

**Asymptotische Analyse von turbulenten Strömungen
bei hohen Rayleigh-Zahlen**

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

genehmigte Dissertation

von

Marc Hölling

aus Winsen (Luhe)

2006

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Herwig
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. R. Eggers
Prüfungsvorsitzender: Prof. Dr.-Ing. O. von Estorff

Tag der mündlichen Prüfung: 8. August 2006

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermofluidodynamik an der Technischen Universität Hamburg-Harburg.

An dieser Stelle möchte ich besonders meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Herwig, danken, der mir nicht nur die Möglichkeit zur Promotion gegeben hat, sondern durch sein immer offenes Ohr, ständiges Interesse und wertvolle Anregungen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Ich hätte mir für meine Arbeit keinen besseren Betreuer, weder fachlich noch menschlich, vorstellen können.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Rudolf Eggers danke ich für die Übernahme des Koreferats und Herrn Prof. Dr.-Ing. Otto von Estorff für die Bereitschaft, den Prüfungsvorsitz zu führen.

Für die einmalige, freundschaftliche Atmosphäre am Institut voller gegenseitiger Unterstützung möchte ich allen ehemaligen Kollegen, Mitarbeitern und Studenten herzlich danken: Katrin Pröll und Torge Pfafferott für ihre Toleranz gegenüber meinem Humor, Stefan Wischhusen und Mario Wörner für ein einmaliges Oktoberfest, Jens Vasel für seinen Namen und einen Schwedenurlaub, Prof. G. Schmitz für seine Anekdoten, Fabian Kock und Georg Middelberg für die fachlichen Diskussionen, Andreas Moschallski für die sportlichen Herausforderungen, Prof. C. Balaji vom IIT Madras für die gemeinsam gefundenen Forschungsergebnisse, Oliver Hausner für den regen Austausch, seinen Humor, der ihn nie verlassen hat, und seine Lebensweisheit, Wilson Casas für die hervorragende Zusammenarbeit, seine Linux-Kenntnisse, seinen Humor und Hilfsbereitschaft, meinem Büro-Kollegen Daniel Gloß für die Freundschaft, die uns verbindet. Meinem Nachfolger Petar Kis möchte ich für seine Promotion auf dem Gebiet der gemischten Konvektion viel Erfolg wünschen. Darüber hinaus gilt mein Dank Familie Frie, Familie Arendt, Anderson & Siggie und der Dänemark-Truppe für die moralische Unterstützung.

Mein besonderer Dank gilt meiner Annett, die mich sowohl motiviert hat als auch für den nötigen Ausgleich gesorgt hat. Mit ihr möchte ich gemeinsam den Weg in die Zukunft gehen. Meinen Eltern danke ich für ihre Unterstützung und die Möglichkeiten, die sie mir eröffnet haben.

Hamburg, im September 2006

Marc Hölling

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	v
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Bilanzgleichungen	3
2.2 Boussinesq-Approximation	5
2.3 Logarithmisches Wandgesetz	7
2.3.1 Wandschicht	8
2.3.2 Außenschicht	9
2.3.3 Überlappungsschicht	10
2.3.4 Viskose Unterschicht	11
2.3.5 Messdaten	11
2.4 Temperaturprofil der erzwungenen Konvektion	12
2.5 Wandfunktionen	13
3 Natürliche Konvektion an vertikalen Wänden	15
3.1 Temperaturprofil	19
3.1.1 Wandschicht	21
3.1.2 Außenschicht	22
3.1.3 Überlappungsschicht	22
3.1.4 Viskose Unterschicht	23
3.1.5 Vergleich mit Messdaten	23
3.2 Nußelt-Beziehung	30
3.2.1 Vertikaler Kanal	30
3.2.2 Beheizte vertikale Wand	31
3.3 Geschwindigkeitsprofil	32
3.3.1 Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht	33

3.3.2	Geschwindigkeitsprofil in der Überlappungsschicht	34
3.3.3	Vergleich mit Messdaten	36
3.4	Wandfunktionen von George und Capp	40
3.4.1	Temperaturprofil	41
3.4.2	Geschwindigkeitsprofil	43
3.5	Blending für die Buffer Layer	44
4	Implementierung der Wandfunktionen	47
4.1	FLUENT-Ergebnisse für die natürliche Konvektion	48
4.2	k -Gleichung zur Turbulenzmodellierung	51
4.2.1	Turbulenzproduktion durch Auftrieb	53
4.2.2	Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH)	53
4.3	Implementierung der neuen Wandfunktionen	54
4.3.1	Universelle Profile	56
4.3.2	Temperatur-Wandfunktion	56
4.3.3	Geschwindigkeits-Wandfunktion	58
4.3.4	Randbedingungen für das Turbulenzmodell	60
4.4	Ergebnisse	60
4.4.1	Vergleich mit DNS-Daten	61
4.4.2	Vergleich von Turbulenzgrößen	62
5	Rayleigh-Bénard Konvektion	67
5.1	Temperaturprofil	69
5.1.1	Überlappungsschicht	72
5.1.2	Viskose Unterschicht	73
5.1.3	Vergleich mit Messdaten	73
5.1.4	Blending	76
5.2	Nußelt-Rayleigh Beziehung	76
5.2.1	Explizite Näherungslösung	77
5.2.2	Vergleich mit Messdaten	79
5.2.3	Theorie von Grossmann und Lohse	83
5.3	Validierung anhand weiterer Datensätze	86
5.3.1	Ilmenauer Fass	86
5.3.1.1	Strahlungseinfluss	88
5.3.1.2	Auswertung der Messdaten	90
5.3.2	Ergebnisse der Arbeitsgruppe Ahlers	95
5.4	Einfluss der Oberflächenrauheit	97

6	Gemischte Konvektion an vertikalen Wänden	101
6.1	Vertikale beheizte Couette-Strömung	103
6.2	Blending-Parameter	104
6.2.1	Umschreiben des Temperaturprofils	106
6.3	Besonderheiten der gemischten Konvektion	108
7	Zusammenfassung und Ausblick	111
7.1	Zusammenfassung	111
7.2	Ausblick	114
A	Entdimensionierung der Impulsbilanz	115
B	Variable Stoffwerte	117
B.1	Temperaturprofil in der viskosen Unterschicht	118
B.2	Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht	119
C	Bilanzgleichungen des CFD-Codes	121
D	Abschätzung der Dicke der viskosen Unterschicht	123
E	Blending-Parameter für die gemischte Konvektion	125
	Literaturverzeichnis	127
	Abbildungsverzeichnis	133
	Tabellenverzeichnis	134

Nomenklatur

Formelzeichen

Symbol	Einheit	Beschreibung
a^*	m^2/s	Temperaturleitfähigkeit, $a^* = \lambda^*/(\rho^* c_p^*)$
a_t^*	m^2/s	Turbulente Temperaturleitfähigkeit
A^*	m^2	Fläche
$A(\text{Pr})$	-	Parameter in George & Capp (1979)
B^+	-	Konstante, $B^+ = 5,0$
$B(\text{Pr})$	-	Parameter in George & Capp (1979)
c_p^*	$\text{J}/(\text{kg K})$	spezifische isobare Wärmekapazität
c_T	-	Konstante in der GGDH
C	-	Konstante, $C = 0,427$
\hat{C}	-	Konstante, $\hat{C} = 0,0126$
$C^+(\text{Pr})$	-	Parameter im logarithmischen Temperaturprofil bei erzwungener Konvektion
D^*	m	Durchmesser
D	-	Konstante, $D = 1,93$
\hat{D}	-	Konstante, $\hat{D} = 5,22$
E	-	Parameter, $E = 0,49 \cdot \partial U^\times / \partial y^\times _w - 2,27$
F	-	Parameter, $F = 1,28 \cdot \partial U^\times / \partial y^\times _w - 1,28$
g^*	m/s^2	Betrag des Erdbeschleunigungsvektors
\vec{g}^*	m/s^2	Erdbeschleunigungsvektor
G	-	Konstante, $G = 0,1$
Gr	-	Grashof-Zahl, $\text{Gr} = g^* \beta^* \Delta T^* h^{*3} / (\nu^{*2})$
h^*	m	Plattenabstand
H	-	Parameter, $H = 3,43 - 14,94 \cdot \text{Ra}^{-1/4}$
H	-	<i>blending</i> -Parameter für die gemischte Konvektion
k^*	m^2/s^2	Kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung
k_s^*	m	Oberflächenrauheit
k_s^\times	-	Dimensionslose Oberflächenrauheit, $k_s^\times = k_s^* / \delta_{rbc}^*$
K_ρ	-	Parameter, $K_\rho = T_0^* / \rho_0^* \cdot \partial \rho / \partial T^* _0$
K_μ	-	Parameter, $K_\mu = T_0^* / \mu_0^* \cdot \partial \mu / \partial T^* _0$
K_1	-	Konstante in George & Capp (1979)
K_2	-	Konstante in George & Capp (1979)
l^*	m	Bezugslänge in George & Capp (1979)
L^*	m	Seitenlänge

Nu	-	Nußelt-Zahl, $Nu = h^*/\Delta T^* \cdot \partial T^*/\partial y^* _w$
p^*	kg/(m s ²)	Druck
Pr	-	Prandtl-Zahl, $Pr = \nu^*/a^*$
\dot{q}^*	W/m ²	Wärmestromdichte
Ra	-	Rayleigh-Zahl, $Ra = g^*\beta^*\Delta T^*h^{*3}/(\nu^*a^*)$
Re	-	Reynolds-Zahl, $Re = u^*h^*/\nu^*$
Ri	-	Richardson-Zahl, $Ri = Gr/Re^2$
t^*	s	Zeit
t_c^*	s	Charakteristische Zeit für die natürliche Konvektion, $t_c^* = \delta^*/u_c^*$
t^\times	-	Dimensionslose Zeit für die natürliche Konvektion, $t^\times = t^*/t_c^*$
T^*	K	Temperatur
T_c^*	K	Charakteristische Temperatur für die natürliche Konvektion, $T_c^* = (a^{*2} \partial T^*/\partial y^* _w^3/(g^*\beta^*))^{1/4}$
T_{rbc}^*	K	Charakteristische Temperatur für die Rayleigh-Bénard Konvektion, $T_{rbc}^* = (a^*\nu^* \partial T^*/\partial y^* _w^3/(g^*\beta^*))^{1/4}$
T_τ^*	K	Charakteristische Temperatur für die erzwungene Konvektion, $T_\tau^* = q_w^* /(\rho^*c_p^*u_\tau^*)$
$\hat{T}^*(t^*)$	K	Zeitlich veränderliche Temperatur
$T^{*'}(t^*)$	K	Turbulente Temperaturfluktuation
u^*	m/s	Zeitgemittelte Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand
u_c^*	m/s	Bezugsgeschwindigkeit für die natürliche Konvektion, $u_c^* = (g^*\beta^*T_c^{*3})/(\nu^* \partial T^*/\partial y^* _w^2)$
u_τ^*	m/s	Bezugsgeschwindigkeit für die erzwungene Konvektion, $u_\tau^* = \sqrt{\tau_w^*/\rho^*}$
u_r^*	m/s	Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Platten (Couette-Strömung)
u^+	-	Dimensionslose Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand für die erzwungene Konvektion, $u^+ = u^*/u_\tau^*$
$\hat{u}^*(t^*)$	m/s	Zeitlich veränderliche Geschwindigkeit parallel zur Wand
$u^{*'}(t^*)$	m/s	Turbulente Geschwindigkeitsfluktuation parallel zur Wand
U^\times	-	Dimensionslose Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand, $U^\times = u^*/u_c^*$
v^*	m/s	Zeitgemittelte Geschwindigkeitskomponente normal zur Wand
$\hat{v}^*(t^*)$	m/s	Zeitlich veränderliche Geschwindigkeit normal zur Wand
$v^{*'}(t^*)$	m/s	Turbulente Geschwindigkeitsfluktuation normal zur Wand
x^*	m	Koordinate parallel zur Wand
y^*	m	Koordinate normal zur Wand
y^+	-	Entdimensionierter Wandabstand für die erzwungene Konvektion, $y^+ = y^*u_\tau^*/\nu^*$
y^\times	-	Entdimensionierter Wandabstand für die natürliche Konvektion, $y^\times = y^*/\delta^*$
\hat{y}	-	Zwischenkoordinate für die natürliche Konvektion, $\hat{y} = y^*/(h^{*(1-\alpha)}\delta^{*\alpha})$

\hat{y}_e	-	Zwischenkoordinate für die erzwungene Konvektion, $\hat{y}_e = y^*/(h^{*(1-\alpha)}\delta_e^{*\alpha})$
y_{rbc}^\times	-	Entdimensionierter Wandabstand für Rayleigh-Bénard Konvektion, $y_{rbc}^\times = y^*/\delta_{rbc}^*$
\hat{y}_{rbc}	-	Zwischenkoordinate für die Rayleigh-Bénard Konvektion, $\hat{y} = y^*/(h^{*(1-\alpha)}\delta_{rbc}^{*\alpha})$

Griechische Symbole

Symbol	Einheit	Beschreibung
α	-	Exponent der Zwischenkoordinate, $0 \leq \alpha \leq 1$
α_{konv}^*	W/(m ² K)	(Konvektiver) Wärmeübergangskoeffizient
β^*	K ⁻¹	Thermischer Ausdehnungskoeffizient
β_k, β_ω	-	Konstanten im k - ω -Turbulenzmodell
δ^*	m	Charakteristische Bezugslänge für die natürliche Konvektion, $\delta^* = T_c^* \partial T^*/\partial y^* _w^{-1}$
δ_e^*	m	Charakteristische Bezugslänge für die erzwungene Konvektion, $\delta_e^* = u_\tau^* \partial u^*/\partial y^* _w^{-1}$
δ_{rbc}^*	m	Charakteristische Bezugslänge für die Rayleigh-Bénard Konvektion, $\delta_{rbc}^* = T_{rbc}^* \partial T^*/\partial y^* _w^{-1}$
ΔT^*	K	Temperaturdifferenz
ε	-	Emissionsgrad
η	-	Dimensionsloser Wandabstand, $\eta = y^*/h^*$
Γ	-	Seitenverhältnis $\Gamma = L^*/h^*$ bzw. $\Gamma = D^*/h^*$
κ	-	von-Kármán Konstante, $\kappa = 0,41$
κ_Θ	-	Konstante, $\kappa_\Theta = 0,47$
λ^*	W/(m K)	Wärmeleitfähigkeit
μ^*	kg/(m s)	Dynamische Viskosität
ν^*	m ² /s	Kinematische Viskosität, $\nu^* = \mu^*/\rho^*$
ν_t^*	m ² /s	Wirbelviskosität, $\nu_t^* = -\overline{u^*v^{*'}}/ \partial u^*/\partial y^* $
ω^*	s ⁻¹	Dissipationsrate
ψ	-	<i>blending</i> -Parameter für die gemischte Konvektion
ρ^*	kg/m ³	Dichte
σ_k, σ_ω	-	Konstanten im k - ω -Turbulenzmodell
σ_t	-	Turbulente Prandtl-Zahl, $\sigma_t = \nu_t^*/a_t^*$
τ^*	kg/(m s ²)	Schubspannung
τ_w^*	kg/(m s ²)	Wandschubspannung
ϑ^*	°C	Celsius-Temperatur
Θ^\times	-	Dimensionslose Temperaturdifferenz für die natürliche Konvektion, $\Theta^\times = (T_w^* - T^*)/T_c^*$
Θ_{rbc}^\times	-	Dimensionslose Temperaturdifferenz für die Rayleigh-Bénard Konvektion, $\Theta_{rbc}^\times = (T_w^* - T^*)/T_{rbc}^*$
Θ^+	-	Dimensionslose Temperaturdifferenz für die erzwungene Konvektion, $\Theta^+ = (T_w^* - T^*)/T_\tau^*$

Indizes

0	Bezugszustand (T_0^*)
<i>c</i>	natürliche Konvektion an vertikalen Wänden
<i>e</i>	erzwungene Konvektion
<i>f</i>	fiktiv
<i>i</i>	<i>inner layer</i> in George & Capp (1979)
<i>k</i>	gekühlte Wand ($k = \text{kalt}$)
<i>konv</i>	konvektiv
<i>log</i>	in der Überlappungsschicht
<i>m</i>	mittlere
<i>mol</i>	molekularer Anteil
<i>o</i>	<i>outer layer</i> in George & Capp (1979)
<i>rad</i>	durch Strahlung
<i>rbc</i>	Rayleigh-Bénard Konvektion
<i>turb</i>	turbulenter Anteil
<i>visk</i>	in der viskosen Unterschicht
<i>w</i>	beheizte Wand ($w = \text{warm}$) bzw. Wand im Allgemeinen
<i>x</i>	In x -Richtung bzw. mit x^* gebildet
∞	extrapolierte Werte für $\text{Ra} \rightarrow \infty$

Typographische Konventionen

Es werden folgende typographische Konventionen eingeführt.

- Dimensionsbehaftete Größen werden durch einen Stern gekennzeichnet, Beispiel: y^* .
- Dimensionslose Größen werden ohne Stern angegeben, Beispiel: η .
- Dimensionslose Kennzahlen werden nicht kursiv geschrieben, Beispiel: Re .
- Die Gleichungen werden im Allgemeinen durchgehend nummeriert, wobei die erste Zahl das Kapitel kennzeichnet, Beispiel: (2.14).

Kapitel 1

Einleitung

Die natürliche Konvektion ist eine Strömungsform, die sowohl in der Natur vorkommt, z.B. bei Strömungen in der Atmosphäre oder bei Meeresströmungen, als auch in technischen Anwendungen, z.B. bei der Klimatisierung von Räumen oder bei der Kühlung elektronischer Bauteile. Sie tritt auf, wenn in einem Fluid, das sich in einem Schwerfeld befindet, Dichteunterschiede vorliegen. Es wirken dann Auftriebskräfte, die zu einer Strömung führen. Die Dichteunterschiede im Fluid werden in den meisten Fällen durch das Temperaturfeld vorgegeben, welches somit die Ursache für die Strömung darstellt. Das Geschwindigkeitsfeld ist also unmittelbar an das Temperaturfeld gekoppelt und kann nicht mehr unabhängig (vom Temperaturfeld) bestimmt werden. Die beschreibenden Gleichungssysteme werden aufwendiger und die numerische Simulation gestaltet sich schwieriger als im Falle der erzwungenen Konvektion.

In der vorliegenden Arbeit wird die *turbulente* natürliche Konvektion untersucht, also für den Fall großer Werte der Grashof- bzw. Rayleigh-Zahl. Es wird hierbei zwischen natürlicher Konvektion an vertikalen Wänden und Rayleigh-Bénard Konvektion, bei der sich das Fluid zwischen zwei horizontalen Platten unterschiedlicher Temperatur befindet, unterschieden. Dies ist notwendig, da für den Fall der vertikalen Wand die Erdbeschleunigung parallel zur Wand wirkt und somit die Strömungsrichtung (parallel zur Wand) für das Fluid vorgegeben ist. Für die Rayleigh-Bénard Konvektion steht der Erdbeschleunigungsvektor senkrecht auf den begrenzenden Wänden und es gibt keine bevorzugte Strömungsrichtung.

Für beide Fälle der natürlichen Konvektion gibt es bisher in der Literatur keine Theorie, mit der die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile in Wandnähe zufriedenstellend beschrieben werden können. Deshalb soll in dieser Arbeit die turbulente natürliche Konvektion mit Hilfe der Asymptotik untersucht werden, die sich für die erzwungene Konvektion bewährt hat, siehe z.B. Gersten & Herwig (1992) und Schlichting & Gersten (2000). Ziel ist es, für die natürliche Konvektion theoretisch begründete Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile anzugeben, die in Wandnähe universell gültig sind. Hiermit ist es möglich, z.B. Nußelt-Beziehungen für den Wärmeübergang aufzustellen oder die universellen Profile als sog. Wandfunktionen in CFD-Codes zu implementieren.

Bei der asymptotischen Analyse der natürlichen Konvektion wird die Strömung für sehr hohe Rayleigh-Zahlen ($Ra \rightarrow \infty$) untersucht. Es kann eine Zwei-Schichten-Struktur der Strömung identifiziert werden, die aus einer Wand- und einer Außen- bzw. Kernschicht

besteht. Durch ein sog. *Anpassen der Gradienten* zwischen diesen beiden Schichten können universelle Profile ermittelt werden, die für $Ra \rightarrow \infty$ gültig sind. Allerdings kann dieser Grenzfall in der Realität nicht erreicht werden, da in Experimenten oder Simulationen nur endliche Rayleigh-Zahlen realisiert werden können. Die Profile, die für $Ra \rightarrow \infty$ gültig sind, stellen jedoch sehr gute Näherungen für endliche, aber hohe Rayleigh-Zahlen dar. Die Übereinstimmung nimmt aufgrund der gewählten Vorgehensweise für steigende Rayleigh-Zahlen zu. Somit können die Ergebnisse, die für den theoretischen Grenzfall unendlicher Rayleigh-Zahlen erhalten wurden, auch für konkrete Probleme bei endlichen Werten benutzt werden.

Kapitel 2 gibt eine Wiederholung einiger Grundlagen der Strömungsmechanik an, wie z.B. Grundgleichungen und Boussinesq-Approximation. Anschließend wird aufgezeigt, wie man mit Hilfe der Asymptotik das bekannte *logarithmische Wandgesetz* herleiten kann, das als (Geschwindigkeits-) Wandfunktion in allen CFD-Codes benutzt wird.

In Kapitel 3 wird die turbulente natürliche Konvektion mit Hilfe der Asymptotik analysiert. Die erhaltenen Profile werden anschließend mit Messdaten aus der Literatur verglichen. In Kapitel 4 werden die neuen universellen Profile als Wandfunktionen in einen CFD-Code implementiert, so dass die natürliche Konvektion auch auf groben Gittern berechnet werden kann. Mit den neuen Wandfunktionen ist es nicht mehr notwendig, die viskose Unterschicht mit extrem feinen Gittern in Wandnähe aufzulösen, wie es mit kommerziellen CFD-Codes zur Zeit üblich ist.

Die Rayleigh-Bénard Konvektion wird in Kapitel 5 untersucht. Hierbei wird vom Idealfall der Rayleigh-Bénard Konvektion mit unendlich ausgedehnten Platten ausgegangen, bei dem das Fluid „zufällig“ strömt und keine zeitgemittelten Geschwindigkeiten auftreten. Es muss also nur die Energiegleichung analysiert werden, aus der ein universelles Temperaturprofil hervorgeht. Dies kann in eine Nußelt-Rayleigh Korrelation für den Wärmeübergang bei der Rayleigh-Bénard Konvektion umgeschrieben werden, für den es in der Literatur eine Vielzahl an Studien zum Vergleich gibt.

Kapitel 6 bietet einen Ausblick, wie die gefundenen Ergebnisse zur Beschreibung gemischter Konvektion benutzt werden könnten.

Kapitel 2

Grundlagen

Dieses Kapitel soll eine kurze Wiederholung wichtiger strömungsmechanischer Grundlagen sein. Eine ausführlichere Darstellung findet man z.B. in Gersten & Herwig (1992), Herwig (2002), Schlichting & Gersten (2000) und Herwig (2004).

Im Folgenden werden die Grundgleichungen zur Beschreibung von zweidimensionalen Strömungen angegeben (Abschnitt 2.1) und die Boussinesq-Approximation vorgestellt, mit der die Impulsgleichungen für die natürliche Konvektion vereinfacht werden können (Abschnitt 2.2). Anschließend wird in den Abschnitten 2.3 und 2.4 gezeigt, wie man mit Hilfe von asymptotischen Überlegungen das *logarithmische Wandgesetz* und das zugehörige Temperaturprofil für die erzwungene Konvektion herleiten kann. Dies soll die Ähnlichkeit der Herleitung der Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile für den Fall der natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden in Kapitel 3 verdeutlichen.

2.1 Bilanzgleichungen

Zur allgemeinen Beschreibung turbulenter Strömungen mit Wärmeübergang wird häufig eine Zeitmittelung vorgenommen. Das Strömungsfeld¹ $\hat{u}^*(t^*)$ wird in einen mittleren Anteil u^* und einen zeitlich schwankenden Anteil $u^{*'}(t^*)$ aufgespalten:

$$\hat{u}^*(t^*) = u^* + u^{*'}(t^*) \quad \text{mit} \quad u^* \equiv \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_0^*}^{t_0^* + \Delta t^*} \hat{u}^*(t^*) dt^* \quad (2.1)$$

Analoges gilt für das Temperaturfeld $\hat{T}^*(t^*)$:

$$\hat{T}^*(t^*) = T^* + T^{*'}(t^*) \quad \text{mit} \quad T^* \equiv \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_0^*}^{t_0^* + \Delta t^*} \hat{T}^*(t^*) dt^* \quad (2.2)$$

¹Hier sei beispielhaft die x -Komponente der Geschwindigkeit betrachtet. Die Zeitmittelung gilt analog für die y -Komponente $\hat{v}^*(t^*) = v^* + v^{*'}(t^*)$.

Zeitliche Mittelwerte von Schwankungsgrößen, z.B. der Reynolds-Spannung $-\overline{u^{*'}v^{*'}}$, sind definiert als

$$-\overline{u^{*'}v^{*'}} \equiv -\frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_0^*}^{t_0^* + \Delta t^*} u^{*'}(t^*) \cdot v^{*'}(t^*) dt^* \quad (2.3)$$

Desweiteren wird die substantielle Ableitung $D.../Dt^*$ benutzt, für die im ebenen Fall gilt

$$\frac{D...}{Dt^*} \equiv \frac{\partial...}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial...}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial...}{\partial y^*}. \quad (2.4)$$

Zur Bestimmung der zeitgemittelten Größen stehen die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes Gleichungen und die Energiegleichung zur Verfügung. Da in den anschließenden Kapiteln nur ebene Strömungsfälle vorkommen, werden die Gleichungen hier in zweidimensionaler Form angegeben. Für die dreidimensionalen Gleichungen und eine allgemeine Herleitung der Gleichungen sei z.B. auf Herwig (2002) verwiesen.

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (2.5)$$

Navier-Stokes Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{Du^*}{Dt^*} &= \rho^* g_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ &\quad - \rho^* \left[\frac{\partial \overline{u^{*'}{}^2}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{u^{*'}v^{*'}}}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{Dv^*}{Dt^*} &= \rho^* g_y^* - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \\ &\quad - \rho^* \left[\frac{\partial \overline{u^{*'}v^{*'}}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{v^{*'}{}^2}}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Thermische Energiegleichung (Temperaturform):

$$\rho^* c_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) - \rho^* c_p^* \left[\frac{\partial \overline{u^{*'}T^{*'}}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{v^{*'}T^{*'}}}{\partial y^*} \right] + \Phi^* \quad (2.8)$$

Hierbei ist Φ^* die Dissipation (siehe z.B. Herwig (2002)), die im folgenden vernachlässigt werden kann.

In den Gleichungen (2.5)-(2.8) treten die turbulenten Zusatzterme ($-\overline{u^{*'}v^{*'}}$ und $-\overline{v^{*'}T^{*'}}$) auf, die zur Berechnung eines konkreten Problems durch eine geeignete Turbulenzmodellierung bestimmt werden müssen (*Schließungsproblem*).

2.2 Boussinesq-Approximation

Die in den folgenden Kapiteln zu untersuchende natürliche Konvektion wird durch Dichteunterschiede im Fluid hervorgerufen. Sie kommt somit durch den Einfluss veränderlicher Stoffwerte zustande (Dichte $\rho^* \neq \text{const}$ aufgrund von $T^* \neq \text{const}$). Wird die Dichte in allen Termen von Gleichung (2.6) als konstant angenommen, so wirken keine Auftriebskräfte und das Fluid bleibt in Ruhe. Der Einfluss der Dichteänderungen muss also in der Impulsbilanz erfasst werden.

Treten im Fluid nur kleine Temperaturänderungen (und somit nur kleine Dichteunterschiede) auf, so kann die *Boussinesq-Approximation* zur Beschreibung der Strömung benutzt werden. Die Vorgehensweise sei anhand einer beheizten Wand nach Abbildung 2.1 aufgezeigt, an der sich eine Grenzschicht ausbildet.

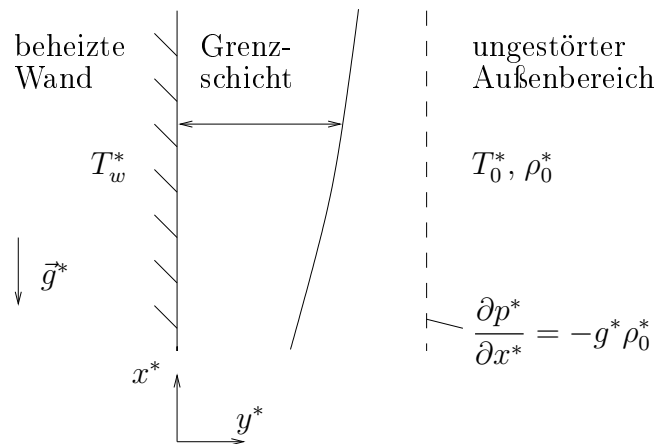


Abbildung 2.1: Ausbildung einer Grenzschicht an einer beheizten vertikalen Platte (natürliche Konvektion).

Es wird hier die für Grenzschichten übliche Annahme getroffen, dass Gradienten senkrecht zur Wand sehr viel größer sind als entlang der Wand ($\partial \dots / \partial y^* \gg \partial \dots / \partial x^*$). Unter Vernachlässigung der Reynolds-Spannungen und mit $g_x^* = -g^*$ kann die x -Impulsbilanz (2.6) innerhalb der Grenzschicht geschrieben werden als

$$\rho^* \frac{Du^*}{Dt^*} = -\rho^* g^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right). \quad (2.9)$$

Zunächst soll der Druckgradient $\partial p^* / \partial x^*$ betrachtet werden. Es kann allgemein für Grenzschichten gezeigt werden, dass sich die y -Impulsgleichung (innerhalb der Grenzschicht) zu $\partial p^* / \partial y^* = 0$ vereinfacht, d.h., dass der Druck in der Grenzschicht durch die Außenschicht aufgeprägt wird. So gilt z.B. entlang der gestrichelten Linie in Abbildung 2.1

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -g^* \rho_0^*. \quad (2.10)$$

In der (ruhenden) Außenschicht nimmt der Druck also linear mit der Höhe ab. Somit gilt:

$$-\rho^* g^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -g^* (\rho^* - \rho_0^*) \quad (2.11)$$

Der Einfluss veränderlicher Stoffwerte soll durch Taylorreihenentwicklungen bis zum linearen Term berücksichtigt werden:

$$\rho^*(T^*) = \rho_0^* + \left. \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*} \cdot (T^* - T_0^*) = \rho_0^* \left(1 + \underbrace{\frac{T_0^*}{\rho_0^*} \left. \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*}}_{\equiv K_\rho} \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \quad (2.12)$$

$$\mu^*(T^*) = \mu_0^* + \left. \frac{\partial \mu^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*} \cdot (T^* - T_0^*) = \mu_0^* \left(1 + \underbrace{\frac{T_0^*}{\mu_0^*} \left. \frac{\partial \mu^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*}}_{\equiv K_\mu} \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \quad (2.13)$$

Hierbei wurden die dimensionslosen Parameter K_ρ und K_μ für die Dichte bzw. die Viskosität eingeführt, um variable Stoffwerte zu berücksichtigen. Der Parameter K_ρ kann alternativ mit Hilfe des thermischen Ausdehnungskoeffizienten β^* ausgedrückt werden

$$K_\rho = -\beta^* T_0^* \quad \text{mit} \quad \beta^* \equiv -\left. \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*}. \quad (2.14)$$

Der Term $-g^*(\rho^* - \rho_0^*)$ aus Gleichung (2.11) kann also geschrieben werden als

$$-g^*(\rho^* - \rho_0^*) = -\rho_0^* g^* K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} = \rho_0^* g^* \beta^* (T^* - T_0^*). \quad (2.15)$$

Die Impulsbilanz für variable Stoffwerte lautet damit:

$$\begin{aligned} \rho_0^* \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{Du^*}{Dt^*} &= \rho_0^* g^* \beta^* (T^* - T_0^*) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu_0^* \left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Gleichung (2.16) kann nun in eine entdimensionierte Form gebracht werden. Dabei wird die gleiche Entdimensionierung wie später in Kapitel 3 benutzt. Es soll hier lediglich das Ergebnis angegeben werden, zu Details der Entdimensionierung siehe Anhang A:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}^2} \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{DU^\times}{Dt^\times} &= \underbrace{\Theta_0^\times - \Theta^\times}_{\text{Auftriebsterm}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y^\times} \left(\left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Im Auftriebsterm tritt der Parameter K_ρ bzw. der thermische Ausdehnungskoeffizient β^* aufgrund der gewählten Entdimensionierung nicht mehr explizit auf.

Sind nun die Temperaturunterschiede im Fluid klein gegenüber der Bezugstemperatur, also $(T^* - T_0^*)/T_0^* \rightarrow 0$, so gilt

$$\lim_{\frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \rightarrow 0} \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \rightarrow 0} \left(1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) = 1 \quad (2.18)$$

und die dimensionslose Impulsbilanz lautet

$$\frac{1}{\text{Pr}^2} \frac{DU^\times}{Dt^\times} = \underbrace{\Theta_0^\times - \Theta^\times}_{\text{Auftriebsterm}} + \left[\frac{\partial^2 U^\times}{\partial y^{\times 2}} \right]. \quad (2.19)$$

Zur besseren Anschauung sei zusätzlich die dimensionsbehaftete Form der Impulsbilanz bei natürlicher Konvektion unter Verwendung der Boussinesq-Approximation angegeben

$$\frac{Du^*}{Dt^*} = \underbrace{g^* \beta^* (T^* - T_0^*)}_{\text{Auftriebsterm}} + \nu_0^* \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right]. \quad (2.20)$$

Aus asymptotischer Sicht haben die Einflüsse variabler Stoffwerte unterschiedliche Größenordnungen. Im Auftriebsterm ist der Einfluss von führender Ordnung und muss deshalb berücksichtigt werden (nur so kommt überhaupt eine Strömung zustande). In den anderen Termen sind die Einflüsse von höherer Ordnung und können deshalb gegenüber demjenigen der führenden Ordnung vernachlässigt werden. Gleichzeitig ist erkennbar, wie eine Erfassung auch von Einflüssen höherer Ordnung systematisch möglich ist, indem entsprechende Terme Berücksichtigung finden.

2.3 Logarithmisches Wandgesetz der erzwungenen Konvektion

Es soll eine kurze Herleitung des *logarithmischen Wandgesetzes* für die erzwungene Konvektion angegeben werden. Dies soll für die nachfolgenden Kapitel verdeutlichen, dass man die natürliche Konvektion mit analogem Vorgehen analysieren kann und so universelle Profile erhält.

Der Ausgangspunkt für die Herleitung des logarithmischen Wandgesetzes ist eine ebene turbulente Couette-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten, bei der sich eine Platte mit der Relativgeschwindigkeit u_τ^* bewegt, siehe Abbildung 2.2. Die Strömung kann mit Hilfe der Reynolds-Zahl Re charakterisiert werden, für die gilt

$$\text{Re} \equiv \frac{u_\tau^* h^*}{\nu^*}. \quad (2.21)$$

Da es sich bei unendlich ausgedehnten Platten um eine eindimensionale Strömung handelt, vereinfacht sich die x -Impulsbilanz und man findet, dass die Schubspannung τ^* , die sich zusammensetzt aus einem molekularem Anteil τ_{mol}^* und einem turbulenten Anteil τ_t^* , über der Kanalhöhe h^* konstant ist

$$\frac{\tau^*}{\rho^*} = \frac{\tau_{mol}^*}{\rho^*} + \frac{\tau_t^*}{\rho^*} = \frac{\tau_w^*}{\rho^*} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \overline{u^* v^*} = \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w. \quad (2.22)$$

Somit ist die Wandschubspannung eine im ganzen Strömungsgebiet charakteristische Größe. Sie wird benutzt, um eine Bezugsgeschwindigkeit, die sog. *Wandschubspannungsgeschwindigkeit* u_τ^* , zu definieren

$$u_\tau^* \equiv \sqrt{\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w} = \sqrt{\frac{\tau_w^*}{\rho^*}}. \quad (2.23)$$

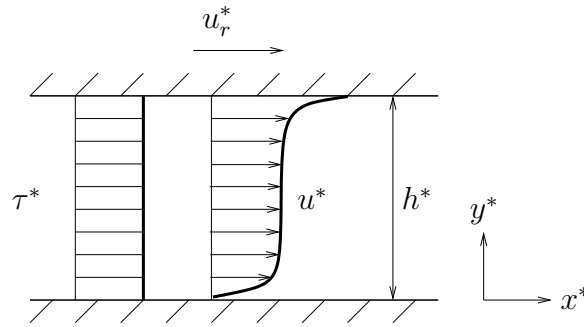


Abbildung 2.2: Ausschnitt aus einer ebenen turbulenten Couette-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten mit Relativgeschwindigkeit u_r^* . Dargestellt sind die Verteilung der Schubspannung τ^* über den Querschnitt ($\tau^* = \text{const}$) und das zeitgemittelte Geschwindigkeitsprofil u^* .

Im Allgemeinen kann die mittlere Strömungsgeschwindigkeit u^* nun als Funktion des Wandabstandes y^* , der Kanalhöhe h^* , der Viskosität ν^* und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ^* ausgedrückt werden

$$u^* = f(y^*, h^*, \nu^*, u_\tau^*) \quad (2.24)$$

oder alternativ auch mit dem Geschwindigkeitsgradienten an der Wand

$$u^* = f\left(y^*, h^*, u_\tau^*, \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_w\right). \quad (2.25)$$

Da es sich um eine turbulente Strömung handelt, weist das Strömungsfeld eine Zwei-Schichten-Struktur auf, siehe Abbildung 2.3. Es gibt eine **Wandschicht**, in der sowohl die molekulare als auch die turbulente Schubspannung (τ_{mol}^* und τ_t^*) von Bedeutung sind, und eine vollturbulente **Außenschicht**, in der nur die turbulente Schubspannung τ_t^* berücksichtigt werden muss. Diese beiden Schichten besitzen keine klare Abgrenzung, sondern es gibt eine Überlappungsschicht, in der sowohl die Wandschicht als auch die Außenschicht eine gültige Beschreibung darstellen.

2.3.1 Wandschicht

Im asymptotischen Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ weist die Strömung eine Singularität an der Wand auf, da die Dicke der Wandschicht δ_e^* gegen Null strebt

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\delta_e^*}{h^*} = 0. \quad (2.26)$$

Der Index e soll im folgenden benutzt werden, um anzudeuten, dass es sich um eine Größe bei erzwungener Konvektion handelt. Nach Gleichung (2.26) kann der Plattenabstand h^* in der Wandschicht also keine Einflussgröße sein und die Geschwindigkeit kann ausgedrückt werden durch:

$$u^* = f\left(y^*, u_\tau^*, \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_w\right) \quad (2.27)$$

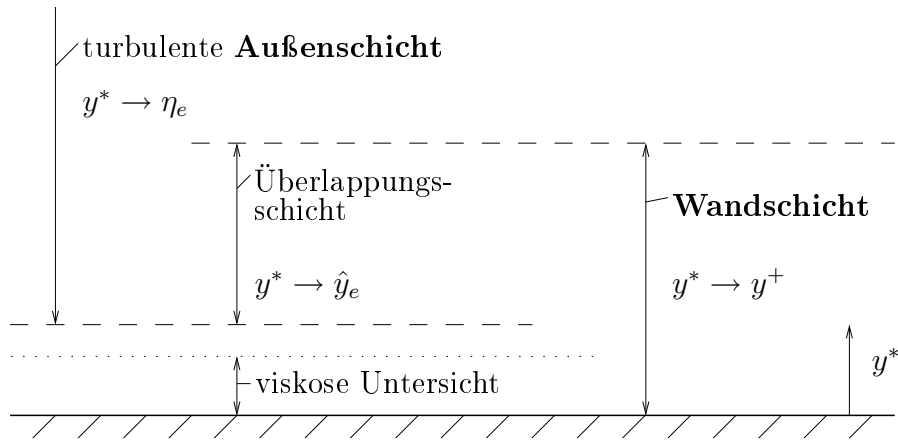


Abbildung 2.3: Zwei-Schichten-Struktur einer turbulenten Couetteströmung.

Um eine Beschreibung des Wandabstandes in der Wandschicht zu finden, die für $Re \rightarrow \infty$ nicht entartet, ist ein Maß für die Dicke der Wandschicht notwendig. Ein sinnvolles Maß hierfür ist der Abstand, bei dem die Wandschubspannungsgeschwindigkeit bei linearem Geschwindigkeitsverlauf erreicht wird

$$\delta_e^* \equiv \frac{u_\tau^*}{\partial u^* / \partial y^*|_w} = \frac{\nu^*}{u_\tau^*}. \quad (2.28)$$

Hiermit kann ein entdimensionierter Wandabstand $y^+ \equiv y^* / \delta_e^*$ eingeführt werden, für den gilt

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{y^*}{\delta_e^*} = O(1) \quad \text{für} \quad y^* \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Somit kann für die Wandschicht eine dimensionslose Beschreibung mit $u^+ \equiv u^* / u_\tau^*$ angegeben werden:

$$u^+ = \frac{u^*}{u_\tau^*} = f\left(\frac{y^*}{\delta_e^*}\right) = f\left(\frac{y^* u_\tau^*}{\nu^*}\right) = f(y^+) \quad (2.30)$$

2.3.2 Außenschicht

Da die Außenschicht vollturbulent ist, sind Wandgrößen ohne Einfluss. Somit ist der Geschwindigkeitsgradient an der Wand keine Einflussgröße und der funktionale Zusammenhang lautet

$$u^* = f(y^*, h^*, u_\tau^*) \quad (2.31)$$

oder in dimensionsloser Form mit $\eta_e \equiv y^* / h^*$

$$u^+ = \frac{u^*}{u_\tau^*} = f\left(\frac{y^*}{h^*}\right) = f(\eta_e). \quad (2.32)$$

In beiden Schichten kann die Geschwindigkeit u^* mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ^* entdimensioniert werden, da sie im gesamten Strömungsgebiet gültig ist und das Geschwindigkeitsprofil keine Singularität aufweist.

2.3.3 Überlappungsschicht

Zwischen der Wand- und der Außenschicht existiert eine Überlappungsschicht, in der die Strömung sowohl durch die Wandschicht (y^+) als auch durch die Außenschicht (η_e) beschrieben werden kann. Es ist somit möglich, ein Anpassen der Gradienten vorzunehmen, für Details siehe z.B. van Dyke (1964). Hierbei muss der Gradient in der Wandschicht für $y^+ \rightarrow \infty$ gleich dem Gradienten in der Außenschicht für $\eta_e \rightarrow 0$ sein. Dieses Anpassen der Gradienten wird in einer sogenannten *Zwischenkoordinate* \hat{y}_e durchgeführt.

$$\hat{y}_e \equiv \frac{y^*}{h^*} \cdot \left(\frac{h^*}{\delta_e^*} \right)^\alpha = \frac{y^*}{h^{*(1-\alpha)} \delta_e^{*\alpha}} \quad (2.33)$$

mit $0 \leq \alpha \leq 1$. Hierbei ist der genaue Wert von α nicht notwendig. Es reicht aus zu wissen, dass $\hat{y}_e = y^+$ für $\alpha = 1$ und $\hat{y}_e = \eta_e$ für $\alpha = 0$, d.h. dass \hat{y}_e immer zwischen η_e und y^+ liegt.

Die Anpassungsvorschrift lautet nun:

$$\frac{\partial u^+}{\partial \hat{y}_e} = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} \frac{\partial u^+(y^+)}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial \hat{y}_e} = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} \frac{h^{*(1-\alpha)} \delta_e^{*\alpha}}{\delta_e^*} \cdot \frac{\partial u^+(y^+)}{\partial y^+} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial \hat{y}_e} = \lim_{\eta_e \rightarrow 0} \frac{\partial u^+(\eta_e)}{\partial \eta_e} \frac{\partial \eta_e}{\partial \hat{y}_e} = \lim_{\eta_e \rightarrow 0} \frac{h^{*(1-\alpha)} \delta_e^{*\alpha}}{h^*} \cdot \frac{\partial u^+(\eta_e)}{\partial \eta_e} \quad (2.35)$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \lim_{y^+ \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta_e^*} \frac{\partial u^+(y^+)}{\partial y^+} &= \lim_{\eta_e \rightarrow 0} \frac{1}{h^*} \frac{\partial u^+(\eta_e)}{\partial \eta_e} \quad \left| \cdot y^* \right. \\ \lim_{y^+ \rightarrow \infty} y^+ \frac{\partial u^+(y^+)}{\partial y^+} &= \lim_{\eta_e \rightarrow 0} \eta_e \frac{\partial u^+(\eta_e)}{\partial \eta_e}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Gleichung (2.36) kann nur erfüllt werden, wenn die beiden Seiten der Gleichung konstant sind, da $y^+ \rightarrow \infty$ und $\eta_e \rightarrow 0$ gilt (Separationsansatz). Es folgt also für die Geschwindigkeit

$$\lim_{y^+ \rightarrow \infty} y^+ \frac{\partial u^+(y^+)}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa} = \text{const.} \quad (2.37)$$

$$\lim_{y^+ \rightarrow \infty} \frac{\partial u^+(y^+)}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \quad (2.38)$$

$$\lim_{y^+ \rightarrow \infty} u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B^+. \quad (2.39)$$

Gleichung (2.39) ist das bekannte *logarithmische Wandgesetz* mit der von-Kármán-Konstanten $\kappa = 0,41$ und $B^+ = 5,0$ (für die hydraulisch glatte Wand), die durch Vergleich mit Messdaten bestimmt wurden.

Es gibt allerdings in der Literatur noch einen Disput, ob anstelle des logarithmischen Profils nicht ein Potenzgesetz zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes in Wandnähe notwendig ist, siehe hierzu Barenblatt (1993a,b). Allerdings sprechen aktuelle Experimente wie z.B. von Zanoun, Durst & Nagib (2003), die mit großer Genauigkeit durchgeführt wurden, für ein logarithmisches Verhalten. Somit kann das logarithmische Wandgesetz (und damit auch die hier gezeigte Herleitung) als eine sehr gute Näherung zur Beschreibung der Strömung angesehen werden, auch wenn seine Richtigkeit nicht „bewiesen“ werden kann.

2.3.4 Viskose Unterschicht

Direkt an der Wand existiert eine viskose Unterschicht, die Bestandteil der Wandschicht ist und in der die turbulenten Fluktuationen durch den Einfluss der Wand gedämpft werden. Somit fällt die Reynolds-Spannung $-\overline{u^*v^{*'}}$ in Gleichung (2.22) weg und sie vereinfacht sich zu:

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w \quad \Rightarrow \quad u^* = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w y^* \quad (2.40)$$

oder in dimensionsloser Form

$$u^+ = y^+ \quad (2.41)$$

Es liegt somit in der viskosen Unterschicht ein lineares Geschwindigkeitsprofil vor.

2.3.5 Messdaten

Abbildung 2.4 zeigt eigene Messdaten, die am Institut für Thermofluidodynamik an einer überströmten Platte mit einem Laser-Doppler-Anemometer (LDA) aufgenommen wurden.

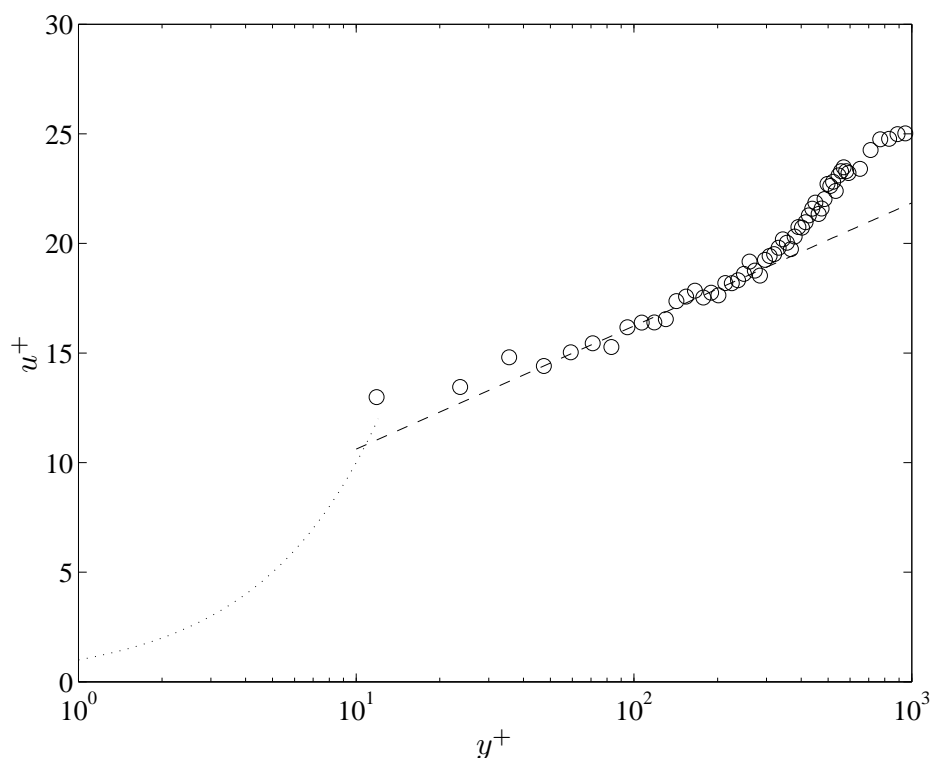


Abbildung 2.4: Vergleich von eigenen Messdaten (o) mit dem logarithmischen Wandgesetz (---) nach Gleichung (2.39) und dem linearen Profil in der viskosen Unterschicht (···) nach Gleichung (2.41).

Hierbei wurde die Wandschubspannung nicht direkt bestimmt, da es mit der verwendeten Messtechnik nicht möglich ist, die viskose Unterschicht aufzulösen, die hier als gepunktete Linie dargestellt ist. Es wurde vielmehr angenommen, dass der vierte Messpunkt dem logarithmischen Wandgesetz folgt; die Wandschubspannung wurde also indirekt ermittelt. Es ist zu sehen, dass die weiteren Messpunkte sehr gut mit dem logarithmischen Wandgesetz übereinstimmen, das hier als gestrichelte Linie angegeben ist. Für $y^+ > 300$ ist der Übergang in die ungestörte Außenströmung zu erkennen.

