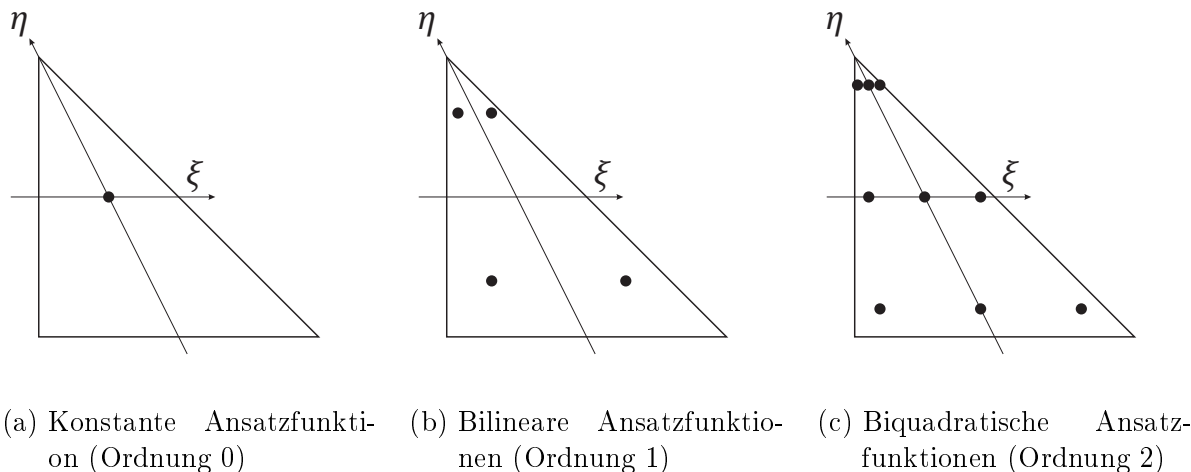


Bild 4.3: Lage der Stützpunkte für diskontinuierliche Dreieckelemente als degenerierte Viereckelemente

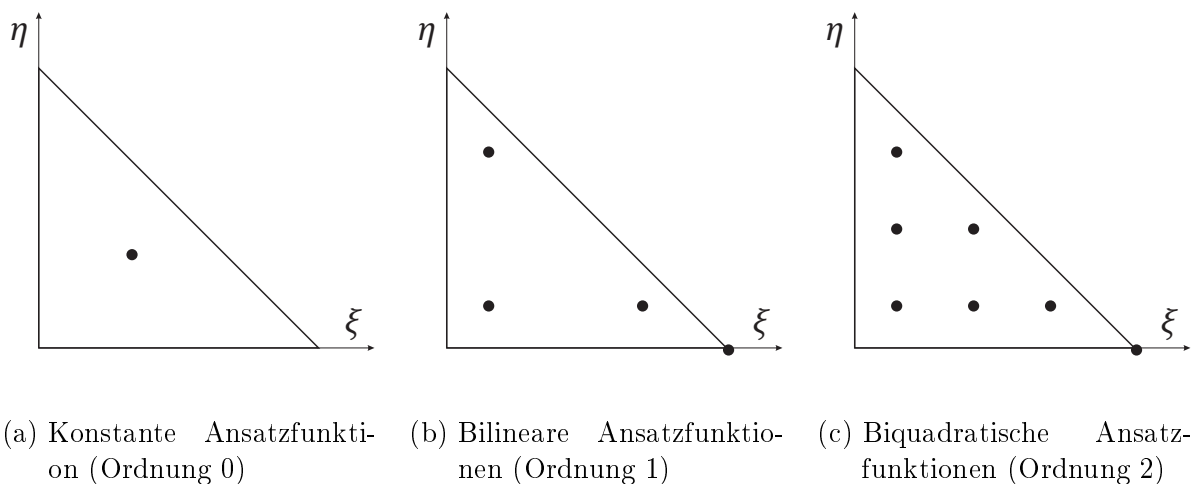


Bild 4.4: Lage der Stützpunkte für diskontinuierliche Dreieckelemente bei Nutzung von Flächenkoordinaten.

### 4.1.3 Aufbau des Gleichungssystems mittels der Kollokationsmethode

Durch die zuvor beschriebene Diskretisierung kann der Rand  $\Gamma$  des Berechnungsgebiets in  $N_E$  Elemente zerlegt werden, auf denen der Verlauf der Randwerte jeweils durch  $N_N$

diskrete Stützpunkte und ebenso viele Formfunktionen vorgegeben ist. Hiermit ergibt sich die diskretisierte Form der Randintegralgleichung 3.29 zu

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}_0) w(\mathbf{x}_0) + \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{N=1}^{N_N} w_N^E \int_{\Gamma_E} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \phi_N^E(\xi, \eta) d\Gamma \\ = -\frac{\eta^k}{c} \sum_{E=1}^{N_E} \sum_{N=1}^{N_N} q_{nN}^E \int_{\Gamma_E} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi_N^E(\xi, \eta) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei die Ansatzfunktion  $\phi$  als Lagrange-Polynom nach Gleichung 4.7 oder später als die im Unterabschnitt 4.2.2 eingeführte NURBS-Basisfunktion nach Gleichung 4.22 ausgedrückt werden kann. Die Kollokationsmethode ermöglicht nun den Aufbau eines Gleichungssystems indem der Ladepunkt  $\mathbf{x}_0$  nacheinander auf die Stützpunkte der Ansatzfunktionen gelegt wird und der Wert am Stützpunkt mit der Feldgröße des Ladepunkts identifiziert wird [34]. Die Stützpunkte werden daher auch als Kollokationspunkte bezeichnet.

Das resultierende Gleichungssystem lässt sich in Matrixschreibweise als

$$\mathbf{H}\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{q}_n \quad (4.9)$$

formulieren. Die Elemente der Matrizen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  sind dabei durch

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \phi_i(\mathbf{x}_{0,i}) + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{0,i})}{\partial \mathbf{n}} \phi_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.10)$$

beziehungsweise

$$G_{ij} = -\frac{\eta^k}{c} \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{0,i}) \phi_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.11)$$

mit dem Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  zur Berücksichtigung des Randfaktors gegeben. Im Fall der zuvor beschriebenen Lagrange-Ansatzfunktionen gilt in Gleichung 4.10 zudem  $\phi_i(\mathbf{x}_{0,i}) = 1$ .

Die Randbedingungen können nun knotenweise durch Vorgabe der bekannten Randwerte  $w_i$ ,  $q_{ni}$ , beziehungsweise im Falle der Robin-Randbedingung durch Ausnutzung des bekannten funktionalen Zusammenhangs der beiden Werte, in Gleichung 4.9 eingebracht werden. Die Vektoren und zugehörigen Matrixspalten werden dann so sortiert, dass ein Vektor mit bekannten und einer mit unbekanntem Größen vorliegt. Nach der Multiplikation des bekannten Vektors mit der zugehörigen Matrix liegt schließlich ein Gleichungssystem

der Form

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad (4.12)$$

vor. Die Lösung des linearen Gleichungssystems nach den Unbekannten im Vektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  wird in Abschnitt 4.3 beschrieben. Zur Berechnung der Matrixkoeffizienten aus Gleichung 4.10 und 4.11 ist zudem eine numerische Integration erforderlich, der in der BEM eine besondere Bedeutung zukommt. Sie wird in Kapitel 5 behandelt.

## 4.2 Isogeometrische Analyse

Die grundlegende Idee der isogeometrischen Analyse besteht darin, den Schritt der Vernetzung weitgehend zu umgehen und die numerische Analyse direkt auf Basis der zur Geometriebeschreibung im CAD-System genutzten Funktionen durchzuführen. Sie wurde zuerst in [47] vorgestellt und beschränkte sich zunächst auf die Verwendung in der FEM. Die Darstellung von Körpern erfolgt in CAD Systemen typischerweise (auch für Volumenkörper) als Flächenmodell. Zur Nutzung in der FEM ist daher zunächst die Erstellung eines Volumennetzes auf Basis der Flächenmodelle erforderlich, was sich, abhängig von der Komplexität der Geometrie, schwierig gestalten kann. Für eine Anwendung in der BEM hingegen, die nur die Diskretisierung der Oberflächen erfordert, können die CAD-Modelle im Idealfall direkt als numerisches Modell verwendet werden. Die Methode eignet sich daher besonders gut für die isogeometrische Analyse.

Grundsätzlich ist die Beschreibung in CAD-Systemen auf Basis beliebiger Funktionen möglich, so dass durch den Begriff der isogeometrischen Analyse alleine noch keine Aussage über die Art der genutzten Ansatzfunktionen getroffen wird. Eine überwiegende Mehrzahl der CAD-Systeme nutzt jedoch NURBS [5], Alternativen mit zum Teil attraktiveren Eigenschaften stellen beispielsweise Subdivision Surfaces [21, 107] oder T-Splines [4, 93] dar. Aufgrund der bislang noch geringen Verbreitung dieser Alternativen wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch eine NURBS-basierte Formulierung gewählt. Viele Konzepte sind zudem später übertragbar.

Die Nutzung von NURBS-Ansatzfunktionen hat aus numerischer Sicht gegenüber den Lagrange-Polynomen eine Reihe von Vorteilen. Die offensichtlichsten sind hier die potenziell stark vereinfachte Modellerstellung auf Basis verfügbarer CAD-Modelle und die nahezu vollständige Elimination von Geometriefehlern. Wie im Unterabschnitt 4.2.3 deutlich wird, lassen sich die Basisfunktionen eines NURBS zudem einfach und auf

vielfältige Weise anreichern, wobei die gewünschte Kontinuität der Basisfunktionen frei wählbar ist [5, 6, 47]. Es ergeben sich hiermit mehrere mögliche Verfeinerungsstrategien. Unerwünschtes oszillatorisches Verhalten der Basisfunktionen, wie es bei Lagrange-Polynomen höherer Ordnung auftreten kann, kann zudem bei Verwendung von NURBS durch die neu eingeführte  $k$ -Verfeinerung weitgehend unterdrückt werden [5].

Zwei Aspekte sind bei der Nutzung von NURBS-Basisfunktionen nachteilig: Aufgrund der Definition von Flächen als multivariate NURBS (siehe Unterabschnitt 4.2.2) sind diese inhärent durch vier Seiten begrenzt und erlauben keine lokale Verfeinerung. In CAD-Modellen erfolgt daher häufig eine Trimmung von NURBS-Flächen mit Kurven oder Flächen, um beliebig berandete Flächen erzeugen zu können. Eine solche Trimmung erfordert in der numerischen Analyse eine besondere Handhabung. Ihr kann mittels verschiedener Ansätze begegnet werden [5]. Eine lokale Verfeinerung kann durch den Wechsel der Ansatzfunktionen zu beispielsweise T-Splines [4], hierarchical B-Splines [33] oder THB-Splines [36] erreicht werden. Getrimmte Flächen und lokale Verfeinerung in der isogeometrischen Analyse sind aktive Forschungsthemen, auf die hier nicht im Detail eingegangen werden soll. Im Weiteren werden ungetrimmte Flächen und weitgehend uniforme Elementgrößen angenommen.

Frühe Anwendungen des isogeometrischen Konzepts in der BEM sind in [72, 82] beschrieben. Eine detaillierte Übersicht über die isogeometrische BEM kann weiterhin [5] entnommen werden. Vorarbeiten zu dieser Arbeit mit dem Schwerpunkt auf akustischen Fragestellungen finden sich in [6, 43]. Eine erste Anwendung in der EBEM wurde in [84] demonstriert.

### 4.2.1 B-Splines und NURBS

Im Folgenden werden zunächst eindimensionale NURBS-Kurven und ihre Basisfunktionen beschrieben. Eine umfangreiche Beschreibung von NURBS, NURBS-Flächen, Datenformaten und Algorithmen zur effizienten Erstellung, Auswertung und Modifikation von NURBS-Geometrien kann [80] entnommen werden.

Die Grundlage der rationalen NURBS bilden die B-Spline Basisfunktionen. Es handelt sich dabei um stückweise polynomiale Funktionen. Sie werden durch einen Knotenvektor  $\Xi$  und eine Ordnung  $p$  definiert. Der Knotenvektor kann auf einem beliebigen Intervall reeller Zahlen gewählt werden und enthält Einträge in nicht-absteigender Reihenfolge, die

sich jedoch wiederholen können, es gilt also

$$\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{I_\Xi-1}] \quad \text{mit} \quad \xi_i \leq \xi_{i+1}. \quad (4.13)$$

Im Fall sogenannter offener Knotenvektoren, in der englischsprachigen Fachliteratur auch als *open*, *clamped* oder *nonperiodic* bezeichnet, vereinbart man zusätzlich, dass der erste und letzte Eintrag des Knotenvektors je  $p + 1$  mal wiederholt werden. Wiederholen sich Einträge des Knotenvektors, spricht man auch von der Multiplizität  $m$  eines Eintrags, ihre Rolle wird später erläutert. Der erste und letzte Eintrag eines offenen Knotenvektors verfügt also jeweils über die Multiplizität  $m = p + 1$ . Die Ordnung kann somit direkt aus dem Vektor abgelesen und muss nicht mehr explizit definiert werden. In der isogeometrischen Analyse ist die ausschließliche Verwendung offener Knotenvektoren üblich, im Folgenden werden daher alle Knotenvektoren ohne ausdrückliche Benennung als offen vorausgesetzt. Aus dem Knotenvektor  $\Xi$  können die B-Spline Basisfunktionen  $B_i^p(\xi)$  generiert werden. Für  $p = 0$  gilt

$$B_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.14)$$

und für höhere Ordnungen werden die Basisfunktionen rekursiv zu

$$B_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (4.15)$$

bestimmt. Für eine in Gleichung 4.15 möglicherweise auftretende Division durch Null wird der betreffende Term zu Null definiert. Die Anzahl der resultierenden Basisfunktionen ergibt sich zu  $I = I_\Xi - p - 1$ . Die B-Splines und mit ihnen auch die später hieraus abgeleiteten NURBS verfügen über die folgenden charakteristischen Eigenschaften [80]:

- Sie sind nicht-negativ, das heißt es gilt

$$B_i^p(\xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in [\xi_0, \xi_{I_\Xi-1}]. \quad (4.16)$$

- Sie bilden eine Zerlegung der Eins, es gilt also

$$\sum_{i=0}^I B_i^p(\xi) = 1, \quad \forall \xi \in [\xi_0, \xi_{I_\Xi-1}]. \quad (4.17)$$

- Jede Basisfunktion ist nur auf einem lokal begrenzten Intervall ungleich null, es gilt

$$B_i^p(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in [\xi_i, \xi_{i+p+1}) \quad (4.18)$$

- Auf einem Intervall  $[\xi_j, \xi_{j+1})$  sind höchstens  $p + 1$  Basisfunktionen ungleich null, dies sind  $B_{j-p}^p, \dots, B_j^p$ .
- Innerhalb eines Intervalls des Knotenvektors existieren alle Ableitungen einer Basisfunktion, an einem Knoten selbst ist  $B_i^p(\xi)$  genau  $p - m$  mal differenzierbar. Die Multiplizität  $m$  eines Knotens steuert also die Kontinuität der Basisfunktionen.

In Bild 4.5 sind die eindimensionalen B-Spline Basisfunktionen dritter Ordnung für einen willkürlich gewählten Knotenvektor  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4]$  dargestellt.

Entgegen der Lagrange-Polynome verhalten sich B-Splines nicht interpolatorisch. Das heißt, für die einzelnen Basisfunktionen existiert im Allgemeinen keine Stützstelle, an der die einzelne Basisfunktion gleich eins und alle anderen gleich null sind. Diese Eigenschaft spielt bei der Vorgabe von Randwerten gemäß Unterabschnitt 4.2.4 sowie bei der Berücksichtigung des Randfaktors (vergleiche Gleichung 4.10) eine Rolle. Für offene Knotenvektoren resultiert am Anfang und Ende des Parameterraums jedoch eine  $C^{-1}$ -Stetigkeit, das heißt, hier verlaufen die Ansatzfunktionen interpolatorisch und die zugehörigen Steuerpunkte liegen auf der Geometrie. Es ist somit verhältnismäßig einfach möglich,  $C^0$ -Kontinuität über mehrere benachbarte NURBS-Geometrien hinweg sicherzustellen.

Als stückweise Polynome sind B-Splines nicht geeignet, beliebige Geometrien abzubilden. So lassen sich beispielsweise Kegelschnitte mit ihnen nicht exakt darstellen. Sie und ihre höherdimensionalen Pendanten, wie Ellipsoide oder Kugeln, sind gleichermaßen essenzielle

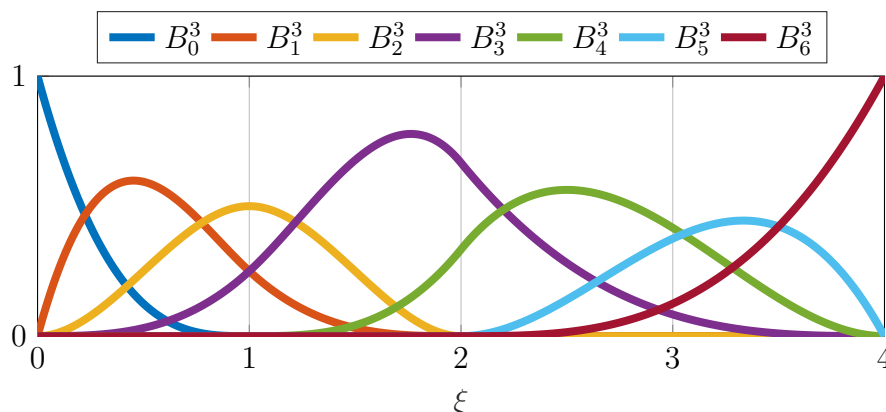


Bild 4.5: B-Splines  $B_i^3$  mit  $p = 3$ ,  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4]$ .

geometrische Elemente. Zur Behebung dieses Defizits werden die NURBS formuliert. Ihre rationalen Basisfunktionen werden mit den neu eingeführten Gewichten  $w_i$  zu

$$R_i^p(\xi) = \frac{B_i^p(\xi) w_i}{\sum_{m=0}^{I-1} B_m^p(\xi) w_m} \quad (4.19)$$

definiert. Sie stellen eine Verallgemeinerung der B-Spline Basisfunktionen dar; werden alle Gewichte zu eins gewählt, gilt  $R_i^p = B_i^p$ . Die Gewichte werden im Weiteren als positiv vorausgesetzt, die zuvor beschriebenen Eigenschaften der B-Spline Basisfunktionen können unter dieser Bedingung auf die NURBS-Basisfunktionen übertragen werden [5].

In Bild 4.6 sind exemplarisch eindimensionale NURBS-Basisfunktionen für den zuvor gewählten Knotenvektor  $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4]$  und die Gewichte  $\mathbf{w} = \frac{1}{10}[10, 10, 7, 3, 10, 1, 5]$  dargestellt. Mit den so definierten NURBS-Basisfunktionen lässt sich schließlich eine NURBS-Kurve  $\mathbf{C}(\xi)$  beliebiger geometrischer Komplexität definieren. Sie ergibt sich mit den Steuerpunkten  $\mathbf{c}_i$  zu

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^{I-1} R_i^p(\xi) \mathbf{c}_i. \quad (4.20)$$

In Bild 4.7 ist eine solche Kurve mit den zuvor definierten Basisfunktionen und den im Bild dargestellten Steuerpunkten gezeigt. Es ist zudem das in CAD-Anwendung häufig genutzte Steuerpolygon als lineare Interpolation zwischen den Steuerpunkten dargestellt.

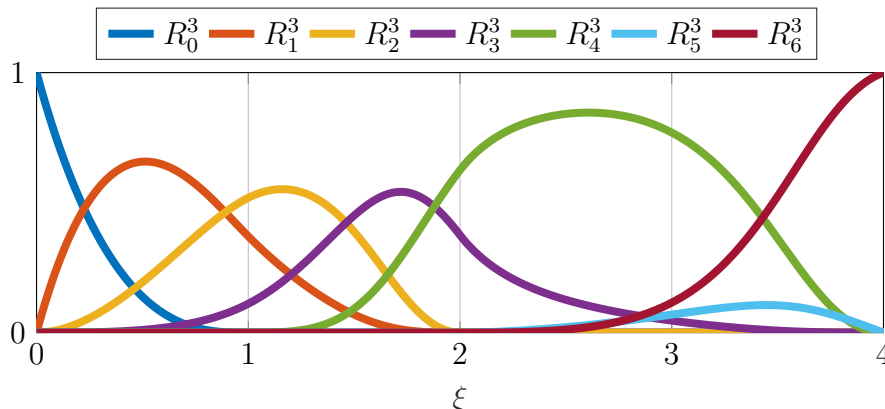


Bild 4.6: Eindimensionale NURBS-Basisfunktionen  $R_i^3$  mit den B-Splines aus Bild 4.5 und  $\mathbf{w} = \frac{1}{10}[10, 10, 7, 3, 10, 1, 5]$ .

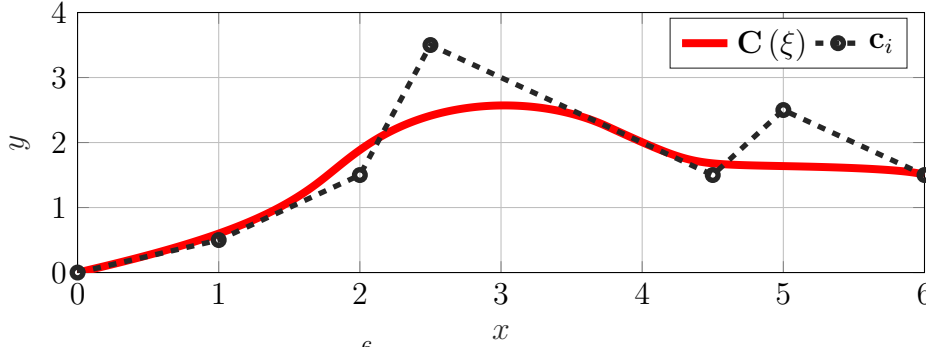


Bild 4.7: NURBS-Kurve  $\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=0}^6 R_i^3 \mathbf{c}_i$  mit den Basisfunktionen aus Bild 4.6 sowie die Steuerpunkte  $\mathbf{c}_i$  mit dem interpolierenden Steuerpolygon.

## 4.2.2 NURBS-Flächen

Eine NURBS-Fläche wird auch als Patch bezeichnet und als bivariate Funktionen der Form

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) \mathbf{c}_{ij} \quad (4.21)$$

ausgedrückt. Dabei bezeichnet  $\mathbf{c}_{ij}$  die Koordinaten der assoziierten Steuerungspunkte und  $R_{ij}^{pq}$  die bivariaten NURBS-Basisfunktionen, die wie folgt definiert sind:

$$R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) = \frac{B_i^p(\xi) B_j^q(\eta) w_{ij}}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} B_m^p(\xi) B_n^q(\eta) w_{mn}}. \quad (4.22)$$

Lassen sich die Gewichte als  $w_{ij} = w_i w_j$  ausdrücken, handelt es sich bei Gleichung 4.22 gleichzeitig um das Tensorprodukt der eindimensionalen Basisfunktionen  $R_i(\xi)$  und  $R_j(\eta)$ . Die hier gemachte Generalisierung hat jedoch in der Praxis keinen Einfluss auf die Eigenschaften einer solchen Fläche [5]. Ein Patch ist somit auf einem viereckigen Parameterraum definiert, der durch die Knotenvektoren  $\Xi$  und  $\mathbf{H}$  aufgespannt wird.

Ein einzelnes Patch kann eine komplexe Geometrie darstellen und deckt somit häufig gegenüber einem einzelnen Lagrange-Element sehr viel größere Bereiche eines CAD-Modells ab. Die Auswertung der Normalen sowie der Funktionaldeterminante erfolgt analog zu Gleichung 4.5 und 4.6, die erste partielle Ableitung der Ansatzfunktion nach der Parameterrichtung  $\xi$  ergibt sich dabei zu

$$\frac{\partial R_{ij}^{pq}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{w(\xi, \eta)} \left( \frac{\partial B_i^p(\xi)}{\partial \xi} B_j^q(\eta) w_{ij} - \frac{\partial w(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{B_i^p(\xi) B_j^q(\eta) w_{ij}}{w(\xi, \eta)} \right) \quad (4.23)$$

mit

$$w(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} B_m^p(\xi) B_n^q(\eta) w_{mn} \quad (4.24)$$

und

$$\frac{\partial B_i^p(\xi)}{\partial \xi} = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_i^{p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(\xi). \quad (4.25)$$

Die partielle Ableitung nach  $\eta$  erfolgt analog dazu. Die Berechnung höherer Ableitung ist in [80] beschrieben. Aufgrund der rekursiven Definition der Basisfunktionen bietet es sich bei der Implementierung der Berechnung zudem an, die Funktion und ihre Ableitungen gleichzeitig auszuwerten, um unnötige Mehrfachauswertungen zu vermeiden.

Die Darstellung von dreiseitig berandeten Flächen ist durch das Kollabieren einer Kante der vierseitigen Fläche möglich, indem die zugehörigen Steuerpunkte auf die selbe Koordinate gelegt werden (vergleiche Bild 4.3). Abhängig davon, welche Seite kollabiert worden ist, ergibt sich in diesem Fall für die betreffende Seite entweder  $\left| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right| = 0$  oder  $\left| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right| = 0$ , das heißt, die Funktionaldeterminante wird in diesem Punkt singulär. Durch die Verwendung der diskontinuierlichen Formulierung und die entsprechende, in Unterabschnitt 4.2.4 beschriebene, Platzierung der Kollokationspunkte erfolgt keine Auswertung der Ableitungen direkt im singulären Punkt, dennoch muss sie bei der numerischen Integration gesondert berücksichtigt werden [101]. In Kapitel 5 wird dieser Umstand ausführlicher dargestellt.

### 4.2.3 NURBS-Ansatzfunktionen in der BEM

Die NURBS-basierten CAD-Modelle sind so gestaltet, dass sie die Geometrie bestmöglich und mittels einer möglichst einfachen Beschreibung abbilden. Eine Geometrie kann zudem nicht nur durch eine einzige Form der mathematischen Beschreibung ausgedrückt werden. Zudem sind zur numerischen Analyse nicht alle mathematischen Formulierung gleichermaßen gut geeignet. Idealerweise wird dies bereits bei der Erstellung der CAD-Geometrie berücksichtigt. In [22] finden sich einige Hinweise und Richtlinien zur Modellierung von Geometrien für die spätere Verwendung in einer isogeometrischen FEM. Durch den Entfall der Volumenvernetzung ist die isogeometrische BEM in dieser Hinsicht etwas unkritischer, dennoch ist die möglichst einfache Erstellung effizienter numerischer Modelle aus den vorliegenden CAD-Geometrien ein Faktor, der mittelfristig mit darüber entscheiden wird, ob sich die isogeometrische Analyse in der Breite durchsetzen kann. Es muss betont werden, dass die Ableitung von geeigneten Diskretisierungen zur numerischen Analyse aus den CAD-Daten zwar stark vereinfacht werden kann, der

Schritt der Modellaufbereitung aber nicht komplett entfällt. Derzeit ist hierfür aufgrund der mangelnden Verfügbarkeit entsprechend ausgereifter Werkzeuge ein verhältnismäßig hoher manueller Aufwand zur Aufbereitung der Modelle erforderlich (vergleiche auch [105]).

Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Modelle in einer Form vorliegen, die grundsätzlich zur numerischen Analyse geeignet ist. Das heißt, die Oberflächengeometrie liegt ausschließlich in Form disjunkter drei- oder vierseitig berandeter, ungetrimmter Patches nach Unterabschnitt 4.2.2 vor. Weiterhin wird im Allgemeinen vorausgesetzt, dass innerhalb eines Patches nur Knotenmultiplizitäten  $m < p$  auftreten, ein Patch also geometrisch keine Knicke aufweist. Ein Grund hierfür ist, dass die genutzte diskontinuierliche Formulierung sich auf glatte Ränder stützt. Weiterhin können an solchen Stellen Diskontinuitäten in der Lösung erwartet werden, welche durch eine Aufteilung in mehrere Patches besser abgebildet werden als durch den  $C^0$ -stetigen Verlauf der Basisfunktionen innerhalb eines einzelnen Patches.

Es wird zudem die Unterteilung eines Patches in die Teilstücke  $[\xi_i, \xi_{i+1}) \times [\eta_j, \eta_{j+1})$  betrachtet, die durch die Intervalle  $[\xi_i, \xi_{i+1})$  des Knotenvektors  $\Xi$  und  $[\eta_j, \eta_{j+1})$  des Knotenvektors  $\mathbf{H}$ , welche größer als Null sind, aufgespannt wird. Diese Teilstücke werden in Analogie zur herkömmlichen polynomialen Diskretisierung als Elemente bezeichnet [5]. Sie werden, wie in Kapitel 5 beschrieben, als primäre Integrationsgebiete für die numerische Integration genutzt. Um eine effiziente numerische Analyse zu ermöglichen, sollten die einzelnen Patches bei gleicher Ordnung in ähnlich große Elemente unterteilt sein und die Elemente ein Seitenverhältnis aufweisen, das möglichst nah an Eins liegt.

Auch bei Vorliegen eines so aufbereiteten Modells ist jedoch nicht sichergestellt, dass die Basisfunktionen geeignet sind, den Verlauf der Randwerte hinreichend genau zu approximieren. Sie verfügen häufig nicht über ausreichend viele Freiheitsgrade, um den physikalisch korrekten Verlauf der Randwerte abbilden zu können. Daher ist im Allgemeinen eine Verfeinerung der Patches erforderlich. Der Funktionsraum kann hierzu durch das Hinzufügen von Knoten in den Knotenvektoren angereichert werden, wobei bei geeigneter Wahl der zugehörigen Steuerpunkte und Gewichte die Geometrie selbst nicht verändert wird. In der Tat stellt das Ausgangsmodell bereits eine exakte Repräsentation der Geometrie dar, so dass es naheliegend ist, die vorliegenden Ansatzfunktionen für die geometrischen Operationen beizubehalten und die im Folgenden vorgestellten Verfeinerungen nur auf die Interpolation der Randwerte anzuwenden. Strenggenom-

men ist in diesem Fall der Begriff der isogeometrische Analyse nicht mehr zutreffend, da eben nicht derselbe Satz von Ansatzfunktionen für die Geometrie und die Randwerte verwendet wird, praktisch besteht aber kein Einfluss auf die Berechnungsergebnisse.

Zur Verfeinerung der NURBS-Basisfunktionen eines Patches stehen drei Strategien zur Verfügung: Die  $h$ - und  $p$ -Verfeinerung beschreiben das Hinzufügen von Elementen respektive die Erhöhung der Ordnung. Sie finden jeweils eine direkt übertragbare Entsprechung bei der Verwendung von Lagrange-Elementen. Die  $h$ -Verfeinerung wird dabei umgesetzt, indem zwischen den bestehenden Elementgrenzen in den Knotenvektoren  $\Xi$  beziehungsweise  $\mathbf{H}$  neue Einträge hinzugefügt werden. Für die  $p$ -Verfeinerung hingegen wird für alle Einträge des Knotenvektors die Multiplizität erhöht.

