

Die Dynamik des durchhängenden Seiles

Uwe Starossek

November 1990

Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion
der Universität Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Abriß

1.	Historischer Rückblick	1
2.	Lineare Theorien der freien Schwingung	2
2.1	Das waagrecht gespannte Seil	2
2.1.1	Theorie von Irvine & Caughey	2
2.1.2	Theorie von Saxon & Cahn	9
2.2	Das schräg gespannte Seil	11
2.2.1	Erweiterung von Irvine & Caugheys Theorie	11
2.2.2	Theorie von Triantafyllou	13
3.	Das lineare dynamische Antwortverhalten	15
3.1	Allgemeine Lösung	15
3.2	Antwort auf eine dynamische Gleichstreckenlast	17
3.3	Antwort auf dynamische Randpunktverschiebungen	20
4.	Nichtlineare Theorien	21
5.	Mechanismen der Schwingungserregung	22
5.1	Anregung durch dynamische Querkräfte	22
5.1.1	Anregung durch Wirbelablösungen	22
5.1.2	Galloping	25
5.1.3	Anregung durch Interferenz	27
5.1.4	Turbulenzerrregung	27
5.2	Anregung von den Randpunkten aus	27
	Literatur	28

Abriß

Die vorliegende Arbeit gibt einen Überblick über die analytischen Möglichkeiten zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens von horizontal oder schräg gespannten Einzelseilen mit gravitationsbedingtem großen oder kleinen Durchhang.

Der Schwerpunkt liegt auf der linearen Theorie der freien Schwingungen und, hierauf aufbauend, auf der Berechnung des Antwortverhaltens bei dynamischer Querbelastung oder Schwingungsanregung durch die Aufhängepunkte.

Nach einem Exkurs in die nichtlineare Dynamik werden die praktisch relevanten Erregungskräfte behandelt und Beispielrechnungen durchgeführt.

1. Historischer Rückblick

Die schwingende Saite war eines der ersten physikalischen Systeme, auf die die neuen analytischen Methoden der modernen Mechanik und Mathematik angewendet wurden. Diesbezügliche Arbeiten legten Taylor, d'Alembert, Euler und Daniel Bernoulli bereits in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts vor.

Daniel Bernoulli untersuchte 1732 auch die Querschwingungen eines an einem Ende aufgehängten, senkrecht herabhängenden Seiles. Er gab Lösungen für die Eigenfrequenzen in Form einer unendlichen Reihe an, die später als Besselfunktion erster Art nullter Ordnung identifiziert wurde.

Lagrange veröffentlichte 1788 Lösungen für ein dehnsteifes und masseloses Seil, an dem zahlreiche Gewichte hängen [1]. Angewendet auf ein massebehaftetes Seil im Gravitationsfeld entspricht dies einer Diskretisierung des Seilkontinuums.

Die allgemeinen partiellen Differentialgleichungen des Seilelementes gab Poisson 1820 an und verbesserte die schon bekannten Lösungen für die schwingende Saite und das senkrecht herabhängende Seil.

Außer für diese beiden Grenzfälle waren Lösungen für das durchhängende Seil zu jener Zeit noch nicht bekannt, abgesehen von der Lagrange'schen des diskretisierten Systems [1].

Nach Vorarbeiten von Stokes und Röhrs gab schließlich Routh 1868 exakte Lösungen für ein durchhängendes, aber dehnsteifes Seil an, das in Ruhelage in Form einer Zyklode hängt [10].

Eine Einbeziehung der Seildehnung - wichtig unter Umständen für die symmetrischen Schwingungsmodi - erfolgte erstmals 1942 mit der Arbeit von Klöppel und Lie [14].

Für die Berechnung der Eigenfrequenzen von Seilen mit sehr großem bezogenen Durchhang (größer als 1:10) schlug Pugsley 1949 ein halbempirisches Verfahren vor [11], während Saxon & Cahn in ihrem Beitrag aus dem Jahre 1953 dieses Problem theoretisch lösten [12].

Bis in jüngere Zeit gab es allerdings weder theoretische, noch experimentelle Arbeiten, die Klarheit in einem wichtigen Punkt erbracht hätten: Die bis dahin bekannten Lösungen für das durchhängende, dehnungslose Seil fallen bei einer Reduzierung des Durchhangs bis auf null nicht mit den Lösungen der schwingenden Saite zusammen. Zur Erfassung dieses wichtigen Übergangsbereiches ist die konsequente Einbeziehung der Seildehnung erforderlich. Dies zeigten Irvine & Caughey in ihrer Arbeit aus dem Jahr 1974 [1], die ein weitgehendes Verständnis der linearen Dynamik des horizontal gespannten Seiles mit einem bezogenen Durchhang von etwa 1:8 bis null ermöglichte.

Dabei war ihre fundamentale (und vereinfachende) Annahme, daß sich das Seil quasi-statisch dehnt und somit die dynamische Seilkraft über die ganze Länge konstant ist. Sie entdeckten, daß die Seildynamik im wesentlichen von nur einem, geometrisch-elastischen Systemparameter abhängt. Für bestimmte Werte dieses Parameters fallen die Eigenfrequenzen der jeweils zugeordneten symmetrischen und antisymmetrischen Eigenmodi zusammen, ein Phänomen, das die Autoren "cross-over" nannten.

Später erweiterte Irvine diese Lösung auf Seile mit geneigter Sehne [2]. Hierbei muß die sehnenparallele Gewichtskomponente allerdings vernachlässigt werden. Derselbe Autor lieferte auch - zusammen mit Griffin - wichtige Beiträge zur Berechnung des Antwortverhaltens, etwa bei Beschleunigung der Randpunkte infolge eines Erdbebens [3], [24].

Eine allgemeinere Lösung für das geneigte, dehnbare Seil unter Berücksichtigung der dynamischen Seilkraftänderung in Längsrichtung und der sehnenparallelen Gewichtskraft veröffentlichte Triantafyllou 1984 [7]. Er zeigte, daß sich bei geneigten Seilen die "cross-over"-Übergänge nur andeutungsweise vollziehen und ersetzt werden von "avoided crossings".

Ausgehend von dieser Arbeit und mit der vereinfachenden Annahme quasi-statischer Dehnung geben Triantafyllou & Grinfolgel eine einfache, implizite Gleichung zur Berechnung der Eigenfrequenzen sowie Ausdrücke für die Eigenformen und die dynamische Seilkraft an [8].

2. Lineare Theorien der freien Schwingung

2.1 Das waagrecht gespannte Seil

2.1.1 Theorie von Irvine & Caughey

Die Autoren [1] setzen außer der Annahme kleiner Verschiebungen explizit oder implizit voraus, daß

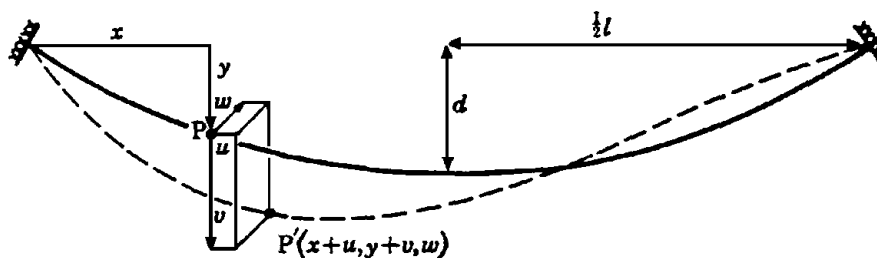
- die Massenbelegung konstant bezüglich der Seilsehne und die statische Seillinie eine quadratische Parabel ist,
- sich die zusätzliche, dynamische Seilkraft über die Seillänge nicht ändert und
- die Horizontalverschiebungen klein gegenüber den Vertikalverschiebungen sind.

Durch die außerdem vorgenommene Beschränkung auf horizontal gespannte, festverankerte Seile mit einem Verhältnis von Durchhang zu Sehnenlänge von nicht größer als 1:8 sind diese Voraussetzungen näherungsweise erfüllt.

Für die statische Seillinie kann man mit den Bezeichnungen nach Figur 1 dann schreiben

$$y = \frac{mgl^2}{2H} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (1)$$

mit der Sehnenlänge l , der auf die Sehne bezogenen Masse m , der (konstanten) Horizontalkomponente H der statischen Seilkraft sowie der Gravitationsbeschleunigung g .



Figur 1

Der Zusammenhang zwischen diesen Größen und dem statischen Durchhang in Seilmitte d wird hergestellt durch

$$H = \frac{mgl^2}{8d} \quad (2)$$

Für die dynamischen Verschiebungen v (vertikal) und w (horizontal und senkrecht zur Seilebene) kann man aus den dynamischen Gleichgewichtsbedingungen am Seilelement und unter den oben genannten Voraussetzungen die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(T + \tau) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mg \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(T + \tau) \frac{\partial w}{\partial s} \right] = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

herleiten. Hier ist T die statische und τ die zusätzliche, dynamische Seilkraft.

Unter Berücksichtigung der statischen Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -mg \quad (5)$$

sowie mit
$$H = T \frac{dx}{ds} \quad (6)$$

und
$$h := \tau \frac{dx}{ds} \quad (7)$$

folgt aus den Gleichungen (3), (4) näherungsweise

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{d^2 y}{dx^2} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9)$$

Die dritte dynamische Gleichgewichtsbedingung (horizontal in der Seilebene) wird vernachlässigt und entsprechend der eingangs formulierten Annahme ersetzt durch die Gleichung

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad , \quad (10)$$

woraus mit Gl. (7) für genügend flach gespannte Seile folgt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad . \quad (11)$$

Für die örtliche Seildehnung gilt (linearisiert)

$$\varepsilon = \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial v}{\partial s} \quad ; \quad (12)$$

die Kontinuitätsbedingung des Seilelementes folgt hiermit zu

$$\frac{h}{EA} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad (13)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und dem wirksamen (metallischen) Querschnitt A .

Mit den Gleichungen (8), (9), (11) und (13) ist das mechanische Problem vollständig beschrieben.

mit dem Elastizitätsmodul E und dem wirksamen (metallischen) Querschnitt A .

Mit den Gleichungen (8), (9), (11) und (13) ist das mechanische Problem vollständig beschrieben.

Horizontale Schwingungen senkrecht zur Seilebene:

Diese Bewegung ist von den Verschiebungen innerhalb der Seilebene entkoppelt und wird allein mit Gleichung (9) erfaßt, die eine Wellengleichung in der einfachsten Form darstellt.

Der Separationsansatz

$$w = \bar{w} e^{i\omega t} \quad (14)$$

führt unter Beachtung der Randbedingungen

$$w(0) = w(l) = 0 \quad (15)$$

auf die Lösungen

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} ; n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

$$\bar{w}_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} , \quad (17)$$

die identisch mit denen der schwingenden Saite sind.