2.4 Temperaturprofil der erzwungenen Konvektion

Für die erzwungene Konvektion kann mit Hilfe der Asymptotik auch ein universelles Temperaturprofil hergeleitet werden. Dazu wird wieder eine Couette-Strömung betrachtet, diesmal zusätzlich mit unterschiedlich temperierten Wänden. Aufgrund der unendlich ausgedehnten Wände ist das Temperaturfeld eindimensional und die Wärmestromdichte ist über der Kanalhöhe h^* konstant. Sie setzt sich zusammen aus einem molekularen Anteil \dot{q}_{mol}^* und einem turbulenten Anteil \dot{q}_{turb}^* und ist gleich der Wandwärmestromdichte

$$\dot{q}^* = \dot{q}_{mol}^* + \dot{q}_{turb}^* = \dot{q}_w^*. \quad (2.42)$$

Mit dieser Wandwärmestromdichte \dot{q}_w^* und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ^* wird eine Bezugstemperatur T_τ^* und eine dimensionslose Temperaturdifferenz Θ^+ eingeführt

$$T_\tau^* \equiv \frac{|\dot{q}_w^*|}{\rho^* c_p^* u_\tau^*} \quad \text{und} \quad \Theta^+ \equiv \frac{T_w^* - T^*}{T_\tau^*}. \quad (2.43)$$

Durch ein Anpassen der Temperaturgradienten in der Überlappungsschicht erhält man erneut ein logarithmisches Profil, siehe Gersten & Herwig (1992).

$$\lim_{y^+ \rightarrow \infty} \Theta^+ = \frac{1}{\kappa_\Theta} \ln(y^+) + C^+(\text{Pr}). \quad (2.44)$$

Hierbei ist $\kappa_\Theta = 0,47$ und die Integrationskonstante $C^+(\text{Pr})$ ist eine Funktion der Prandtl-Zahl. Für $\text{Pr} = O(1)$ gilt näherungsweise:

$$C^+(\text{Pr}) = 13,7 \text{Pr}^{2/3} - 7,5 \quad (2.45)$$

Für die viskose Unterschicht kann, wie für das Geschwindigkeitsfeld, ein analytisches Profil angegeben werden. Aufgrund der Wandnähe werden die turbulenten Fluktuationen gedämpft und es gilt $-v^{*'} T^{*'} = 0$. Somit liegt in Wandnähe ein lineares Profil vor

$$T^* = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y. \quad (2.46)$$

Führt man eine Entdimensionierung durch, so stellt man aufgrund der Wahl von u_τ^* und T_τ^* eine Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl fest

$$\Theta^+ = \text{Pr} \cdot y^+. \quad (2.47)$$

2.5 Wandfunktionen

In den nachfolgenden Kapiteln wird der Begriff „Wandfunktion“ benutzt, der hier kurz erläutert werden soll.

In turbulenten Strömungen treten in Wandnähe sehr hohe Gradienten auf. Bei der Simulation solcher Strömungen wäre es somit notwendig, ein extrem feines Gitter in Wandnähe zu benutzen, um den Gradienten richtig berechnen zu können. Ein Gitter, das fein genug ist, um die viskose Unterschicht aufzulösen, führt dann aber häufig zu so großen Gleichungssystemen, dass diese nicht mehr in angemessener Rechenzeit gelöst werden können.

Um dieses Problem zu umgehen, kann man ausnutzen, dass turbulente Strömungen in Wandnähe meist ein universelles Verhalten (bei hohen Werten der zugehörigen Kennzahl) besitzen, d.h. dass durch die Wahl einer geeigneten Entdimensionierung eine Auftragung gefunden werden kann, in der alle Profile zusammenfallen. Ein Beispiel hierfür ist das logarithmische Wandgesetz nach Gleichung (2.39) oder das universelle Temperaturprofil nach Gleichung (2.44). Durch eine Koordinatentransformation von u^* nach u^+ bzw. von T^* nach Θ^+ können alle Profile mit jeweils einer Kurve wiedergegeben werden.

Da man bereits anhand der universellen Profile weiß, wie sich turbulente Strömungen in Wandnähe verhalten, ist es nicht notwendig, den Verlauf in der Wandschicht immer wieder neu zu berechnen. Es kann vielmehr das universelle Verhalten ausgenutzt werden, das auch außerhalb der viskosen Unterschicht gültig ist. Wird z.B. das logarithmische Wandgesetz als Geschwindigkeitswandfunktion benutzt, so kann man die Geschwindigkeit im wandnächsten Kontrollvolumen prinzipiell anhand des Wandabstands y^* ermitteln²

$$u^*(y^*) = u_\tau^* \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y^* u_\tau^*}{\nu^*} \right) + B^+ \right]. \quad (2.48)$$

Durch das Benutzen von Wandfunktionen ist es also möglich, das Gitter in Wandnähe deutlich gröber zu wählen und somit Rechenzeit zu sparen, ohne große Abstriche bei der Genauigkeit hinnehmen zu müssen. Das Verwenden von Wandfunktionen beschränkt sich dabei nicht nur auf die klassischen Größen wie Geschwindigkeit oder Temperatur, sondern kann auch für andere Größen wie z.B. die Entropieerzeugung benutzt werden, siehe hierzu z.B. Kock & Herwig (2005).

²Die tatsächliche Umsetzung in einem CFD-Code sieht ein wenig anders aus, aber prinzipiell wird das logarithmische Wandgesetz benutzt, um die Geschwindigkeit in der wandnächsten Zelle zu bestimmen.

Kapitel 3

Natürliche Konvektion an vertikalen Wänden

Natürliche Konvektion an vertikalen Wänden ist an vielen Stellen zu beobachten, z.B. bei der Klimatisierung von Gebäuden, Kühlen von elektronischen Bauteilen oder in Kernkraftwerken. Sie tritt auf, wenn eine Temperaturdifferenz zwischen einer vertikalen Wand und dem angrenzenden Fluid vorliegt. Es bildet sich dann ein Temperaturprofil im Fluid aus, das wiederum die Dichte beeinflusst. Befindet sich das Fluid in einem äußeren Kraftfeld (z.B. Schwerfeld der Erde), so setzt aufgrund der Auftriebskräfte eine Strömung entlang der Wand ein. Hierbei sind die sich ausbildenden Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder aneinander gekoppelt, so dass die Temperatur nicht mehr, wie im Falle von erzwungener Konvektion, als passiver Skalar behandelt werden kann. Hierdurch erschwert sich die Simulation von natürlicher Konvektion erheblich.

Zur Beschreibung der natürlichen Konvektion werden die dimensionslosen Kennzahlen Grashof-Zahl Gr

$$Gr \equiv \frac{g^* \beta^* \Delta T^* h^{*3}}{\nu^{*2}} \quad \text{bzw.} \quad Gr_x \equiv \frac{g^* \beta^* \Delta T^* x^{*3}}{\nu^{*2}} \quad (3.1)$$

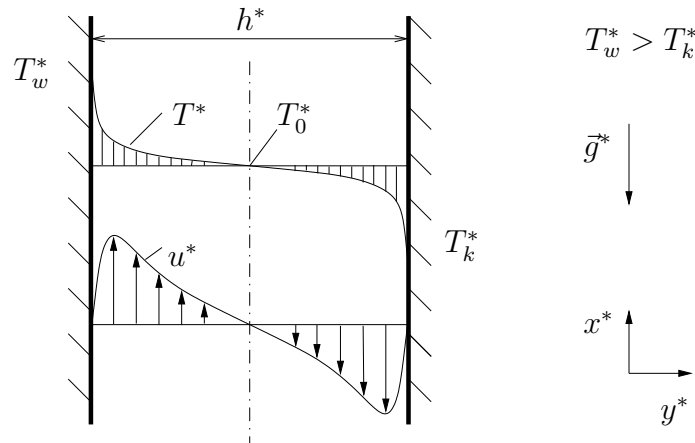
bzw. Rayleigh-Zahl Ra

$$Ra \equiv \frac{g^* \beta^* \Delta T^* h^{*3}}{\nu^* a^*} = GrPr \quad \text{bzw.} \quad Ra_x \equiv \frac{g^* \beta^* \Delta T^* x^{*3}}{\nu^* a^*} = Gr_x Pr \quad (3.2)$$

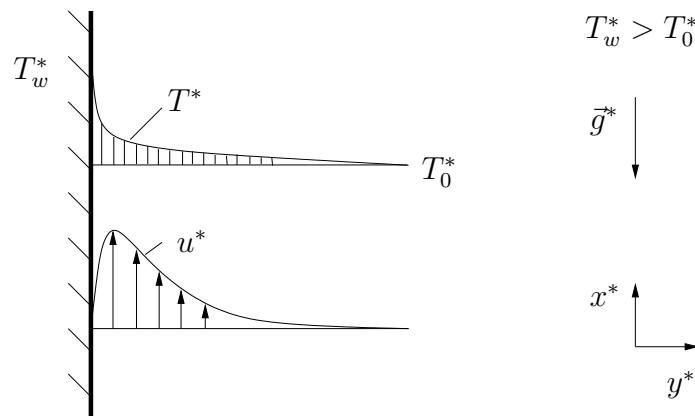
benutzt. Hierbei bezeichnet g^* den Betrag der Erdbeschleunigung, β^* den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, ΔT^* eine charakteristische Temperaturdifferenz, h^* die Kanalhöhe, x^* die Lauflänge entlang einer Platte, ν^* die kinematische Viskosität, a^* die Temperaturleitfähigkeit und $Pr = \nu^*/a^*$ die Prandtl-Zahl. Im folgenden soll die turbulente natürliche Konvektion an vertikalen Wänden mit Hilfe asymptotischer Überlegungen, also für $Gr \rightarrow \infty$ bzw. $Ra \rightarrow \infty$, untersucht werden. Die so gewonnenen Ergebnisse können als (Näherungs-) Lösungen für große, aber endliche Grashof-Zahlen betrachtet werden.

Um die Ergebnisse der Asymptotik bewerten zu können und auftretende Konstanten zu ermitteln, ist es notwendig, experimentelle oder numerische Daten von hoher Genauigkeit zur Verfügung zu haben. In Abbildung 3.1 sind drei Standardgeometrien dargestellt, an

vertikaler Kanal:



vertikale Platte:



Kavität:

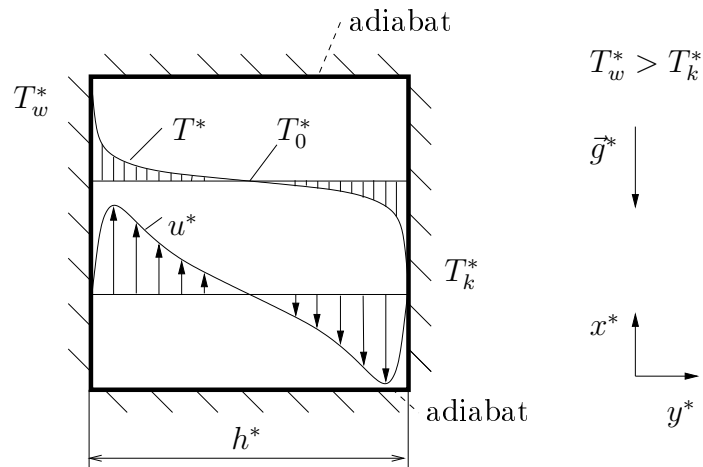


Abbildung 3.1: Natürliche Konvektion an vertikalen Wänden mit Wärmeübergang; *Oben:* vertikaler, unendlich ausgedehnter Kanal (eindimensionales Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld), z.B. von Versteegh & Nieuwstadt (1999) untersucht; *Mitte:* beheizte vertikale Platte, untersucht z.B. von Tsuji & Nagano (1988a); *Unten:* Kavität mit vertikalen Wänden unterschiedlicher Temperatur und adiabaten horizontalen Wänden, untersucht z.B. von Ampofo & Karayiannis (2003).

denen typischerweise die turbulente natürliche Konvektion an vertikalen Wänden untersucht wird.

Die erste Testgeometrie ist ein vertikaler Kanal mit einer beheizten und einer gekühlten Wand, wobei beide Wände unendlich ausgedehnt sind, siehe hierzu Abbildung 3.1 (oben). Dieser Aufbau wurde von Versteegh & Nieuwstadt (1999), Boudjemadi *et al.* (1997) und Wang, Fu & Zhang (2002) mit Hilfe von Direkter Numerischer Simulation (DNS) und von Betts & Bokhari (2000) experimentell untersucht. Die zweite Geometrie ist eine beheizte Platte in einer ruhenden Umgebung, wie sie z.B. von Tsuji & Nagano (1988a,b), Tsuji *et al.* (1991) und für Nicht-Boussinesq-Bedingungen von Siebers, Moffatt & Schwind (1985) untersucht wurde, siehe Abbildung 3.1 (Mitte). Als dritte Geometrie wird eine Kavität („Hohlraum“, engl.: *cavity*) mit Seitenwänden unterschiedlicher Temperatur und adiabater Decke und Boden betrachtet, siehe Abbildung 3.1 (unten). Diese Geometrie wurde z.B. von Ampofo & Karayiannis (2003) und Cheesewright, King & Ziai (1986) untersucht. Alle verwendeten Datensätze wurden für Luft mit $Pr = 0,71$ ermittelt.

Anhand zweier Datensätze von Tsuji & Nagano (1988a) soll in Abbildung 3.2 gezeigt werden, dass es sich bei der turbulenten natürlichen Konvektion um eine Strömungsform handelt, die sich grundlegend von der erzwungenen Konvektion unterscheidet, und dass somit die Standard-Wandfunktionen der erzwungenen Konvektion keine Gültigkeit mehr haben.

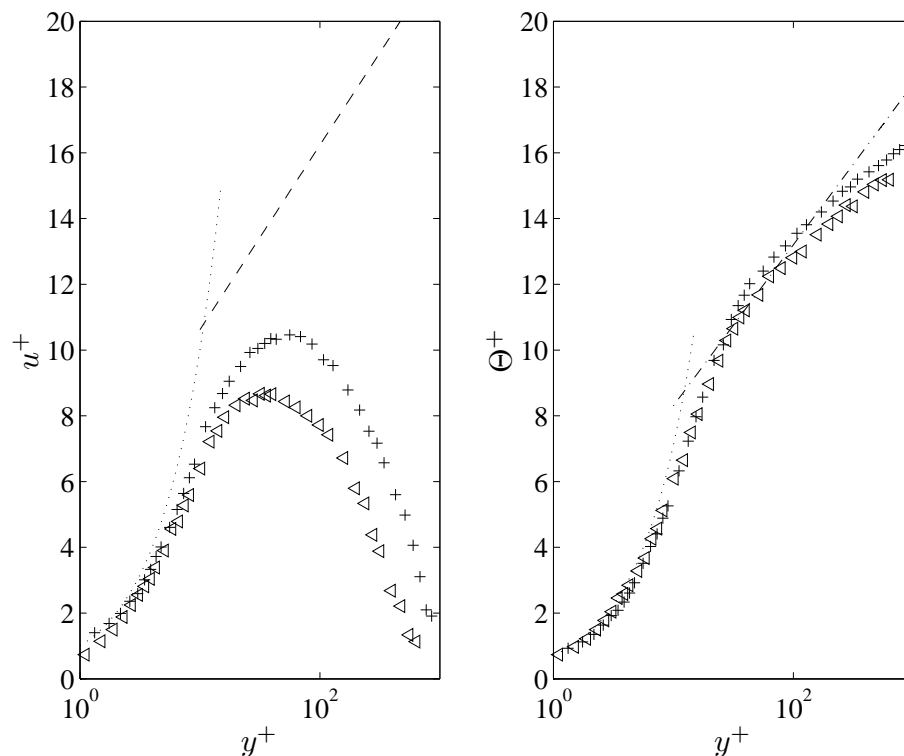


Abbildung 3.2: Vergleich der Standard-Wandfunktionen nach Gleichung (2.39) für die Geschwindigkeit (— · —) und nach Gleichung (2.44) für die Temperatur (— · —) mit Messdaten von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ (\triangleleft) und $Gr_x = 1,79 \cdot 10^{11}$ (+).

Es sind die Daten für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ und $Gr_x = 1,79 \cdot 10^{11}$ in y^+ , u^+ , Θ^+ -Koordinaten zusammen mit den Standard-Wandfunktionen nach den Gleichungen (2.39) und (2.44),

wie sie z.B. in Gersten & Herwig (1992) zu finden sind, dargestellt. Man erkennt, dass das Geschwindigkeitsprofil nur unzureichend wiedergegeben wird. Es ist nicht möglich, mit Hilfe der Standard-Wandfunktionen das Geschwindigkeitsmaximum, wie es typischerweise bei natürlicher Konvektion auftritt, wiederzugeben. Es kann noch nicht einmal der Bereich zwischen Wand und Geschwindigkeitsmaximum mit dem logarithmischen Wandgesetz beschrieben werden.

Die Temperaturprofile weisen keine so deutlichen Abweichungen von der Temperaturwandfunktion auf. Es ist allerdings zu erkennen, dass die Steigung der Wandfunktion zu groß ist. Zudem zeigen die Temperaturprofile in der y^+ - Θ^+ -Darstellung kein universelles Verhalten, d.h. sie fallen nicht zusammen. Somit können sie nicht mit *einer* Funktion beschrieben werden, die einzig vom Wandabstand y^+ abhängig ist. Die Standard-Wandfunktionen für die Temperatur bzw. die Geschwindigkeit sind somit nicht zur Beschreibung der natürlichen Konvektion geeignet.

Dies wurde bereits von George & Capp (1979) erkannt, die eine der ersten und häufig zitierten Arbeiten zu Wandfunktionen bei turbulenter natürlicher Konvektion veröffentlichten. In dieser Studie wurde sowohl für das Temperatur- als auch für das Geschwindigkeitsprofil ein 1/3-Potenzgesetz hergeleitet. Hierzu wurde ein asymptotisches Anpassen von Gradienten in benachbarten Schichten durchgeführt (*asymptotic matching*). Das angegebene Potenzgesetz für das Temperaturprofil gibt z.B. die DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) und die RANS¹-Ergebnisse von Henkes & Hoogendoorn (1990) einigermaßen gut wieder. Bei den Geschwindigkeitsprofilen treten hingegen erhebliche Abweichungen auf, so dass das 1/3-Potenzgesetz für das Geschwindigkeitsprofil sowohl in der Arbeit von Versteegh & Nieuwstadt (1999) als auch von Henkes & Hoogendoorn (1990) als unpassend bewertet wurde. Einen detaillierten Vergleich der Ergebnisse dieser Arbeit mit der Theorie von George & Capp (1979) befindet sich im Abschnitt 3.4.

Yuan, Moser & Suter (1993) wählten einen anderen Ansatz, um Wandfunktionen zu erhalten. Basierend auf dimensionsanalytischen Überlegungen wurde ein *curve fitting* zu den Daten von Tsuji & Nagano (1988a) durchgeführt. Die so erhaltenen Funktionen weisen eine gute Übereinstimmung mit den Daten auf, was aufgrund der gewählten Vorgehensweise auch zu erwarten ist. Allerdings gibt es, im Gegensatz zu asymptotischen Überlegungen, keine theoretische Begründung, diese Funktionen auch für höhere Grashof-Zahlen ($Gr \rightarrow \infty$) verwenden zu können.

Im anschließenden Abschnitt 3.1 wird das Temperaturfeld für $Gr \rightarrow \infty$ analysiert. Sowohl für den Bereich in unmittelbarer Wandnähe (viskose Unterschicht) als auch für die Überlappungsschicht können Funktionen zur Beschreibung des Temperaturprofils angegeben werden. Anhand des Temperaturprofils kann sowohl für den vertikalen Kanal als auch für die vertikale Platte eine Nußelt-Beziehung angegeben werden (Abschnitt 3.2). Mit Kenntnis des Temperaturfeldes kann in Abschnitt 3.3 das Geschwindigkeitsprofil durch Lösen der (vereinfachten) Navier-Stokes-Gleichungen erhalten werden. Im Abschnitt 3.4 werden die neuen Funktionen mit den Potenzgesetzen von George & Capp (1979) verglichen. Abschließend werden in Abschnitt 3.5 Profile angegeben, die durch ein *blending* erzeugt werden und im gesamten wandnahen Bereich gültig sind. Das in den folgenden Ab-

¹RANS steht für *Reynolds averaged Navier-Stokes*. Es wurden also die zeitgemittelten Navier-Stokes Gleichungen mit Hilfe eines Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodells gelöst, um die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile zu erhalten.

schnitten gezeigte Vorgehen basiert auf den Veröffentlichungen Hölling & Herwig (2005a) und Hölling & Herwig (2005b).

Es ist das langfristige Ziel, eine Theorie zu entwickeln, die sowohl die Grenzfälle der natürlichen Konvektion und der erzwungenen Konvektion beschreiben kann als auch die gemischte Konvektion im Allgemeinen. Darum wird im folgenden eine Vorgehensweise für die Analyse der natürlichen Konvektion gewählt, die der Behandlung der erzwungenen Konvektion (siehe Abschnitt 2.3 und 2.4) möglichst ähnlich ist, um für die Zukunft eine Übertragung auf die gemischte Konvektion zu ermöglichen.

3.1 Temperaturprofil

Der nachfolgende Ansatz zur Beschreibung des Temperaturfeldes stellt ein analoges Vorgehen dar, wie es im Falle von erzwungener Konvektion zur Herleitung des bekannten logarithmischen Wandgesetzes (siehe Abschnitt 2.3) verwendet wird. Das logarithmische Wandgesetz ist (mitunter in abgewandelter Form) als Wandfunktion in jedem kommerziellen CFD-Code enthalten und ermöglicht es, die Zellzahl in Wandnähe deutlich zu reduzieren und trotzdem korrekte Werte für die Wandgradienten zu erhalten. Vergleichbares soll in diesem Kapitel für die natürliche Konvektion an vertikalen Wänden hergeleitet werden.

Für den wandnahen Bereich vereinfachen sich die Grundgleichungen (2.6)-(2.8) unter Berücksichtigung der Boussinesq-Approximation zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \overline{u^{*'}v^{*'}} \right) + g^* \beta^* (T^* - T_0^*), \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \overline{v^{*'}T^{*'}} \right), \quad (3.4)$$

siehe z.B. Tsuji & Nagano (1988a). Hierbei ist y^* die Koordinate normal zur Wand, T_0^* eine Referenztemperatur, $-\overline{u^{*'}v^{*'}}$ die Reynolds-Spannung und $-\overline{v^{*'}T^{*'}}$ die turbulente Wärmestromdichte. Es sei hier kurz vermerkt, dass es eigentlich nicht ganz korrekt ist, bei den Termen $a^* \cdot \partial T^* / \partial y^*$ und $-\overline{v^{*'}T^{*'}}$ von „Wärmestromdichten“ zu sprechen. Es handelt sich dabei vielmehr um Wärmestromdichten, bezogen auf die Dichte ρ^* und die spezifische Wärmekapazität c_p^* , wie man sich folgendermaßen verdeutlichen kann

$$\frac{\dot{q}^*}{\rho^* c_p^*} = \frac{\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}}{\rho^* c_p^*} = a^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial y^*}. \quad (3.5)$$

Es soll im folgenden der Einfachheit halber weiterhin von Wärmestromdichten die Rede sein, auch wenn dies eine etwas unpräzise Ausdrucksweise ist.

Das Temperaturfeld, das zunächst betrachtet werden soll, besitzt eine Zwei-Schichten-Struktur, siehe Abbildung 3.3. In der **Wandschicht** treten sowohl molekularer als auch turbulenter Wärmetransport auf. Die **Außenschicht** hingegen ist vollturbulent, so dass hier nur der turbulente Wärmetransport berücksichtigt werden muss. Eine Integration

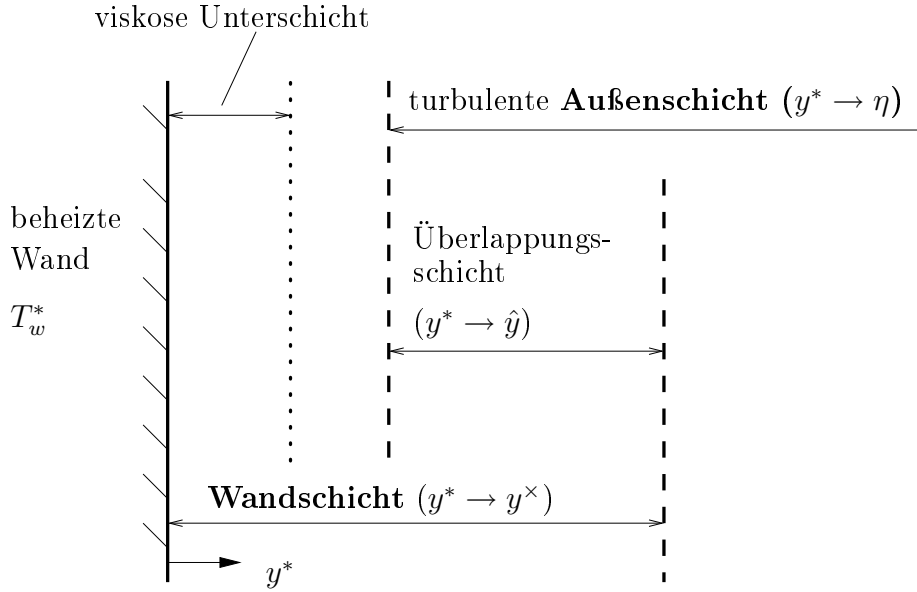


Abbildung 3.3: Zwei-Schichten-Struktur in Wandnähe bei turbulenter natürlicher Konvektion.

von Gleichung (3.4), die sowohl für die Wandschicht als auch für die Außenschicht gültig ist, liefert:

$$a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \overline{v^{*'} T^{*'}} = a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w = \text{const} \quad (3.6)$$

Hierbei ist $a^* \partial T^* / \partial y^*$ die molekulare und $-\overline{v^{*'} T^{*'}}$ die turbulente Wärmestromdichte, die zusammen gleich der Wandwärmestromdichte $a^* \partial T^* / \partial y^* \Big|_w$ sind. Somit charakterisiert die Wandwärmestromdichte den vorliegenden Wärmetransport und es kann hiermit (und mit den Größen g^* , β^* und a^* , die zusätzlich in den Gleichungen (3.3) und (3.4) auftreten) eine Bezugstemperatur T_c^* eingeführt werden

$$T_c^* \equiv \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \right|^3 \right)^{1/4} = \left(\left[\frac{\dot{q}_w^*}{\rho^* c_p^*} \right]^3 \frac{1}{a^* g^* \beta^*} \right)^{1/4}. \quad (3.7)$$

Die Bezugstemperatur wurde in strenger Analogie zur Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ^* gewählt, die die Bezugsgeschwindigkeit für die erzwungene Konvektion darstellt. Es gilt hierfür (siehe Abschnitt 2.3)

$$u_\tau^* = \sqrt{\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w} = \sqrt{\frac{\tau_w^*}{\rho^*}}. \quad (3.8)$$

In beiden Fällen wird die Bezugsgröße mit einer Größe gebildet, die über die Kanalhöhe konstant ist, also mit \dot{q}_w^* bzw. τ_w^* .

Die Temperaturdifferenz² zwischen der beheizten Wand und dem Fluid kann allgemein beschrieben werden als eine Funktion des Wandabstandes y^* , einer geometrischen Bezugslänge h^* (h^* soll hier stellvertretend für die Kanalhöhe bzw. für die Lauflänge entlang der Platte stehen), der Bezugstemperatur T_c^* und des Temperaturgradienten an der Wand $|\partial T/\partial y|_w$:

$$T_w^* - T^* = f\left(y^*, h^*, T_c^*, \left|\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_w\right) \quad (3.9)$$

3.1.1 Wandschicht

Für $\text{Gr} \rightarrow \infty$ geht die Dicke δ^* der Wandschicht, wie bei jeder viskositätsdominierten Schicht, gegen Null

$$\lim_{\text{Gr} \rightarrow \infty} \frac{\delta^*}{h^*} \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

und somit kann h^* keinen Einfluss auf das Temperaturprofil in der Wandschicht haben. Es gilt also innerhalb der Wandschicht

$$T_w^* - T^* = f\left(y^*, T_c^*, \left|\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_w\right). \quad (3.11)$$

Aufgrund von dimensionsanalytischen Überlegungen kann als Maß für die Dicke der Wandschicht δ^*

$$\delta^* = \frac{T_c^*}{|\partial T^*/\partial y^*|_w} \quad (3.12)$$

identifiziert werden. Hiermit kann eine dimensionslose Temperaturdifferenz Θ^\times und ein dimensionsloser Wandabstand y^\times eingeführt werden

$$\Theta^\times \equiv \frac{T_w^* - T^*}{T_c^*}, \quad (3.13)$$

$$y^\times \equiv \frac{y^*}{\delta^*} = \frac{y^*}{T_c^*} \left|\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right|_w. \quad (3.14)$$

Das Temperaturprofil nimmt in der Wandschicht somit folgende Form an

$$\Theta^\times = f(y^\times). \quad (3.15)$$

Durch eine geeignete Entdimensionierung ist es also möglich, das dimensionslose Temperaturprofil Θ^\times als Funktion eines Parameters y^\times auszudrücken und somit universell darzustellen. Im dimensionsbehafteten Fall ist die Temperatur hingegen von drei Einflussgrößen abhängig, wie man an Gleichung (3.11) erkennen kann.

²Um eine positive Temperaturdifferenz zu erhalten, muss eine Fallunterscheidung für die warme und die kalte Wand durchgeführt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hier nur die Temperaturdifferenz zwischen der warmen Wand (T_w^*) und dem Fluid (T^*) betrachtet, so dass $(T_w^* - T^*) > 0$ gilt.

3.1.2 Außenschicht

Die Außenschicht hingegen wird durch die geometrische Bezugslänge h^* beeinflusst, so dass hier als dimensionsloser Wandabstand $\eta \equiv y^*/h^*$ eingeführt wird. Somit folgt für das dimensionslose Temperaturprofil in der Außenschicht

$$\Theta^\times = f(\eta). \quad (3.16)$$

Da es der Hauptunterschied zur Theorie von George & Capp (1979) ist, soll an dieser Stelle in Vorgriff auf Abschnitt 3.4 schon betont werden, dass nur für den Wandabstand verschiedene Entdimensionierungen in der Wand- und der Außenschicht benutzt werden (y^\times und η). Die Temperaturdifferenz wird in beiden Schichten mit T_c^* entdimensioniert, da T_c^* mit der Wandwärmestromdichte gebildet wird, die sowohl in der Wand- als auch in der Außenschicht die bestimmende Größe darstellt.

3.1.3 Überlappungsschicht

Die Wand- und die Außenschicht sind nicht scharf voneinander getrennt, sondern es gibt eine Überlappungsschicht (siehe Abbildung 3.3), in der sowohl y^\times als auch η gültig sind. Für die Überlappungsschicht wird nun eine *Zwischenkoordinate* \hat{y} eingeführt, die auf gewichtete Größen der beiden Koordinaten (y^\times gebildet mit δ^* und η gebildet mit h^*) bezogen ist.

$$\hat{y} \equiv \frac{y^*}{h^{*(1-\alpha)}\delta^{*\alpha}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.17)$$

Der exakte Wert von α muss nicht bekannt sein, es muss nur $\eta \leq \hat{y} \leq y^\times$ gelten, siehe hierzu auch Gersten & Herwig (1992). Die Temperaturgradienten im äußeren Bereich der Wandschicht ($y^\times \rightarrow \infty$) und im inneren Bereich der Außenschicht ($\eta \rightarrow 0$) sollten nach einer Koordinatentransformation, ausgehend von der neuen Zwischenkoordinate \hat{y} , identisch sein, also

$$\frac{\partial \Theta^\times}{\partial \hat{y}} = \lim_{y^\times \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta^\times(y^\times)}{\partial y^\times} \frac{\partial y^\times}{\partial \hat{y}} = \lim_{y^\times \rightarrow \infty} \frac{h^{*(1-\alpha)}\delta^{*\alpha}}{\delta^*} \cdot \frac{\partial \Theta^\times(y^\times)}{\partial y^\times} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \Theta^\times}{\partial \hat{y}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial \Theta^\times(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h^{*(1-\alpha)}\delta^{*\alpha}}{h^*} \cdot \frac{\partial \Theta^\times(\eta)}{\partial \eta}. \quad (3.19)$$

Multiplikation von (3.18) und (3.19) mit y^* und Gleichsetzen führt auf

$$\lim_{y^\times \rightarrow \infty} y^\times \frac{\partial \Theta^\times(y^\times)}{\partial y^\times} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{\partial \Theta^\times(\eta)}{\partial \eta}. \quad (3.20)$$

Allgemein kann (3.20) nur erfüllt werden, wenn beide Terme gleich einer Konstanten C sind. Somit gilt also

$$\lim_{y^\times \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta^\times(y^\times)}{\partial y^\times} = \frac{C}{y^\times}. \quad (3.21)$$

Eine Intergration über die Wandschicht führt auf ein logarithmisches Temperaturprofil in der Überlappungsschicht

$$\lim_{y^\times \rightarrow \infty} \Theta^\times = C \ln(y^\times) + D. \quad (3.22)$$

Tsuji & Nagano (1988a) und Siebers, Moffatt & Schwind (1985) stellten anhand ihrer Messdaten ebenfalls eine logarithmische Form fest. Sie benutzten allerdings andere Entdimensionierungen und fanden somit keine universellen Profile, sondern stellten eine Abhängigkeit von der Grashof-Zahl fest. Außerdem konnten sie keine theoretische Begründung für die logarithmische Form angeben.

Das hier gezeigte Vorgehen zur Bestimmung von $\Theta^\times(y^\times)$ für $Ra \rightarrow \infty$ ist sehr ähnlich zur Herleitung des logarithmischen Wandgesetzes für $Re \rightarrow \infty$ in Abschnitt 2.3, wie anhand von Tabelle 3.1 auf der nachfolgenden Seite verdeutlicht werden soll.

3.1.4 Viskose Unterschicht

Für den Bereich unmittelbar an der Wand kann eine analytische Beschreibung des Temperaturfeldes angegeben werden. Die turbulenten Fluktuationen werden durch den Wand-einfluss gedämpft, so dass die turbulente Wärmestromdichte in der Energiegleichung vernachlässigt werden kann ($-\overline{v^* T^{*'}} \approx 0$). Somit reduziert sich die Energiegleichung zu

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w, \quad (3.23)$$

was direkt integriert werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgt somit beispielhaft für die beheizte Wand

$$T_w^* - T^* = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y^*. \quad (3.24)$$

In entdimensionierter Form ergibt sich also

$$\Theta^\times = y^\times. \quad (3.25)$$

3.1.5 Vergleich mit Messdaten

In Abbildung 3.4 sind DNS Temperaturprofile von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für den Fall des unendlich ausgedehnten Kanals in den dimensionslosen Koordinaten (Θ^\times , y^\times) angegeben. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, wurden die einzelnen Profile um einen konstanten Wert verschoben, so dass sie nicht überlappen. Es sind zusätzlich die Gleichungen (3.22) und (3.25) dargestellt.

Die Daten stimmen hervorragend mit dem linearen Temperaturprofil in der viskosen Unterschicht nach Gleichung (3.25) überein. In der Überlappungsschicht können die Daten sehr gut mit einem logarithmischen Verlauf nach Gleichung (3.22) wiedergegeben werden, wenn die „Konstanten“ C und D an jeden Datensatz individuell angepasst werden. Somit

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der Bezugsgrößen in der Wand- und Außenschicht für die Geschwindigkeit bei erzwungener Konvektion ($\text{Re} \rightarrow \infty$) und für die Temperatur bei natürlicher Konvektion ($\text{Ra} \rightarrow \infty$).

	Erzwungene Konvektion $\text{Re} \rightarrow \infty$	Natürliche Konvektion $\text{Ra} \rightarrow \infty$ bzw. $\text{Gr} \rightarrow \infty$
Grundgleichung	$\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \overline{u^* v^*} = \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big _w$	$a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \overline{v^* T^*} = a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big _w$
konstanter Term	$\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big _w = \frac{\tau_w^*}{\rho^*}$	$a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big _w = \frac{q_w^*}{\rho^* c_p^*}$
char. Bezugsgröße	$u_\tau^* \equiv \sqrt{\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big _w} = \sqrt{\frac{\tau_w^*}{\rho^*}}$	$T_c^* \equiv \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \cdot \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big _w \right ^3 \right)^{1/4}$ $= \left(\left[\frac{q_w^*}{\rho^* c_p^*} \right]^3 \frac{1}{a^* g^* \beta^*} \right)^{1/4}$
Einflussgrößen	$u^* = f \left(y^*, h^*, u_\tau^*, \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big _w \right)$	$T_w^* - T^* = f \left(y^*, h^*, T_c^*, \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big _w \right) \right)$
Wandschicht	$u^* = f \left(y^*, u_\tau^*, \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big _w \right)$ $y^+ = \frac{y^*}{\delta_e^*}; \quad \delta_e^* = \frac{u_\tau^*}{\partial u^* / \partial y^* \Big _w}$ $u^+ = \frac{u^*}{u_\tau^*}$	$T_w^* - T^* = f \left(y^*, T_c^*, \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big _w \right) \right)$ $y^\times = \frac{y^*}{\delta^*}; \quad \delta^* = \frac{T_c^*}{ \partial T^* / \partial y^* \Big _w}$ $\Theta^\times = \frac{T_w^* - T^*}{T_c^*}$
Außenschicht	$u^* = f(y^*, h^*, u_\tau^*)$ $\eta_e = \frac{y^*}{h^*}$ $u^+ = \frac{u^*}{u_\tau^*}$	$T_w^* - T^* = f(y^*, h^*, T_c^*)$ $\eta = \frac{y^*}{h^*}$ $\Theta^\times = \frac{T_w^* - T^*}{T_c^*}$

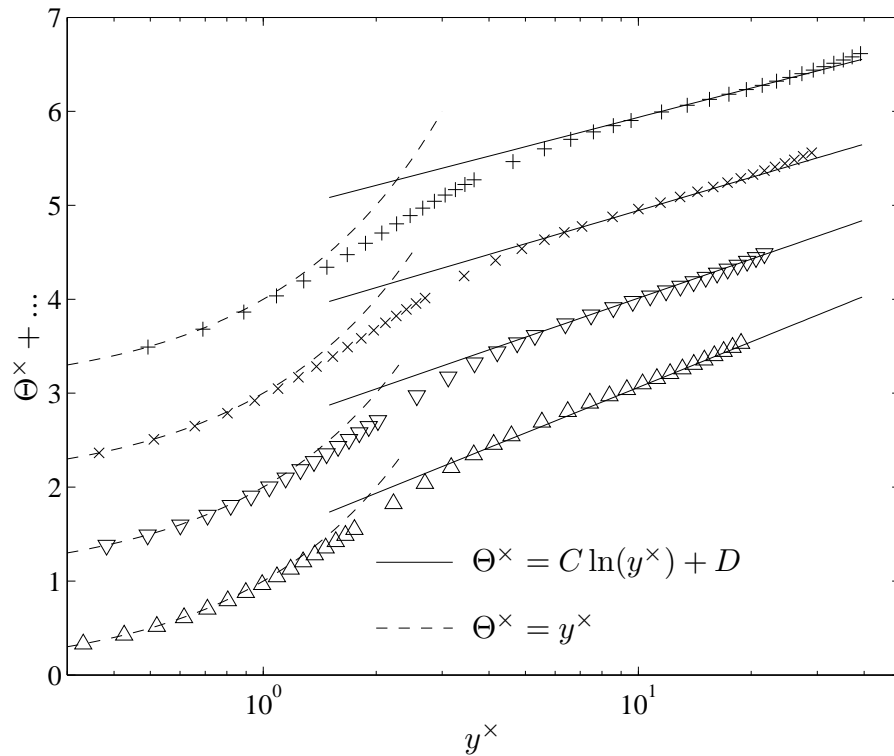


Abbildung 3.4: DNS-Temperaturdaten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für den unendlichen, vertikalen Kanal: $Ra = 5,4 \cdot 10^5$ (\triangle), $Ra = 8,2 \cdot 10^5$ (∇ , um 1 verschoben), $Ra = 2,0 \cdot 10^6$ (\times , um 2 verschoben) und $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ ($+$, um 3 verschoben). Zusätzlich sind die Profile in der viskosen Unterschicht $\Theta^x = y^x$ (---) und in der Überlappungsschicht $\Theta^x = C \ln(y^x) + D$ (—) dargestellt. Aufgrund der kleinen Rayleigh-Zahlen, wie sie typisch für DNS-Ergebnisse sind, hat jede Kurve eigene Werte für C und D .

wären C und D abhängig von der Rayleigh-Zahl, was für ein universelles asymptotisches Temperaturprofil nicht akzeptabel ist. Allerdings scheint die Rayleigh-Zahl-Abhängigkeit ein Effekt von zu kleinen Rayleigh-Zahlen zu sein, die bei DNS-Rechnungen stets vorliegen.

Da die asymptotische Theorie für $Ra \rightarrow \infty$ gültig ist, die Daten aber bei relativ geringen Rayleigh-Zahlen vorliegen, wird eine Extrapolation durchgeführt. Dazu werden in Abbildung 3.5 die Werte von C und D über $10^6/Ra$ aufgetragen. Somit entsprechen die Schnittpunkte mit der Ordinate den Werten von C und D für $Ra \rightarrow \infty$. Man erhält $C_\infty = 0,427$ und $D_\infty = 1,93$, die für alle Fälle der turbulenten natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden gültig sind, wenn die Rayleigh-Zahl groß im Sinne der Asymptotik ist. Somit gilt universell

$$\lim_{Ra \rightarrow \infty} \Theta^x = 0,427 \ln(y^x) + 1,93. \quad (3.26)$$

Die Allgemeingültigkeit des angegebenen Profils kann zusätzlich durch Vergleich mit (experimentellen) Daten aus der Literatur überprüft werden. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass das universelle Temperaturprofil (3.26) unter der Annahme von konstanten Stoffwerten (außer im Auftriebsterm durch die Boussinesq Approximation) ermittelt wurde, wie es in DNS-Studien mit Hilfe von idealen Fluiden berechnet wird. Bei

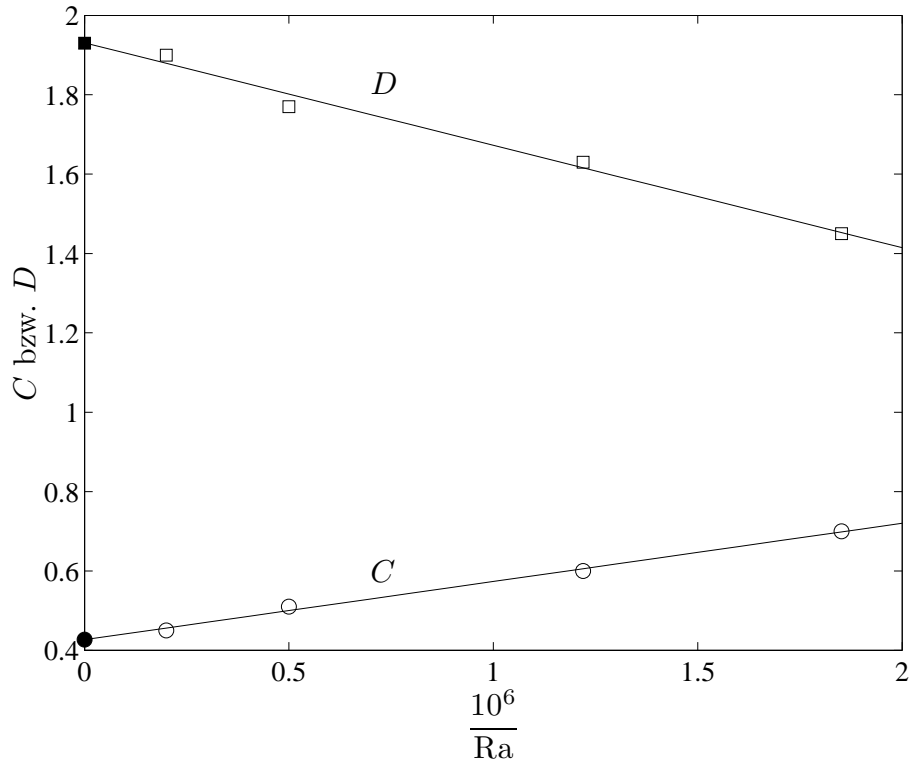


Abbildung 3.5: Extrapolation von C und D , um aus den DNS-Temperaturprofilen von Versteegh & Nieuwstadt (1999) die universellen Konstanten für $Ra \rightarrow \infty$ zu erhalten. Dies führt auf $C_\infty = 0,427$ (●) und $D_\infty = 1,93$ (■).

experimentellen Messdaten treten aufgrund der vorhandenen Temperaturunterschiede im Fluid Effekte durch veränderliche Stoffwerte auf. So ändert sich z.B. in den Messungen von Tsuji & Nagano (1988a) die Temperaturleitfähigkeit von $a^*(17^\circ\text{C}) = 217,3 \text{ m}^2/\text{s}$ auf $a^*(60^\circ\text{C}) = 271,3 \text{ m}^2/\text{s}$, was einer Veränderung von ca. 25% entspricht.

Somit muss also zunächst der Einfluss der veränderlichen Stoffwerte erfasst werden, bevor die Messdaten mit dem logarithmischen Verlauf nach Gleichung (3.26) verglichen werden können, siehe hierzu auch Anhang B. Da die Gradienten in Wandnähe sehr steil sind, kann man näherungsweise davon ausgehen, dass in der Außenschicht die Temperaturleitfähigkeit konstant ist (a_0^*). Wäre die Temperaturleitfähigkeit über das gesamte Feld (also auch an der Wand) konstant, so hätte man dort die *fiktive* Wärmestromdichte

$$a_0^* \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}} .$$

Da sich die Temperaturleitfähigkeit aufgrund der Temperaturverteilung zur Wand hin verändert, liegt in der realen Messung ein anderer Temperaturgradient vor. Lediglich der Wärmestrom bleibt gleich. Der fiktive Temperaturgradient, der bei konstanten Stoffwerten an der Wand vorliegen würde, ist also

$$a_0^* \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}} = a_w^* \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}} = \frac{a_w^*}{a_0^*} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w . \quad (3.27)$$

Mit diesem fiktiven Gradienten sind nun die Bezugsgrößen zu bilden, um die Messdaten mit dem logarithmischen Profil nach Gleichung (3.26) in der Überlappungsschicht zu vergleichen. Man erhält also für die Bezugsgrößen

$$T_c^* = \left(\frac{a_0^{*2}}{g^* \beta^*} \left[\frac{a_w^*}{a_0^*} \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right]^3 \right)^{1/4} \quad (3.28)$$

und

$$\delta^* = \frac{T_c^*}{\frac{a_w^*}{a_0^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w}. \quad (3.29)$$

Abbildung 3.6 zeigt Messdaten von verschiedenen Autoren für den Fall der beheizten Platte und der Kavität. Die Temperaturprofile wurden mit den Bezugsgrößen nach (3.28) und (3.29) entdimensioniert, um eine Vergleichbarkeit in der Überlappungsschicht herzustellen. In der viskosen Unterschicht liegt jedoch näherungsweise die Temperaturleitfähigkeit an der Wand vor, so dass hier die Transformation rückgängig gemacht werden muss. Es tritt dann der Korrekturfaktor a_0^*/a_w^* im linearen Temperaturverlauf auf, siehe Anhang B.1

$$\Theta^\times = \frac{a_0^*}{a_w^*} \cdot y^\times. \quad (3.30)$$

Die Daten von Tsuji & Nagano (1988a,b), Tsuji *et al.* (1991) und Cheesewright (1968) sind in sehr guter Übereinstimmung mit dem universellen Temperaturprofil (3.26). Für die Daten von Betts & Bokhari (2000) und Ampofo & Karayiannis (2003) treten Abweichungen vom logarithmischen Verlauf auf, was vermutlich an den zu kleinen Rayleigh-Zahlen der Experimente liegt. Es darf hierbei nicht vergessen werden, dass Rayleigh-Zahlen in unterschiedlichen Geometrien nicht einfach miteinander verglichen werden können. So ist aus asymptotischer Sicht eine Rayleigh-Zahl von $Ra = 1,59 \cdot 10^9$ in einer quadratischen Kavität „kleiner“ als $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ im unendlich ausgedehnten Kanal. Man findet dies z.B. auch bei der kritischen Reynoldszahl bei erzwungener Konvektion wieder. Für eine Rohrströmung gilt $Re_{krit} = 2300$, aber eine überströmte Platte wird erst bei $Re_{x,krit} = 5 \cdot 10^5$ turbulent, siehe z.B. Schlichting & Gersten (2000). Gleiche Zahlenwerte der dimensionslosen Kennzahlen in unterschiedlichen Geometrien bedeuten also nicht, dass eine ähnliche Situation vorliegt.

Die Abbildungen 3.4 und 3.6 stellen Temperaturprofile in entdimensionierter Form (Θ^\times, y^\times) und in halb-logarithmischer Auftragung dar. Dies ist sehr nützlich, um die Struktur und die Allgemeingültigkeit der erhaltenen Profile zu überprüfen. Allerdings ist diese Art der Darstellung wenig anschaulich. Deswegen ist in Abbildung 3.7 beispielhaft das Temperaturprofil von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ in dimensionsbehafteten Größen dargestellt. Bei dieser Auftragung ist deutlich der sehr steile Temperaturgradient an der Wand zu erkennen. Außerdem wird deutlich, dass die viskose Unterschicht (linearer Temperaturverlauf) nur in unmittelbarer Wandnähe gültig ist und nur einen Bruchteil des Strömungsfeldes ausmacht. Das logarithmische Temperaturprofil

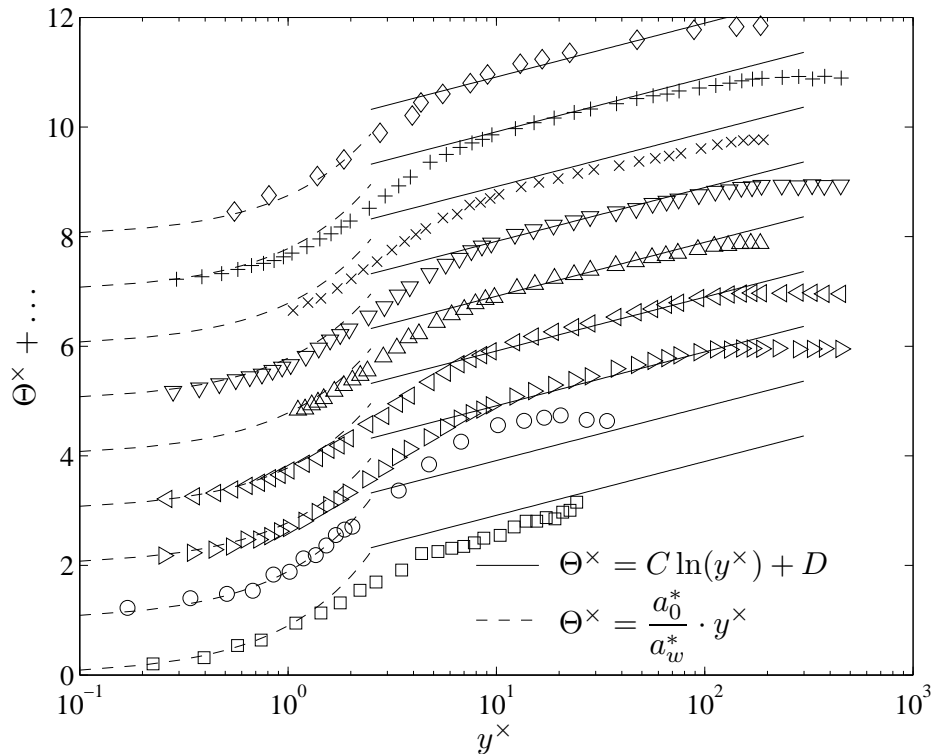


Abbildung 3.6: Experimentelle Temperaturdaten von Betts & Bokhari (2000) für $Ra = 1,43 \cdot 10^6$ (\square), von Ampofo & Karayiannis (2003) für $Ra = 1,59 \cdot 10^9$ (\circ), von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 1,55 \cdot 10^{10}$ (\triangleright), $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ (\triangleleft), $Gr_x = 7,99 \cdot 10^{10}$ (\triangle), $Gr_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ (∇), $Gr_x = 8,99 \cdot 10^{10}$ (\times), $Gr_x = 17,97 \cdot 10^{10}$ ($+$) und von Cheesewright (1968) für $Gr_x = 8,65 \cdot 10^{10}$ (\diamond). Um ein Überlappen der einzelnen Profile zu vermeiden, sind die aufeinanderfolgenden Datensätze um jeweils eine Temperatureinheit verschoben.

nach Gleichung (3.26) beschreibt das Temperaturprofil über einen großen Bereich in guter Näherung. Im Anschluss an die Überlappungsschicht nähert sich die Temperatur der Umgebungstemperatur ϑ_0^* an.