Das dritte Verfahren, die  $k$ -Verfeinerung, ist einzigartig für B-Splines beziehungsweise die davon abgeleiteten NURBS. Sie stellt ein Verfahren dar, das eine Anreicherung des Funktionsraumes bei höchstmöglicher Stetigkeit der Basisfunktionen garantiert. Sie wird durch eine Anhebung der Ordnung und Einfügen von Knoten in einem zweiten Schritt erreicht. Die Reihenfolge dieser Operation ist nicht beliebig, wie sich anhand nachfolgender Überlegung schnell erkennen lässt [47]:

Ein in den Knotenvektor der Ordnung  $p$  neu eingefügter Knoten der Multiplizität Eins, wie er bei der  $h$ -Verfeinerung vorliegt, hat an der Stelle des Knotens eine  $C^{p-1}$ -Stetigkeit zur Folge. Wird nun im zweiten Schritt die Ordnung auf  $q$  erhöht, wird auch die Multiplizität des neu eingefügten Knotens erhöht, und die Funktion ist an der Stelle des Knotens nach wie vor  $C^{p-1}$ -stetig. Wird die Ordnung des Knotenvektors jedoch zuerst auf  $q$  erhöht und dann eine  $h$ -Verfeinerung durchgeführt, liegt an der Stelle des neu eingefügten Knotens eine  $C^{q-1}$ -Stetigkeit vor. Die  $k$ -Verfeinerung stellt nach [5] ein besonders effizientes und stabiles Verfahren dar.

Um bei der Verfeinerung eines NURBS-Patches den ursprünglichen Verlauf zu erhalten, müssen die zu den hinzugefügten Basisfunktionen gehörigen Steuerpunkte und -gewichte korrekt bestimmt werden. Da bei dem hier genutzten Ansatz die Geometriefunktion nicht verfeinert wird und die Randwerte zum Zeitpunkt der Verfeinerung ohnehin unbekannt sind, trifft dies für die Ansatzfunktionen zur Randwertinterpolation nur auf die Gewichte zu. Die Algorithmen hierzu sind in [80] sowohl für die  $h$ -Verfeinerung (*knot insertion*) als auch die  $p$ -Verfeinerung (*degree elevation*) detailliert beschrieben.

Wie zu Beginn von Abschnitt 4.2 aufgezeigt, stellen lokale Verfeinerungen auf NURBS-Patches ein Problem dar. In Bild 4.8 ist links ein aus einem einzelnen Element bestehendes Patch im Parameterraum dargestellt. Wird nun eine lokale  $h$ -Verfeinerung im grau markierten Bereich angestrebt, ist dies nur möglich, wenn in beiden Knotenvektoren entsprechende Einträge hinzugefügt werden. Gleichzeitig entstehen hierdurch aber neue Elemente außerhalb des eingefärbten Bereichs, wie im Bild rechts dargestellt, die zudem mit hoher Wahrscheinlichkeit über ein ungünstiges Seitenverhältnis verfügen. Eine einfache Möglichkeit das Problem zu umgehen ist in Bild 4.9 dargestellt. Dabei wird der betreffende Bereich isoliert, indem das Patch in neun einzelne Patches unterteilt wird und diese unabhängig voneinander so verfeinert werden, dass die resultierenden Elemente ein günstiges Seitenverhältnis aufweisen. Die resultierende Diskretisierung ist offensichtlich weniger effizient als eine echte lokale Verfeinerung, wie sie mit alternativen Ansatzfunktionen möglich ist, aber günstiger als eine globale Verfeinerung des gesamten Ursprungspatches auf die gewünschte Elementgröße.

In vielen Implementierungen der isogeometrischen Analyse findet zudem die sogenannte Bézier-Extraktion [5, 12, 43] Anwendung. Dabei wird das Patch in Bézier-Elemente zerlegt, deren Knotenvektoren nicht über innere Knoten verfügen. Die Ansatzfunktionen können in diesem Fall als Bernstein-Polynome ausgedrückt werden. Auf diese Weise ist eine sehr einfache Integration der Bézier-Elemente in bestehende BEM-Codes möglich, da sie sich prinzipiell wie Lagrange-Elemente verhalten. Im Gegensatz zum NURBS-Patch lässt sich nun aber die Stetigkeit über die Elementgrenzen hinweg nicht mehr steuern, die Option der  $k$ -Verfeinerung geht verloren und die Zahl der Freiheitsgrade steigt deutlich

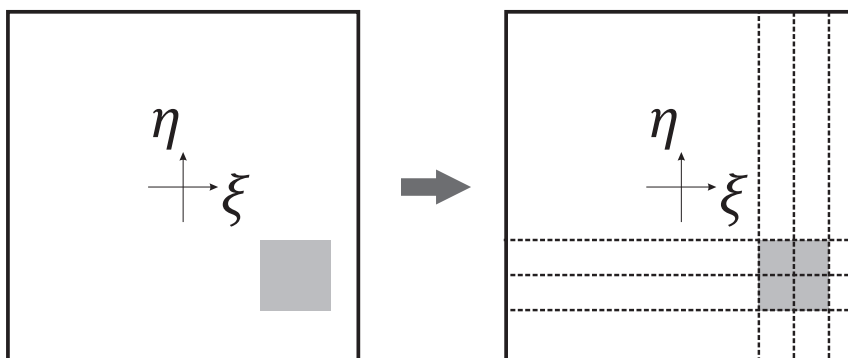


Bild 4.8: Entstehung unerwünschter Elemente bei lokaler Verfeinerung auf einem NURBS-Patch.

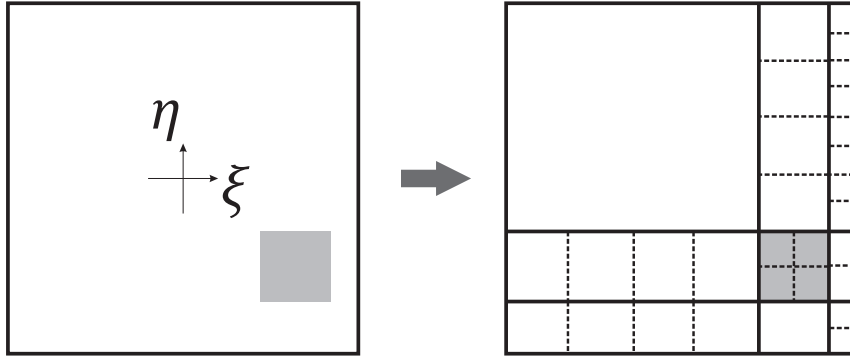


Bild 4.9: Pseudo-lokale Verfeinerung auf durch Unterteilung des Ursprungspatches in neun Patches und deren unabhängige Verfeinerung.

an. Die einfache Implementierung geht somit zu Lasten vieler der aus numerischer Sicht besonders bestehenden Eigenschaften der NURBS. Der Ansatz wird aus diesem Grund nicht weiter verfolgt.

#### 4.2.4 Definition von Kollokationspunkten und Vorgabe von Randwerten

Zum Aufstellen des Gleichungssystems kommt wie in Unterabschnitt 4.1.3 beschrieben die Kollokationsmethode zum Einsatz. Für die Lagrange-Elemente lag die Wahl der Kollokationspunkte mit den interpolatorischen Stützpunkten der Ansatzfunktionen nahe, für die NURBS-Basisfunktionen ist die Wahl weniger offensichtlich. In Anlehnung an [6, 101] werden hier die 2-Ring Kollokationspunkte gewählt. Sie stimmen mit der Greville-Abszisse [96] weitgehend überein, an den Patch-Rändern werden die Kollokationspunkte im Sinne der diskontinuierlichen Formulierung jedoch ins Patch hinein verschoben. Für eine eindimensionale NURBS-Ansatzfunktion  $R_i^p(\xi)$  mit  $a \leq \xi \leq b$  und einem Knotenvektor der Länge  $I_\Xi$  wird die parametrische Koordinate  $\tilde{\xi}_i$  des Kollokationspunkts zu

$$\tilde{\xi}_i = \begin{cases} a + \frac{\xi_{p+2}-a}{p+2} & \text{für } i = 0 \\ \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \xi_{i+j} & \text{für } i = 1, \dots, I_\Xi - p - 3 \\ b - \frac{b-\xi_{I_\Xi-p-1}}{p+2} & \text{für } i = I_\Xi - p - 2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Für zweidimensionale Ansatzfunktionen wird mit der zweiten Parameterkoordinate analog verfahren, so dass sich die parametrischen Koordinaten der Kollokationspunkte

zu  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{ij} = (\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_j)$  ergeben.

Da sich die NURBS-Basisfunktionen nicht interpolatorisch verhalten, muss anders als bei den Lagrange-Elementen zur Vorgabe der für die Kollokationspunkte bekannten Randwerte  $f_{\Gamma ij} = f_{\Gamma}(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_j)$  ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, um die den Basisfunktionen zugeordneten Koeffizienten  $c_{ij}$  zu bestimmen. Das nach dem Vektor  $\mathbf{c}$  zu lösende Gleichungssystem lautet [5]

$$\mathbf{R}\mathbf{c} = \mathbf{f}_{\Gamma} \quad (4.27)$$

mit

$$R_{ij,kl} = R_{ij}^{pq}(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_l). \quad (4.28)$$

Der numerische Aufwand sowie ein möglicher hieraus resultierender Fehler sind typischerweise vernachlässigbar.

### 4.3 Lösung des Gleichungssystems

Ist die Diskretisierung mit Lagrange-Polynomen oder NURBS erfolgt und wurden alle Matrixkoeffizienten berechnet sowie die bekannten Randwerte in die Gleichung eingebracht, ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem 2.28. Zur Lösung eines solchen linearen Gleichungssystems stehen eine Vielzahl verschiedener Verfahren zur Verfügung. Welche Verfahren anwendbar und effizient sind, hängt wesentlich von der Gestalt der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  ab. Sie ist im Fall der EBEM reellwertig, vollbesetzt und im Allgemeinen nicht symmetrisch. Naheliegend ist eine direkte Lösung mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens beziehungsweise einer LU-Zerlegung der Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Für große Systeme wird die direkte Lösung mit der Komplexität  $\mathcal{O}(n^3)$  jedoch zu aufwendig, so dass iterative Löser eingesetzt werden. Wird zudem die in Kapitel 6 beschriebene Fast-Multipole-Methode angewandt, liegt die Systemmatrix nicht mehr explizit vor, stattdessen wird das Matrix-Vektor-Produkt  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$  approximiert. In diesem Fall ist die Verwendung eines iterativen Löser unerlässlich.

Ein robustes und zugleich performantes iteratives Lösungsverfahren ist *Generalized Minimal Residual* (GMRES) nach [89]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit kommen sowohl die direkte Lösung mittels LU-Zerlegung als auch GMRES in Form der Implementierung

in der Programmbibliothek PETSc [3] zum Einsatz. Eine umfassende Untersuchung verschiedener iterativer Lösungsverfahren in Kombination mit der Fast-Multipole-Methode kann darüber hinaus [52] entnommen werden.

## 4.4 Ergebnisse

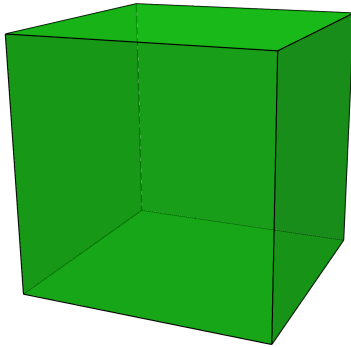
Die entwickelte isogeometrische EBEM soll im Folgenden verifiziert und grundlegende Eigenschaften aufgezeigt werden. Es werden zwei Geometrien betrachtet, ein Würfel und eine Kugel. Dabei werden die Randbedingungen jeweils äquivalent zu einer ins Freifeld abstrahlenden Monopolquelle gewählt. Für diesen Fall ist die analytische Lösung bekannt, so dass die  $L_2$ -Norm des Fehlers für die numerische Lösung berechnet werden kann. Für die Vorgabe von Neumann-Randbedingung ergibt sich mit der numerischen Lösung für die Energiedichte  $w_{\text{num}}$  und deren analytischer Lösung  $w_{\text{ana}}$

$$\varepsilon_D = \sqrt{\frac{\int_{\Gamma} (w_{\text{num}}(\Gamma) - w_{\text{ana}}(\Gamma))^2 \, d\Gamma}{\int_{\Gamma} (w_{\text{ana}}(\Gamma))^2 \, d\Gamma}}. \quad (4.29)$$

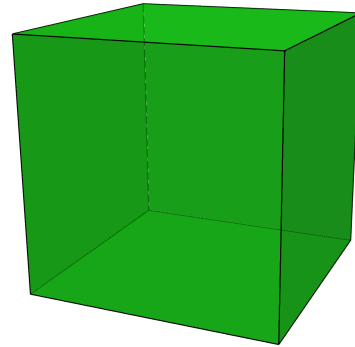
Die Integration in Gleichung 4.29 wird numerisch mit einer elementweisen Gauß-Quadratur der Ordnung 20 ausgeführt (vergleiche Kapitel 5).

Es wird zunächst der Würfel betrachtet. Für diesen ist eine exakte geometrische Repräsentation sowohl mit NURBS als auch mit Lagrange-Elementen möglich. Gelingt es, den Integrationsfehler klein zu halten, wird der Gesamtfehler durch den Diskretisierungsfehler dominiert. Das Beispiel eignet sich daher besonders gut für eine Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Verfeinerungsverfahren im Vergleich mit den Lagrange-Elementen. Die Ausgangsdiskretisierungen der jeweils größten und geometrisch identischen Netze sind in Bild 4.10 dargestellt. Die Kantenlänge beträgt  $a = 1$  m und die darzustellende Monopolquelle wird im Mittelpunkt des Würfels angenommen. Die Frequenz wird zu  $f = 1000$  Hz, die Dichte zu  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, die Schallgeschwindigkeit zu  $c = 1480$  m/s und der Dämpfungskoeffizient zu  $\eta = 1 \cdot 10^{-4}$  gewählt.

Ausgehend von den linearen Ansatzfunktionen werden für beide Ansatzfunktionstypen  $p$ -Verfeinerungen bis zur 11. Ordnung und  $h$ -Verfeinerung durch uniforme Teilung der Elemente durchgeführt. Für die Lagrange-Elemente werden bis zu vier Teilungen durchgeführt, so dass das feinste untersuchte Netz aus 1536 linearen Elementen mit insgesamt 6144 Freiheitsgraden besteht. Für die NURBS-Diskretisierung entstehen durch das Hinzufügen von Knoten mit der Multiplizität Eins bei der  $h$ -Verfeinerung in jedem



(a) NURBS-Diskretisierung des Würfels mit 6 Patches 1. Ordnung und je einem Element



(b) Lagrange-Diskretisierung des Würfels mit 6 linearen Elementen

Bild 4.10: Größte Ausgangsdiskretisierungen des Würfels.

Schritt weniger neue Freiheitsgrade, so dass bis zu fünf Teilungen mit 6144 Elementen und 6534 Freiheitsgraden untersucht werden. Für die NURBS-Diskretisierung wird zudem eine  $k$ -Verfeinerung mit bis zu dreifacher Anhebung der Ordnung und dreifacher Teilung untersucht, welche in 864 Freiheitsgrade resultiert. Um den Integrationsfehler möglichst gering zu halten, werden für alle untersuchten Diskretisierungen sehr hohe Integrationsordnungen von  $[g_n, g_m, g_f] = [40, 10, 4]$  gewählt. Dabei bezeichnet  $g_n$  die Ordnung für die singuläre Integration und Elemente im Nahbereich mit einem auf die Elementgröße normierten Abstand unter zwei,  $g_m$  die Ordnung für Elemente mittlerer Entfernung unter vier und  $g_f$  die Ordnung für weiter entfernte Elemente. Für Elemente mit einem normierten Abstand unter 0,5 werden zudem Routinen für die quasi-singuläre Integration eingesetzt. Die verwendeten Integrationsroutinen werden in Kapitel 5 ausführlich beschrieben.

In Bild 4.11 ist der nach Gleichung 4.29 resultierende Fehler für die unterschiedlichen Verfeinerungsstrategien für beide Netze über der Zahl der Freiheitsgrade dargestellt. Es fällt zunächst auf, dass für die Lagrange-Diskretisierung bereits der Fehler der Ausgangsdiskretisierung  $\varepsilon_{0,M}$  geringer ausfällt als für die NURBS-Diskretisierung. Dies ist insofern überraschend, als die NURBS-Basisfunktionen in diesem speziellen Fall, in dem die Patches nicht über innere Knoten verfügen und alle Gewichte der Koeffizienten mit eins vorgegeben wurden, genau wie die Lagrange-Polynome eine polynomiale Basis darstellen und beide die gleiche Ordnung haben. Da auch die gleichen Integrationsverfahren angewandt werden, kann nur vermutet werden, dass die Abweichung aus der Platzierung der Kollokationspunkte resultiert. Zur besseren Vergleichbarkeit sind in Bild 4.12 die Feh-

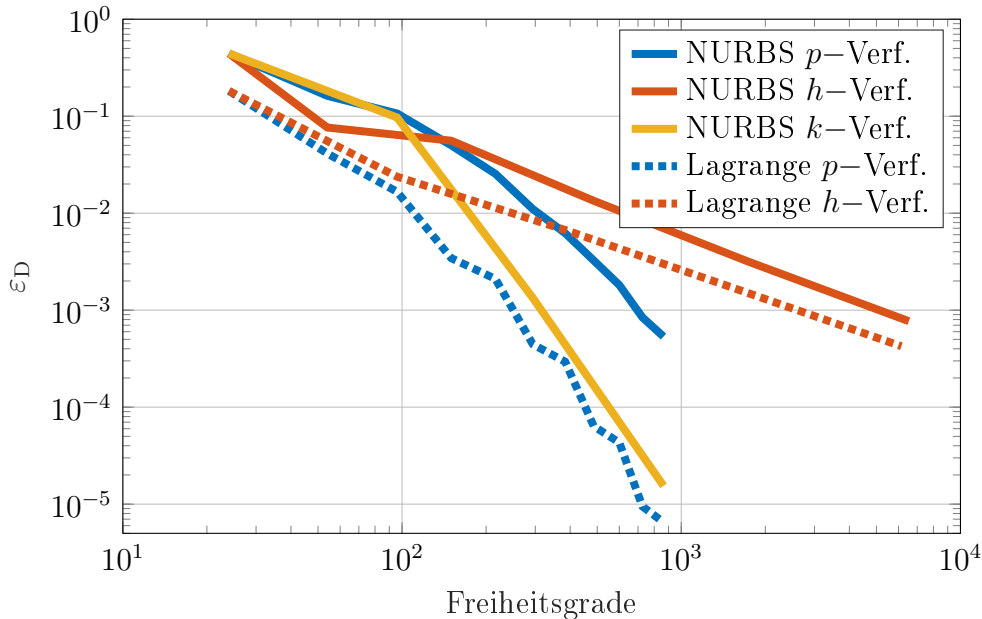


Bild 4.11: Dirichlet-Fehler  $\varepsilon_D$  über Zahl der Freiheitsgrade für verschiedene Verfeinerungsstrategien am Beispiel des Würfels.

ler mit dem jeweiligen Fehler der Ausgangsdiskretisierung normiert dargestellt. Es wird deutlich, dass die  $h$ -Verfeinerung für beide Diskretisierungen ähnliche Konvergenzraten aufweist. Ein etwaiger Vorteil zugunsten der NURBS kann in der höheren Stetigkeit über die Elementgrenzen hinweg begründet werden. Die  $p$ -Verfeinerung konvergiert für den untersuchten Fall offenbar schneller bei Nutzung der Lagrange-Elemente als für die NURBS-Diskretisierung, während die  $k$ -Verfeinerung eine ähnliche Konvergenzrate aufweist.

Es ist anzumerken, dass die Anzahl der Freiheitsgrade eines Modells zwar durchaus indikativ für den Berechnungsaufwand ist, die Berechnungsdauer aber nicht allein durch die Zahl der Freiheitsgrade definiert wird. Ein Vergleich von Berechnungszeiten ist grundsätzlich nur unter Vorbehalt möglich, da sie nicht nur durch das verwendete Verfahren sondern auch erheblich durch die Effizienz der Implementierung, den konkreten Fall und die Parametrisierung des numerischen Modells beeinflusst werden. Im vorliegenden Fall wurden bewusst sehr hohe Integrationsordnungen gewählt, um den Integrationsfehler für alle Diskretisierungen gering zu halten. Für Diskretisierungen mit niedrigen Ordnungen und großen Elementen führen die hohen Integrationsordnung nur zu unwesentlicher Steigerung der Genauigkeit, beeinflussen aber dennoch die Berechnungszeit stark. Da die Berechnungsdauer für die praktische Nutzung eines Verfahren aber ein wesentlicher Aspekt ist, ist trotz der eingeschränkten Aussagekraft in Bild 4.13 der Dirichlet-Fehler über der Berechnungszeit dargestellt. Die Darstellung ist auf die Verfahren beschränkt,

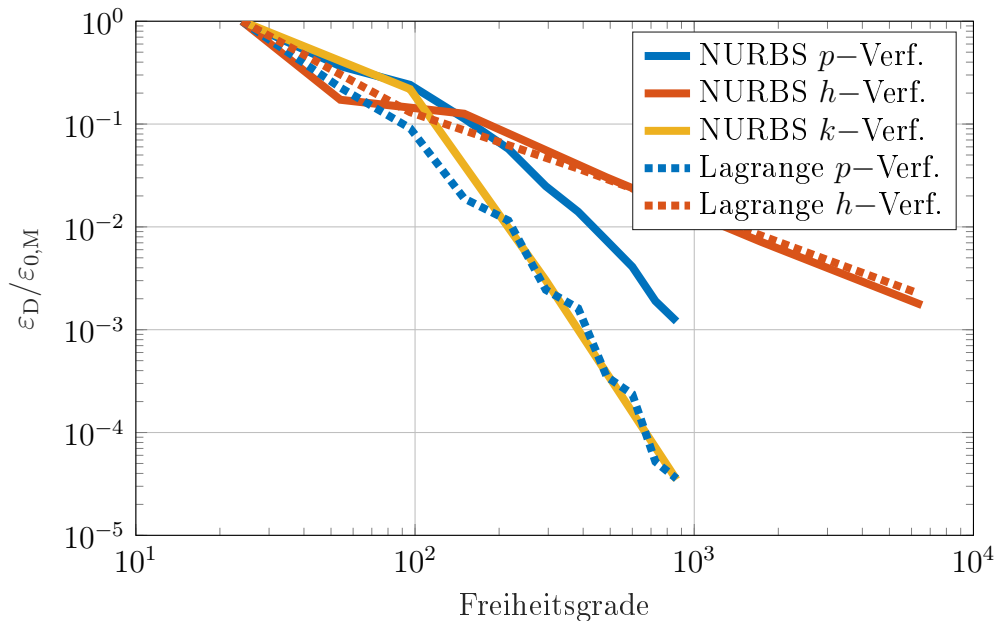


Bild 4.12: Normierter Dirichlet-Fehler  $\varepsilon_D/\varepsilon_{0,M}$  über Zahl der Freiheitsgrade für verschiedene Verfeinerungsstrategien am Beispiel des Würfels.

die mit einer Anhebung der Ordnung einhergehen, da die Elementordnung und -größe den Integrationsfehler unterschiedlich beeinflussen. Dabei hat die Elementordnung den stärkeren Einfluss [90]. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass sich die zuvor beschriebene Verzerrung durch die teilweise erfolgte Überintegration auf die dargestellten Verfahren in etwa gleichermaßen auswirkt.

Die Fehler der  $p$ -Verfeinerung zeigen unter Berücksichtigung der Berechnungszeit für die NURBS- und die Lagrange-Diskretisierung sehr ähnliche Verläufe. Es gibt jedoch keinen offensichtlichen Grund, aus dem bei den vorliegenden weitgehend äquivalenten Diskretisierungen und gleich parametrisierter Integration die Berechnung von Lagrange-Elementen zeitaufwändiger ist, als die von NURBS-Elementen. Es muss daher angenommen werden, dass die höhere Effizienz der NURBS in diesem Fall der Implementierung geschuldet ist. Zugleich wird deutlich, dass die  $k$ -Verfeinerung trotz vergleichbarer Anzahl an Freiheitsgraden mit deutlich kürzeren Berechnungszeiten als die  $p$ -Verfeinerung von NURBS einhergeht. Es kann davon ausgegangen werden, dass dies in einer effizienteren Integration begründet ist. Wie in Unterabschnitt 4.2.1 beschrieben ist, nehmen bei einer Unterteilung des Patches in mehrere Elemente nicht zwangsläufig alle Ansatzfunktionen überall auf dem Patch Werte größer Null an und müssen daher auch nicht auf dem gesamten Bereich integriert werden. Dieser Umstand und das in Kapitel 5 beschriebene Verfahren zur

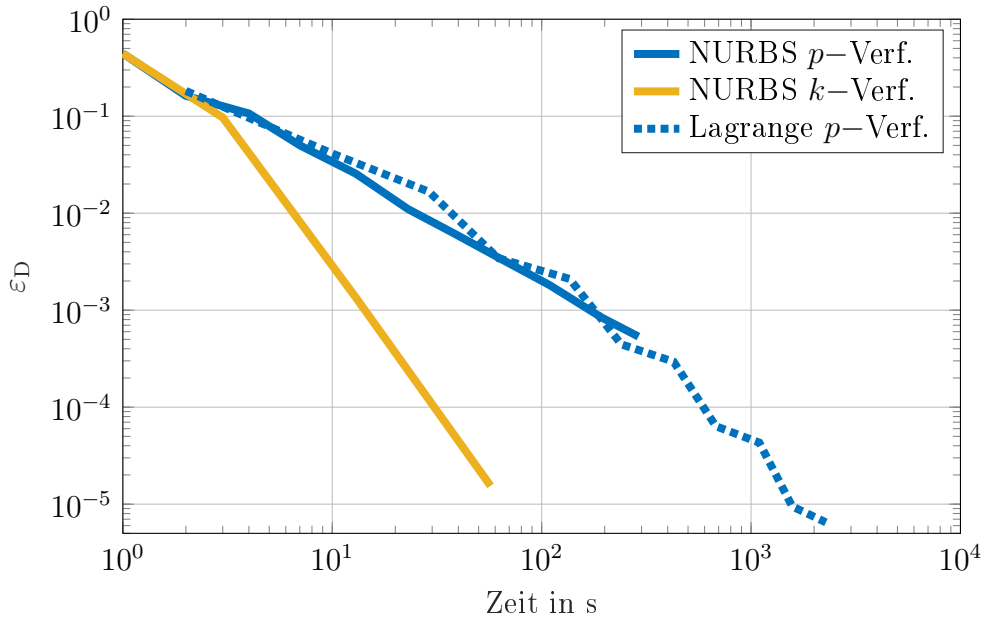
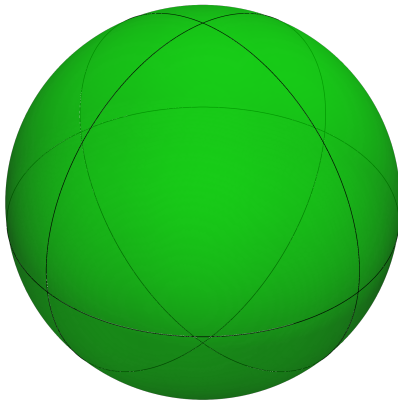


Bild 4.13: Dirichlet-Fehler  $\epsilon_D$  über Berechnungszeit für ausgewählte Verfeinerungsstrategien am Beispiel des Würfels.

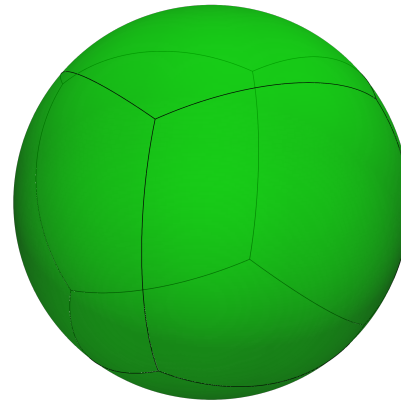
quasi-singulären Integration auf NURBS-Patches tragen hier zur Beschleunigung bei.

Als zweite Geometrie wird eine Kugel mit den in Bild 4.14 dargestellten Diskretisierungen untersucht. Der Durchmesser der Kugel beträgt  $D = 1$  m und die Randbedingungen sind erneut äquivalent zu einer Monopolquelle im Mittelpunkt gewählt. Die zuvor beschriebenen Parameter des umgebenden Fluids werden beibehalten. Die analytische Lösung des Randwertproblems ist nun auf der gesamten Kugeloberfläche theoretisch konstant. Bei der Diskretisierung mittels Lagrange-Elementen kommt es jedoch unweigerlich zu Geometriefehlern. Wird der analytischen Lösung die diskretisierte Oberfläche zugrunde gelegt, ist sie demnach auch nicht mehr konstant. Mittels NURBS lässt sich die Kugeloberfläche hingegen exakt darstellen, somit werden für diesen Fall sowohl der Geometrie- als auch der Diskretisierungsfehler vollständig eliminiert und der verbleibende Fehler wird im Wesentlichen durch die Integration getrieben.

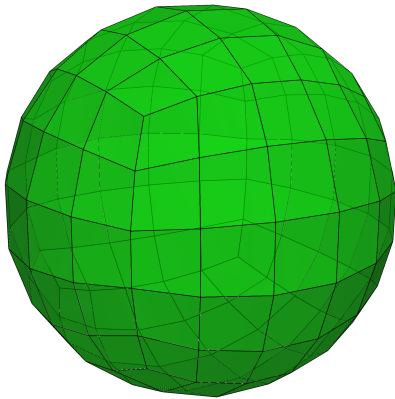
Es werden insgesamt vier verschiedene Diskretisierungen betrachtet. Dies sind zwei unterschiedliche aber geometrisch identische NURBS-Diskretisierungen [105], von denen eine aus acht Patches zweiter Ordnung (Bild 4.14(a)) und die andere aus sechs Patches vierter Ordnung (Bild 4.14(b)) besteht. Bei den Patches der in Bild 4.14(a) dargestellten Diskretisierung handelt es sich zudem um dreiseitig berandete Patches, wie sie in Unterabschnitt 4.2.2 beschrieben sind. An den Polen der Kugel entstehen hierdurch die beschriebenen Singularitäten der Funktionaldeterminante. Die Geometriebeschreibung basiert in die-



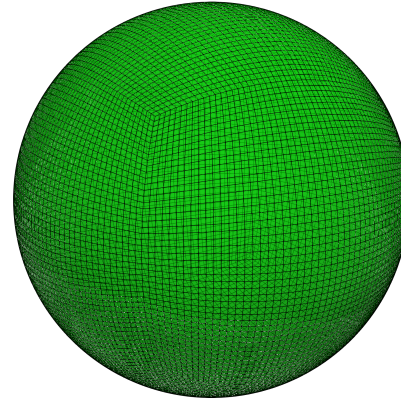
(a) NURBS-Diskretisierung der Kugel mit 8 Patches 2. Ordnung und je einem Element (72 Fhg.)