(Bemerkung: Die Kreisfrequenz ω wird im folgenden vereinfachend Frequenz genannt; für die eigentliche Frequenz gilt $f = \omega/2\pi$.)

Schwingungen innerhalb der Seilebene:

Wie die Kontinuitätsbedingung (13) zeigt, ist hier die vertikale mit der horizontalen Bewegungskomponente gekoppelt. Letztere wird zunächst durch Integration von Gl. (13) über die Sehne eliminiert:

$$\int_0^l \frac{h}{EA} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} dx . \quad (18)$$

Durch partielle Integration und mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (19)$$

$$v(0) = v(l) = 0 \quad (20)$$

sowie wegen Gl. (11) und der als konstant vorausgesetzten Dehnsteifigkeit folgt hieraus

$$\frac{hL_e}{EA} = \frac{8d}{l^2} \int_0^l v dx \quad (21)$$

mit
$$L_e := \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 dx \simeq l \left[1 + 8 \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right] = l \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{mgl}{H} \right)^2 \right] . \quad (22)$$

Der Systemparameter L_e ist etwas größer als die Seillänge, für die gilt

$$L = \int_0^l \frac{ds}{dx} dx \simeq l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right] . \quad (23)$$

Die weitere Berechnung geht aus von den Gleichungen (8), (13) und (21).

Antimetrische Schwingungen innerhalb der Seilebene:

Die Existenz antimetrischer Modi im Freiheitsgrad v zunächst einmal vorausgesetzt folgt aus Gl. (21) für diese direkt

$$h = 0 \quad . \quad (24)$$

Hiermit reduziert sich Gl. (8) ebenfalls auf die Wellengleichung und man erhält hieraus mit dem Ansatz

$$v = \tilde{v} e^{i\omega t} \quad (25)$$

und den Randbedingungen (20) sowie der Forderung nach Antimetrie die Lösungen

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} ; n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$\tilde{v}_n = A_n \sin \frac{2n\pi x}{l} \quad , \quad (27)$$

die mit den antimetrischen Lösungen für die schwingende Saite übereinstimmen.

Für die zugehörige und simultane Horizontalbewegung folgt durch Einsetzen der Gleichungen (24) bis (27) in Gl. (13) und Integration (unter Beachtung der Randbedingungen (19))

$$u_n = \tilde{u}_n e^{i\omega_n t} \quad (28)$$

$$\tilde{u}_n = -A_n \frac{4d}{l} \left[\left(1 - \frac{2x}{l}\right) \sin \frac{2n\pi x}{l} + \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) \right] \quad . \quad (29)$$

Wie man leicht erkennt, ist diese Komponente im Gegensatz zur Vertikalbewegung symmetrisch bezüglich der Seilmitte. Im ersten antimetrischen Schwingungsmodus liegt ihr Maximum in den Viertelpunkten und nicht in Feldmitte.

Der durch die Vernachlässigung der horizontalen Gleichgewichtsbedingung entstehende Fehler in der Berechnung der antimetrischen Eigenfrequenzen wird von Irvine & Caughey mit weniger als 4 % bei einem bezogenen Durchhang von maximal 1:8 angegeben.

Symmetrische Schwingungen innerhalb der Seilebene:

Die dynamische Kraft h ist nun ungleich Null und das aus den Gleichungen (8) und (21) bestehende Integro-Differentialgleichungssystem muß simultan gelöst werden.

Benutzt man die Separationsansätze (25) für v und dementsprechend

$$h = \tilde{h} e^{i\omega t} \quad (30)$$

für h , so erhält man aus Gl.(8) unter Verwendung der statischen Beziehungen (1) und (2) die gewöhnliche, zunächst inhomogen aufgefaßte Differentialgleichung

$$H \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \omega^2 m \tilde{v} = \frac{8d}{l^2} \tilde{h} \quad (31)$$

Unter den geltenden Randbedingungen (20) lautet deren Lösung

$$\tilde{v} = \frac{8d}{\omega^2} \frac{\tilde{h}}{H} \left(1 - \tan \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega x}{l} - \cos \frac{\omega x}{l} \right) \quad (32)$$

mit
$$\omega := \omega l \sqrt{\frac{m}{H}} \quad (33)$$

Da es sich insgesamt um ein lineares, homogenes Gleichungssystem handelt, bleibt die absolute Größe von ν ebenso wie die von h unbestimmt. Durch Einsetzen der Gl. (32) in die Integralgleichung (21) erhält man aber mit

$$\tan \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\omega}{2} \right)^3 \doteq 0 \quad (34)$$

eine Bestimmungsgleichung für den unbekanntenen Frequenzparameter ω , wobei sich die Einführung des Parameters

$$\lambda^2 := \left(\frac{mgl}{H} \right)^2 \frac{EA l}{HL_e} = \left(\frac{8d}{l} \right)^3 \frac{EA}{mgL_e} \quad (35)$$

als sinnvoll erweist.

Die Frequenzgleichung (34) ist transzendent. Ihre unendlich vielen Wurzeln ergeben sich in Abhängigkeit vom Parameter λ^2 und führen auf die Eigenfrequenzen der symmetrischen Modi, von denen in Tafel 1 einige in dimensionsloser Form zusammengestellt sind. Hierbei gilt

$$\omega_n = \omega_n l \sqrt{\frac{m}{H}} \quad (36)$$

bzw.
$$\omega_n = \omega_n \frac{1}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad (36a)$$

λ^2	ω_1/π	ω_2/π	ω_3/π	ω_4/π	ω_5/π	ω_6/π	ω_7/π	ω_8/π
∞	2.86	4.92	6.94	8.95	10.96	12.97	14.97	16.98
$256\pi^2$	2.86	4.91	6.93	8.93	10.93	12.91	14.81	16.00
$196\pi^2$	2.85	4.91	6.92	8.92	10.91	12.81	14.00	15.15
$144\pi^2$	2.85	4.90	6.91	8.90	10.81	12.00	13.15	15.05
$100\pi^2$	2.85	4.89	6.89	8.80	10.00	11.15	13.04	15.02
$64\pi^2$	2.84	4.87	6.79	8.00	9.14	11.04	13.02	15.01
$36\pi^2$	2.82	4.78	6.00	7.14	9.04	11.02	13.01	15.01
$16\pi^2$	2.74	4.00	5.12	7.03	9.01	11.01	13.00	15.00
100	2.60	3.48	5.05	7.01	9.01	—	—	—
80	2.48	3.31	5.04	7.01	9.01	—	—	—
60	2.29	3.18	5.03	7.01	—	—	—	—
$4\pi^2$	2.00	3.09	5.02	7.01	—	—	—	—
20	1.61	3.04	5.01	7.00	—	—	—	—
10	1.35	3.02	5.00	—	—	—	—	—
8	1.28	3.01	—	—	—	—	—	—
6	1.22	—	—	—	—	—	—	—
4	1.15	—	—	—	—	—	—	—
2	1.08	—	—	—	—	—	—	—
1	1.04	—	—	—	—	—	—	—
0	1.00	3.00	5.00	7.00	9.00	11.00	13.00	15.00

Tafel 1: Die ersten Eigenfrequenzen der symmetrischen Schwingungen innerhalb der Seilebene als Funktion von λ^2 [3]

Der Wert $\lambda^2/12$ entspricht dem Verhältnis von elastischer zu geometrischer Dehnsteifigkeit des Seiles. Der Parameter λ^2 ist nur für die symmetrischen Modi innerhalb der Seilebene von Bedeutung. Für sehr flach gespannte Seile geht er gegen null und die Lösungen von Gl. (34) nähern sich denen der schwingenden Saite; umgekehrt erhält man für große λ^2 die schon von Routh [10] gefundene Frequenzgleichung für dehnungslose Seile mit großem Durchhang.

Für den diskreten Parameterwert

$$\lambda_n^2 := (2n\pi)^2 ; n = 1, 2, \dots \quad (37)$$

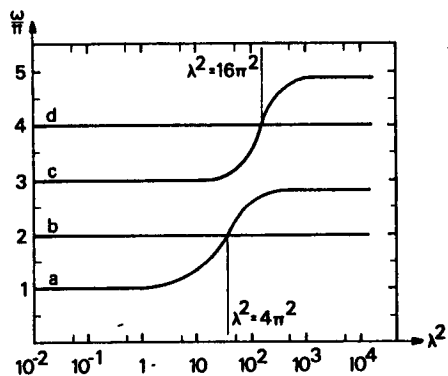
lautet die n-te Eigenlösung von Gl. (34)

$$\omega_n = 2 n \pi \quad (38)$$

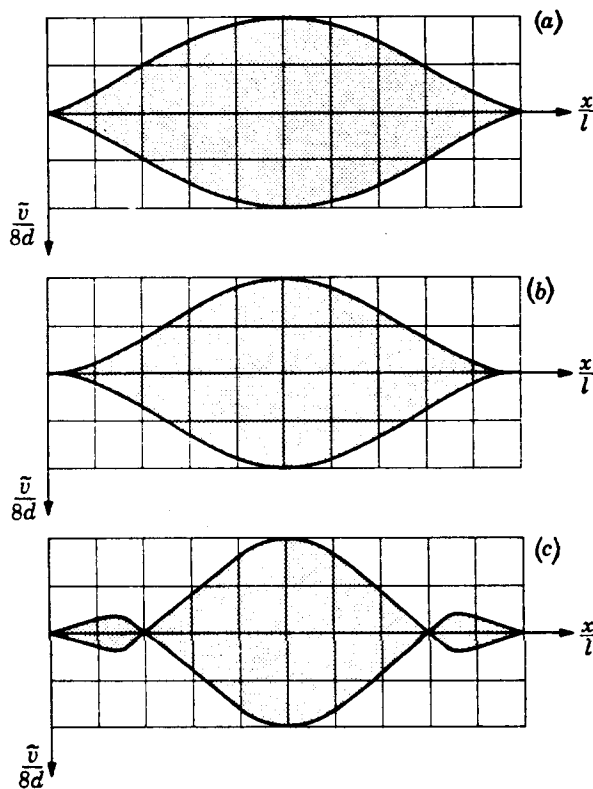
woraus sich die zugehörige n-te symmetrische Eigenfrequenz zu

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad (38a)$$

ergibt und damit identisch ist mit der in Gl. (26) angegebenen n-ten antimetrischen Eigenfrequenz. Wie in der dimensionslosen Darstellung in Figur 2 der Eigenfrequenzen der ersten vier Modi in Abhängigkeit von λ^2 deutlich wird, schneiden sich bei λ_n^2 die jeweils zugehörigen Eigenfrequenzäste symmetrischer und antimetrischer Schwingungen ("cross-over").