Desweiteren sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass experimentelle Daten grundsätzlich sehr kritisch zu betrachten sind. So wurde z.B. in der Arbeit von Tsuji & Nagano (1988a) der Temperaturwandgradient auf zwei Arten bestimmt und es ergeben sich Unterschiede von 12 %, siehe Abbildung 3.8. Der Temperaturwandgradient ist für die hier gewählte Auswertung ein wichtiger Parameter und Schwankungen wirken sich relativ stark aus. Es wurden die in der Arbeit von Tsuji & Nagano (1988a) explizit angegebenen Temperaturgradienten benutzt, um möglichst dicht an der zitierten Literaturstelle zu bleiben.

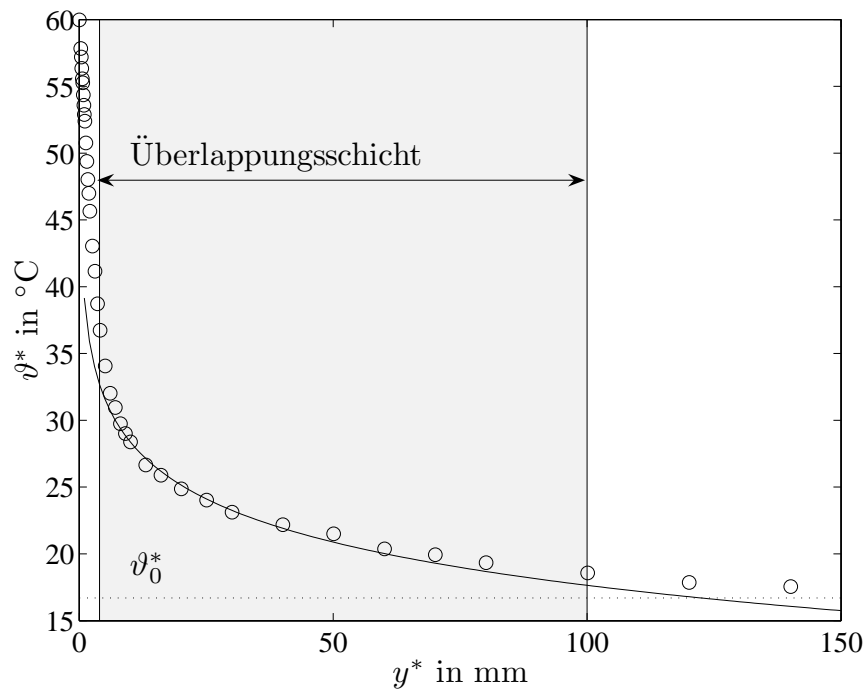


Abbildung 3.7: Temperaturmessdaten (o) für $Gr_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ von Tsuji & Nagano (1988a) zusammen mit dem logarithmischen Temperaturprofil in dimensionsbehafteter Form (—).

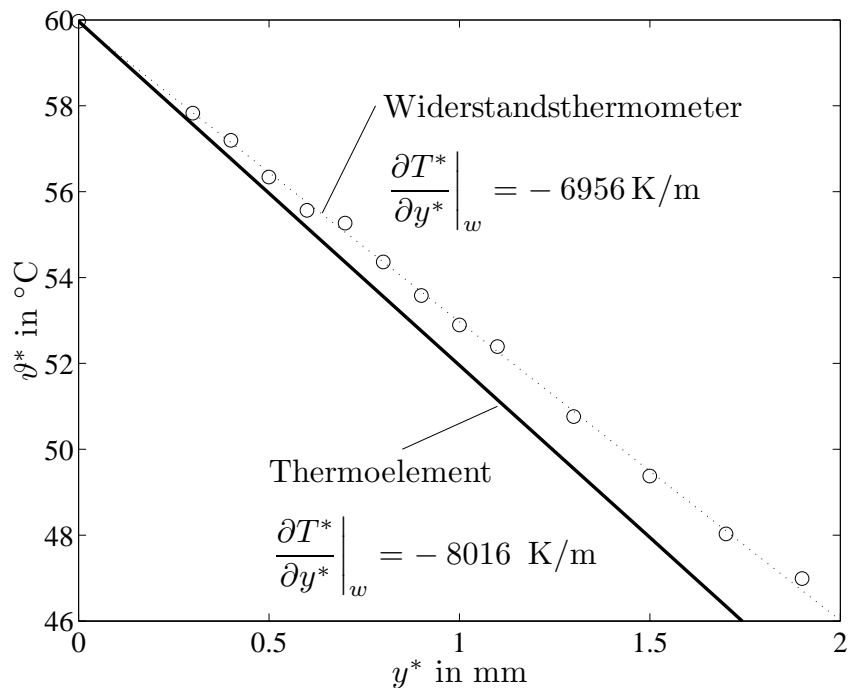


Abbildung 3.8: Temperaturprofil in unmittelbarer Wandnähe für $Gr_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ von Tsuji & Nagano (1988a), mit zwei unterschiedlichen Messmethoden ermittelt. Messung mit Thermoelement (—) und mit Widerstandsthermometer (o bzw. ...) ergeben Temperaturgradienten $\partial T^* / \partial y^* \Big|_w$, die sich um 12% unterscheiden.

3.2 Nußelt-Beziehung

Das hergeleitete Temperaturprofil kann auch zur Bestimmung einer Nußelt-Beziehung benutzt werden. Allerdings besitzt diese dann keine universelle Gültigkeit mehr, sondern ist abhängig von der Geometrie.

Der Ausgangspunkt ist das Temperaturprofil nach Gleichung (3.22), wobei die Definitionen von Θ^\times und y^\times bereits eingesetzt sind

$$\frac{T_w^* - T^*}{\left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w\right)^3} = C \cdot \ln \left(y^* \left[\frac{g^* \beta^*}{a^{*2}} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \right]^{1/4} \right) + D. \quad (3.31)$$

3.2.1 Vertikaler Kanal

Für den unendlich ausgedehnten Kanal, wie ihn Versteegh & Nieuwstadt (1999) benutzt haben, gilt nun $T_w^* - T^* = \Delta T^*/2$ bei $y^* = h^*/2$, also

$$\frac{\Delta T^*/2}{\left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w\right)^3} = C \cdot \ln \left(\frac{h^*}{2} \left[\frac{g^* \beta^*}{a^{*2}} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \right]^{1/4} \right) + D \quad (3.32)$$

Dies kann nun als Zusammenhang zwischen der Nußelt-Zahl und der Rayleigh-Zahl formuliert werden:

$$\left(\frac{\text{Ra Pr}}{\text{Nu}^3} \right)^{1/4} = 2C \cdot \ln \left(\frac{[\text{Ra Pr Nu}]^{1/4}}{2} \right) + 2D \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow \text{Nu} = \frac{(\text{Ra Pr})^{1/3}}{\left[2C \cdot \ln \left(\frac{[\text{Ra Pr Nu}]^{1/4}}{2} \right) + 2D \right]^{4/3}} = \text{Nu}_{Bez} \quad (3.34)$$

Hierbei handelt es sich um eine implizite Formulierung, die aber numerisch (z.B. mit MAPLE) relativ einfach gelöst werden kann. Abbildung 3.9 zeigt einen Vergleich der Nußelt-Zahlen aus den DNS-Rechnungen (Nu_{DNS}) und der Nußelt-Zahlen nach Gleichung (3.34), hier zur Unterscheidung mit Nu_{Bez} bezeichnet. Desweiteren ist der relative Fehler $r_{Nu} \equiv (\text{Nu}_{Bez} - \text{Nu}_{DNS})/\text{Nu}_{DNS}$ in Prozent in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl angegeben. Man erkennt, dass die Übereinstimmung mit steigender Rayleigh-Zahl zunimmt. Dies ist auch zu erwarten, da das benutzte Temperaturprofil für $\text{Ra} \rightarrow \infty$ hergeleitet wurde und die Konstanten C und D für diesen Fall extrapoliert wurden. Gleichung (3.34) stellt für den vertikalen Kanal bei hohen Rayleigh-Zahlen eine theoretisch begründete Alternative zu Potenzgesetzen dar.

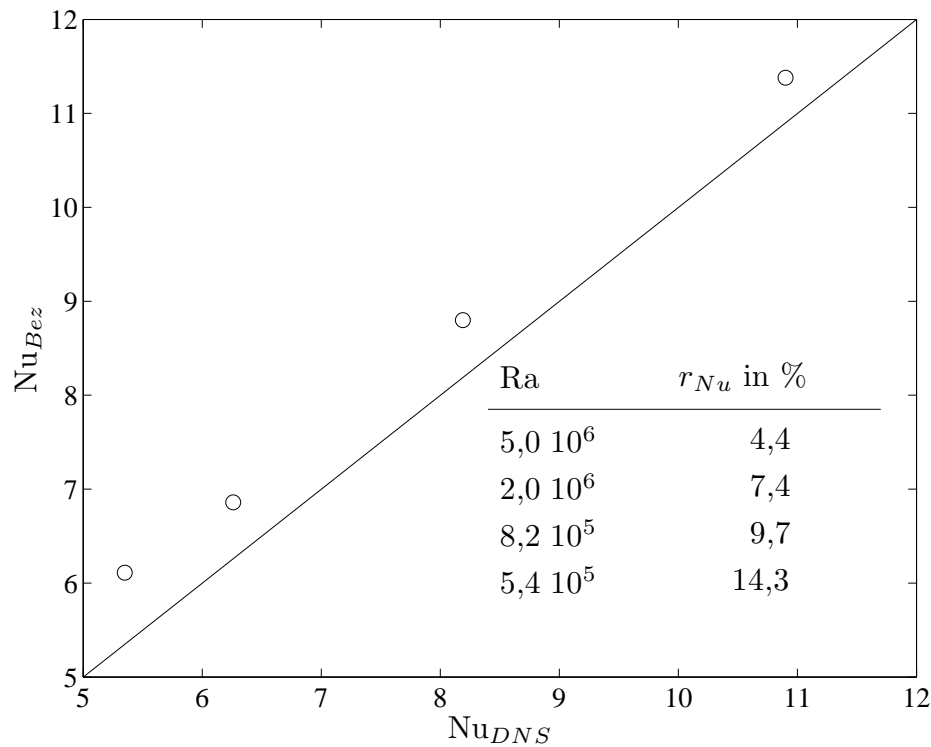


Abbildung 3.9: Vergleich der Nußelt-Zahlen Nu_{Bez} nach Gleichung (3.34) und Nu_{DNS} aus den Ergebnissen von Versteegh & Nieuwstadt (1999). Zusätzlich ist der relative Fehler r_{Nu} angegeben.

3.2.2 Beheizte vertikale Wand

Für eine beheizte Platte, wie sie z.B. von Tsuji & Nagano (1988a) untersucht wurde, ist das Vorgehen ein wenig komplizierter. Hier stellt sich das Problem, dass es keinen Abstand von der Wand gibt, an dem eine bekannte Temperatur herrscht. Zur Lösung kann man z.B. einen Wandabstand y_{80}^* einführen, für den $T_w^* - T^* = 0,8 \cdot (T_w^* - T_0^*)$ gilt. Hiermit erhält man (mit der Lauflänge x^* als charakteristische Geometrieabmessung):

$$Nu = \frac{(Ra_x Pr)^{1/3}}{\left[\frac{C}{0,8} \cdot \ln \left(\frac{y_{80}^*}{x^*} [Ra_x Pr Nu]^{1/4} \right) + \frac{D}{0,8} \right]^{4/3}} \quad (3.35)$$

Allerdings ist der Term y_{80}^*/x^* unbekannt. Setzt man hierfür und für die Nußelt-Zahl im Logarithmus (und nur hier) jeweils ein Potenzgesetz an

$$\frac{y_{80}^*}{x^*} = c_1 \cdot Ra_x^n \quad (3.36)$$

$$Nu = c_2 \cdot Ra_x^m, \quad (3.37)$$

so folgt:

$$Nu = \frac{(Ra_x Pr)^{1/3}}{\left[\frac{C}{0,8} \cdot \ln \left(c_1 c_2^{1/4} Ra_x^{n+(1+m)/4} Pr^{1/4} \right) + \frac{D}{0,8} \right]^{4/3}} \quad (3.38)$$

Hierbei wurde in den Gleichungen (3.36) und (3.37) keine Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl angenommen, da nur Messdaten für $\text{Pr} = 0,71$ vorliegen. Somit kann eine allgemeine Abhängigkeit der Nußelt-Zahl von der Prandtl-Zahl nicht angegeben werden. Es wird Pr deswegen im Folgenden als Konstante behandelt und die Nußelt-Korrelation gilt nur für $\text{Pr} = 0,71$. Umformen liefert

$$\text{Nu} = \frac{\text{Ra}_x^{1/3}}{\text{Pr}^{-1/3} \left[\underbrace{\frac{C}{0,8} \ln(c_1 c_2^{1/4} \text{Pr}^{1/4}) + \frac{D}{0,8}}_{\hat{D}\text{Pr}^{1/3}} + \underbrace{\frac{C}{0,8} \left(n + \frac{1+m}{4} \right)}_{\hat{C}\text{Pr}^{1/3}} \ln(\text{Ra}_x) \right]^{4/3}}. \quad (3.39)$$

Die unbekanntenen Konstanten können nun in den neuen Größen \hat{C} und \hat{D} zusammengefasst werden. Für eine konstante Prandtl-Zahl folgt damit

$$\text{Nu} = \frac{\text{Ra}_x^{1/3}}{\left[\hat{C} \cdot \ln(\text{Ra}_x) + \hat{D} \right]^{4/3}}, \quad (3.40)$$

wobei \hat{C} und \hat{D} anhand von Messdaten zu bestimmen sind und nicht, wie im Fall des vertikalen Kanals, aus dem Temperaturprofil folgen. Zur Ermittlung der neuen Konstanten wird Gleichung (3.40) umgeformt zu

$$\left(\frac{\text{Ra}_x}{\text{Nu}^3} \right)^{1/4} = \hat{C} \cdot \ln(\text{Ra}_x) + \hat{D}. \quad (3.41)$$

Abbildung 3.10 zeigt eine Auftragung nach oben gezeigter Umformung. Es ist zu erkennen, dass die Daten sehr stark streuen und dass keine klare Tendenz zu erkennen ist. Die Daten können eigentlich schon ausreichend mit Hilfe des Potenzgesetzes $\text{Nu} = 0,12 \cdot \text{Ra}_x^{1/3}$ (als gestrichelte Linie dargestellt) beschrieben werden, das von Tsuji & Nagano (1988a) angegeben wurde. Eine Ausgleichsgerade liefert

$$\hat{C} = -0,0126 \quad (3.42)$$

$$\hat{D} = 5,22. \quad (3.43)$$

Hiermit können die Daten ein wenig besser wiedergegeben werden. Es ist allerdings zu vermuten, dass für größere Rayleigh-Zahlen ein Trend deutlicher zu erkennen wäre. Für $\text{Ra}_x \rightarrow \infty$ sollten Abweichungen vom Potenzgesetz auftreten, die durch die logarithmische Korrektur richtig wiedergegeben werden sollten. Hierfür sind allerdings sehr genaue Messergebnisse bei größeren Rayleigh-Zahlen notwendig, die zur Zeit nicht zur Verfügung stehen. Mit neuen Daten sollte es auch möglich sein, die Konstanten \hat{C} und \hat{D} mit größerer Verlässlichkeit anzugeben.

3.3 Geschwindigkeitsprofil

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils muss (nur) die x -Impulsbilanz gelöst werden, die sich in Wandnähe zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \overline{u^{*'} v^{*'}} \right) + g^* \beta^* (T^* - T_0^*)$$

vereinfacht, vgl. Gleichung (3.3).

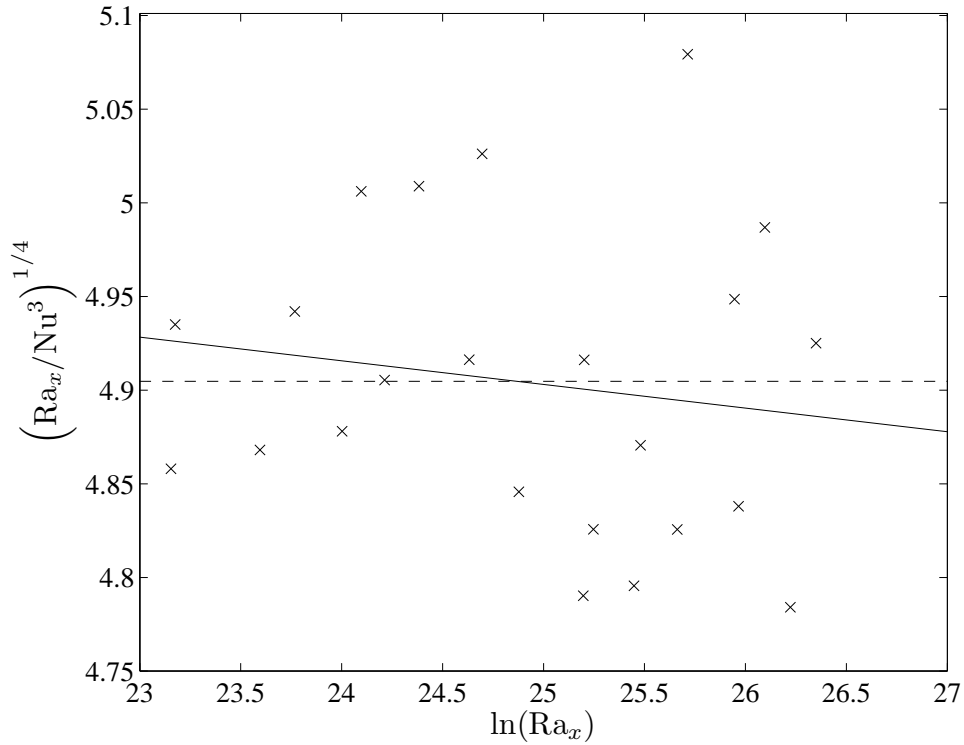


Abbildung 3.10: Nuelt-Daten von Tsuji & Nagano (1988a) für die vertikale Platte, aufgetragen nach Gleichung (3.41). Zusätzlich ist die Nuelt-Beziehung $Nu = 0,12 Ra^{1/3}$ (---) nach Tsuji & Nagano (1988a) und eine Ausgleichsgerade (—) nach Gleichung (3.41) mit $\hat{C} = -0,0126$ und $\hat{D} = 5,22$ dargestellt.

3.3.1 Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht

Unmittelbar an der Wand werden die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen durch die Wand gedämpft und somit verschwindet die Reynolds-Spannung ($-\overline{u^{*'}v^{*'}} = 0$). Es existiert eine rein viskose Unterschicht, in der das Geschwindigkeitsprofil direkt durch Integration der Impulsbilanzgleichung ermittelt werden kann. Zunächst wird Gleichung (3.3) entdimensioniert, wobei ($-\overline{u^{*'}v^{*'}} = 0$) und $\Theta_0^\times = (T_w^* - T_0^*)/T_c^*$ berücksichtigt werden

$$0 = \frac{\partial^2 U^\times}{\partial y^{\times 2}} - \Theta^\times + \Theta_0^\times. \quad (3.44)$$

Hierbei wurde die entdimensionierte Geschwindigkeit U^\times eingeführt, die mit der charakteristischen Geschwindigkeit u_c^* gebildet wird

$$U^\times \equiv \frac{u^*}{u_c^*} \quad \text{mit} \quad u_c^* \equiv \frac{g^* \beta^* T_c^{*3}}{\nu^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^{-2}. \quad (3.45)$$

Das Temperaturprofil in der viskosen Unterschicht ist nach Gleichung (3.25) bekannt ($\Theta^\times = y^\times$). Somit kann die Impulsbilanz durch zweifache Integration gelöst werden und man erhält:

$$U^\times = \frac{1}{6} y^{\times 3} - \frac{1}{2} \Theta_0^\times y^{\times 2} + \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w y^\times \quad (3.46)$$

Die hier angegebenen Profile für U^\times und Θ^\times in der viskosen Unterschicht, siehe die Gleichungen (3.46) und (3.25), sind auch in den Arbeiten von z.B. George & Capp (1979) und Henkes & Hoogendoorn (1990) zu finden. Allerdings unterscheiden sich die hier gezeigten Profile in der Überlappungsschicht deutlich von denen in anderen Arbeiten. Für die Temperatur steht mit Gleichung (3.26) bereits ein universelles Profil in der Überlappungsschicht zur Verfügung, für die Geschwindigkeit wird es im nächsten Abschnitt hergeleitet.

3.3.2 Geschwindigkeitsprofil in der Überlappungsschicht

Ein naheliegender Ansatz zur Ermittlung des Geschwindigkeitsprofils, wie er z.B. von George & Capp (1979) gewählt wurde, wäre ein asymptotisches Anpassen von (Geschwindigkeits-) Gradienten in der Überlappungsschicht. Wie allerdings in den Arbeiten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) bzw. Henkes & Hoogendoorn (1990) gezeigt wurde, führt dies zu keiner brauchbaren Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile.

Alternativ wird in dieser Arbeit die Impulsbilanz als Ausgangspunkt zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils in der Überlappungsschicht gewählt. Hierzu kann Gleichung (3.3), die sowohl in der Wand- als auch in der Außenschicht gültig ist, verwendet werden. Allerdings kann in der Überlappungsschicht der viskose Anteil der Schubspannung ($\nu^* \partial u^* / \partial y^*$) gegenüber dem turbulenten Anteil ($-\overline{u^{*'} v^{*'}}$) vernachlässigt werden kann. Es folgt also für die Impulsbilanz:

$$0 = -\frac{\overline{\partial u^{*'} v^{*'}}}{\partial y^*} + g^* \beta^* (T^* - T_0^*). \quad (3.47)$$

Da eine asymptotische Beschreibung der zeitgemittelten Geschwindigkeit gefunden werden soll, ist eine Turbulenzmodellierung zur Schließung von Gleichung (3.47) notwendig. Hier wird der weit verbreitete (z.B. in allen CFD-Codes benutzte) Ansatz der Wirbelviskosität ν_t^* benutzt, für den gilt

$$\nu_t^* \equiv \frac{-\overline{u^{*'} v^{*'}}}{\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)}. \quad (3.48)$$

Hiermit lässt sich Gleichung (3.47) „schließen“ und man erhält in entdimensionierter Form

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^\times} \left(\frac{\nu_t^*}{\nu^*} \cdot \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right) - \Theta^\times + \Theta_0^\times. \quad (3.49)$$

Um Gleichung (3.49) direkt lösen zu können und das gesuchte Geschwindigkeitsprofil zu erhalten, müssen $\Theta^\times(y^\times)$ und $\nu_t^*(y^\times)/\nu^*$ (als Funktion des Wandabstandes y^\times) bekannt sein. Der Ausdruck für das Temperaturprofil $\Theta^\times(y^\times)$ in der Überlappungsschicht wurde bereits in Abschnitt 3.1 mit Gleichung (3.26) zur Verfügung gestellt, so dass nur noch der Verlauf der Wirbelviskosität ν_t^* in Abhängigkeit vom Wandabstand gefunden werden muss.

Die Wirbelviskosität $\nu_t^*(y^\times)$ kann allgemein mit Hilfe der turbulenten Prandtl-Zahl $\sigma_t = \nu_t^*/a_t^*$ mit der turbulenten Temperaturleitfähigkeit a_t^* verknüpft werden. Es gilt allgemein:

$$\frac{\nu_t^*}{\nu^*} = \frac{a_t^*}{a^*} \cdot \frac{\sigma_t}{\text{Pr}} \quad (3.50)$$

Hierbei kann die turbulente Prandtl-Zahl σ_t noch eine Funktion des Wandabstands sein. Somit hätte man nur die Unbekannte ν_t^*/ν^* durch eine neue Unbekannte σ_t ersetzt und das Problem lediglich verlagert. Abbildung 3.11 zeigt den Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl als Funktion des Wandabstands beispielhaft für $\text{Ra} = 5,0 \cdot 10^6$ von Versteegh & Nieuwstadt (1999).

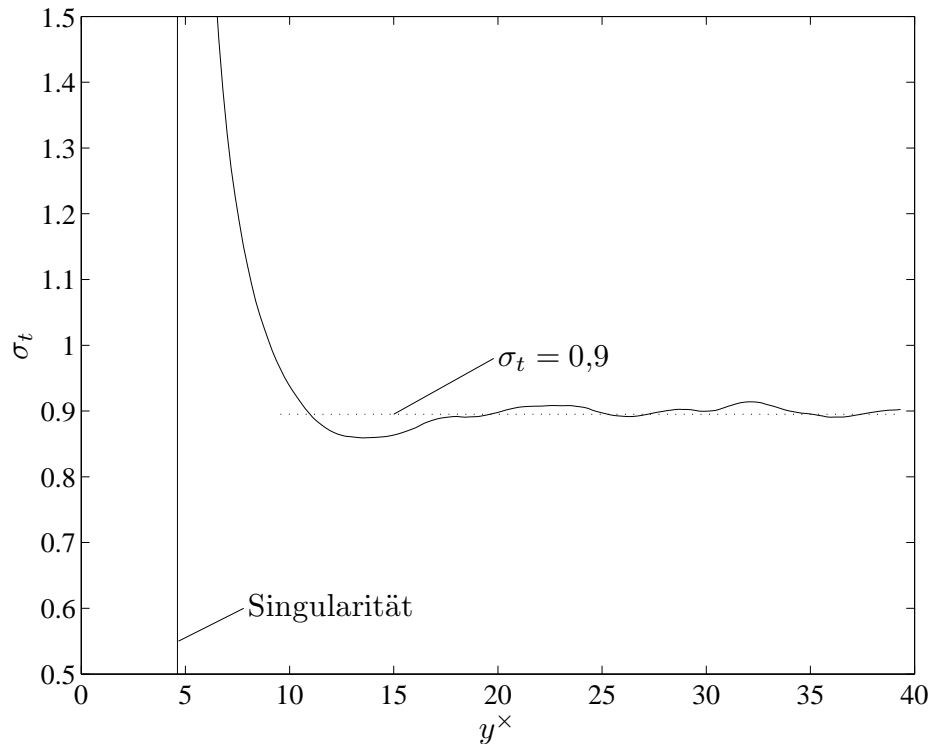


Abbildung 3.11: Turbulente Prandtl-Zahl σ_t , bestimmt anhand der DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999), $\text{Ra} = 5,0 \cdot 10^6$

Experimentelle Messdaten, z.B. von Tsuji & Nagano (1988a), können hier nicht zur Bestimmung von σ_t herangezogen werden, da die Messungenauigkeiten in den Gradienten zu hoch sind. Man erkennt, dass für $y^\times > 10$ die turbulente Prandtl-Zahl nahezu konstant ist und wie im Fall von erzwungener Konvektion $\sigma_t = 0,9$ gilt. Das Auftreten der Singularität³ für $y^\times \approx 5$ bereitet keine Schwierigkeiten, da es nicht im Bereich der Überlappungsschicht liegt.

Mit der Definition der turbulenten Temperaturleitfähigkeit $a_t^* = -\overline{v'^*T'^*}/(\partial T^*/\partial y^*)$ und der Annahme, dass $a_t^* \gg a^*$ in der Überlappungsschicht gilt, kann die Energiegleichung (3.6) in entdimensionierter Form geschrieben werden zu

$$\frac{a_t^*}{a^*} \cdot \frac{\partial \Theta^\times}{\partial y^\times} = 1. \quad (3.51)$$

³Der Geschwindigkeitsgradient hat im Maximum die Ableitung Null, was zur Singularität führt.

Nach Gleichung (3.21) gilt

$$\frac{\partial \Theta^\times}{\partial y^\times} = \frac{C}{y^\times} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^\times}{C} \cdot \frac{\partial \Theta^\times}{\partial y^\times} = 1$$

und man erhält durch Vergleich sofort $a_t^*/a^* = y^\times/C$. Somit kann nach Gleichung (3.50) das Verhältnis von Wirbelviskosität zu molekularer Viskosität ausgedrückt werden als

$$\frac{\nu_t^*}{\nu^*} = \frac{\sigma_t y^\times}{C \text{Pr}}. \quad (3.52)$$

Setzt man nun Gleichung (3.52) für die Wirbelviskosität und Gleichung (3.26) für das logarithmische Temperaturprofil in die Impulsbilanz (3.49) ein, so erhält man für die Überlappungsschicht

$$\frac{\partial}{\partial y^\times} \left(\underbrace{\frac{\sigma_t y^\times}{C \text{Pr}}}_{\nu_t^*/\nu^*} \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right) = \underbrace{C \ln(y^\times) + D}_{\Theta^\times} - \Theta_0^\times. \quad (3.53)$$

Da in dieser Differentialgleichung alle Terme von y^\times abhängen, folgt das gesuchte Geschwindigkeitsprofil für die Überlappungsschicht durch zweifache Integration:

$$U^\times = \frac{C \text{Pr}}{\sigma_t} \cdot y^\times \cdot \left(C [\ln(y^\times) - 2] + D - \Theta_0^\times \right) + E \ln(y^\times) + F \quad (3.54)$$

Obwohl E und F konstant bezüglich y^\times sind, können sie trotzdem von den Parametern Θ_0^\times und $\partial U^\times / \partial y^\times|_w$ abhängen, welche explizit im Geschwindigkeitsprofil nach Gleichung (3.46) in der viskosen Unterschicht auftreten. Da Θ_0^\times schon in Gleichung (3.54) vorkommt, wird zunächst angenommen, dass E und F linear von $\partial U^\times / \partial y^\times|_w$ abhängen, also

$$E = e_1 \cdot \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w + e_2 \quad (3.55)$$

$$F = f_1 \cdot \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w + f_2, \quad (3.56)$$

was im folgenden durch Vergleich mit Messdaten zu überprüfen ist.

Cheesewright (1986), wie von Henkes & Hoogendoorn (1990) zitiert, hat ebenfalls ein logarithmisches Temperaturprofil und ein ähnliches Geschwindigkeitsprofil wie Gleichung (3.54) vorgeschlagen. Allerdings wurde eine Entdimensionierung mit anderen Bezugsgrößen gewählt und Henkes & Hoogendoorn (1990) fanden nur eine unzureichende Übereinstimmung mit ihren Ergebnissen.

3.3.3 Vergleich mit Messdaten

Um experimentelle Daten benutzen zu können, muss erneut berücksichtigt werden, dass sich die Stoffwerte im Strömungsfeld verändern. Dazu werden die Bezugsgrößen wieder entsprechend Gleichung (3.28) und (3.29) gebildet und es wird für die Überlappungsschicht

eine konstante kinematische Viskosität ν_0^* angenommen. In der Wandschicht liegt jedoch annähernd die kinematische Viskosität bei Wandtemperatur vor, so dass in diesem Bereich die Transformation rückgängig gemacht werden muss. Das Geschwindigkeitsprofil (3.46) in der viskosen Unterschicht wird bei variablen Stoffwerten somit beschrieben durch (zu Details siehe Anhang B.2):

$$U^\times = \frac{\nu_0^*}{\nu_w^*} \cdot \left(\frac{1}{6} \frac{a_0^*}{a_w^*} y^{\times 3} - \frac{1}{2} \Theta_0^\times y^{\times 2} \right) + \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w \cdot y^\times. \quad (3.57)$$

Um einen universellen, asymptotischen Ausdruck für das Geschwindigkeitsprofil in der Überlappungsschicht zu erhalten, müssen die angegebenen Funktionen für E und F überprüft und die darin enthaltenen Konstanten bestimmt werden. Dazu werden E und F in Gleichung (3.54) für verschiedene Geschwindigkeitsprofile so gewählt, dass sie die Messdaten möglichst gut wiedergeben. Anschließend erfolgt eine Auftragung von E und F über dem korrigierten Geschwindigkeitswandgradienten $\nu_w^*/\nu_0^* \cdot \partial U^\times / \partial y^\times|_w$ für die ausgewählten Geschwindigkeitsprofile. Man erhält somit folgende Ausgleichsgeraden

$$E = 0,49 \cdot \frac{\nu_w}{\nu_0} \cdot \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w - 2,27 \quad (3.58)$$

$$F = 1,28 \cdot \frac{\nu_w}{\nu_0} \cdot \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w + 1,28, \quad (3.59)$$

wie in Abbildung 3.12 zu erkennen ist.

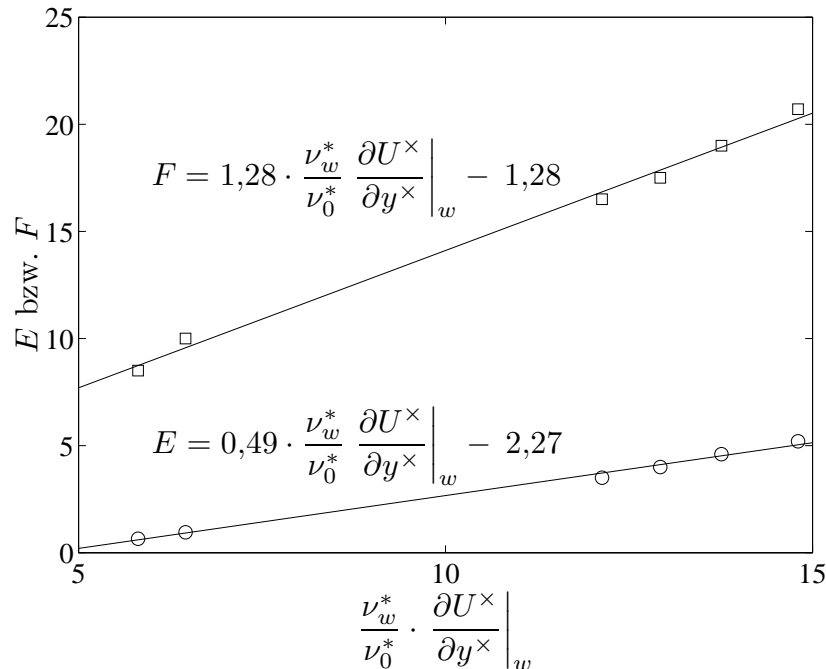


Abbildung 3.12: E und F als Funktion des entdimensionierten Wandgeschwindigkeitsgradientens. Die Werte wurden anhand der Profile von Tsuji & Nagano (1988a) und Versteegh & Nieuwstadt (1999) ermittelt.

Abbildung 3.13 zeigt Messdaten für die Fälle beheizte Platte und Kavität mit unterschiedlich temperierten Seitenwänden. Mit der angegebenen Entdimensionierung und E bzw. F nach den Gleichungen (3.58) bzw. (3.59) ist eine gute Übereinstimmung der Messdaten mit dem Geschwindigkeitsprofil (3.54) in der Überlappungsschicht festzustellen. Die Profile für die niedrigen Rayleigh-Zahlen weichen vom Geschwindigkeitsprofil ab, wie es auch schon beim Temperaturprofil der Fall war. Es ist somit zu vermuten, dass die im Experiment vorliegenden Rayleigh-Zahlen asymptotisch nicht groß genug sind und somit von einer Theorie für $Ra \rightarrow \infty$ nicht ausreichend beschrieben werden können. Das Geschwindigkeitsprofil von Cheesewright (1968) weicht ebenfalls vom asymptotischen Profil ab, was ein wenig verwunderlich ist, da hier eine relativ hohe Grashof-Zahl vorliegt. Es handelt sich hierbei aber um eine Messung aus dem Jahr 1968, so dass fraglich ist, ob die zur Entdimensionierung notwendigen Wandgradienten eine ausreichende Genauigkeit aufweisen. In der viskosen Unterschicht ist bei allen Profilen eine sehr gute Übereinstimmung mit Gleichung (3.57) festzustellen.

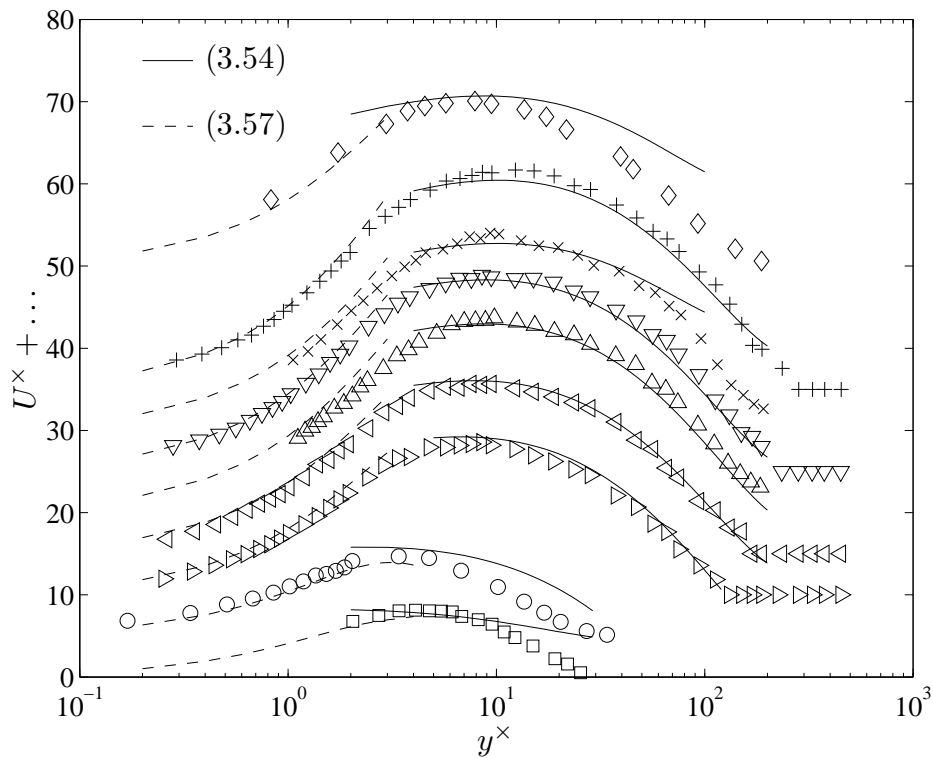


Abbildung 3.13: Experimentelle Geschwindigkeitsprofile von Betts & Bokhari (2000) für $Ra = 1,43 \cdot 10^6$ (\square), von Ampofo & Karayiannis (2003) für $Ra = 1,59 \cdot 10^9$ (\circ), von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 1,55 \cdot 10^{10}$ (\triangleright), $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ (\triangleleft), $Gr_x = 7,99 \cdot 10^{10}$ (\triangle), $Gr_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ (∇), $Gr_x = 8,99 \cdot 10^{10}$ (\times), $Gr_x = 17,97 \cdot 10^{10}$ ($+$) und von Cheesewright (1968) für $Gr_x = 8,65 \cdot 10^{10}$ (\diamond). Um ein Überlappen der Profile zu vermeiden, wurde aufeinander folgende Datensätze jeweils um fünf Geschwindigkeitseinheiten verschoben.

Für DNS-Daten entfallen die Korrekturfaktoren, da hierbei aufgrund der Verwendung von idealen (numerischen) Fluiden keine Stoffwertänderungen auftreten. In Abbildung 3.14 sind die DNS-Geschwindigkeitsprofile von Versteegh & Nieuwstadt (1999) dargestellt. Das Profil für die viskose Unterschicht (3.46) beschreibt alle vorliegenden Daten-

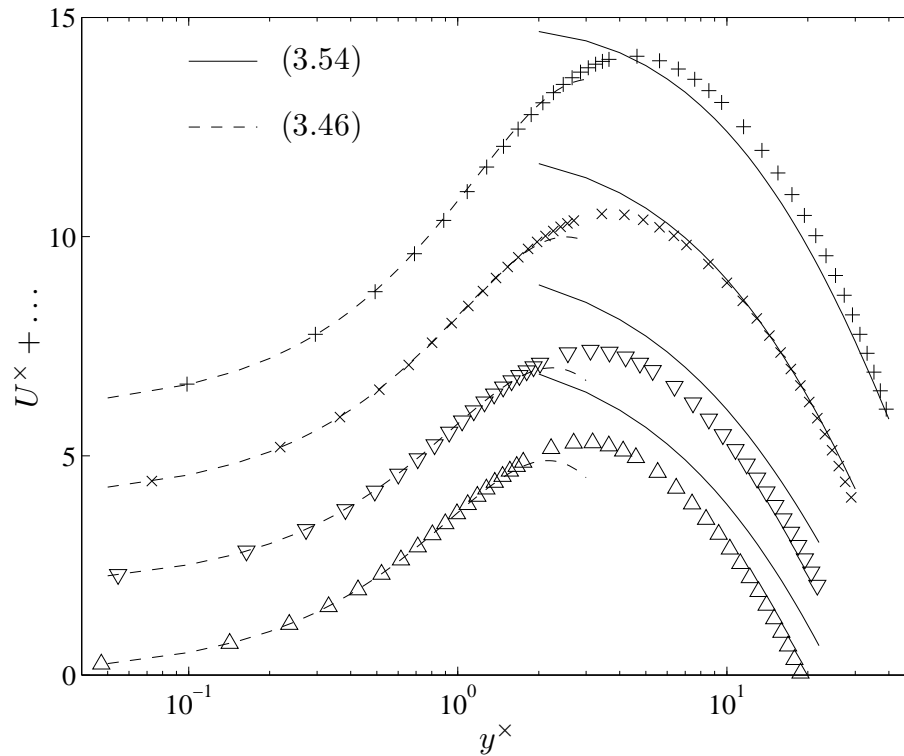


Abbildung 3.14: DNS-Geschwindigkeitsdaten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für den unendlichen vertikalen Kanal: $Ra = 5,4 \cdot 10^5$ (\triangle), $Ra = 8,2 \cdot 10^5$ (∇ , um 2 verschoben), $Ra = 2,0 \cdot 10^6$ (\times , um 4 verschoben) und $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ ($+$, um 6 verschoben).

sätze hervorragend. In der Überlappungsschicht treten für kleine Rayleigh-Zahlen Abweichungen von Gleichung (3.54) auf. Dies ist auch zu erwarten, da die Ergebnisse der Asymptotik für $Ra \rightarrow \infty$ gültig sind. Für die zwei größeren Rayleigh-Zahlen ist Gleichung (3.54) jedoch eine adäquate Beschreibung.

Da die Datenbasis zur natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden relativ klein ist, wären zusätzliche Datensätze wünschenswert. Allerdings sollten diese von hoher Güte sein, um sie verwenden zu können. Eine aktuelle LES-Studie (*large eddy simulation*) von Yan & Nilsson (2005) scheint dies auf den ersten Blick zu erfüllen. Es werden Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile zur Verfügung gestellt, die für eine vertikale beheizte Platte ermittelt wurden, analog zum Aufbau von Tsuji & Nagano (1988a). Allerdings wird in dieser Arbeit eine modifizierte Wandfunktion zur Bestimmung der Temperatur benutzt, so dass der kritische Bereich der Strömung *nicht* simuliert wurde. In der Studie werden die Profile mit den Daten von Tsuji & Nagano (1988a) verglichen und es kann lediglich eine ausreichende Übereinstimmung festgestellt werden. Die Profile zeigen z.T. einen nicht zu erwartenden Verlauf in Wandnähe. Da die Qualität der Daten aufgrund der verwendeten Wandfunktionen fraglich ist und die Studie keinen neuen Rayleigh-Zahlen-Bereich erschließt, werden diese Daten hier nicht zur weiteren Überprüfung der Profile herangezogen.

In Tabelle 3.2 sind die ermittelten Funktionen zur Beschreibung des wandnahen Bereiches bei natürlicher Konvektion an vertikalen Wänden mit den zugehörigen Konstanten noch einmal zusammengefasst.

Tabelle 3.2: Universelle Funktionen für die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile in der viskosen Unterschicht und der Überlappungsschicht für die turbulente natürliche Konvektion (konstante Stoffwerte).

Schicht	Temperatur Θ^\times	Geschwindigkeit U^\times
viskose Unterschicht	y^\times	$\frac{1}{6}y^{\times 3} - \frac{1}{2}\Theta_0^\times y^{\times 2} + \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big _w y^\times$
Überlappungsschicht (Wandfunktionen)	$C \ln(y^\times) + D$	$\frac{CPr}{\sigma_t} \cdot y^\times \cdot \left(C[\ln(y^\times) - 2] + D - \Theta_0^\times \right) + E \ln(y^\times) + F$

mit:

C	D	E	F
0,427	1,93	$0,49 \cdot \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big _w - 2,27$	$1,28 \cdot \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big _w + 1,28$

3.4 Wandfunktionen von George und Capp

Die Arbeit von George & Capp (1979) ist das „Standardwerk“ zur natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden, siehe z.B. Gersten & Herwig (1992), Schlichting & Gersten (2000) und Müller & Ehrhard (1999), obwohl schon Henkes & Hoogendoorn (1990) und später Versteegh & Nieuwstadt (1999) Abweichungen bei den Geschwindigkeitsprofilen festgestellt haben. Da George & Capp (1979) für den Bereich der viskosen Unterschicht prinzipiell die gleichen Funktionen angeben wie in den Gleichungen (3.25) und (3.46), sollen im folgenden Abschnitt nur die Profile in der Überlappungsschicht verglichen werden, da sich diese deutlich voneinander unterscheiden.

George & Capp (1979) haben den Wandbereich bei natürlicher Konvektion ebenfalls in eine Wandschicht (molekularer und turbulenter Transport) und eine Außenschicht (nur turbulenter Transport) aufgeteilt. Der Hauptunterschied ist jedoch, dass sie für beide Schichten individuelle charakteristische Temperaturen (T_o^* und T_i^*), Geschwindigkeiten (u_o^* und u_i^*) und Bezugslängen (l_o^* , die zunächst undefiniert bleibt, und l_i^*) eingeführt haben. Es wird hier die Notation von George & Capp (1979) beibehalten, in der der Index i für die *inner layer*, also die Wandschicht, und der Index o für die *outer layer*, also die Außenschicht steht:

$$T_o^* \equiv \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^* l_o^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \right)^{1/3} \quad (3.60)$$

$$T_i^* \equiv \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \right)^3 \Big|_w^{1/4} \quad (3.61)$$

$$u_o^* \equiv \left(a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w g^* \beta^* l_o^* \right)^{1/3} \quad (3.62)$$

$$u_i^* \equiv \left(a^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w g^* \beta^* \right)^{1/4} \quad (3.63)$$

$$l_i^* \equiv \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w^{-1} \right)^{1/4} \quad (3.64)$$

In den vorangegangenen Abschnitten zur Herleitung der universellen Profile wurde nur *eine* Bezugstemperatur T_c^* nach Gleichung (3.7) und nur *eine* Bezugsgeschwindigkeit u_c^* nach Gleichung (3.45) eingeführt. Diese Größen sind in der Wand- und in der Außenschicht gültig, da weder das Temperatur- noch das Geschwindigkeitsfeld Unstetigkeiten aufweisen. Lediglich für den Wandabstand wurden für die Wand- bzw. Außenschicht unterschiedliche Bezugsgrößen eingeführt, da hier eine Singularität an der Wand auftritt. Diese unterschiedliche Wahl der Bezugsgrößen führt letztendlich zu unterschiedlichen Profilen, wie für das Temperaturprofil beispielhaft gezeigt werden soll.

3.4.1 Temperaturprofil

Das Temperaturprofil wird, ähnlich wie in Abschnitt 3.1, durch Anpassen der Gradienten in der Überlappungsschicht ermittelt. In den Koordinaten der Außenschicht gilt

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\partial \left(\frac{T^* - T_w^*}{T_o} \right)}{\partial \left(\frac{y^*}{l_o^*} \right)} \cdot \frac{T_o^*}{l_o^*} = \frac{\partial \Theta_o}{\partial y_o} \cdot \frac{T_o^*}{l_o^*}. \quad (3.65)$$

Hierbei gilt $\Theta_o = (T^* - T_w^*)/T_o$ und $y_o = y^*/l_o^*$. Für die Wandschicht kann der Temperaturgradient umgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\partial \left(\frac{T^* - T_0^*}{T_i} \right)}{\partial \left(\frac{y^*}{l_i^*} \right)} \cdot \frac{T_i^*}{l_i^*} = \frac{\partial \Theta_i}{\partial y_i} \cdot \frac{T_i^*}{l_i^*} \quad (3.66)$$

mit $\Theta_i = (T^* - T_0^*)/T_i$ und $y_i = y^*/l_i^*$. Gleichsetzen von (3.65) und (3.66) und anschließendes Umformen liefert

$$y_o^{4/3} \cdot \frac{\partial \Theta_o}{\partial y_o} = y_i^{4/3} \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial y_i}. \quad (3.67)$$

Da für $Ra \rightarrow \infty$ das Verhältnis der Bezugslängen gegen Null strebt, kann Gleichung (3.67) nur erfüllt sein, wenn beide Seiten konstant sind. Somit folgt dann z.B. für die rechte Seite, wobei ein Einfluss der Prandtl-Zahl angenommen wird

$$y_i^{4/3} \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial y_i} = const \quad \Rightarrow \quad \Theta_i = K_2 \cdot y_i^{-1/3} + A(\text{Pr}). \quad (3.68)$$

George & Capp (1979) erhalten durch die Wahl von unterschiedlichen Bezugsgrößen in Wand- und Außenschicht also ein Potenzgesetz und kein logarithmisches Profil. Anhand von Messdaten soll nun bewertet werden, welcher Ansatz (logarithmischer Verlauf oder Potenzgesetz) besser zur Beschreibung der Temperaturprofile bei natürlicher Konvektion geeignet ist. Zunächst kann durch Vergleich von Gleichung (3.68) mit (3.7) und (3.12) gezeigt werden, dass Gleichung (3.68) in Θ^\times - y^\times Koordinaten geschrieben werden kann

$$\Theta^\times = K_2 \cdot y^{\times-1/3} + A(\text{Pr}). \quad (3.69)$$

Abbildung 3.15 zeigt beispielhaft zwei ausgewählte Temperaturprofile von Tsuji & Nagano (1988a). Da zur Zeit, als George & Capp (1979) ihre Arbeit veröffentlicht haben, nur wenige Datensätze zur Verfügung standen, konnten sie keine verlässlichen Werte für die Konstanten in Gleichung (3.69) angeben. Es werden deshalb $K_2 = -4,2$ und $A = 5,0$ in Abbildung 3.15 benutzt, wie sie von Versteegh & Nieuwstadt (1999) angegeben werden. Diese wurden bestimmt, indem sie die von George & Capp (1979) vorgeschlagenen Profile an ihre DNS-Daten angepasst haben. Man erkennt, dass Gleichung (3.69) mit den Konstanten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) von den Messdaten abweicht. Gleichung (3.26) hingegen gibt die Messdaten deutlich besser wieder.