(b) NURBS-Diskretisierung der Kugel mit 6 Patches 4. Ordnung und je einem Element (150 Fhg.)



(c) Lagrange-Diskretisierung der Kugel 150 linearen Elementen



(d) Lagrange-Diskretisierungen der Kugel 14406 linearen Elementen

Bild 4.14: Verschiedene Diskretisierungen der Kugel.

sem Fall auf 72 Basisfunktionen, und ebenso viele Freiheitsgrade hat das numerische Modell ohne weitere Verfeinerungen. Die zweite NURBS-Diskretisierung beruht ausschließlich auf vierseitig berandeten Patches, aufgrund der höheren Ordnung sind in diesem Fall, trotz geringerer Anzahl an Patches, deutlich mehr Basisfunktionen zur Geometriebeschreibung erforderlich, so dass sich für das unverfeinerte Modell 150 Freiheitsgrade ergeben. Die in Bild 4.14(c) und Bild 4.14(d) dargestellten Lagrange-Netze sind durch uniforme Teilung und Erzeugung bilinearer Lagrange-Elemente direkt aus der NURBS-Diskretisierung Bild 4.14(b) abgeleitet worden. Sie bestehen aus 150 beziehungsweise 14406 Elementen und können die Ausgangsgeometrie aufgrund der linearen Interpolation nur approximieren. In den nachfolgenden numerischen Analysen werden zur Randwertbeschreibung für die Lagrange-Diskretisierung zudem konstante Ansatzfunktionen genutzt. Im Gegensatz zur vorherigen Untersuchung wird nun die jeweilige Ausgangsdiskretisierung beibehal-

ten und das Konvergenzverhalten bei Erhöhung der Integrationsordnung betrachtet. In Bild 4.15 ist der resultierende Dirichlet-Fehler über der Integrationsordnung dargestellt.

Es zeigt sich, dass sich der Fehler für die grobe Lagrange-Diskretisierung nahezu unabhängig von der Integrationsordnung verhält. Dies ist offensichtlich deshalb der Fall, weil der Fehler durch den Geometriefehler dominiert wird. Eine Verfeinerung des Netzes, wie sie durch die Lagrange-Diskretisierung mit 14406 Elementen gegeben ist, ermöglicht eine deutliche Reduktion des Fehlers, die Konvergenz mit der Integrationsordnung ist aber dennoch verhältnismäßig langsam. Bereits die NURBS-Diskretisierung mit nur 72 Freiheitsgraden erreicht demgegenüber deutlich reduzierte Fehler, während die NURBS-Diskretisierung mit 150 Freiheitsgraden eine nochmals um mehrere Größenordnung höhere Genauigkeit erreicht.

Auch wenn die in diesem Beispiel erzielten extremen Genauigkeiten in den meisten Ingenieursanwendungen und insbesondere im Kontext der EBEM sicherlich nicht erforderlich sind, werden durch die gezeigten Ergebnisse zwei weitere Erkenntnisse gewonnen: Zum einen ist bei der isogeometrischen Analyse ein besonderes Augenmerk auf die numerische Integration zu legen. Da die Ordnung der Ansatzfunktionen in der Regel höher ist als bei Lagrange-Elementen und die einzelnen Elemente gegebenenfalls größer sind,

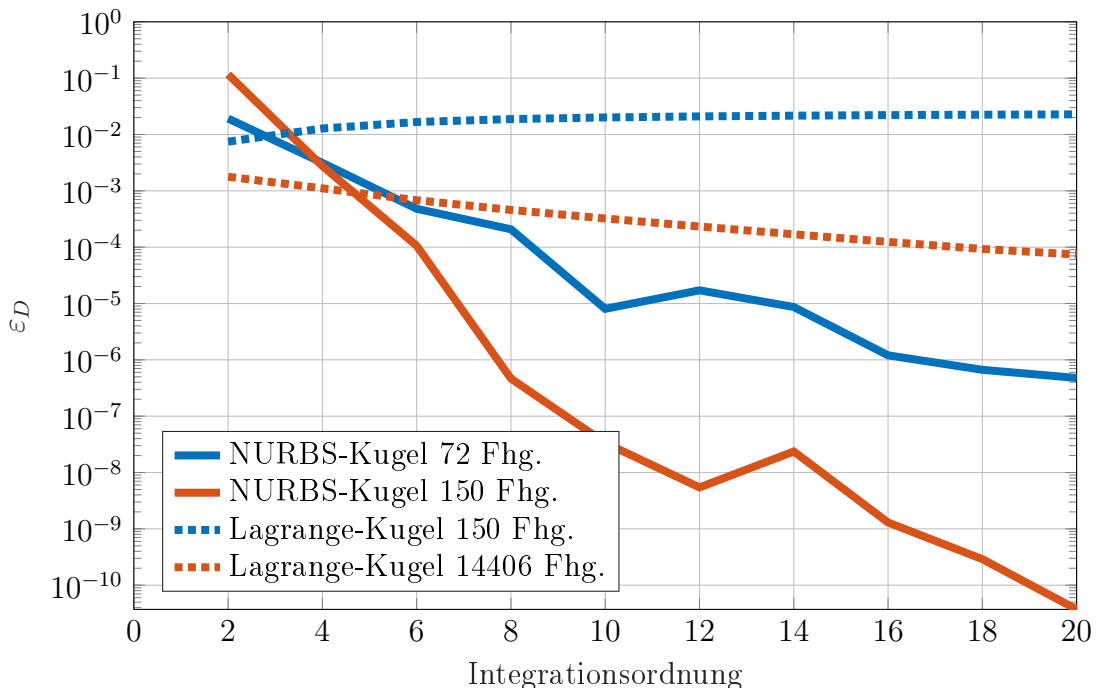


Bild 4.15: Dirichlet-Fehler  $\varepsilon_D$  über Integrationsordnung für verschiedene Diskretisierung der Kugel.

sind tendenziell höhere Integrationsordnungen zu wählen. So erzielt die bei ausreichend hohen Integrationsordnungen mit Abstand genaueste NURBS-Diskretisierung mit 150 Freiheitsgraden in Bild 4.15 bei einer Integrationsordnung von 2 gleichzeitig den größten Fehler aller Diskretisierungen. Die Behandlung von quasi-singulären Integralen und die rationalen, über mehrere Elemente verlaufenden Ansatzfunktionen spielen hierbei ebenfalls eine Rolle und werden im folgenden Kapitel thematisiert.

Zum anderen wird deutlich, dass auch in der isogeometrischen Analyse unterschiedliche Modellqualitäten eine Rolle spielen. Die Diskretisierungen aus Bild 4.14(a) und Bild 4.14(b) sind aus geometrischer Sicht gleichwertig und beide mathematisch gleichermaßen geeignet, die Kugel in einem CAD-System abzubilden. Da im vorliegenden Fall der gesuchte Randwertverlauf konstant ist, ist auch mit beiden Modellen eine exakte Interpolation der Randwerte möglich. Obwohl die Ordnung der Ansatzfunktionen niedriger ist, konvergiert das Modell mit den 72 Freiheitsgraden aber deutlich langsamer mit der Integrationsordnung als das mit 150 Freiheitsgraden. Die Ursache hierfür liegt in den durch die kollabierten Kanten entstanden Singularitäten.

# 5 Numerische Integration

Die Auswertung der in Gleichung 4.11 und 4.10 auftretenden Integrale muss im allgemeinen numerisch erfolgen. Sie sind das Produkt der Ansatzfunktionen mit der Kernelfunktion 3.21 beziehungsweise deren Normalenableitung 3.22. Während die Integration der Ansatzfunktionen eher unkritisch ist, weisen die Kernelfunktionen eine Singularität in  $\mathbf{x}_0$  auf. Die Integration ist daher nicht exakt durchführbar und mit einem Fehler behaftet. Um diesen gering zu halten, sind abhängig von der Kernelfunktion und der relativen Lage des Kollokationspunkts zum betrachteten Integrationsgebiet verschiedene Integrationsstrategien erforderlich. Sie sollen in diesem Kapitel erläutert werden, welches in Teilen auf den in [85] vorgestellten Ergebnissen beruht.

Grundlage aller Verfahren bildet die Gauß-Quadratur, bei der das Integral durch eine Summe gewichteter Funktionsauswertungen approximiert wird. Sie ist beispielsweise in [5, 34, 90] beschrieben. Für zweidimensionale Elemente wird sie als Tensor-Gauß-Quadratur auf dem Einheitselement im Parameterraum  $[-1, +1] \times [-1, +1]$  ausgeführt und kann zur Integration beliebig geformter Randelemente unter Berücksichtigung der Funktionaldeterminante 4.6 ins globale Koordinatensystem transformiert werden. Für die Integration einer Funktion  $f(\mathbf{x})$  über die Elementfläche  $\Gamma_e$  ergibt sich

$$\int_{\Gamma_e} f(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \iint f(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| \, d\xi d\eta \approx \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_k \alpha_l f(\xi_k, \eta_l) |\mathbf{J}(\xi_k, \eta_l)| \quad (5.1)$$

mit den Stützpunkten  $\xi_k, \eta_l$  und zugehörigen Gewichten  $\alpha_k, \alpha_l$ . Die Anzahl der pro Richtung berücksichtigten Stützwerte  $n$  wird auch als Integrationsordnung bezeichnet. Die Gauß-Quadratur ist in der Lage, Polynome bis zum Grad  $(2n - 1)$  exakt zu integrieren. Die Stützpunkte und Gewichte können a priori berechnet [38] beziehungsweise entsprechenden Tabellen entnommen werden. Für die singulären Integranden in der BEM ist die Wahl der Integrationsordnung allerdings nicht trivial, Fehlerabschätzungen können [90] entnommen werden.

Da die Singularität der Fundamentallösung mit zunehmender Entfernung einen abnehmenden Einfluss auf den Integranden hat, werden die folgenden Fälle unterschieden:

- Die Integration ist singular für  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_e$ .
- Die Integration ist quasi-singular, falls der Kollokationspunkt nahe am Element liegt  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon \sqrt{|J(0,0)|}$ , wobei der Parameter  $\varepsilon$  zur Quantifizierung der Nähe noch zu wählen ist.
- Das Integral ist regulär.

Die genannten Fälle werden in den nachfolgenden Abschnitten separat behandelt.

## 5.1 Reguläre Integration

Die reguläre Integration kann elementweise direkt nach Gleichung 5.1 erfolgen, wobei, abhängig von der Entfernung des Kollokationspunktes zum betrachteten Element, verschiedene Integrationsordnungen genutzt werden. Zur Klassifizierung wird die Entfernung hierzu auf die charakteristische Länge des Elements  $h = \sqrt{|J(0,0)|}$  bezogen.

Da die Integration über jedes einzelne Element für jede Zeile der diskreten Operatoren  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  erfolgt, bietet sich eine Vorausberechnung der sich wiederholenden Funktionsauswertungen an. Dies sind insbesondere die Positionen der Stützstellen im globalen Koordinatensystem  $\mathbf{x}(\xi_k, \eta_l)$ , die zugehörigen Normalen  $\mathbf{n}(\xi_k, \eta_l)$ , die Funktionaldeterminante  $|\mathbf{J}(\xi_k, \eta_l)|$  sowie die Ansatzfunktionen  $\phi(\xi_k, \eta_l)$ . Da eine Vorausberechnung jedoch nur für eine begrenzte Anzahl an Integrationsordnungen sinnvoll ist, wird die vorliegende Implementierung auf drei verschiedene Ordnungen beschränkt und nicht für jede Paarung von Element und Kollokationspunkt individuell bestimmt.

Bei der Umsetzung der Integration mit NURBS-Ansatzfunktionen ist besondere Umsicht geboten, da die einzelnen Ansatzfunktionen sowie die Stützpunkte patchweise definiert sind, die Zerlegung des Randes nach Gleichung 4.8 sich also zunächst als Summe der Patches ergibt. Die Ansatzfunktionen und somit der ganze Integrand nehmen im Allgemeinen aber nur auf einer Teilmenge der Elemente des Patches Werte ungleich Null an, eine Auswertung des Integrals auf den übrigen Elementen ist aus Effizienzgründen unbedingt zu vermeiden. Unter Berücksichtigung von Gleichung 4.18 lässt sich die Integration des Produkts einer beliebigen Funktion  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  mit der Ansatzfunktion  $R_{ij}^{pq}(\xi, \eta)$  über die

Patchoberfläche  $\Gamma_P$  zu

$$\int_{\Gamma_P} \tilde{f}(\mathbf{x}) R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) \, d\Gamma = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+p+1}} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+q+1}} \tilde{f}(\mathbf{x}(\xi, \eta)) R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \quad (5.2)$$

ausdrücken.

Eine direkte Ausführung der Integration auf Patchbasis ist jedoch ebenfalls nicht ideal, da sich die reduzierte Stetigkeit der Ansatzfunktionen an den Elementgrenzen negativ auf die Genauigkeit der Integration auswirkt. Der Integrationsbereich wird daher in die Summe der Elemente zu

$$\int_{\Gamma_P} \tilde{f}(\mathbf{x}) R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) \, d\Gamma = \sum_{\substack{m=0 \\ \xi_{i+m} \neq \xi_i}}^{p+1} \sum_{\substack{n=0 \\ \eta_{j+n} \neq \eta_j}}^{q+1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+m}} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+n}} \tilde{f}(\mathbf{x}(\xi, \eta)) R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \quad (5.3)$$

zerlegt. Zur Anwendung der Quadraturformel 5.1 auf Elementbasis muss zudem eine weitere – jedoch aufgrund der parallelen Koordinatenrichtungen triviale – Transformation aus dem Parameterraum des jeweiligen Elements  $(\xi_e, \eta_e)$  in den Parameterraum des Patches  $(\xi, \eta)$  berücksichtigt werden. Beispielhaft ist in Bild 5.1 die nach dem beschriebenen Verfahren resultierende Lage der Stützpunkte der Gauß-Quadratur auf dem Patch dargestellt, der eingefärbte Bereich markiert dabei den Bereich, in dem die betrachtete Ansatzfunktion von null verschiedene Werte annimmt.

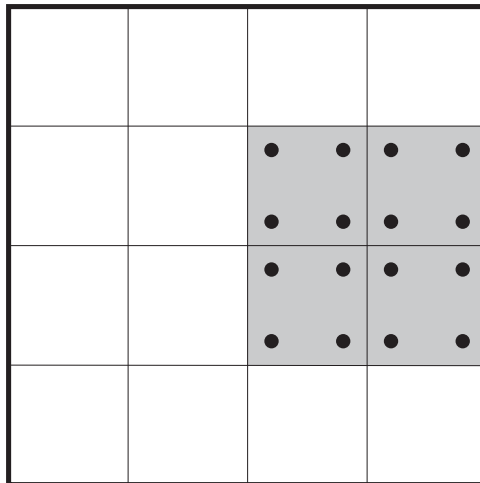


Bild 5.1: Lage der Stützpunkte der Integrationsordnung 2 für die Ansatzfunktion  $R_{3,2}^{1,1}$  auf einem Patch mit den Knotenvektoren  $\Xi = \mathbf{H} = [0,0,1,2,3,4,4]$ .

Bei Verwendung von NURBS-Ansatzfunktionen ist die Auswertung der Ansatzfunktionen und ihrer Ableitungen nach Gleichung 4.22 und 4.23 aufgrund der rekursiven Definition verhältnismäßig aufwendig. Sie kann im Kontext der Gauß-Quadratur, beschleunigt werden, indem der Umstand ausgenutzt wird, dass die Stützpunkte der Gauß-Quadratur genau wie die bivariaten NURBS-Ansatzfunktionen, aus Tensorprodukten resultieren. Die univariaten Basisfunktionen der B-Splines  $B_i^p(\xi)$  und  $B_j^q(\eta)$  können für die Gauß-Abszisse separat vorausberechnet und hieraus die bivariaten Ansatzfunktionen bestimmt werden. Der Aufwand zur Auswertung der Basisfunktionen wird damit von der Komplexität  $\mathcal{O}(n^2)$  auf  $\mathcal{O}(2n)$  reduziert. Wird die eingangs beschriebene Vorausberechnung der Integrationsdaten genutzt, ist der Geschwindigkeitsvorteil, verglichen mit dem Aufwand zur Auswertung von Gleichung 5.1, jedoch vernachlässigbar.

## 5.2 Singuläre Integration

Grundsätzlich muss in der BEM bei der Behandlung von Singularitäten der Grad der Singularität berücksichtigt werden. Dabei wird zwischen schwach singulären Integranden vom Typ  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ , singulären Integranden vom Typ  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$  und hypersingulären Integranden des Typs  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$  unterschieden. Hypersinguläre Integrale treten bei der hier genutzten Randintegralgleichung 3.29 nicht auf. Sie entstehen beispielsweise, wenn die Randintegralgleichung erneut nach der Normalen am Ladepunkt abgeleitet wird, wie es für indirekte Formulierungen [30] oder die Burton-Miller-Formulierung zur Unterdrückung irregulärer Frequenzen bei der Lösung der Helmholtz-Gleichung [52] erforderlich ist.

Die hier auftretenden Kernelfunktionen 3.21 und 3.22 hingegen haben die Gestalt schwach singulärer beziehungsweise singulärer Integranden. Wie in [101] aufgezeigt wird, lassen sich jedoch beide Kernel als schwach singulär behandeln. Vereinfacht gesagt ist dies durch das zusätzlich im Zähler von Gleichung 3.22 auftretende Skalarprodukt aus Abstandsvektor und Normale begründet, welches auf glatten Oberflächen bei Annäherung von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}_0$  ebenfalls gegen Null geht und so die Singularität reduziert. Aus einem ähnlichen Grund kann bei Verwendung linearer Lagrange-Elemente zur Geometriebeschreibung sogar komplett auf eine Regularisierung des Doppelschichtoperators  $\mathbf{H}$  verzichtet werden, da die Vektoren auf dem singulären Element überall senkrecht aufeinander stehen und das singuläre Integral der Kernelfunktion sich somit zu Null ergibt.

Im Falle der isogeometrischen EBEM können nach diesen Vorbetrachtungen alle Integranden als schwach singuläre behandelt werden. Zur ihrer Regularisierung existieren verschie-

dene Ansätze, die zumeist auf der Idee beruhen, eine zusätzliche Koordinatentransformation durchzuführen, deren Jacobi-Determinante  $|\mathbf{J}|$  die Singularität behebt [27, 61]. In der vorliegenden Arbeit wird die Polarkoordinatentransformation [87] eingesetzt. Sie zählt zu den besonders effizienten Verfahren [57] und lässt sich unter Berücksichtigung der in [101] vorgeschlagenen Reparametrisierung auch für Patches mit singulären Jacobideterminanten anwenden. Die nachfolgende Beschreibung des Verfahrens basiert auf [101].

### 5.2.1 Polarkoordinatentransformation

In der ursprünglichen Version dieses Verfahrens erfolgt eine Transformation des kartesischen natürlichen Koordinatensystems  $(\xi_e, \eta_e)$  in ein Polarkoordinatensystem  $(\rho, \theta)$ , dessen Ursprung in die Singularität gelegt wird. Es gilt

$$\xi_e = \rho \cos \theta \quad (5.4)$$

$$\eta_e = \rho \sin \theta. \quad (5.5)$$

Für die Integration ergibt sich somit eine zusätzlich zu berücksichtigende Funktionaldeterminante mit  $d\xi_e d\eta_e = \rho d\rho d\theta$  in Gleichung 5.1, so dass sich für das Integral über die Elementfläche

$$\iint f(\xi_e, \eta_e) |\mathbf{J}(\xi_e, \eta_e)| d\xi_e d\eta_e = \iint f(\rho, \theta) |\mathbf{J}(\rho, \theta)| \rho d\rho d\theta \quad (5.6)$$

ergibt und die Singularität von  $f$  durch die Multiplikation mit  $\rho$  aufgehoben wird.

Wird zusätzlich die in Unterabschnitt 5.2.2 beschriebene Reparametrisierung durchgeführt, erfolgt zuvor eine Transformation in das kartesische Koordinatensystem  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ , in dem der ursprünglich quadratische Parameterraum, wie in Bild 5.2 abgebildet, die Form eines Parallelogramms annimmt. Da das Parallelogramm den Standardfall des Quadrats einschließt, erfolgt die Beschreibung des Verfahrens direkt anhand der in Bild 5.2 dargestellten Geometrie.

Da die obere radiale Integrationsgrenze  $R(\theta)$  nicht über den ganzen Winkel analytisch beschreibbar ist, wird das Element in bis zu vier Teildreiecke zerlegt, die sich durch das Verbinden der Singularität mit den Eckpunkten des Referenzelements ergeben. Liegt der Kollokationspunkt auf einer Ecke oder Kante des Elements, ergeben sich entsprechend weniger Dreiecke. Dieser Fall kommt bei den diskontinuierlichen Lagrange-Elementen zwar nicht vor, ist aber bei Verwendung der 2-Punkt- beziehungsweise Greville-Abszisse

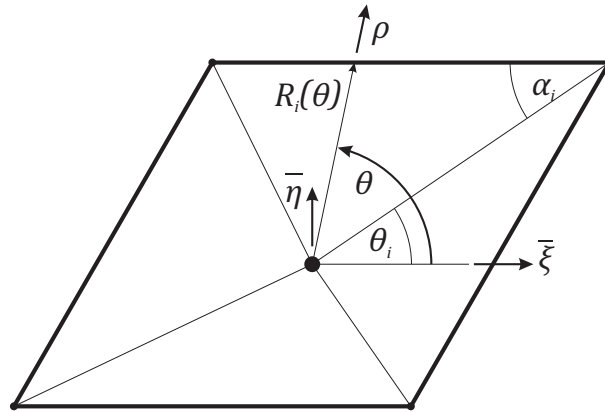


Bild 5.2: Integrationsbereiche für die Polarkoordinatentransformation vom Koordinatensystem  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  nach  $\rho, \theta$  [101].

für die NURBS-Elemente durchaus häufig.

Nach der Zerlegung des Integrationsgebiets lässt sich das Flächenintegral mit der Anzahl der resultierenden Dreiecke  $M$  zu

$$\iint f(\bar{\xi}, \bar{\eta}) |\mathbf{J}(\bar{\xi}, \bar{\eta})| d\bar{\xi} d\bar{\eta} = \sum_{i=1}^M \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_0^{R_i(\theta)} f(\rho, \theta) |\mathbf{J}(\rho, \theta)| \rho d\rho d\theta \quad (5.7)$$

schreiben, wobei sich die obere radiale Integrationsgrenze zu

$$R(\theta_i) = \frac{R_i(\theta_i) \sin \alpha_i}{\sin(\pi - \alpha_i - (\theta - \theta_i))} \quad (5.8)$$

bestimmen lässt.

Nähert sich der Kollokationspunkt einer Kante des Elements stark an, ergibt sich ein deformiertes Dreieck und die radiale Integrationsgrenze variiert sehr stark mit der Winkelkoordinate. Für eine genaue Integration wären daher eine entsprechend hohe Ordnung in der Richtung des Polarwinkels erforderlich. Zur Vermeidung dieses Problems wird die modifizierte Polarkoordinatentransformation beziehungsweise eine weitere Winkeltransformation mit

$$\theta(\tilde{\theta}) = \theta_i + \pi - \alpha_i - 2 \arctan(e^{\tilde{\theta}}) \quad (5.9)$$

eingeführt, womit sich

$$R(\theta_i) = R_i(\theta_i) \sin \alpha_i \cosh \tilde{\theta} \quad (5.10)$$

ergibt. Die Integrationsgrenzen für die neue Variable können durch die Umkehrung von Gleichung 5.9 zu

$$\tilde{\theta}_i = \ln \left( \tan \left( \frac{1}{2} (\pi - \alpha_i) \right) \right) \quad (5.11)$$

$$\tilde{\theta}_{i+1} = \ln \left( \tan \left( \frac{1}{2} (\pi - \alpha_i + \theta_i - \theta_{i+1}) \right) \right) \quad (5.12)$$

gefunden werden. Die für die Winkeltransformation zu berücksichtigende Jacobideterminante ist zudem durch

$$d\theta = -\frac{1}{\cosh \tilde{\theta}} d\tilde{\theta} \quad (5.13)$$

gegeben.

## 5.2.2 Reparametrisierung

Wie in [101] ausführlich dargelegt ist, kann für Elemente mit kollabierten Kanten nicht sichergestellt werden, dass die Singularität durch die Polarkoordinatentransformation behoben wird. Dies kann jedoch durch eine Reparametrisierung des Referenzelements erwirkt werden. Sie kann durch Orthonormalisierung der Vektoren  $\frac{\partial \mathbf{x}(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi}$  und  $\frac{\partial \mathbf{x}(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta}$  erreicht werden, wobei  $(\xi_s, \eta_s)$  die Position des Kollokationspunkts im ursprünglichen Parameterraum beschreibt. Sie wird durch das nachfolgend beschriebene Vorgehen erzielt.

Am Kollokationspunkt wird zunächst die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi} & \frac{\partial x(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi} & \frac{\partial z(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

aufgestellt und mittels der ökonomischen Variante einer Singulärwertzerlegung [37] in die Matrizen  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  und  $\mathbf{V}^H$  zerlegt, so dass

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (5.15)$$

gilt. Nun kann die Reparametrisierung

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

definiert werden und die Polarkoordinatentransformation, wie in Unterabschnitt 5.2.1 beschrieben, auf dem resultierenden Parallelogramm ausgeführt werden. Anschließend erfolgt die Rücktransformation der Integrationsstützpunkte in den ursprünglichen Parameterraum durch

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Liegt der Kollokationspunkt in der geometrischen Singularität, schlägt die Reparametrisierung naturgemäß fehl, da die Vektoren  $\frac{\partial \mathbf{x}(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi}$  und  $\frac{\partial \mathbf{x}(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta}$  in diesem Fall keine Basis für den neuen Parameterraum bilden. Neben dem Fall einer kollabierten Kante, bei der ein Vektor zum Nullvektor wird, entsteht auch im Fall paralleler Vektoren eine solche geometrische Singularität. Sie liegt beispielsweise vor, wenn mittels eines NURBS-Patches eine Kreisfläche abgebildet wird, deren Kanten tangential aufeinander zulaufen. Bei den in der vorliegenden Arbeit verwendeten 2-Ring-Kollokationspunkten ist unter der ebenfalls erfüllten Voraussetzung, dass innerhalb des Patches mindestens  $C^1$ -Stetigkeit der Ansatzfunktionen vorliegt, aber ausgeschlossen, dass Kollokationspunkt und geometrische Singularität zusammenfallen.

Die beschriebene Reparametrisierung zeigt nicht nur bei degenerierten, sondern allgemein bei verzerrten Elementen eine Verbesserung der Genauigkeit bei überschaubarem numerischen Mehraufwand. Sie wird daher in der vorliegenden Implementierung für alle Elemente mit der Polarkoordinatentransformation ausgeführt.

### 5.3 Quasi-Singuläre Integration

Wie zuvor beschrieben ist der Integrationsfehler sehr stark von der Entfernung  $d$  der Singularität zum Integrationsbereich abhängig. Unterschreitet die Entfernung ein kritisches Niveau, reicht eine weitere Erhöhung der Integrationsordnung nicht mehr zur Verbesserung der Genauigkeit aus. Dies ist nach [90] gegeben, sobald  $d < h$  gilt, wobei  $h$  die charakteristische Länge des Elements beschreibt. Während für konstante Ansatzfunktionen auf linearen Lagrange-Elementen in der Regel aufgrund der verhältnismäßig geringen Dichte der Kollokationspunkte keine gesonderte Behandlung quasi-singulärer Integrale erforderlich ist, stellen sie für höhere Ansatzordnungen und

NURBS-Ansatzfunktionen eine relevante Fehlerquelle dar.

Zur Behandlung quasi-singulärer Integrale existieren eine Reihe von Verfahren. Zwei relevante Gruppen dieser Verfahren sind zum einen solche, die auf einer Unterteilung des Integrationsgebiets beruhen [5, 97, 101], und zum anderen solche, denen die Durchführung einer nichtlinearen Koordinatentransformation zugrunde liegt [46, 50, 102]. Für die vorliegende Implementierung wurden eine rekursive Teilung sowie die sinh-Transformation untersucht und letztgenannte für die isogeometrische EBEM umgesetzt.

### 5.3.1 Unterteilung des Integrationsgebiets

Die einfachste, jedoch numerisch nicht sonderlich effiziente Möglichkeit zur Reduktion des Integrationsfehlers quasi-singulärer Integrale, ist eine uniforme Teilung des betrachteten Elements, so dass für die resultierenden Subelemente  $h < d$  erfüllt ist [97]. Eine effizientere Form des Verfahrens wird erreicht, wenn die Teilung nicht uniform durchgeführt wird, sondern eine einfache Teilung des Elements erfolgt und die Routine für die Subelemente solange rekursiv aufgerufen wird, bis die gewünschte Bedingung für alle Subelemente erfüllt ist. Entsprechende Verfahren wurden in [5, 101, 105] beschrieben. Sie unterscheiden sich neben den gewählten Abbruchkriterien durch die Berechnung der Entfernung. Vereinfachend wird hier teilweise nicht die minimale Entfernung des Kollokationspunktes zum (Sub-)Element zugrunde gelegt, sondern die Entfernung zum Mittelpunkt des Integrationsbereichs berechnet. Der hieraus resultierende Fehler wird bei erneuter Teilung des Bereichs reduziert, so dass sich insbesondere Nahe der Singularität eher geringe Abweichungen ergeben.

In Bild 5.3 sind exemplarisch die durch eine rekursive Unterteilung entstandenen Integrationsgebiete auf einem beliebig gewählten Element dargestellt. Das Verfahren ist gut

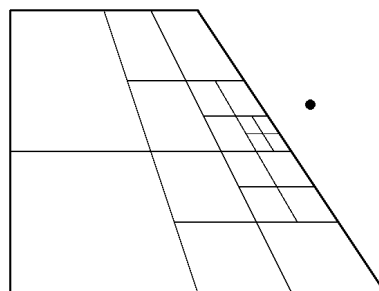


Bild 5.3: Integrationsgebiete für eine Singularität (•) nahe des Elements.

steuerbar und es lassen sich hohe Genauigkeiten erzielen. Durch die Teilung des Gebietes steigt jedoch die Anzahl der Funktionsauswertung zur Berechnung des Integrals an, so dass sich die Rechenzeit ebenfalls erhöht.

### 5.3.2 Die sinh-Transformation

Die auf einer Koordinatentransformation beruhenden Verfahren, wie die hier gewählte sinh-Transformation [50, 53], nutzen die aus der Transformation resultierende Jacobi-Determinante zur Abschwächung des singulären Charakters der Integration aus. Die Methode wurde in [53] in einer isogeometrischen BEM eingesetzt, wobei eine auf Bézier-Elementen basierende Formulierung gewählt wurde.