Figur 2: Die ersten zwei Eigenfrequenzen für symmetrische (a, c) und antimetrische (b, d) Schwingungen innerhalb der Seilebene [3]



Figur 3: Mögliche Formen der Vertikalverschiebung im ersten symmetrischen Schwingungsmodus [1]

(a) $\lambda^2 < 4\pi^2$

(b) $\lambda^2 = 4\pi^2$

(c) $\lambda^2 > 4\pi^2$

Aus den in Figur 3 für verschiedene λ^2 dargestellten Schwingungsformen des ersten symmetrischen Modus erkennt man, daß die Werte λ_n^2 (in diesem Falle $\lambda_1^2 = 4 \pi^2$) den Scheidepunkt markieren zwischen der Theorie der schwingenden Saite und der Dynamik des durchhängenden, dehnungslosen Seiles:

Für $\lambda^2 < 4 \pi^2$ hat die Schwingungsform keinen internen Knoten (a); dies gilt auch noch für $\lambda^2 = 4 \pi^2$, wobei die Steigung in den Festpunkten bis auf null abgefallen ist (b); für $\lambda^2 > 4 \pi^2$ schließlich erfolgt die Schwingung mit zwei internen Knoten (c). Die Frequenz ist im letzteren Falle höher als die im ersten antisymmetrischen Modus, die unabhängig von λ^2 mit nur einem Knoten in Seilmitte erfolgt.

Die Form der zur symmetrischen Vertikalschwingung gehörigen antisymmetrischen Horizontalschwingung wird berechnet durch Einsetzen der Gl. (32) in Gl. (13) und Integration (unter Berücksichtigung der Ansätze (25), (30) und der Randbedingungen (19)). Der etwas längliche Term ist in [1], [3] angegeben.

Innerhalb der eingangs genannten Voraussetzungen wurde die Gültigkeit der hier dargelegten Theorie mittels experimenteller [1], [3] und numerischer (Finite Elemente) Methoden [4], [6] bestätigt.

Für die Lösungen der transzendenten Gleichung (34) werden in Ergänzung zu Tafel 1 nun noch einige Approximationsformeln angegeben, die die näherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen der symmetrischen Schwingungsmodi (innerhalb der Seilebene) gestatten:

Für große λ^2 (durchhängendes, dehnungsloses Seil) gilt nach [3] etwa

$$\omega_n \simeq (2n+1)\pi - \frac{4}{(2n+1)\pi} ; n = 1, 2, \dots \quad (39)$$

wobei (für $\lambda^2 = \infty$) der Fehler maximal 0,15 % beträgt. Für genügend kleine λ^2 (schwingende Saite) gilt etwa

$$\omega_n \simeq (2n-1)\pi ; n = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Diese Formel wird exakt für $\lambda^2 = 0$.

Als Näherung für die erste symmetrische Eigenfrequenz und beliebige λ^2 leitete Irvine [3] mittels Fourier-Reihen die Formel

$$\omega_1 \simeq \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \left(10\pi^2 + \frac{80\lambda^2}{9\pi^2} \right) - \left[\left(10\pi^2 + \frac{80\lambda^2}{9\pi^2} \right)^2 - 4 \left(9\pi^4 + \frac{656\lambda^2}{9} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

ab, die auf mindestens 0,5 % genaue Werte liefert.

Die Näherungslösung von Bauer [15] für die erste symmetrische Eigenfrequenz lautet in der hier gewählten Notation

$$\omega_1 \simeq \pi \sqrt{1 + \frac{8\lambda^2}{\pi^4}} \quad (42)$$

gilt aber nur für genügend kleine λ^2 ; für $\lambda^2 = 4 \pi^2$ beträgt der Fehler + 3 %.

Die gerade zitierte Arbeit [15] bezieht übrigens auch die Biegesteifigkeit des Seiles und eine federnde Lagerung in die Berechnung mit ein.

2.1.2 Theorie von Saxon & Cahn

Die Theorie [12] gilt für festverankerte Seile mit mittlerem bis extrem großem Durchhang, wegen der Nichtberücksichtigung der Dehnung aber nicht für Seile mit kleinem Durchhang. Die untere Gültigkeitsgrenze ergibt sich aus dem erforderlichen Abstand vom "cross-over"-Punkt und kann nach Figur 2 abgeschätzt werden zu

$$\lambda_u^2 \simeq 10\lambda_n^2 = 10(2n\pi)^2 \quad (43)$$

Den zugehörigen Durchhang erhält man aus Gl. (35), die auf

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{mgL_e}{EA}} \lambda^2 \quad (44)$$

führt. Für ein Stahlseil im Gravitationsfeld der Erde mit $E = 200\,000$ MPa, $m/A = 8$ t/m³ und $L_e \simeq l = 200$ m folgt z.B., daß zur sicheren Erfassung der Eigenfrequenz des ersten symmetrischen Modus der bezogene Durchhang mindestens 1:25 betragen muß.

Die Theorie beschränkt sich auf Schwingungen innerhalb der Seilebene. Die Eigenfrequenzen sowohl der symmetrischen als auch der antimetrischen Modi ergeben sich in dimensionsloser Form als Lösungen transzendenter Gleichungen, deren Koeffizienten als trigonometrische Funktionen und elliptische Integrale dargestellt werden können und nur vom statischen Neigungswinkel an den Randpunkten ψ_0 abhängig sind.

Die Zusammenhänge mit den anderen geometrischen Parametern für die als statische Seillinie zugrundegelegte Kettenlinie lauten dabei

$$\tan \psi_0 = \frac{4d/L}{1 - (2d/L)^2} \quad (45)$$

$$l = L \frac{\operatorname{arsinh}(\tan \psi_0)}{\tan \psi_0} \quad (46)$$

wobei wieder l für die Sehnenlänge und L für die Seillänge stehen.

Bezüglich des numerisch etwas aufwendigen Lösungsalgorithmus sei auf die Originalarbeit [12] und auf das Buch von Irvine [3] verwiesen, dem auch die in Tafel 2 zusammengestellten Frequenzen der ersten antimetrischen und symmetrischen Eigenformen entnommen sind. In der dimensionslosen Form

$$\omega_* := \omega \sqrt{\frac{L}{2g \tan \psi_0}} \quad (47)$$

sind die Eigenfrequenzen nur vom geometrischen Parameter ψ_0 abhängig. Die zum Vergleich in Klammern angegebenen Werte wurden nach der im vorigen Abschnitt dargelegten Theorie ermittelt, wobei große λ^2 zugrundelagen.

Die Begriffe symmetrisch und antimetrisch beziehen sich hier übrigens nicht mehr auf die Vertikalverschiebung, sondern auf die Bewegungskomponente senkrecht zur statischen Seillinie. Die Tangentialkomponente eines symmetrischen Modus ist antimetrisch und umgekehrt.

Saxon & Cahns Theorie konnte durch Vergleich mit Experimenten bestätigt werden [12].

ψ_0	d/L	Antisymmetric			Symmetric	
		ω_{*1}/π	ω_{*2}/π	ω_{*3}/π	ω_{*1}/π	ω_{*2}/π
5°	0.022	11.42 (11.36)	22.86 (22.73)	34.31 (34.09)	16.38 (16.25)	28.13 (28.0)
10°	0.044	5.64 (5.68)	11.35 (11.36)	17.04 (17.04)	8.14 (8.12)	13.98 (13.97)
20°	0.088	2.70 (2.76)	5.52 (5.54)	8.30 (8.31)	3.96 (4.00)	6.82 (6.85)
30°	0.13	1.68 (1.78)	3.50 (3.56)	5.29 (5.34)	2.52 (2.55)	4.36 (4.39)
40°	0.18	1.13 (1.26)	2.44 (2.52)	3.71 (3.79)	1.76 (1.81)	3.06 (3.11)
50°	0.23	0.79 (0.95)	1.76 (1.88)	2.70 (2.82)	1.27 (1.35)	2.23 (2.32)
60°	0.29	0.54	1.27	1.95	0.91	1.61
70°	0.35	0.34	0.87	1.35	0.61	1.11
75°	0.38	0.25	0.68	1.07	0.47	0.88
80°	0.42	0.15	0.50	0.80	0.34	0.65
82°	0.44	0.12	0.42	0.68	0.28	0.55
84°	0.45	0.075	0.34	0.56	0.22	0.45
86°	0.47	0.031	0.25	0.43	0.15	0.34
88°	0.48	0.021	0.15	0.27	0.074	0.21

Tafel 2: Die ersten Eigenfrequenzen der Schwingungen innerhalb der Seilebene nach der Theorie von Saxon & Cahn; Werte in Klammern nach Irvine & Caugheys Theorie [3]

2.2 Das schräg gespannte Seil

2.2.1 Erweiterung von Irvine & Caugheys Theorie

Ausgehend von [1] bzw. der in Abschn. 2.1.1 dargelegten Theorie gab Irvine Lösungen für die freien Schwingungen des schräg gespannten Seiles an [2].

Man kann zeigen, daß dieser Modifikation eine einzige zusätzliche Annahme zugrundeliegt: Die sehnparallele Komponente der Gewichtskraft darf unberücksichtigt bleiben.

Ist dies der Fall, so können die Gleichungen des Abschnitt 2.1.1 auf das im gedrehten Achsenkreuz dann parabelförmig hängende Seil angewendet werden (Drehwinkel gleich Neigungswinkel). Aus dieser Überlegung ergeben sich die folgenden Substitutionen:

- g wird ersetzt durch die zur Seilsehne senkrecht wirkende Beschleunigungskomponente $g \cos \Theta$ (wobei Θ der Neigungswinkel der Sehne bezogen auf die Horizontale ist),
- der Durchhang d wird ersetzt durch $d \cos \Theta$, was etwa dem Durchhang senkrecht zur Sehne entspricht,
- statt der statischen Horizontalkraft H ist die Größe $T_{\Theta} = H / \cos \Theta$ einzusetzen, die gleich der statischen Seilkraft im Punkt mit dem Tangentenwinkel Θ und etwa gleich der mittleren sehnparallelen Seilkraftkomponente ist.

Die anderen Parameter werden entweder unverändert übernommen (Sehnenlänge l , Massenbelegung m , Dehnsteifigkeit EA) oder ergeben sich in ihrer modifizierten Form entsprechend ihrer Abhängigkeit von den angegebenen substituierten Größen (wie z.B. L_e nach Gl. (22) oder λ^2 nach Gl. (35)).

Dementsprechend lautet der Systemparameter λ^2 in modifizierter Form

$$\lambda^2 = \left(\frac{mgl}{T_{\Theta}} \right)^2 \frac{EA l}{T_{\Theta} L_e} \cos^2 \Theta = \left(\frac{8d}{l} \right)^3 \frac{EA}{mgL_e} \cos^2 \Theta \quad (48)$$

mit
$$T_{\Theta} = \frac{H}{\cos \Theta} \quad (49)$$

und
$$L_e \simeq l \left[1 + 8 \left(\frac{d}{l} \right)^2 \cos^2 \Theta \right] = l \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{mgl}{T_{\Theta}} \right)^2 \cos^2 \Theta \right] , \quad (50)$$

wobei d wie zuvor der vertikale Durchhang in Feldmitte ist.