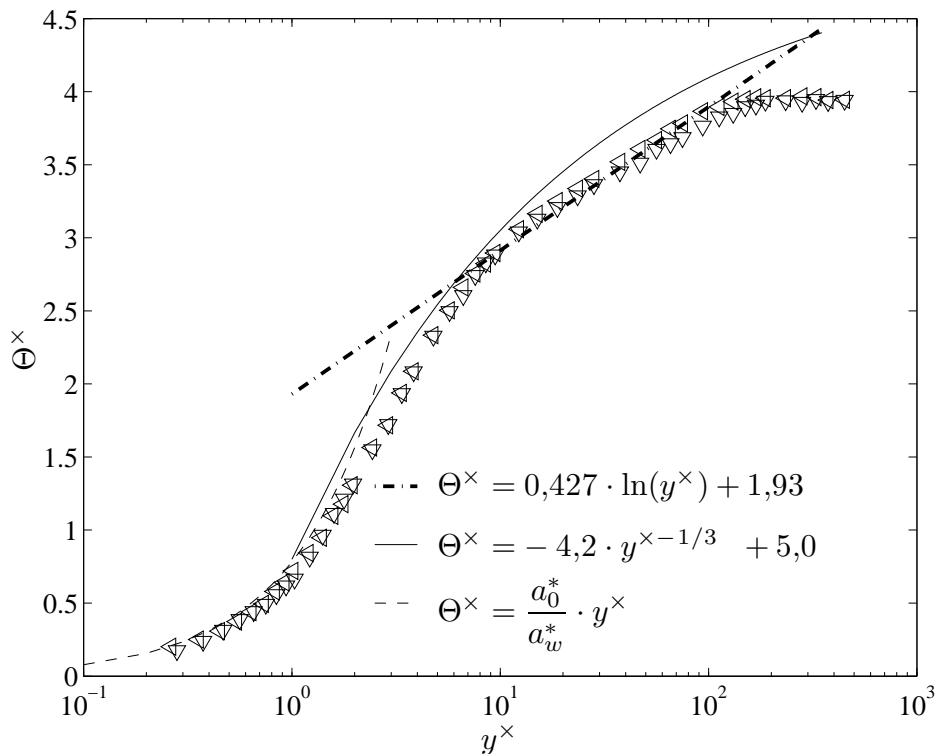


Abbildung 3.15: Temperatur-Wandfunktion ((3.69), —) nach George & Capp (1979) mit den Konstanten aus Versteegh & Nieuwstadt (1999); zum Vergleich die Daten von Tsuji & Nagano (1988a) für $\text{Gr}_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ (\triangleleft) und $\text{Gr}_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ (∇). Zusätzlich ist das Profil der viskosen Unterschicht angegeben (---) und als Alternative das neu hergeleitete Temperaturprofil (- · -) nach Gleichung (3.22).

3.4.2 Geschwindigkeitsprofil

Das Geschwindigkeitsprofil wurde von George & Capp (1979) ebenfalls durch ein Anpassen der Gradienten in der Überlappungsschicht bestimmt. Man erhält als Bedingung für die Gradienten

$$y_o^{2/3} \cdot \frac{\partial U_o}{\partial y_o} = y_i^{2/3} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial y_i} = \text{const.} \quad (3.70)$$

Eine Integration liefert ein Potenzgesetz für das Geschwindigkeitsprofil

$$U_i = K_1 \cdot y_i^{1/3} + B(\text{Pr}). \quad (3.71)$$

Durch ein Umschreiben in U^\times - y^\times Koordinaten zur besseren Vergleichbarkeit erhält man

$$\frac{U^\times}{\text{Pr}} = K_1 \cdot y^{\times 1/3} + B(\text{Pr}). \quad (3.72)$$

Gleichung (3.72) unterscheidet sich stark von Gleichung (3.54). Da K_1 in der Arbeit von George & Capp (1979) eine Konstante ist ($K_1 = 27$) und nur Fluide mit gleicher Prandtl-Zahl (also: $B(\text{Pr} = 0,71) = \text{const}$) betrachtet werden, gibt es nur *eine* Funktion, die *alle* vorliegenden Geschwindigkeitsprofile beschreiben sollte. Anhand von Abbildung 3.13 ist allerdings schon zu erkennen, dass die Geschwindigkeitsprofile keine universelle Form haben und somit *nicht* nur als Funktion des Wandabstandes beschrieben werden können. Dies wird bereits am Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht deutlich, bei dem zusätzlich zum Wandabstand noch der Geschwindigkeitswandgradient und die Temperaturdifferenz eine Rolle spielen. Wenn diese Größen bereits in der viskosen Unterschicht von Bedeutung sind, so wäre es erstaunlich, wenn sie in der Überlappungsschicht keinen Einfluss mehr hätten und hier ein universelles Profil vorliegen würde. Diese Argumentation soll anhand von Abbildung 3.16 verdeutlicht werden, in der beispielhaft zwei (nicht verschobene) Geschwindigkeitsprofile von Tsuji & Nagano (1988a) dargestellt sind.

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Messdaten nicht übereinander liegen, was nach der Theorie von George & Capp (1979) der Fall sein sollte. Außerdem beschreibt die von George & Capp (1979) angegebene Wandfunktion das Geschwindigkeitsprofil (näherungsweise) nur im Bereich zwischen Wand und Geschwindigkeitsmaximum, also für $0,1 < y^\times < 3$. Dieser Bereich kann aber schon sehr gut mit Hilfe der Gleichung (3.46) für die viskose Unterschicht beschrieben werden. Die neue Wandfunktion (3.54) hingegen beschreibt das Geschwindigkeitsprofil für $3 < y^\times < 200$ sehr gut.

Somit lässt sich feststellen, dass die neuen Wandfunktionen nach Gleichung (3.26) und (3.54) die vorhandenen Messdaten deutlich besser wiedergeben als die Gleichungen (3.69) und (3.72) von George & Capp (1979). Vor allem das neue Geschwindigkeitsprofil ermöglicht eine Beschreibung der Strömung „rechts“ vom Maximum, was mit der Theorie von George & Capp (1979) nicht möglich ist.

Im folgenden Abschnitt wird ein *blending* vorgestellt, dass die Übereinstimmung auch in der sog. *buffer layer* verbessert und somit die Profile noch besser wiedergibt. Um „fair“ gegenüber der Arbeit von George & Capp (1979) zu bleiben, wurden die *blending*-Profile in diesem Abschnitt noch nicht benutzt, sondern lediglich die Profile aus der viskosen Unterschicht und der Überlappungsschicht.

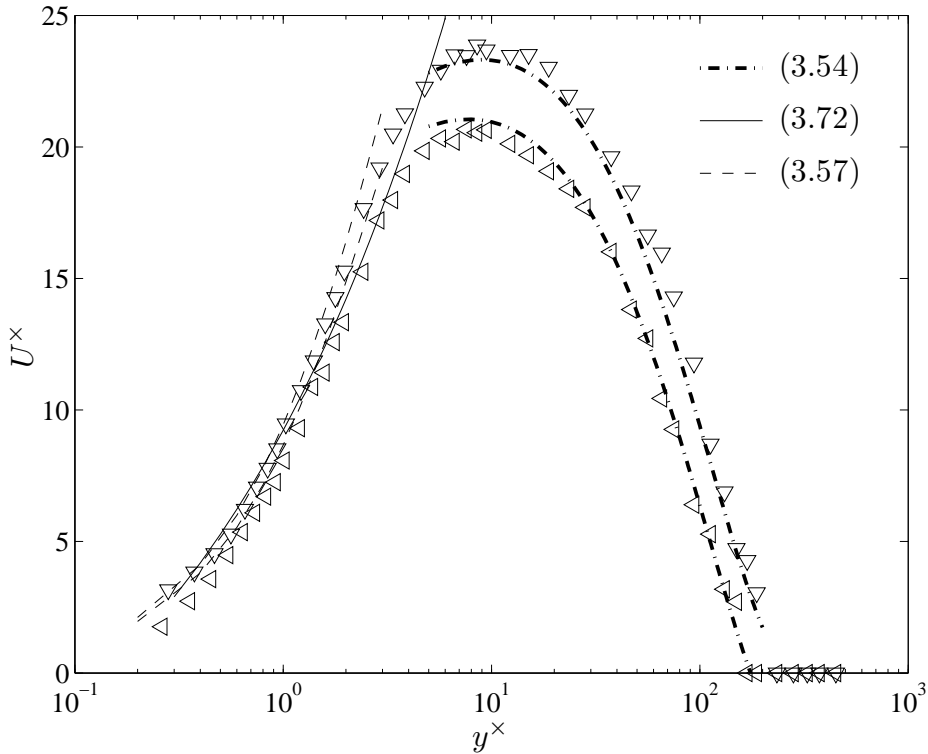


Abbildung 3.16: Geschwindigkeits-Wandfunktion nach George & Capp (1979) verglichen mit den Daten von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ (\triangleleft) und $Gr_x = 8,44 \cdot 10^{10}$ (∇). Ebenfalls dargestellt: das Geschwindigkeitsprofil nach Gleichung (3.54).

3.5 Blending für die Buffer Layer

Bisher wurden die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile für die viskose Unterschicht und die Überlappungsschicht angegeben. Es konnte eine gute Übereinstimmung mit DNS-Daten und Messergebnissen festgestellt werden und es wurde gezeigt, dass die neuen Profile die Daten besser wiedergeben als die Theorie von George & Capp (1979). Ein kleiner Schwachpunkt ist jedoch noch, dass im Bereich zwischen viskoser Unterschicht und Überlappungsschicht, der häufig als *buffer layer* bezeichnet wird, die neuen Profile die Daten nur schlecht wiedergeben, wie in Abbildung 3.17 anhand des Temperaturprofils von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ gezeigt wird.

Dies kann durch ein „Blenden“ (*blending*) umgangen werden. Ein *blending* liefert zwar keine neuen Erkenntnisse über das Strömungs- bzw. Temperaturfeld, d.h. man erhält kein theoretisch begründetes Profil, das im gesamten wandnahen Bereich gültig ist. Es ist vielmehr ein Hilfsmittel, um zwei bekannte Profile (in der viskosen Unterschicht und der Überlappungsschicht) glatt miteinander zu verbinden, siehe auch Churchill & Usagi (1973).

Ein *blending* für das Temperaturprofil, das sowohl in der viskosen Unterschicht als auch in der *buffer layer* und der Überlappungsschicht gültig ist, lautet

$$\Theta^\times(y^\times) \equiv \left(\frac{1}{\Theta_{visc}^{\times 3}} + \frac{1}{\Theta_{log}^{\times 3}} \right)^{-1/3} \quad (3.73)$$

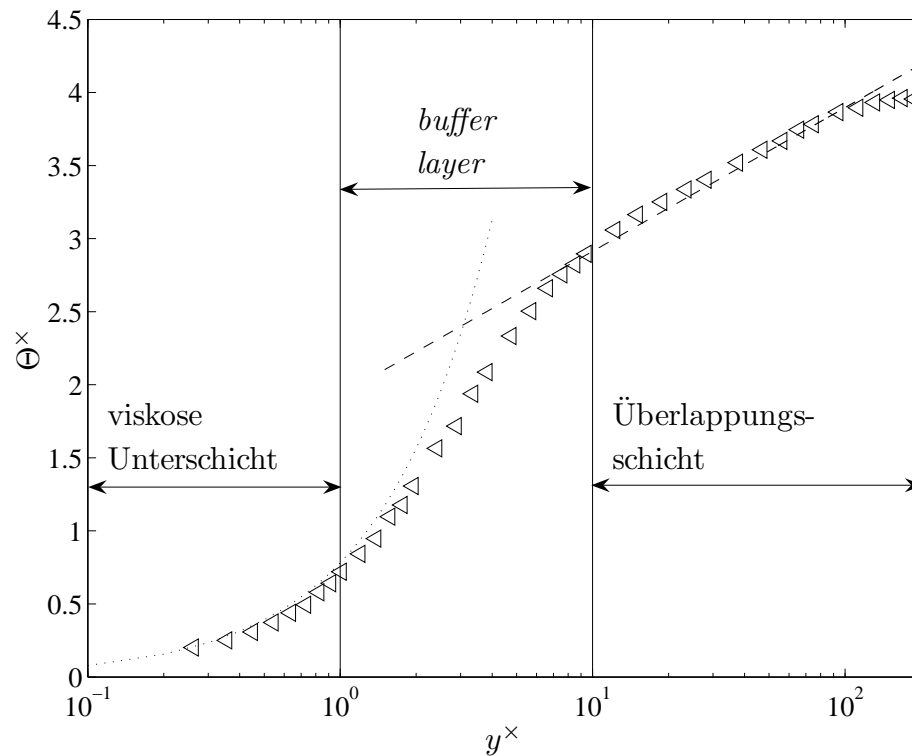


Abbildung 3.17: Im Bereich der *buffer layer* (Bereich zwischen viskoser Unterschicht und Überlappungsschicht) treten Abweichungen zwischen Messdaten und den hergeleiteten Profilen auf, was hier anhand des Temperaturprofils von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ gezeigt werden soll.

mit $\Theta_{visc}^x = a_0^*/a_w^* y^x$ nach Gleichung (3.30) und $\Theta_{log}^x = C \ln(y^x) + D$ nach Gleichung (3.22).

Ein Geschwindigkeitsprofil, das ebenfalls über den gesamten wandnahen Bereich gültig ist, erhält man mit

$$U^x(y^x) \equiv \left(\frac{1}{U_{visc}^{x6}} + \frac{1}{U_{log}^{x6}} \right)^{-1/6}. \quad (3.74)$$

Hierbei ist U_{visc}^x das Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht nach Gleichung (3.57) und U_{log}^x das Geschwindigkeitsprofil in der Überlappungsschicht nach Gleichung (3.54).

Die neuen Profile, die auch die *buffer layer* beschreiben, sind in Abbildung 3.18 zusammen mit den Daten von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ dargestellt. Man erkennt an diesem Beispiel, dass mit dem *blending* sowohl das Temperatur- als auch das Geschwindigkeitsprofil für $0 \leq y^x < 200$ wiedergegeben werden können.⁴

⁴Die Abweichungen zwischen Messdaten und universellem Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht ist vermutlich durch Messfehler im Geschwindigkeitsgradienten zu erklären. Hierbei handelt es sich um keinen Effekt des *blendings*.

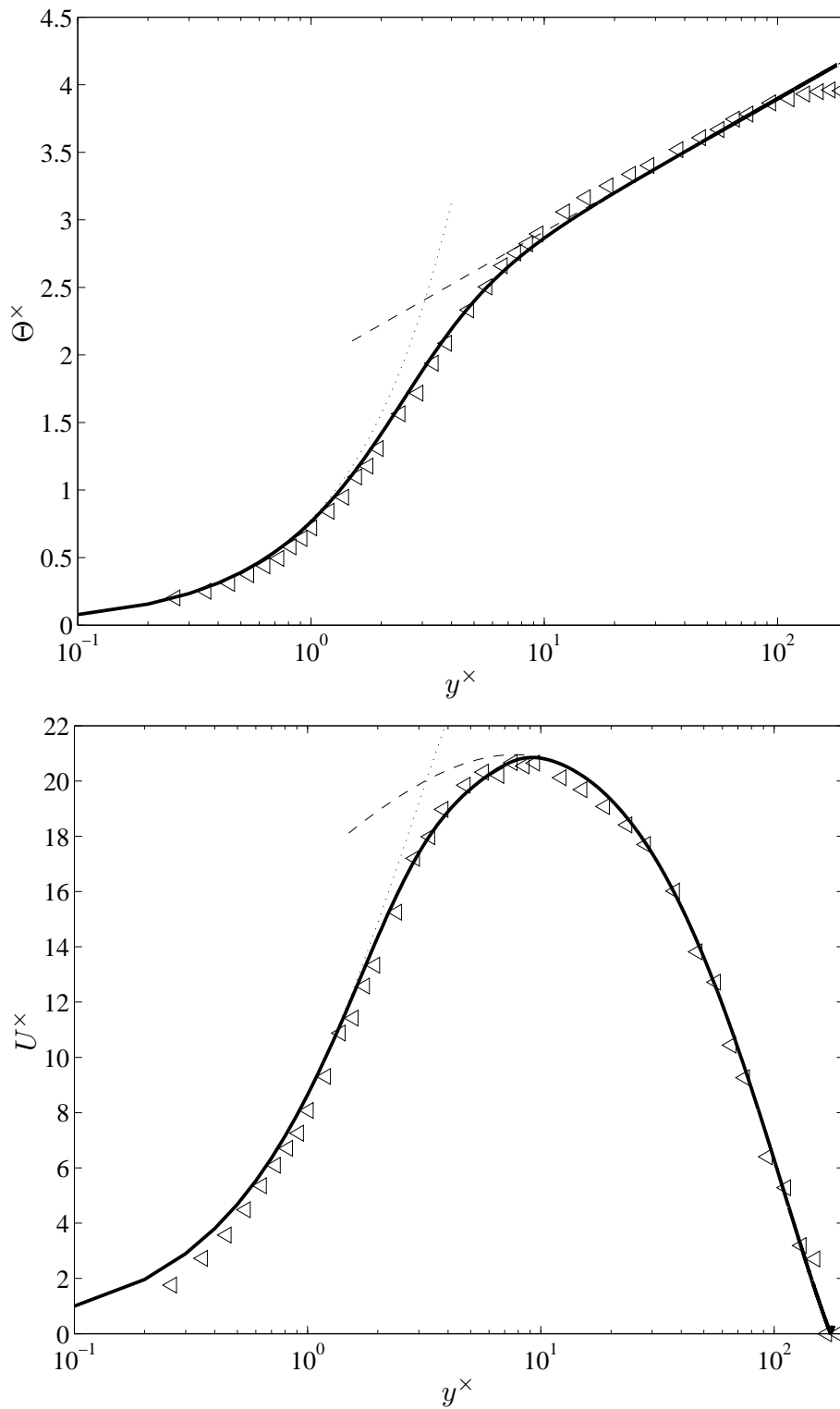


Abbildung 3.18: Profile nach den Gleichungen (3.73) und (3.74), die durch ein *blending* im gesamten wandnahen Bereich gültig sind. Zum Vergleich sind beispielhaft die Messdaten von Tsuji & Nagano (1988a) für $Gr_x = 3,62 \cdot 10^{10}$ und die Profile in der Überlappungsschicht (— —) und in der viskosen Unterschicht (···) angegeben.

Kapitel 4

Implementierung der universellen Profile als Wandfunktionen

Im Kapitel 3 wurden universelle Profile für die Temperatur und die Geschwindigkeit angegeben, die in der Überlappungsschicht gültig sind. Diese Profile können nun als Wandfunktionen (siehe Abschnitt 2.5) in CFD-Codes benutzt werden, um die turbulente natürliche Konvektion an vertikalen Wänden zu berechnen.

Vorab kann allerdings allgemein festgestellt werden, dass sich die Simulation von natürlicher Konvektion schwieriger als im Falle von erzwungener Konvektion gestaltet. Das Strömungsfeld und das Temperaturfeld sind stark aneinander gekoppelt und die Temperatur stellt keinen passiven Skalar mehr dar. CFD-Berechnungen sind dann zumeist mit sehr geringen Unter-Relaxations-Faktoren (*under relaxation factors*, URF) durchzuführen und benötigen eine sehr hohe Anzahl an Iterationsschritten, bis Konvergenz erreicht ist. Außerdem müssen sehr feine Gitter benutzt werden, da die viskose Unterschicht aufgelöst werden muss ($y^+ < 3$ für die wandnächsten Zellen). Dies ist notwendig, da die Standard-Wandfunktionen die natürliche Konvektion nicht richtig beschreiben, siehe z.B. Abbildung 3.2. Darüber hinaus sind die meisten (Zwei-Gleichungs-) Turbulenzmodelle in kommerziellen CFD-Codes für erzwungene Konvektion optimiert und werden somit keine zufriedenstellenden Ergebnisse für die natürliche Konvektion liefern können. Die Verwendung von neuen Wandfunktionen basierend auf den Gleichungen (3.26) und (3.54) zur Berechnung von natürlicher Konvektion könnte ein Mittel sein, diese Probleme zu umgehen. Durch die Verwendung gröberer Gitter in Wandnähe könnte die Zellzahl drastisch verringert werden, was sich positiv auf die Rechenzeit auswirkt. Außerdem sollte sich durch die Verwendung von Wandfunktionen die Genauigkeit der Ergebnisse erhöhen.

In Abschnitt 4.1 soll anhand des CFD-Programmpaketes FLUENT 6.2 überprüft werden, in wie weit kommerzielle Codes in der Lage sind, natürliche Konvektion zu berechnen. Dazu wird versucht, die Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ zu reproduzieren. Dies soll verdeutlichen, wieso Wandfunktionen für die natürliche Konvektion notwendig sind. In Abschnitt 4.2 wird die Bilanzgleichung der kinetischen Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k^* für den Fall der natürlichen Konvektion untersucht, da diese vermutlich die Ursache für die gefundenen Abweichungen darstellt. In Abschnitt 4.3 wird gezeigt, wie die universellen Profile aus Kapitel 3 als Wandfunktionen in einem CFD-Code implementiert werden können. Die damit erhaltenen Ergebnisse werden in Abschnitt 4.4 vorgestellt.

4.1 FLUENT-Ergebnisse für die natürliche Konvektion

Mit Hilfe des CFD-Programmpaketes FLUENT 6.2 soll die natürliche Konvektion in einem unendlich ausgedehnten Kanal, wie er in Abbildung 3.1 (oben) schematisch dargestellt ist, simuliert werden. Die Ergebnisse werden mit den Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) verglichen. Für diesen Fall des unendlich ausgedehnten Kanals ist die Strömung voll ausgebildet und es handelt sich um eine eindimensionale Strömung, d.h. die Größen ändern sich nur mit der Koordinate y^* . Die ausgebildete Strömung soll hier durch eine (zweidimensionale) Strömung in einer Kavität mit hohem Seitenverhältnis $\Gamma = L^*/h^*$, also dem Verhältnis von Länge L^* zu Breite h^* (*aspect ratio*), angenähert werden. Die Seitenwände weisen unterschiedliche Temperaturen (T_w^* bzw. T_k^*) auf und die obere bzw. untere Wand werden als adiabat angenommen. Bei genügend großen Werten¹ von Γ kann bei $L^*/2$ von einer eindimensionalen Strömungssituation ausgegangen werden. Dies kann zum einen dadurch überprüft werden, ob sich die Werte für $L^*/2 \pm \Delta l^*$ noch verändern, wobei Δl^* klein im Vergleich zu L^* ist. Eine zweite Möglichkeit ist das Erhöhen von Γ und anschließendes Überprüfen, ob sich die Werte verändern. Verschiedene Testrechnungen ergaben, dass hier bei $\Gamma = 40$ von einer eindimensionalen Strömung bei $L^*/2$ ausgegangen werden kann und ein weiteres Erhöhen des Seitenverhältnisses keinen Einfluss mehr hat.

Die Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) liegen in entdimensionierter Form vor und werden zunächst in dimensionsbehaftete Größen transformiert, um sie im Anschluss besser mit den (dimensionsbehafteten) FLUENT-Ergebnissen vergleichen zu können. Hierzu wurden die Stoffeigenschaften bei $T_0^* = 30^\circ\text{C}$ gewählt, die Kanalhöhe h^* wurde zu $h^* = 0,1\text{ m}$ gesetzt und die Temperaturdifferenz zu $T_w^* - T_k^* = 60^\circ\text{C}$. Die unterschiedlichen Rayleigh-Zahlen für die FLUENT-Simulationen werden nun erreicht, indem die oben angegebenen Randbedingungen bzw. Stoffwerte benutzt werden und die „Erdbeschleunigung“ entsprechend variiert wird. Die Rechnungen werden also mit sog. DUMMY-Variablen durchgeführt, zu Details siehe Herwig (2002). Zur Bewertung werden sowohl die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile als auch die Wandgradienten der Temperatur und Geschwindigkeit benutzt, die in Tabelle 4.1 zusammen mit der jeweils angepassten „Erdbeschleunigung“ angegeben sind. Zum Aufbau der Geometrie und weiteren Daten siehe auch Abbildung 4.1.

¹Für $\Gamma \rightarrow \infty$ ist die Kavität identisch mit dem unendlich ausgedehnten Kanal. Große Werte von Γ stellen somit eine Näherungslösung für $\Gamma \rightarrow \infty$ dar

Tabelle 4.1: Relevante Größen für die dimensionsbehafteten DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für die verschiedenen Rayleigh-Zahlen.

Ra	g^* in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w$ in $\frac{\text{K}}{\text{m}}$	$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right _w$ in $\frac{1}{\text{s}}$
$5,0 \cdot 10^6$	9,421	6535,0	129,87
$2,0 \cdot 10^6$	3,768	4914,7	64,08
$8,2 \cdot 10^5$	1,545	3756,0	32,77
$5,4 \cdot 10^5$	1,017	3210,7	24,58

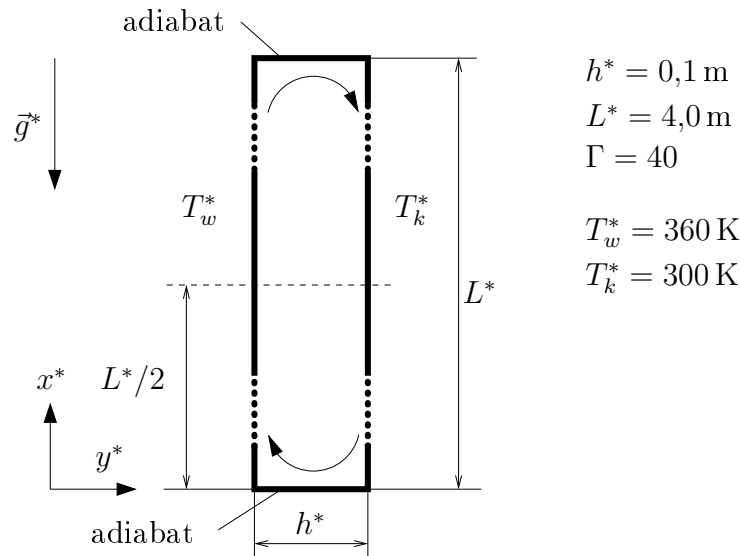


Abbildung 4.1: Aufbau der Kavität, die die Geometrie für die FLUENT-Rechnungen darstellt.

Zur Berechnung der Strömung in der Kavität wurden zwei unterschiedlich feine Gitter erzeugt:

- Es wurde ein grobes Gitter mit 8×200 Zellen erstellt. Hiermit wird der wandnahe Bereich nur grob aufgelöst und es kann überprüft werden, in wie weit die Standard-Wandbehandlung in der Lage ist, natürliche Konvektion richtig wiederzugeben.
- Mit einem feinen Gitter mit 100×1400 kann die viskose Unterschicht aufgelöst werden. Hierbei werden keine Wandfunktionen benutzt und es wird bis in die viskose Unterschicht aufgelöst. Hierzu sollte $y^+ < 5$ gelten.

Für jedes Gitter wurden vier verschiedene (Zwei-Gleichungs-) Turbulenzmodelle benutzt:

- k - ω -Modell
- Standard k - ε -Modell
- RNG- k - ε -Modell
- *realizable* k - ε -Modell

Für die verschiedenen Varianten des k - ε -Turbulenzmodells wurden die Standard-Wandfunktionen für das grobe Gitter und das *enhanced wall treatment*, das unter FLUENT zur Verfügung steht, für das feine Gitter verwendet. Das k - ω -Modell besitzt unter FLUENT eine spezielle Wandbehandlung, bei der in Abhängigkeit vom Wandabstand ein *blending* zwischen dem linearen Profil in der viskosen Unterschicht und dem logarithmischen Verlauf in der Überlappungsschicht durchgeführt wird. Das prinzipielle Vorgehen ist ähnlich zum *blending* in Abschnitt 3.5; zu weiteren Details zu den einzelnen Turbulenzmodellen siehe FLUENT (2005) oder auch Wilcox (1993).

In Abbildung 4.2 sind für einen ersten qualitativen Vergleich die DNS-Profile von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ zusammen mit den FLUENT-Ergebnissen des k - ω -Modells dargestellt, da dieses Modell die DNS-Daten am besten wiedergibt. Die Übereinstimmung des Temperaturprofils mit den DNS-Daten ist auf den ersten Blick für beide Gitterfeinheiten recht gut. Für die Geschwindigkeit ist zu erkennen, dass auf beiden Gittern die Maximalgeschwindigkeit deutlich überschätzt wird. Der weitere qualitative Verlauf wird jedoch einigermaßen gut wiedergegeben.

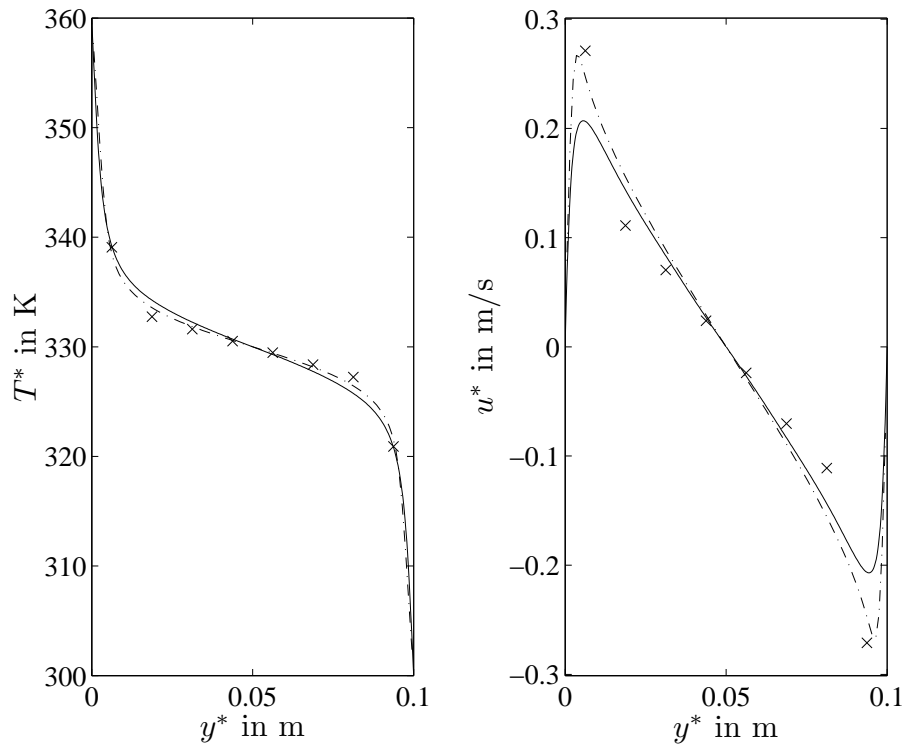


Abbildung 4.2: Vergleich der DNS-Daten (—) von Versteegh & Nieuwstadt (1999) mit Temperatur- und Geschwindigkeitsprofilen der FLUENT-Simulation für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$. Es handelt sich um Profile, die mit dem k - ω -Modell auf dem 100×1400 Gitter (— · —) und auf dem 8×200 Gitter (×) ermittelt wurden

Um die Ergebnisse nun quantitativ bewerten zu können, werden die Wandgradienten der Temperatur und Geschwindigkeit ($|\partial T^*/\partial y^*|_w$ bzw. $\partial u^*/\partial y^*|_w$) herangezogen. Diese Größen sind direkt mit der Wandwärmestromdichte und der Wandschubspannung verknüpft und stellen somit wichtige Parameter dar. In Tabelle 4.2 sind die Wandgradienten, die mit den unterschiedlichen Modellen und Gittern berechnet wurden, und die zugehörigen relativen Fehler für die höchste Rayleigh-Zahl ($Ra = 5,0 \cdot 10^6$) angegeben.

Man erkennt, dass die Rechnungen mit den groben Gittern und Standard-Wandbehandlung keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefern. Die Abweichungen im Temperaturwandgradienten liegen bei mehr als 20 % und beim Geschwindigkeitswandgradienten bei mehr als 45 %. Somit ist gezeigt, dass die natürliche Konvektion mit FLUENT auf groben Gittern nur ungenügend berechnet werden kann, was schon nach Abbildung 3.2 zu erwarten war.

Erstaunlicherweise treten aber auch bei der Simulation mit feinen Gittern erhebliche

Tabelle 4.2: Mit FLUENT bestimmte Wandgradienten für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$, die auf zwei unterschiedlichen Gittern und mit jeweils vier Turbulenzmodellen ermittelt wurden. Zusätzlich sind die relativen Fehler in den Gradienten angegeben.

Die Rechnungen mit den k - ε -Modellen auf den groben Gittern (8×200) wurden mit Standard-Wandfunktionen durchgeführt und auf den feinen Gittern (100×1400) mit dem *enhanced wall treatment*.

Turbulenzmodell	Gitter	y^+	$\left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w$ in $\frac{K}{m}$	r_T in %	$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right _w$ in $\frac{1}{s}$	r_u in %
k - ω	8×200	12,8	5205,52	-20,34	68,22	-47,47
k - ε	8×200	10,1	4343,93	-33,53	42,21	-67,50
RNG- k - ε	8×200	10,9	4408,58	-32,54	49,88	-61,59
<i>realizable</i> k - ε	8×200	9,7	4222,70	-35,38	39,32	-69,72
k - ω	100×1400	1,6	4566,44	-30,12	158,70	+22,20
k - ε	100×1400	1,7	3955,05	-39,48	179,27	+38,04
RNG- k - ε	100×1400	1,6	4218,73	-35,44	175,82	+35,38
<i>realizable</i> k - ε	100×1400	1,7	3951,87	-39,53	180,64	+39,09

Abweichungen auf. Der Temperaturgradient weicht jetzt um mehr als 30% ab, der Geschwindigkeitsgradient um 20%. Dies ist zunächst überraschend, da hier die Strömung bis in die viskose Unterschicht berechnet wird und physikalische Randbedingungen benutzt werden. Da die Impulsbilanzen und die Energiegleichung „korrekt“ sind, ist der Fehler vermutlich in der Turbulenzmodellierung zu suchen. Dies wird in Abschnitt 4.2 weiter untersucht.

Es soll an dieser Stelle betont werden, dass es mit kommerziellen CFD-Codes, wie z.B. FLUENT, bei Verwenden eines Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodells nicht möglich ist, natürliche Konvektion mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Evt. könnte als eine Alternative zu den im folgenden aufgezeigten Wandfunktionen das Benutzen des k - ε - \bar{v}^2 - f - $\bar{\theta}^2$ Turbulenzmodells zu einer Erhöhung der Genauigkeit führen, da z.B. von Kenjereš *et al.* (2004) gute Ergebnisse sowohl für die natürliche als auch für die gemischte Konvektion berichtet wurden.

4.2 k -Gleichung zur Turbulenzmodellierung

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass mit FLUENT die natürliche Konvektion nur unzureichend berechnet werden kann, auch wenn sehr feine Gitter verwendet werden, mit denen die viskose Unterschicht aufgelöst wird. Die Ursache hierfür ist in der Turbulenzmodellierung zu vermuten. Es wird für die folgenden Abschnitte vorausgesetzt, dass der Leser mit den Grundzügen der Turbulenzmodellierung und im besonderen mit dem k - ω -Turbulenzmodell vertraut ist. Bei Bedarf siehe z.B. Wilcox (1993), Ferziger & Perić (1999), Versteeg & Malalasekera (1995) und Herwig (2002). Zu den Gleichungen des k - ω -Turbulenzmodells siehe Anhang C.

Es soll nun die Bilanzgleichung der kinetischen Energie der turbulenten Schwankungs-

bewegung k^* untersucht werden. Für einen eindimensionalen Fall wie den unendlich ausgedehnten Kanal gilt z.B. nach Wilcox (1993)

$$0 = \underbrace{\nu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2}_{\text{Term I}} - \underbrace{\beta_k k^* \omega^*}_{\text{Term II}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^*} \left[(\nu^* + \sigma_k \nu_t^*) \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right]}_{\text{Term III}}. \quad (4.1)$$

Hierbei kann Term I als *Produktionsterm*, Term II als *Dissipationsterm* und Term III als *Diffusionsterm* interpretiert werden.

Mit den DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ können die Terme I bis III einzeln ausgewertet werden. Hierbei wird die Wirbelviskosität bestimmt als

$$\nu_t^* = \sigma_t a_t^* = \sigma_t \cdot \frac{-\overline{v^{*'} T^{*'}}}{|\partial T^* / \partial y^*|_w}, \quad (4.2)$$

um die Singularität der Wirbelviskosität ν_t^* im Geschwindigkeitsmaximum zu vermeiden. Die Terme I bis III sind in Abbildung 4.3 zusammen mit der Summe der drei Terme dargestellt.

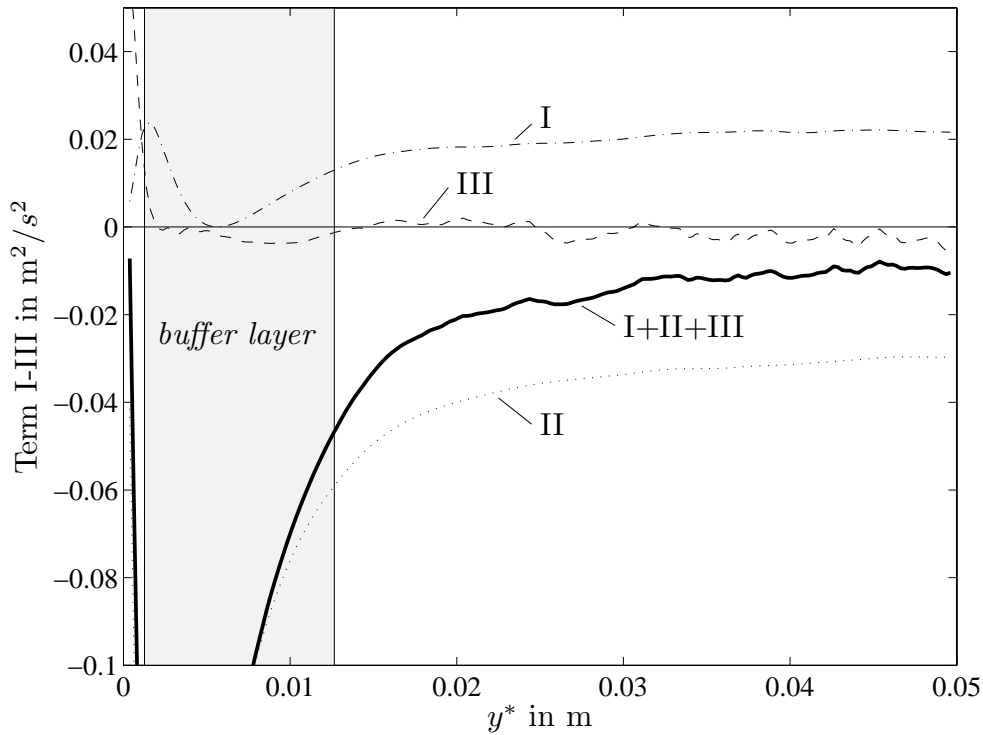


Abbildung 4.3: Die einzelnen Terme der k^* -Gleichung (Term I: $-\cdot-$, Term II: \dots , Term III: $- - -$) und die Summe der Terme (—) für $0 \leq y^* \leq h^*/2$, ermittelt anhand der Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$. Zusätzlich ist der Bereich der *buffer layer* (grau unterlegt) für den vorliegenden Fall angegeben.

Nach Gleichung (4.1) sollte die Summe der drei Terme gleich Null sein, was hier allerdings nicht der Fall ist. Es ist zu erkennen, dass die Diffusion (Term III) außer in

unmittelbarer Wandnähe sehr gering ist und somit keinen großen Einfluss in der Überlappungsschicht hat. Hier sind nur die Dissipation (Term II) und die Produktion (Term III) von Bedeutung und nach Gleichung (4.1) sollten sich beide Terme gegenseitig aufheben. Dies ist für die natürliche Konvektion nicht der Fall, da der Betrag der Dissipation größer ist als die Produktion. Somit ist die Standard k^* -Gleichung mit den verwendeten Konstanten nicht für die natürliche Konvektion geeignet.

4.2.1 Turbulenzproduktion durch Auftrieb

Um das Turbulenzmodell für die natürliche Konvektion anzupassen, gibt es bereits einige Ansätze in der Literatur. Ein Standard-Ansatz für die Turbulenzproduktion G_b^* durch Auftriebseffekte, wie er auch in FLUENT berücksichtigt wird, lautet

$$G_b^* = g_i^* \beta^* \frac{\mu_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} = g_x^* \beta^* \frac{\mu_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + g_y^* \beta^* \frac{\mu_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T^*}{\partial y^*}. \quad (4.3)$$

Für vertikale Wände ($g_y^* = 0$) vereinfacht sie sich zunächst zu

$$G_b^* = g_x^* \beta^* \frac{\mu_t^*}{\sigma_t} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (4.4)$$

und für den eindimensionalen Fall, für den keine Gradienten in x -Richtung auftreten ($\partial T^*/\partial x^* = 0$), folgt letztlich

$$G_b^* = 0. \quad (4.5)$$

4.2.2 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH)

Ein weiterer Ansatz geht auf eine Arbeit von Ince & Launder (1989) zurück, die die Turbulenzproduktion durch Auftriebseffekte modellieren als (beachte: $g_i^* = g_x^*$)

$$G_b^* = g_i^* \beta^* \overline{u_i'^* T'^*} = g_x^* \beta^* \overline{u'^* T'^*}. \quad (4.6)$$

Der Term $\overline{u_i'^* T'^*}$ wird hierbei entsprechend Daly & Harlow (1970) modelliert, wobei nur Gradienten in y -Richtung auftreten:

$$\overline{u'^* T'^*} = -\frac{c_T}{\beta_k \omega^*} \overline{u'^* u_k'^*} \frac{\partial T^*}{\partial x_k^*} = -\frac{c_T}{\beta_k \omega^*} \overline{u'^* v'^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (4.7)$$

Hierbei wird zunächst $c_T = 0,15$ benutzt, wie es in Ince & Launder (1989) vorgeschlagen wird. Modelliert man die turbulente Schubspannung als

$$-\overline{u'^* v'^*} = \nu_t^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{k^*}{\omega^*} \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, \quad (4.8)$$

so ergibt sich für $\overline{u^{*'}T^{*'}}$, wie es in Gleichung (4.6) benötigt wird, (mit $g_x^* = -g^*$)

$$\overline{u^{*'}T^{*'}} = \frac{c_T k^*}{\beta_k \omega^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad \Rightarrow \quad G_b^* = -g^* \beta^* \frac{c_T k^*}{\beta_k \omega^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*}. \quad (4.9)$$

In Abbildung 4.4 ist der Term G_b^* zusätzlich zur Summe der Terme I–III dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich durch die Hinzunahme des G_b -Terms die Übereinstimmung nicht wesentlich verbessert hat. Die Summe der Terme ist immer noch ungleich Null und die Bilanzgleichung für k^* ist somit nicht erfüllt.

Abbildung 4.5 zeigt die Terme der k^* -Gleichung und eine modifizierte Version des GGDH-Ansatzes. Hierbei wurde die Konstante $c_T = 1,0$ benutzt, mit der eine bessere Übereinstimmung erreicht werden kann.

Mit dem neuen Wert $c_T = 1,0$ stellt man für drei DNS-Datensätze ($8,2 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 5,0 \cdot 10^6$) fest, dass die k^* -Gleichung zumindest für $y^* \gtrsim 0,03$ m befriedigend erfüllt werden kann. Allerdings ist die Datenbasis sehr gering und der Wert $c_T = 1,0$ kann somit mit einem großen Fehler behaftet sein. Zu weiteren Details siehe auch Kiš (2005).

Es wurde gezeigt, dass die k^* -Gleichung (4.1) für die natürliche Konvektion nicht erfüllt wird und dass bekannte Korrekturen aus der Literatur nicht in der Lage sind, die Übereinstimmung zufriedenstellend zu verbessern. Es soll im folgenden darauf verzichtet werden, das k - ω -Modell zu modifizieren und anhand von nur vier DNS-Datensätzen eine weitere Variante des Modells für die natürliche Konvektion zu entwickeln. Die Verlässlichkeit eines so modifizierten Modells wäre aufgrund der geringen Datenbasis nur begrenzt. Außerdem ist zu beachten, dass die zur Verfügung stehenden DNS-Profile nur bei (aus asymptotischer Sicht) kleinen Rayleigh-Zahlen vorliegen.

4.3 Implementierung der neuen Wandfunktionen

Anstatt ein modifiziertes k - ω -Modell zu entwickeln, wird im folgenden ein anderer Ansatz gewählt, um die natürliche Konvektion zu simulieren. Es werden die universellen Profile nach Gleichung (3.26) und (3.54) als Wandfunktionen benutzt und zur Turbulenzmodellierung wird weiterhin das „unpassende“ k - ω -Turbulenzmodell verwendet. Allerdings werden die Randbedingungen für k^* und ω^* für den Fall der natürlichen Konvektion modifiziert. Dieser neue Satz von Wandfunktionen bzw. Randbedingungen wird in den FORTRAN Code CAFFA² von Ferziger & Perić (1999) implementiert, dessen Quellcode frei zugänglich ist. Es handelt sich um einen Finite-Volumen CFD-Code für inkompressible Strömungen mit der Boussinesq-Approximation zur Berücksichtigung der Auftriebseffekte. Die für die folgenden zweidimensionalen, stationären Fälle zu lösenden Gleichungen sind der Vollständigkeit halber im Anhang C zu finden. Es musste die Gittererzeugung und die Wandbehandlung (neue Wandfunktionen) angepasst werden, der Hauptteil des Codes konnte unverändert bleiben.

Zur Beurteilung des hier skizzierten Ansatzes werden im folgenden, ähnlich wie bei den FLUENT-Rechnungen, die Wandgradienten und die Profile der Temperatur und Geschwindigkeit von Versteegh & Nieuwstadt (1999) benutzt. Solange diese Größen ausreichend genau berechnet werden können, werden Abweichungen bei k^* oder bei ω^* toleriert. In den meisten Fällen ist der Anwender von CFD-Codes nur an Aussagen über die

²CAFFA steht für *Computer-Aided Fluid Flow Analysis*.

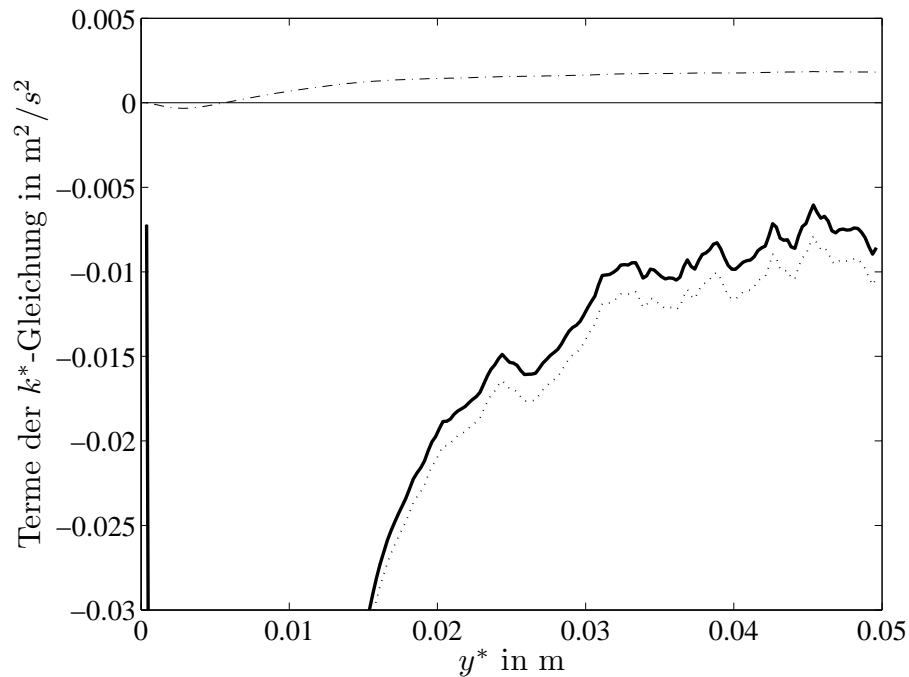


Abbildung 4.4: Die Summe der Terme I–III (\cdots) der k^* -Gleichung, der Produktions-term G_b^* ($-\cdot-\cdot-$) nach Gleichung (4.9) und die Summe aller Terme (—) für $0 \leq y^* \leq h^*/2$. Ermittelt anhand der Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999).