Zur Durchführung der Koordinatentransformation muss zunächst der Punkt im Parameterraum des Elements  $(\xi_n, \eta_n)$  gefunden werden, der im globalen Koordinatensystem den geringsten Abstand  $d$  zum Kollokationspunkt aufweist. Sind  $\xi_n, \eta_n$  und  $d$  bekannt, kann eine Reparametrisierung mit dem neu eingeführten Parameterraum  $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in [-1, +1]$  erfolgen, so dass

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_n + d \sinh(\mu_1 \hat{\xi} - \kappa_1) \\ \eta &= \eta_n + d \sinh(\mu_2 \hat{\xi} - \kappa_2)\end{aligned}\tag{5.18}$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 + \xi_n}{d} \right) + \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 - \xi_n}{d} \right) \right) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 + \xi_n}{d} \right) - \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 - \xi_n}{d} \right) \right) \\ \kappa_1 &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 + \eta_n}{d} \right) + \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 - \eta_n}{d} \right) \right) \\ \kappa_2 &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 + \eta_n}{d} \right) - \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1 - \eta_n}{d} \right) \right)\end{aligned}\tag{5.19}$$

gilt. Die Jacobi-Determinante dieser Transformation ergibt sich zu

$$|\mathbf{J}_{\sinh}| = \mu_1 \mu_2 d^2 \cosh(\mu_1 \hat{\xi} - \kappa_1) \cosh(\mu_2 \hat{\xi} - \kappa_2).\tag{5.20}$$

Exemplarisch ist der resultierende Verlauf der Jacobi-Determinante in Bild 5.4 qualitativ dargestellt.

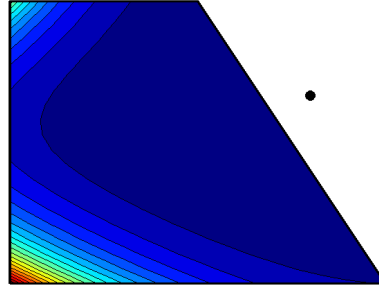


Bild 5.4: Qualitativer Verlauf der Jacobi-Determinante der sinh-Transformation (blau kleine, rot große Werte).

Die durch Gleichung 5.18 und 5.20 definierte Transformation erfordert selbst nur geringen numerischen Aufwand und ermöglicht eine effiziente Regularisierung des Integranden. Verhältnismäßig aufwendig ist jedoch die Bestimmung des Punktes  $(\xi_n, \eta_n)$ . Da die nichtlineare Abbildung des Parameterraums in das globale Koordinatensystem nicht einfach invertiert werden kann, wird zur Lösung des Minimierungsproblems ein iteratives Lösungsverfahren genutzt. Hierzu kommt das im folgenden beschriebene Newton-Raphson-Verfahren zum Einsatz [5, 53].

Ausgehend vom Startpunkt  $(\xi_{n,0}, \eta_{n,0})$  wird für den nächsten Iterationsschritt [53]

$$\begin{bmatrix} \xi_{n,k+1} \\ \eta_{n,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{n,k} \\ \eta_{n,k} \end{bmatrix} + (1 - \zeta) (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \begin{bmatrix} [\mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k}) - \mathbf{x}_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \xi} \\ [\mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k}) - \mathbf{x}_0] \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

mit

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_{n,k}, \eta_{n,k})}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

und einer optionalen Dämpfung  $\zeta \in [0,1)$  bestimmt. Das Verfahren konvergiert mit  $\zeta = 0$  lokal sehr schnell, eine globale Konvergenz kann jedoch nicht garantiert werden. Durch eine Wahl von  $\zeta > 0$  beziehungsweise günstige Wahl des Startpunkts kann das Konvergenzverhalten gegebenenfalls deutlich verbessert werden [59], der numerische Aufwand kann hierdurch insgesamt jedoch ansteigen. Patches, deren Funktionaldeterminante eine Singularität aufweisen, erfordern zudem eine gesonderte Behandlung, da die Matrix  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  in der Singularität nicht invertierbar ist und die Auswertung von Gleichung 5.21 dort vermieden werden muss.

Die Lösung des Minimierungsproblems stellt aus den oben beschriebenen Gründen eine Schwachstelle der sinh-Transformation da, sie ist jedoch für alle auf einer Koordinatentransformation beruhenden Integrationsstrategien für quasi-singuläre Integrale erforderlich.

### 5.3.3 Quasi-singuläre Integration innerhalb eines Patches

In den vorhergehenden Unterabschnitten wurde der allgemeine Fall betrachtet, dass der Kollokationspunkt an einem beliebigen Punkt in der Nähe eines Elements liegt. Liegt der Kollokationspunkt außerhalb des Elements, aber auf demselben Patch, kann die Existenz des gemeinsamen Parameterraums, wie im Folgenden beschrieben, ausgenutzt werden.

Die Regularisierung erfolgt hierbei mit der in Unterabschnitt 5.2.1 beschriebenen Polarkoordinatentransformation, welche die Singularität im Falle eines ebenen und quadratischen Patches sogar exakt behebt. Die Lage des Kollokationspunktes ist im Parameterraum des den quasi-singulären Elementen übergeordneten Patches bereits bekannt. Soll nur über die quasi-singulären Elemente integriert werden, ergeben sich aus der Lage des Punktes außerhalb des Elements jedoch umständliche Integrationsgrenzen. In diesem Fall wäre eine erneute Teilung des Elements in teils stark verzerrte Teilbereiche erforderlich, um deren Grenzen analytisch ausdrücken zu können.

Um dies zu vermeiden, wird der Integrationsbereich der quasi-singulären Elemente, wie in Bild 5.5 dargestellt, mit dem des singulären Elements zusammengefasst. Um die im Unterabschnitt 5.2.1 beschriebene Aufteilung des Gebiets zu ermöglichen, wird der Integrationsbereich so gewählt, dass sich das kleinstmögliche viereckige Gebiet ergibt, welches alle singulären und quasi-singulären Elemente umfasst.

Das Vorgehen erlaubt eine sehr gute Regularisierung des Kernels, die Erweiterung des Integrationsbereichs über die Elementgrenzen hinweg ist hinsichtlich der Integration der Ansatzfunktionen jedoch nicht optimal, da an diesen Stellen die Stetigkeit der NURBS reduziert ist. Wie im nachfolgenden Abschnitt gezeigt wird, kann insgesamt aber eine sehr gute Genauigkeit mit dem Verfahren erreicht werden. Es entfällt zudem die für die sinh-Transformation erforderliche Projektion des Kollokationspunktes in den Parameterraum des Elements, woraus sich eine beschleunigte Berechnung ergibt. Die praktische Geschwindigkeits- und Genauigkeitssteigerung bei Anwendung des Verfahrens ist vom zugrundeliegenden NURBS-Modell abhängig, anhand dessen sich entscheidet, für welche

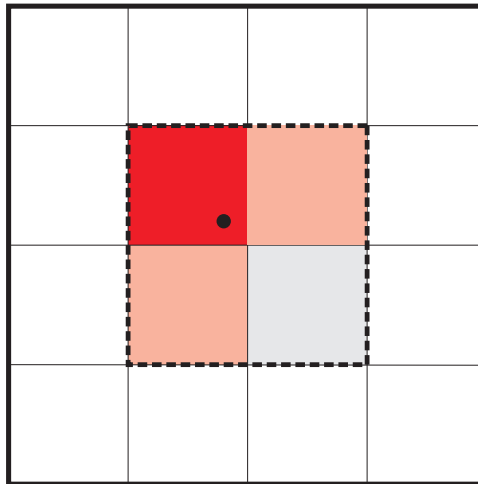


Bild 5.5: Erweiterung des Integrationsbereichs (----) für die Polarkoordinatentransformation. Der Bereich kann neben singulären (■) und quasi-singulären (■) auch als regulär klassifizierte Elemente (■) beinhalten.

Kollokationspunkte das Verfahren anwendbar ist. Das beschriebene Vorgehen wurde erstmals in [85] vorgestellt und hat keine direkte Entsprechung für Lagrange-Elemente, für die kein gemeinsamer Parameterraum aufgestellt werden kann. Einen ähnlichen Ansatz verfolgt jedoch das in [45] vorgestellte PART-Verfahren.

### 5.3.4 Vergleich der Verfahren zur quasi-singulären Integration

Die beschriebenen Integrationsroutinen werden anhand von Testfällen, für die eine analytische Lösung des Integrals möglich ist, gegenübergestellt. Die in Unterabschnitt 5.3.1 beschriebene Unterteilung des Integrationsgebiets und die sinh-Transformation nach Unterabschnitt 5.3.2 werden zunächst anhand des in Bild 5.6 dargestellten geometrisch exakt kreisförmigen, ebenen Patches mit vier Elementen untersucht. Der Radius des Patches beträgt  $R = 0,5$  m. Seine Parametrisierung ist in Anhang A beschrieben.

Um eine analytische Berechnung des Integrals zu ermöglichen, wird eine vereinfachte Kernelfunktion  $G_0 = \frac{1}{4\pi r}$  betrachtet. Die Untersuchung wird zudem auf die in Bild 5.7 dargestellten relativen Lagen des Kollokationspunktes zum Patch beschränkt. Dies ist zum einen eine Verschiebung entlang der  $z$ -Achse um den Abstand  $d$  zum Patch-Mittelpunkt und zum anderen eine Verschiebung in der Patch-Ebene im Winkel  $\varphi$  zur  $x$ -Achse mit dem Abstand  $d$  zur Kante des Patches. Die zugehörigen analytischen Lösungen können Anhang A entnommen werden.

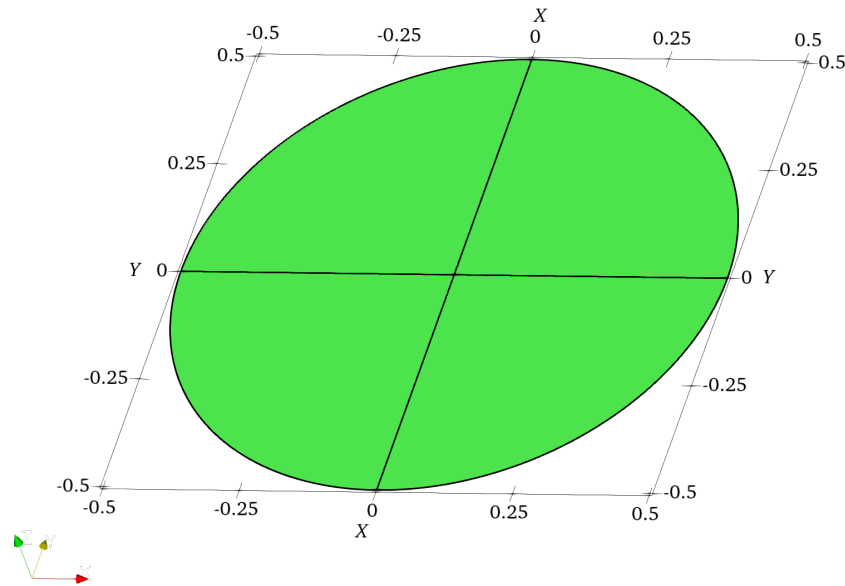
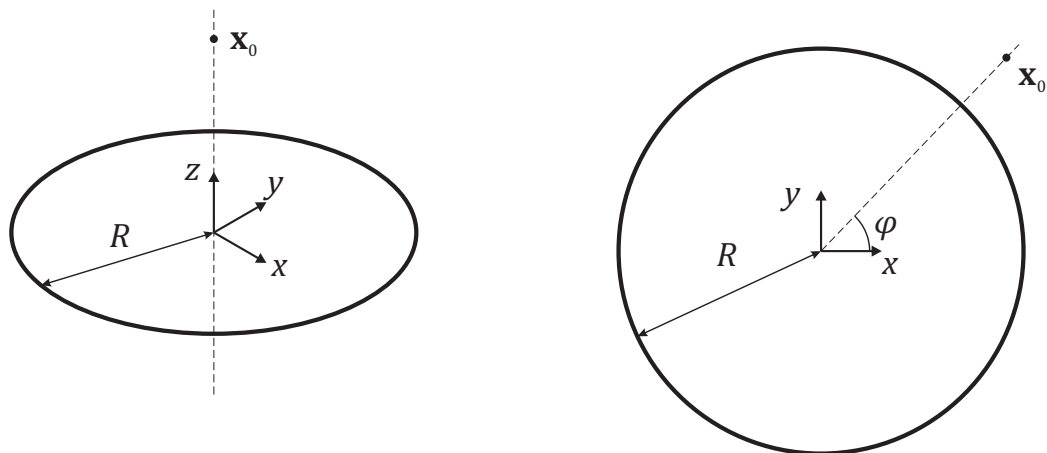


Bild 5.6: Testpatch zu Untersuchung der Verfahren zur quasi-singulären Integration.



(a) Kollokationspunkt normal zum Patch  
 $\mathbf{x}_0 = [0, 0, d]$

(b) Kollokationspunkt in Patch-Ebene  
 $\mathbf{x}_0 = [(R + d) \cos \varphi, (R + d) \sin \varphi, 0]$

Bild 5.7: Untersuchte relative Lagen des Kollokationspunktes zum Patch.

Das Integral wird für jeden untersuchten Fall an  $n = 31$  diskreten Punkten ausgewertet, die logarithmisch auf dem Intervall  $d \in [10^{-3}, 10^{-1}]$  verteilt sind. Während numerisch das Produkt aus den NURBS-Ansatzfunktionen  $R_{ij}^{22}$  und der Kernelfunktion  $G_0$  ausgewertet wird, erfolgt die analytische Integration nur für die Kernelfunktion. Da die Ansatzfunktionen eine Zerlegung der Eins darstellen, kann der Summe der numerischen Integrale die analytische Lösung als Referenz gegenübergestellt werden. Hierzu wird die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung (englisch *root-mean-square error*, RMSE) der  $n$

Punkte zu

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (I_{\text{num},k} - I_{\text{ana},k})^2}{n}} \quad (5.23)$$

mit

$$I_{\text{num}} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \int_{\Gamma} R_{ij}^{22} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \, d\Gamma \quad (5.24)$$

und  $I_{\text{ana}}$  nach Anhang A berechnet.

In Bild 5.8 ist für verschiedene Integrationsverfahren die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung über der Berechnungsdauer aufgetragen. Die Zeit ist hierbei mit der längsten auftretenden Berechnungszeit normalisiert dargestellt. Die Genauigkeit wurde jeweils durch Erhöhen der verwendeten Integrations-Ordnungen gesteigert. Zusätzlich zu den damit gewonnen Datenpunkten ist jeweils eine Trendlinie zur besseren Abschätzung des Konvergenzverhaltens der Verfahren dargestellt.

Wie zu erwarten ist, geht die klassische Gauß-Quadratur aufgrund des singulären Charakters der Integration mit hohen Fehlern einher. Die sinh-Transformation und das Gebietsteilungsverfahren ermöglichen demgegenüber eine drastische Verbesserung der Genauigkeit, wobei in der vorliegenden Implementierung ein deutlicher Geschwindigkeitsvorteil zugunsten der sinh-Transformation besteht, wie er aufgrund der geringeren Anzahl von Funktionsauswertungen des Integranden ebenfalls zu erwarten ist.

Wird, wie in Bild 5.9 dargestellt, der Kollokationspunkt auf der  $x$ -Achse angenommen, zeigt sich weitgehend das gleiche Verhalten wie zuvor. Erfolgt die Auswertung jedoch

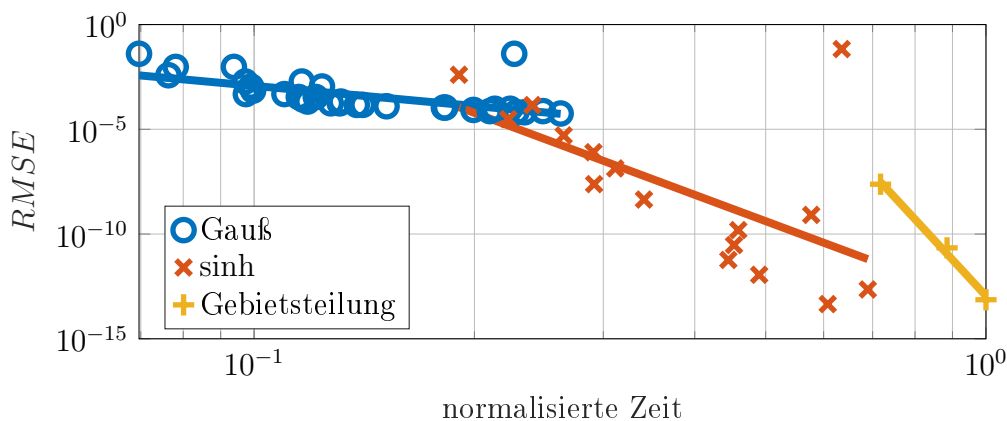


Bild 5.8: Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung über Berechnungsdauer für die Integration mit  $\mathbf{x}_0$  normal zum Patch.

unter einem Winkel von  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , ergibt sich für die sinh-Transformation ein wesentlich schlechteres Konvergenzverhalten, wie die Ergebnisse in Bild 5.10 zeigen.

Im diesem Fall ist die reduzierte Leistungsfähigkeit der sinh-Transformation darin begründet, dass der Punkt auf dem Patch  $\mathbf{x}(\xi_n, \eta_n)$ , welcher dem Kollokationspunkt am nächsten liegt, sich nun in einer geometrischen Singularität befindet. Dies führt zu einer Divergenz des Newton-Raphson-Verfahrens mit einem entsprechend erhöhten numerischen Aufwand und reduzierter Genauigkeit. Abhängig von den gewählten Abbruchkriterien, des Startpunkts und der Dämpfung des Verfahrens kann die Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens und damit auch die Leistungsfähigkeit der sinh-Transformation verbessert werden. Der Fall illustriert jedoch die große Robustheit der Gebietsunterteilung, die nicht zwingend auf eine genaue Berechnung der Abstände angewiesen ist. Es liegt die Vermutung nah, dass dies der Grund ist, warum bislang

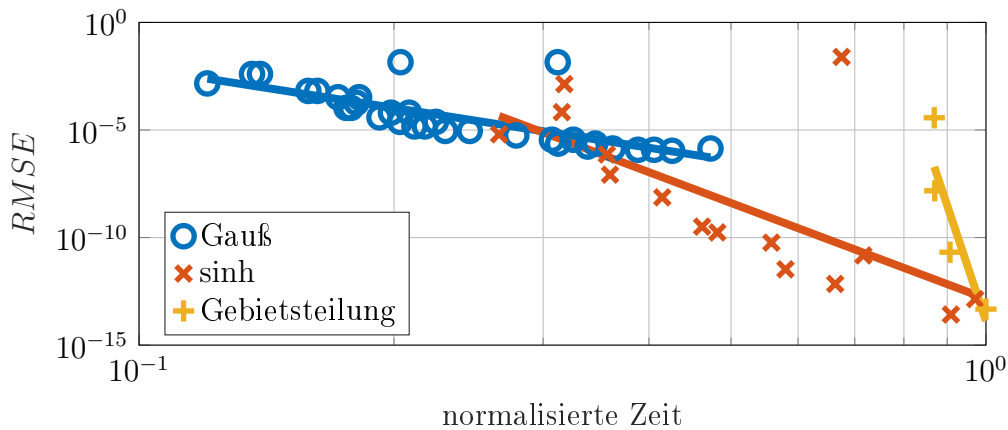


Bild 5.9: Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung über Berechnungsdauer für die Integration mit  $\mathbf{x}_0$  in Patch-Ebene auf  $x$ -Achse ( $\varphi = 0$ ).

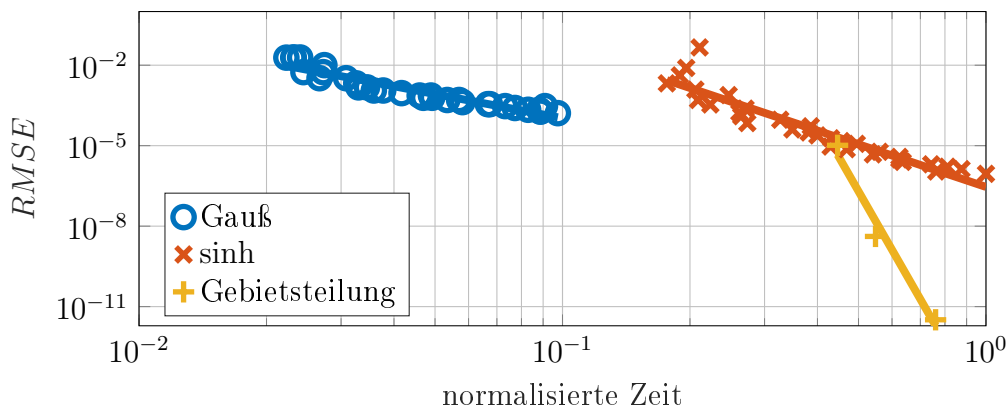


Bild 5.10: Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung über Berechnungsdauer für die Integration mit  $\mathbf{x}_0$  in Patch-Ebene mit  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

in vielen Implementierungen von isogeometrischen Boundary-Elemente-Methoden trotz der im Allgemeinen geringeren Berechnungsgeschwindigkeit die Gebietsunterteilung zur Handhabung quasi-singulärer Integrale eingesetzt wird.

Abschließend wird das in Unterabschnitt 5.3.3 beschriebene Verfahren betrachtet, welches anwendbar ist, wenn der Kollokationspunkt auf dem Patch liegt. Hierzu wird das zuvor beschriebene kreisförmige Patch durch eine zweifache uniforme  $h$ -Verfeinerung in 64 Elemente geteilt und die numerische Lösung für das ganze Patch, welches nun singuläre, quasi-singuläre und reguläre Elemente beinhaltet, der in Anhang A beschriebenen analytischen Lösung gegenüber gestellt. Es wird wiederum die mittlere quadratische Abweichung nach Gleichung 5.23 für  $n = 1521$  diskrete Punkte ermittelt. Die betrachteten Punkte ergeben sich aus einem uniformen Gitter im Parameterraum auf dem Intervall  $\xi, \eta \in [-0,95, +0,95]$  mit der Gitterweite 0,05.

Das Bild 5.11 stellt die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung über der normierten Berechnungsdauer für zwei verschiedene Integrationsstrategien dar. Die als regulär klassifizierten Elemente werden jeweils nach Abschnitt 5.1 behandelt, für die als *polar* bezeichnete Strategie werden singuläre und quasi-singuläre Elemente nach Unterabschnitt 5.3.3 behandelt, während für die mit *sinh* gekennzeichnete Strategie nur singuläre Elemente mit der Polarkoordinatentransformation nach Abschnitt 5.2 und quasi-singuläre mit der sinh-Transformation nach Unterabschnitt 5.3.2 gelöst werden.

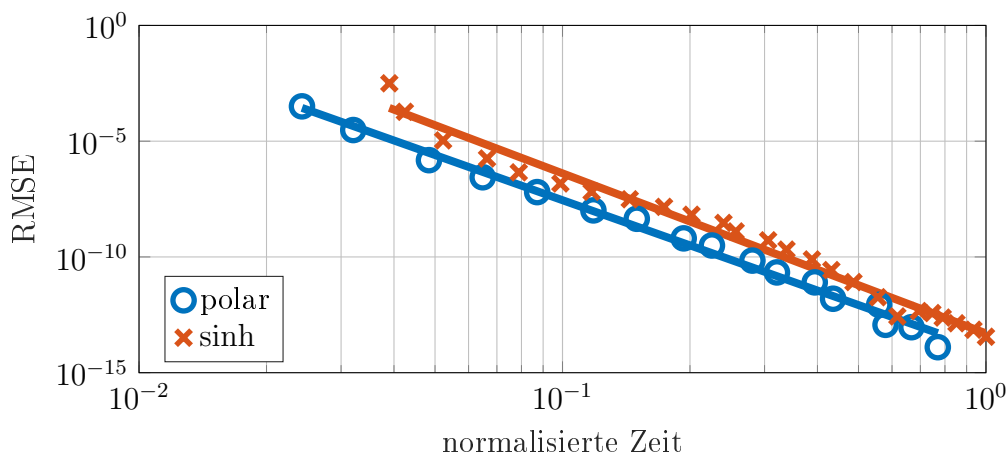


Bild 5.11: Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung über Berechnungsdauer des Integrals für eine Lage des Kollokationspunkts  $\mathbf{x}_0$  innerhalb des Patches bei Behandlung der quasi-singulären Elemente mit sinh- beziehungsweise erweiterter Polarkoordinatentransformation.

Beide Strategien zeigen ein sehr ähnliches Konvergenzverhalten, die vorgeschlagene Erweiterung des Integrationsbereichs für die Polarkoordinatentransformation erzielt jedoch bei gleicher Genauigkeit deutlich kürzere Berechnungszeiten als die reine sinh-Transformation. Auch wenn sich aus den dargestellten Daten keine verallgemeinernden Rückschlüsse zur Leistungsfähigkeit des neu vorgeschlagenen Verfahrens ziehen lassen, konnte in weiteren numerischen Experimenten mit geometrisch unterschiedlich geformten Patches und variierenden Parametrisierungen festgestellt werden, dass für eine gewählte Integrationsordnung die gleiche oder höhere Genauigkeit bei gleicher oder höherer Berechnungsgeschwindigkeit erzielt wird. Diese Beobachtung konnte in der praktischen Anwendung des Verfahrens in der EBEM bestätigt werden.

# 6 Die Fast-Multipole-Methode als Beschleunigungsverfahren in der EBEM

Die Boundary-Elemente-Methode ist aufgrund der reduzierten Dimension der Diskretisierung und der in CAD-Programmen häufig genutzten Begrenzungsflächenmodelle besonders gut für eine isogeometrische Formulierung und damit perspektivisch für eine nahtlose Integration in den Entwurfsprozess geeignet. Die resultierenden vollbesetzten Systemmatrizen sind aus numerischer Sicht jedoch ungünstig und bedingen gegenüber einer Finite-Elemente-Formulierung meist höhere Berechnungszeiten. Zur Kompensation dieses Nachteils wird im folgenden Kapitel eine Beschleunigung des entwickelten Verfahrens mittels der FMM beschrieben.

Die Methode ermöglicht eine effiziente Approximation des Matrix-Vektor-Produkts. Die konventionelle Berechnung des Produkts weist aufgrund der im Allgemeinen vollbesetzten Matrizen eine Komplexität der Ordnung  $\mathcal{O}(N^2)$  auf, die sich durch die FMM auf  $\mathcal{O}(N)$  reduzieren lässt [78]. Die Grundlage des Verfahrens bildet eine Faktorisierung der Kernelfunktion in jeweils nur vom Quell- oder Empfangspunkt abhängige Terme, wie sie in Abschnitt 6.1 beschrieben ist. Der hierauf aufbauende Algorithmus wird in Abschnitt 6.2 vorgestellt. Da durch das Verfahren nicht die Matrix selbst, sondern das Matrix-Vektor-Produkt approximiert wird, kann es nur unter Anwendung iterativer Löser genutzt werden.

Die FMM ist vielfach zur Lösung der Helmholtz- und Laplace-Gleichung eingesetzt worden [52, 67, 95]. Die für die Helmholtzgleichung meist genutzte, besonders effiziente Diagonalform nach Rokhlin [88] ist für die EBEM jedoch nicht anwendbar. Die in der vorliegenden Implementierung der EBEM rein imaginären Wellenzahlen machen einige Anpassungen zur Formulierung einer Fast-Multipole-EBEM (FM-EBEM) erforderlich, die in diesem Kapitel erläutert werden. Wird der in Unterabschnitt 2.4.3 beschriebene Intensity-Potential-

Approach genutzt, liegt der Laplace-Kernel vor und eine Umsetzung des Verfahrens kann stattdessen wie in [83] vorgestellt erfolgen.

## 6.1 Multipole-Entwicklung

Gesucht wird eine Faktorisierung der Kernelfunktion der EBEM nach Gleichung 3.21. Sie entspricht formal weitgehend der Kernelfunktion 2.25 der Helmholtzgleichung, besitzt im Gegensatz zu dieser jedoch einen reellwertigen Exponenten. Der EBEM-Kernel lässt sich somit als Helmholtz-Kernel ausdrücken, wenn für diesen eine rein imaginäre Wellenzahl  $k' = -i\eta k$  gewählt wird. Entsprechend kann für den EBEM-Kernel dieselbe Entwicklung um den Punkt  $\mathbf{x}_c$  [41]

$$\frac{e^{-ik'r}}{4\pi r} = -ik' \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} R_n^{-m}(-k', \mathbf{x} - \mathbf{x}_c) S_n^m(-k', \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c| \quad (6.1)$$

beziehungsweise

$$\frac{e^{-\eta kr}}{4\pi r} = -\eta k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} R_n^{-m}(i\eta k, \mathbf{x} - \mathbf{x}_c) S_n^m(i\eta k, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c| \quad (6.2)$$

gewählt werden. Die Funktionen  $R_n^m(k', \mathbf{r})$  und  $S_n^m(k', \mathbf{r})$  sind dabei mit der Polarkoordinatendarstellung des Vektors  $\mathbf{r} = [r, \theta, \varphi]$  wie folgt definiert:

$$R_n^m(k', \mathbf{r}) = j_n(k'r) Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (6.3)$$

$$S_n^m(k', \mathbf{r}) = h_n^{(1)}(k'r) Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (6.4)$$

Hier bezeichnet  $j_n$  die sphärische Besselfunktion,  $h_n^{(1)}$  die sphärische Hankelfunktion erster Art und  $Y_n^m$  die Kugelflächenfunktion. Sie wird hier zu

$$Y_n^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (6.5)$$

mit den assoziierten Legendre-Polynomen  $P_n^m$  definiert. Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur verschiedene Definitionen der Funktionen  $P_n^m$ ,  $Y_n^m$ ,  $R_n^m$  und  $S_n^m$  zu finden sind. Sie unterscheiden sich zumeist durch den Grad der Normalisierung und die jeweilige Berücksichtigung des Faktors  $(-1)^m$ . Zur korrekten Berechnung der Multipole-Entwicklung selbst, ihrer Ableitungen und der in Abschnitt 6.4 beschriebenen Verschiebungsoperatoren ist eine konsistente Definition elementar, so dass diesem Punkt bei der praktischen Implementierung besondere Aufmerksamkeit zuteil werden muss. In

der vorliegenden Arbeit wird soweit nicht ausdrücklich anders angegeben auf die in [42] verwendeten Definitionen zurückgriffen. Da ausschließlich die sphärischen Hankelfunktionen erster Art und nicht die hiervon zu unterscheidenden Hankelfunktionen zweiter Art Verwendung finden, wird im Weiteren vereinfacht  $h_n = h_n^{(1)}$  geschrieben.

Die Multipole-Entwicklung, beziehungsweise die darin genutzten Funktionen  $j_n$  und  $h_n$ , sind für Wellenzahlen des gesamten Bereichs der komplexen Zahlen definiert. Für die klassische, ungedämpfte Helmholtz-Gleichung treten jedoch nur reellwertige Argumente auf. In Abschnitt 6.3 wird daher auf die Besonderheiten der Implementierung für die rein imaginären Argumente der EBEM und die resultierenden Eigenschaften der Entwicklung eingegangen.

## 6.2 Algorithmus

Die Trennung von Quell- und Empfangspunkt  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}$  in der Multipole-Entwicklung 6.2 ermöglicht das Zusammenfassen der Einflüsse mehrerer Quellen und anschließende Bestimmen der kumulierten Auswirkungen auf eine Vielzahl von Empfängern, statt der direkten Auswertung aller einzelnen Interaktionen. Die daraus resultierende Reduktion der Komplexität ist in Bild 6.1 graphisch dargestellt.