Für die horizontalen Schwingungen senkrecht zur Seilebene folgt aus Gl. (16)

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T_{\Theta}}{m}} ; n = 1, 2, \dots \quad (51)$$

und für die antimetrischen Schwingungen innerhalb der Seilebene aus Gl. (26)

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{l} \sqrt{\frac{T_{\Theta}}{m}} ; n = 1, 2, \dots \quad (52)$$

Die Frequenzgleichung (34) für die symmetrischen Schwingungen innerhalb der Seilebene kann unter Einsetzen von λ^2 nach Gl. (48) und

$$\omega := \omega_l \sqrt{\frac{m}{T_\Theta}} \quad (53)$$

unverändert übernommen werden; mit deren Lösungen ω_n folgen die Eigenfrequenzen zu

$$\omega_n = \frac{\omega_n}{l} \sqrt{\frac{T_\Theta}{m}} \quad ; n = 1, 2, \dots \quad (54)$$

Für $\Theta = 0$ erhält man die Lösungen für das waagrecht gespannte Seil nach Abschn. 2.1.1. Für $\Theta = 90^\circ$ wird $\lambda^2 = 0$ und es stellen sich die Ergebnisse der schwingenden Saite ein, was dann korrekt ist, wenn die Seilkraft T_Θ wesentlich größer ist als das Seilgewicht $m g l$.

Die numerische Überprüfung der Theorie an den Ergebnissen einer Finite-Element-Berechnung [6] zeigte ihre Brauchbarkeit [2].

Allerdings wird die Vernachlässigung der sehnparallelen Gewichtskraft mit wachsendem Neigungswinkel Θ immer weniger gerechtfertigt sein, da diese im Verhältnis zur Querbelastung $m g \cos \Theta$ immer bedeutender wird und so die aus der Vernachlässigung implizierten Annahmen (statische sehnparallele Seilkraftkomponente ist konstant und Seillinie ist Parabel im gedrehten Achsenkreuz) immer weniger gelten.

Der hieraus entstehende Fehler erfordert eine Beschränkung des Gültigkeitsbereichs der Theorie auf einen mit wachsendem Neigungswinkel entsprechend kleineren maximalen Durchhang.

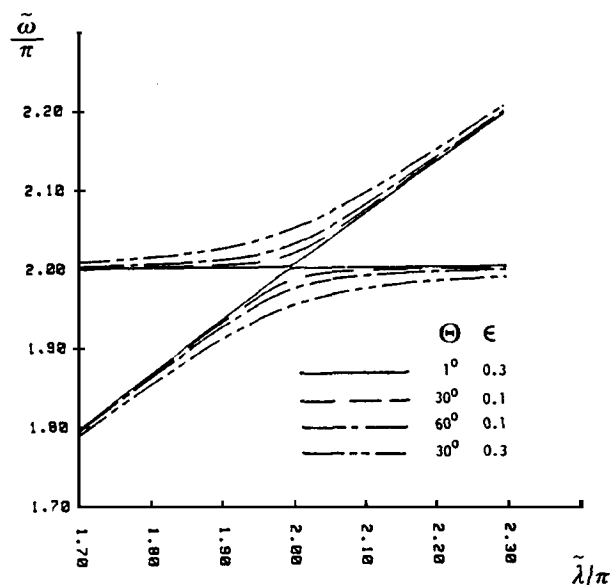
2.2.2 Theorie von Triantafyllou

Die Theorie [7] beschränkt sich auf Schwingungen innerhalb der Seilebene, geht gegenüber der im vorigen Abschnitt dargelegten Methode aber von allgemeineren Voraussetzungen aus; sowohl die Änderung der zusätzlichen dynamischen Seilkraft in Längsrichtung als auch die sehnparallele Komponente der Gewichtskraft finden Berücksichtigung.

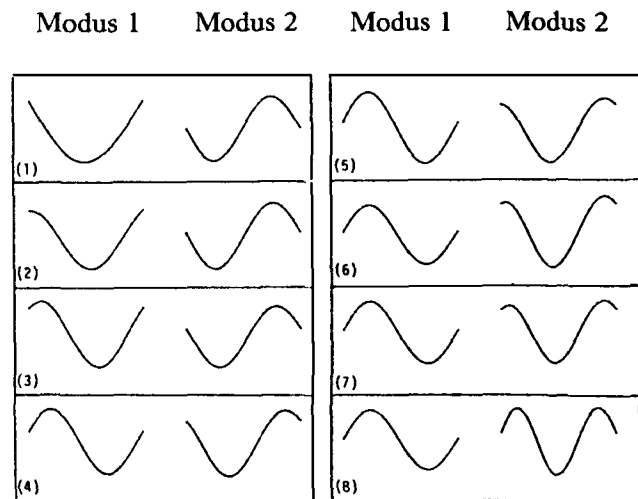
Eine Analyse der Lösungen zeigt ein qualitativ neues Phänomen bei geneigt gespannten Seilen: Anders als bei Seilen mit horizontaler Sehne kommt es im "cross-over"-Bereich (vgl. Abschn.2.1.1) nicht zu einer Überschneidung der Eigenfrequenzäste symmetrischer und antisymmetrischer Modi.

Die Lösungsäste nähern sich nur an und entfernen sich wieder voneinander (Figur 4), wobei die zugehörigen Eigenformen ausgetauscht werden (Figur 5); ein Phänomen, das von anderen physikalischen Problemen her unter dem Namen "avoided crossings" bekannt ist.

Im Übergangsbereich (d.h. für $\lambda^2 \simeq (2m\pi)^2$) werden die Modi hybrid und verlieren damit ihre Symmetrieeigenschaften.



Figur 4: Die ersten beiden Eigenfrequenzen eines schräg gespannten Seiles in Abhängigkeit von $\tilde{\lambda}$, Θ , ϵ nahe $\tilde{\lambda}^2 = 4\pi^2$ [8]



Figur 5: : Entwicklung der Eigenmodi für ein Seil mit $\Theta = 30^\circ$, $\epsilon = 0,3$ sowie

$\tilde{\lambda}/\pi =$
 0,1 (1) ; 2,3 (5)
 1,7 (2) ; 2,5 (6)
 1,9 (3) ; 2,7 (7)
 2,1 (4) ; 8,0 (8)
 [8]

Gegenüber der im vorigen Abschnitt dargelegten Methode führt die Theorie auf nur geringfügig verschiedene Eigenfrequenzen; der Einfluß auf die Eigenmodi und damit auf die dynamische Seilkraft ist größer [7], [8].

Unter der wieder eingeführten Annahme quasi-statischer Seildehnung läßt sich eine relativ einfache, für die ersten Eigenfrequenzen gültige Frequenzgleichung angeben [8]:

$$\sin \frac{\tilde{\omega}}{2} \left[\frac{\tilde{\omega}}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\lambda}^2} - 1 \right) \cos \frac{\tilde{\omega}}{2} + \sin \frac{\tilde{\omega}}{2} \right] - \left(\frac{7}{8} \epsilon \sin \Theta \right)^2 \cos \tilde{\omega} \doteq 0 \quad (55)$$

mit
$$\epsilon := \frac{\tilde{m}gL}{T_{\Theta}} \simeq \frac{mgl}{T_{\Theta}} \quad (56)$$

$$\tilde{\lambda}^2 := \left(\frac{\tilde{m}gL}{T_{\Theta}} \right)^2 \frac{EA}{T_{\Theta}} \cos^2 \Theta \quad (57)$$

$$\tilde{\omega} := \omega L \sqrt{\frac{\tilde{m}}{T_{\Theta}}} \quad (58)$$

wobei L für die Seillänge und Θ wieder für die Sehneneigung stehen; T_{Θ} ist die statische Seilkraft in dem Punkt mit dem Tangentenwinkel Θ und \tilde{m} die auf die Seillänge (statt auf die Sehne) bezogene Masse.

Statt $\tilde{\lambda}^2$ und $\tilde{\omega}$ können bei kleinem Durchhang auch die mit den Gleichungen (48) und (53) definierten Größen λ^2 und ω benutzt werden. Verschwindet dann entweder der Neigungswinkel Θ oder mit ϵ der Durchhang, so erhält man aus der Frequenzgleichung (55) die Eigenfrequenzen der symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen wie nach den Abschnitten 2.1.1 und 2.2.1.

Das in Gl. (55) neu auftauchende, mit den zusätzlichen Parametern Θ und ϵ behaftete Störglied wird für flach gespannte Seile klein sein, sorgt aber dennoch für den qualitativen Übergang von "cross-over" zu "avoided crossings".

Selbst in ihrer vereinfachten Form liefert die Theorie einen immer noch recht unhandlichen Ausdruck für die Schwingungsmodi, auf dessen Wiedergabe hier verzichtet und diesbezüglich auf die Arbeit [8] verwiesen wird; man findet dort auch Angaben zur dynamischen Seilkraft.

3. Das lineare dynamische Antwortverhalten

Die Ausführungen dieses Kapitels sind eine Fortsetzung der in Abschnitt 2.1.1 dargelegten Theorie von Irvine & Caughey und folgen teilweise der Arbeit [3]. Die Herleitungen und Formeln gelten für ein Seil mit horizontaler Sehne, können aber durch geeignete Substitutionen entsprechend Abschnitt 2.2.1 auf ein schräg gespanntes Seil verallgemeinert werden.

Betrachtet wird zunächst nur die Erregung von Schwingungen innerhalb der Seilebene. Bezüglich der Schwingungen senkrecht hierzu verhält sich das Seil wie eine schwingende Saite (vgl. Abschnitt 2.1.1).

3.1 Allgemeine Lösung

Ergänzt man Gl. (8) um den Term der äußeren Streckenbelastung $p(x,t)$, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (1), (2)

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{8d}{l^2} h - p(x,t) \quad (59)$$

Hierbei wirkt p senkrecht zur Seilsehne und - beim horizontal gespannten Seil - in Richtung der Gewichtskraft. Die Kontinuitätsbedingung (21) gilt unverändert weiter und bildet zusammen mit Gl. (59) ein nun inhomogenes Integro-Differentialgleichungssystem.

Eine elegantere Entwicklung wird möglich durch die Einführung der folgenden dimensionslosen Größen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &:= \frac{x}{l} \\ \mathbf{t} &:= t \frac{1}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} \\ \mathbf{v} &:= \frac{v}{8d} \\ \mathbf{h} &:= \frac{h}{H} \\ \mathbf{p} &:= \frac{p}{mg} \\ \boldsymbol{\omega} &:= \omega l \sqrt{\frac{m}{H}} = \omega \sqrt{\frac{8d}{g}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Die Gleichungen (59) und (21) werden hiermit überführt auf

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{h} - \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad (61)$$

$$\mathbf{h} = \lambda^2 \int_0^1 \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad (62)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen soll hier durch Superposition der modalen Systemantworten konstruiert werden. Die Transformationsgleichung

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_n v_n(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_n \tilde{v}_n(\mathbf{x}) \eta_n(\mathbf{t}) \quad (63)$$

stellt den Zusammenhang zwischen der gesuchten geometrischen Verschiebung \mathbf{v} und den Normalkoordinaten η_n her; die Größen \tilde{v}_n stehen für die Eigenmodi der Vertikalschwingung, wie sie sich aus den homogenen Gleichungen (8) und (21) der freien Schwingung ergeben.