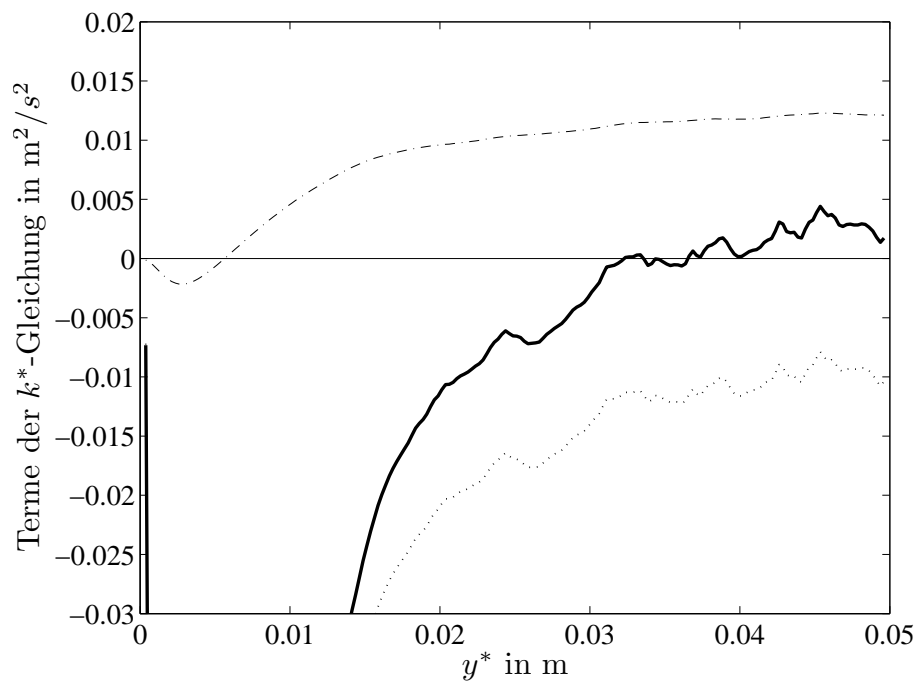


Abbildung 4.5: Die Summe der Terme I–III (\cdots) der k^* -Gleichung, der Produktions-term G_b^* ($-\cdot-\cdot-$) nach Gleichung (4.9) mit $c_T = 1,0$ und die Summe aller Terme (—) für $0 \leq y^* \leq h^*/2$. Ermittelt anhand der Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999).

Temperatur und Geschwindigkeit interessiert, und k^* bzw. ω^* sind nur Hilfsgrößen im Lösungsprozess. Dies soll ein wenig begründen, wieso hier wissentlich ein eigentlich „unpassendes“ Turbulenzmodell benutzt wird, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde. Sicherlich wäre eine universelle Beschreibung der Turbulenz, die sowohl T^* , u^* und v^* als auch k^* und ω^* richtig wiedergibt, wünschenswert, doch scheint dies mit einfachen Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodellen nicht möglich zu sein.

4.3.1 Universelle Profile

Zur besseren Übersichtlichkeit sollen hier noch einmal die universellen Profile nach Gleichung (3.26) und (3.54) angegeben werden.

$$\Theta^\times = C \cdot \ln(y^\times) + D \quad (4.10)$$

$$U^\times = \frac{C \text{Pr}}{\sigma_t} y^\times (C [\ln(y^\times) - 2] + D - \Theta_0^\times) + \left(e_1 \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big|_w + e_2 \right) \cdot \ln(y^\times) + \left(f_1 \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big|_w + f_2 \right) \quad (4.11)$$

Hierbei ist $\sigma_t = 0,9$, $C = 0,427$, $D = 1,93$, $e_1 = 0,49$, $e_2 = -2,27$, $f_1 = 1,28$ und $f_2 = 1,28$. Die Profile sind für $y^\times \gtrsim 5$ gültig und werden im folgenden als Wandfunktionen benutzt.

Es soll kurz beschrieben, wie diese Funktionen implementiert werden können. Zum prinzipiellen Aufbau und zur Funktionsweise von CFD-Codes siehe z.B. Ferziger & Perić (1999) und Versteeg & Malalasekera (1995).

4.3.2 Temperatur-Wandfunktion

Wird zur Berechnung einer Strömung ein grobes Gitter benutzt, so liegt der erste Zellmittelpunkt (y_1^*) außerhalb der viskosen Unterschicht. Da das Temperaturprofil in diesem Bereich nicht mehr linear ist, kann der Temperaturwandgradient (und damit auch die Wandwärmestromdichte) nicht mehr als Differenzenquotient berechnet werden

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \neq \frac{T_w^* - T^*(y_1^*)}{y_1^*}, \quad (4.12)$$

siehe Abbildung 4.6.

Es wird stattdessen eine fiktive Temperaturleitfähigkeit a_f^* eingeführt, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$a_f^* \cdot \frac{T_w^* - T^*(y_1^*)}{y_1^*} \equiv a^* \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \Rightarrow a_f^* = a^* \frac{y_1^*}{T_w^* - T^*(y_1^*)} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \quad (4.13)$$

Mit der neu eingeführten Größe a_f^* ist es also möglich, den richtigen Temperaturwandgradienten mit dem Differenzenquotienten zu verknüpfen.

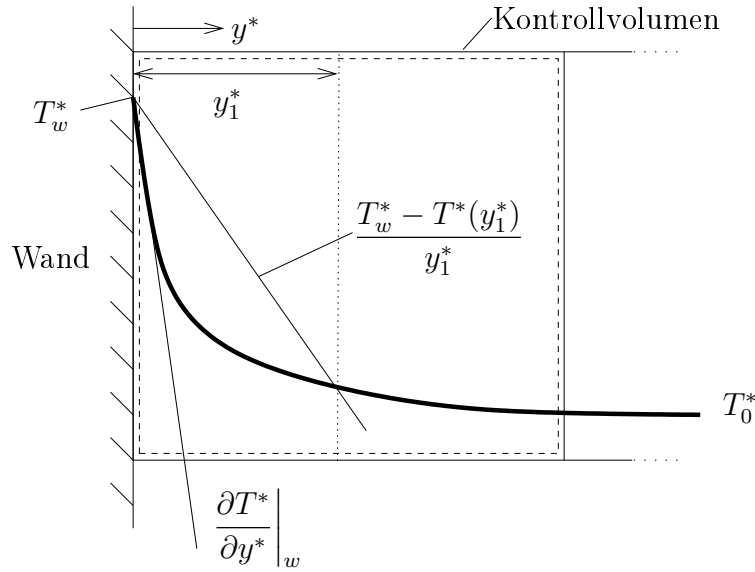


Abbildung 4.6: Temperaturverlauf im wandnächsten Kontrollvolumen. Der Temperaturwandgradient kann bei einem groben Gitter (wie hier gezeigt) nicht mehr als Differenzenquotient gebildet werden.

Der Differenzenquotient in Gleichung (4.13) kann nun mit y^\times und Θ^\times in eine dimensionslose Form gebracht werden

$$a_f^* = a^* \left(\frac{y_1^*}{T_c^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right) \frac{T_c^*}{T_w^* - T^*(y_1^*)} = a^* \frac{y_1^\times}{\Theta^\times(y_1^\times)}. \quad (4.14)$$

Wenn für den Mittelpunkt der ersten Zelle in dimensionsloser Darstellung gilt, dass $y_1^\times > 5$ ist, so kann man $\Theta^\times(y_1^\times)$ mit Hilfe des logarithmischen Temperaturprofils nach Gleichung (3.26) ausdrücken

$$a_f^* = a^* \frac{y_1^\times}{C \ln(y_1^\times) + D}. \quad (4.15)$$

Somit steht eine Berechnungsvorschrift für a_f^* (für $y_1^\times > 5$) zur Verfügung, die in CFD-Codes benutzt werden kann. Allerdings ist T_c^* und somit auch y^\times nicht von vorn herein bekannt, sondern sie sind Teil der Lösung und werden in einem iterativen Prozess ermittelt. Es soll hier die Iterationsvorschrift angegeben werden, mit der die Temperaturrandbedingung gesetzt wird. Hierbei steht der Index „old“ für einen alten Wert der Variable und „new“ für den aktuellen Wert.

Die Iterationsvorschrift lautet:

$$\text{Schritt 1:} \quad T_c^{*new} = \frac{|T_w^* - T^*(y_1^*)^{new}|}{C \ln(y_1^{\times old}) + D} \quad (4.16)$$

$$\text{Schritt 2:} \quad y_1^{\times new} = y_1^* \cdot \left(\frac{g^* \beta^* T_c^{*new}}{a^{*2}} \right)^{-1/3} \quad (4.17)$$

$$\text{Schritt 3:} \quad a_f^{*new} = a^* \frac{y_1^{\times new}}{C \ln(y_1^{\times new}) + D} \quad (4.18)$$

Die neue charakteristische Temperatur T_c^{*new} für das wandnächste Kontrollvolumen wird mit Hilfe des alten dimensionslosen Wandabstandes $y_1^{\times old}$ und dem logarithmischen Profil ermittelt (Schritt 1). Mit der nun aktuellen charakteristischen Temperatur wird der neue dimensionslose Wandabstand $y_1^{\times new}$ berechnet (Schritt 2) und anschließend die fiktive Temperaturleitfähigkeit a_f^{new} (Schritt 3). Dies wird dann in der Matrix zur Bestimmung des Temperaturfeldes benutzt, der als Schritt 4 bezeichnet werden könnte. Somit steht ein neues $T^*(y_1^*)^{new}$ zur Verfügung und die Iteration muss von neuem durchgeführt werden, falls das zugehörige Abbruchkriterium noch nicht erfüllt ist.

4.3.3 Geschwindigkeits-Wandfunktion

Um eine Wandfunktion für die Geschwindigkeit benutzen zu können, müssen zunächst einige Hilfsgrößen bestimmt werden, die für die eigentliche Wandfunktion benötigt werden. Dies ist zunächst die dimensionslose Geschwindigkeit $U^\times = u^*(y_1^*)/u_c^*$ (Schritt 1). Hierbei wird die Definition (3.45) der Bezugsgeschwindigkeit ein wenig umgeformt, so dass man u_c^* als Funktion von T_c^* erhält

$$u_c^* \equiv \frac{g^* \beta^* T_c^{*3}}{\nu^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^{-2} = \frac{(g^* \beta^* T_c^* a^*)^{1/3}}{\text{Pr}}. \quad (4.19)$$

Die entdimensionierte Referenztemperatur Θ_0^\times wird in Schritt 2 mit T_c^* gebildet. Um das universelle Geschwindigkeitsprofil nach Gleichung (3.54) als Wandfunktion benutzen zu können, wird in Schritt 3 eine Hilfsgröße χ eingeführt, für die gilt

$$\underbrace{U^\times(y_1^\times) - \frac{C \text{Pr}}{\sigma_t} y_1^\times (C [\ln(y_1^\times) - 2] + D - \Theta_0^\times)}_{\equiv \chi} = \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big|_w (e_1 \cdot \ln(y_1^\times) + f_1) + e_2 \cdot \ln(y_1^\times) + f_2. \quad (4.20)$$

Dies kann als Bestimmungsgleichung für den dimensionslosen Geschwindigkeitswandgradienten benutzt werden (Schritt 4), der in Schritt 5 in eine dimensionsbehaftete Größe umgeschrieben wird. Um den Code in sich konsistent zu lassen, wird in Schritt 6 eine fiktive Viskosität eingeführt, für die gilt:

$$\nu_f^* \frac{u^*(y_1^*)}{y_1^*} \equiv \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w \Rightarrow \nu_f^* = \nu^* \frac{y_1^*}{u^*(y_1^*)} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w \quad (4.21)$$

Somit kann eine Iterationsvorschrift angegeben werden, wobei die Werte für y_1^\times and T_c^* aus der aktuellen Temperaturiteration benutzt werden:

$$\text{Schritt 1:} \quad U^{\times new}(y_1^\times) = \frac{u(y_1)^{old} \cdot \text{Pr}}{(g^* \beta^* T_c^* a^*)^{1/3}} \quad (4.22)$$

$$\text{Schritt 2:} \quad \Theta_0^{\times new} = \frac{T_w^* - T_0^*}{T_c^*} \quad (4.23)$$

$$\text{Schritt 3:} \quad \chi^{new} = U^{\times new} - \frac{C \text{Pr}}{\sigma_t} y_1^\times (C [\ln(y_1^\times) - 2] + D - \Theta_0^{\times new}) \quad (4.24)$$

$$\text{Schritt 4: } \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w^{new} = \frac{\chi^{new} - e_2 \cdot \ln(y_1^\times) - f_2}{e_1 \cdot \ln(y_1^\times) + f_1} \quad (4.25)$$

$$\text{Schritt 5: } \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_w^{new} = \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right|_w^{new} \cdot \left(\frac{g^* \beta^* T_c^*}{Pr} \right)^{2/3} \cdot \nu^{*-1/3} \quad (4.26)$$

$$\text{Schritt 6: } \nu_f^{*new} = \nu^* \cdot \frac{y_1^*}{u^*(y_1^*)^{old}} \cdot \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_w \quad (4.27)$$

Die fiktive Viskosität wird als entsprechender Eintrag in der Matrix zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes verwendet, um dort die richtige Wandschubspannung zu berücksichtigen.

Zusätzlich muss noch die Auftriebskraft in der wandnächsten Zelle berücksichtigt werden. Bei einem groben Gitter ändert sich die Temperatur sehr stark innerhalb des ersten Kontrollvolumens, siehe Abbildung 4.6. Um die Auftriebseffekte also richtig wiederzugeben, ist es nicht ausreichend, die Temperatur zu benutzen, die im Mittelpunkt der Zelle herrscht.

$$F_{Auftr} \neq \rho_0^* g^* \beta^* [T^*(y_1^*) - T_0^*] \Delta V^* \quad (4.28)$$

Es muss stattdessen eine mittlere Temperatur bestimmt werden, für die gilt:

$$T_m^* \equiv \frac{1}{2y_1^*} \int_0^{2y_1^*} T^*(y^*) dy^* \quad (4.29)$$

Es muss hier $2y_1^*$ als obere Integrationsgrenze gewählt werden, da y_1^* der Abstand von der Wand bis zum Mittelpunkt des Volumens ist. Somit ist $2y_1^*$ die gesamte Breite des Kontrollvolumens.

Da für $T^*(y^*)$ kein universelles Profil angegeben werden kann, wird das Integral für $\Theta^\times(y^\times)$ gelöst

$$\Theta_m^\times \equiv \frac{T_w^* - T_m^*}{T_c^*} = \frac{1}{2y_1^\times} \int_0^{2y_1^\times} \Theta^\times(y^\times) dy^\times. \quad (4.30)$$

Dieses Integral wird in den Bereich der viskosen Unterschicht ($0 \leq y^\times \leq 2$) und den Bereich der Überlappungsschicht ($2 < y^\times$) aufgespalten. Bei dieser vereinfachten Aufspaltung treten zwar Abweichungen im Bereich der *buffer layer* auf, die aber relativ gering sind. Eine Integration nach Gleichung (3.73) wäre zu aufwendig.

$$\Theta_m^\times = \frac{1}{2y_1^\times} \left(\int_0^2 y^\times dy^\times + \int_2^{2y_1^\times} [C \ln(y^\times) + D] dy^\times \right) \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{2y_1^\times} (C(2y_1^\times) [\ln(2y_1^\times) - 1] + D \cdot (2y_1^\times) - 1,598) \quad (4.32)$$

Die Konstante 1,598 ergibt sich aus der Integration über die viskose Unterschicht und ist universell gültig.

Die gesuchte mittlere Temperatur im Kontrollvolumen kann jetzt aus Θ_m^\times bestimmt werden

$$T_m^* = T_w^* - \Theta_m^\times T_c^* \quad \text{für die warme Wand,} \quad (4.33)$$

$$T_m^* = T_k^* + \Theta_m^\times T_c^* \quad \text{für die kalte Wand.} \quad (4.34)$$

4.3.4 Randbedingungen für das Turbulenzmodell

Die Randbedingung für die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k^* wird von der erzwungenen Konvektion übernommen, wie sie z.B. in Wilcox (1993) und Ferziger & Perić (1999) zu finden ist:

$$k^+(y_1^*) = \frac{1}{\sqrt{\beta_k}} \Rightarrow k^*(y_1^*) = \frac{u_\tau^{*2}}{\sqrt{\beta_k}} \quad (4.35)$$

Die Randbedingung für ω^* wird hingegen an die natürliche Konvektion angepasst. Nach Gleichung (3.52) gilt

$$\nu_t^* = \frac{\nu^* \sigma_t y_1^\times}{CPr} \quad (4.36)$$

und nach dem k - ω -Modell gilt

$$\nu_t^* = \frac{k^*}{\omega^*}. \quad (4.37)$$

Durch Vergleich erhält man also einen Wert für ω^* in der wandnächsten Zelle:

$$\omega^*(y_1^*) = \frac{k^*(y_1^*) CPr}{\nu^* \sigma_t y_1^\times}. \quad (4.38)$$

Hiermit ist sichergestellt, dass die Wirbelviskosität ν_t^* (und somit auch die turbulente Temperaturleitfähigkeit $a_t^* = \nu_t^* / \sigma_t$) den richtigen Wert in der wandnächsten Zelle erhält.

4.4 Ergebnisse

Im folgenden werden die Ergebnisse, die mit der veränderten Version des CAFFA-Codes erzeugt wurden, mit den DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) verglichen. Es werden hierzu sowohl die Profile als auch die Wandgradienten zur Beurteilung herangezogen. Anhand von Turbulenzgrößen soll die hier verwendete Turbulenzmodellierung durch Modifizieren der Randbedingungen (siehe Abschnitt 4.3.4) bewertet werden.

Leider gibt es zusätzlich zu den DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) nur sehr wenige Studien zur natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden, in denen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile zur Verfügung gestellt werden und in denen die Rayleigh-Zahl

hoch genug ist. Zwar sind in der Arbeit von Tsuji & Nagano (1988a) solche Profile zu finden, die auch zur Herleitung der universellen Profile in Kapitel 3 herangezogen wurden. Es handelt sich aber um eine vertikale beheizte Platte in einer ruhenden Umgebung, bei der sich zunächst an der Plattenvorderkante eine laminare Grenzschicht ausbildet, die nach einem Transitionsprozess erst im oberen Teil der Platte turbulent wird. Diese Art der Strömung ist mit heutigen CFD-Programmen nur sehr schwer zu simulieren, da die Transition nicht richtig wiedergegeben werden kann. Somit konnten die Daten von Tsuji & Nagano (1988a) zwar benutzt werden, um die Konstanten in den universellen Profilen nach Gleichung (3.26) und (3.54) zu bestimmen, aber nicht, um CFD-Validierungsrechnungen an ihnen durchzuführen.

Die Daten von z.B. Ampofo & Karayiannis (2003) können ebenfalls nicht benutzt werden, da die Rayleigh-Zahl aus asymptotischer Sicht zu klein ist und sich noch kein logarithmisches Temperaturprofil ausgebildet hat, wie anhand von Abbildung 3.6 zu erkennen ist.

Für die Zukunft wäre es wünschenswert, neue Geschwindigkeits- und Temperaturprofile bei möglichst hohen Rayleigh-Zahlen zur Verfügung zu haben. Somit wäre man in der Lage, die implementierten Wandfunktionen weiter zu validieren. Bisher erscheint es jedoch nur sinnvoll, die DNS-Datensätze von Versteegh & Nieuwstadt (1999) nachzurechnen.

4.4.1 Vergleich mit DNS-Daten

Analog zu den FLUENT-Rechnungen wird der unendlich ausgedehnte vertikale Kanal von Versteegh & Nieuwstadt (1999) hier auch als Kavität mit einem Seitenverhältnis von $\Gamma = 40$ simuliert. Die Rayleigh-Zahlen werden durch das Anpassen der „Erdbeschleunigung“ erreicht. Die Profile und Gradienten werden auf halber Länge $L^*/2$ ausgewertet, da die Strömung hier nahezu eindimensional ist.

Es werden zwei verschiedene Gitterfeinheiten benutzt, 8×200 und 4×200 . Es musste eine relativ grobe Auflösung entlang der Kanalhöhe h^* von 8 bzw. 4 Zellen gewählt werden, da der Mittelpunkt der ersten Zelle jenseits des Geschwindigkeitsmaximums liegen muss, um die Wandfunktionen benutzen zu können. Bei einer feineren Gitterauflösung würde der wandnächste Punkt evt. schon innerhalb der viskosen Unterschicht liegen und die gewählte Wandbehandlung wäre nicht mehr gültig.

In Tabelle 4.3 sind die Ergebnisse des CAFFA-Codes für die vier Rayleigh-Zahlen von Versteegh & Nieuwstadt (1999) angegeben. Es werden jeweils die ermittelten Gradienten mit den DNS-Daten für die beiden Gitterfeinheiten verglichen. Es ist zu erkennen, dass der relative Fehler im Temperaturgradienten zwischen $-3,1\% < r_T < 5,5\%$ und im Geschwindigkeitsgradienten zwischen $-13,4\% < r_u < 3,6\%$ liegt. Im Vergleich zu den FLUENT-Ergebnissen, die für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ Fehler zwischen -70% und 40% aufwiesen, kann eine deutliche Verbesserung der Genauigkeit festgestellt werden.

Da die Wandfunktionen für den Grenzfall $Ra \rightarrow \infty$ gültig sind, sollten die Ergebnisse für die hohen Rayleigh-Zahlen besser sein als für kleine Rayleigh-Zahlen. Dies ist auch in Tabelle 4.3 zu erkennen. Für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ liegt der relative Fehler im Temperaturwandgradienten (also auch in der Wandwärmestromdichte) zwischen $-0,7\% < r_T < 1,8\%$. Für $Ra = 8,2 \cdot 10^5$ bewegt er sich hingegen im Bereich von $-3,1\% < r_T < 2,3\%$. Ein ähnliches Verhalten ist auch für die Geschwindigkeitswandgradienten festzustellen. Dies

Tabelle 4.3: Wandgradienten, die mit dem modifizierten CAFFA-Code ermittelt wurden und der zugehörige Fehler im Vergleich zu den DNS-Gradienten aus Tabelle 4.1.

Ra	Gitter	$\left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w$ in $\frac{\text{K}}{\text{m}}$	r_T in %	$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right _w$ in $\frac{1}{\text{s}}$	r_u in %
$5,0 \cdot 10^6$	8×200	6490,8	-0,68	134,59	+3,63
$5,0 \cdot 10^6$	4×200	6654,5	+1,83	128,44	-1,10
$2,0 \cdot 10^6$	8×200	4839,6	-1,53	65,03	+1,48
$2,0 \cdot 10^6$	4×200	5032,8	+2,40	61,71	-3,70
$8,2 \cdot 10^5$	8×200	3640,9	-3,06	31,69	-3,30
$8,2 \cdot 10^5$	4×200	3840,8	+2,26	29,99	-8,48
$5,4 \cdot 10^5$	8×200	3189,1	-0,67	22,50	-8,46
$5,4 \cdot 10^5$	4×200	3386,8	+5,48	21,28	-13,42

ist leicht nachzuvollziehen, da die „Konstanten“ C und D im logarithmischen Profil noch eine Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl aufwiesen (für kleine Rayleigh-Zahlen), hier aber die extrapolierten Werte C_∞ und D_∞ benutzt wurden, die für asymptotisch große Rayleigh-Zahlen gültig sind. Es wurde darauf verzichtet, die Rayleigh-Abhängigkeit von C und D zu implementieren, da die Rayleigh-Zahl eine globale Größe darstellt und somit nicht vom Code selbständig ermittelt werden kann. Es wäre stattdessen eine zusätzliche Benutzereingabe notwendig. Dieses Vorgehen ist analog zur Implementierung des logarithmischen Wandgesetzes, bei dem man für kleine Reynolds-Zahlen ebenfalls eine Abhängigkeit $B^+(Re)$ feststellt, die aber nicht weiter berücksichtigt wird.

Die Abbildung 4.7 zeigt berechnete Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ (oben) bzw. $Ra = 5,4 \cdot 10^5$ (unten) zusammen mit den DNS-Profilen. Es ist zu erkennen, dass für beide Gitterfeinheiten die Übereinstimmung gut ist, wie schon anhand von Tabelle 4.3 deutlich wurde. Das Geschwindigkeitsmaximum kann bei Verwendung des feinen Gitters (zumindest für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$) sehr gut wiedergegeben werden. Dies ist ebenfalls eine deutliche Verbesserung gegenüber den FLUENT-Profilen aus Abbildung 4.2, die das Geschwindigkeitsmaximum deutlich überschätzten.

4.4.2 Vergleich von Turbulenzgrößen

Bisher wurden die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile aus den CAFFA-Simulationen mit DNS-Daten verglichen, wobei eine gute Übereinstimmung festgestellt werden konnte. In diesem Abschnitt sollen nun auch Turbulenzgrößen betrachtet werden, da im Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, dass vor allem die k^* -Gleichung Probleme bereitet.

In Abbildung 4.8 ist die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k^* für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ sowohl aus den DNS-Daten als auch aus CAFFA-Ergebnissen für das 8×200 Gitter dargestellt. Beide Verläufe von k^* zeigen einen ähnlichen Trend mit einem Maximum in der Kanalmitte bei $h^*/2$. Die Übereinstimmung ist allerdings nur qualitativer Natur und die Profile weichen deutlich voneinander ab. So ist z.B. das Maximum von k^*

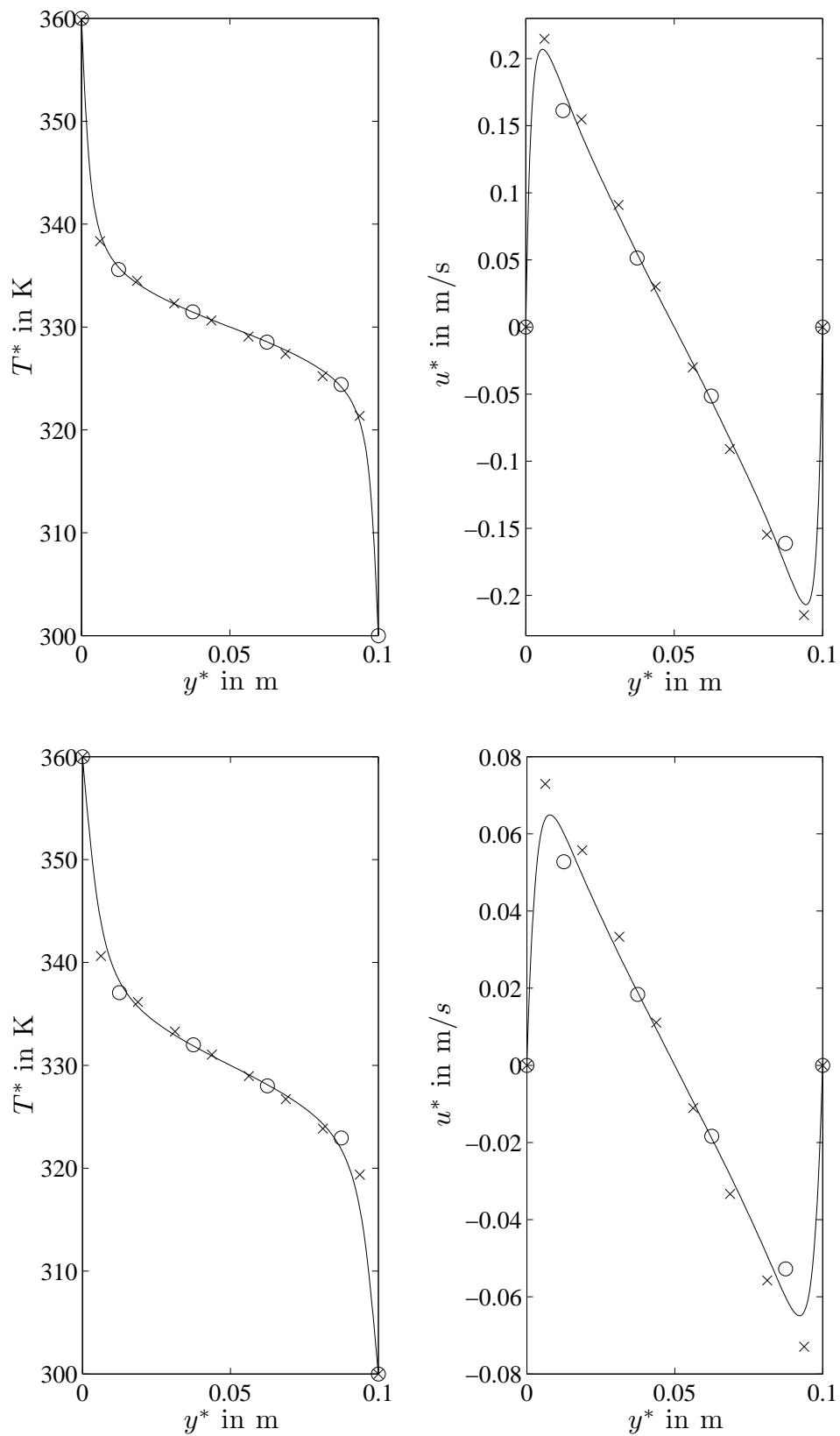


Abbildung 4.7: Vergleich der DNS Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile (—) von Versteegh & Nieuwstadt (1999) für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ (oben) und $Ra = 5,4 \cdot 10^5$ (unten) mit den CAFFA-Ergebnissen für das 8×200 Gitter (x) und das 4×200 Gitter (o).

aus den CAFFA-Ergebnissen um ca. 25% zu klein. Dies ist auch zu erwarten, da die Bilanzgleichung für k^* nicht an die natürliche Konvektion angepasst ist.

Abbildung 4.9 zeigt den Verlauf der entdimensionierten turbulenten Temperaturleitfähigkeit a_t^*/a^* . Hier ist die Übereinstimmung zwischen DNS- und CAFFA-Werten deutlich besser als für k^* . Dies wird durch das Anpassen der ω^* Randbedingung nach Gleichung (4.38) erreicht. Durch die neu gewählte Randbedingung wird sichergestellt, dass a_t^* bzw. ν_t^* in der wandnächsten Zelle einen Wert zugewiesen bekommen, der (näherungsweise) richtig ist. Somit werden die Größen, die die Auswirkung der Turbulenz in den Gleichungen repräsentieren (also a_t^* bzw. ν_t^*), ausreichend genau berechnet, obwohl k^* und ω^* einen Verlauf aufweisen, der nicht zu den DNS-Daten passt.

Solange als Ergebnis von CFD-Simulationen nur das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von Interesse ist und nicht die Profile von k^* und ω^* , kann das hier gezeigte Vorgehen zur Simulation von natürlicher Konvektion benutzt werden. Sind aber k^* und ω^* zur Lösung eines Problems notwendig, wie z.B. zur Analyse von Entropieerzeugung (siehe Kock & Herwig (2005)), so ist das hier gezeigte Vorgehen nicht mehr anwendbar. Es müsste dann ein neues Turbulenzmodell entwickelt werden oder evt. auf *Reynolds stress models* umgestiegen werden.

Es sei aber darauf hingewiesen, dass das hier aufgezeigte Problem nicht nur im Fall der natürlichen Konvektion auftritt, sondern auch für die erzwungene Konvektion bekannt ist. So wurde beispielsweise in einer Studie von Mocikat *et al.* (2003) mit Hilfe eines 3D Laser-Doppler-Anemometers eine Innenraumströmung in einer Kavität mit Einbauten untersucht. Hierbei wurden sowohl die Geschwindigkeit als auch die turbulenten Fluktuationen gemessen. Ein anschließender Vergleich mit CFD-Rechnungen ergab, dass das Geschwindigkeitsfeld sehr gut wiedergegeben werden kann. Allerdings zeigten z.B. die Profile für k^* Abweichungen von mehr als 100%. Somit sind die Standard-Turbulenzmodelle nicht in der Lage, für erzwungene Konvektion die Turbulenzgrößen richtig wiederzugeben.³

In der Arbeit von Menter (1994), in der das heute weit verbreitete SST-Modell (*shear stress transport model*) eingeführt wurde, findet man zu diesem Thema:

„A number of k - ε models with different damping functions have been tested for a significant number of flows, with the conclusion that the specific form of the damping functions has little to no effect on the predicted velocity profiles and the skin friction of high-Reynolds-number flows. It should not be forgotten, that the main (and often the only) information the mean flow solver gets from the turbulence model is the eddy viscosity. It is not clear why fitting the DNS data for k and ε should lead to an improved eddy-viscosity distribution. In the end, the agreement with DNS data might only be a matter of interpretation.“

Somit handelt es sich bei den Abweichungen der Turbulenzgrößen k^* und ω^* nicht um ein Problem, das ausschließlich für die natürliche Konvektion auftritt, sondern um ein allgemeines Problem der Turbulenzmodellierung bei Verwendung des Wirbelviskositätsansatzes, das häufig in Kauf genommen wird.

³Obwohl diese Probleme für die erzwungene Konvektion bekannt sind, werden in der Praxis weiterhin die Standard-Turbulenzmodelle benutzt, da sie ein Optimum aus Genauigkeit der Ergebnisse, Robustheit und Rechenzeit darstellen. Es gibt zur Zeit kaum Bestrebungen, auf z.B. *Reynolds stress models* umzusteigen, nur weil die Turbulenzgrößen nicht richtig wiedergegeben werden.

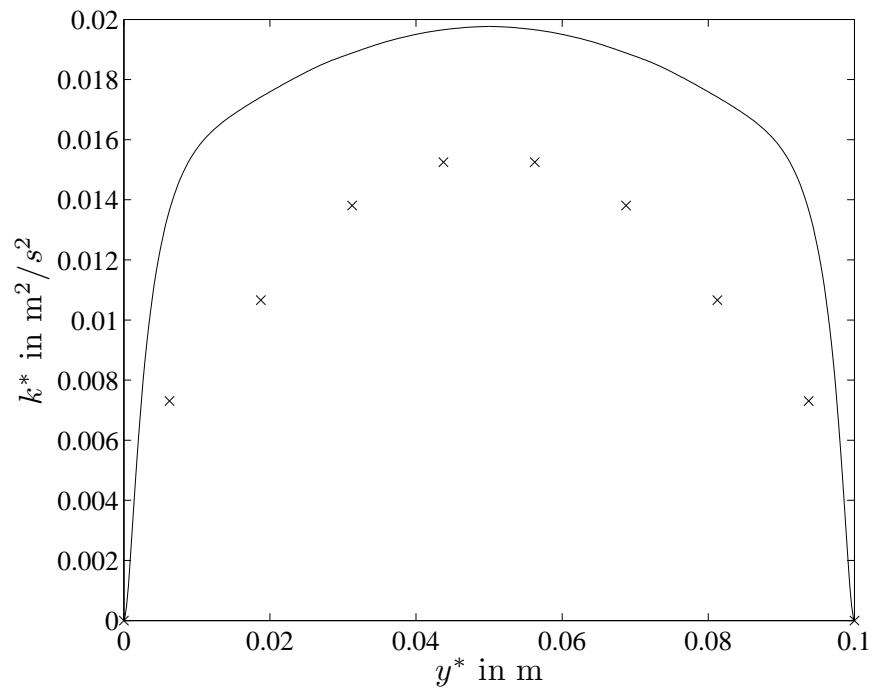


Abbildung 4.8: Verlauf der kinetischen Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k^* aus DNS-Daten (—) und aus CAFFA-Berechnungen (\times) für das 8×200 Gitter.

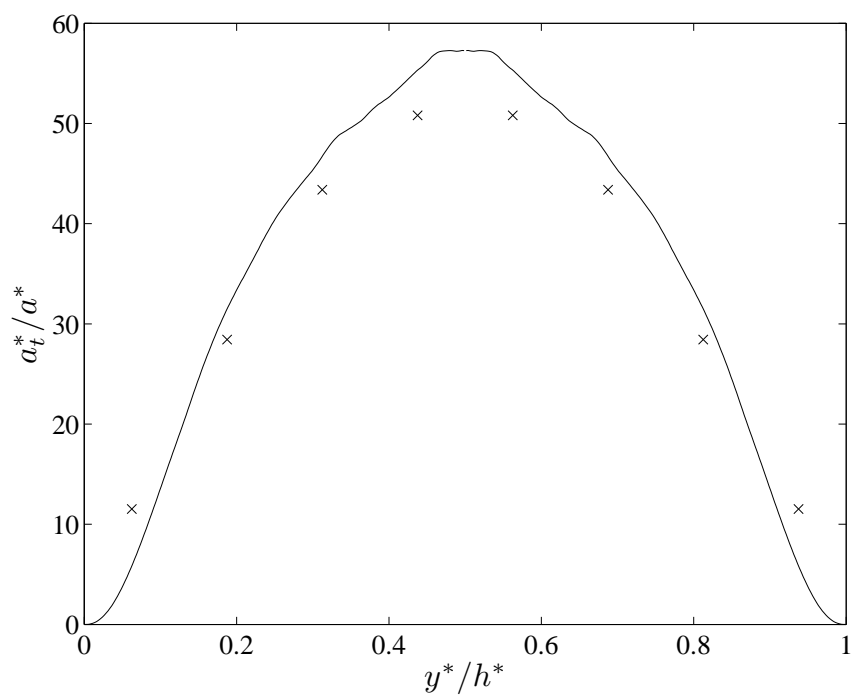


Abbildung 4.9: Verlauf der (entdimensionierten) turbulenten Temperaturleitfähigkeit für $\text{Ra} = 5,0 \cdot 10^6$ aus Versteegh & Nieuwstadt (1999) (—) und CAFFA-Simulation (\times).

Kapitel 5

Rayleigh-Bénard Konvektion

In diesem Kapitel soll die Rayleigh-Bénard Konvektion vorgestellt und unter asymptotischen Gesichtspunkten analysiert werden. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Es befindet sich ein Fluid zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen, horizontalen Platten, wobei die untere Platte eine höhere Temperatur (T_w^*) besitzt als die obere Platte (T_k^*). Aufgrund des sich einstellenden Temperaturprofils tritt im Fluid eine instabile Schichtung auf, d.h. Fluidvolumen mit hoher Dichte befinden sich oberhalb von Volumen mit niedriger Dichte.

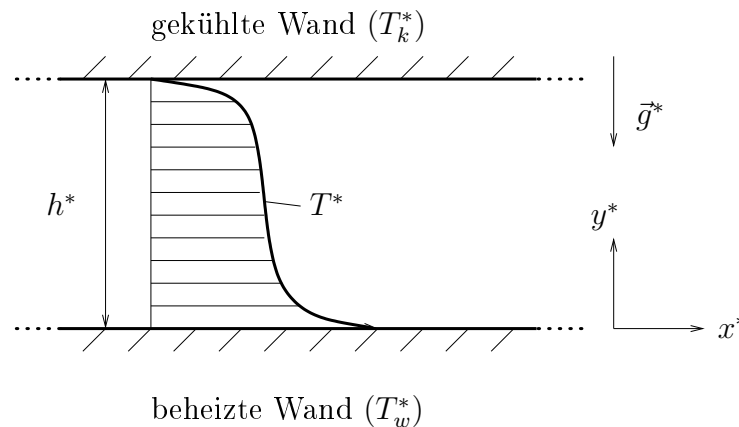


Abbildung 5.1: Prinzipieller Aufbau der Rayleigh-Bénard-Konvektion

Die Rayleigh-Bénard Konvektion kann ebenfalls durch die Rayleigh-Zahl Ra charakterisiert werden, die schon zur Beschreibung der natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden benutzt wurde

$$Ra \equiv \frac{g^* \beta^* \Delta T^* h^{*3}}{a^* \nu^*}. \quad (5.1)$$

Überschreitet die Rayleigh-Zahl einen bestimmten Wert ($Ra_{krit} > 1708$, vgl. Drazin (2002)), so können zufällig auftretende Störungen nicht mehr durch molekulare Ausgleichsprozesse gedämpft werden und es setzt eine Strömung ein, siehe z.B. Herwig (2004). Bei einem weiteren Erhöhen der Rayleigh-Zahl wird die Strömung schließlich turbulent

($Ra \gtrsim 10^5$). Für den turbulenten Fall zeigt das Temperaturprofil einen qualitativen Verlauf, wie er in Abbildung 5.1 eingezeichnet ist. An der Wand gibt es einen hohen Gradienten, da hier der Energietransport ausschließlich durch Wärmeleitung erfolgt. In der Kernschicht ist der Gradient flacher, da der Energietransport hier durch turbulenten Transport dominiert wird.

Im Fall der Rayleigh-Bénard-Konvektion ist man meist am übertragenen Wärmestrom bzw. an der Nußelt-Zahl Nu interessiert, da diese messtechnisch relativ einfach zu ermitteln ist

$$Nu \equiv \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{h^*}{\Delta T^*}. \quad (5.2)$$

Eine Dimensionsanalyse zeigt, dass die Nußelt-Zahl nur von der Rayleigh-Zahl und der Prandtl-Zahl abhängt, also $Nu = f(Ra, Pr)$. Da in Experimenten die ideale Rayleigh-Bénard Konvektion mit unendlich ausgedehnten Platten nicht umgesetzt werden kann, kommt noch das sogenannte Seitenverhältnis (*aspect ratio*) $\Gamma \equiv D^*/h^*$ als Einflussgröße hinzu, wobei D^* den Durchmesser der Konvektionszelle angibt

$$Nu = f(Ra, Pr, \Gamma). \quad (5.3)$$

Trotz der sehr einfachen Geometrie der Rayleigh-Bénard Konvektion und einer intensiven experimentellen und numerischen Untersuchung in den letzten Jahrzehnten gibt es keine allgemein anerkannte Theorie zur Beschreibung des Wärmeübergangs. Es ist z.B. immer noch nicht geklärt, ob ein einfaches Potenzgesetz ausreicht, um den Zusammenhang $Nu = f(Ra, Pr, \Gamma)$ zu beschreiben, oder ob eine komplexere Funktion notwendig ist.

In einer frühen Arbeit von Priestley (1954) wurde angenommen, dass für hohe Rayleigh-Zahlen der übertragene Wärmestrom unabhängig vom Plattenabstand h^* ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$Nu \sim Ra^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{h^*}{\Delta T^*} \sim \left(\frac{g^* \beta^* \Delta T^*}{a^* \nu^*} \right)^{1/3} h^*, \quad (5.4)$$

wobei der Plattenabstand h^* gekürzt werden kann. Dies wurde zunächst durch verschiedene Messungen wie z.B. von Goldstein & Tokuda (1980) bestätigt.

Castaing *et al.* (1989) führten Experimente über einen großen Rayleigh-Zahlenbereich mit verbesserter Genauigkeit im Vergleich zu früheren Messungen durch und erhielten $Nu = 0,23 \cdot Ra^{0,282}$ bei $Pr \approx 1$. Aufgrund der neuen Ergebnisse leiteten sie theoretisch ein Potenzgesetz her, das einen Exponenten von $2/7 = 0,286$ lieferte, was gut zu den neuen Messdaten passte. Shraiman & Siggia (1990) fanden basierend auf Grenzschichtüberlegungen eine alternative Herleitung für das $2/7$ -Potenzgesetz. Wu & Libchaber (1992) bestimmten anhand von Experimenten $Nu = 0,146 \cdot Ra^{0,286}$ und Kerr (1996) erhielt aufgrund von DNS-Rechnungen $Nu = 0,186 \cdot Ra^{0,276}$. Aufgrund der Vielzahl der Studien, die eine Übereinstimmung feststellten, schien das $2/7$ -Potenzgesetz gesichert.

Grossmann & Lohse (2000) entwickelten eine Theorie, die von der Dissipation in der Grenzschicht und im Kernbereich der Strömung ausgeht. Es konnten verschiedene Regimes identifiziert werden, für die eigene Potenzgesetze gelten. Um eine Nußelt-Beziehung

für eine konkrete Messung zu erhalten, müssen die entsprechenden Regimes in einem Rayleigh-Prandtl-Phasendiagramm aufgesucht werden und die Nußelt-Beziehung ist dann die Superposition der Potenzgesetze in den beteiligten Bereichen. Xu *et al.* (2000) fanden z.B. eine gute Übereinstimmung zwischen den erhaltenen experimentellen Daten und der neuen Theorie. In Grossmann & Lohse (2001) ist eine Erweiterung der Theorie für große Prandtl-Zahlen angegeben.

Niemela *et al.* (2000) führten Experimente für $10^6 \leq Ra \leq 10^{17}$ und $Pr \approx 1$ durch und erhielten $Nu = 0,124 \cdot Ra^{0,309}$. Hierbei liegt der Exponent zwischen den theoretisch begründeten Werten $1/3$ und $2/7$, was mit den vorhandenen Theorien nicht zu erklären ist. Die Theorie von Grossmann & Lohse (2000) ist ebenfalls nicht in der Lage, die neuen Messdaten gut wiederzugeben. Niemela *et al.* (2000) weisen zusätzlich darauf hin, dass die Kenntnis der Stoffwerte wichtig für die Auswertung ist. Sie werteten die Daten von Wu & Libchaber (1992) mit Stoffdaten von verbesserter Genauigkeit erneut aus und erhielten $Nu = 0,146 \cdot Ra^{0,299}$.

Ahlers (2001) und Verzicco (2002) untersuchten den Einfluss von Wärmeleitung in der Wand auf die Nußelt-Zahl. Sie stellten fest, dass die Wärmeleitung weder vernachlässigt noch dadurch korrigiert werden kann, dass man den Wärmestrom des evakuierten Aufbaus heranzieht. Ahlers (2001) schlug eine Korrektur für verschiedene Wandmaterialien vor. Er wertete z.B. die Daten von Niemela *et al.* (2000) unter Berücksichtigung der Korrektur aus und erhielt $Nu \sim Ra^{0,318}$.

In aktuellen Experimenten, z.B. von Ashkenazi & Steinberg (1999), Chavanne *et al.* (2001), Nikolaenko & Ahlers (2003), Niemela & Sreenivasan (2003) sowie Roche *et al.* (2004) wurde sichergestellt, dass der Wärmetransport durch die Wand aufgrund eines veränderten Aufbaus vernachlässigt werden kann oder dass er durch einen analytischen Ansatz hinreichend korrigiert werden kann. Diese Daten zusammen mit DNS-Ergebnissen, bei denen Wärmeleitung in Wänden prinzipiell ausgeschlossen werden kann, dienen als Referenz zur Anpassung von Konstanten.

Im Gegensatz zu bisherigen Studien zur Rayleigh-Bénard Konvektion soll in dieser Arbeit zunächst versucht werden, eine universelle Beschreibung des Temperaturprofil zu finden. Dies wird über ein Anpassen der Gradienten erreicht, das sich schon für die natürliche Konvektion an vertikalen Wänden bewährt hat, siehe Kapitel 3. Das Temperaturprofil kann anschließend relativ einfach in eine Nußelt-Beziehung umgeschrieben werden. Somit kann eine neue Nußelt-Beziehung angegeben werden, deren Struktur theoretisch gut begründet ist. Die im nachfolgenden aufgezeigten Überlegungen wurden bereits in Hölling & Herwig (2006) veröffentlicht.

5.1 Temperaturprofil

Ausgangspunkt für die asymptotische Analyse des Temperaturprofils ist die Rayleigh-Bénard Konvektion zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten nach Abbildung 5.1, wie sie z.B. numerisch von Grötzbach (1990), Wörner (1994)¹, Kerr (1996) und Hartlep (2004) für $Pr = 0,71$ untersucht wurde. Aufgrund der unendlich ausgedehnten Platten

¹Die Daten von Grötzbach (1990) und Wörner (1994) sind auf der *homepage* des Instituts für Reaktorsicherheit (Forschungszentrum Karlsruhe) abrufbar: <http://hikwww4.fzk.de/irs/irs3/>

verschwinden die lokalen zeitgemittelten Geschwindigkeiten (also $u^* = v^* = w^* = 0$). Es muss also lediglich ein Ausdruck für das Temperaturprofil gefunden werden. Die nachfolgende Herleitung ist den Überlegungen zur natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden aus Kapitel 3 sehr ähnlich.

Unter der Annahmen von verschwindenden zeitgemittelten Geschwindigkeiten und keinen Gradienten entlang der Platten aufgrund der unendlichen Abmessungen (also $\partial(\dots)/\partial x^* = 0$) vereinfacht sich die Energiegleichung (2.8) zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left[a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \overline{v^{*'} T^{*'}} \right] \Rightarrow a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w = a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \overline{v^{*'} T^{*'}}. \quad (5.5)$$

Offensichtlich ist die Größe $a^* \cdot \partial T^* / \partial y^* \Big|_w$ charakteristisch für die Rayleigh-Bénard Konvektion, da $a^* \cdot \partial T^* / \partial y^* - \overline{v^{*'} T^{*'}}$ (was prinzipiell dem insgesamt übertragenen Wärmestrom entspricht) konstant ist für alle $0 \leq y^* \leq h^*$ und gleich $a^* \cdot \partial T^* / \partial y^* \Big|_w$. Somit kann eine Bezugstemperatur mit dem Temperaturgradienten an der Wand gebildet werden, also

$$T_{rbc}^* \equiv \left(\frac{a^* \nu^*}{g^* \beta^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^3 \right)^{1/4}. \quad (5.6)$$

Im Unterschied zu Gleichung (3.7) aus Kapitel 3 wurde hier nicht a^{*2} sondern $a^* \nu^*$ gewählt. Diese Wahl der Bezugstemperatur erweist sich im folgenden als günstig, um eine vermeintliche Prandtl-Zahl-Abhängigkeit der Nußelt-Zahl-Beziehung zu vermeiden, siehe dazu auch Abschnitt 5.2. Um den Unterschied deutlich zu machen, wird die Bezugstemperatur mit dem Index rbc für *Rayleigh-Bénard convection* gekennzeichnet.

Mit Hilfe der Bezugstemperatur T_{rbc}^* nach Gleichung (5.6) kann die dimensionslose Temperaturdifferenz Θ_{rbc}^\times eingeführt werden, die hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die heiße Wand angegeben wird

$$\Theta_{rbc}^\times \equiv \frac{T_w^* - T^*}{T_{rbc}^*}. \quad (5.7)$$

Die Rayleigh-Bénard-Konvektion weist ebenfalls eine Zwei-Schichten-Struktur auf, bei der eine Wandschicht mit molekularem und turbulentem Wärmetransport und eine Kernschicht mit ausschließlich turbulentem Wärmetransport auftritt, siehe Abbildung 5.2. Ein geeignetes Maß für die Dicke δ_{rbc}^* der Wandschicht ist

$$\delta_{rbc}^* \equiv \frac{T_{rbc}^*}{|\partial T^* / \partial y^*|_w}, \quad (5.8)$$

wobei hier gilt

$$\lim_{Ra \rightarrow \infty} \frac{\delta_{rbc}^*}{h^*} = 0. \quad (5.9)$$

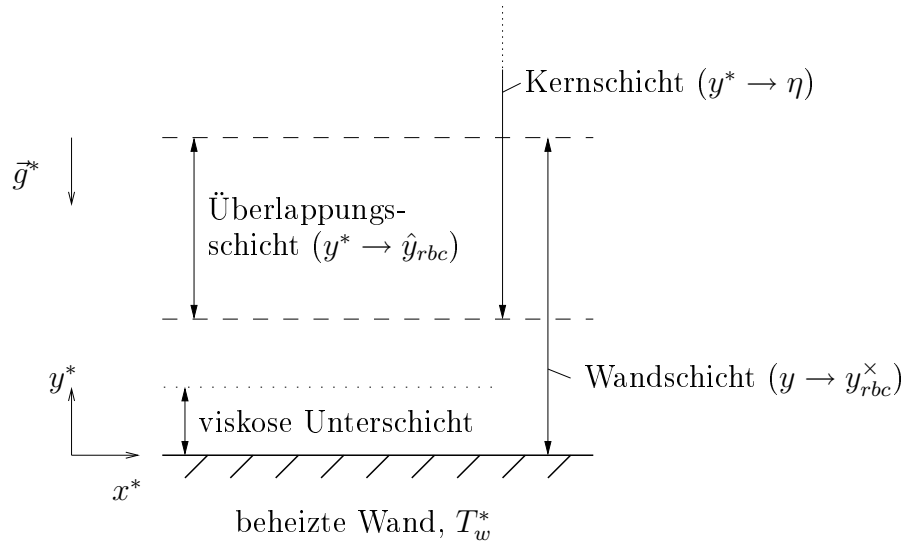


Abbildung 5.2: Zwei-Schichten-Struktur in der Nähe der beheizten Wand. Unmittelbar an der Wand existiert eine viskose Unterschicht, in der nur Wärmeleitung stattfindet. Die viskose Unterschicht ist ein Teil der Wandschicht, in der molekularer und turbulenter Energietransport auftreten. Die Wandschicht besitzt keine scharfe Abgrenzung zur Kernschicht, in der nur turbulenter Transport von Bedeutung ist. Es gibt vielmehr eine Überlappungsschicht, in der sowohl y_{rbc}^x als auch η gültig sind.