Der erforderliche Algorithmus wird durch das Gültigkeitskriterium der Multipole-Entwicklung

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c| \quad (6.6)$$

jedoch erschwert. Um die Erfüllung der Bedingung zu garantieren, wird eine hierarchische Baumstruktur - in 3D ein sogenannter *Octree* eingeführt, mit Hilfe dessen die Geometrie in Boxen unterteilt wird. Zur Erstellung des Baums wird zunächst eine würfelförmige

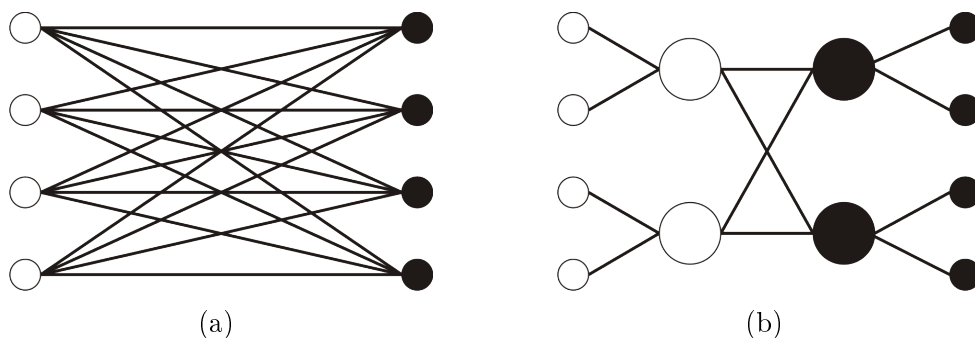


Bild 6.1: Direkte Auswertung der Interaktionen (a) und Auswertung in einer einstufigen FMM (b) nach [42].

Box definiert, die die gesamte diskretisierte Oberfläche enthält. Zu dieser Box wird das oberste *Level 0* definiert. Durch Halbierung aller Kanten entstehen aus dieser Box acht untergeordnete Boxen auf dem *Level 1*, sie werden als *Children* der übergeordneten *Parent*-Box bezeichnet. Durch erneute Teilung der Boxen auf Level 1 entsteht das Level 2. Dieser Vorgang wird solange rekursiv durchgeführt, bis entweder ein gewünschtes Level oder eine minimale Anzahl an Kollokationspunkten pro Box erreicht ist. Eine Box auf dem untersten Level, die selbst keine Children besitzt, wird als *Leaf*-Box bezeichnet. Entstehen Boxen, die keine Kollokationspunkte enthalten, werden sie verworfen und nicht im weiteren Algorithmus berücksichtigt. Benachbarte Boxen auf dem gleichen Level, die mindestens einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen, werden als Nahfeld definiert. Für sie kann die Erfüllung von Gleichung 6.6 nicht garantiert werden, wenn als Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_c$  der Mittelpunkt der betrachteten Box gewählt wird. Die Interaktion mit den betreffenden Elementen wird konventionell berechnet. Die verbleibenden Boxen werden in eine Interaktionsliste und das Fernfeld unterteilt. Die Interaktionsliste enthält dabei all jene Boxen, die nicht selbst im Nahfeld, aber deren Parents im Nahfeld liegen.

Zur Formulierung einer Fast-Multipole-Boundary-Elemente Methode werden auf Basis von Gleichung 6.2 die Einflüsse mehrerer Elemente zu sogenannten Multipole-Momenten  $M_n^m(\mathbf{x}_c)$  zusammengefasst, so dass für einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  außerhalb der Box mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{x}_c$  und dem darin liegenden Teilstück der Randfläche  $\Gamma_B$  unter Berücksichtigung der Ansatzfunktion  $\phi(\mathbf{x})$  und der Integration

$$\int_{\Gamma_B} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} M_n^m(\mathbf{x}_c) S_n^m(i\eta k, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) \quad (6.7)$$

gilt. Die Koeffizienten  $M_n^m(\mathbf{x}_c)$  sind dann durch

$$M_n^m(\mathbf{x}_c) = \int_{\Gamma_B} R_n^{-m}(i\eta k, \mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \phi(\mathbf{x}) \, d\Gamma \quad (6.8)$$

gegeben. Analog zu Gleichung 6.7 lässt sich mit den Koeffizienten  $L_n^m(\mathbf{x}_c)$  eine lokale Entwicklung für einen Kollokationspunkt  $\mathbf{x}_0$  innerhalb einer Box zu

$$\int_{\Gamma_B} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \phi(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} R_n^m(i\eta k, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) L_n^m(\mathbf{x}_c) \quad (6.9)$$

aufstellen.

Der eigentliche Algorithmus läuft dann, wie in Bild 6.2 vereinfachend an einem Binärbaum für eine einzelne Box dargestellt, ab. Es werden zunächst für alle Leaf-Boxen die Multipole-Momente nach Gleichung 6.8 berechnet. Diese werden dann mittels der als M2M bezeichneten Operatoren in ihre jeweilige Parent-Box verschoben und aufaddiert. Dieser Vorgang wird levelweise wiederholt, bis für alle Boxen auf Level 2 ein Multipole-Moment vorliegt. Ist dieser sogenannte Upward-Pass abgeschlossen, werden die Multipole-Momente mittels der M2L-Translation auf jedem Level für die jeweiligen Boxen der Interaktionsliste zu Koeffizienten einer lokalen Entwicklung addiert. Anschließend werden, ausgehend vom Level 2, die Koeffizienten der lokalen Entwicklung mittels der L2L-Translation in die Child-Boxen verschoben und zu den bestehenden Koeffizienten addiert. Dieser auch Downward-Pass genannte Vorgang wird levelweise wiederholt, bis für alle Leaf-Boxen lokale Entwicklungen vorliegen, die die Einflüsse aller Elemente, die nicht im Nahfeld liegen, abbilden. Die lokalen Koeffizienten können dann für die in der Box liegenden Kollokationspunkte mittels Gleichung 6.9 ausgewertet werden. Die Einflüsse der Kollokationspunkte innerhalb derselben Box sowie der dem Nahfeld zugeordneten Boxen werden konventionell ausgewertet und addiert.

Es es ist offensichtlich, dass der Baum für die FMM über mindestens drei Level verfügen muss, da auf den Leveln 0 und 1 alle Boxen im Nahfeld voneinander liegen und erst ab Level 2 Interaktionslisten definiert werden können. Durch das Hinzufügen weiterer Level kann der Nahfeldanteil insgesamt verringert werden, die Methode wird dann

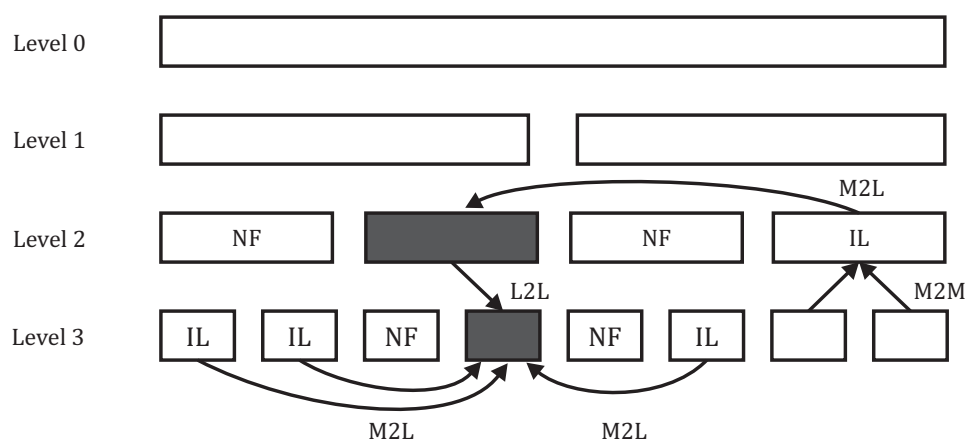


Bild 6.2: Verschiebung der Informationen in der FMM am Beispiel eines Binärbaums [32]: Für die dunkel markierte Leaf-Box werden die Einflüsse des Nahfelds (NF) und der Interaktionsliste (IL) innerhalb des Levels bestimmt, die Fernfeldeinflüsse werden über die Parent-Box berücksichtigt. Zwischen den Boxen werden die Koeffizienten der Entwicklung mittels der Operatoren M2M, L2L und M2L verschoben.

auch als Multilevel-FMM bezeichnet. Da die Operationen M2M, M2L und L2L jedoch ebenfalls einen numerischen Aufwand bedingen und die Anzahl der durchzuführenden Translationen mit der Anzahl der Level ansteigt, kann diese nicht beliebig hoch gewählt werden. In der vorliegenden Implementierung kann die Anzahl der Level  $n_L$  entweder durch eine minimale Anzahl an Kollokationspunkten pro Box gesteuert oder zu  $n_L \approx \log_8(N)$  bestimmt werden [39]. Die Operatoren zur Durchführung der M2M-, M2L- und L2L-Translationen werden in Abschnitt 6.4 beschrieben.

Im Allgemeinen muss in der FM-BEM nicht nur die Kernelfunktion selbst, sondern auch ihre Normalenableitung approximiert werden. Aufgrund der Trennung von Quell- und Empfangspunkt in der Multipole-Entwicklung ist hierfür nur eine Anpassung in der Bestimmung der Multipole-Momente der Leaf-Boxen erforderlich, die darauffolgenden Schritte des Algorithmus bleiben unverändert. Es gilt

$$\int_{\Gamma_B} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \phi(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \tilde{M}_n^m(\mathbf{x}_c) S_n^m(i\eta k, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c) \quad (6.10)$$

mit

$$\tilde{M}_n^m(\mathbf{x}_c) = \int_{\Gamma_B} \nabla R_n^{-m}(i\eta k, \mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \mathbf{n} \phi(\mathbf{x}) \, d\Gamma. \quad (6.11)$$

Der zur Berechnung benötigte Gradient der Funktion  $R_n^m$  ist durch

$$\nabla R_n^m(k, \mathbf{r}) = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} b_{n+1}^{-m-1} R_{n+1}^{m+1}(k, \mathbf{r}) + b_{n+1}^{m-1} R_{n+1}^{m-1}(k, \mathbf{r}) - b_n^{-m} R_{n-1}^{m-1}(k, \mathbf{r}) - b_n^m R_{n-1}^{m+1}(k, \mathbf{r}) \\ i (b_{n+1}^{m-1} R_{n+1}^{m-1}(k, \mathbf{r}) + b_n^m R_{n-1}^{m+1}(k, \mathbf{r}) - b_n^{-m} R_{n-1}^{m-1}(k, \mathbf{r}) - b_{n+1}^{-m-1} R_{n+1}^{m+1}(k, \mathbf{r})) \\ 2 (a_{n-1}^m R_{n-1}^m(k, \mathbf{r}) - a_n^m R_{n+1}^m(k, \mathbf{r})) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

mit

$$a_n^m = \begin{cases} 0 & n < |m| \\ \sqrt{\frac{(n+1+m)(n+1-m)}{(2n+1)(2n+3)}} & n \geq |m| \end{cases} \quad (6.13)$$

und

$$b_n^m = \begin{cases} 0 & n < |m| \\ \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} & 0 \leq m \leq n \\ -\sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} & -n \leq m < 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

gegeben [42]. Wird weiterhin die Normalenableitung am Ladepunkt  $\mathbf{x}_0$  gesucht, kann analog  $\nabla S_n^m$  berechnet werden.

### 6.3 Imaginäre Argumente der Besselfunktionen für die FM-EBEM

Formal findet für die hier entwickelte FM-EBEM die gleiche Multipole-Entwicklung wie für die Helmholtzgleichung Anwendung. Durch die imaginären Argumente der Besselfunktionen verhält sich die Reihenentwicklung hinsichtlich der Anzahl der zu berücksichtigenden Terme jedoch anders. Für die sogenannte Entwicklungslänge  $p$ , nach der die unendliche Reihe 6.1 abgebrochen wird, zeigt sich im Falle der Helmholtzgleichung eine starke Korrelation mit der Wellenzahl  $k$  beziehungsweise der Kantenlänge einer Box  $D$ . Für sie hat sich die semi-empirische Formel

$$p(kD) = C \log(kD + \pi) + kD \quad (6.15)$$

etabliert [23, 100], wobei die Konstante  $C$  entsprechend der erforderlichen Genauigkeit zu wählen ist.

Zur Untersuchung einer entsprechenden Abhängigkeit für die FM-EBEM wird, analog zu [100], die erforderliche Entwicklungslänge zur Erreichung einer geforderten Genauigkeit für verschiedene Werte von  $\eta kD$  bestimmt. Um eine möglichst allgemeingültige Aussage ableiten zu können, werden hierbei die Einflüsse von  $N_x = 500$  zufällig auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius 1 um den Entwicklungspunkt liegenden Punkten zusammengefasst. Das resultierende Multipolemoment wird dann an weiteren  $N_{x_0} = 500$  Punkten ausgewertet. Diese Auswertepunkte sind ebenfalls zufällig auf einer konzentrischen Kugeloberfläche mit dem Radius  $\eta kD$  platziert. Die erreichte Genauigkeit wird dann als mittlerer relativer Fehler gegenüber einer direkten Auswertung der Interaktionen bestimmt. Für jede so betrachtete Boxgröße  $\eta kD$  wird nun die Entwicklungslänge solange erhöht, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

In Bild 6.3 sind die Ergebnisse der Untersuchung für eine Genauigkeit von  $10^{-3}$  und  $10^{-6}$  sowie zum Vergleich ein entsprechendes Ergebnis für die Helmholtzgleichung dargestellt. Es wird deutlich, dass im Falle der FM-EBEM ebenfalls eine Abhängigkeit der Entwicklungslänge vom Produkt  $\eta kD$  vorliegt, sie aber weniger stark ausgeprägt ist als im Falle der Helmholtzgleichung.

Die numerischen Ergebnisse lassen sich im Falle der FM-EBEM sehr gut durch Funktionen der Form

$$p(\eta kD) = C \log\left(\eta kD + \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{4}(\eta kD + 4\pi) \quad (6.16)$$

abbilden, wie ebenfalls in Bild 6.3 dargestellt ist.

Mit Gleichung 6.16 lässt sich zum einen die erforderliche Entwicklungslänge für eine gewünschte Genauigkeit der Multipole-Entwicklung bestimmen, zum anderen zeigt sie auch, dass eine FM-EBEM von einer adaptiven, Level-abhängig gewählten Entwicklungslänge potenziell profitieren kann. In der hier implementierten Grundversion wird jedoch zunächst eine für alle Level konstante Entwicklungslänge gewählt. Da zum einen aufgrund der für übliche akustische Medien wie Luft und Wasser geringen Verlustfaktoren  $\eta$  für viele Anwendungsfälle nur kleine Produkte  $\eta kD$  erwartet werden und zum anderen die Entwicklungslänge mit der Boxgröße  $D$  relativ schwach skaliert, wird diese Einschränkung als vertretbar angesehen.

Die zur Auswertung der Multipole-Entwicklung erforderlichen sphärischen Besselfunktionen  $j_n(x)$  und  $h_n(x)$  sind für beliebige komplexe Argumente  $x \in \mathbb{C}$  definiert, in praktischen Implementierungen, wie in der C++ `math`-Bibliothek, sind sie jedoch häufig auf reellwertige Argumente beschränkt. Die nachfolgenden Identitäten für rein imaginäre Ar-

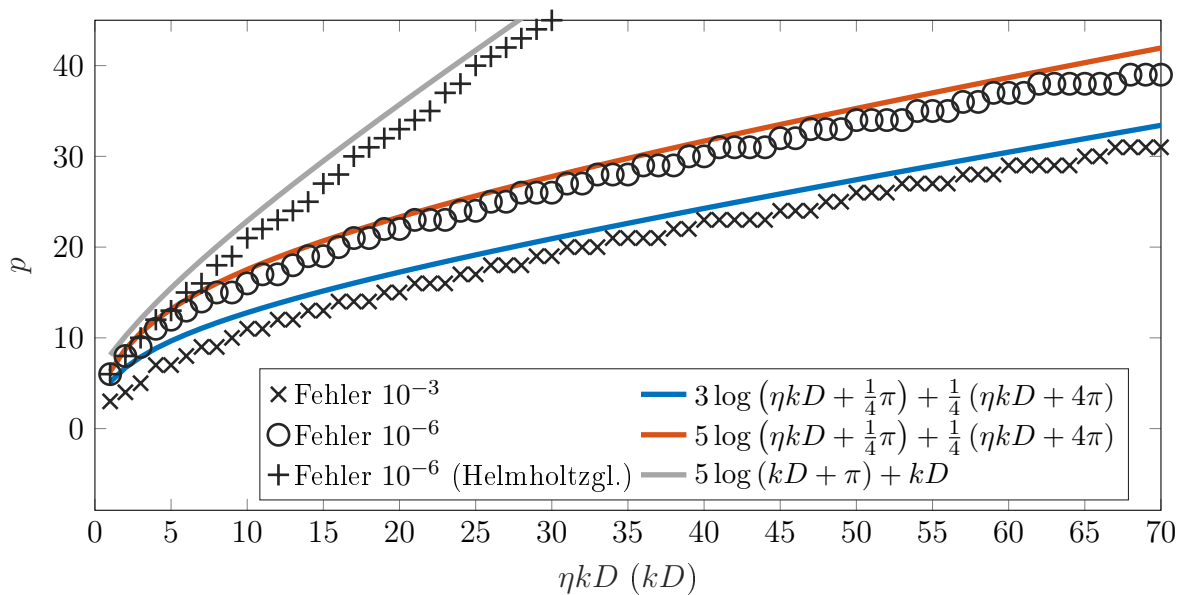


Bild 6.3: Abhängigkeit der Entwicklungslänge von der Boxgröße für verschiedene Genauigkeiten in Anlehnung an [100].

gumente sind zur Umsetzung der Methode daher hilfreich [42]:

$$j_n(x) = i \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{Im}(x)}} I_{n+1/2}(\operatorname{Im}(x)) \quad (6.17)$$

$$h_n(x) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi \operatorname{Im}(x)}} K_{n+1/2}(\operatorname{Im}(x)) \quad (6.18)$$

wobei  $I_{n+1/2}$  und  $K_{n+1/2}$  die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art sind.

## 6.4 Operatoren

Eine weitere Konsequenz der imaginären und betragsmäßig kleinen Argumente der sphärischen Bessel- und Hankelfunktion ist, dass die Diagonalform nach Rokhlin hier nicht anwendbar ist (vergleiche [78]). Sie erlaubt eine besonders effiziente Translation beziehungsweise Transformation der Multipole-Momente mittels Operatoren M2M, L2L und M2L, die die Komplexität  $\mathcal{O}(p^2)$  aufweisen. Für die klassische Helmholtzgleichung tritt das Problem bei sehr niedrigen Frequenzen ebenfalls auf [23], weshalb alternative Formulierungen der Operatoren entwickelt wurden. Eine umfassende Übersicht findet sich beispielsweise in [109], besonders hervorzuheben sind die Rotation-Coaxial-Translation-Rotation (RCR) Formulierung [41, 113] und Operatoren, die auf einer Repräsentation mittels ebener Wellen basieren [25, 40]. Beide Verfahren weisen eine Komplexität von  $\mathcal{O}(p^3)$  auf und sollten prinzipiell auch im vorliegenden Fall komplexer Argumente anwendbar sein. Da die Implementierung dieser Operatoren jedoch sehr aufwendig ist, gegebenenfalls bestehende Bibliotheken aufgrund vieler erforderlicher Modifikationen nicht anwendbar sind und in der vorliegenden Arbeit zunächst die grundsätzliche Anwendbarkeit der FMM in der EBEM im Vordergrund steht, wurde auf die weniger performanten ursprünglichen Operatoren auf Basis der Wigner 3-j Symbole [29, 42] zurückgegriffen, welche eine Komplexität von  $\mathcal{O}(p^4)$  haben.

Die Translationen vom Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}'_c$  zu einem neuen Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_c$  erfolgen mit den Beziehungen

$$M_n^m(\mathbf{x}_c) = \sum_{n'=0}^p \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{(n+n'-|n-n'|)/2} \text{M2M}_{n',n,l}^{m',m}(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}'_c) M_{n'}^{m'}(\mathbf{x}'_c), \quad (6.19)$$

$$L_n^m(\mathbf{x}_c) = \sum_{n'=0}^p \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{(n+n'-|n-n'|)/2} \text{L2L}_{n',n,l}^{m',m}(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}'_c) L_{n'}^{m'}(\mathbf{x}'_c) \quad (6.20)$$

und

$$L_n^m(\mathbf{x}_c) = \sum_{n'=0}^p \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{(n+n'-|n-n'|)/2} \text{M2L}_{n',n,l}^{m',m}(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}'_c) M_{n'}^{m'}(\mathbf{x}'_c). \quad (6.21)$$

Hierbei sind die Koeffizienten der Operatoren durch

$$\begin{aligned} \text{M2M}_{n',n,l}^{m',m}(\mathbf{r}) &= \text{L2L}_{n',n,l}^{m',m}(\mathbf{r}) = \\ &= \sqrt{\frac{(2n+1)(2n'+1)(2n''+1)}{4\pi}} i^{n'+n''-n} E \begin{pmatrix} m & -m' & -m'' \\ n & n' & n'' \end{pmatrix} R_{n''}^{m''}(i\eta k, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

und

$$\begin{aligned} \text{M2L}_{n',n,l}^{m',m}(\mathbf{r}) &= \\ &= \sqrt{\frac{(2n+1)(2n'+1)(2n''+1)}{4\pi}} i^{n'+n''-n} E \begin{pmatrix} m & -m' & -m'' \\ n & n' & n'' \end{pmatrix} S_{n''}^{m''}(i\eta k, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

mit

$$n'' = |n - n'| + 2l \quad (6.24)$$

$$m'' = m - m' \quad (6.25)$$

gegeben. Das in Gleichung 6.22 und 6.23 verwendete Symbol  $E$  ist wiederum unter Verwendung der Wigner 3-j Symbole wie folgt definiert:

$$E \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m \\ j_1 & j_2 & j \end{pmatrix} = 4\pi \varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} \varepsilon_m \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

wobei die Faktoren  $\varepsilon_m$  zu

$$\varepsilon_m = \begin{cases} (-1)^m, & m > 0 \\ 1, & m \leq 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

bestimmt werden und  $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$  das Wigner 3-j Symbol kennzeichnet. Es wird in der vorliegenden Implementierung mittels der auf [92] basierenden von Joey Dumont veröffentlichten Bibliothek [28] berechnet.

## 6.5 Ergebnisse

Es wird zunächst der Einfluss der Entwicklungslänge  $p$  auf die Genauigkeit der Lösung untersucht. Hierzu wurde die bereits in Abschnitt 4.4 genutzte und in Bild 4.14(a)

dargestellte Diskretisierung einer Kugel mit 8 Patches betrachtet. Sie verfügt nach dreimaliger  $h$ -Verfeinerung über 800 Freiheitsgrade. Der Kugelradius beträgt  $R = 0,5$  m. Die Randbedingungen werden äquivalent zu einer Monopolquelle im Kugelmittelpunkt vorgeschrieben. Die Frequenz wird zu  $f = 10$  kHz, die Dichte zu  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>, die Schallgeschwindigkeit zu  $c = 340$  m/s und der Dämpfungskoeffizient zu  $\eta = 4 \cdot 10^{-2}$  gewählt. Der Dämpfungskoeffizient wurde somit für typische akustische Fragestellungen unrealistisch hoch parametrisiert, dennoch ergibt sich im untersuchten Fall für das Produkt  $\eta k D \leq 2$  für alle Boxen. Es wird nicht erwartet, dass diese Größenordnung in typischen praktischen Anwendungen überschritten wird. Um den resultierenden Gesamtfehler möglichst auf den Fehler der Fast-Multipole-Approximation zu beschränken, wurden die Integrationsordnungen mit  $[g_n, g_m, g_f] = [50, 8, 4]$  sehr hoch gewählt.

Im Bild 6.4 ist der relative Fehler auf der Kugeloberfläche für die direkte Lösung sowie FMM-Lösungen mit verschiedenen Entwicklungslängen dargestellt. Während für  $p = 1$  in Bild 6.4(b) noch die Grobstruktur der Leafboxen auf Level 3 wiederzuerkennen ist, stellt sich mit steigender Entwicklungslänge ein deutlich gleichmäßigerer Verlauf des Fehlers ein.

Zur besseren quantitativen Darstellung des Fehlers in Abhängigkeit der Entwicklungslänge ist in Bild 6.5 die  $L_2$ -Norm des Fehlers nach Gleichung 4.29 über der Entwicklungslänge dargestellt. Der Fehler konvergiert mit ansteigender Entwicklungslänge gegen den Fehler der direkten Lösung. Es wird somit deutlich, dass auch bei der hier implementierten FMM in Kombination mit der isogeometrischen Analyse sehr hohe Genauigkeiten erreicht werden können.

Wird die in Bild 6.6 dargestellte Berechnungszeit über der Entwicklungslänge betrachtet, zeigt sich jedoch, dass die vorliegende Implementierung aufgrund der hohen Komplexität der verwendeten Operatoren nur bei kleinen Entwicklungslängen effizient ist. In vielen praktischen Anwendungen ist die hier gezeigte hohe Genauigkeit jedoch nicht erforderlich, zudem wird sie im Allgemeinen ohnehin durch Diskretisierungs- und Integrationsfehler beschränkt.

In einer weitergehenden Untersuchung soll das implementierte Verfahren einer direkten Lösung der vollbesetzten Matrix gegenübergestellt werden. Es wird hierzu erneut das zuvor beschriebene Berechnungsmodell der Kugel mit identischer Parametrisierung genutzt. Es wird nun jedoch bei konstanter Entwicklungslänge durch mehrfache  $h$ -

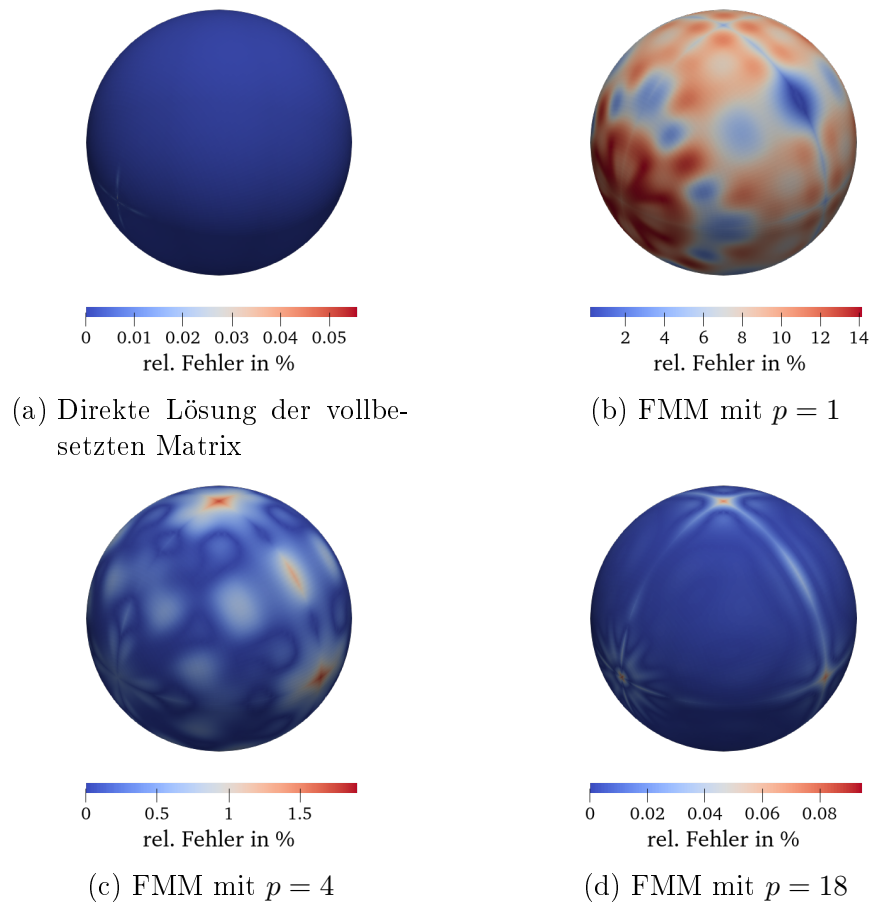


Bild 6.4: Relativer Fehler auf der Kugeloberfläche für verschiedene Lösungsverfahren.

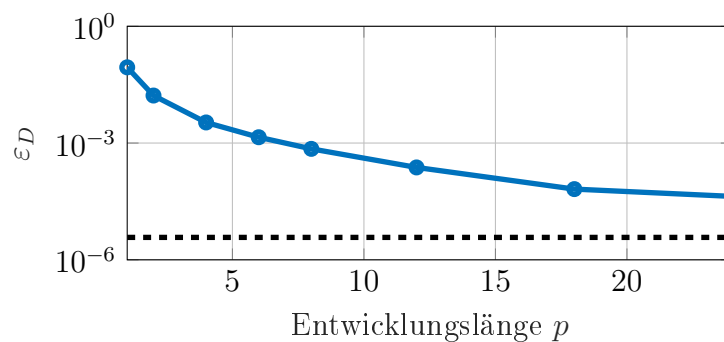


Bild 6.5: Dirichletfehler über Entwicklungslänge  $p$ . Die gestrichelte Linie (----) kennzeichnet den Fehler der direkten Lösung.

Verfeinerung der Ausgangsgeometrie die Zahl der Freiheitsgrade variiert. Zudem wurden die Integrationsordnungen auf die praxisnäheren Werte  $[g_n, g_m, g_f] = [6, 4, 2]$  reduziert und die Integrationsroutinen auf eine reine Gauß-Quadratur beschränkt.

In Bild 6.7 ist die Berechnungsdauer für die direkte Lösung, sowie einer FMM-Lösung mit  $p = 2/4/6$  gezeigt. Dargestellt ist hierbei ausschließlich die Zeit, die zum Aufstellen und

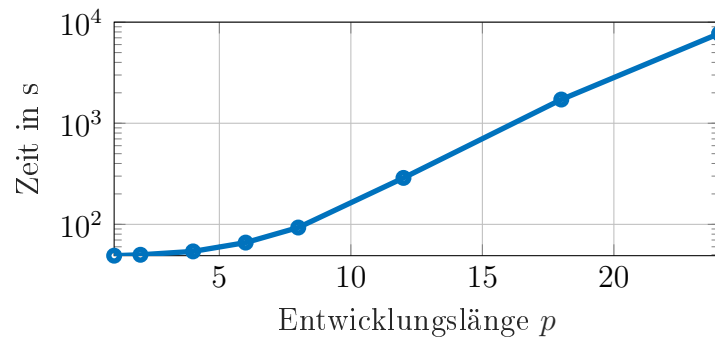
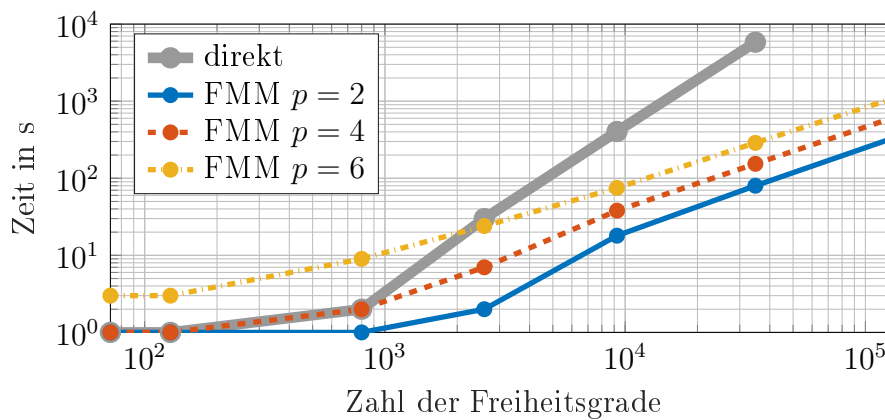
Bild 6.6: Gesamte Programmlaufzeit über der Entwicklungslänge  $p$ .