Man kann zeigen, daß für die Eigenmodi die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_0^1 \tilde{v}_i \tilde{v}_j dx = 0 ; i \neq j \quad (64)$$

$$\int_0^1 \tilde{v}_i \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_j}{\partial x^2} - \lambda^2 \int_0^1 \tilde{v}_j dx \right) dx = 0 ; i \neq j \quad (65)$$

gelten. Für die Eigenfrequenzen der freien Schwingung kann man außerdem die Beziehung

$$\omega_n^2 = - \frac{\int_0^1 \tilde{v}_n \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial x^2} - \lambda^2 \int_0^1 \tilde{v}_n dx \right) dx}{\int_0^1 \tilde{v}_n^2 dx} \quad (66)$$

herleiten (Rayleigh-Quotient).

Einsetzen des Ansatzes (63) in das Gleichungssystem (61), (62) führt unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (64) bis (66) auf die entkoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \eta_n}{\partial t^2} + 2\zeta_n \omega_n \frac{\partial \eta_n}{\partial t} + \omega_n^2 \eta_n = P_n \quad (67)$$

mit den generalisierten Belastungstermen

$$P_n := \frac{\int_0^1 \tilde{v}_n p dx}{\int_0^1 \tilde{v}_n^2 dx} , \quad (68)$$

wobei an dieser Stelle auch ein Dämpfungsterm nachträglich eingefügt wurde. Wie man zeigen kann [21], ist ζ_n das Verhältnis der als viskos angenommenen Dämpfung zur kritischen Dämpfung bei einer freien Schwingung im n-ten Modus. Mit dem logarithmischen Dekrement δ_n besteht der Zusammenhang

$$\delta_n = 2\pi \zeta_n \frac{\omega_n}{\omega_{Dn}} \quad (69)$$

mit

$$\omega_{Dn} := \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} . \quad (70)$$

Die strukturelle Dämpfung wird von Irvine [3] mit $\zeta = 0.4 \%$ bis $\zeta = 4 \%$ angegeben (je nach Seilaufbau und Durchhang); jüngste Messungen an einer Schrägseilbrücke ergaben mit $\zeta = 0.27 \%$ bis $\zeta = 0.52 \%$ allerdings noch wesentlich geringere Werte, obwohl zusätzliche (wenn auch wenig wirksame) Schwingungsdämpfer vorhanden waren [19]. Für höhere Eigenmodi und große Schwingungsamplituden ist die strukturelle Dämpfung wahrscheinlich größer. In starken Winden kann die Gesamtdämpfung unter Einbeziehung der Strömungskräfte auf bis zu 10 % anwachsen [13].

Mit den Gleichungen (63), (67) und (68) ist das Problem auf die Dynamik des Einzelschwingers zurückgeführt und kann für beliebige $p(x,t)$ mittels der einschlägigen Methoden entweder im Zeitbereich (Duhamel-Integral) oder im Frequenzbereich (Fourier-Transformation) gelöst werden [21].

Durch Einsetzen des Ansatzes (63) in Gl. (62) folgt h dann weiter zu

$$h(t) = \sum_n h_n(t) = \sum_n \tilde{h}_n \eta_n(t) \quad (71)$$

wobei

$$\tilde{h}_n = \lambda^2 \int_0^1 \tilde{v}_n dx . \quad (72)$$

Ist die Belastung p symmetrisch (antisymmetrisch) bezüglich der Mittelachse, so folgt aus Gl. (68), daß nur die symmetrischen (antisymmetrischen) Modi erregt werden.

3.2 Antwort auf eine dynamische Gleichstreckenlast

Es wird nun der Sonderfall einer Erregung durch die zeitlich beliebige Gleichstreckenlast

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(t) \quad (73)$$

untersucht. Hier ist

$$P_n = \mathbf{p} \frac{\int_0^1 \tilde{v}_n dx}{\int_0^1 \tilde{v}_n^2 dx} \quad (74)$$

Da dieser Term für antimetrische Modi verschwindet, bezieht sich n in diesem Abschnitt nur noch auf die symmetrischen Modi.

Aus Gl. (32) folgt in dimensionsloser Form

$$\tilde{v}_n = \frac{\tilde{h}_n}{\omega_n^2} \left(1 - \tan \frac{\omega_n}{2} \sin \omega_n x - \cos \omega_n x \right) \quad (75)$$

Setzt man dies in die Rechenvorschrift (74) ein, so erhält man unter Rückgriff auf die Frequenzgleichung (34) den Ausdruck

$$P_n = \frac{\alpha_n \omega_n^2}{\tilde{h}_n} \mathbf{p} \quad (76)$$

mit dem allein von λ^2 und n abhängigen Partizipierungsfaktor

$$\alpha_n := \frac{2/3}{1 + \frac{\lambda^2}{12} \left[\frac{\tan(\omega_n/2)}{\omega_n/2} \right]^2} \quad (77)$$

Wirkt nun $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ auf ein für $t = 0$ in Ruhe befindliches Seil, so lauten die Lösungen von Gl. (67) unter Benutzung des Duhamel-Integrals

$$\eta_n = \frac{\alpha_n \omega_n^2}{\tilde{h}_n} D_n \quad (78)$$

mit

$$D_n := \frac{1}{\omega_{Dn}} \int_0^t \mathbf{p}(\tau) e^{-\zeta_n \omega_n (t-\tau)} \sin[\omega_{Dn} (t-\tau)] d\tau \quad (79)$$

und den Eigenfrequenzen ω_{Dn} des gedämpften Seiles (s. Gl. (70)).

Die Gesamtlösung erhält man schließlich mit den Gleichungen (63), (71) und (75), wobei \tilde{h}_n stets herausfällt: Für die Verschiebung in Seilmitte gilt mit $x = 1/2$

$$\mathbf{v}_{mid} = \sum_n \beta_n \omega_n^2 D_n \quad (80)$$

mit

$$\beta_n := \frac{\alpha_n}{\omega_n^2} \left[1 - \frac{1}{\cos(\omega_n/2)} \right] \quad (81)$$

und für die zusätzliche, dynamische Seilkraft erhält man

$$\mathbf{h} = \sum_n \alpha_n \omega_n^2 D_n \quad (82)$$

Hierbei wird sich die Summation praktisch auf die Modalbeiträge der ersten Eigenmodi beschränken.

Die Partizipierungsfaktoren α_n , β_n können den Tafeln 3 und 4 entnommen werden.

λ^2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
$256\pi^2$	0.003	0.004	0.005	0.007	0.011	0.025	0.126	0.666
$196\pi^2$	0.004	0.005	0.007	0.012	0.026	0.127	0.666	0.116
$144\pi^2$	0.006	0.008	0.012	0.027	0.118	0.666	0.115	0.017
$100\pi^2$	0.010	0.014	0.028	0.129	0.666	0.114	0.016	0.005
$64\pi^2$	0.016	0.031	0.131	0.666	0.112	0.015	0.005	0.002
$36\pi^2$	0.035	0.135	0.666	0.110	0.014	0.004	0.002	0.001
$16\pi^2$	0.141	0.666	0.104	0.011	0.003	0.001	0.000	0.000
100	0.345	0.506	0.033	0.005	0.001	0.001	—	—
80	0.480	0.362	0.021	0.004	0.001	0.001	—	—
60	0.610	0.206	0.013	0.003	0.001	0.000	—	—
$4\pi^2$	0.666	0.090	0.007	0.002	0.001	—	—	—
20	0.590	0.030	0.003	0.001	0.000	—	—	—
10	0.440	0.012	0.001	0.000	—	—	—	—
8	0.389	0.009	0.001	0.000	—	—	—	—
6	0.325	0.007	0.001	—	—	—	—	—
4	0.245	0.004	0.001	—	—	—	—	—
2	0.140	0.002	0.000	—	—	—	—	—
1	0.076	0.001	—	—	—	—	—	—
0.1	0.008	0.000	—	—	—	—	—	—

Tafel 3: Partizipierungsfaktoren α_n für die dynamische Seilkratt bei symmetrischen Schwingungen innerhalb der Seilebene [3]

λ^2	$\beta_1 \times 10^3$	$\beta_2 \times 10^3$	$\beta_3 \times 10^3$	$\beta_4 \times 10^3$	$\beta_5 \times 10^3$	$\beta_6 \times 10^3$	$\beta_7 \times 10^3$	$\beta_8 \times 10^3$
$256\pi^2$	0.23	-0.10	0.10	-0.07	0.10	-0.09	0.26	0.0
$196\pi^2$	0.30	-0.13	0.14	-0.11	0.17	-0.19	0.69	-0.16
$144\pi^2$	0.42	-0.19	0.22	-0.18	0.48	0.0	0.36	-0.09
$100\pi^2$	0.62	-0.29	0.41	-0.38	0.14	-0.31	0.16	-0.07
$64\pi^2$	1.02	-0.51	1.19	0.0	0.75	-0.19	0.10	-0.05
$36\pi^2$	2.06	-1.15	3.75	-0.82	0.32	-0.13	0.08	-0.05
$16\pi^2$	6.68	0.0	2.52	-0.52	0.22	-0.11	0.07	-0.04
100	14.0	-1.96	1.71	-0.46	0.20	-0.11	0.06	-0.04
80	18.8	-3.67	1.52	-0.44	0.20	-0.10	0.06	-0.04
60	24.9	-5.13	1.37	-0.42	0.19	-0.10	0.06	-0.04
$4\pi^2$	33.8	-5.59	1.23	-0.40	0.19	-0.10	0.06	-0.04
20	51.3	-5.31	1.13	-0.39	0.18	-0.10	0.06	-0.04
10	72.4	-5.05	1.08	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04
8	79.2	-5.00	1.07	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04
6	87.5	-4.95	1.06	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04
4	97.9	-4.89	1.05	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04
2	111	-4.83	1.04	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04
1	119	-4.81	1.04	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04
0.1	128	-4.78	1.03	-0.38	0.18	-0.10	0.06	-0.04

Tafel 4: Partizipierungsfaktoren β_n für die vertikale Verschiebung in Feldmitte bei symmetrischen Schwingungen innerhalb der Seilebene [3]

Für den Sonderfall der schwingenden Saite - und damit auch für symmetrische Schwingungen senkrecht zur Seilebene (!) - ergeben sich durch den Grenzübergang $\lambda^2 \rightarrow 0$

$$\alpha_n = 0 \quad , \quad (77a)$$

$$\beta_n = -4 \frac{(-1)^n}{[(2n-1)\pi]^3} \quad . \quad (81a)$$

Für den spezielleren Belastungsfall einer harmonischen Gleichstreckenlast

$$\mathbf{p}(x, t) = \mathbf{p}(t) = \hat{\mathbf{p}} \sin \bar{\omega} t \quad (83)$$

bleiben die Terme (73) bis (82) bestehen. Im eingeschwungenen Zustand kann die Schwingung aber nun einfacher durch

$$\eta_n = \hat{\eta}_n \sin(\bar{\omega} t - \phi_n) \quad (84)$$

beschrieben werden, wobei sich die Amplitude zu

$$\hat{\eta}_n = \frac{A_n}{\mathbf{h}_n} \hat{\mathbf{p}} \quad , \quad (85)$$

mit
$$A_n := \alpha_n [(1 - \kappa_n^2)^2 + (2 \zeta_n \kappa_n)^2]^{-1/2} \quad , \quad (86)$$

$$\kappa_n := \frac{\bar{\omega}}{\omega_n} \quad (87)$$

und der Phasenwinkel zu

$$\phi_n = \arctan \left(\frac{2 \zeta_n \kappa_n}{1 - \kappa_n^2} \right) \quad (88)$$

ergeben [21].