Somit tritt für $Ra \rightarrow \infty$ eine Singularität an der Wand auf². Um trotz der Singularität eine sinnvolle Beschreibung des Wandabstands zu behalten, wird der entdimensionierte Wandabstand y_{rbc}^x eingeführt

$$y_{rbc}^x \equiv \frac{y^*}{\delta_{rbc}^*} = \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{y^*}{T_{rbc}^*}, \quad (5.10)$$

so dass für alle Werte von y^* innerhalb der Wandschicht gilt

$$\lim_{Ra \rightarrow \infty} \frac{y^*}{\delta_{rbc}^*} = O(1). \quad (5.11)$$

Der Wandabstand in der Kernschicht wird mit h^* entdimensioniert und ist somit $\eta \equiv y^*/h^*$. Hier kann y_{rbc}^x aus der Wandschicht nicht benutzt werden, weil z.B. für $y^* = h^*/2$ folgt

$$\lim_{Ra \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{h^*/2}{T_{rbc}^*} \right) \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

² $T^*(y^* = 0) = T_w^*$, aber $\lim_{\delta^* \rightarrow 0} T^*(y^* = \delta^*) = T_w^* - \Delta T^*/2$, wobei T_w^* die Temperatur direkt an der warmen Wand ist ($y^* = 0$) und $\Delta T^* = T_w^* - T_k^*$.

5.1.1 Überlappungsschicht

Die Wand- und die Kernschicht sind nicht klar voneinander abgegrenzt, sondern überlappen sich. Somit sind in dieser Überlappungsschicht beide Wandabstände, also y_{rbc}^\times und η , gültig. Das Temperaturprofil erhält man nun, indem man, wie schon in Kapitel 3 für die vertikale Wand, eine Zwischenkoordinate³ \hat{y}_{rbc} einführt

$$\hat{y}_{rbc} = \frac{y^*}{h^{*(1-\alpha)} \delta_{rbc}^{*\alpha}}. \quad (5.13)$$

In dieser Zwischenkoordinate werden nun die Gradienten angepasst. Als Anpassungsvorschrift gilt, siehe z.B. Schlichting & Gersten (2000):

$$\frac{\partial \Theta_{rbc}^\times}{\partial \hat{y}_{rbc}} = \lim_{y_{rbc}^\times \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(y_{rbc}^\times)}{\partial y_{rbc}^\times} \frac{\partial y_{rbc}^\times}{\partial \hat{y}_{rbc}} = \lim_{y_{rbc}^\times \rightarrow \infty} \frac{h^{*(1-\alpha)} \delta_{rbc}^{*\alpha}}{\delta_{rbc}^*} \cdot \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(y_{rbc}^\times)}{\partial y_{rbc}^\times} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \Theta_{rbc}^\times}{\partial \hat{y}_{rbc}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}_{rbc}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{h^{*(1-\alpha)} \delta_{rbc}^{*\alpha}}{h^*} \cdot \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(\eta)}{\partial \eta}. \quad (5.15)$$

Multiplikation von Gleichung (5.14) und (5.15) mit y^* und Gleichsetzen führt auf

$$\lim_{y_{rbc}^\times \rightarrow \infty} y_{rbc}^\times \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(y_{rbc}^\times)}{\partial y_{rbc}^\times} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(\eta)}{\partial \eta}. \quad (5.16)$$

Allgemein kann Gleichung (5.16) nur erfüllt werden, wenn beide Seiten gleich einer Konstanten G sind, also

$$\lim_{y_{rbc}^\times \rightarrow \infty} \frac{\partial \Theta_{rbc}^\times(y_{rbc}^\times)}{\partial y_{rbc}^\times} = \frac{G}{y_{rbc}^\times}. \quad (5.17)$$

Nach Integration über die Wandschicht erhält man also

$$\lim_{y_{rbc}^\times \rightarrow \infty} \Theta_{rbc}^\times = G \ln(y_{rbc}^\times) + H. \quad (5.18)$$

Dies ist die asymptotische Struktur des Temperaturprofils für die Rayleigh-Bénard Konvektion, das in der Überlappungsschicht gültig ist.

³Es gilt erneut, dass $0 \leq \alpha \leq 1$ und somit $\eta \leq \hat{y}_{rbc} \leq y_{rbc}^\times$ ist.

5.1.2 Viskose Unterschicht

Für den Bereich direkt an der Wand (viskose Unterschicht, siehe Abbildung 5.2) kann das Temperaturprofil analytisch bestimmt werden. Durch die Wand werden die turbulenten Schwankungen fast vollständig gedämpft und es gilt $-\overline{v'^j T'^j} = 0$. Es existiert also eine viskose Unterschicht, in der nur Wärmeleitung auftritt, und die Bestandteil der Wandschicht ist. Integration der vereinfachten Energiegleichung ($\partial^2 T^* / \partial y^{*2} = 0$) für die viskose Unterschicht liefert:

$$T_w^* - T^* = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y^*, \quad (5.19)$$

oder in entdimensionierter Form

$$\frac{T_w^* - T^*}{T_{rbc}^*} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{y^*}{T_{rbc}^*} \Rightarrow \Theta_{rbc}^\times = y_{rbc}^\times. \quad (5.20)$$

5.1.3 Vergleich mit Messdaten

Experimentelle und numerische (DNS) Datensätze können benutzt werden, um die Struktur von Gleichung (5.18) zu überprüfen und die noch unbekannt Konstanten G und H zu ermitteln. Leider sind in der Literatur nur wenige Temperaturprofile zu finden, obwohl zahlreiche Experimente zur Bestimmung von Nußelt-Zahlen durchgeführt wurden. Zusätzlich beschränkt sich der Bereich, in dem diese Temperaturprofile gemessen wurden, auf relativ kleine Rayleigh-Zahlen ($Ra \leq 10^{10}$). Chavanne *et al.* (2001) geben eine Übersicht über Rayleigh-Bénard Experimente der letzten Zeit. In Abschnitt 5.3 wird das Temperaturprofil mit zusätzlichen Daten verglichen, die erschienen sind, nachdem die Konstanten G und H bereits in Hölling & Herwig (2006) ermittelt wurden. Mit diesen Daten ist somit eine *a posteriori* Überprüfung möglich.

Tabelle 5.1 gibt Studien an, in denen Temperaturprofile zur Verfügung gestellt werden. Hierbei handelt es sich sowohl um experimentelle als auch um DNS-Daten. Diese Temperaturprofile werden nun benutzt, um das asymptotische Profil nach Gleichung (5.18) zu validieren. Die Datensätze sind in Abbildung 5.3 (DNS-Daten) und Abbildung 5.4 (Messdaten) in ihrer dimensionslosen Form angegeben, also in Θ_{rbc}^\times und y_{rbc}^\times .

Tabelle 5.1: Studien, in denen DNS-Daten oder gemessene Temperaturprofile zur Verfügung gestellt werden, anhand der die Konstanten G und H ermittelt werden.

Studie	Ra	Pr	Art	Nu
Kerr (1996)	$2,0 \cdot 10^7$	0,7	DNS	$0,186 \cdot Ra^{0,276}$
Grötzbach (1990)	$3,81 \cdot 10^5$	0,7	DNS	-
Wörner (1994)	$6,3 \cdot 10^5$	0,7	DNS	-
Hartlep (2004)	$10^6 \div 10^7$	0,7	DNS	$0,175 \cdot Ra^{0,278}$
Chu & Goldstein (1973)	$9,34 \cdot 10^6 \div 1,86 \cdot 10^7$	5,0	Exp.	$0,183 \cdot Ra^{0,278}$
Du & Tong (2000)	$1,5 \cdot 10^9$	5,4	Exp.	$0,17 \cdot Ra^{0,29}$

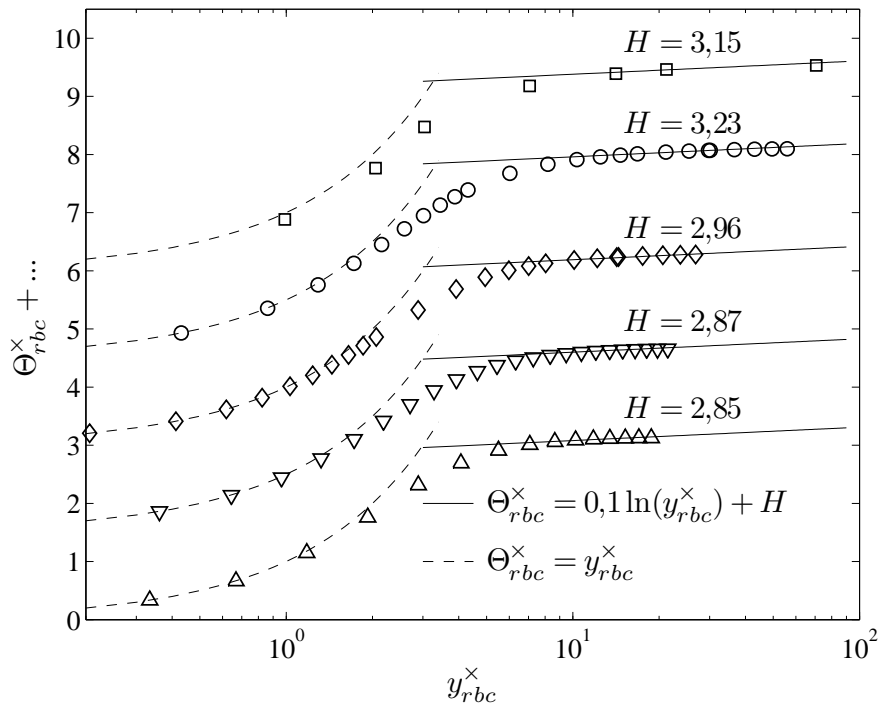


Abbildung 5.3: Entdimensionierte DNS-Temperaturprofile für $Pr = 0,7$ aus verschiedenen Studien: Grötzbach (1990) für $Ra = 3,81 \cdot 10^5$ (\triangle), Wörner (1994) für $Ra = 6,3 \cdot 10^5$ (∇), Hartlep (2004) für $Ra = 10^6$ (\diamond) und $Ra = 10^7$ (\circ), Kerr (1996) für $Ra = 2,0 \cdot 10^7$ (\square). Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden die einzelnen Profile um jeweils 1,5 Einheiten verschoben.

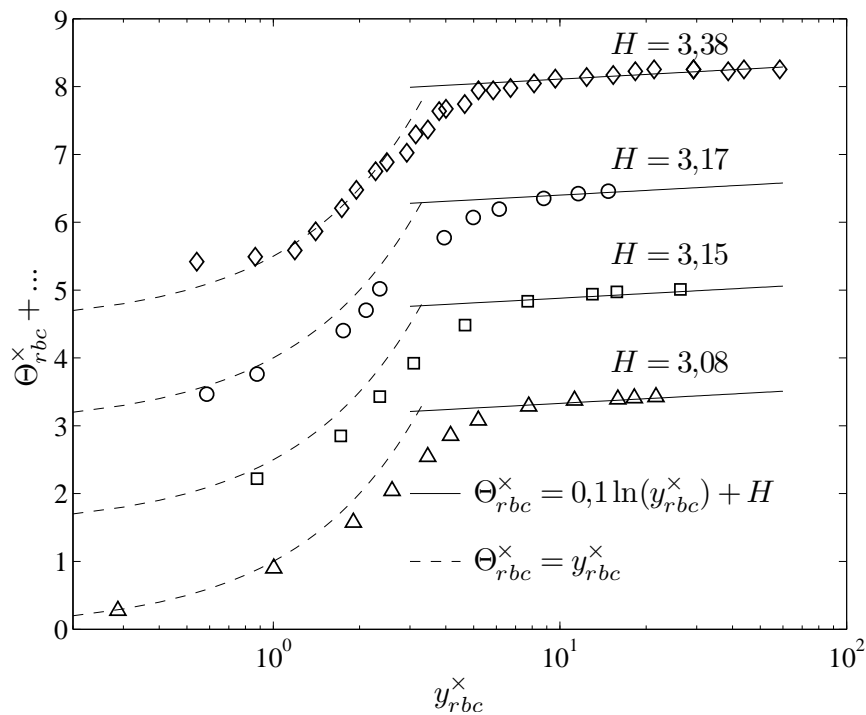


Abbildung 5.4: Entdimensionierte Temperaturprofile aus Messdaten für $Pr \approx 5$ aus verschiedenen Studien: Chu & Goldstein (1973) für $Ra = 5,88 \cdot 10^6$ (\triangle), für $Ra = 9,34 \cdot 10^6$ (\square) und für $Ra = 1,86 \cdot 10^7$ (\circ), Du & Tong (2000) für $Ra = 1,5 \cdot 10^9$ (\diamond). Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden die einzelnen Profile um jeweils 1,5 Einheiten verschoben.

Die Übereinstimmung der Profile mit dem linearen Verlauf in der viskosen Unterschicht ist sehr gut⁴. Darüberhinaus können in der Überlappungsschicht alle Temperaturprofile an ein logarithmisches Profil mit der einheitlichen Steigung $G = 0,1$ angepasst werden. Allerdings weist H eine Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl auf. Diese Abhängigkeit ist offensichtlich ein Effekt von asymptotisch zu kleinen Rayleigh-Zahlen, d.h. dass die vorliegenden Temperaturprofile bei Rayleigh-Zahlen aufgenommen wurden, die aus asymptotischer Sicht nicht groß genug sind, um Gleichung (5.18) für $Ra \rightarrow \infty$ zu genügen. Die individuellen Werte von H der einzelnen Temperaturprofile sind in den Abbildungen 5.3 und 5.4 explizit angegeben.

Um nun den asymptotischen Wert von H_∞ für $Ra \rightarrow \infty$ aus den Daten für endliche Rayleigh-Zahlen zu ermitteln, wird nach Abbildung 5.5 H mit der Rayleigh-Zahl Ra wie folgt korreliert

$$H = 3,43 - \frac{14,94}{Ra^{0,25}} \quad (5.21)$$

und man erhält $H_\infty = 3,43$.

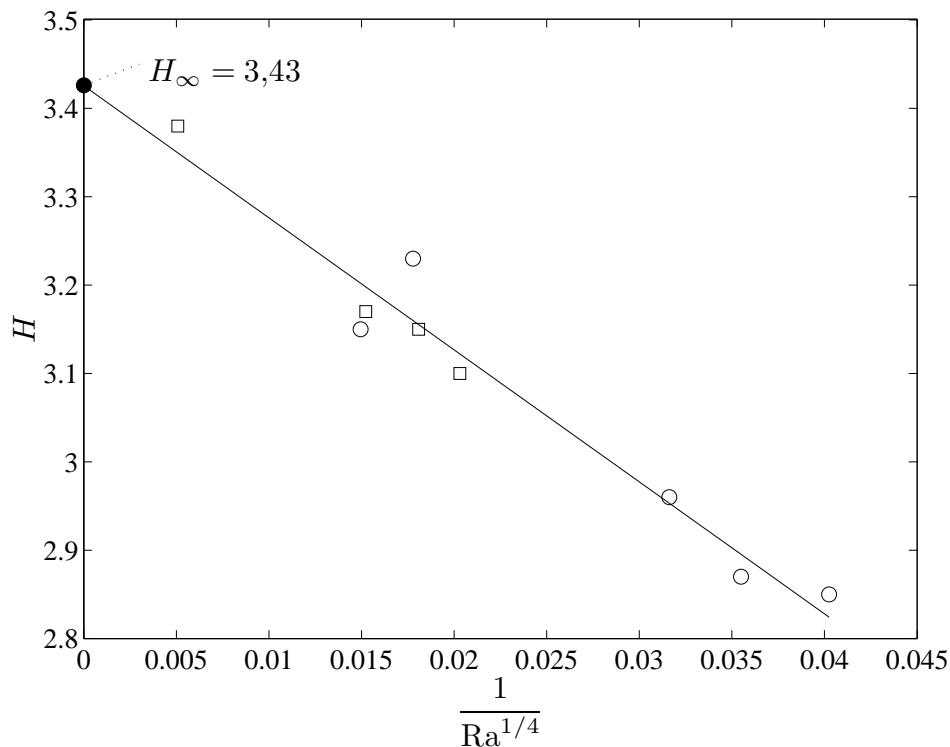


Abbildung 5.5: Auftragung von H über $Ra^{-1/4}$ und Bestimmung des asymptotischen Grenzwertes H_∞ für $Ra \rightarrow \infty$. Es wurden die DNS-Daten aus Abbildung 5.3 für $Pr = 0,7$ (\circ) und die Messdaten aus Abbildung 5.4 für $Pr \approx 5$ (\square) verwendet.

Für asymptotisch große Rayleigh-Zahlen ($Ra \rightarrow \infty$) ergibt sich somit folgendes universelles Temperaturprofil

$$\Theta^x = 0,1 \cdot \ln(y^x) + 3,43. \quad (5.22)$$

⁴Für eine Abschätzung der Dicke der viskosen Unterschicht siehe Anhang D

Falls eine Prandtl-Zahl-Abhängigkeit der Temperaturprofile vorliegen sollte, so ist diese nur schwach ausgeprägt, da die vorliegenden Daten einen Prandtl-Zahlen-Bereich von $0,71 \leq \text{Pr} \leq 5,4$ abdecken und kein Einfluss zu erkennen ist.

5.1.4 Blending

In Abschnitt 3.5 wurden für die natürliche Konvektion an vertikalen Wänden Profile angegeben, die die Messdaten von der viskosen Unterschicht bis zur Überlappungsschicht beschreiben (siehe die Gleichungen (3.73) und (3.74)). Dieses Vorgehen kann auch für das Temperaturprofil der Rayleigh-Bénard Konvektion verwendet werden. Es wird ein *blending* benutzt, das einen glatten Übergang des linearen Profils in der viskosen Unterschicht in das logarithmische Profil der Überlappungsschicht ermöglicht

$$\Theta_{rc}^{\times}(y_{rc}^{\times}) \equiv \left(\frac{1}{\Theta_{rc,visc}^{\times 3}} + \frac{1}{\Theta_{rc,log}^{\times 3}} \right)^{-1/3}. \quad (5.23)$$

Hierbei bezeichnet $\Theta_{rc,visc}^{\times}$ das lineare Temperaturprofil $\Theta_{rc}^{\times} = y_{rc}^{\times}$ nach Gleichung (5.20) und $\Theta_{rc,log}^{\times}$ das logarithmische Temperaturprofil in der Überlappungsschicht nach Gleichung (5.18).

In Abbildung 5.6 wird ein durch *blending* ermitteltes Temperaturprofil mit den DNS-Daten von Hartlep (2004) für $\text{Ra} = 10^6$ verglichen. Es ist zu erkennen, dass die Temperaturdaten mit dem Profil nach Gleichung (5.23) im gesamten Bereich von der Wand bis zur Kernschicht sehr gut wiedergegeben werden können.

5.2 Nußelt-Rayleigh Beziehung

Im vorausgegangenen Abschnitt wurde ausgehend von einer asymptotischen Analyse ein universelles Temperaturprofil hergeleitet. Nimmt man nun an, dass das logarithmische Profil bis zur Zellmitte ($y^* = h^*/2$) gültig ist, wie anhand der gezeigten Temperaturprofile in den Abbildungen 5.3 und 5.4 zu vermuten ist, so kann Gleichung (5.18) in eine Nußelt-Rayleigh-Beziehung umgeschrieben werden. Hierbei kann ausgenutzt werden, dass bei halbem Plattenabstand, also $y^* = h^*/2$, aus Symmetriegründen die halbe Temperaturdifferenz $\Delta T^*/2$ vorliegt. Durch Einsetzen in Gleichung (5.18) und Verwenden der Definitionen von Θ_{rc}^{\times} und y_{rc}^{\times} erhält man

$$\frac{\Delta T^*/2}{T_{rc}^*} = G \cdot \ln \left(\left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{h^*/2}{T_{rc}^*} \right) + H. \quad (5.24)$$

Benutzt man nun zusätzlich noch die Definition von T_{rc}^* , so kann man das universelle Temperaturprofil mit Hilfe der dimensionslosen Kennzahlen Ra und Nu ausdrücken

$$\text{Nu} = \frac{\text{Ra}^{1/3}}{\left[\frac{G}{2} \ln \left(\frac{1}{16} \cdot \text{Ra} \cdot \text{Nu} \right) + 2 \cdot H \right]^{4/3}}, \quad (5.25)$$

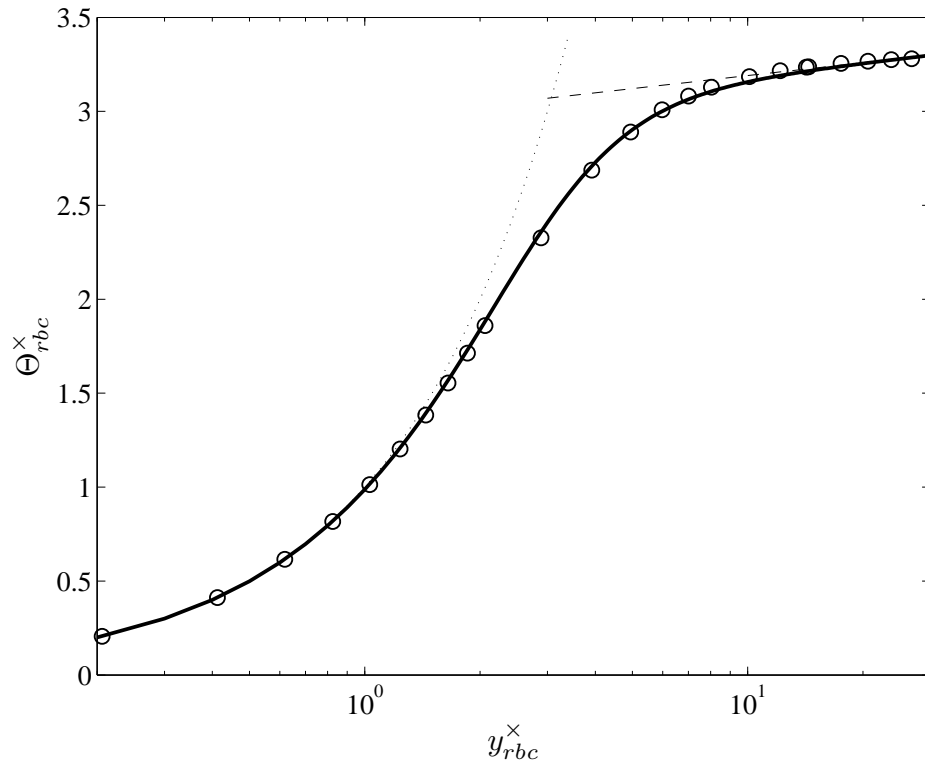


Abbildung 5.6: Vergleich der DNS-Daten von Hartlep (2004) für $Ra = 10^6$ mit dem *blending*-Profil (—) nach Gleichung (5.23). Zusätzlich ist das Profil $\Theta_{rbc,visc}^x$ der viskosen Unterschicht ($\cdot \cdot \cdot$) und das logarithmische Profil $\Theta_{rbc,log}^x$ der Überlappungsschicht (— — —) dargestellt.

mit $G = 0,1$ und $H = 3,43 - 14,94 \cdot Ra^{-1/4}$ nach Gleichung (5.21) oder $H = H_\infty = 3,43$ als asymptotische Lösung für $Ra \rightarrow \infty$.

Die Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.25) kann für $Pr \gtrsim 0,5$ benutzt werden, da z.B. nach Roche *et al.* (2004) und Ahlers & Xu (2001) in diesem Bereich der Einfluss der Prandtl-Zahl vernachlässigbar ist oder zumindest in der Größenordnung der Messunsicherheiten liegt. Verzicco & Camussi (1999) zeigten in einer DNS-Studie, dass sogar für $Pr \gtrsim 0,35$ kein Prandtl-Zahl-Einfluss vorliegt.

5.2.1 Explizite Näherungslösung

Bei der Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.25) handelt es sich um eine *implizite* Funktion, d.h. die Nußelt-Zahl kann nicht direkt bestimmt werden, sondern ist durch eine Iteration zu ermitteln. Dies ist mit Hilfe heutiger Mathematik-Programme (wie z.B. MAPLE) kein Problem, aber es würde die Handhabbarkeit deutlich erhöhen, wenn eine explizite Näherungslösung zur Verfügung stünde.

Um eine explizite Nußelt-Korrelation zu erhalten, kann ausgenutzt werden, dass sich der Logarithmus nur sehr schwach mit seinem Argument verändert. Somit kann für die Nußelt-Zahl im Term „ $\ln(Ra \cdot Nu/16)$ “ eine Näherung eingesetzt werden, ohne dass hierdurch große Fehler zu erwarten wären. Diese Näherung wird bestimmt, indem die implizite Nußelt-

Beziehung für $Ra \rightarrow \infty$ durch ein Polynom approximiert wird. Man erhält hierfür

$$Nu = 0,078 \cdot Ra^{0,323}. \quad (5.26)$$

Somit kann der Term, der den Logarithmus enthält, umgeschrieben werden zu

$$\ln \left(\frac{1}{16} \cdot Ra \cdot Nu \right) \approx \ln \left(\frac{0,078}{16} \cdot Ra^{1,323} \right). \quad (5.27)$$

Die explizite Nußelt-Beziehung hat nun die folgende Form:

$$Nu = \frac{Ra^{1/3}}{\left[\frac{G}{2} \ln \left(\frac{0,078}{16} \cdot Ra^{1,323} \right) + 2 \cdot H \right]^{4/3}} \quad (5.28)$$

$$G = 0,1 \quad (5.29)$$

$$H = 3,43 - \frac{14,94}{Ra^{1/4}} \quad (5.30)$$

Tabelle 5.2 gibt Werte der Nußelt-Zahl nach der impliziten Beziehung (5.25) und nach der expliziten Näherungslösung (5.28) für einen Rayleigh-Zahlenbereich von $10^5 \leq Ra \leq 10^{15}$ wieder. Zusätzlich wird der relative Fehler r in Prozent zwischen der impliziten und der expliziten Nußelt-Zahl angegeben. Da dieser im betrachteten Bereich kleiner als $\pm 0,2\%$ ist, kann Gleichung (5.28) als sehr gute Näherung betrachtet werden, die deutlich einfacher zu handhaben ist.

Tabelle 5.2: Vergleich der Nußelt-Zahlen nach der impliziten Beziehung nach Gleichung (5.25) und der expliziten Beziehung nach Gleichung (5.28), hier mit Nu_{expl} bezeichnet. Zusätzlich ist der relative Fehler $r = (Nu_{expl} - Nu)/Nu$ in Prozent angegeben.

Ra	Nu	Nu_{expl}	r in %
10^5	4,566	4,569	0,07
10^6	8,123	8,116	-0,09
10^7	15,689	15,668	-0,13
10^8	31,526	31,483	-0,14
10^9	64,668	64,587	-0,13
10^{10}	134,135	133,992	-0,11
10^{11}	279,957	279,721	-0,08
10^{12}	586,404	586,048	-0,06
10^{13}	1230,938	1230,493	-0,04
10^{14}	2587,421	2587,122	-0,01
10^{15}	5443,761	5444,465	0,01

5.2.2 Vergleich mit Messdaten

Um die oben vorgestellte Nußelt-Beziehung (5.28) bewerten zu können, soll in diesem Abschnitt ein Vergleich mit Messdaten und DNS-Ergebnissen durchgeführt werden. Es werden hierzu nur Arbeiten herangezogen, in denen das konjugierte Wärmetransportproblem (Wärmeleitung in den Seitenwänden) berücksichtigt wurde. Nach Ahlers (2001) kann dieser Effekt nicht vernachlässigt werden und hat großen Einfluss auf die ermittelten Nußelt-Zahlen. Die Arbeiten, aus denen Daten benutzt wurden, sind in Tabelle 5.3 angegeben.

Tabelle 5.3: Studien, deren Daten im folgenden zur Bewertung der Nußelt-Beziehung (5.28) benutzt werden. Hierbei kennzeichnet ...^{DNS} DNS-Studien.

“√” in der letzten Spalte: Nu(Ra) ist explizit in tabellarischer Form angegeben

“ - ” in der letzten Spalte: Nu(Ra) ist nur in graphischer Form oder als Potenzgesetz angegeben

Studie	Ra-Bereich	Pr-Bereich	Γ	Daten
Niemela <i>et al.</i> (2000)	$10^6 < Ra < 10^{17}$	$Pr \approx 1$	1/2	-
Ashkenazi & Steinberg (1999)	$10^9 < Ra < 5 \cdot 10^{15}$	$1 \leq Pr \leq 93$	1	-
Ahlers & Xu (2001)	$3 \cdot 10^7 < Ra < 10^{11}$	$4 < Pr < 34,1$	1/2 & 1	-
Chavanne <i>et al.</i> (2001)	$10^5 < Ra < 2 \cdot 10^{14}$	$0,66 < Pr < 37$	1/2	√
Nikolaenko & Ahlers (2003)	$3 \cdot 10^9 < Ra < 6 \cdot 10^{10}$	$Pr = 4,4$	1	-
Niemela & Sreenivasan (2003)	$6 \cdot 10^6 < Ra < 2 \cdot 10^{15}$	$Pr \approx 1$	1	√
Roche <i>et al.</i> (2004)	$3 \cdot 10^8 < Ra < 10^{11}$	$0,7 < Pr < 21$	1/2	√
Kerr (1996) ^{DNS}	$5 \cdot 10^4 < Ra < 2 \cdot 10^7$	$Pr = 0,7$	∞	√
Verzicco & Camussi (2003) ^{DNS}	$2 \cdot 10^6 < Ra < 2 \cdot 10^{11}$	$Pr = 0,7$	1/2	√
Hartlep (2004) ^{DNS}	$2 \cdot 10^3 < Ra < 10^7$	$Pr = 0,7$	∞	√

Abbildung 5.7 zeigt eine doppelt-logarithmische Auftragung der Nußelt-Rayleigh Daten von Niemela & Sreenivasan (2003) und die DNS-Ergebnisse von Kerr (1996), verglichen mit Gleichung (5.28). Hierbei wurde H nach Gleichung (5.21) benutzt. Obwohl sich die Rayleigh-Zahl um zehn Größenordnungen ändert ($10^5 \leq Ra \leq 10^{15}$), ist die Übereinstimmung sehr gut.

Die in Abbildung 5.7 gezeigte Auftragung kann nur dazu dienen, sich einen ersten Eindruck zu verschaffen, da in dieser Darstellung Abweichungen nur schwer zu erkennen sind. Es hat sich stattdessen durchgesetzt, eine reduzierte Auftragung von $Nu \cdot Ra^{-2/7}$ über Ra zu wählen, in denen die Abweichungen deutlicher zu erkennen sind. Solche sog. *high resolution plots* sind in den Abbildungen 5.8 und 5.9 dargestellt. In beiden Abbildungen sind zusätzlich zur Nußelt-Beziehung (5.28) die Potenzgesetze von Wu & Libchaber (1992)

$$Nu = 0,146 \cdot Ra^{2/7} \quad (5.31)$$

und von Goldstein & Tokuda (1980)

$$Nu = 0,0556 \cdot Ra^{1/3} \quad (5.32)$$

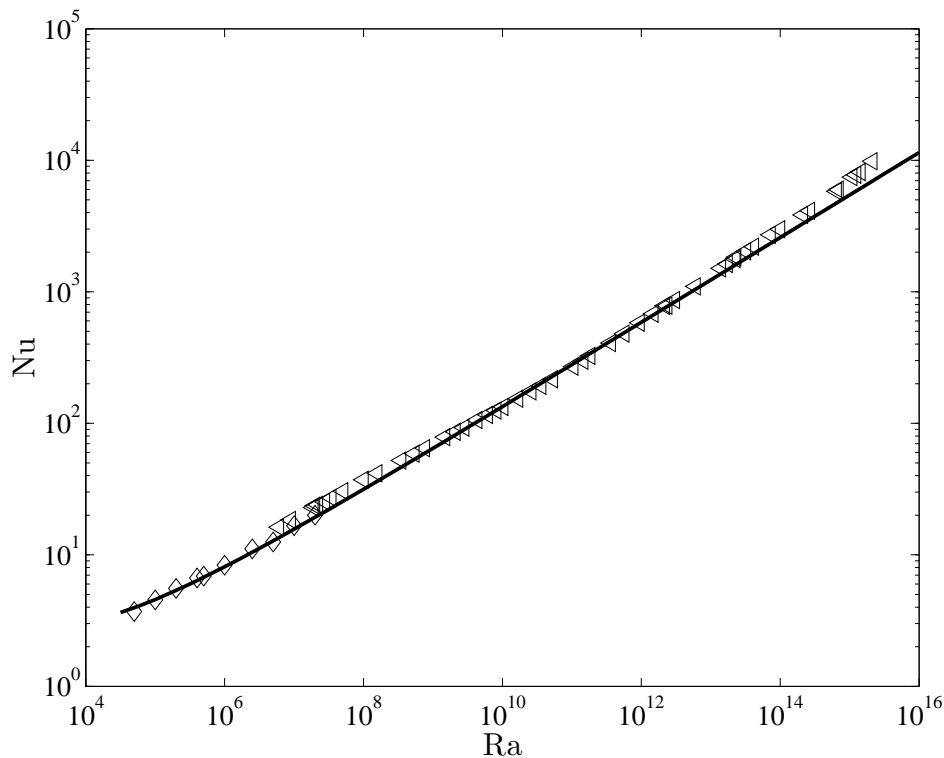


Abbildung 5.7: Vergleich der DNS-Daten (\diamond) von Kerr (1996) und der Messergebnisse (\triangleleft) von Niemela & Sreenivasan (2003) mit der Nuelt-Beziehung (—) nach Gleichung (5.28).

dargestellt, um einen Vergleich mit den Theorien von Castaing *et al.* (1989) bzw. Priestley (1954) zu haben. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, sind in Abbildung 5.8 die Daten für $\text{Pr} = 0,7$ dargestellt und in Abbildung 5.9 die Daten für $\text{Pr} > 0,7$.

Anhand dieser *high resolution plots* kann man zunächst erkennen, dass die verschiedenen Datensätze kein einheitliches Verhalten aufweisen, sondern dass eine moderate Streuung zwischen den einzelnen Studien vorliegt. Die vorgeschlagene Nuelt-Beziehung (5.28) liegt allerdings sehr gut innerhalb der Streuung der Messdaten und gibt diese wesentlich besser wieder, als das $1/3$ -Potenzgesetz von Goldstein & Tokuda (1980) und das $2/7$ -Potenzgesetz von Wu & Libchaber (1992).

Es sei hier noch einmal betont, dass zur Einführung der Nuelt-Beziehung (5.28) keine zusätzlichen Konstanten angepasst wurden; es wurde lediglich das logarithmische Temperaturprofil umgeformt. Dieses Temperaturprofil wurde für $\text{Ra} \leq 1,5 \cdot 10^9$ ermittelt und ist trotzdem in der Lage, die Nuelt-Zahlen bis in den Bereich $\text{Ra} \approx 10^{15}$ gut wiederzugeben, also um sechs Größenordnungen über den verwendeten Bereich hinaus.

Die gute Übereinstimmung war nicht von vorn herein zu erwarten, da die meisten experimentellen Arbeiten in Versuchsaufbauten mit kleinem Seitenverhältnis durchgeführt wurden ($\Gamma = 1$ oder $\Gamma = 1/2$). Bei der Herleitung des universellen Temperaturprofils nach Gleichung (5.18) wurde hingegen ein ideales Rayleigh-Bénard Experiment mit unendlich ausgedehnten Platten ($\Gamma \rightarrow \infty$) angenommen, so dass eine mittlere Strömung vernachlässigt werden konnte ($u^* = v^* = 0$). Bei Versuchsaufbauten mit kleinem Seitenverhältnis

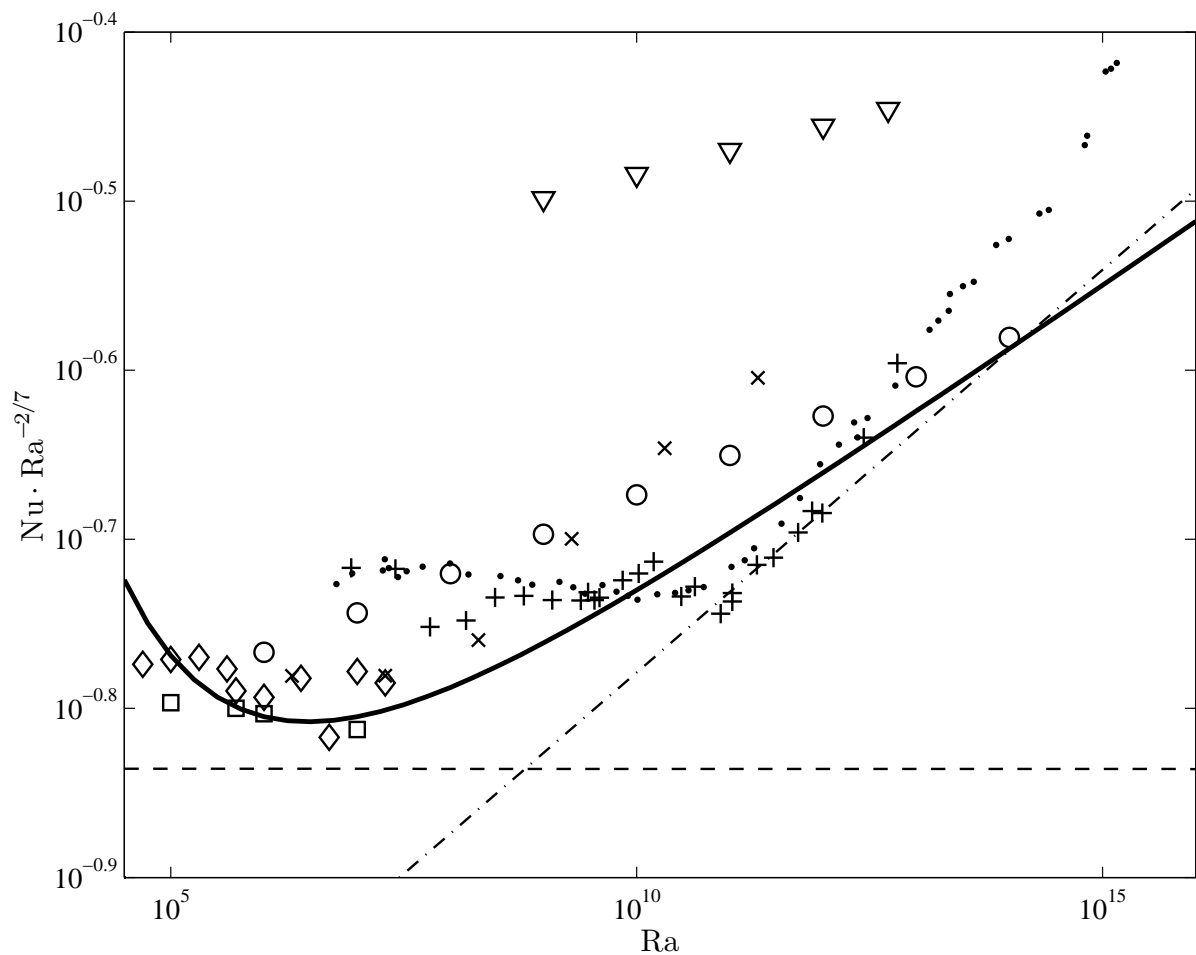


Abbildung 5.8: Nußelt-Daten für $Pr = 0,7$ aus den Arbeiten von Niemela *et al.* (2000) (\circ), Niemela & Sreenivasan (2003) (\cdot), Chavanne *et al.* (2001) ($+$), Ashkenazi & Steinberg (1999) (∇), Verzicco & Camussi (2003) (\times), Kerr (1996) (\diamond) und Hartlep (2004) (\square). Zusätzlich ist das $2/7$ -Potenzgesetz ($- - -$) von Wu & Libchaber (1992) und das $1/3$ -Potenzgesetz ($- \cdot -$) von Goldstein & Tokuda (1980) angegeben sowie die Nußelt-Beziehung (—) nach Gleichung (5.28).

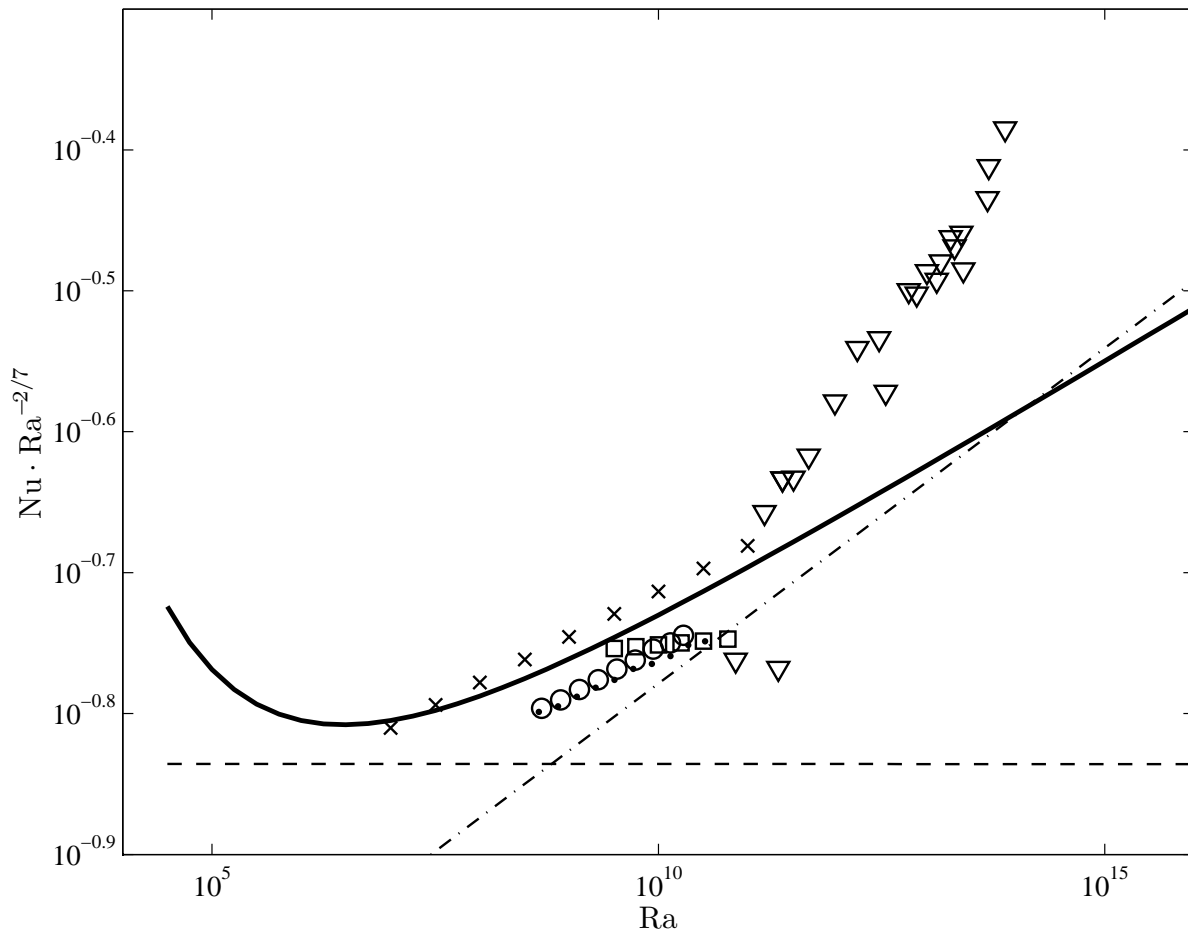


Abbildung 5.9: Nußelt-Daten aus den Arbeiten von Roche *et al.* (2004) für $Pr = 1,7$ (\circ) und $Pr = 2,6$ (\cdot), von Nikolaenko & Ahlers (2003) für $Pr = 4,4$ (\square), von Ahlers & Xu (2001) für $Pr = 14,2$ (\times) und von Chavanne *et al.* (2001) für $Pr \approx 3$ (∇). Zusätzlich ist das $2/7$ -Potenzgesetz ($- - -$) von Wu & Libchaber (1992) und das $1/3$ -Potenzgesetz ($- \cdot -$) von Goldstein & Tokuda (1980) angegeben sowie die Nußelt-Beziehung (—) nach Gleichung (5.28).

ist zu vermuten, dass eine mittlere Strömung aufgrund der geometrischen Randbedingungen vorliegt, wie sie z.B. in Verzicco & Camussi (2003) beschrieben wird. Somit müssten eigentlich die Impulsbilanzen zusätzlich zur Energiegleichung gelöst werden und der Energietransport durch Konvektion könnte an Einfluss gewinnen.

Roche *et al.* (2004), zum Beispiel, stellten mit ihrem Versuchsaufbau mit $\Gamma = 1/2$ eine Bimodalität⁵ für ihre Nußelt-Beziehung fest. Sie erklärten dies mit zwei unterschiedlichen Strömungssituationen, die sich in der Rayleigh-Bénard Zelle ausbilden. Kleine Seitenverhältnisse könnten also durch ihren Einfluss auf die sich einstellende mittlere Strömung zum einen eine Ursache für die Streuung der Ergebnisse sein, die verschiedene Arbeitsgruppen unabhängig voneinander ermittelt haben. Zum anderen sind die kleinen Seitenverhältnisse möglicherweise auch der Grund für Abweichungen zwischen der vorgestellten Theorie (5.28) und den Daten aus Tabelle 5.3.

Um das Temperaturprofil (5.18) und die Nußelt-Beziehung (5.28) weiter zu überprüfen und den Einfluss des Seitenverhältnis' auszuschließen, wären DNS-Studien bei hohen Rayleigh-Zahlen wünschenswert. Da hierbei periodische Randbedingungen gesetzt werden, kann der Einfluss von Seitenwänden (Einfluss auf die mittlere Strömung als auch Einfluss durch Wärmeleitung in den Wänden) ausgeschlossen werden und die Simulation liefert Ergebnisse für $\Gamma \rightarrow \infty$.

5.2.3 Theorie von Grossmann und Lohse

Neben den Theorien von Priestley (1954) und Castaing *et al.* (1989) hat sich eine dritte, von Grossmann & Lohse (2000) eingeführte Theorie etabliert. Die Herleitung der Nußelt-Beziehung beruht in dieser Theorie auf der kinetischen und thermischen Dissipation, die in der Grenzschicht oder der Kernschicht dominant sein kann. Um die einzelnen Fälle unterscheiden zu können, wurde ein Rayleigh-Prandtl-Phasendiagramm eingeführt, das acht verschiedene Regionen mit jeweils eigenen Potenzgesetzen enthält. Um nun eine Nußelt-Beziehung für einen konkreten Fall zu erhalten, muss die zugehörige Prandtl-Zahl und der Bereich der auftretenden Rayleigh-Zahlen bekannt sein. Hiermit können die entsprechenden Zonen im Phasen-Diagramm identifiziert werden und die gesuchte Nußelt-Beziehung wird dann als Superposition von benachbarten Zonen bestimmt. Zu weiteren Details siehe auch die Studie von Xu *et al.* (2000), in der Experimente mit Azeton ($\text{Pr} = 4,0$) durchgeführt wurden und eine gute Übereinstimmung mit der Theorie von Grossmann & Lohse (2000) festgestellt werden konnte.

In Abbildung 5.10 ist das Rayleigh-Prandtl-Phasendiagramm nach Grossmann & Lohse (2000) dargestellt und es ist beispielhaft der Messbereich von Niemela & Sreenivasan (2003) eingezeichnet, also $\text{Pr} = 0,7$ und $10^7 \lesssim \text{Ra} \lesssim 10^{15}$. Die dominierenden Regimes für diesen Datensatz sind also (in der Notation von Grossmann & Lohse (2000)) I_l und IV_u .

Die Nußelt-Beziehung ergibt sich dann als Superposition der Potenzgesetze, die in den beiden Regimes gültig sind

$$\text{Nu} = \underbrace{0,27 \cdot \text{Ra}^{1/4} \cdot \text{Pr}^{-1/8}}_{I_l} + \underbrace{0,038 \cdot \text{Ra}^{1/3}}_{IV_u}. \quad (5.33)$$

⁵Unter Bimodalität ist hier zu verstehen, dass Roche *et al.* (2004) an ihre Daten zwei Potenzgesetze anfitzen konnten ($\text{Nu} = C_1 \text{Ra}^n$ und $\text{Nu} = C_2 \text{Ra}^n$), für die $C_1 \neq C_2$ gilt.