Bild 6.7: Berechnungszeiten verschiedener Lösungsverfahren über der Anzahl der Freiheitsgrade

Lösen des Gleichungssystems benötigt wird. Zeiten, die für Netzoperationen, Aufbereiten der Randbedingungen, Vorausberechnen von Integrationsdaten sowie etwaiges Postprocessing oder Fehlerberechnung erforderlich werden, sind dabei nicht berücksichtigt, da sie unabhängig vom Lösungsverfahren sind. Es wird deutlich, dass die Berechnungszeit für die FMM unabhängig von der verwendeten Entwicklungslänge asymptotisch deutlich günstiger mit der Zahl der Freiheitsgrade skaliert als die direkte Lösung. Die konkrete Modellgröße, ab der die FMM einen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber der direkten Lösung erreicht, hängt dabei von der Entwicklungslänge ab.

In Bild 6.8 ist zudem der Speicherbedarf während der Lösung für die verschiedenen Verfahren dargestellt. Im Falle vollbesetzter Matrizen limitiert dieser in der Praxis häufig die Zahl der Freiheitsgrade. Wie zu erkennen ist, wird bei der Lösung mittels FMM deutlich weniger Speicher belegt, womit unabhängig vom Geschwindigkeitsvorteil auch wesentlich größere Modelle berechnet werden können. Es zeigt sich zudem, dass der Speicherbedarf bei moderaten Entwicklungslängen offenbar kaum durch diese getrieben wird.

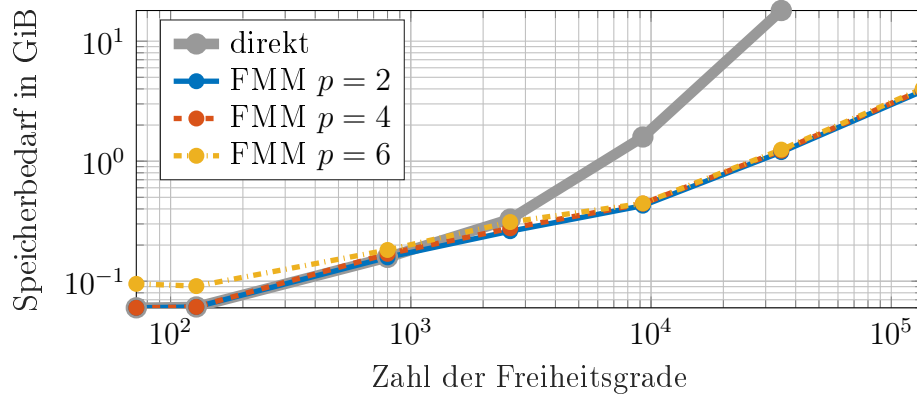


Bild 6.8: Speicherbelegung verschiedenerer Lösungsverfahren über der Anzahl der Freiheitsgrade.

Wie im Bild 6.9 ersichtlich wird, ist in diesem Beispiel der Gesamtfehler zunächst nur durch den Integrationsfehler getrieben. Mit der Verfeinerung wird die Größe der einzelnen Elemente und somit der Integrationsgebiete reduziert, wodurch die Genauigkeit zunimmt. Ab dem vierten Verfeinerungsschritt, beziehungsweise 9248 Freiheitsgraden, limitiert für  $p=2$  die Genauigkeit der FMM den Fehler. Die höheren Entwicklungslängen erreichen bis zur sechsten Verfeinerung die gleiche Genauigkeit wie die direkte Lösung. Erst darüber hinaus wird erkennbar, dass auch mit der Entwicklungslänge  $p=4$  der Fehler nicht mehr dem zuvor ersichtlichen Trend folgt, der sich mit der Entwicklungslänge  $p=6$  weiter fortsetzt.

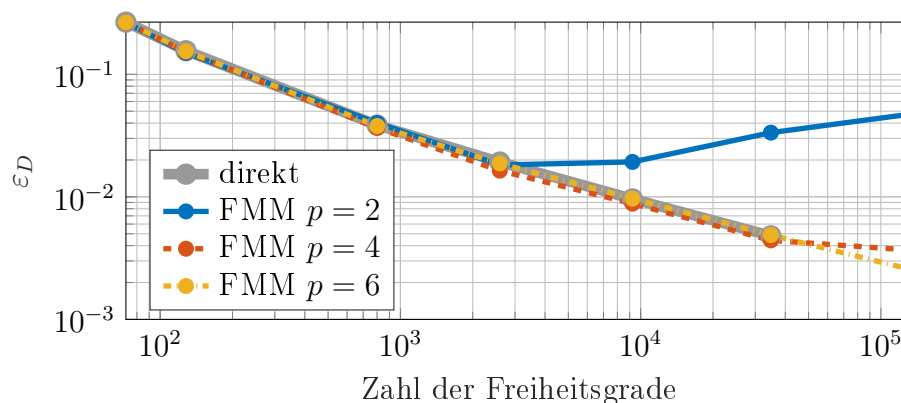


Bild 6.9: Dirichletfehler verschiedenerer Lösungsverfahren über der Anzahl der Freiheitsgrade.

Die Untersuchung bestätigt erneut, dass für praktische Anwendungen die verwendeten geringen Entwicklungslängen eine hinreichende Genauigkeit ermöglichen, so dass die Ver-

wendung der verhältnismäßig ineffizienten Transformationsoperatoren nicht zu stark ins Gewicht fällt.



# 7 Anwendung der Methode

In diesem Kapitel soll die entwickelte Methode an realitätsnahen, repräsentativen Beispielen demonstriert werden. Dabei steht nicht die vollständige Validierung im Vordergrund, da die Validität der Energiemethoden bereits vielfach diskutiert wurde [51, 74, 94] und die entwickelten Erweiterungen mittels der isogeometrischen Analyse und der Fast-Multipole-Methode in den jeweiligen Abschnitten 4.4 und 6.5 bereits verifiziert wurden.

## 7.1 Monopolquelle im Freifeld

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Randbedingungen für verschiedene Geometrien bereits mehrfach äquivalent zu einer ins Freifeld abstrahlenden Monopolquelle gewählt. In diesem Fall ist die analytische Lösung auf dem Rand bekannt, was zur Bestimmung des Berechnungsfehlers genutzt wurde. Nicht betrachtet wurden bislang jedoch die Feldgrößen im Berechnungsgebiet sowie die Frequenzabhängigkeit der Diskretisierung.

Durch Verschiebung des Ladepunkts  $\mathbf{x}_0$  vom Rand ins Berechnungsgebiet ergibt sich mit  $c(\mathbf{x}_0) = 1$  aus Gleichung 3.29 die Integralgleichung zur Auswertung der Energiedichte im Feld. Durch Berechnung des Gradienten am Ladepunkt lässt sich hieraus ebenfalls die Intensität bestimmen. In Bild 7.1 ist diese vektorielle Größe exemplarisch in einer beliebigen Ebene um die Kugel dargestellt. Aus dem Betrag der Vektoren lässt sich nach Gleichung 3.3 der Schallintensitätspegel im Feld bestimmen. Für ebene Wellen kann dieser als äquivalent zum Schalldruckpegel  $L_p$  betrachtet werden, unter Normbedingung ergibt sich eine Differenz der Pegel von lediglich  $L_p - L_q = 0,29$  dB. Gleichermäßen lässt sich aus der Energiedichte ein äquivalenter Schalldruckpegel berechnen. Dieser ergibt sich zu

$$L_{\text{pw}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{w}{w_{\text{ref}}} \right) + 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\rho c^2 w_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}^2} \right). \quad (7.1)$$

Die Referenzwerte  $w_{\text{ref}}$  und  $p_{\text{ref}}$  sind dabei für Luft mit  $w_{\text{ref}} = 1 \cdot 10^{-12}$  J/m<sup>3</sup> beziehungsweise  $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa gegeben. Die der Umrechnung zugrunde liegende Annahme

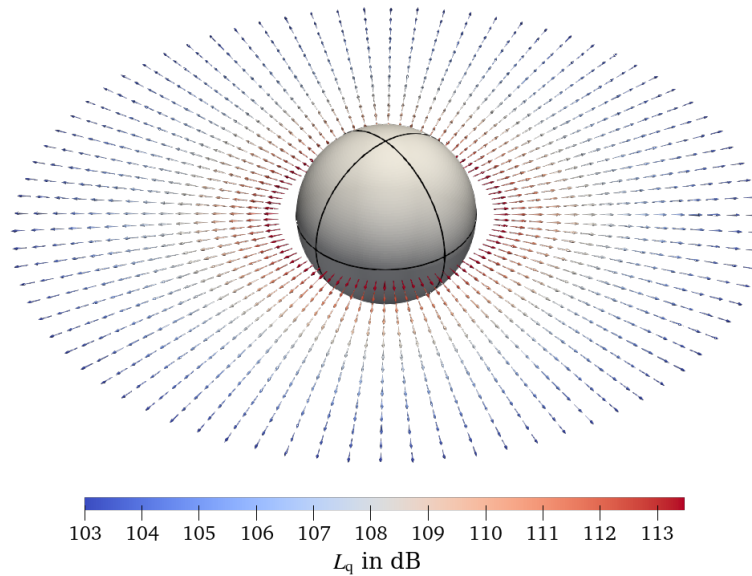


Bild 7.1: Diskretisierte Kugel mit vektorieller Darstellung der Intensitäten in einer Ebene des Berechnungsgebiets für das Außenraumproblem.

$w \approx \frac{p^2}{\rho c^2}$  ist für ebene Wellen sowie diffuse Schallfelder gleichermaßen erfüllt.

Dem Berechnungsmodell für die Kugel liegt das unverfeinerte Netz mit 8 NURBS-Patches und 72 Freiheitsgraden zugrunde. Für das Fluid werden mit  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 340 \text{ m/s}$  und  $\eta = 1 \cdot 10^{-4}$  für Luft realistische Werte angenommen und die Intensitätsrandbedingung wird so gewählt, dass die akustische Leistung 1 W entspricht.

In Bild 7.2 sind der berechnete Schallintensitätspegel  $L_q$  und der äquivalente Schalldruckpegel  $L_{pw}$  über der radialen Entfernung vom Kugelmittelpunkt dargestellt. Für den äquivalenten Schalldruckpegel zeigen sich qualitativ und quantitativ starke Abweichungen zur analytischen Lösung. Die Ursache hierfür liegt im falschen Abklingverhalten der Fundamentallösung Gleichung 2.41 begründet, so verhält sich  $G \propto \frac{1}{r}$ , während für die analytische Lösung für eine Punktquelle  $w \propto \frac{1}{r^2}$  gilt. Es ist bekannt, dass diese Diskrepanz bei der Lösung der Energieflussgleichung in zwei- und dreidimensionalen Berechnungsgebieten zu homogeneren Verteilungen der Energiedichte führt [62, 74]. Im Fall akustischer Wellen wird dies durch den geringen Verlustfaktor typischer Ausbreitungsmedien wie Luft oder Wasser verschärft. Demgegenüber zeigt der Schallintensitätspegel eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

Diese Beobachtung unterstreicht, dass eine Reduzierung der betrachteten Feldgrößen auf die Intensität, wie sie effektiv bei den in Unterabschnitt 2.4.2 und Unterabschnitt 2.4.3

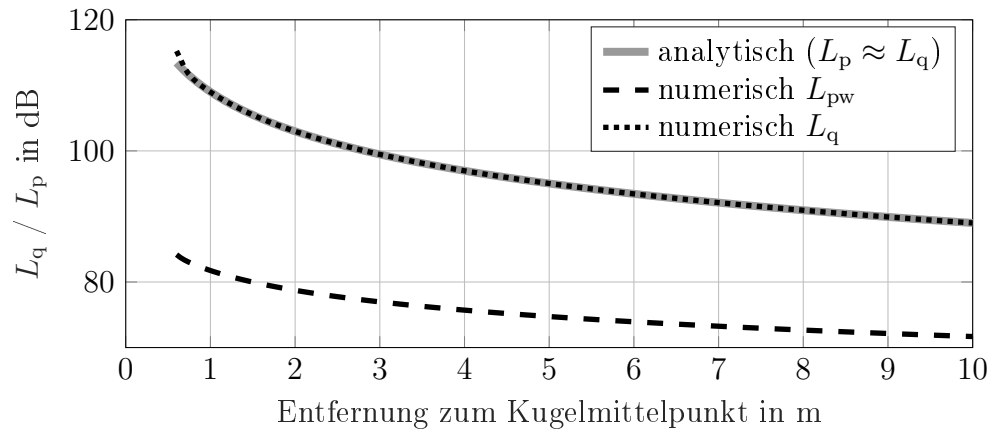


Bild 7.2: Schallpegel in radialer Richtung.

beschriebenen Verfahren erfolgt, per se nicht auf eine bessere Beschreibung der physikalischen Vorgänge rückschließen lässt.

In einem zweiten Schritt der Untersuchung wird bei gleichbleibender Diskretisierung die Abhängigkeit des Berechnungsfehlers von der Frequenz untersucht. Hierzu wird die Frequenz in äquidistanten 100 Hz Schritten von 1 kHz auf 20 kHz erhöht. In Bild 7.3 ist die Veränderung des Dirichletfehlers bezogen auf den Ausgangsfehler  $\varepsilon_{D,f_0}$  bei 1 kHz dargestellt. Es wird deutlich, dass trotz der extrem groben Diskretisierung und des weiten betrachteten Frequenzbereichs mit einer maximalen Veränderung des Fehlers um gut 2% des Ausgangsfehlers tatsächlich von einer nahezu frequenzunabhängigen Diskretisierung ausgegangen werden kann.

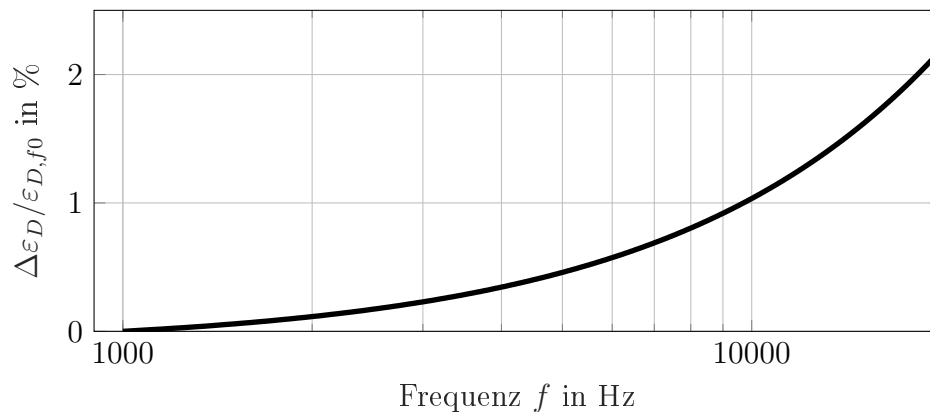


Bild 7.3: Veränderung des Dirichletfehlers über der Frequenz.

## 7.2 Monopolquelle im Innenraum

Das zuvor gezeigte Außenraumproblem stellt keinen klassischen Anwendungsfall der Energiemethoden dar. Aufgrund der Vernachlässigung von Interferenzen können im Außenraum keine Direktivitäten dargestellt werden, welche in vielen Anwendungen von besonderem Interesse sind. Die akustischen Energiemethoden setzen vielmehr diffuse Felder voraus, wie sie im Innenraum bei hohen Frequenzen und damit einhergehender Modendichte auftreten. Aus diesem Grund wird im Folgenden ein einfaches Innenraumbispiel untersucht, für das zugleich eine semi-analytische Lösung vorliegt.

### 7.2.1 Modellbildung

Es wird der in Bild 7.4 dargestellte quaderförmige Raum untersucht. Er weist in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung die Dimensionen  $L_x = 30$  m,  $L_y = 20$  m und  $L_z = 5$  m auf. An der Position  $\mathbf{x}_0 = (10$  m,  $8$  m,  $0,7$  m) wird eine Punktquelle mit 1 W akustischer Eingangsleistung platziert. Sie wird im EBEM-Modell gemäß Abschnitt 3.4 berücksichtigt und die Wände werden mit einem einheitlichen Absorptionsgrad von  $\alpha = 20\%$  beaufschlagt. Es soll ein Terzband mit einer Mittenfrequenz von  $f_c = 1$  kHz untersucht werden und für die Raumluft wird  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>,  $c = 340$  m/s und  $\eta = 1 \cdot 10^{-4}$  angenommen. Die Feldgrößen werden in einer Ebene parallel zu  $xy$ -Ebene bei  $z = 1,5$  m ausgewertet.

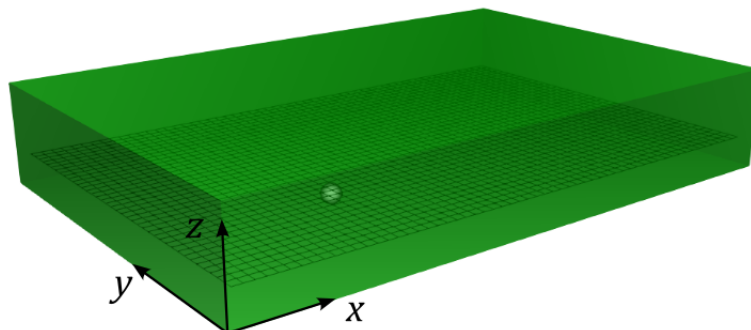


Bild 7.4: Innenraum mit Punktquelle und Auswerteebene.

## 7.2.2 Referenzlösung

Zum Abgleich mit der EBEM-Lösung wird eine Lösung als Superposition analytisch berechneter Raummoden herangezogen. Nach [81] ergibt sich für einen Raum mit großer Wandimpedanz

$$p \approx -4\pi \frac{S}{V} \sum_n \frac{\Psi(\mathbf{x}, n) \Psi(\mathbf{x}_0, n)}{k^2 - k^2(n) + ik/c\tau}, \quad (7.2)$$

dabei bezeichnet  $S$  die Monopolamplitude,  $V$  das Raumvolumen,  $\tau$  die charakteristische Zeit des Sabine-Franklin-Jaeger-Modells und  $\Psi(\mathbf{x}, n)$  die Eigenfunktionen der Helmholtzgleichung auf dem Berechnungsgebiet mit den zugehörigen Eigenwerten  $k(n)$ . Sie bestimmen sich zu

$$\Psi(\mathbf{x}, n_x, n_y, n_z) = A \cos \frac{n_x \pi x}{L_x} \cos \frac{n_y \pi y}{L_y} \cos \frac{n_z \pi z}{L_z} \quad (7.3)$$

und

$$k^2(n_x, n_y, n_z) = \pi^2 \left[ \left( \frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{L_y} \right)^2 + \left( \frac{n_z}{L_z} \right)^2 \right] \quad (7.4)$$

wobei in Gleichung 7.2 für eine verkürzte Schreibweise Kombinationen der natürlichen Zahlen  $n_x, n_y, n_z$  durch einen einzigen Index  $n$  ersetzt wurden.

Die Reihe 7.2 muss nach einer endlichen Zahl von Gliedern abgebrochen werden. Wie viele Glieder zu berücksichtigen sind, ist frequenzabhängig und lässt sich nicht direkt abschätzen. Im numerischen Experiment konnte jedoch festgestellt werden, dass eine Erhöhung der Modenzahl von  $n_x = n_y = n_z = 200$  auf  $n_x = n_y = n_z = 250$  für die obere Grenzfrequenz des Terzbands mit einer Veränderung der Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung des akustischen Drucks über circa 24100 Feldpunkte von unter 1% einhergeht. Das Berechnungsergebnis wird daher für  $n_x = n_y = n_z = 200$  als auskonvergiert betrachtet.

In Bild 7.5(a) ist der so berechnete Schalldruckpegel in der Auswerteebene für die Frequenz  $f = 1000$  Hz dargestellt. Es sind deutlich die komplexen Interferenzmuster zu erkennen, die lokal extrem große Schwankungen des Pegels begründen. Um der damit einhergehenden Sensitivität gegenüber Unsicherheiten, beispielsweise bezüglich der Geometrie, zu begegnen, werden in der praktischen Anwendung häufig auch Summenpegel für Frequenzbänder betrachtet.

Angelehnt hieran ist in Bild 7.5(b) der über das Terzband mit Mittenfrequenz 1000 Hz gemittelte Schalldruckpegel dargestellt. Hierzu wurde Gleichung 7.2 für 44 äquidistant

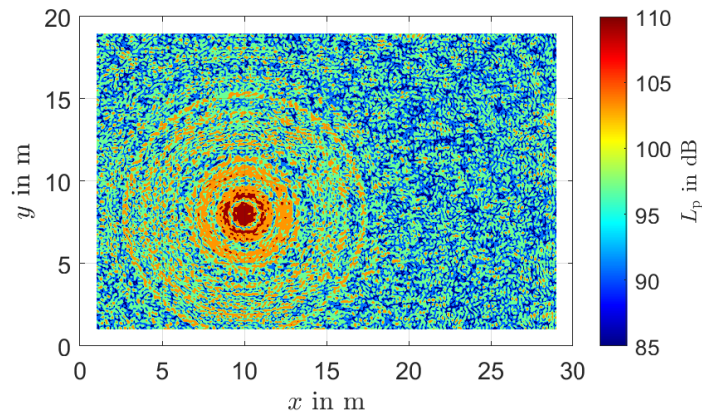
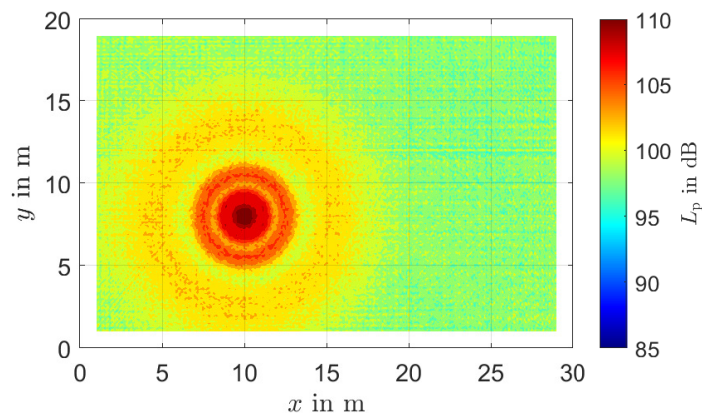
(a) für die Einzelfrequenz  $f = 1000$  Hz(b) gemittelt aus 44 Einzelfrequenzen im Terzband mit der Mittenfrequenz  $f_c = 1000$  Hz

Bild 7.5: Ergebnisse der modalen Lösung.

über das Frequenzband verteilte Einzelfrequenzen gelöst. Das sich aus der Mittelung ergebende Schallfeld weist einen wesentlich glatteren Verlauf auf und kann als Referenz für eine energetische Lösung des Problems genutzt werden.

### 7.2.3 Ergebnisse

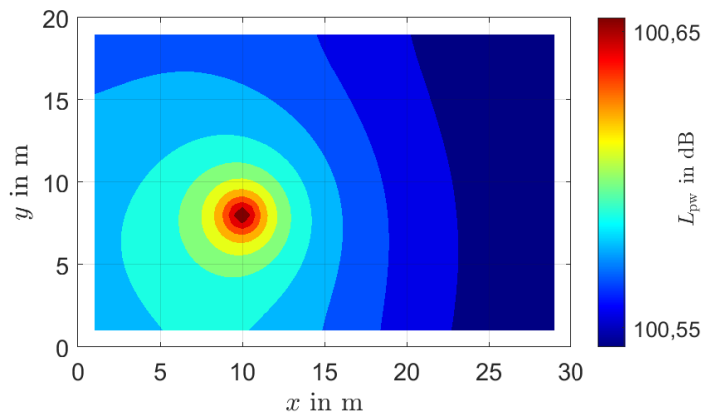
Für die EBEM-Lösung wurde in diesem Fall ein verhältnismäßig feines Netz bestehend aus 6800 linearen Lagrange-Elementen mit konstanten Ansatzfunktionen genutzt. Die minimale Elementgröße beträgt 0,5 m, womit für eine konventionelle Helmholtz-BEM valide Ergebnisse bis circa 100 Hz zu erwarten wären.

In Bild 7.6 sind die Berechnungsergebnisse der EBEM in der Auswerteebene dargestellt. Zu beachten ist, dass für den in Bild 7.6(a) dargestellten äquivalenten Schalldruckpegel eine abweichende Farbskala gewählt wurde und das Berechnungsergebnis tatsächlich einen räumlich nahezu konstanten Pegel liefert. Für ein ideal diffuses Schallfeld, wie es in

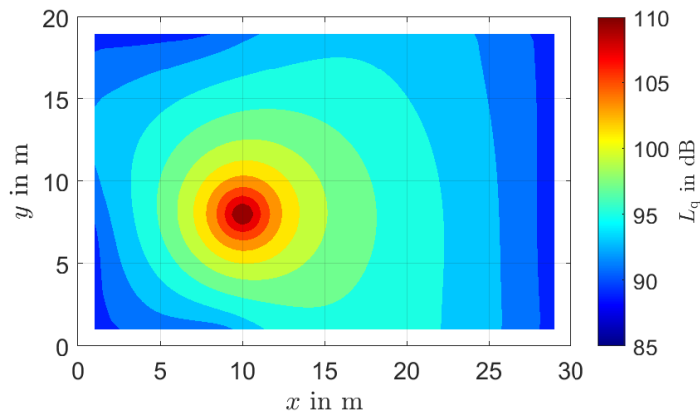
guter Näherung in einem schwach absorbierenden Innenraum vorliegt, wird das Schallfeld durch einen konstanten Wert jedoch auch gut abgebildet, größere Abweichungen ergeben sich insbesondere in direkter Nähe zur Punktquelle.

Die in Bild 7.6(b) dargestellte Lösung für den Schallintensitätspegel bildet das semi-analytisch berechnete Feld aus Bild 7.5(b) in der Umgebung der Quelle gut ab, fällt aber zu den Rändern hin deutlich stärker ab, so dass sich hier große Abweichungen ergeben. Dabei ist jedoch zu beachten, dass für den hier betrachteten Fall eines weitgehend diffusen Feldes keine Ausbreitung als ebene Welle angenommen werden kann und die zuvor getroffene Annahme  $L_q \approx L_p$  somit ebenfalls nicht mehr gültig ist.

Zur besseren Veranschaulichung sind in Bild 7.7 die Differenz zwischen den beiden mit der EBEM berechneten Feldern und der semi-analytischen Lösung dargestellt. Es wird deutlich, dass die Energiedichte-basierte Lösung in weiten Bereichen sehr



(a) als zum Schalldruckpegel umgerechnete Energiedichte  $L_{pw}$

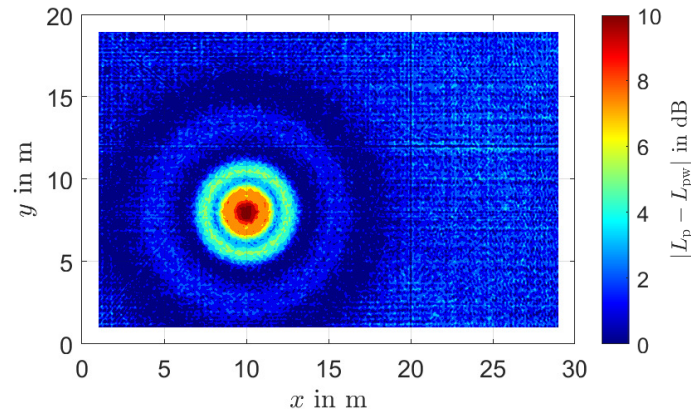


(b) als Schallintensitätspegel  $L_q$

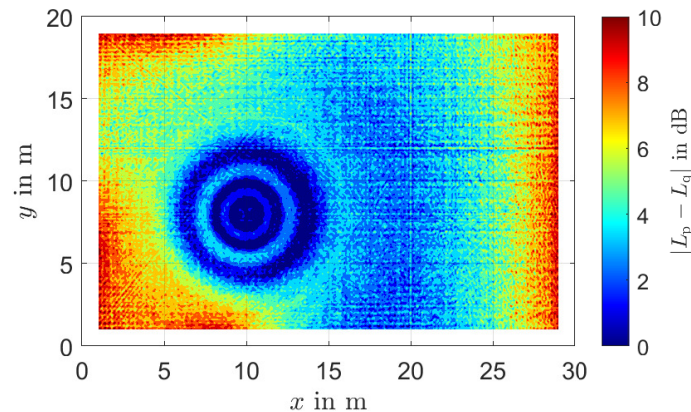
Bild 7.6: Ergebnisse der EBEM.

gute Übereinstimmung mit der modalen Lösung zeigt. Der mit der EBEM berechnete Schallintensitätspegel bildet demgegenüber vorrangig das Direktschallfeld der Quelle und damit eben den Bereich, in dem die Energiedichte-Lösung die größten Abweichungen zeigt, gut ab.

Zur Einordnung der Ergebnisse muss auf den drastischen Unterschied in den Berechnungszeiten hingewiesen werden. Während die EBEM-Berechnung innerhalb weniger Sekunden abgeschlossen ist, erfordert die Berechnung der modalen Lösung für die 44 Einzelfrequenzen in der vorliegenden nicht optimierten Implementierung mehrere Tage Berechnungszeit.



(a) Differenz aus Energiedichte-basierter Lösung (Bild 7.6(a)) und modaler Lösung (Bild 7.5(b))



(b) Differenz aus Intensität-basierter Lösung (Bild 7.6(b)) und modaler Lösung (Bild 7.5(b))

Bild 7.7: Betragmäßige Differenzen der EBEM-Lösungen mit der semi-analytischen Lösung.

## 7.3 Lautsprechersimulation im Innenraum

Dieser komplexere Testfall soll einen typischeren realitätsnahen Anwendungsfall repräsentieren. Es wird ein abstrahierter generischer Fahrzeuginnenraum untersucht, der von

einem elektrodynamischen Lautsprecher beschallt wird. Die wechselseitige Kopplung elektrischer, strukturdynamischer und akustischer Subsysteme erhöht die Komplexität des Problems. Der untersuchte Aufbau wurde aber dabei nicht mit dem Ziel der möglichst detailgetreuen Nachbildung eines tatsächlichen Innenraums entworfen, sondern dient an der Technischen Universität Hamburg als Demonstrator für Forschung und Lehre. Im Folgenden wird dargelegt, wie die EBEM mit einem analytischen Modell des Lautsprechers gekoppelt werden kann, um die von einem Lautsprecher an vier angenommen Empfängerpositionen induzierten Pegel vorherzusagen. Die Simulationsergebnisse werden Messdaten aus einem physischen Modell des Innenraums gegenübergestellt.