Auf gleiche Art wie zuvor erhält man hier die Gesamtlösungen

$$\mathbf{v}_{mid} = \hat{\mathbf{p}} \sum_n B_n \sin(\bar{\omega} t - \phi_n) \quad (89)$$

mit
$$B_n := \beta_n [(1 - \kappa_n^2)^2 + (2 \zeta_n \kappa_n)^2]^{-1/2} \quad (90)$$

sowie
$$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{p}} \sum_n A_n \sin(\bar{\omega} t - \phi_n) \quad (91)$$

mit A_n nach Gl. (86).

Bei Variierung der Erregerfrequenz wird die Systemantwort im n-ten Modus maximal (modale Resonanz), wenn

$$\kappa_n = \kappa_n^{res} = \sqrt{1 - 2 \zeta_n^2} \quad . \quad (92)$$

Hierfür erhält man

$$A_n = A_n^{res} = \frac{\alpha_n}{2 \zeta_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \simeq \frac{\alpha_n}{2 \zeta_n} \quad (93)$$

$$B_n = B_n^{res} = \frac{\beta_n}{2 \zeta_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} \simeq \frac{\beta_n}{2 \zeta_n} \quad . \quad (94)$$

Dieser Anteil - sofern vorhanden - kann die Systemantwort dominieren, was aber im Einzelfall zu überprüfen bliebe.

3.3 Antwort auf dynamische Randpunktverschiebungen

Die gesamte, auf ein beschleunigungsfreies Koordinatensystem bezogene Verschiebung v^t wird dargestellt als aus einer pseudo-statischen Verschiebung v^s (infolge statischer Einprägung der Lagerverschiebungen) und einer hierauf bezogenen dynamischen Verschiebung v zusammengesetzt [21]:

$$v^t = v^s + v \quad . \quad (95)$$

Ebenso kann man ansetzen

$$p^t = p^s + p \quad . \quad (96)$$

Die folgende Herleitung beschränkt sich auf Randpunktverschiebungen v^t ($x=0$) und v^t ($x=1$) vertikal zur Sehne und innerhalb der Seilebene. In diesem Fall verschwindet h^t und es gilt

$$h^t = h \quad . \quad (97)$$

Läßt man in der Bewegungsgleichung (61) den Belastungsterm p fort und ersetzt v und h durch die neuen Schreibungen v^t und h^t , so folgt mit den Gleichungen (95) und (97) sowie wegen

$$\frac{\partial^2 v^s}{\partial x^2} = 0 \quad (98)$$

eine Bewegungsgleichung in v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = h + \frac{\partial^2 v^s}{\partial t^2} \quad , \quad (99)$$

die mit der inhomogenen Ausgangsgleichung (61) formal identisch ist, wenn man noch

$$p(x, t) := - \frac{\partial^2 v^s}{\partial t^2} \quad (100)$$

substituiert. Da für v dieselben Randbedingungen wie vorher gelten, und so auch die Kontinuitätsbedingung (62) unverändert übernommen werden kann, ist das Problem mit Gl. (100) auf die in Abschnitt 3.1 behandelte Anregung durch Querbeltung zurückgeführt.

Eine Besonderheit des hier diskutierten Falles ist, daß p so wie v^s linear mit x veränderlich ist. Wegen der möglichen Zerlegung

$$v^s = v_{sym}^s + v_{anti}^s \quad (101)$$

in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil und wegen Gl. (100) wird nur die symmetrische Beschleunigung eine Erregung der symmetrischen Modi und damit zusätzliche, dynamische Seilkraft erzeugen.

Der zugehörige symmetrische Belastungsterm ist konstant über die Seillänge, womit bezüglich h auch die spezielleren Ergebnisse des Abschnittes 3.2 übernommen werden können. Für den Term der Querbeltung ist dabei

$$p(x, t) = p_{sym}(t) = - \frac{1}{2} [a^t(x=0) + a^t(x=1)] \quad (102)$$

mit den vorgegebenen totalen Beschleunigungen

$$a^t := \frac{\partial^2 v^t}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v^t}{\partial t^2} \frac{1}{g} \quad (103)$$

der beiden Randpunkte einzusetzen; die beliebig und voneinander unabhängig sein dürfen.

Das in diesem Abschnitt dargelegte Verfahren gilt unter dem Vorbehalt kleiner Dämpfung, da andernfalls in den Ausdrücken (100) und (102) auch geschwindigkeitsbehaftete Terme zu berücksichtigen wären (vgl. [21], Abschnitt 17). Dieser Vorbehalt wird für Seile in der Luft praktisch immer erfüllt sein.

In der Arbeit [26] wurde das Problem der randinduzierten Seilschwingungen genauer und in allgemeinerer Form (d.h. für Randpunktverschiebungen in beliebige Richtung) untersucht. U.a. wird dort eine dynamische Steifigkeitsmatrix für das Einzelseil angegeben.

4. Nichtlineare Theorien

Für nichtlineare Schwinger wird die Schwingungsamplitude zu einem wichtigen Bewegungsparameter, der in allen theoretischen und experimentellen Untersuchungen Berücksichtigung finden muß.

Bezüglich dieses komplexen und immer noch wenig erforschten Gebietes seien hier nur einige Literaturhinweise gegeben.

Eine Einführung in die nichtlineare Dynamik von Seilen mit und ohne Durchhang gibt Irvine [3]. Er zeigt, daß die Eigenfrequenzen amplitudenabhängig sind und die dynamische Seilkraft gegenüber der Verschiebung eine Frequenzverdopplung erfahren kann. Auch weist er darauf hin, daß bei nichtlinearer Betrachtung die Schwingungen senkrecht und parallel zur Seilebene miteinander gekoppelt sind.

Kovács untersuchte die Erregung von Querschwingungen eines vertikal gespannten Seiles durch gegensinnige Verschiebung der Randpunkte in Seilrichtung (Parametererregung) und macht Angaben zum Stabilitätsverhalten sowie zur Größe der stationären Schwingungsamplitude (Grenzzykel) [16]. Nach Meinung des Autors [16] sind diese Erkenntnisse auf durchhängende Seile übertragbar.

Argyris und Mlejnek behandeln zur allgemeinen Illustration nichtlinearen Verhaltens das diskrete System eines masselosen, vertikal gespannten Seils mit einer Einzelmasse und einer Quererregung in Seilmitte [22].

Nach Aufstellen der Duffing-Gleichung zeigen sie, daß bei geeigneter (nicht unbedingt realistischer) Wahl der Parameter Phänomene wie das Auftreten subharmonischer Schwingungen und chaotisches Verhalten ("strange attractor") möglich sind.

Derartige Untersuchungen können nur noch numerisch oder experimentell durchgeführt werden.

Zur numerischen Berechnung des nichtlinearen Verhaltens durchhängender Seile haben Henghold & Russell eine Familie finiter Elemente formuliert [5].

Den Stand des momentanen Wissens bezüglich der nichtlinearen Seildynamik dürfte die kürzlich erschienene Dissertation von Tonis [25] repräsentieren.

5. Mechanismen der Schwingungserregung

5.1 Anregung durch dynamische Querkräfte

Betrachtet seien verteilt angreifende, dynamische Erregerkräfte senkrecht zum Seil, wie sie typischerweise als Strömungskräfte in Erscheinung treten. In Entsprechung zur aerodynamischen Streifentheorie [23] wird die Strömungskomponente in Seilrichtung vernachlässigt.

Bei Anwendung der Verfahren nach Abschnitt 3. muß genügende Übereinstimmung zwischen Seil- und Sehnenrichtung und damit ein nicht zu großer Durchhang vorausgesetzt werden. Das Seil sei fest verankert; die Schwingungen seien klein (lineare Theorie).

5.1.1 Anregung durch Wirbelablösungen

Für ein Seil mit kreisrundem Querschnitt kann auf das umfangreiche Wissen bzgl. der Wirbelablösung am Kreiszylinder zurückgegriffen werden [20], [23]. Der Ablösevorgang ist von der Reynoldszahl

$$Re := \frac{D V}{\nu} \quad (104)$$

abhängig; mit dem (Seil-) Durchmesser D , der Anströmgeschwindigkeit V (senkrecht zur Längsachse) und der kinematischen Zähigkeit ν des Strömungsmediums (für Luft: $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). Auch eine Abhängigkeit von anderen Parametern wie z.B. der Oberflächenrauigkeit ist möglich.

Die Ablösefrequenz der Wirbelpaare kann ermittelt werden zu

$$\bar{f} = \frac{S V}{D} \quad (105)$$

Die dimensionslose Strouhalzahl S ist - wie Versuche zeigen - im wesentlichen eine Funktion der Reynoldszahl (vgl. Figur 6).

Seile von Schrägseilbrücken liegen im allgemeinen im unterkritischen Re-Bereich, für den

$$S \simeq 0,2 \quad (106)$$

eingesetzt werden kann.

Für die längenbezogene, quer zur Strömungsrichtung wirkende Erregerkraft setzt man an

$$p = q D \hat{c}_A e^{i\bar{\omega}t} \quad (107)$$

wobei

$$q = 1/2 \rho V^2 \quad (108)$$

der Staudruck und ρ die Dichte des Strömungsmediums ist (für Luft: $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$) [23].