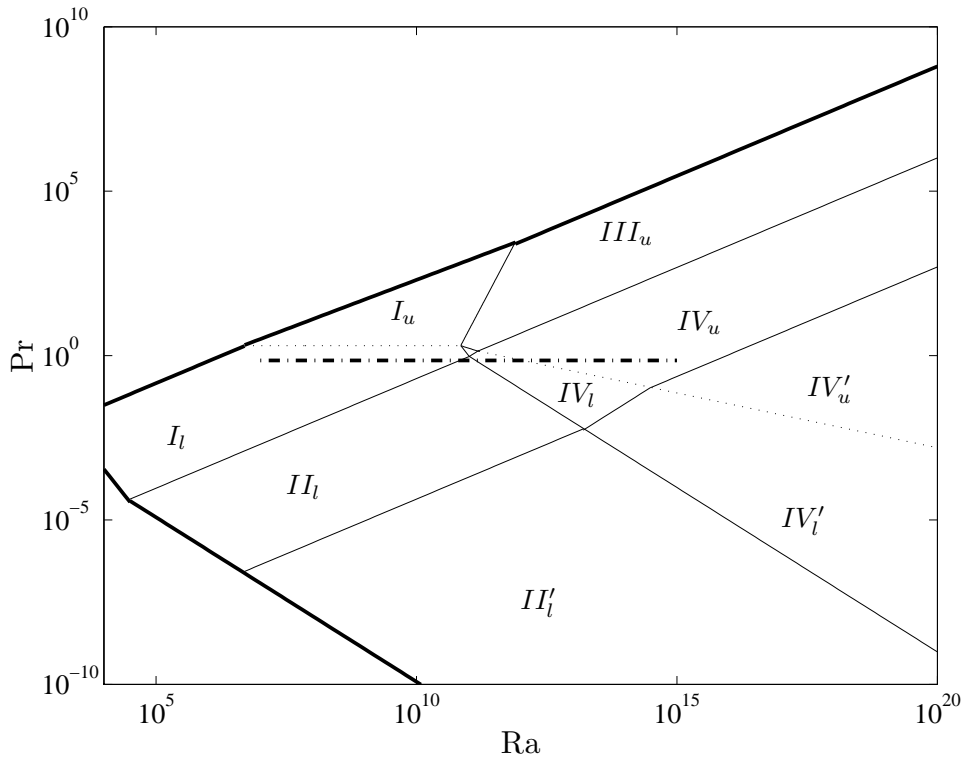


Abbildung 5.10: Rayleigh-Prandtl-Phasendiagramm nach Grossmann & Lohse (2000) und der Messbereich (— · —) von Niemela & Sreenivasan (2003).

Für eine Prandtl-Zahl von $Pr \approx 3$ ergibt ein analoges Vorgehen, dass die Regimes I_u und III_u nach Grossmann & Lohse (2000) dominant sind. Die Nußelt-Beziehung lautet dann

$$Nu = \underbrace{0,33 \cdot Ra^{1/4} \cdot Pr^{-1/12}}_{I_u} + \underbrace{0,00343 \cdot Ra^{3/7} \cdot Pr^{-1/7}}_{III_u}. \quad (5.34)$$

In Abbildung 5.11 ist Gleichung (5.33) zusammen mit den Daten für $Pr = 0,7$ von Niemela *et al.* (2000) und Niemela & Sreenivasan (2003) sowie der Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.28) dargestellt. Abbildung 5.12 zeigt Gleichung (5.34) zusammen mit den Daten für $Pr \approx 3$ von Roche *et al.* (2004) und Chavanne *et al.* (2001) sowie der Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.28).

Für $Pr \approx 0,7$ nach Abbildung 5.11 gibt die Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.25) die Messdaten besser wieder als Gleichung (5.33) von Grossmann & Lohse (2000). Gerade im Bereich kleiner Rayleigh-Zahlen sind große Abweichungen zu finden. Für $Pr \approx 3$ nach Abbildung 5.12 kann Gleichung (5.34) nach Grossmann & Lohse (2000) die Daten von Chavanne *et al.* (2001) deutlich besser wiedergeben als die Nußelt-Beziehung (5.28). Es ist allerdings nicht auszuschließen, dass Grossmann & Lohse (2000) ihre Potenzgesetze an die Daten von Chavanne *et al.* (2001) angepasst haben, da in der Veröffentlichung eine „private communication“ angegeben wurde. Die Nußelt-Daten von Roche *et al.* (2004) können von beiden Theorien nur schlecht wiedergeben werden.

Bei der hier festgestellten guten Übereinstimmung der Theorie nach Grossmann & Lohse (2000) mit Chavanne *et al.* (2001) handelt es sich nicht um einen Effekt der höheren

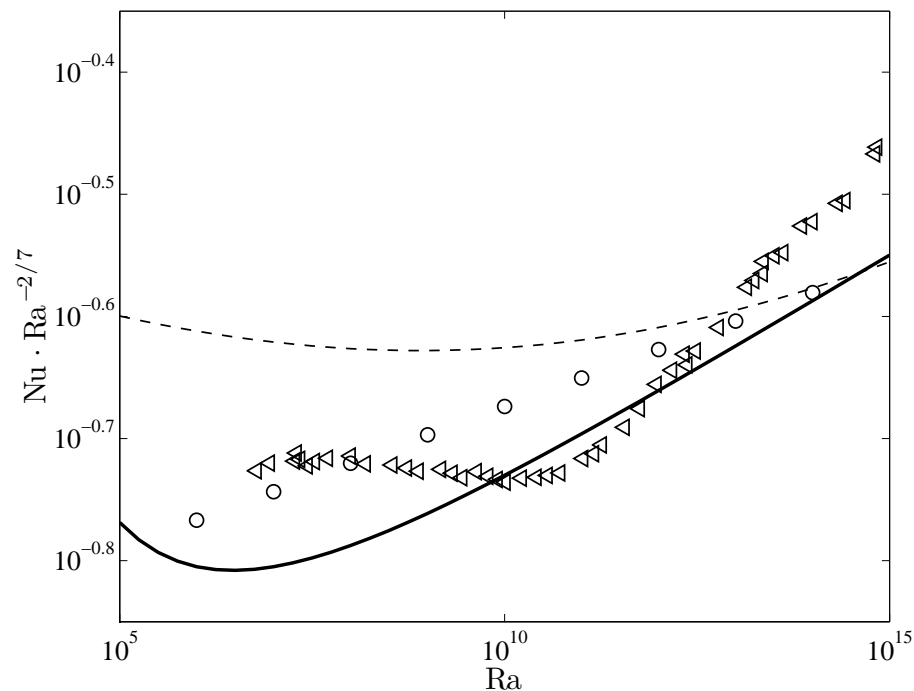


Abbildung 5.11: Nußelt-Verlauf (---) nach Gleichung (5.33) nach der Theorie von Grossmann & Lohse (2000) zusammen mit Messdaten für $Pr = 0,7$ von Niemela *et al.* (2000) (\circ) und Niemela & Sreenivasan (2003) (\triangleleft). Zusätzlich ist die Nußelt-Beziehung (—) nach Gleichung (5.28) dargestellt.

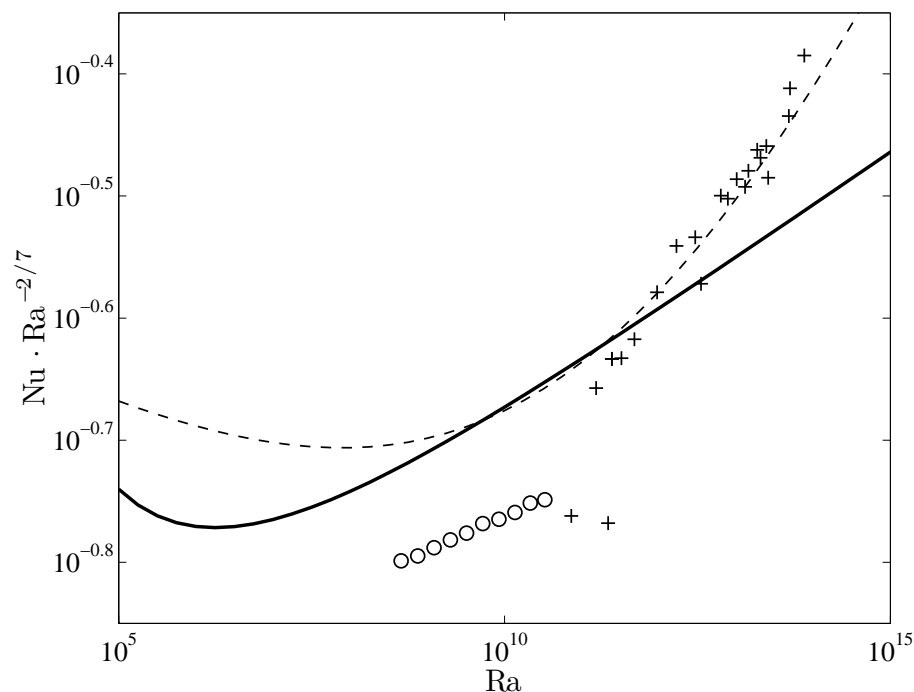


Abbildung 5.12: Nußelt-Verlauf (---) nach Gleichung (5.34) nach der Theorie von Grossmann & Lohse (2000) zusammen mit Messdaten für $Pr \approx 3$ von Chavanne *et al.* (2001) (+) und Roche *et al.* (2004) (\circ). Zusätzlich ist die Nußelt-Beziehung (—) nach Gleichung (5.28) dargestellt.

Prandtl-Zahl. Betrachtet man in Abbildung 5.9 die Daten von Ahlers & Xu (2001) für $Pr = 14,2$, so stellt man eine exzellente Übereinstimmung mit Gleichung (5.28) fest, so dass man nicht pauschal behaupten kann, dass die Theorie von Grossmann & Lohse (2000) für große Prandtl-Zahlen besser geeignet ist.

Anhand der zwei hier gezeigten typischen Fälle ($Pr = 0,7$ und $Pr \approx 3$) kann eine Beurteilung, welche Theorie besser zur Beschreibung der Messdaten geeignet ist, nicht abschließend vorgenommen werden. Beide Theorien sind in der Lage, bestimmte Datensätze gut wiederzugeben und bei anderen nur eine schlechte Übereinstimmung zu liefern. Es ist allerdings festzustellen, dass zur Herleitung von Gleichung (5.28) deutlich weniger Annahmen zu treffen sind als für die Theorie von Grossmann & Lohse (2000) und dass die Handhabung von Gleichung (5.28) deutlich einfacher ist, als die Verwendung des Rayleigh-Prandtl-Phasendiagramms.

5.3 Validierung anhand weiterer Datensätze

Die bisher gezeigten Ergebnisse wurden in Hölling & Herwig (2006) veröffentlicht und anhand der dort benutzten Messdaten entwickelt bzw. validiert. Nach Erscheinen der zuvor genannten Arbeit sind zwei neue experimentelle Studien erschienen, die sich mit der Rayleigh-Bénard Konvektion beschäftigen. Dies ist zum einen eine Arbeit am *Ilmenauer Fass* von Du Puits *et al.* (2006), in der neben Nußelt-Daten auch Temperaturprofile in Wandnähe bestimmt wurden. Zum anderen handelt es sich um zwei ähnliche Arbeiten der Gruppe um Professor G. Ahlers an der *University of Santa Barbara* (Kalifornien), siehe Funfschilling *et al.* (2005) und Nikolaenko *et al.* (2005). In diesen Arbeiten werden sehr genaue Nußelt-Rayleigh Daten bei verschiedenen Seitenverhältnissen zur Verfügung gestellt. Sowohl die Arbeit am Ilmenauer Fass von Du Puits *et al.* (2006) als auch die Arbeiten der Ahlers-Gruppe sollen benutzt werden, um die Gültigkeit der aufgestellten Theorie *a posteriori* zu überprüfen.

5.3.1 Ilmenauer Fass

Das *Ilmenauer Fass* ist der zur Zeit größte experimentelle Aufbau zur Rayleigh-Bénard Konvektion. Es handelt sich hierbei um ein „Fass“ mit einem Durchmesser von $D^* = 7,15$ m, dessen Höhe zwischen $h^* = 0,63$ m (Seitenverhältnis $\Gamma = 11,3$) und $h^* = 6,3$ m ($\Gamma = 1,13$) variiert werden kann. Die obere Platte wird mit einer Wasserkühlung temperiert, die untere Platte mit einer elektrischen Heizung. An den Seitenwänden befinden sich Gegenheizungen, um dort adiabate Randbedingungen realisieren zu können. Als Arbeitsmedium wird Luft mit $Pr = 0,71$ verwendet. Es ergibt sich damit ein erreichbarer Rayleigh-Zahlenbereich von $10^9 \leq Ra \leq 10^{12}$.

Es ist mit diesem Aufbau nicht möglich, extrem hohe Rayleigh-Zahlen ($Ra \approx 10^{15}$) zu erreichen, wie sie z.B. in den Experimenten von Niemela & Sreenivasan (2003) mit Helium nahe des kritischen Punkts realisiert wurden. Es steht aber mit diesem Versuchsaufbau zur Verfügung, um Temperaturprofile bei sehr hohen Rayleigh-Zahlen zu vermessen und so die Struktur in Wandnähe detailliert zu untersuchen. Die Temperaturprofile werden mit einem Thermistor mit einem Durchmesser von $d_{therm}^* \approx 140 \mu\text{m}$ in der Nähe der kalten Wand aufgenommen. Im folgenden soll beispielhaft eine Messung

bei $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ mit einem großen Seitenverhältnis ($\Gamma = 11,3$) betrachtet werden. Ein typisches Temperaturprofil in dimensionsbehafteter Form zusammen mit den Randbedingungen ist in Abbildung 5.13 dargestellt.

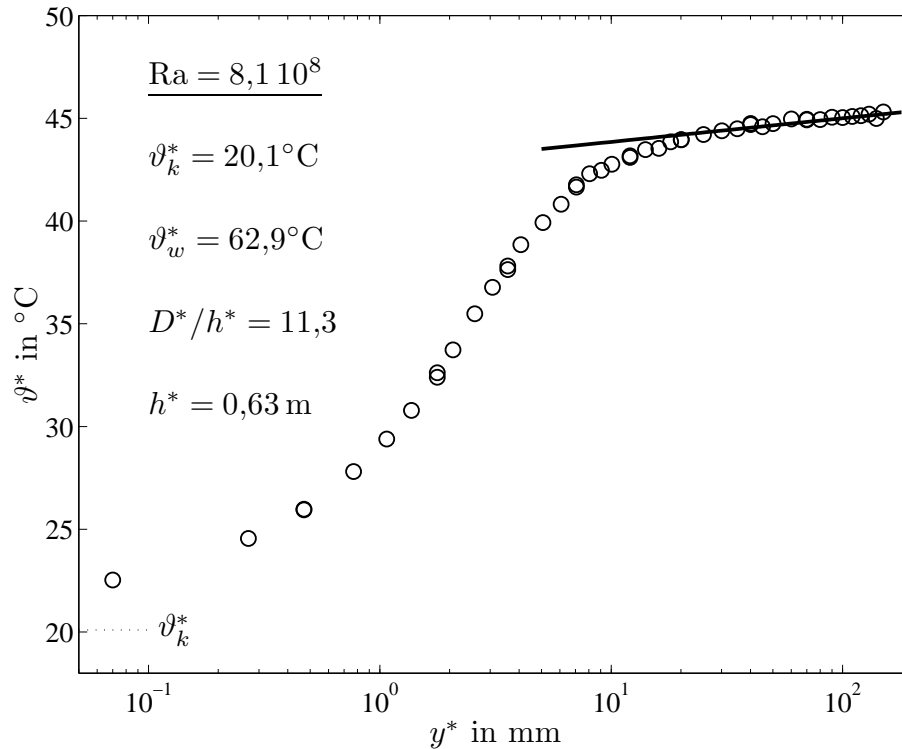


Abbildung 5.13: Dimensionsbehaftetes Temperaturprofil nach Du Puits *et al.* (2006) für $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ bei einem Seitenverhältnis von $\Gamma = 11,3$. Der logarithmische Bereich ist durch eine durchgezogene Linie (—) hervorgehoben.

In der dimensionsbehafteten Form zeigen die Daten einen zu erwartenden Verlauf mit einem logarithmischen Anteil für große Werte von y^* , hier mit einer durchgezogenen Linie hervorgehoben. Bei genauerer Betrachtung des wandnahen Bereichs stellt man allerdings drei Probleme fest, wie anhand von Abbildung 5.14 zu erkennen ist.

Auftretende Probleme:

1. Das Temperaturprofil wurde bis unmittelbar an die Wand ($y^* \approx 70 \mu\text{m}$) vermessen. Unabhängig davon wurde die Temperatur in der Wand der Kühlplatte bestimmt. Diese beiden Werte weichen um $\Delta T_{diff}^* \approx 2\text{K}$ voneinander ab, was zunächst nicht zu erwarten ist. Für $y^* \rightarrow 0$ sollte sich die Fluidtemperatur der Wandtemperatur annähern. In den Messdaten hingegen tritt eine Unstetigkeit auf.
2. In unmittelbarer Wandnähe (viskose Unterschicht) sollte nach Gleichung (5.20) ein linearer Verlauf vorliegen, was bei den Daten vom Ilmenauer Fass nicht der Fall ist. Um dies zu verdeutlichen ist in Abbildung 5.14 eine Gerade im Bereich der vermuteten viskosen Unterschicht eingezeichnet. Man stellt fest, dass die Daten nicht auf einer Geraden liegen, sondern dass ein gedachter Verlauf eine Krümmung aufweisen

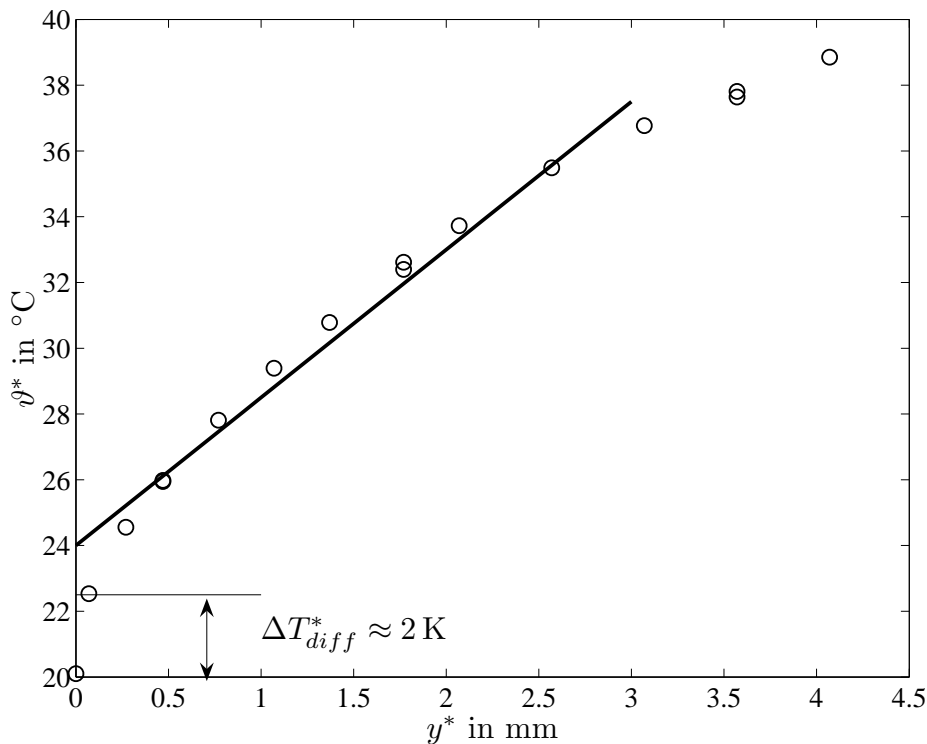


Abbildung 5.14: Wandnaher Bereich des dimensionsbehafteten Temperaturprofils von Du Puits *et al.* (2006) für $Ra = 8,1 \cdot 10^8$.

würde. Dies steht im Widerspruch zu allen experimentellen und numerischen Temperaturprofilen in den Abbildungen 5.3 und 5.4, die jeweils einen linearen Verlauf bis $y^x \approx 1,5$ zeigen. Zu einer Abschätzung der Dicke der viskosen Unterschicht siehe Anhang D.

3. Es ist nicht klar, wie der Temperaturwandgradient zu ermitteln ist. Eine Bestimmung aus Wandtemperatur und erstem Messpunkt kommt nicht in Frage, da dies einen viel zu großen Wert ergeben würde. Hier liegt vielmehr eine Unstimmigkeit in den Messdaten vor. Ein Ermitteln des Gradientens anhand bestimmter Messpunkte liefert nahezu beliebige Werte für den Gradienten, da nicht klar ist, bis wohin sich die viskose Unterschicht erstreckt.

Als eine mögliche Erklärung für das gefundene Verhalten könnte der Einfluss der Strahlung in Frage kommen, was im folgenden Abschnitt gezeigt werden soll.

5.3.1.1 Strahlungseinfluss

Um den Einfluss der Strahlung abschätzen zu können, soll folgender Aufbau nach Abbildung 5.15 betrachtet werden. Der Thermistor mit der Temperatur T_1^* , der Fläche A_1^* und dem Emissionsgrad ε_1 befindet sich in unmittelbarer Nähe der oberen (gekühlten) Platte. Da hier näherungsweise $T_1^* \approx T_k^*$ gilt, kann der Strahlungsaustausch zwischen Kühlplatte und Thermistor vernachlässigt werden. Es muss somit nur der Austausch zwischen der Heizplatte (T_2^* , A_2^* und ε_2) und dem Thermistor berücksichtigt werden.

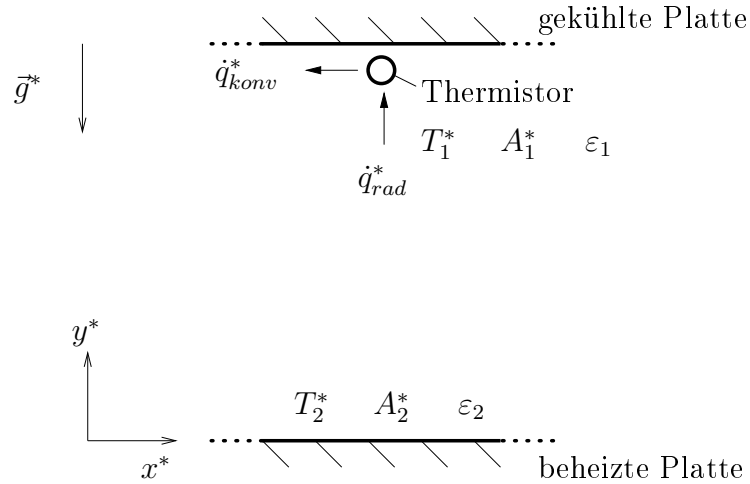


Abbildung 5.15: Aufbau zur Abschätzung des Strahlungsaustausches zwischen Heizplatte und Thermistor.

Für den Nettowärmestrom zwischen zwei grauen Körpern durch Strahlungsaustausch gilt z.B. nach Herwig (2000) mit der Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma^* = 5,67 \cdot 10^8 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ und dem Sichtfaktor φ_{12}

$$\dot{Q}_{rad}^* = \frac{\sigma^* (T_1^{*4} - T_2^{*4})}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1^*} + \frac{1}{A_1^* \varphi_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2^*}}. \quad (5.35)$$

Oder bezogen auf die Oberfläche A_1^* des Thermistors

$$\dot{q}_{rad}^* = \frac{\dot{Q}_{rad}^*}{A_1^*} = \frac{\sigma^* (T_1^{*4} - T_2^{*4})}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varphi_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot \underbrace{\frac{A_1^*}{A_2^*}}_0} = \frac{\sigma^* (T_1^{*4} - T_2^{*4})}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varphi_{12}}}, \quad (5.36)$$

wobei das Verhältnis von Oberfläche des Thermistors zur Fläche der beheizten Platte als $A_1^*/A_2^* \rightarrow 0$ angenommen werden kann. Bei großem Seitenverhältnis (hier $\Gamma = 11,3$) kann die untere Platte als unendlich ausgedehnt betrachtet werden und der Sichtfaktor ergibt sich zu $\varphi_{12} = 1/2$, vgl. Herwig (2000).

Der Wärmestrom, der dem Thermistor durch Strahlung zugeführt wird, muss im stationären Zustand wieder durch Konvektion abgeführt werden. Für den konvektiven Anteil wird ein Ansatz über einen Wärmeübergangskoeffizienten α_{konv}^* gewählt:

$$\dot{q}_{konv}^* = \alpha_{konv}^* \Delta T_{diff}^* \quad \text{mit} \quad \Delta T_{diff}^* = T_1^* - T_{fluid}^* \quad (5.37)$$

Hierbei ist T_{fluid}^* die Temperatur des umgebenden Fluids, also die Temperatur, die man mit dem Thermistor eigentlich messen möchte. Aufgrund des Strahlungseinflusses bestimmt man mit dem Thermistor eine Temperatur, die um ΔT_{diff}^* über der Fluidtempe-

ratur liegt. Eine Beziehung zur Abschätzung von ΔT_{diff}^* erhält man durch Gleichsetzen von $\dot{q}_{rad}^* = \dot{q}_{konv}^*$

$$\Delta T_{diff}^* = \frac{\sigma (T_1^{*4} - T_2^{*4})}{\alpha_{konv}^* \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varphi_{12}} \right)}. \quad (5.38)$$

Die Temperaturen $\vartheta_1^* \approx \vartheta_k^* = 20^\circ\text{C}$ und $\vartheta_2^* = \vartheta_w^* = 63,9^\circ\text{C}$ sind durch die Temperaturmessung in den Platten bekannt. Für den Emissionsgrad des Thermistors wird $\varepsilon_1 = 0,1$ angenommen, wie man ihn typischerweise für polierte Metalle findet. Der Wärmeübergangskoeffizient wird mit $\alpha_{konv}^* = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ geschätzt. Mit diesen Werten ergibt sich ein Temperaturunterschied zwischen Thermistor und umgebendem Fluid von

$$\Delta T_{diff}^* = 2,8 \text{ K}. \quad (5.39)$$

Man sieht, dass die Abweichungen von $\Delta T_{diff}^* \approx 2 \text{ K}$, wie sie in den Messdaten gefunden wurden, durch den Einfluss der Strahlung erklärt werden können. Es handelt sich aber lediglich um eine Abschätzung und nicht um eine Rechenvorschrift, wie die Messdaten zu korrigieren sind, um den Einfluss der Strahlung herauszurechnen. Gegen eine analytische Korrektur des Strahlungseinflusses sprechen die folgenden Punkte:

- Die Werte für ε_1 und α_{konv}^* sind relativ grob geschätzt und experimentell nur schwer zu überprüfen.
- Bei dem abgeschätzten ΔT_{diff}^* handelt es sich um keinen konstanten Wert, der von allen Messpunkten abgezogen werden kann. Der Einfluss der Strahlung ist vielmehr abhängig vom Wandabstand.
- Bei größerem Wandabstand ($y^* \approx h^*/2$) ist der Strahlungsaustausch mit der gekühlten Wand nicht mehr zu vernachlässigen.
- Der Wärmeübergangskoeffizient α_{konv}^* ist abhängig vom Wandabstand, da dieser stark von der Turbulenz abhängt, die im Bereich $y^* \approx h^*/2$ deutlich stärker ist als in Wandnähe.

Um verlässliche Messdaten zu erhalten, wäre es wünschenswert, Messungen bei möglichst kleinen Temperaturdifferenzen durchzuführen, da sich hier der Strahlungseinfluss reduziert. Alternativ wäre zu überlegen, ob eine Abschirmung der Strahlung durch eine Modifikation des Thermistors möglich wäre.

5.3.1.2 Auswertung der Messdaten

Da eine analytische Korrektur der Messdaten aus den oben genannten Gründen nicht möglich ist, sollen im folgenden zwei mögliche „Grenzfälle“ der Auswertung aufgezeigt werden. In der ersten Auswertungsvariante wird der Temperaturwandgradient anhand der Nußelt-Korrelation nach Gleichung (5.28) bestimmt. In der zweiten Variante wird eine Parabel

durch die zehn wandnächsten Punkte gelegt und der lineare Anteil als Temperaturwandgradient interpretiert. In beiden Fällen wird der Einfluss der variablen Temperaturleitfähigkeit a^* berücksichtigt, wie er in Abschnitt 3.1.5 beschrieben wurde.

Für die **erste Auswertungsvariante** ergibt sich nach Gleichung (5.28) eine Nußelt-Zahl⁶ von

$$\text{Nu} = 60,53. \quad (5.40)$$

Hieraus lässt sich der *fiktive* Wandgradient ermitteln, der vorliegen würde, wenn die Stoffwerte im gesamten Strömungsfeld konstant wären

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w \text{ fiktiv}} = 4112 \frac{\text{K}}{\text{m}}. \quad (5.41)$$

Durch Berücksichtigen der Temperaturabhängigkeit der Temperaturleitfähigkeit ergibt sich der „korrigierte“ Wandgradient zu

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w = \frac{a_0^*}{a_w^*} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w \text{ fiktiv}} = 4643 \frac{\text{K}}{\text{m}}. \quad (5.42)$$

Dieser Gradient ist in Abbildung 5.16 zusammen mit den Messdaten in unmittelbarer Wandnähe dargestellt. Die Wandtemperatur wird hierbei zu $\vartheta_k^* = 24,1^\circ\text{C}$ extrapoliert.

Man erkennt, dass der Gradient aus der Nußelt-Beziehung (gestrichelte Linie in Abbildung 5.16) die Messdaten für $0,6 \text{ mm} < y^* < 2,5 \text{ mm}$ gut beschreibt. Eine mögliche Interpretation wäre nun, dass sich der Einfluss der Strahlung in unmittelbarer Wandnähe stark verändert. Bei dieser Auswertung würde man Abweichungen im Bereich der viskosen Unterschicht in Kauf nehmen und hätte eine extrapolierte Wandtemperatur von $\vartheta_k^* = 24,1^\circ\text{C}$ statt der gemessenen $\vartheta_{mess}^* = 20,1^\circ\text{C}$.

Abbildung 5.17 zeigt die zugehörige Darstellung der Messdaten in Θ^\times - und y^\times -Koordinaten. Die Bezugsgrößen wurden hierbei mit dem fiktiven Temperaturwandgradienten ermittelt. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung mit dem logarithmischen Temperaturprofil (durchgezogene Linie) in der Überlappungsschicht festzustellen. In der viskosen Unterschicht treten erst in unmittelbarer Wandnähe Abweichungen vom linearen Temperaturprofil (gestrichelte Linie) auf.

In der **zweiten Auswertungsvariante**, wie sie von Du Puits *et al.* (2006) benutzt wird, wird eine Parabel durch die ersten zehn Messpunkte gelegt und der Temperaturwandgradient als linearer Anteil ermittelt. Man erhält mit dieser Methode

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w = 8062 \frac{\text{K}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w \text{ fiktiv}} = 7141 \frac{\text{K}}{\text{m}}. \quad (5.43)$$

Der Gradient (und somit auch die Nußelt-Zahl) wäre also um 74 % größer als nach der Nußelt-Korrelation (5.28) zu erwarten ist, die eine gute Übereinstimmung mit zahlreichen

⁶Neben dem Temperaturgradienten wurden über eine Energiebilanz über das Fass auch die globale Nußelt-Zahl bestimmt. Diese liegt nach Du Puits *et al.* (2006) bei $\text{Nu}_G = 58$ und ist somit in guter Übereinstimmung mit der Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.28).

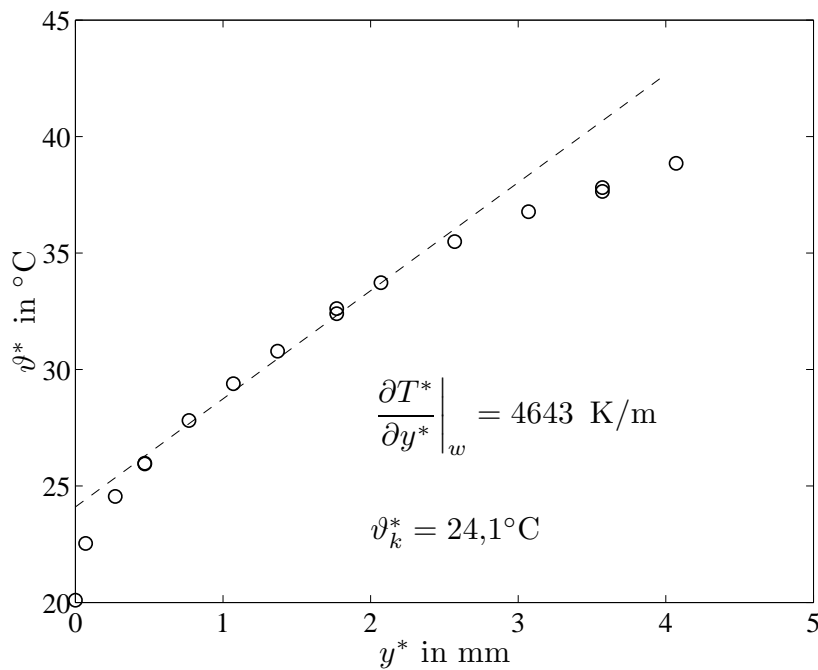


Abbildung 5.16: Temperaturprofil von Du Puits *et al.* (2006) für $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ in Wandnähe zusammen mit dem Temperaturwandgradienten (---) nach der Nußelt-Korrelation (5.28). Die Wandtemperatur wird durch Extrapolation zu $\vartheta_k^* = 24,1^\circ\text{C}$ bestimmt.

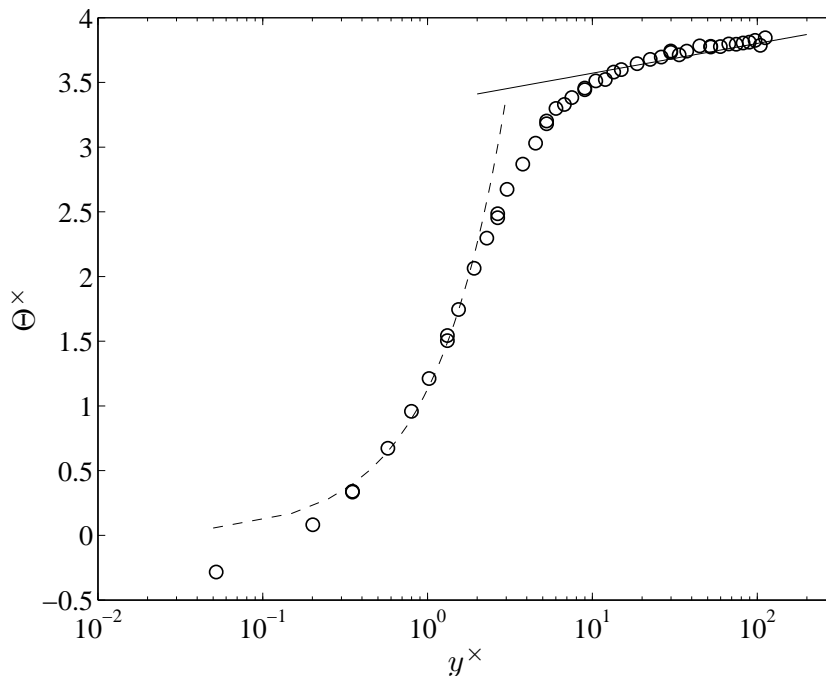


Abbildung 5.17: Entdimensioniertes Temperaturprofil von Du Puits *et al.* (2006) für $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ zusammen mit dem linearen Profil (---) in der viskosen Unterschicht und dem logarithmischen Temperaturprofil (—) in der Überlappungsschicht. Die Bezugsgrößen wurden mit dem fiktiven Gradienten aus der Nußelt-Korrelation (5.28) gebildet.

Studien aus der Literatur aufweist. Mit dieser Variante zur Bestimmung des Gradienten erhält man also eine deutliche Abweichung zu einer Vielzahl anderer Arbeiten. Außerdem ist damit die lokale Nußelt-Zahl in etwa doppelt so groß wie die unabhängig gemessene globale Nußelt-Zahl.

Die Wandtemperatur wird zu $\vartheta_k^* = 22,3^\circ\text{C}$ extrapoliert. Es ist also mit dieser Auswertungsmethode auch nicht möglich, die gemessene Wandtemperatur von $\vartheta_{mess}^* = 20,1^\circ\text{C}$ zu erreichen. Abbildung 5.18 zeigt die Messdaten im wandnahen Bereich zusammen mit der Ausgleichsparabel (durchgezogene Linie) durch die ersten zehn Messpunkte. Der lineare Anteil ist als gestrichelte Linie angegeben. Man erkennt, dass sich nach dieser Auswertung der lineare Teil des Profils (also die viskose Unterschicht) nur bis $y^* \approx 0,6$ mm erstreckt. Für eine allgemeine Abschätzung der Dicke der viskosen Unterschicht siehe Anhang D.

Abbildung 5.19 zeigt das entdimensionierte Temperaturprofil. Die Übereinstimmung im wandnahen Bereich ist nun verbessert. Allerdings treten erste Abweichungen vom linearen Verlauf (gestrichelte Linie) bereits bei $y^x \approx 0,7$ auf. In den Temperaturprofilen nach Abbildung 5.3 und 5.4 erstreckt sich der lineare Bereich jedoch bis $y^x \approx 1,5$, so dass diese Auswertungsvariante in einem abweichenden Verhalten resultiert. Eine Übereinstimmung mit dem logarithmischen Profil (durchgezogene Linie) in der Überlappungsschicht ist nicht vorhanden. Die so entdimensionierten Messdaten weichen deutlich vom Profil ab.

Anhand dieser zwei Auswertungsvarianten sollte aufgezeigt werden, dass es je nach Wahl des Temperaturwandgradienten möglich ist, sowohl eine sehr gute Übereinstimmung mit dem logarithmischen Profil zu erreichen als auch eine deutliche Abweichung. Es wurden hier die zwei „Grenzfälle“ der Auswertung vorgestellt, d.h. Ermittlung des Gradienten aus der Nußelt-Beziehung (5.28) und aus einer Ausgleichsparabel durch die zehn wandnächsten Punkte. Es handelt sich hier um Grenzfälle, da die Parabel einen sehr hohen Gradienten liefert und die Nußelt-Korrelation einen vergleichsweise kleinen. Mit einer (beliebigen) Auswahl von Messpunkten in Wandnähe und ihrer Beschreibung durch eine Ausgleichsgerade ist es möglich, nahezu jeden beliebigen Gradienten zu erhalten, der zwischen den beiden Grenzfällen liegt.

Da die Messdaten vom Ilmenauer Fass in unmittelbarer Wandnähe problematisch sind, ist es leider nicht möglich, den Temperaturwandgradienten eindeutig zu bestimmen. Dieser wird aber direkt zur Entdimensionierung der Messdaten benötigt und hat sehr großen Einfluss auf die entdimensionierten Profile. Aufgrund der Ungenauigkeiten in den entscheidenden Größen kann anhand der Daten vom Ilmenauer Fass keine Bewertung des universellen logarithmischen Temperaturprofils und der Nußelt-Beziehung erfolgen. Es ist somit nicht möglich, das Profil eindeutig zu bestätigen oder in Frage zu stellen.

Allerdings liefert die erste Auswertungsvariante, bei der der Gradient aus der Nußelt-Korrelation (5.28) bestimmt wird, eine gute Übereinstimmung, sowohl mit der hier vorgestellten Theorie als auch mit anderen Veröffentlichungen. Die zweite Auswertungsvariante führt zu Ergebnissen, die nicht konsistent mit den Daten aus anderen Studien sind und nicht zum universellen Temperaturprofil passen. Es sollen hier keine weiteren Profile diskutiert werden, die am Ilmenauer Fass ermittelt wurden, da die Unsicherheiten zu groß sind. Es ist allerdings in allen Fällen möglich, einen Gradienten so zu wählen, dass eine gute Übereinstimmung mit dem universellen Profil zu finden ist.

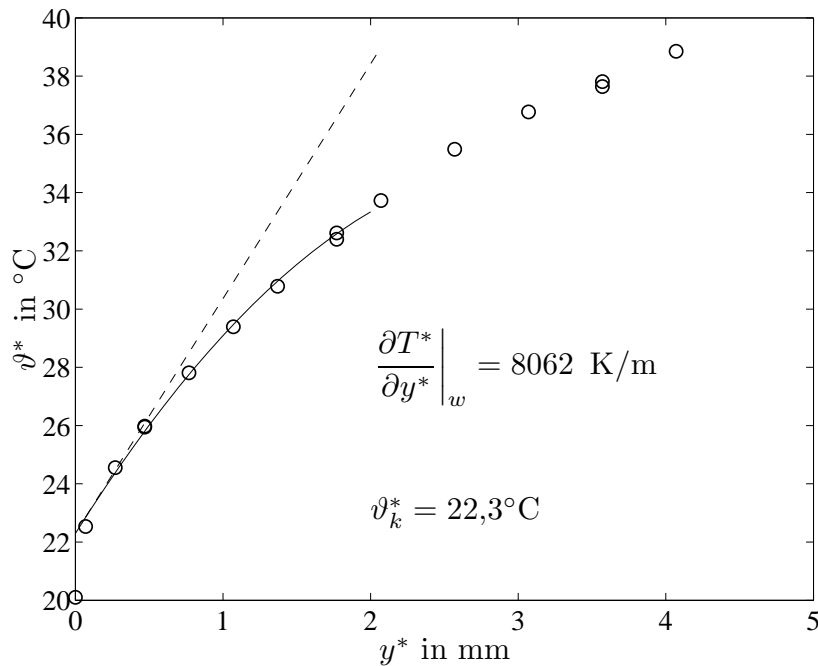


Abbildung 5.18: Temperaturprofil von Du Puits *et al.* (2006) für $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ in Wandnähe zusammen mit dem Temperaturwandgradienten (---) aus einer Ausgleichsparabel (—) durch die zehn wandnächsten Punkte. Die Wandtemperatur wird durch Extrapolation zu $\vartheta_k^* = 22,3^{\circ}\text{C}$ bestimmt.

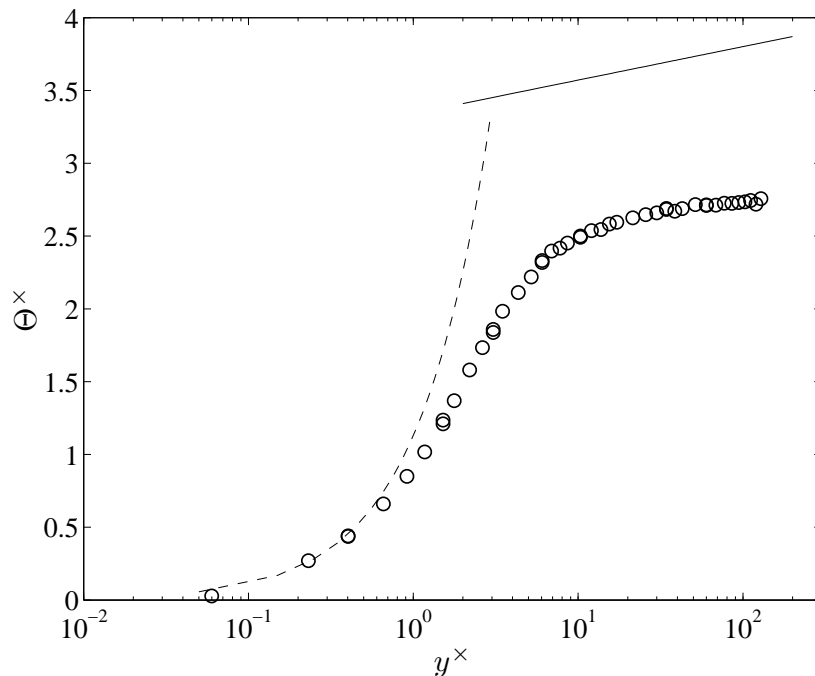


Abbildung 5.19: Entdimensioniertes Temperaturprofil von Du Puits *et al.* (2006) für $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ zusammen mit dem linearen Profil (---) in der viskosen Unterschicht und dem logarithmischen Temperaturprofil (—) in der Überlappungsschicht. Die Bezugsgrößen wurden mit dem fiktiven Gradienten aus der Ausgleichsparabel gebildet.

5.3.2 Ergebnisse der Arbeitsgruppe Ahlers

Die Arbeitsgruppe um Professor Ahlers an der *University of Santa Barbara* (Kalifornien) beschäftigt sich schon seit langer Zeit mit der experimentellen Untersuchung der Rayleigh-Bénard Konvektion. In Nikolaenko *et al.* (2005) und Funfschilling *et al.* (2005) werden neue Messdaten für die Rayleigh-Bénard Konvektion in Wasser ($Pr = 4,4$) bei unterschiedlichen Seitenverhältnissen Γ vorgestellt, die eine hohe Güte bezüglich der Genauigkeit der Nußelt-Zahlen aufweisen. So wurde z.B. durch eine analytische Korrektur berücksichtigt, dass Wärmeleitung sowohl in den Seitenwänden als auch in der Kühl- bzw. Heizplatte auftritt. Die Daten werden in Funfschilling *et al.* (2005) beschrieben als:

„It is the aim of the present paper to extend the range of Ra over which high-precision data, subject to minimal systematic errors, are available for $Nu(Ra)$. . . We believe that they can serve as a benchmark for comparison with future experimental and theoretical developments.“

Diese neuen Datensätze von hoher Genauigkeit, sollen im folgenden mit der Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.28) verglichen werden. Hierbei werden nur Daten für kleine Temperaturdifferenzen benutzt, da ansonsten der Einfluss veränderlicher Stoffwerte an Bedeutung gewinnt, vgl. z.B. Abschnitt 3.1.5. In Funfschilling *et al.* (2005) sind Daten, die als „*strictly Boussinesq*“ bewertet werden, in einer eigenen Tabelle angegeben. Aus der Arbeit von Nikolaenko *et al.* (2005) werden nur Nußelt-Daten für einen (willkürlich gewählten) Temperaturunterschied von $\Delta T^* \leq 6\text{ K}$ benutzt. Abbildung 5.20 zeigt diese Nußelt-Daten zusammen mit der Nußelt-Beziehung (5.28). Zusätzlich sind für den Bereich kleiner Rayleigh-Zahlen die DNS-Ergebnisse von Kerr (1996) und Hartlep (2004) dargestellt.

Man erkennt, dass für $Ra \gtrsim 10^9$ die Übereinsimmung der neuen Daten mit der Theorie exzellent ist. Die Daten sind über einen Bereich von $10^9 \lesssim Ra \lesssim 10^{11}$ nahezu deckungsgleich mit der Nußelt-Beziehung. Dies ist besonders bemerkenswert, da es sich hierbei erneut um einen *high-resolution plot* handelt, in dem Abweichungen besonders stark zu Tage treten.

Außerdem ist festzustellen, dass das Seitenverhältnis Γ kaum Einfluss auf die Ergebnisse hat. Es wurden Nußelt-Daten bei verschiedenen Seitenverhältnissen ($0,25 \leq \Gamma \leq 6$) ermittelt, ohne dass ein signifikanter Einfluss zu erkennen ist. Eigentlich wäre zu vermuten, dass sich z.B. bei einem Seitenverhältnis $\Gamma = 1$ eine Konvektionswalze ausbildet und bei höheren Seitenverhältnissen kompliziertere Strömungsstrukturen, die den Wärmeübergang unterschiedlich beeinflussen. Dies ist nicht der Fall, da kein Einfluss zu erkennen ist. Die Turbulenz scheint das Temperaturprofil somit nur über die turbulente Temperaturleitfähigkeit a_t^* zu beeinflussen und dies relativ unabhängig von der vorliegenden Struktur der Strömung.

Die Abweichungen im Bereich $10^7 \lesssim Ra \lesssim 10^9$ sind zunächst überraschend. Eine mögliche Erklärung dieses Phänomens könnte eine sog. Umkehrung des Temperaturgradienten (*temperature-gradient reversal*) in der Kernschicht sein, wie es z.B. experimentell von Chu & Goldstein (1973) oder numerisch von Hartlep (2004), ebenfalls für Wasser, beobachtet wurde. Hierbei weist das Temperaturprofil innerhalb der Wandschicht zunächst einen positiven Gradienten auf, durchläuft ein Maximum und hat dann einen relativ

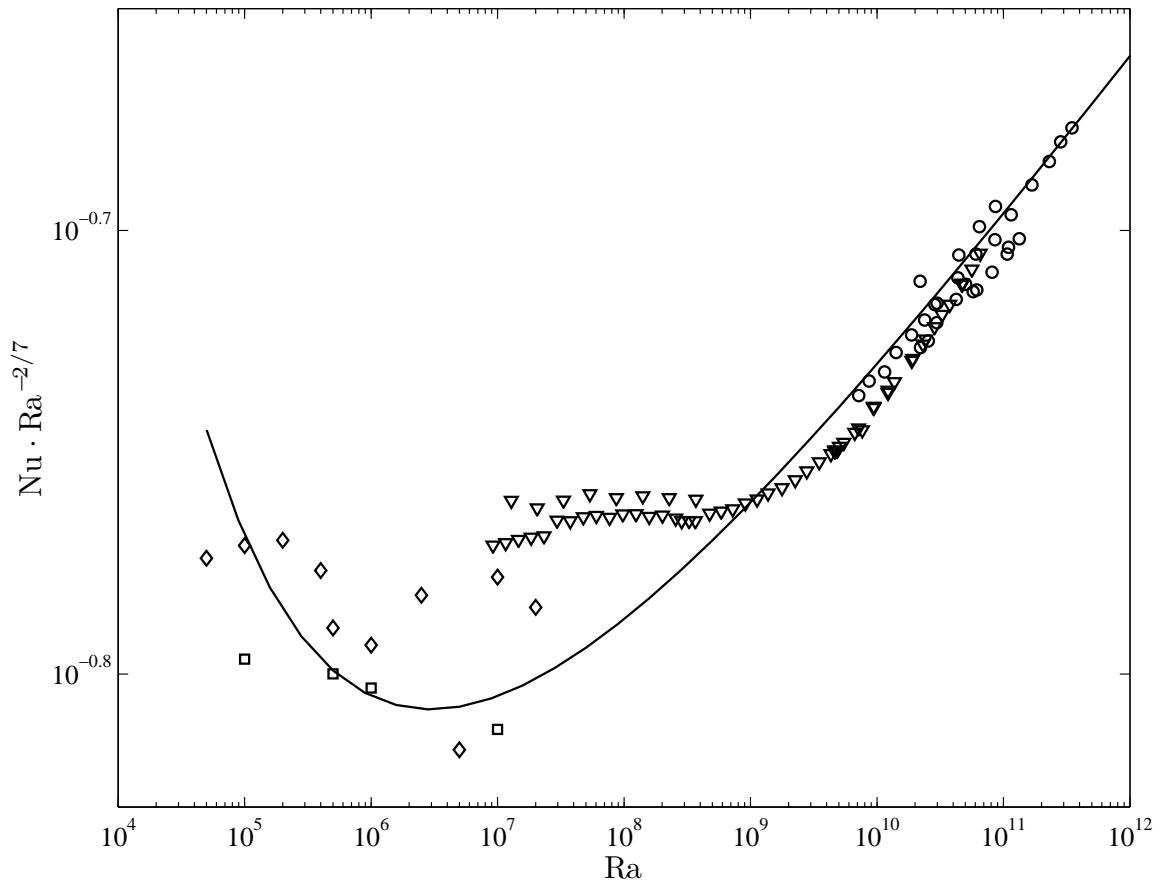


Abbildung 5.20: Nußelt-Beziehung (—) nach Gleichung (5.28) zusammen mit den Daten von Funfschilling *et al.* (2005) für $\Gamma \approx 1$ und $\text{Pr} = 4,4$ (∇), von Nikolaenko *et al.* (2005) für $0,275 \leq \Gamma \leq 0,981$ und $\text{Pr} = 4,4$ (\circ), von Kerr (1996) für $\text{Pr} = 0,7$ (\diamond) und von Hartlep (2004) für $\text{Pr} = 0,7$ (\square).

flachen negativen Gradienten in der Kernschicht, weshalb man hier von einer Umkehrung des Gradienten spricht. Chu & Goldstein (1973) beobachteten diesen Effekt nur für $\text{Ra} < 5 \cdot 10^5$, allerdings scheint es hierfür noch keine genaue Erklärung zu geben. Diese Umkehrung wurde bisher nur für Wasser festgestellt; in Arbeiten mit $\text{Pr} = 0,7$ wurde er noch nicht beobachtet.