### 7.3.1 Fahrzeugmodell und Prüfstand

Der Prüfstand ist in Bild 7.8 dargestellt, seine Aufbau ist detailliert in [35] beschrieben. Es handelt sich um eine grob an eine Fahrzeugform angelehnten Einhausung aus relativ steifen Holz- beziehungsweise Verbundwerkstoffplatten. Die Abmessungen betragen circa  $2\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0,5\text{ m}$ . Die Geometrie kann im Detail Anhang B entnommen werden.



Bild 7.8: Prüfstand während des Aufbaus in einem Büroraum.

Der Prüfstand verfügt über 14 Einbaupositionen für verschiedene Lautsprecher, die einzeln oder gleichzeitig über einen handelsüblichen HiFi-Verstärker betrieben werden. In der

hier untersuchten Ausbaustufe verfügt der Innenraum weder über Auskleidungen noch Einbauten. An verschiedenen Positionen innerhalb des Innenraums sind Messmikrophone positioniert. Aufgezeichnet werden die Eingangsspannungen der Lautsprecher sowie die Schalldrücke an den einzelnen Messpositionen. Die Messungen wurden in einem reflexionsarmen Halbraum durchgeführt.

### 7.3.2 Lautsprechermodellierung

Exemplarisch wird ein einzelner Hochtonlautsprecher des Typs *Visaton SC10 N* untersucht. Es wird ein analytisches 1D-Modell zur Berechnung der mittleren Intensität auf der Lautsprechermembran aus der Eingangsspannung aufgestellt, welches später einseitig mit dem EBEM-Modell gekoppelt wird. Das Lautsprechermodell bildet dabei unter einer Reihe von vereinfachenden Annahmen den elektrischen Antrieb, die mechanischen Komponenten sowie die dynamisch Last des bewegten Fluids ab. Dem Modell liegen die folgenden Annahmen zugrunde:

- Die Eingangssignale werden als klein vorausgesetzt, so dass ein lineares, zeitinvariantes System angenommen werden kann.
- Die Lautsprechermembran wird als starrer Kolben angenommen.
- Es wird zunächst angenommen, dass der Kolbenstrahler in einen unendlichen Halbraum abstrahlt. Rückwirkungen der Raumakustik auf den Lautsprecher werden also vernachlässigt.

Unter den vorgenannten Voraussetzungen ergibt sich nach [8] die Geschwindigkeit der Membran  $v_M$  in Abhängigkeit der Eingangsspannung  $u_{in}$  am Lautsprecher, zu

$$v_M = \frac{Bl}{(R_E + i\omega L_E) Z_{MT}} u_{in}. \quad (7.5)$$

Dabei ist die totale, auf den mechanischen Bereich bezogene Impedanz

$$Z_{MT} = \frac{(Bl)^2}{R_G + R_E + i\omega L_E} + i\omega M_{MD} + R_{MS} + \frac{1}{i\omega C_{MS}} + 2S_D \rho c \left( 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{H_1(2ka)}{ka} \right) \quad (7.6)$$

mit der Besselfunktion  $J_1$  und der Struvefunktion  $H_1$ . Die weiteren in Gleichung 7.5 und 7.6 eingeführten Parameter und ihre Bedeutung sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Sie lassen sich messtechnisch bestimmen oder sind aus Datenblättern des Herstellers bekannt. Hier wurde auf die in [35] verwendeten Parameter zurückgegriffen, welche aus *Boxsim*, einem

Parameter	Formelzeichen	Wert	Einheit
Effektive Membranfläche	$S_D$	5	cm <sup>2</sup>
Effektiver Membranradius	$a$	$\sqrt{S_D/\pi}$	cm
Kraftfaktor	$Bl$	1,0821	Tm
Induktivität der Schwingspule	$L_E$	0,036	mH
Gleichstromwiderstand der Schwingspule	$R_E$	6,9	$\Omega$
Widerstand der Spannungsquelle	$R_G$	0	$\Omega$
Masse von Membran und Schwingspule	$M_{MD}$	0,0869	g
Mechanischer Verlustwiderstand (Dämpfung) der Aufhängung	$R_{MS}$	0,4351	N · s/m
Nachgiebigkeit (Kehrwert der Steifigkeit) der Aufhängung	$C_{MS}$	0,16859	mm/N
Dichte der Luft	$\rho$	1,2	kg/m <sup>3</sup>
Schallgeschwindigkeit in der Luft	$c$	340	m/s

Tabelle 7.1: Parameter des Lautsprechermodells.

vom Hersteller veröffentlichten Programm zur Auslegung von Lautsprechersystemen, extrahiert wurden.

Die Gleichung 7.5 kann nun genutzt werden, um die Spulen- und somit die Membrangeschwindigkeit eines Lautsprechers in Abhängigkeit der Frequenz und der Eingangsspannung zu bestimmen. Die Neumann-Randbedingung der EBEM wird jedoch durch eine Intensität definiert. Sie kann bestimmt werden, indem nach [8] der mittlere akustische Druck  $p_M$  auf der Membran zu

$$p_M = \rho_{LC} \left( 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{H_1(2ka)}{ka} \right) \cdot v_M \quad (7.7)$$

berechnet wird, womit die Intensität auf der Membran schließlich nach Gleichung 2.31 bestimmt werden kann. In Bild 7.9 ist der so berechnete Schallintensitätspegel des Lautsprechers direkt auf der Membran für eine frequenzunabhängige Eingangsspannung von  $u_{in} = 1$  V dargestellt.

### 7.3.3 EBEM Modell

Die Geometrie des Prüfstands wurde für die akustische Simulation auf Basis von NURBS-Ansatzfunktionen diskretisiert und das in Bild 7.10 abgebildete Netz mit 91 Patches und 1901 Freiheitsgraden erstellt. Die in Bild 7.11 vergrößert dargestellte Lautsprechergeometrie selbst ist insoweit vereinfacht worden, als dass die Membran als ebene Scheibe

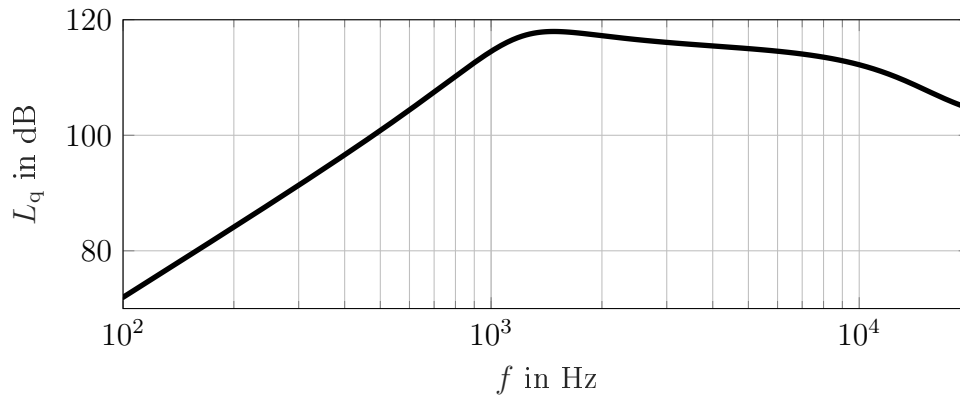


Bild 7.9: Berechneter Schallintensitätspegel direkt auf der Lautsprechermembran bei  $u_{\text{in}} = 1 \text{ V}$ .

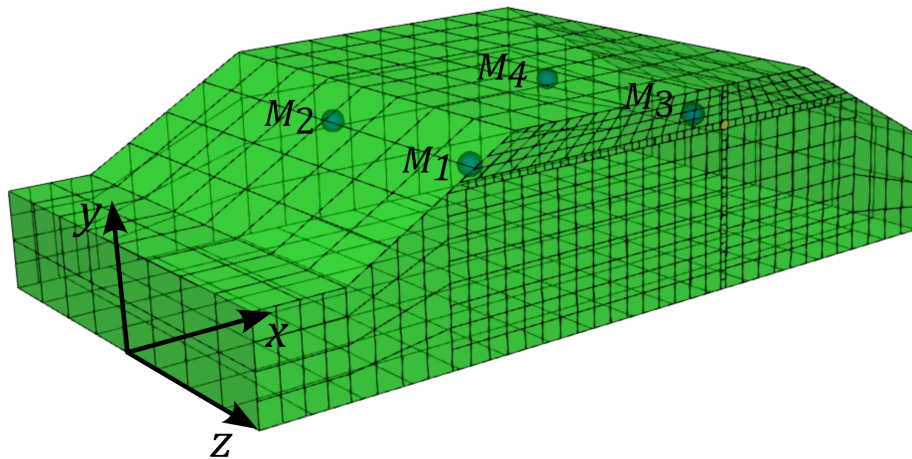


Bild 7.10: Nicht-konforme NURBS-Vernetzung des Fahrzeuginnenraums mit Lautsprecher und Mikrofonpositionen  $M_1 - M_4$ .

angenommen wird. Dies steht in Einklang mit der in Unterabschnitt 7.3.2 getroffenen Annahme eines Kolbenstrahlers. Schon diese vereinfachte Geometrie wäre jedoch mit herkömmlichen Lagrange-Elementen nicht exakt beschreibbar, während sie mit den NURBS-Ansatzfunktionen durch ein einzelnes Patch exakt abgebildet werden kann.

Aufgrund der bereits in Unterabschnitt 4.2.3 beschriebenen Schwierigkeiten bei der direkten Verwendung von CAD-Daten hinsichtlich getrimmter Flächen und Netzverfeinerung war trotz der eher einfachen Geometrie bei der Netzerstellung ein verhältnismäßig hoher händischer Aufwand erforderlich. Die Verwendung diskontinuierlicher Elemente erlaubt jedoch die Diskretisierung mittels eines nicht-konformen Netzes, die geometrischen Knoten benachbarter Patches und Elementen müssen also nicht zusammenfallen. Entsprechende Bereiche sind in Bild 7.10 entlang der seitlichen Kanten, sowie in Bild 7.11

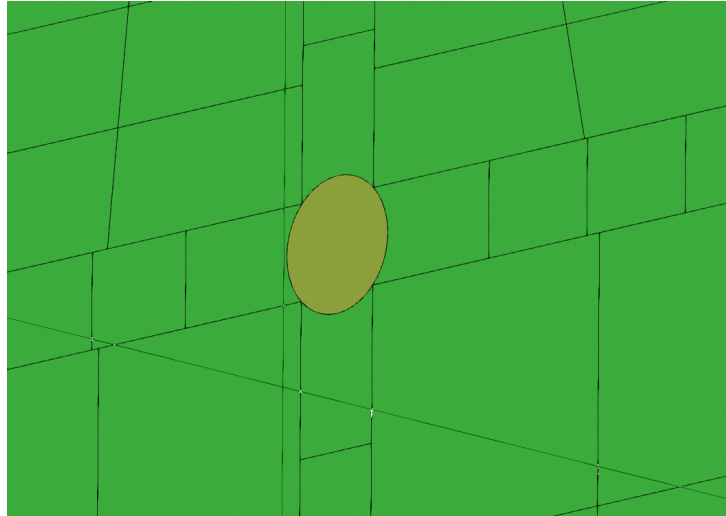


Bild 7.11: Vergrößerter Ausschnitt des in Bild 7.10 dargestellten Netzes mit der Lautsprechermembran (gelb).

zu erkennen. Hiervon unberührt bleibt, dass der Rand in der verwendeten direkten Formulierung geschlossen sein muss und keine Überlappungen auftreten dürfen.

Die nach Unterabschnitt 7.3.2 bestimmte Intensität wird als Neumann-Randbedingung auf der Lautsprechermembran des EBEM-Modells vorgeschrieben, die verbleibende Fläche wird mit einer Robin-Randbedingung belegt, wobei der Absorptionskoeffizient uniform zu  $\alpha = 0,1$  abgeschätzt wird. Dieser Parameter unterliegt einer hohen Unsicherheit, es konnten hiermit jedoch in [35] bereits mittels einer konventionellen FEM-Lösung bis 6 kHz gute Ergebnisse erzielt werden. Für die Luft wurde weiterhin  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 340 \text{ m/s}$  und  $\eta = 1 \cdot 10^{-4}$  angenommen.

Die Positionen der Messmikrofone  $M_1 - M_4$ , an denen die Feldgrößen im Postprocessing ermittelt werden, sind in Tabelle 7.2 bezüglich des in Bild 7.10 dargestellten Koordinatensystems angegeben. Der Mittelpunkt der Lautsprechermembran ist mit  $[x,y,z] = [1,29 \text{ m}, 0,405 \text{ m}, 0,582 \text{ m}]$  definiert.

Mikrofon	$x$ in m	$y$ in m	$z$ in m
$M_1$	0,76	0,35	0,29
$M_2$	0,76	0,35	-0,29
$M_3$	1,47	0,35	0,29
$M_4$	1,47	0,35	-0,29

Tabelle 7.2: Koordinaten der Messmikrofone.

### 7.3.4 Ergebnisse

In Bild 7.12 ist der schmalbandig gemessene Schalldruckpegel an den verschiedenen Mikrofonpositionen den simulierten Schallpegeln gegenübergestellt. Es sind qualitativ ähnliche Verläufe zu erkennen. Die Messung wird jedoch stark durch die einzelnen Raummoden geprägt, welche sich im Spektrum als eine Vielzahl lokaler Minima und Maxima äußern. Gerade im höheren Frequenzbereich ist durch die hohe Modendichte daher kaum noch eine aussagekräftige Auswertung der Daten möglich.

Um eine bessere Analyse der Messdaten und Vergleichbarkeit zu den Simulationsergebnissen zu ermöglichen, werden die Summenpegel der einzelnen Terzbänder betrachtet. Sie sind in Bild 7.13 dargestellt. Wie zu erwarten ist, wird bei tiefen Frequenzen auch der Summenpegel noch relativ stark durch einzelnen Moden dominiert. In der Raumakustik ist zur Unterscheidung eines unteren Frequenzbereichs, in dem einzelne Moden relevant sind, und eines oberen Frequenzbereichs, der durch ein diffuses Schallfeld geprägt ist, die Schroeder-Frequenz  $f_S$  als Grenzfrequenz bekannt. Sie kann zu

$$f_S \approx 2000 \sqrt{\frac{0,16}{\alpha S}} \quad (7.8)$$

mit der Raumbofläche  $S$  abgeschätzt werden [60]. Im vorliegenden Fall ergibt sich  $f_S \approx 1350$  Hz. Die Betrachtung der gemessenen Terzbandpegel in Bild 7.13 bestätigt diese Regel weitgehend, da sich für Frequenzen über 1350 Hz deutlich glattere Verläufe der Spektren einstellen. Gleichzeitig wird auch offensichtlich, dass für die betrachteten Messpositionen die stärksten Schwankungen im Bereich unter 200 Hz auftreten und der Frequenzbereich  $200 \text{ Hz} < f < 1350 \text{ Hz}$  weniger stark von Interferenzeffekten beeinträchtigt wird.

Werden die einzelnen Messpositionen untereinander verglichen, sind in den Schmalbandspektren in Bild 7.12 die erwartbaren Unterschiede offenkundig. In den Terzspektren in Bild 7.13 zeigt sich jedoch, dass sich an allen Positionen sehr ähnliche Pegel einstellen. Einzig an dem Mikrofon  $M_3$ , welches dem Lautsprecher am nächsten liegt (siehe Bild 7.10), lassen sich deutlich erhöhte Pegel erkennen. Diese Beobachtung spricht für ein recht homogenes und diffuses Schallfeld im betrachteten Innenraum.

Beim Vergleich der Simulationsergebnisse mit der Messung zeigt sich ein ähnliches Bild wie zuvor in Abschnitt 7.2. So lässt sich für den äquivalenten Schalldruckpegel auf Basis der Energiedichte über weite Frequenzbereiche eine in Relation zum geringen numerischen Aufwand sehr gute Übereinstimmung mit der Messung feststellen. Die Größe ist

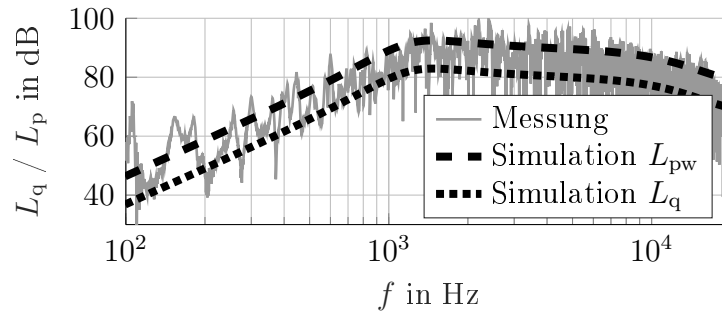
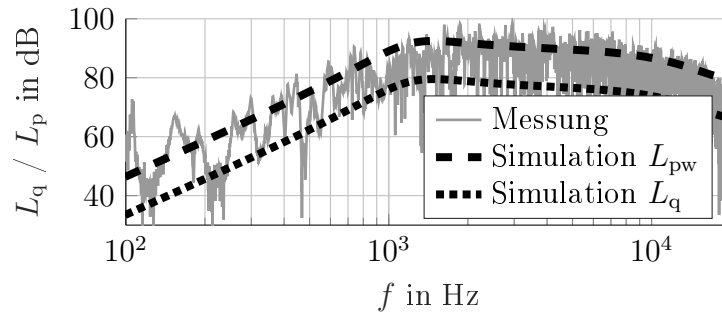
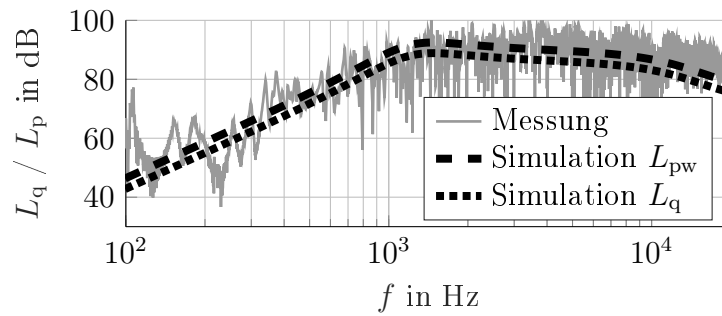
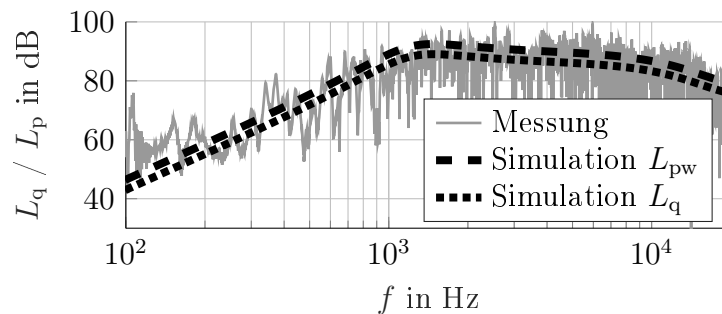
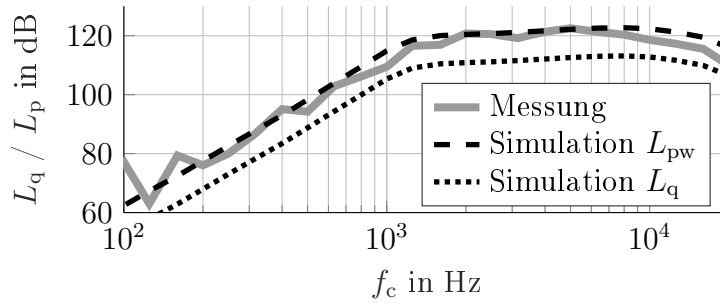
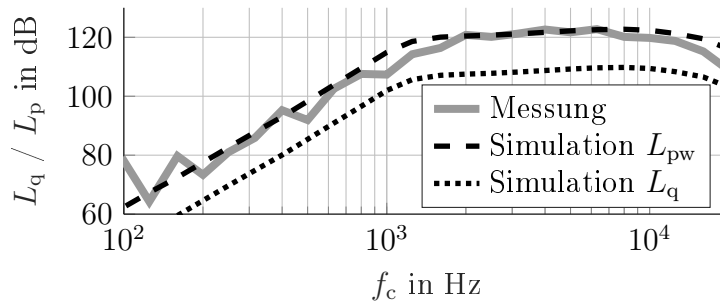
(a)  $M_1$ (b)  $M_2$ (c)  $M_3$ (d)  $M_4$ 

Bild 7.12: Gemessene Schmalband-Schalldruckpegel  $L_p$  und mittels EBEM simulierte Schallintensitätspegel  $L_q$  für die Auswertepositionen  $M_1 - M_4$ .

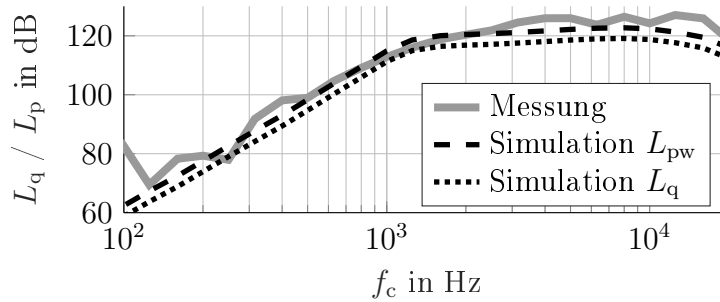
jedoch nicht geeignet, lokale Effekte ausreichend abzubilden, so dass der Pegel für das Mikrofon  $M_3$  unterschätzt wird. Der Schallintensitätspegel hingegen zeigt eine große lokale Abhängigkeit, diese resultiert, insbesondere für die weiter von der Quelle entfernten



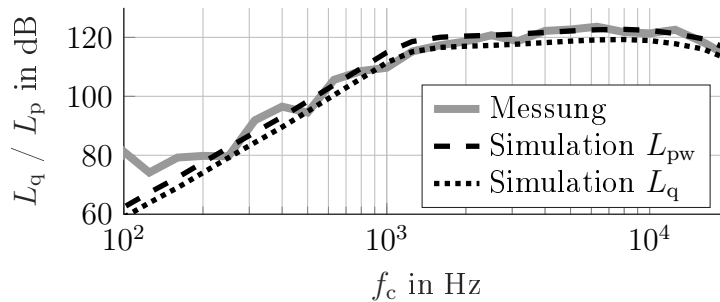
(a) M1



(b) M2



(c) M3



(d) M4

Bild 7.13: Gemessene Terzband-Summenpegel  $L_p$  und mittels EBEM simulierte Schallintensitätspegel  $L_q$  für die Auswertepositionen  $M_1 - M_4$ .

Messpositionen  $M_1$  und  $M_2$ , in einer starken Abweichung von der Messung. An keiner der untersuchten Positionen erreicht sie eine bessere Übereinstimmung mit der Schalldruckpegelmessung als der auf der Energiedichte basierend bestimmte Pegel.

## 7.4 Diskussion und Fazit

Das hier im Rahmen repräsentativer Beispiele eingesetzte neue Verfahren erlaubt die Abschätzung akustischer Pegel an beliebigen Punkten innerhalb des zu untersuchenden Berechnungsgebiets. Es zielt vorrangig auf Innenraumprobleme ab und ermöglicht hier im Rahmen des Gültigkeitsbereichs auch eine gute Genauigkeit. Es zeigt sich jedoch, dass, zumindest für die untersuchte Problemklasse der Fluidschallausbreitung, aufgrund der geringen Dämpfung und des bekannten Widerspruchs im Abklingverhalten der Lösung der Energieflussgleichung gegenüber Punktquellen die Felder räumlich nicht genau aufgelöst werden können. Die aus der berechneten Energiedichte resultierenden sehr homogenen Felder entsprechen weitgehend der Lösung einer SEA und bieten somit kaum einen Informationsgewinn. In der praktischen Anwendung ist eine Abgrenzung zur SEA eher darin zu sehen, wie die Methoden in die Werkzeugkette integriert werden und mit bestehenden Modellen gekoppelt werden können.

Gegenüber klassischen Verfahren wie der FEM oder BEM kann die implementierte Methode hingegen durch extrem stark verkürzte Berechnungszeiten und große Robustheit gegenüber unscharfen Parametern überzeugen.

Es konnte gezeigt werden, dass das neue Verfahren eine nahezu komplett frequenzunabhängige Diskretisierung und somit sehr effiziente Berechnungen ermöglicht. Insbesondere konnte anhand eines nicht-trivialen NURBS-Netzes in Kombination mit einem einfachen analytischen Lautsprecher-Modell demonstriert werden, wie die Simulation potenziell in einen Entwurfsprozess integriert werden kann. Weitere Kopplungen, beispielsweise mit energetischen Strukturmodellen sind denkbar und erweitern den Anwendungsbereich.

Ein Abgleich der simulierten Schallintensitätspegel mit gemessenen Intensitäten in typischen Innenraumanwendungen wäre für weitere Untersuchungen anzustreben, da für das komplexe Schallfeld im Innenraum keine Analogie zwischen Schalldruckpegel und Schallintensitätspegel vorausgesetzt werden kann.



# 8 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Erkenntnisse der Arbeit zusammengefasst und es wird ein Ausblick auf mögliche anschließende Forschungsfragen gegeben.

## 8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden energetische Methoden zur Modellierung hochfrequenter Schallausbreitung untersucht und die bisher bekannte EBEM erweitert. Die Erweiterung soll insbesondere eine vereinfachte Modellerstellung und eine weiter beschleunigte Berechnung der Modelle ermöglichen und somit zu kürzeren Entwicklungszyklen beitragen.

Es wurde zunächst im Kapitel 2 die relevanten Grundlagen der numerischen Akustik zusammengefasst und somit der Hintergrund der Arbeit dargestellt. Dabei wurden drei verschiedenen Ansätze zur Formulierung von Differentialgleichungen auf Basis energetischer Variablen nämlich die Energieflussgleichung, die modifizierte Energieflussgleichung und der Intensity-Potential-Approach eingeführt. Diese wurden in Kapitel 3 weiter untersucht. Im Ergebnis wurde festgestellt, dass die modifizierte Energieflussgleichung und der Intensity-Potential-Approach im Falle eines verlustfreien Ausbreitungsmediums identisch sind. Es wurde zudem aufgezeigt, dass auch die Energieflussgleichung in der Lage ist, für eine Punktquelle die Intensität als Feldgröße physikalisch korrekt abzubilden, während dies für die Energiedichte bekanntlich nicht möglich ist. Der Umstand ist insofern besonders relevant, da sich die alternativen Formulierungen effektiv auf die Intensität als Zustandsgröße beschränken. Es wurde weiterhin dargelegt, dass auf Basis der Energieflussgleichung formulierte Verfahren nicht zur Lösung einer Differentialgleichung auf beliebigen Gebieten geeignet sind und sie daher nicht als (indirekte) Boundary-Elemente-Methode angesehen werden sollten.

Unter Berücksichtigung aller Aspekte wurde eine Boundary-Elemente-Methode zur Lösung der Energieflussgleichung ausgewählt und die entsprechende Randintegralgleichung hergeleitet. Dabei wurde eine Robin-Randbedingung in Abhängigkeit der Wandimpedanz vorgeschlagen. Sie ergänzt die bislang meist in Abhängigkeit der Absorption getroffene Formulierung.

Im Kapitel 4 wurde allgemein die Diskretisierung der Randintegralgleichung und insbesondere die isogeometrische Analyse auf Basis von NURBS-Ansatzfunktionen beschrieben. Dabei wurde erstmals eine isogeometrische EBEM implementiert. Es wurde auf die besonderen Eigenschaften der NURBS-Ansatzfunktionen und auf die derzeit noch vorhandenen praktischen Probleme bei der Ableitung von Berechnungsmodellen direkt aus CAD-Daten eingegangen. Zudem wurde gezeigt, dass der Entfall des Geometriefehlers unter günstigen Umständen extrem hohe Genauigkeiten ermöglicht. Die Darstellung komplexer Geometrien mit nur verhältnismäßig wenigen Steuerpunkten verspricht, im Zusammenspiel mit der frequenzunabhängigen Diskretisierung der EBEM, potenziell kleine Gleichungssysteme. Eine gegebenenfalls erforderliche Verfeinerung der Diskretisierung kann im Kontext der NURBS, neben den bekannten  $p$ - und  $h$ -Verfeinerung, auch mit der  $k$ -Verfeinerung erfolgen. Sie wurde ebenfalls implementiert und untersucht. Dabei konnte ihre besondere Effizienz festgestellt werden.

Die numerische Integration und die Handhabung der hierbei auftretenden singulären Signale erfordert in der BEM besondere Beachtung. Im Kapitel 5 wurden die umgesetzten Verfahren beschrieben. Neben einigen Erwägungen zur praktischen Implementierung im Kontext der isogeometrischen Analyse spielen hierbei besonders die quasi-singulären Integrale eine Rolle. Zu ihrer Handhabung wurden Strategien zur Unterteilung des Integrationsgebiets und die sinh-Transformation theoretisch untersucht. Zudem wurde als neue Strategie zur Behandlung quasi-singulärer Integrationsgebiete, die sich auf demselben Patch wie der betrachtete Kollokationspunkt befinden, eine erweiterte Polarkoordinatentransformation vorgeschlagen.

Zur weiteren Beschleunigung des Berechnungsverfahrens wurde im Kapitel 6 die Umsetzung einer Fast-Multipole-Methode beschrieben. Gegenüber der klassischen Helmholtz- oder Laplace-BEM sind dabei einige Anpassungen des Algorithmus erforderlich geworden. Es konnte zudem eine semi-empirische Formel zur Abschätzung der erforderlichen Entwicklungslänge bestimmt werden. Es konnte schließlich gezeigt werden, dass die entwickelte FM-EBEM eine schnelle und speichereffiziente Lösung der Modell ermöglicht.

Dabei wurde jedoch auch deutlich, dass durch die Verwendung effizienterer Translationsoperatoren noch weitere Beschleunigungspotenziale ausgenutzt werden könnten.

Das entwickelte Verfahren wurde in Kapitel 7 anhand verschiedener Testfälle untersucht und dabei sowohl mit anderen Berechnungsverfahren als auch Messdaten verglichen. Dabei wurde deutlich, dass das entwickelte Verfahren in der Lage ist, auch in komplexeren, realitätsnahen Fragestellungen mit recht geringem numerischen Aufwand eine gute Abschätzung der Schalldruckpegel im Innenraum auf Basis der Energiedichte zu liefern. Die räumliche Verteilung der Energiedichten kann hierbei allerdings nicht exakt aufgelöst werden. Die berechneten Intensitäten zeigen eine erwartbar größere räumliche Variabilität und bilden im Außenraum die analytische Lösung nahezu exakt ab. Für den Innenraum bieten sich weitere messtechnische oder numerische Untersuchungen zur Bewertung der Aussagekraft dieser sekundären Feldgröße an. Es konnte zudem gezeigt werden, dass sich auf Basis der NURBS-Ansatzfunktionen auch in der hier implementierten Variante ohne Trimmungen oder lokale Verfeinerungen relativ einfache und geometrisch exakte Berechnungsmodelle erzeugen lassen. Gleichzeitig wurde deutlich, dass für einen breiten Einsatz weitere Entwicklungsarbeit zur Schaffung anwenderfreundlicher Werkzeuge zur Erzeugung beziehungsweise Ableitung der numerischen Modelle aus CAD-Daten erforderlich sind.