Weiterhin gilt $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$ (109)

und $\hat{c}_A := \hat{c}_A' + i\hat{c}_A''$; \hat{c}_A' , $\hat{c}_A'' \in \mathbb{R}$. (110)

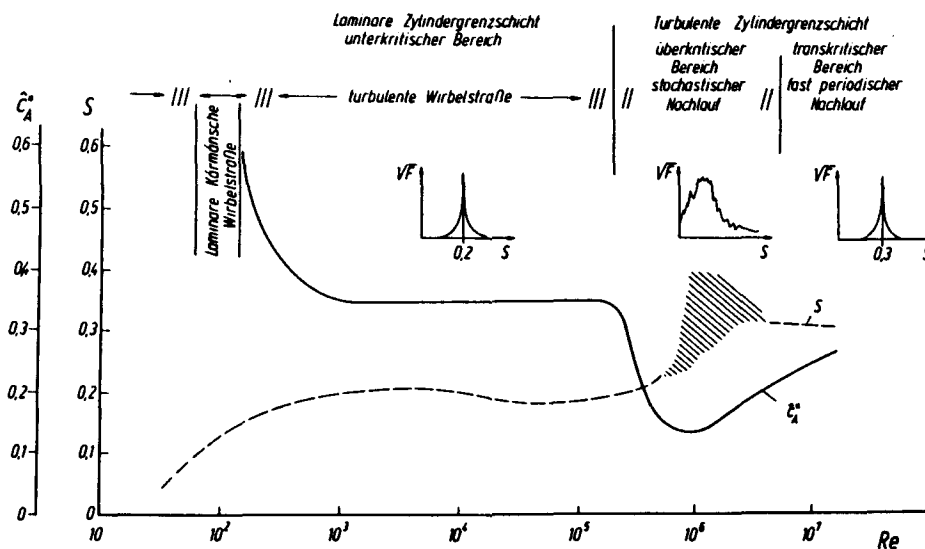


Abb. 3. 85. STROUHAL-Zahl S und Quertriebsbeiwert \hat{c}_A'' des quer angeströmten Kreiszyinders als Funktion der REYNOLDS-Zahl

Figur 6 [23]

Außer von den genannten Parametern ist \hat{c}_A auch von der Schwingungsamplitude abhängig.

Die Phasenbeziehung mit der Systemschwingung wird hergestellt durch

$$v = \hat{v} e^{i\bar{\omega}t} \quad (111)$$

Der schwingungsanregende, der Systemdämpfung entgegenwirkende Anteil ist also \hat{c}_A'' . Dieser Koeffizient ist für Amplituden bis zu $\hat{v}/D = 0,1$ amplitudenunabhängig und kann Figur 6 entnommen werden. Für größere Amplituden ist \hat{c}_A'' kleiner (sofern Re unterkritisch), was die Schwingung zunehmend unterdrückt. Für Schrägkabel wird sich aus Figur 6 in der Regel

$$\hat{c}_A'' \approx 0,35 \quad (112)$$

ergeben.

Der Anteil \hat{c}_A' wird vernachlässigt und die Erregerfrequenz $\bar{\omega}$ sei gleich einer Systemeigenfrequenz ω_n . Es liegt dann in etwa Resonanzregung vor und die Schwingung im n -ten Modus kann das Antwortverhalten dominieren.

Trifft man außerdem die Annahme, daß die Wirbelablösung an allen Punkten gleichzeitig und gleichsinnig vor sich geht, so kann die Systemantwort mit den spezielleren Methoden des Abschnittes 3.2 berechnet werden.

Es folgt für die Verschiebung in Seilmittelpunkt infolge Resonanzregung des ersten symmetrischen Modus (Schwingung innerhalb der Seilebene)

$$\hat{v}_{1mid} = \frac{8d}{mg} \frac{\beta_1}{2\zeta_1} q D \hat{c}_A'' \quad (113)$$

und für die zugehörige dynamische Seilkraft

$$\hat{h}_1 = \frac{H}{mg} \frac{\alpha_1}{2\zeta_1} q D \hat{c}_A'' \quad (114)$$

Die zur Bedingung $\bar{\omega} = \omega_n$ gehörige Anströmgeschwindigkeit ergibt sich aus den Gleichungen (105), (109) zu

$$V = \frac{\omega_n D}{2\pi S} \quad (115)$$

und der Staudruck weiter zu

$$q = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\omega_n D}{2\pi S} \right)^2 \quad (116)$$

Mit Gl. (60) folgt dann schließlich

$$\frac{\hat{v}_{1mid}}{D} = \frac{c D^2}{m \zeta_1} \beta_1 \left(\frac{\omega_1}{\pi} \right)^2 \quad (117)$$

$$\frac{\hat{h}_1}{H} = \frac{D}{8d} \frac{c D^2}{m \zeta_1} \alpha_1 \left(\frac{\omega_1}{\pi} \right)^2 \quad (118)$$

mit

$$c := \frac{\rho \hat{c}_A''}{16 S^2} \simeq \frac{1,3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,35}{16 \cdot 0,2^2} = 0,71 \text{ kg/m}^3 \quad (119)$$

und ω_1 , α_1 , β_1 , nach Tafeln 1, 3, 4.

Für den Sonderfall der schwingenden Saite ($\lambda^2 = 0$) ergibt sich mit den Gleichungen (77a), (81a)

$$\frac{\hat{v}_{1mid}}{D} = \frac{4}{\pi^3} \frac{c D^2}{m \zeta_1} \quad (117a)$$

$$\frac{\hat{h}_1}{H} = 0 \quad (118a)$$

Für $\lambda^2 \leq 8$ liefert Gl. (117a) einen um höchstens 1% zu kleinen Wert.

Beispiel:

gegeben: Schräg gespanntes, fest verankertes Seil in horizontalem Wind senkrecht zur Seilebene
 $l = 200 \text{ m}$; $d/l = 1/100$; $\Theta = 30^\circ$; $D = 125 \text{ mm}$; $A = 107 \text{ cm}^2$;
 $m = 91 \text{ kg/m}$; $E = 200\,000 \text{ MPa}$; $\zeta = 0,2\%$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

gesucht: Schwingungsamplitude und bezogene dynamische Seilkraft infolge Resonanzregung des ersten symmetrischen Schwingungsmodus durch Wirbelablösung, wenn diese in Längsrichtung 100%-ig korreliert erfolgt.

Gln. (48), (50) $\Rightarrow \lambda^2 = 4,60$

Tafeln 1, 3, 4 $\Rightarrow \omega_1/\pi = 1,17$; $\alpha_1 \simeq 0,269$; $\beta_1 = 0,0948$

Gl.(117) $\Rightarrow \hat{v}_{1mid}/D = 0,79 \%$ $\Rightarrow \hat{v}_{1mid} = 1,0 \text{ mm}$

(Schwingung innerhalb der Seilebene senkrecht zur Sehne).

Gl. (118) ist für das schräg gespannte Seil entsprechend Abschn.2.2.1 zu modifizieren: d wird ersetzt durch $d \cos \Theta$ und H durch $T_\Theta = H/\cos \Theta$.

$$\Rightarrow \hat{h}_1/T_\Theta = 0,018 \%$$

Die zugehörige Windgeschwindigkeit beträgt nach Gleichungen (115) und (60) nur 0,29 m/s, was das äußerst niedrige Erregungsniveau letzten Endes doch plausibel erscheinen läßt.

Für die Reynoldszahl erhält man nach Gl. (104) $Re = 2,4 \cdot 10^3$; eine Überprüfung mittels Figur 6 zeigt, daß S und \hat{c}_A'' richtig eingesetzt wurden.

5.1.2 Galloping

Der so bezeichnete aeroelastische Anregungsmechanismus beruht auf einer ungünstigen Steuerung der wirkenden Strömungskräfte durch die Systemschwingung selbst, wie dies auch beim Flattern von Tragflügeln der Fall ist (Selbsterregung).

Unter Galloping im engeren Sinne versteht man eine reine Transversalschwingung quer zur Strömungsrichtung. Die Strömungskräfte liegen in Phase mit der Systemgeschwindigkeit und wirken wie eine negative viskose Dämpfung. Die Schwingungsgleichungen sind homogen, untersucht wird das Stabilitätsverhalten.

Ein kreisrundes Seil ist gallopingstabil. Geringe Abweichungen von der Kreisform (12-Eck) oder Vereisung können aber zu Instabilität führen [20].

Für die Erregerkraft in Schwingungsrichtung (und senkrecht zur Anströmung) setzt man

$$p = q D c_v \quad (120)$$

an, wobei der Luftkraftbeiwert c_v eine Funktion der momentanen Systemgeschwindigkeit ist :

$$c_v = \sum_j a_j \left(\frac{\partial v / \partial t}{V} \right)^j ; j = 1, 2, \dots \quad (121)$$

Dieser Ansatz [20] muß im Einzelfall überprüft und die Koeffizienten a_j experimentell bestimmt werden.

Ist die reduzierte Frequenz

$$k := \frac{\omega D / z}{V} \quad (122)$$

kleiner als 0,05, so kann das Strömungsfeld als quasi-stationär angenommen werden [23]; die Koeffizienten a_j sind dann unabhängig von ω und können in stationären Versuchen ermittelt werden. Das Geschwindigkeitsverhältnis in Ansatz (121) wird hierzu als momentaner Anströmwinkel interpretiert.

Setzt man die Erregerterme (120), (121) in die Schwingungsgleichung (59) ein, führt dies auf ein homogenes, nichtlineares Integro-Differentialgleichungssystem. Bei Einsetzen in die transformierten Gleichungen (67), (68) erhält man ein (durch die nichtlinearen Terme) gekoppeltes Differentialgleichungssystem, das simultan gelöst werden muß.

Diese Schwierigkeiten sollen hier umgangen werden, indem wir - unter Beschränkung auf infinitesimale Verschiebungen - in Gl. (121) nur das erste Reihenglied berücksichtigen.

Die generalisierte Strömungskraft folgt dann nach Gl. (68) unter Benutzung der Transformationsgleichung (63) und der Orthogonalitätsbeziehung (64) zu

$$P_n = \frac{1}{2} \rho V D a_1 \frac{1}{m} \sqrt{\frac{8d}{g}} \frac{\partial \eta_n}{\partial t} \quad (123)$$

Nach Einsetzen in Gl. (67) ergibt sich die kritische Strömungsgeschwindigkeit aus der Forderung verschwindender Gesamtdämpfung zu

$$V = \frac{4m \zeta_n \omega_n}{\rho D a_1} \quad (124)$$

wobei sich der maßgebende Wert im allgemeinen für die minimale Eigenfrequenz einstellen wird.

Die zugehörige Schwingungsamplitude bleibt im Rahmen der linearen Rechnung unbestimmt und wird bei Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit unendlich groß. Eine Berechnung der überkritischen Grenzamplitude erfordert die Berücksichtigung nichtlinearer Terme.

Auch der besonders böartige Fall einer harten Selbsterregung ist in linearer Rechnung nicht erfaßbar; Instabilität tritt dann bei kleineren als nach Gl. (124) berechneten Geschwindigkeiten auf, sofern das System mit einer bestimmten Mindestamplitude angestoßen wird.

Ist das Profil symmetrisch bezüglich der Strömungsrichtung, entfallen in Ansatz (121) die geraden Potenzen. Für Profile mit negativem a_1 wird die kritische Geschwindigkeit nach linearer Rechnung unendlich groß. Für ein symmetrisches Profil mit negativem a_3 ist die Gefahr harter Selbsterregung gering (vgl. [20], Bild 4.63).

Einen vereinfachten, nichtlinearen Algorithmus unter Vernachlässigung der modalen Kopplung hat Mahrenholtz benutzt, um die Grenzamplituden einer schwingenden Saite zu berechnen [18].

Beispiel:

gegeben: Horizontal gespanntes, fest verankertes Seil mit Eisansatz in horizontalem Wind senkrecht zur Seilebene

$$l = 200 \text{ m}; \quad d/l = 1/50;$$

$$D = 70 \text{ mm}; \quad A = 34 \text{ cm}^2; \quad m = 29 \text{ kg/m};$$

$$E = 200\,000 \text{ MPa}; \quad \zeta = 0,5\%; \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

gesucht: kritische Windgeschwindigkeit (Galloping)

Annahme: Der aerodynamisch wirksame Querschnitt entspricht etwa einem Rechteckquerschnitt mit dem Kantenverhältnis 2 : 1.

Hierfür wurde in stationären Versuchen gemessen [18]:

$$a_1 = 5; \quad a_3 = -100$$

Wegen $a_3 < 0$ ist das Auftreten harter Selbsterregung unwahrscheinlich, die kritische Windgeschwindigkeit kann mit Gl. (124) ermittelt werden.

Gln. (22), (35) $\Rightarrow \quad \lambda^2 = 48,8$

Tafel 1 $\Rightarrow \quad \frac{\omega_1^{sym}}{\pi} = 2,13 > 2,00 = \frac{\omega_1^{anti}}{\pi}$

Die minimale und damit maßgebende Eigenfrequenz tritt hier im ersten antimetrischen Modus auf.

Gl.(60) $\Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_1^{anti} = 3,48 \text{ 1/s}$

Gl.(124) $\Rightarrow \quad V = 4,4 \text{ m/s}$

Für die reduzierte Frequenz erhält man nach Gl. (122)

$$k = 0,06 > 0,05$$

womit die zugrundeliegende Annahme quasi-stationärer Strömung im Rahmen einer ersten Näherungsrechnung gerade noch gerechtfertigt sein mag.

Die ermittelte, sehr kleine kritische Geschwindigkeit würde eine genauere Bestimmung der Beiwerte a_j im Windkanal sowie gegebenenfalls die Berechnung der Grenzamplituden erforderlich machen.

Die natürliche Windturbulenz hat einen großen (evtl. günstigen) Einfluß auf das Stabilitätsverhalten [20] und sollte bei der Messung der Beiwerte simuliert werden.

Auch die Strukturdämpfung ζ muß möglichst genau bekannt sein, da sie linear in die Berechnung der kritischen Windgeschwindigkeit eingeht.

5.1.3 Anregung durch Interferenz

Interferenzeffekte können bei Strukturen auftreten, die in Strömungsrichtung hintereinander liegen. Die in Abschnitt 5.1.1 eingeführten Parameter der Wirbelerregung werden dann auch Funktionen der geometrischen Anordnung sein [20].

Bei engstehenden Kreiszyklindern wurde aber auch ein grundsätzlich neuer aeroelastischer Anregungsmechanismus entdeckt, der für Seile von Bedeutung sein kann: Ursache ist ein plötzliches, bewegungsgesteuertes Umschlagen der Strömung zwischen den Zylindern und damit - wie beim Galloping - die Induzierung der angreifenden Strömungskräfte durch die Systemschwingung selbst; man spricht hier von Interferenz-Galloping. Instabilität tritt ab einer bestimmten Anströmgeschwindigkeit und unter gewissen Anströmwinkeln (ca. 5° - 10°) auf.

Die analytische Beschreibung ist schwierig, da außer der Transversalbewegung im allgemeinen auch Schwingungen in Strömungsrichtung auftreten und sich die Schwingung nicht auf den im Nachlauf liegenden Zylinder beschränkt. Unter vereinfachenden Annahmen leitet Ruscheweyh [20] eine Formel für die kritische Strömungsgeschwindigkeit ab.

5.1.4 Turbulenzerregung

Ursache ist hier die natürliche Windturbulenz (Böen) oder die Turbulenz im Strömungsnachlauf anderer Strukturen (Buffeting). Erregerkräfte und Systemantwort lassen sich nur in einem statistischen Sinne korrekt erfassen, worauf sich die modernen Nachweismethoden eingestellt haben.

Das von Davenport auf Bauwerke übertragene Spektralverfahren geht von einem gemessenen oder angenommenen Böenspektrum aus. Unter Berücksichtigung aerodynamischer und mechanischer Admittanzfunktionen wird das Antwortspektrum ermittelt, auf dem dann die weiteren Nachweise basieren [20]. Die in den Gleichungen (86), (90) definierten Größen A_n und B_n sind (modale) mechanische Admittanzfunktionen des Seils und können einer Anwendung des Spektralverfahrens zugrundegelegt werden.

5.2 Anregung von den Randpunkten aus

Die Schwingungserregung eines Seils durch dynamische Kräfte und Verschiebungen in den Randpunkten kann verschiedenste Ursachen haben, wie z.B. die Wirkung von Verkehr oder von Strömungskräften auf andere Systemteile oder ein Erdbeben.

Eine Analyse realer Konstruktionen, wie z.B. Schrägkabelbrücken, kann die konsequente Betrachtung des gekoppelten dynamischen Gesamtsystems erforderlich machen.

Die Erregung eines Einzelseiles durch eingeprägte Randpunktverschiebungen vertikal zur Sehne kann mit dem in Abschn.3.3 dargelegten Algorithmus behandelt werden. Die beiden Randpunkte dürfen sich dabei im Zeitverlauf beliebig und unabhängig voneinander bewegen.

Eine mögliche Anwendung ist der Nachweis einer (großen) Hängebrücke unter vertikaler Beschleunigung infolge Erdbeben. Für eine derartige Berechnung legt man üblicherweise einen gemessenen oder konstruierten Beschleunigungsverlauf oder ein Beschleunigungsspektrum zugrunde [21]. Die Lösung der Modalgleichungen (67) kann dementsprechend im Zeit- oder im Frequenzbereich erfolgen.

Komfortabler - insbesondere bei Rechnung im Frequenzbereich - ist eine Anwendung der in [26] abgeleiteten Steifigkeits- und Verschiebungsfunktionen des Einzelseils.

Literatur:

- [1] H.M. Irvine, T.K. Caughey: The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 341, pp.299-315 (1974)
- [2] H.M. Irvine: Free Vibrations of Inclined Cables. ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 104, No. ST 2, pp.343-347 (1978)
- [3] H.M. Irvine: Cable Structures. MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1981)
- [4] H.H. West, L.F. Geschwindner, J.E. Suhoski: Natural Vibrations of Suspension Cables. ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 101, No. ST 11, pp.2277-2291 (1975)
- [5] W.M. Henghold, J.J. Russell: Equilibrium and Natural Frequencies of Cable Structures (A Nonlinear Finite Element Approach). Computers & Structures, Vol. 6, pp.267-271 (1976)
- [6] W.M. Henghold, J.J. Russell, J.D. Morgan, III: Free Vibrations of Cable in Three Dimensions. ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 103, No. ST 5, pp.1127-1136 (1977)
- [7] M.S. Triantafyllou: The Dynamics of Taut Inclined Cables. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 37, Pt. 3, pp.421-440 (1984)
- [8] M.S. Triantafyllou, L. Grinfolgel: Natural Frequencies and Modes of Inclined Cables. ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 112, No. 1, pp.139-148 (1986)
- [9] H. Yamaguchi, M. Ito: Linear Theory of Free Vibrations of a Inclined Cable in Three Dimensions. Proceedings of the Japanese Society of Civil Engineers, Vol. 286, No. 6, pp.29-36 (1979) (in japanisch)
- [10] E.J. Routh: Dynamics of a System of Rigid Bodies. Dover Publications, Inc., New York, N.Y. (1955). (Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Deutsche Ausgabe von A. Schepp, Leipzig 1898)
- [11] A.G. Pugsley: On the Natural Frequencies of Suspension Chains. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 2, Part 4, pp.412-418 (1949)
- [12] D.S. Saxon, A.S. Cahn: Modes of Vibration of Suspension Chain. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.6, Pt.3, pp.273-285 (1953)
- [13] A.G. Davenport, G.N. Steels: Dynamic Behavior of Massive Guy Cables. ASCE, Journal of the Structural Division, Vol.91, No.ST 2, pp.43-70 (1965)

- [14] K. Klöppel, K.H. Lie: Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken. Ingenieur-Archiv 13, S.211 (1942)
- [15] F. Bauer: Näherungsweise Erfassung der Eigenschwingzahlen eines Spannbandes (flachen Seiles). Bauingenieur 53, S.133-138 (1978)
- [16] I. Kovacs: Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildämpfung. Die Bautechnik, 59.Jahrgang, H.10, S.325-332 (1982)
- [17] G. Hirsch: Kontrolle der wind- und erdbebenerregten Schwingungen weitgespannter Schrägseilbrücken. VDI-Berichte Nr.419, VDI-Verlag, Düsseldorf (1981)
- [18] O. Mahrenholtz: Modalanalyse als Werkzeug zur Beurteilung winderregter Schwingungen. VDI-Berichte Nr.419, VDI-Verlag, Düsseldorf (1981)
- [19] D.H.C. Vincent, P.R. Taylor, S.F. Stierner: Full Scale Dynamic Testing of the Anacis Bridge. IABSE Proceedings P-122/88, Zürich (1988)
- [20] H. Ruscheweyh: Dynamische Windwirkung an Bauwerken. Bauverlag, Wiesbaden/Berlin (1982)
- [21] R.W. Clough, J. Penzien: Dynamics of Structures. McGraw-Hill, New York (1975)
- [22] J. Argyris, H.P. Mlejnek: Die Methode der Finiten Elemente; Band III. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig (1988)
- [23] H.W. Försching: Grundlagen der Aeroelastik. Springer-Verlag, Berlin (1974)
- [24] H.M. Irvine, J.H. Griffin: On the Dynamic Response of a Suspended Cable. International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, Issue No.4, pp.389-402 (1976)
- [25] D. Tonis: Zum dynamischen Verhalten von Abspannseilen. Dissertation, Lehrstuhl und Laboratorium für Stahlbau, Universität der Bundeswehr, München (1989)
- [26] U. Starossek: Boundary Induced Vibration and Dynamic Stiffness of a Sagging Cable. Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion, Universität Stuttgart (1990)