## 8.2 Ausblick

Die für die isogeometrische Analyse gewählten NURBS-Basisfunktionen wurden vorrangig aufgrund ihrer weiten Verbreitung in derzeitigen CAD-Systemen ausgewählt. In der Praxis zeigt sich, dass idealerweise schon bei der Erstellung der Modelle eine mögliche Verwendung zur numerischen Analyse berücksichtigt werden sollte oder anderenfalls bessere Werkzeuge zur Bearbeitung der Modelle erforderlich sind. So sind selbst für einfache ungetrimmte Geometrien Basisoperationen, wie das Hinzufügen von Knoten oder die Manipulation der Knotenmultiplizität, nicht immer einfach möglich. Grundlegende Geometrien, wie Kugeln oder Zylinder, werden zudem in CAD-Systemen häufig direkt als analytisch beschriebene Objekte definiert und müssen zur numerischen Analyse erst in eine entsprechende NURBS-Parametrisierung überführt werden. Die beschriebenen Umstände zeigen, dass für eine echte Integration von numerischer Analyse und Geometrieentwurf ein Paradigmenwechsel erforderlich ist, der zugleich auch als Chance begriffen werden kann, für beide Zielstellungen besser geeignete Basisfunktionen zu wählen. So erlauben Alternativen wie T-Splines mehr Flexibilität hinsichtlich lokaler Verfeinerung und Trimmung und sollten für weitere Entwicklungen in Betracht gezogen werden.

Die implementierten Verfahren zur Berechnung quasi-singulärer Integrale erreichen für die meisten praktischen Probleme in der EBEM eine zufriedenstellende Genauigkeit und Effizienz. Es wurde jedoch deutlich, dass dieser Aspekt im Kontext der isogeometrischen Analyse noch nicht abschließend erforscht ist. Die höhere Robustheit der Gebietsunterteilungsstrategien gegenüber Verfahren, die auf einer Koordinatentransformation beruhen, scheint implizit der Grund für deren weitere Verbreitung zu sein. In der Literatur wird der Vorteil jedoch kaum explizit benannt. Durch verbesserte Optimierungsverfahren zur Bestimmung des dichtesten Punkts auf dem Zielelement lässt sich die Robustheit der implementierten sinh-Transformation voraussichtlich weiter steigern. Das vorgeschlagene Verfahren zur Behandlung quasi-singulärer Integrale auf dem gleichen Patch sollte weiter untersucht und dabei insbesondere die Limitierungen des Verfahrens systematisch analysiert werden.

Die Umsetzung der Fast-Multipole-Methode erreicht, aufgrund der verwendeten Operatoren, noch nicht ihr volles Potential. Hier wäre eine Implementierung effizienterer Operatoren, wie sie zum Beispiel das RCR-Verfahren anbietet, erstrebenswert.

Weiterhin sollte eine Kopplung des entwickelten Verfahrens mit der EFEM zur effizienten Berechnung strukturdynamischer Komponenten angestrebt werden, um den Anwendungsbereich zu erweitern und komplexere Problemstellungen untersuchen zu können.

# A NURBS-Parametrisierung der Kreisfläche und analytische Lösungen der Integrale

## A.1 NURBS-Kreisfläche

Das kreisförmige Patch ist durch die Knotenvektoren  $\Xi = \mathbf{H} = [0,0,0,\frac{1}{2},1,1,1]$  und die in Tabelle A.1 gegebenen Steuerpunkte und -gewichte definiert. Die darin nicht gelisteten Werte für  $i,j \in [2,3]$  können durch die Symmetrien zur  $x$  und  $y$ -Achse leicht ergänzt werden, es gilt  $x_{2j} = -x_{1j}$ ,  $x_{3j} = -x_{0j}$ ,  $y_{i2} = -y_{i1}$  und  $y_{i3} = -x_{i0}$ .

$i$	$j$	$x_{ij}$	$y_{ij}$	$z_{ij}$	$w_{ij}$
0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	1
1	0	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$
0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	0	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$
1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Tabelle A.1: Steuerpunkte und -gewichte eines Quadranten des kreisförmigen Patches

## A.2 Quasi-singuläres Integral normal zum Patch

Die analytische Lösung des in Bild A.1 dargestellten Falls, bei dem der Kollokationspunkt auf der Rotationsachse normal zum Patch verschoben verschoben ist, ist durch

$$I_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} \left( \sqrt{R^2 + z_0^2} - z_0 \right) \quad (\text{A.1})$$

gegeben.

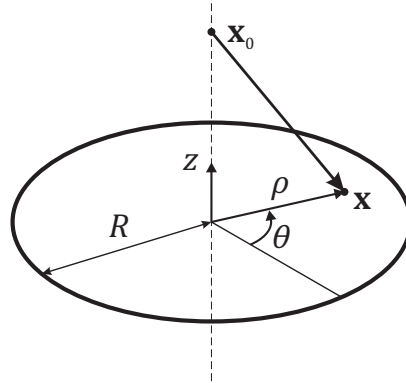


Bild A.1: Geometriedefinition zur Berechnung des Integrals bei Lage des Kollokationspunkts normal zum Patch

### A.3 Quasi-singuläres Integral in Patch-Ebene

Für den in Bild A.2 dargestellten Fall, dass der Kollokationspunkt in der Patch-Ebene liegt, kann die analytische Lösung zu

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{(\rho \sin \theta)^2 + (R + d - \rho \cos \theta)^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \\
 &= \frac{d}{2\pi} \left( E \left( \frac{-4(R+d)R}{d^2} \right) - \frac{2R+d}{d} K \left( \frac{-4(R+d)R}{d^2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

bestimmt werden. Hierbei bezeichnet  $K$  das vollständige elliptische Integral erster Art und  $E$  das vollständige elliptische Integral zweiter Art [1].

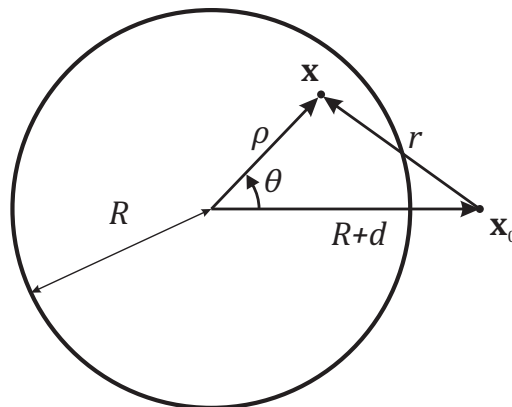


Bild A.2: Geometriedefinition zur Berechnung des Integrals bei Lage des Kollokationspunkts in Patch-Ebene

## A.4 Singuläres Integral

Für das singuläre Integral wird wie in Bild A.3 dargestellt zunächst die obere radiale Integrationsgrenze  $P(\theta)$  zu

$$P(\theta) = d \left( \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{R^2}{d^2}} - 1 - \cos \theta \right) \quad (\text{A.3})$$

bestimmt. Hiermit kann das Integral zu

$$\begin{aligned} I_{\square} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{P(\theta)} \frac{1}{r} dr d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d \left( \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{R^2}{d^2}} - 1 - \cos \theta \right) d\theta = \frac{R}{\pi} E \left( \frac{d^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

berechnet werden.

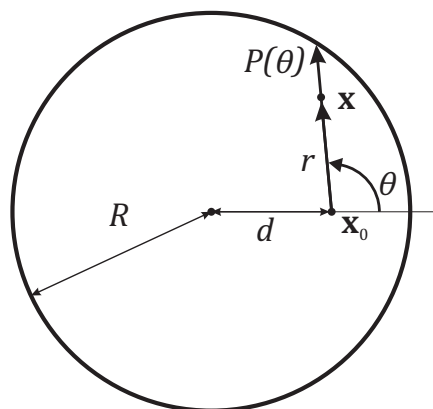


Bild A.3: Geometriedefinition zur Berechnung des Integrals bei Lage des Kollokationspunkts innerhalb des Patches



## B Geometrie des Fahrzeuginnenraummodells

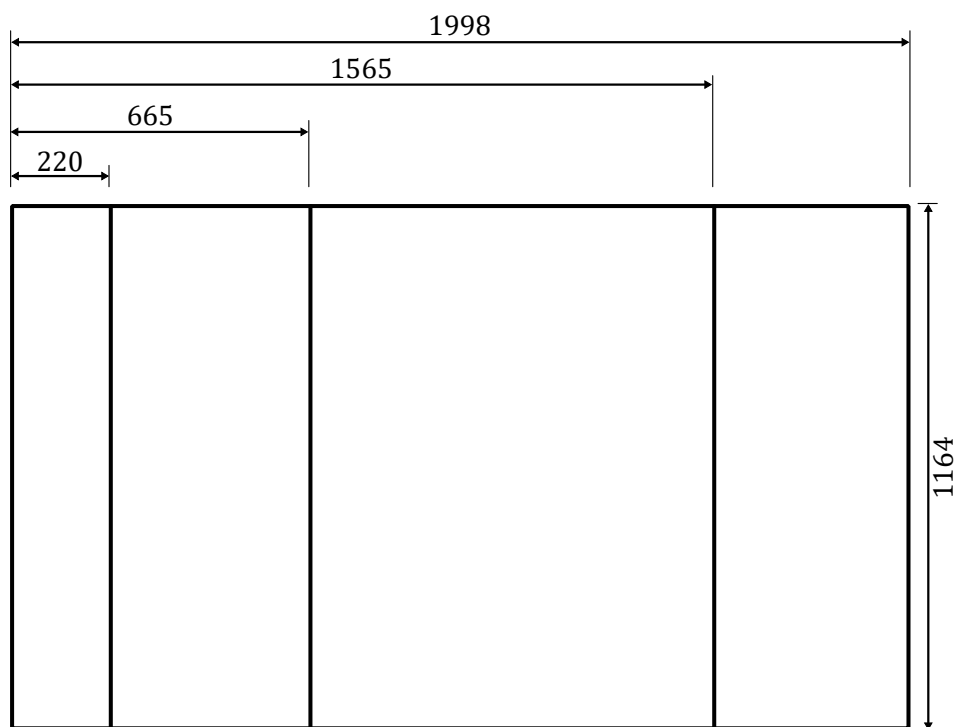


Bild B.1: Geometrie des Fahrzeuginnenraums - Draufsicht, alle Maße in mm

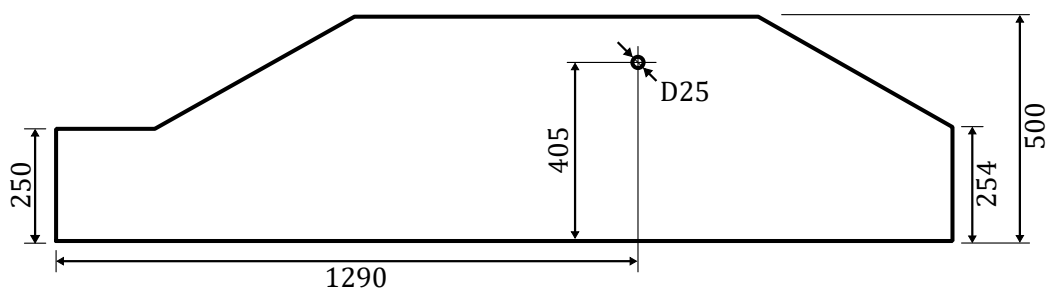


Bild B.2: Geometrie des Fahrzeuginnenraums - Seitenansicht, alle Maße in mm



# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Volume No. 55. U. S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. For sale by the Superintendent of Documents.
- [2] P. B. Andersson und E. Lindberg. Boundary element method for intensity potential approach: Predicting the radiated sound power from partially enclosed noise sources. *Acta Acustica united with Acustica*, 98(4):588–599, 2012. ISSN 16101928.
- [3] S. Balay, S. Abhyankar, M. F. Adams, S. Benson, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, E. Constantinescu, L. Dalcin, A. Dener, V. Eijkhout, J. Faibussowitsch, W. D. Gropp, V. Hapla, T. Isaac, P. Jolivet, D. Karpeev, D. Kaushik, M. G. Knepley, F. Kong, S. Kruger, D. A. May, L. C. McInnes, R. T. Mills, L. Mitchell, T. Munson, J. E. Roman, K. Rupp, P. Sanan, J. Sarich, B. F. Smith, S. Zampini, H. Zhang, H. Zhang und J. Zhang. PETSc/TAO users manual. Technical Report ANL-21/39 - Revision 3.19, Argonne National Laboratory, 2023.
- [4] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. Hughes, S. Lipton, M. A. Scott und T. W. Sederberg. Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5-8):229–263, 2010. ISSN 00457825.
- [5] G. Beer, B. Marussig und C. Duenser. *The isogeometric boundary element method*, Volume 90. Springer Nature Switzerland AG, Cham, Schweiz, 2020. ISBN 9783030233389.
- [6] K. M. Beiroth. Entwicklung von NURBS-Patches und oszillatorischen Ansatzfunktionen für akustische isogeometrische Analysen. Masterarbeit, Technische Universität Hamburg, 2019.
- [7] V. D. Belov, S. A. Rybak und B. D. Tartakovskii. Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Sov Phys Acoust*, 23(2):115–119, 1977.
- [8] L. L. Beranek und T. J. Mellow. *Acoustics: Sound fields and transducers*. Elsevier, 2012. ISBN 978-0-12-391421-7.

- [9] R. J. Bernhard und J. E. Huff. Structural-acoustic design at high frequency using the energy finite element method. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 21(3):295–301, 1999. ISSN 15288927.
- [10] S. Besset, M. N. Ichchou und L. Jézéquel. A coupled Bem and energy flow method for mid-high frequency internal acoustic. *Journal of Computational Acoustics*, 18(01):69–85, 2010. ISSN 0218-396X.
- [11] F. P. U. Bitsie. *The structural-acoustic energy finite element method and energy boundary element method*. PhD thesis, Purdue University, 1996.
- [12] M. J. Borden, M. A. Scott, J. A. Evans und T. J. R. Hughes. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(1-5):15–47, jul 2011. ISSN 00295981.
- [13] M. Bouhaj. *Experimental identification of SEA parameters for complex aircraft structures*, Volume 2020,30 of *Schriftenreihe des Instituts für Modellierung und Berechnung*. Shaker Verlag, Düren, 2020. ISBN 9783844073294.
- [14] O. M. Bouthier. *Energetics of vibrating systems*. PhD thesis, Purdue University, 1992.
- [15] C. A. Brebbia und R. Butterfield. Formal equivalence of direct and indirect boundary element methods. *Applied Mathematical Modelling*, 2(2):132–134, 1978. ISSN 0307904X.
- [16] C. A. Brebbia und J. Dominguez. *Boundary Elements: An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, Southampton, second Auflage, 1992. ISBN 1-85312-160-6.
- [17] L. E. Buvailo und A. V. Ionov. Application of the finite-element method to the investigation of the vibroacoustical characteristics of structures at high audio frequencies. *Sov Phys Acoust*, 26:502–507, 1980.
- [18] S. Callsen. *Zum Einsatz der Statistischen Energieanalyse bei Schalldämmmaßberechnungen im Flugzeugbau*, Volume 2010,8 of *Schriftenreihe des Instituts für Modellierung und Berechnung*. Shaker Verlag, Aachen, 2010. ISBN 9783832294311.
- [19] L. H. Chen und D. G. Schweikert. Sound Radiation from an Arbitrary Body. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(10):1626–1632, 1963. ISSN 0001-4966.
- [20] P. E.-H. Cho. *Energy flow analysis of coupled structures*. PhD thesis, Purdue University, 1993.

- 
- [21] F. Cirak und Q. Long. Subdivision shells with exact boundary control and non-manifold geometry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(9):897–923, dec 2011. ISSN 00295981.
- [22] E. Cohen, T. Martin, R. M. Kirby, T. Lyche und R. F. Riesenfeld. Analysis-aware modeling: Understanding quality considerations in modeling for isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5-8):334–356, 2010. ISSN 00457825.
- [23] R. Coifman, V. Rokhlin und S. Wandzura. The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3):7–12, 1993. ISSN 10459243.
- [24] L. Cremer, M. Heckl und B. Petersson. *Structure-Borne Sound*. Springer Berlin, Heidelberg, 2005. ISBN 3540226966.
- [25] E. Darve und P. Havé. Efficient fast multipole method for low-frequency scattering. *Journal of Computational Physics*, 197(1):341–363, 2004. ISSN 00219991.
- [26] B. Dilba. *Effiziente Berechnung der Schallabstrahlung von teilsymmetrischen und periodischen Strukturen*, Volume 2022,32 of *Schriftenreihe des Instituts für Modellierung und Berechnung*. Shaker Verlag, Düren, 2022. ISBN 9783844087116.
- [27] M. G. Duffy. Quadrature Over a Pyramid or Cube of Integrands with a Singularity at a Vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6):1260–1262, dec 1982. ISSN 0036-1429.
- [28] J. Dumont. Wigner Symbols, 2023. URL <https://github.com/joeydumont/wignerSymbols>.
- [29] M. A. Epton und B. Dembart. Multipole Translation Theory for the THree-Dimensional Laplace and Helmholtz Equations. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 16(4):865–897, 1995.
- [30] O. von Estorff, Hrsg. *Boundary elements in acoustics : advances and applications*. WIT Press, Southampton, 2000. ISBN 9781853125560.
- [31] F. Fahy und P. Gardonio. *Sound and Structural Vibration*. Academic Press, Oxford, second edition Auflage, 2007. ISBN 978-0-12-373633-8.
- [32] M. Fischer. *The Fast Multipole Boundary Element Method and its Application to Structure-Acoustic Field Interaction*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2004.
- [33] D. R. Forsey und R. H. Bartels. Hierarchical B-spline refinement. *Computer Graphics (ACM)*, 22(4):205–212, 1988. ISSN 00978930.

- 
- [34] L. Gaul und C. Fiedler. *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Springer Vieweg Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN 9783834825360.
- [35] G. Gebhardt. *Aufbau eines Prüfstands zum Abgleich zwischen Simulation und Messung von Lautsprecher-Systemen in Fahrzeugen*. Bachelorarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2018.
- [36] C. Giannelli, B. Jüttler und H. Speleers. THB-splines: The truncated basis for hierarchical splines. *Computer Aided Geometric Design*, 29(7):485–498, oct 2012. ISSN 01678396.
- [37] G. Golub und W. Kahan. Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis*, 2(2):205–224, jan 1965. ISSN 0887-459X.
- [38] G. H. Golub und J. H. Welsch. Calculation of Gauss Quadrature Rules. *Mathematics of Computation*, 23(106):221, apr 1969. ISSN 00255718.
- [39] L. Greengard und V. Rokhlin. A new version of the fast multipole method for the laplace equation in three dimensions. *Acta Numerica*, 6:229–269, 1997.
- [40] L. Greengard, J. Huang, V. Rokhlin und S. Wandzura. Accelerating fast multipole methods for the Helmholtz equation at low frequencies. *IEEE computational science & engineering*, 5(3):32–38, 1998. ISSN 10709924.
- [41] N. A. Gumerov und R. Duraiswami. Recursions for the computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-d Helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(4):1344–1381, 2003. ISSN 10648275.
- [42] N. A. Gumerov und R. Duraiswami. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Elsevier Science, 2005. ISBN 9780080443713.
- [43] N. C. Hagelstein. *Entwicklung und Untersuchung einer isogeometrischen Boundary-Elemente-Methode*. Masterarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2017.
- [44] I. Harari und T. J. Hughes. A cost comparison of boundary element and finite element methods for problems of time-harmonic acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97(1):77–102, 1992. ISSN 00457825.
- [45] K. Hayami und C. A. Brebbia. A New Coordinate Transformation Method for Singular and Nearly Singular Integrals over General Curved Boundary Elements. In *Mathematical and Computational Aspects*, Seiten 375–399. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1987.

- [46] K. Hayami und H. Matsumoto. A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13(2):143–154, 1994. ISSN 09557997.
- [47] T. J. Hughes, J. A. Cottrell und Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39-41):4135–4195, 2005. ISSN 00457825.
- [48] F. Ihlenburg, Hrsg. *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, NY, 1998. ISBN 9780387227009.
- [49] F. Jensen, W. Kuperman, M. Porter und H. Schmidt. *Computational Ocean Acoustics*. Modern Acoustics and Signal Processing. Springer New York, 2011. ISBN 9781441986788.
- [50] B. M. Johnston, P. R. Johnston und D. Elliott. A sinh transformation for evaluating two-dimensional nearly singular boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(7):1460–1479, feb 2007. ISSN 00295981.
- [51] M. Karger. *Fluid-Struktur-Wechselwirkung in der Energie-Finite-Elemente-Methode*, Volume 2017,26 of *Schriftenreihe des Instituts für Modellierung und Berechnung*. Shaker Verlag, Aachen, 2017. ISBN 9783844052350.
- [52] S. Keuchel. *Aufwandsreduzierungen in der Fast-Multipole-Boundary-Elemente-Methode*, Volume 2017,24 of *Schriftenreihe des Instituts für Modellierung und Berechnung*. Shaker Verlag, Aachen, 2017. ISBN 9783844050455.
- [53] S. Keuchel, N. C. Hagelstein, O. Zaleski und O. von Estorff. Evaluation of hypersingular and nearly singular integrals in the Isogeometric Boundary Element Method for acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 325:488–504, 2017. ISSN 00457825.
- [54] J. D. Kim, S. Y. Hong, H. W. Kwon und J. H. Song. Energy flow model considering near field energy for predictions of acoustic energy in low damping medium. *Journal of Sound and Vibration*, 330(2):271–286, 2011. ISSN 0022460X.
- [55] J. D. Kim, S. M. Hwang, Hyuk-Kwun und B. J. Kim. Development of 3D acoustic multi-domains analysis using an indirect energy flow boundary element method. *Acta Acustica united with Acustica*, 103(3):523–530, 2017. ISSN 18619959.
- [56] C. R. Kipp und R. J. Bernhard. Prediction of Acoustical Behavior in Cavities Using an Indirect Boundary Element Method. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 109(1):22–28, 1987. ISSN 15288927.

- [57] R. Klees. Numerical calculation of weakly singular surface integrals. *Journal of Geodesy*, 70(11):781–797, 1996. ISSN 09497714.
- [58] X. Kong, H. Chen, D. Zhu und W. Zhang. Study on the validity region of Energy Finite Element Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9):2601–2616, 2014. ISSN 0022460X.
- [59] P. Kosmol. *Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben*. Teubner Studienbücher Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1989. ISBN 978-3-519-12085-8.
- [60] K. H. Kuttruff. Energetic Sound Propagation in Rooms. *Acustica united with Acta Acoustica*, 83(4):622–628, 2008.
- [61] J. C. Lachat und J. O. Watson. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(5):991–1005, 1976. ISSN 10970207.
- [62] R. S. Langley. On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4):637–657, 1995. ISSN 10958568.
- [63] Y. Lase, M. N. Ichchou und L. Jezequel. Energy flow analysis of bars and beams: Theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):281–305, 1996. ISSN 0022460X.
- [64] A. Le Bot. A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):537–554, 1998. ISSN 0022460X.
- [65] A. Le Bot und L. Ricol. Integral equation Instead of Heat conduction Equation for Medium and High Frequencies. In *Internoise 95*, Seiten 579–582, Newport Beach, CA, 1995.
- [66] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf. *Technische Akustik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-23430-2.
- [67] Y. Liu. *Fast Multipole Boundary Element Method*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9783540773405.
- [68] R. H. Lyon. *Statistical energy analysis of dynamical systems: theory and applications*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1975. ISBN 0262120712.

- [69] R. H. Lyon und G. Maidanik. Power Flow between Linearly Coupled Oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5):623–639, may 1962. ISSN 0001-4966.
- [70] S. Marburg. Six boundary elements per wavelength: Is that enough? *Journal of Computational Acoustics*, 10(01):25–51, 2002.
- [71] S. Marburg und B. Nolte, Hrsg. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-77447-1.
- [72] B. Marussig, G. Beer und C. Duenser. Isogeometric boundary element method for the simulation in tunneling. *Applied Mechanics and Materials*, 553(3):495–500, 2014. ISSN 16627482.
- [73] F. P. Mechel, Hrsg. *Formulas of Acoustics*. Springer Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 9783540768326.
- [74] I. Moens. *On the use and the validity of the energy finite element method for high frequency vibrations*. PhD thesis, K.U. Leuven, 2001.
- [75] P. Morse und K. Ingard. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [76] G. Müller und M. Möser, Hrsg. *Numerische Methoden der Technischen Akustik*. Springer Berlin, Heidelberg, 2017. ISBN 978-3-662-55409-8.
- [77] D. J. Nefske und S. H. Sung. Power flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems: Basic Theory and Application to Beams. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 111(1):94–100, 1989. ISSN 15288927.
- [78] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, 55(4):299–324, 2002. ISSN 00036900.
- [79] M. P. Norton und D. G. Karczub. *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*. Cambridge University Press, 2 Auflage, 2003.
- [80] L. Piegl und W. Tiller. *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communications. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. ISBN 978-3-642-97387-1.
- [81] A. D. Pierce. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*. McGraw-Hill, New York, NY, vol. 678 Auflage, 1981.
- [82] C. Politis, A. I. Ginnis, P. D. Kaklis, K. Belibassakis und C. Feurer. An isogeometric BEM for exterior potential-flow problems in the plane. *Proceedings - SPM 2009*:

- SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling*, Seiten 349–354, 2009.
- [83] M. Ram und O. von Estorff. Fast Algorithms Applied to the Acoustical Energy Boundary Element Method. In M. Ochmann, M. Vorländer und J. Fels, Hrsg., *Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics : integrating 4th EAA Euroregio 2019 : 9-13 September 2019 in Aachen, Germany*, Aachen, 2019. Deutsche Gesellschaft für Akustik, Berlin, Germany.
- [84] M. Ram, K. M. Beiroth und O. v. Estorff. Isogeometrische formulierung der energieboundary-elemente-methode. In *48. Deutsche Jahrestagung für Akustik, DAGA 2022*. Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA), 2022.
- [85] M. Ram, K. M. Beiroth, S. Keuchel und O. v. Estorff. Singuläre und quasi-singuläre integration über nurbs-flächen für die isogeometrische bem. In *49. Deutsche Jahrestagung für Akustik, DAGA 2023*. Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA), 2023.
- [86] S. T. Raveendra und W. Zhang. Vibro-acoustic analysis using a hybrid energy finite element /boundary element method. In *SAE 2007 Noise and Vibration Conference and Exhibition*. SAE International, 2007.
- [87] F. J. Rizzo und D. J. Shippy. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(11):1753–1768, 1977. ISSN 10970207.
- [88] V. Rokhlin. Diagonal Forms of Translation Operators for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. *Applied and computational Harmonic Analysis*, 1, 1993.
- [89] Y. Saad und M. H. Schultz. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3):856–869, 1986. ISSN 0196-5204.
- [90] S. A. Sauter und C. Schwab. *Boundary Element Methods*, Volume 39 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-540-68092-5.
- [91] H. A. Schenck. Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 44(1):41–58, 1968.
- [92] K. Schulten und R. Gordon. Recursive evaluation of 3j and 6j coefficients. *Computer Physics Communications*, 11(2):269–278, mar 1976. ISSN 00104655.

- [93] M. A. Scott, R. N. Simpson, J. A. Evans, S. Lipton, S. P. Bordas, T. J. Hughes und T. W. Sederberg. Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 254:197–221, 2013. ISSN 00457825.
- [94] A. Sestieri und A. Carcaterra. Space average and wave interference in vibration conductivity. *Journal of Sound and Vibration*, 263(3):475–491, 2003. ISSN 0022460X.
- [95] L. Shen. *Adaptive Fast Multipole Boundary Element Methods for Three-Dimensional Potential and Acoustic Wave Problems*. PhD thesis, University of Cincinnati, 2007.
- [96] R. N. Simpson, S. P. Bordas, J. Trevelyan und T. Rabczuk. A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212:87–100, 2012. ISSN 00457825.
- [97] R. N. Simpson, M. A. Scott, M. Taus, D. C. Thomas und H. Lian. Acoustic isogeometric boundary element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 269:265–290, 2014. ISSN 00457825.
- [98] P. W. Smith. Response and Radiation of Structural Modes Excited by Sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5):640–647, may 1962. ISSN 0001-4966.
- [99] A. Sommerfeld. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 21:309–353, 1912.
- [100] J. Song, Cai-Cheng Lu und Weng Cho Chew. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(10):1488–1493, 1997. ISSN 0018926X.
- [101] M. Taus. *Isogeometric Analysis of Boundary Integral Equations*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2015.
- [102] J. C. F. Telles. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(5):959–973, may 1987. ISSN 0029-5981.
- [103] M. Thivant. *Modélisation de la propagation acoustique par la méthode du potentiel d'intensité*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2003.
- [104] M. Thivant, P. B. Andersson und J. L. Guyader. Intensity potential approach for modeling high-frequency sound fields. *Acta Acustica united with Acustica*, 97(1): 103–114, 2011. ISSN 16101928.

- 
- [105] J. V. Venås und T. Kvamsdal. Isogeometric boundary element method for acoustic scattering by a submarine. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 359, 2020. ISSN 00457825.
- [106] A. Wang, N. Vlahopoulos und K. Wu. Development of an energy boundary element formulation for computing high-frequency sound radiation from incoherent intensity boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 278(1-2):413–436, 2004. ISSN 0022460X.
- [107] X. Wei, Y. Zhang, T. J. Hughes und M. A. Scott. Truncated hierarchical Catmull-Clark subdivision with local refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 291:1–20, 2015. ISSN 00457825.
- [108] D. E. Weston. *Ray Acoustics for Fluids*, chapter 3, Seiten 39–45. John Wiley & Sons, Ltd, 1997. ISBN 9780470172513.
- [109] D. R. Wilkes. *The Development of a Fast Multipole Boundary Element Method for Coupled Acoustic and Elastic Problems*. PhD thesis, Curtin University, 2014.
- [110] E. G. Williams. *Fourier Acoustics*. Elsevier, 1999. ISBN 9780127539607.
- [111] J. C. Wohlever und R. J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1):1–19, 1992. ISSN 10958568.
- [112] W. Zhang, A. Wang und N. Vlahopoulos. An alternative energy finite element formulation based on incoherent orthogonal waves and its validation for marine structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(12):1095–1113, 2002. ISSN 0168874X.
- [113] J. S. Zhao und W. C. Chew. Applying matrix rotation to the three-dimensional low-frequency multilevel fast multipole algorithm. *Microwave and Optical Technology Letters*, 26(2):105–110, 2000. ISSN 08952477.
- [114] O. Zienkiewicz, R. L. Taylor und J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals*. Elsevier, siebte Auflage, 2013. ISBN 9781856176330.