Tritt eine Umkehrung des Gradienten in einem Rayleigh-Bénard Experiment auf, so ist das logarithmische Temperaturprofil nach Gleichung (5.18) nicht mehr gültig. Die darauf basierende Nußelt-Beziehung kann somit nur noch eine Näherung darstellen, da wichtige Voraussetzungen über das Temperaturfeld nicht mehr erfüllt sind. Es wäre hier eine weitergehende Untersuchung wünschenswert, in der zu klären ist, ob eine Umkehrung des Gradienten auftritt und unter welchen Bedingungen diese Umkehrung zu finden ist.

In Abbildung 5.20 sind zusätzlich zu den Nußelt-Daten von Nikolaenko *et al.* (2005) und Funfschilling *et al.* (2005) noch DNS-Daten für $\text{Pr} = 0,7$ von Kerr (1996) und Hartlep (2004) angegeben. Dies soll verdeutlichen, dass die Nußelt-Beziehung (5.28) die Daten für $\text{Pr} = 0,7$ gut wiedergibt und dass die gefundenen Abweichungen für Wasser keinen prinzipiellen Fehler in Gleichung (5.28) bedeuten.

5.4 Einfluss der Oberflächenrauheit

Eine genaue Analyse der Daten aus den Abbildungen 5.8 und 5.9 zeigt, dass die Nußelt-Daten von Niemela & Sreenivasan (2003) und Chavanne *et al.* (2001) für sehr hohe Rayleigh-Zahlen ihre Steigung ändern. Häufig wird dieses Verhalten als das Erreichen des *ultimate regime* gedeutet, das von Kraichnan (1962) für $Ra \rightarrow \infty$ postuliert wurde. Eine mögliche Alternative wäre jedoch der Einfluss der Oberflächenrauheit, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Die viskose Unterschicht erstreckt sich von der Wand bis $y_{rbc}^\times \approx 1,5$, wie man anhand der Abbildungen 5.3 und 5.4 erkennen kann. Liegt nun die Oberflächenrauheit k_s^* innerhalb der viskosen Unterschicht, so ist die Oberfläche hydraulisch glatt, siehe z.B. Gersten & Herwig (1992). Reichen die Rauheitselemente aber aus der viskosen Unterschicht heraus, so ändert sich das Temperaturprofil und damit auch die Nußelt-Zahl.

Als eine Abschätzung soll hier angenommen werden, dass die Oberflächenrauheit einen Einfluss hat, wenn die dimensionslose Rauheit $k_s^\times \equiv k_s^*/\delta_{rbc}^*$ aus der viskosen Unterschicht herausragt, also

$$k_s^\times \equiv \frac{k_s^*}{T_{rbc}^*} \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w > 1,5. \quad (5.44)$$

Mit den Definitionen von T_{rbc}^* , Ra und Nu kann dies nun umgeschrieben werden zu

$$\frac{k_s^*}{h^*} > 1,5 \cdot (Ra \cdot Nu)^{-1/4}. \quad (5.45)$$

In den Experimenten von Niemela & Sreenivasan (2003) als auch von Chavanne *et al.* (2001) wurden jeweils Heiz- und Kühlplatten aus Kupfer benutzt, für die eine typische Rauheit von $k_s^* = 20 \mu\text{m}$ angenommen werden kann, siehe Gersten & Herwig (1992). In den Versuchen wurden folgende Plattenabstände benutzt

Niemela & Sreenivasan (2003):

$$h^* = 0,5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_s^*}{h^*} = 4,0 \cdot 10^{-5} \quad (5.46)$$

Chavanne *et al.* (2001):

$$h^* = 0,2 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \frac{k_s^*}{h^*} = 10^{-4}. \quad (5.47)$$

Somit kann für die beiden Studien abgeschätzt werden, ab welcher Rayleigh-Zahl die Oberflächenrauheit einen Einfluss auf das Temperaturprofil haben könnte, also für $k_s^*/h^* > 1,5 \cdot (RaNu)^{-1/4}$.

Abbildung 5.21 zeigt den Verlauf von $1,5 \cdot (RaNu)^{-1/4}$ über der Rayleigh-Zahl Ra. Hierbei wird die Nußelt-Zahl nach Gleichung (5.28) bestimmt. Zusätzlich sind die dimensionslosen Rauheiten für Niemela & Sreenivasan (2003) und Chavanne *et al.* (2001) angegeben. Um nun die Rayleigh-Zahl bestimmen zu können, bei der die Rauheit von Bedeutung ist, wird der Punkt bestimmt, bei dem der Rauheitswert identisch mit $1,5 \cdot (RaNu)^{-1/4}$ ist. Von

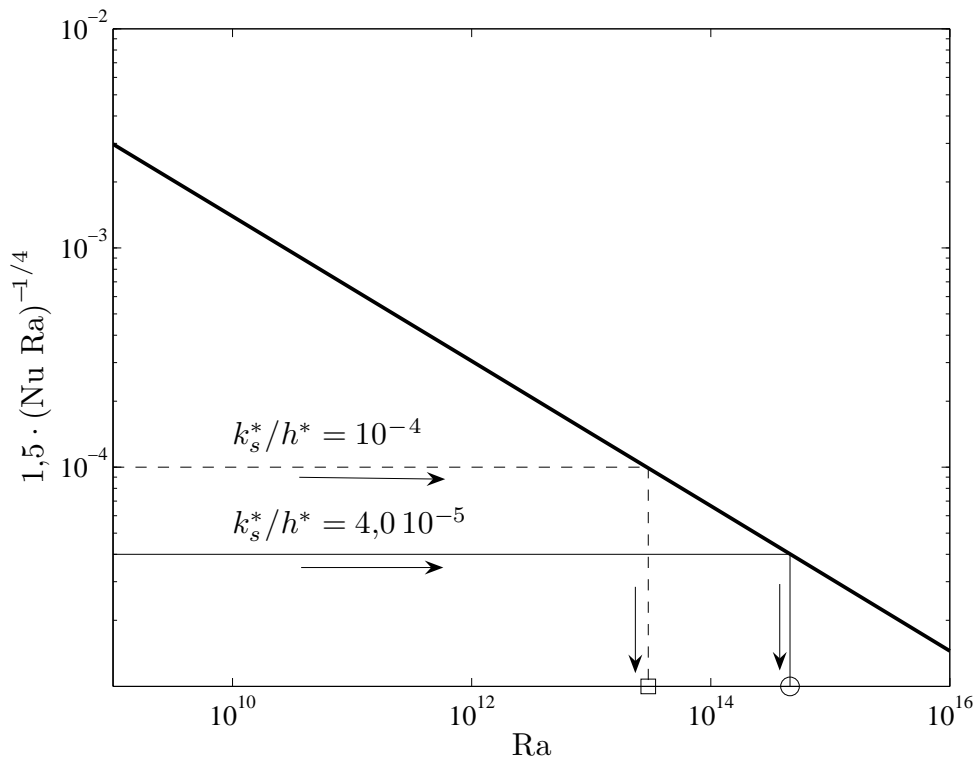


Abbildung 5.21: Darstellung von $1,5 \cdot (\text{NuRa})^{-1/4}$ über Ra, mit der es möglich ist, den Rauheitseinfluss abzuschätzen. Solange k_s^*/h^* unterhalb von $1,5 \cdot (\text{NuRa})^{-1/4}$ liegt, kann die Rauheit vernachlässigt werden. Für $Ra = 3,0 \cdot 10^{13}$ (\square) ist die Rauheit für Chavanne *et al.* (2001) von Bedeutung und für $Ra = 4,6 \cdot 10^{14}$ (\circ) für Niemela & Sreenivasan (2003).

diesem Punkt geht man senkrecht zur x -Achse und kann dort die Rayleigh-Zahl ablesen. Diese Punkte sind in Abbildung 5.21 durch Symbole gekennzeichnet. Für Chavanne *et al.* (2001) ist es $Ra = 3,0 \cdot 10^{13}$ (\square) und für Niemela & Sreenivasan (2003) $Ra = 4,6 \cdot 10^{14}$ (\circ).

Um nun die Abschätzung zu bewerten, die im vorigen Abschnitt ermittelt wurde, sind die Nußelt-Daten von Niemela & Sreenivasan (2003) und Chavanne *et al.* (2001) in Abbildung 5.22 dargestellt. Die Rayleigh-Zahlen $Ra = 3,0 \cdot 10^{13}$ (\square) und $Ra = 4,6 \cdot 10^{14}$ (\circ) sind hier durch vertikale Linien markiert. Die Veränderung der Steigung, die in einigen Studien als das Erreichen des *ultimate regimes* angesehen wird, ist durch Pfeile gekennzeichnet. Man erkennt, dass die Rayleigh-Zahlen der Steigungsänderung und die Rayleigh-Zahlen aus Abbildung 5.21 hervorragend zusammenpassen.

Berücksichtigt man die Unsicherheiten, die mit der Oberflächenrauheit k_s^* und der Dicke der viskosen Unterschicht ($y_{rc}^x \approx 1,5$) verbunden sind, so kann der Einfluss der Rauheit als eine mögliche Erklärung der Steigungsänderung in den Nußelt-Daten angesehen werden. Somit handelt es sich nicht mehr um einen Effekt, der nur von der Rayleigh-Zahl bestimmt wird, wie von Kraichnan (1962) vorgeschlagen. Es könnte sich vielmehr um den Einfluss der Rauheit handeln und somit wäre die Rayleigh-Zahl, bei der sich die Steigung ändert zusätzlich noch vom Plattenabstand h^* abhängig. Um diesen Aspekt weiter bewerten zu können, wäre eine Untersuchung des Einflusses von Heiz- und Kühlplatten aus unterschiedlichen Materialien (und somit unterschiedlichen Rauheiten) wünschenswert. Die Studie von Du & Tong (2000) ist hierbei nicht hilfreich, da die untersuchten

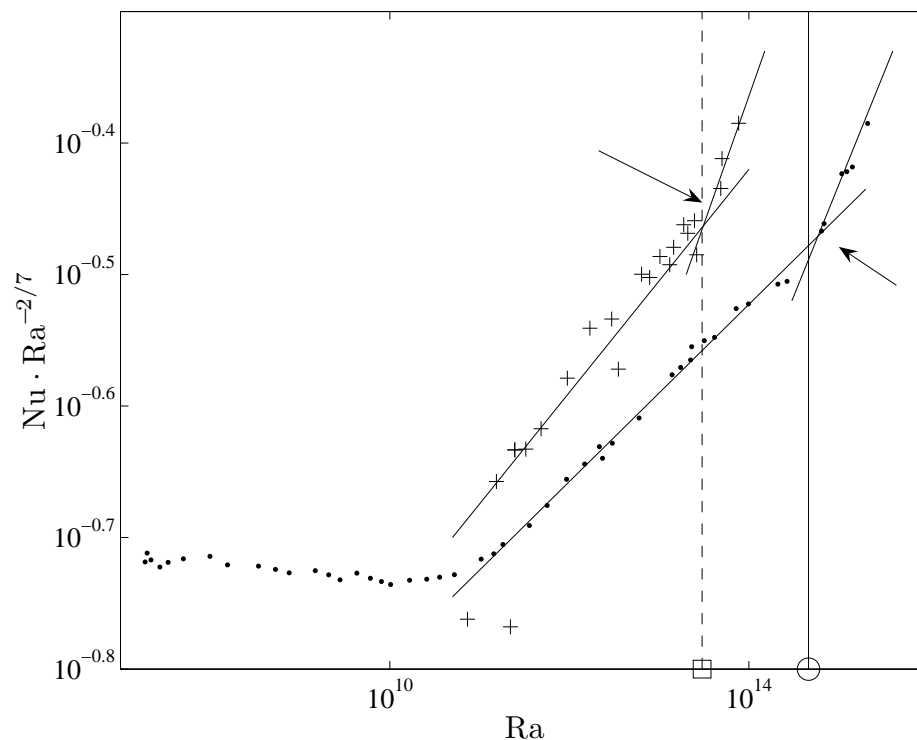


Abbildung 5.22: Datensätze von Chavanne *et al.* (2001) (+) und von Niemela & Sreenivasan (2003) (·), in denen für hohe Rayleigh-Zahlen eine Änderung in der Steigung der Nußelt-Daten auftritt (jeweils durch einen Pfeil gekennzeichnet). Die vertikalen Linien geben die Rayleigh-Zahlen an ($Ra = 3,0 \cdot 10^{13}$ entspricht \square und $Ra = 4,6 \cdot 10^{14}$ entspricht \circ), bei denen nach Abbildung 5.21 ein Einfluss der Rauheit auftreten sollte.

„Rauheiten“ im makroskopischen Bereich liegen und somit nicht mehr als Rauheitseffekt interpretiert werden können.

Kapitel 6

Gemischte Konvektion an vertikalen Wänden

Die gemischte Konvektion ist eine Strömungsform, die häufig bei Wärmeübergang an Wänden in Verbindung mit relativ geringen Stömungsgeschwindigkeiten auftritt, wie z.B. bei Innenraumströmungen in Flugzeugen oder PKWs, in der Klimatechnik und bei der Kühlung von elektronischen Bauteilen. Sie ist eine Überlagerung von natürlicher Konvektion, also eine Strömung aufgrund von Auftriebskräften innerhalb eines Fluids, und erzwungener Konvektion, also eine Strömung aufgrund von äußeren Kräften wie z.B. einem Druckgradienten oder durch eine bewegte Wand. Zu ihrer Charakterisierung wird die Richardson-Zahl benutzt, die definiert ist als:

$$\text{Ri} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \quad (6.1)$$

Für $\text{Ri} = O(1)$ spricht man von gemischter Konvektion, für $\text{Ri} > 10$ dominiert die natürliche Konvektion, für $\text{Ri} < 0,1$ die erzwungenen Konvektion. Hieran ist auch zu erkennen, dass gemischte Konvektion meist bei kleinen Reynolds-Zahlen auftritt. Betrachtet man z.B. einen vertikalen Kanal (wie von Versteegh & Nieuwstadt (1999)) mit einer relativ hohen Grashof-Zahl von $\text{Gr} = 10^8$, so gilt für die Reynolds-Zahl $\text{Re} \approx 10^4$, damit gemischte Konvektion vorliegt.

In den nachfolgenden Abschnitten soll nur die gemischte Konvektion an vertikalen Wänden betrachtet werden. Hierzu findet man in der Literatur eine häufig zitierte Übersichtsarbeit von Jackson *et al.* (1989), in der die gemischte Konvektion in vertikalen Rohren betrachtet wird. Es werden dabei folgende Fälle unterschieden:

- Fluid strömt nach oben und das Rohr ist beheizt
- Fluid strömt nach oben und das Rohr ist gekühlt
- Fluid strömt nach unten und das Rohr ist beheizt
- Fluid strömt nach unten und das Rohr ist gekühlt

Für die unterschiedlichen Fälle werden (meist) experimentelle Daten für die Veränderung der Nußelt-Zahl im Vergleich zur reinen erzwungenen Konvektion angegeben. Es wird außerdem darauf hingewiesen, dass die meisten Versuche mit Fluiden in der Nähe des kritischen Punktes durchgeführt wurden, so dass mit einem starken Einfluss von veränderlichen Stoffwerten zu rechnen ist und eine Benutzung der Boussinesq-Approximation fraglich erscheint. Weiterhin werden lediglich globale Größen betrachtet, aber keine Temperatur- oder Geschwindigkeitsprofile im Rohr.

Polyakov & Shindin (1988) haben die gemischte Konvektion anhand von beheizten, vertikalen, aufwärts durchströmten Rohren untersucht. Es wurden zwei Reynolds-Zahlen ($Re = 5000$ und $Re = 9000$) und verschiedene Grashof-Zahlen ($2,9 \cdot 10^6 \leq Gr \leq 3,4 \cdot 10^7$) untersucht und an einer Stelle im Rohr Geschwindigkeits- und Temperaturprofile sowie einige Turbulenzgrößen ermittelt. Die Ergebnisse werden dargestellt, aber es werden keine Vorschläge zur Beschreibung der Profile gemacht.

Kasagi & Nishimura (1997) haben die turbulente gemischte Konvektion an einem Kanal mit einer beheizten und einer gekühlten Wand untersucht. Die mit der mittleren Geschwindigkeit gebildete Reynolds-Zahl beträgt $Re = 4494$, die turbulente Reynolds-Zahl¹ ist $Re_\tau = 150$ und die Grashof-Zahl wurde zu $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ gewählt. Die Richardson-Zahl ergibt sich somit zu $Ri = 0,05$. Die Ergebnisse zeigen ein zu erwartendes Verhalten: Das Geschwindigkeitsmaximum verschiebt sich zur heißen Wand und es bildet sich ein asymmetrisches Temperaturprofil aus. Es konnte anhand der k^* -Gleichung gezeigt werden, dass durch die Auftriebseffekte der Reynolds-Spannungs-Term stark verändert wird, der Auftrieb aber *keinen* direkten Einfluss auf die Turbulenz hat. Weiterhin wurde eine starke Ähnlichkeit sowohl mit der MHD (Magnetohydrodynamik) als auch mit Strömungen mit Absaugung festgestellt.

You *et al.* (2003) haben mit Hilfe von DNS die gemischte Konvektion in beheizten Rohren untersucht. Hierbei wurde zusätzlich eine Fallunterscheidung anhand der Strömungsrichtung des Fluids getroffen, also ob das Fluid nach oben oder nach unten strömt. Die Reynolds-Zahl wurde bei $Re = 2650$ festgehalten und die Richardson-Zahl von 0 bis 0,434 variiert. Für diese Fälle wurden die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile sowie Turbulenzgrößen (in graphischer Form) angegeben. Globale Größen wie der Reibungsbeiwert c_f und die Nußelt-Zahl wurden ebenfalls ausgewertet. Dabei wurden Unterschiede zur reinen erzwungenen Konvektion (logarithmisches Wandgesetz) festgestellt. Es wurden allerdings keine eigenen Vorschläge zur Beschreibung der Profile gemacht.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass es nur wenige Arbeiten gibt, die detaillierte Geschwindigkeits- und Temperaturprofile zur Verfügung stellen. Es gibt somit nur eine begrenzte Auswahl an Testfällen zur Validierung von neuen Theorien. Weiterhin gibt es bisher keinen Ansatz zur universellen Beschreibung der Profile in Wandnähe. Man findet lediglich Aussagen, dass unter bestimmten Bedingungen Abweichungen zum logarithmischen Wandgesetz auftreten.

¹Die turbulente Reynolds-Zahl Re_τ wird mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit anstatt der mittleren Geschwindigkeit gebildet.

6.1 Vertikale beheizte Couette-Strömung

Wie bereits oben erwähnt ist die gemischte Konvektion eine Strömungsform, in der sowohl Auftriebskräfte als auch aufgeprägte Kräfte eine Rolle spielen. Es gibt somit die beiden Grenzfälle der gemischten Konvektion:

- $Ri \rightarrow 0$ (erzwungene Konvektion)
- $Ri \rightarrow \infty$ (natürliche Konvektion)

Um die gemischte Konvektion an vertikalen Wänden nun analysieren zu können, bietet es sich an, einen möglichst einfachen Fall zu wählen, dessen Ergebnisse sich auf andere Strömungen übertragen lassen und der beide Grenzfälle ($Ri \rightarrow 0$ und $Ri \rightarrow \infty$) abdecken kann. Als neue Test-Geometrie für die gemischte Konvektion wird hier die vertikale beheizte Couette-Strömung (engl.: *vertical heated Couette*, VHC) vorgeschlagen, wie sie anhand von Abbildung 6.1 aufgezeigt wird. Sie bietet den Vorteil, dass im Fluid keine Druckgradienten auftreten (also Wegfall der Druckgradienten in den Impulsgleichungen) und dass es sich bei unendlich ausgedehnten Platten um eine eindimensionale Strömung (keine Gradienten in Strömungsrichtung) handelt.

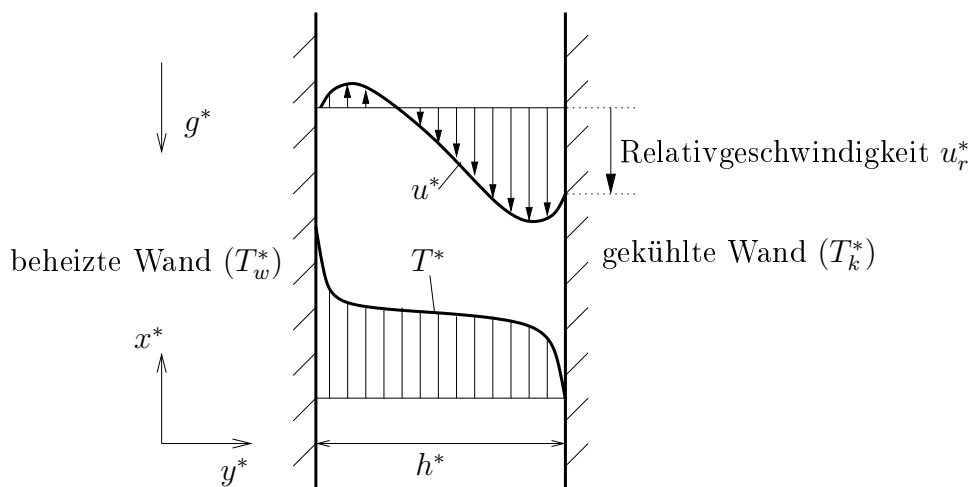


Abbildung 6.1: Prinzipieller Aufbau einer vertikalen beheizten Couette-Strömung (VHC, *vertical heated Couette*) mit qualitativem Geschwindigkeits- und Temperaturprofil.

Die beschreibenden Gleichungen für die VHC lauten in dimensionsbehafteter Form:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(a^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \overline{v^{*'} T^{*'}} \right) \quad (6.2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \overline{u^{*'} v^{*'}} \right) + g^* \beta^* (T^* - T_0^*) \quad (6.3)$$

Hierbei sind die turbulenten Zusatzterme $-\overline{v^{*'} T^{*'}}$ und $-\overline{u^{*'} v^{*'}}$ zunächst unbekannt.

Die VHC geht für Seitenwände gleicher Temperatur in die einfache Couette-Strömung über und für verschwindende Relativgeschwindigkeit u_r^* zwischen den Platten in den beheizten/gekühlten Kanal, wie er von Versteegh & Nieuwstadt (1999) benutzt wurde. Somit sollte der VHC für die gemischte Konvektion eine ähnlich fundamentale Bedeutung zukommen wie der (einfachen) Couette-Strömung für die erzwungene Konvektion und dem vertikalen beheizten Kanal für die natürliche Konvektion. Für diese beiden Grenzfälle stehen bereits Lösungen zur Verfügung (siehe Kapitel 2 und 3).

Abbildung 6.2 zeigt Geschwindigkeitsprofile für die beiden Grenzfälle (erzwungene und natürliche Konvektion) und mögliche Zwischenstufen gemischter Konvektion. Es muss dabei nach der Richtung der Relativgeschwindigkeit der gekühlten Platte unterschieden werden.

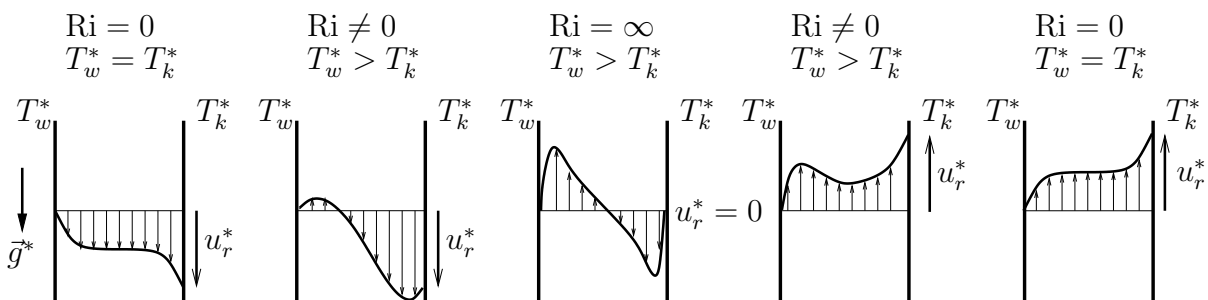


Abbildung 6.2: Qualitative Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, wie sie in der VHC auftreten.

Da zur VHC bisher keine gemessenen oder simulierten Profile zur Verfügung stehen, ist für die Zukunft eine Zusammenarbeit mit anderen Forschergruppen geplant. Hierbei sind in besonderem Maße DNS-Ergebnisse von Interesse, da diese sehr genaue Werte der Wandgradienten liefern können. Wie in den vorangegangenen Kapiteln deutlich wurde, sind diese Wandgradienten von großer Bedeutung, da sie zur Entdimensionierung herangezogen werden. Außerdem sollte ein möglichst großer Richardson-Zahlenbereich abgedeckt werden.

6.2 Blending-Parameter

Die gemischte Konvektion besitzt die beiden Grenzfälle natürliche Konvektion und erzwungene Konvektion. Ein Ansatz, der die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der gemischten Konvektion richtig beschreibt, sollte auch die beiden Grenzfälle richtig wiedergeben können. Eine Möglichkeit, um dieses sicherzustellen, ist, ein *blending* zwischen den Profilen der beiden Grenzfälle durchzuführen. Hierbei stellt sich allerdings die Frage, welcher Parameter für das *blending* benutzt werden soll. Die Richardson-Zahl kommt dafür nicht in Frage, da diese eine Globalgröße zur Beschreibung der Strömung darstellt. Ein geeigneter Parameter muss sich jedoch mit Hilfe von lokalen Größen an der Wand bilden lassen.

Es soll hierzu eine neue Größe H eingeführt werden, die an die Richardson-Zahl angelehnt ist, aber keine globalen Größen mehr beinhaltet. Statt der normalen Grashof-Zahl

wird Gr_c benutzt, die mit T_c^* statt ΔT^* gebildet wird. Die Reynolds-Zahl wird durch die turbulente Reynolds-Zahl Re_τ ersetzt. Der Exponent wird so gewählt, dass die charakteristische Länge h^* gekürzt werden kann

$$H = \frac{Gr_c}{Re_\tau^3} = \frac{\left(\frac{g^* \beta^* T_c^* h^{*3}}{\nu^{*2}}\right)}{\left(\frac{u_\tau^* h^*}{\nu^*}\right)^3} = \frac{g^* \beta^* \nu^* T_c^*}{u_\tau^{*3}}. \quad (6.4)$$

Mit den Definitionen von T_c^* und u_c^* nach den Gleichungen (3.7) und (3.45) folgt

$$H = Pr^4 \left(\frac{u_c^*}{u_\tau^*}\right)^3 \quad (6.5)$$

und für $Pr = 0,7$

$$H = 0,24 \left(\frac{u_c^*}{u_\tau^*}\right)^3. \quad (6.6)$$

Es sollen zunächst nur Situationen betrachtet werden, in denen die Wandschubspannung nicht verschwindet². Somit gilt $u_\tau^* \neq 0$ und H weist dann keine Singularität auf, da der Nenner immer ungleich Null ist.

Für den Fall erzwungener Konvektion (z.B. $g^* = 0$) gilt $u_c^* = 0 \Rightarrow H = 0$. Für den Grenzfall natürlicher Konvektion (bei $Pr = 0,7$) gilt näherungsweise $u_c^*/u_\tau^* = 0,58$, wie in Abbildung 6.3 anhand der Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) deutlich wird.

Es ergibt sich für H_{nat} bei $Pr = 0,7$

$$H_{nat} = 0,24 (0,58)^3 = 0,047. \quad (6.7)$$

Es folgt also für H :

- $0 \leq H \leq 0,047 (= H_{nat})$
- $H = 0$: erzwungene Konvektion
- $H = 0,047$: natürliche Konvektion

Es steht somit ein Parameter zur Verfügung, der mit „Wandgrößen“ gebildet wird und sich zwischen den beiden Grenzfällen (erzwungene und natürliche Konvektion) bewegt. Hiermit sollte ein *blending* zwischen den Grenzfällen möglich sein. Um die nachfolgenden Betrachtungen zu vereinfachen, ist es bequem, einen Parameter zur Hand zu haben, der zwischen 0 und 1 variiert. Dies kann mit

$$\psi \equiv \frac{H}{0,047} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (6.8)$$

erreicht werden.

²Eine verschwindende Wandschubspannung tritt bei erzwungener Konvektion z.B. bei der Couette-Poiseuille Strömung für bestimmte Kombinationen von Plattengeschwindigkeit und Druckgradient auf. Hierbei ist das logarithmische Wandgesetz nicht mehr gültig und es muss eine getrennte Analyse der Strömung vorgenommen werden.

Analog führen bei der VHC bestimmte Kombinationen von Plattengeschwindigkeit und Auftriebskräften zu einem Verschwinden der Wandschubspannung.

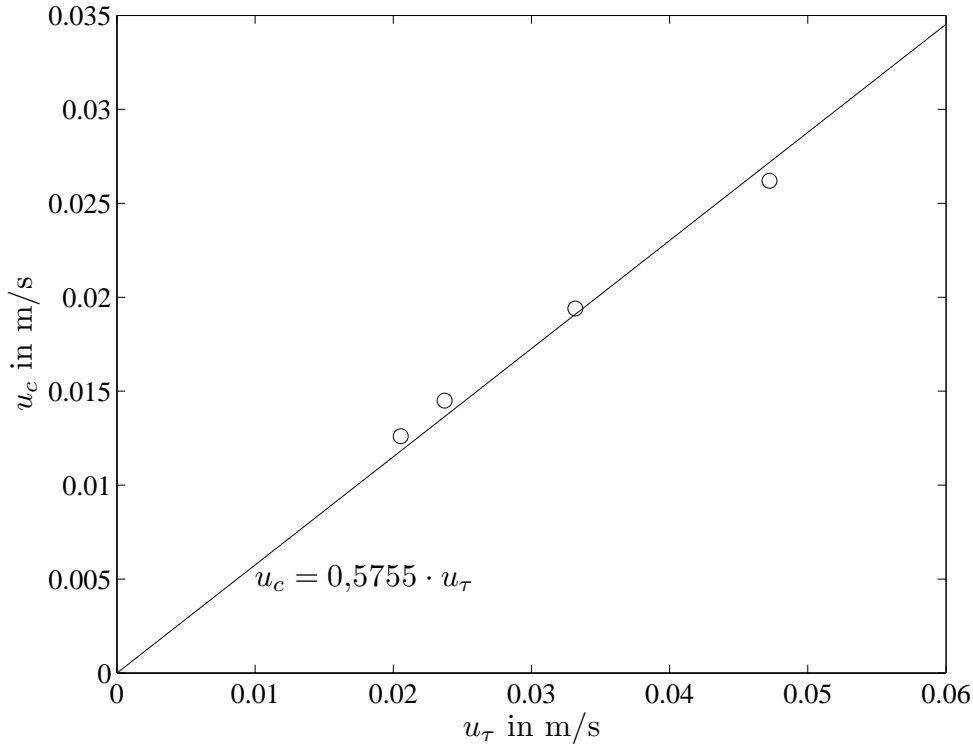


Abbildung 6.3: Auftragung von u_c über u_τ für die natürliche Konvektion anhand der Daten (o) von Versteegh & Nieuwstadt (1999).

6.2.1 Umschreiben des Temperaturprofils

Die folgenden Überlegungen sollen nur für das Temperaturprofil vorgestellt werden, da dies einfacher zu handhaben ist als das Geschwindigkeitsprofil. Ein möglicher Ansatz für ein *blending* ist das Umschreiben der universellen Profile der natürlichen Konvektion in die Koordinaten der erzwungenen Konvektion (also eine Koordinatentransformation $y^\times \rightarrow y^+$ und $\Theta^\times \rightarrow \Theta^+$). Ausgangspunkt ist das universelle Temperaturprofil nach Gleichung (3.22), das entsprechend umgeformt wird

$$\frac{T_w^* - T_c^*}{T_c^*} = C \ln \left(\frac{y^*}{T_c^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right) + D \quad (6.9)$$

$$\frac{T_w^* - T_c^*}{T_\tau^*} \cdot \frac{T_\tau^*}{T_c^*} = C \ln \left(\frac{y^* u_\tau^*}{\nu^*} \cdot \frac{\nu^*}{u_\tau^* T_c^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right) + D \quad (6.10)$$

$$\Theta_{nat}^+ \cdot \text{Pr} \frac{u_c^*}{u_\tau^*} = C \ln \left(y^+ \cdot \text{Pr}^2 \cdot \frac{u_c^*}{u_\tau^*} \right) + D \quad (6.11)$$

$$\Theta_{nat}^+ = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{u_\tau^*}{u_c^*} \left[C \ln (y^+) - C \ln \left(\frac{1}{\text{Pr}^2} \frac{u_\tau^*}{u_c^*} \right) + D \right]. \quad (6.12)$$

Hierbei kann $u_\tau^*/u_c^* = 1/0,58$ für die natürliche Konvektion benutzt werden.

Das Temperaturprofil für die erzwungene Konvektion ist nach Gleichung (2.44) bekannt

$$\Theta_{erzw}^+ = \frac{1}{\kappa_\Theta} \ln(y^+) + C^+(\text{Pr}). \quad (6.13)$$

Somit wäre ein *blending* zwischen den zwei Profilen nach folgendem linearen Ansatz möglich

$$\Theta_{misch}^+ = (1 - \psi) \cdot \Theta_{erzw}^+ + \psi \cdot \Theta_{nat}^+. \quad (6.14)$$

Eine Alternative wäre ein *blending* nach einem Potenzansatz

$$\Theta_{misch}^+ = \Theta_{erzw}^{+(1-\psi)} \cdot \Theta_{nat}^{+\psi}. \quad (6.15)$$

Für $\psi = 1$ (natürliche Konvektion) gilt somit $\Theta_{misch}^+ = \Theta_{nat}^+$ und für $\psi = 0$ (erzwungene Konvektion) ergibt sich $\Theta_{misch}^+ = \Theta_{erzw}^+$.

Zur Überprüfung der beiden zuvor gezeigten *blending*-Ansätze können die DNS-Daten von Kasagi & Nishimura (1997) herangezogen werden. Es ergibt sich für die verwendeten Werte der Kennzahlen ($Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ und als Ergebnis der Rechnung $Nu_{avg} = 14,18$) ein *blending*-Parameter von $\psi = 0,20$, siehe hierzu auch Anhang E. In Abbildung 6.4 sind die DNS-Daten zusammen mit dem Profil der natürlichen Konvektion, der gemischten Konvektion und den beiden *blending*-Varianten dargestellt.

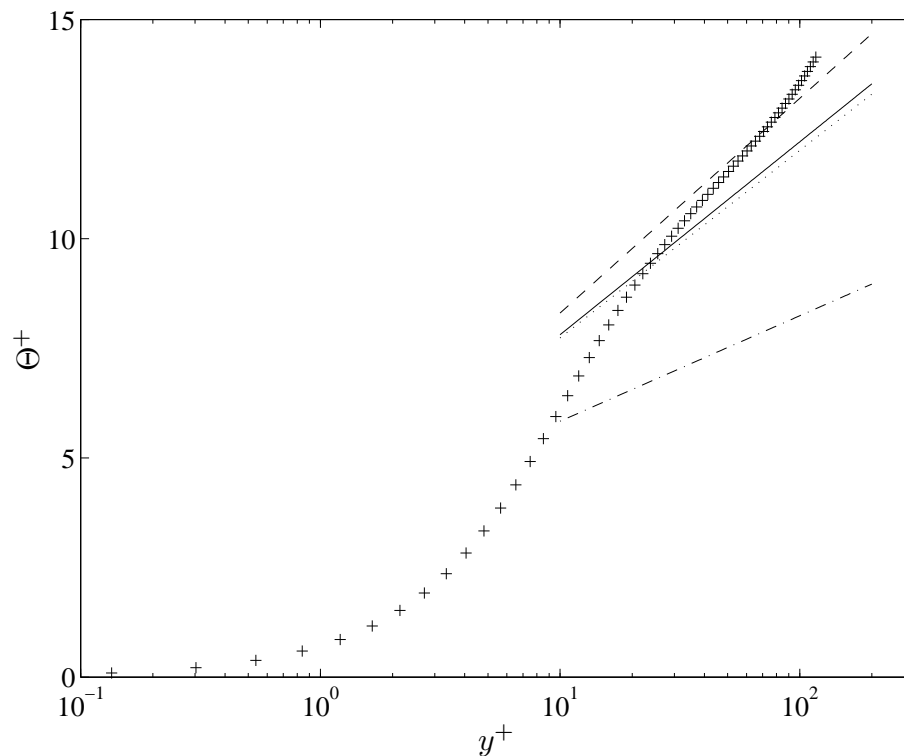


Abbildung 6.4: DNS-Temperaturprofil (+) von Kasagi & Nishimura (1997) mit $\psi = 0,20$ zusammen mit dem Temperaturprofil für die erzwungene Konvektion (---) nach Gleichung (2.44), für die natürliche Konvektion (-·-) nach Gleichung (6.12), nach dem *blending* über einen linearen Ansatz (—) nach Gleichung (6.14) und nach dem *blending* über einen Potenzansatz (···) nach Gleichung (6.15).

Die Daten werden bereits relativ gut mit dem Profil der erzwungenen Konvektion wiedergegeben und es wäre eigentlich kein *blending* erforderlich. Die Profile, die durch das

Blenden erhalten wurden, können die Übereinstimmung nicht verbessern. Es ist zusätzlich festzustellen, dass die Profile aus dem linearen *blending* und dem Potenzansatz fast identisch sind, was nicht von vorn herein zu erwarten war. Das Temperaturprofil der natürlichen Konvektion gibt die Daten nur schlecht wieder, was aufgrund der niedrigen Richardson-Zahl ($Ri = 0,05$) von Kasagi & Nishimura (1997) aber auch zu erwarten ist.³

Es erscheint aus den folgenden Gründen nicht sinnvoll, anhand der DNS-Daten von Kasagi & Nishimura (1997) die *blending*-Ansätze zu bewerten:

- Es gibt nur für einen *blending*-Parameter DNS-Daten ($\psi = 0,20$).
- Die verwendeten dimensionslosen Kennzahlen sind relativ klein. Betrachtet man z.B. eine erzwungene Konvektion mit der gleichen turbulenten Reynolds-Zahl ($Re_\tau = 150$) wie in Kasagi & Nishimura (1997), so stellt man deutliche Abweichungen vom Temperaturprofil nach Gleichung (2.44) fest.
- Bei der Kombination „beheizte Wand/nach oben strömendes Fluid“ ist eine starke Abschwächung der Turbulenz festzustellen. Ein *blending* würde allerdings eine Kombination von Wandfunktionen sein, die für $Ra \rightarrow \infty$ und $Re \rightarrow \infty$ gültig sind, was zu schlechter Übereinstimmung führen müsste.
- Es kann nicht von vornherein ausgeschlossen werden, dass der aufgeprägte Druckgradient in der DNS von Kasagi & Nishimura (1997) einen Einfluss hat.

Für die gemischte Konvektion besteht also das Problem, dass zur Zeit nicht genug geeignete Datensätze zur Verfügung stehen, an denen verschiedene *blending*-Ansätze überprüft werden könnten.

Da bisher keine Profile bei ausreichend hohen Werten der Reynolds- und Richardson-Zahl vorliegen, könnte evt. ein Ansatz benutzt werden, bei dem die Konstanten des Temperaturprofils anhand von Nußelt-Daten bestimmt werden, zu Details siehe Balaji *et al.* (2006). Bei diesem Ansatz wird ausgenutzt, dass sich ein Temperaturprofil in eine Nußelt-Beziehung umschreiben lässt, wie in den Abschnitten 3.2 und 5.2 gezeigt wurde. Geht man nun davon aus, dass die Struktur des Temperaturprofils bekannt ist (beispielsweise ein logarithmischer Verlauf), so könnten Nußelt-Daten benutzt werden, um die unbekannt Konstanten zu ermitteln.

6.3 Besonderheiten der gemischten Konvektion

Als ein Problem der gemischten Konvektion könnte sich der Wirbelviskositätsansatz erweisen, der sowohl bei der Herleitung des universellen Geschwindigkeitsprofils nach Gleichung (3.54) und als auch beim logarithmischen Wandgesetz benutzt wurde. Für die natürliche Konvektion ist das Geschwindigkeitsmaximum sehr dicht an der Wand, so dass im Bereich der Überlappungsschicht ($y^\times > 9$) die Reynolds-Spannungen mit Hilfe der Wirbelviskosität und konstanter turbulenter Prandtl-Zahl beschrieben werden können. Bei der

³Es ist erstaunlich, dass der Unterschied zwischen dem Profil der erzwungenen Konvektion und der natürlichen Konvektion so groß ist. Nach Abbildung 3.2 sollten die Profile dichter zusammen liegen. Es ist zu vermuten, dass evt. der Faktor u_c^*/u_τ^* für die Daten von Tsuji & Nagano (1988a) nicht dem Verlauf der DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) nach Abbildung 6.3 folgt.

gemischten Konvektion kann ein Geschwindigkeitsmaximum aber auch in der Überlappungsschicht auftreten, siehe z.B. die qualitativen Profile in Abbildung 6.2. Ist dies der Fall, so werden die Reynolds-Spannungen nicht mehr richtig wiedergegeben. Es ist dann zu prüfen, wie gut die durch ein *blending* erhaltenen Profile mit Vergleichsdaten übereinstimmen. Evt. muss eine alternative Modellierung der Turbulenz (z.B. *Reynolds stress models*) gesucht werden.

Ein anderes Problem ist das Erreichen asymptotisch großer Kennzahlen. So ist die höchste bisher mit DNS berechnete Rayleigh-Zahl für den beheizten vertikalen Kanal $Ra = 5,0 \cdot 10^6$, siehe Versteegh & Nieuwstadt (1999). Bei $Ri = 1$ würde somit für die Reynolds-Zahl folgen

$$Re = \sqrt{Gr} = 2236. \quad (6.16)$$

Dies ist aus asymptotischer Sicht eine zu kleine Reynolds-Zahl und es würden noch deutlichere Abweichungen zum logarithmischen Wandgesetz und Temperaturprofil auftreten. Aufgrund der enormen Anforderungen an die Rechenleistung ist es also fraglich, ob in der nächsten Zeit DNS-Daten zur gemischten Konvektion bei ausreichend großen Kennzahlen zur Verfügung stehen werden; evt. muss stattdessen auf Experimente zurückgegriffen werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

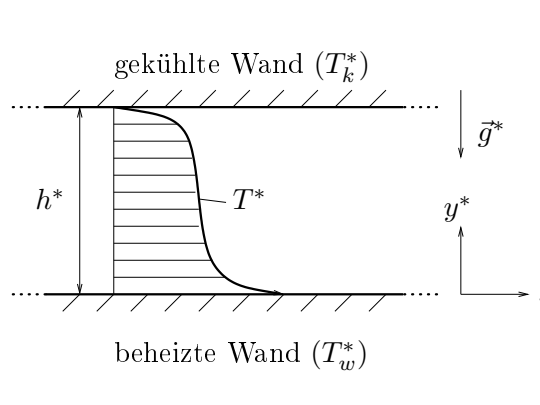
In der vorliegenden Arbeit wurde die turbulente natürliche Konvektion unter asymptotischen Gesichtspunkten analysiert. Hierbei wurde zwischen natürlicher Konvektion an vertikalen Wänden und der Rayleigh-Bénard Konvektion unterschieden. Für beide Fälle konnte eine Zwei-Schichten-Struktur identifiziert werden, mit jeweils einer Wandschicht und einer turbulenten Außen- bzw. Kernschicht. Zwischen diesen beiden Schichten wurde für die Temperatur ein Anpassen der Gradienten durchgeführt und man erhält logarithmische Temperaturprofile, die in sehr guter Übereinstimmung mit DNS- und Messdaten sind.

Da für die natürliche Konvektion an vertikalen Wänden das Temperaturprofil durch das oben genannte Anpassen der Gradienten bekannt ist, konnte in einem anschließenden Schritt unter Annahme einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl die Impulsbilanz direkt gelöst werden und somit ein universelles Geschwindigkeitsprofil angegeben werden. Dieses Geschwindigkeitsprofil kann DNS- und Messdaten aus verschiedenen Studien sehr gut wiedergeben. Es wurde außerdem gezeigt, dass der Einfluss der variablen Temperaturleitfähigkeit bzw. Viskosität bei den meisten experimentellen Arbeiten nicht zu vernachlässigen ist. Es wurde hierfür eine Korrektur angegeben, um dieses Verhalten zu berücksichtigen.

Die universellen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile für die vertikale Wand wurden als Wandfunktionen für CFD-Codes verwendet. Hierzu wurde der frei zugängliche FORTRAN-Code CAFFA benutzt, um die Implementierung beispielhaft aufzuzeigen. Es wurde dabei festgestellt, dass die Bilanzgleichung der kinetischen Energie der turbulenten Schwankungsbewegung k^* für die natürliche Konvektion nicht erfüllt ist. Um dennoch eine relativ einfache Umsetzung der neuen Wandfunktionen zur Verfügung zu stellen, wurde darauf verzichtet, das k - ω -Turbulenzmodell zu modifizieren, und stattdessen wurde lediglich die Randbedingung für die Dissipationsrate ω^* angepasst. Mit diesem modifizierten CAFFA-Code mit den implementierten Wandfunktionen wurden DNS-Daten zum vertikalen Kanal nachgerechnet und es konnte eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden. Die Ergebnisse zeigen eine deutlich höhere Genauigkeit als diverse Rechnungen mit einem kommerziellen CFD-Code.

Für die Rayleigh-Bénard Konvektion wurde das entsprechende Temperaturprofil in eine Nuelt-Beziehung umgeschrieben. Es steht somit eine theoretisch begründete Nuelt-Beziehung zur Verfügung, in der keine weiteren Konstanten angepasst werden müssen; alle Koeffizienten stammen aus dem universellen Temperaturprofil. Diese Nuelt-Beziehung, die anhand von Temperaturprofilen für $Ra < 10^9$ ermittelt wurde, ist in der Lage, Nuelt-Daten bis $Ra \approx 10^{15}$ sehr gut wiederzugeben. Besonders die Übereinstimmung mit aktuellen Messdaten der Gruppe um Prof. Ahlers ist exzellent. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass eine Änderung der Steigung im Nuelt-Rayleigh-Verlauf mit dem Einfluss der Oberflächenrauheit zu erklären ist und nicht notwendigerweise ein Indiz für das *ultimate regime* ist.

Die beiden nachfolgenden Tabellen fassen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit für die Rayleigh-Bénard Konvektion und die natürliche Konvektion an vertikalen Wänden zusammen.

 <p style="text-align: center;">Rayleigh-Bénard Konvektion</p>	$Nu = \frac{Ra^{1/3}}{\left[\frac{G}{2} \ln \left(\frac{0,078}{16} Ra^{1,323} \right) + 2H \right]^{4/3}}$
<p>Temperaturprofil</p> <p>viskose Unterschicht $\Theta^\times = y^\times$</p> <p>Überlappungsschicht $\Theta^\times = G \ln(y^\times) + H$</p>	
<p>Konstanten</p> <p>$G = 0,1$</p> <p>$H = 3,43 - \frac{14,94}{Ra^{1/4}}$</p>	
<p>Dimensionslose Größen</p> <p>$\Theta_{rbc}^\times = \frac{T_w^* - T^*}{T_{rbc}^*}$ mit $T_{rbc}^* = \left(\frac{a^* \nu}{g^* \beta^*} \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w^3 \right)^{1/4}$</p> <p>$y_{rbc}^\times = \frac{y^*}{\delta_{rbc}^*}$ mit $\delta_{rbc}^* = T_{rbc}^* \cdot \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w^{-1}$</p>	

Natürliche Konvektion an vert. Wänden		
	$T_w^* > T_k^*$ $\vec{g}^* \downarrow$ x^* y^*	
	$\text{Nu} = \frac{(\text{Ra Pr})^{1/3}}{\left[2C \ln \left(\frac{[\text{Ra Pr Nu}]^{1/4}}{2} \right) + 2D \right]^{4/3}}$	
	$T_w^* > T_0^*$ $\vec{g}^* \downarrow$ x^* y^*	
	$\text{Nu} = \frac{\text{Ra}_x^{1/3}}{\left[\hat{C} \ln(\text{Ra}_x) + \hat{D} \right]^{4/3}} \quad \text{für } \text{Pr} = 0,7$	
Temperaturprofil		
viskose Unterschicht		
$\Theta^\times = y^\times$		
Überlappungsschicht		
$\Theta^\times = C \ln(y^\times) + D$		
Geschwindigkeitsprofil		
viskose Unterschicht		
$U^\times = \frac{1}{6} y^{\times 3} - \frac{1}{2} \Theta_0^\times y^{\times 2} + \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right _w y^\times$		
Überlappungsschicht		
$U^\times = \frac{C \text{Pr}}{\sigma_t} \cdot y^\times \cdot \left(C [\ln(y^\times) - 2] + D - \Theta_0^\times \right) + E \ln(y^\times) + F$		
Konstanten		
$C = 0,427$	$\hat{C} = 0,0126$	$E = 0,49 \cdot \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right _w - 2,27$
$D = 1,93$	$\hat{D} = 5,22$	$F = 1,28 \cdot \left. \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right _w + 1,28$
Dimensionslose Größen		
$\Theta^\times = \frac{T_w^* - T^*}{T_c^*}$	mit	$T_c^* = \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w^3 \right)^{1/4}$
$y^\times = \frac{y^*}{\delta^*}$	mit	$\delta^* = T_c^* \cdot \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w^{-1}$
$U^\times = \frac{u^*}{u_c^*}$	mit	$u_c^* = \frac{g^* \beta^* T_c^{*3}}{\nu^*} \cdot \left \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right _w^{-2}$

7.2 Ausblick

Für die Zukunft wäre es allgemein wünschenswert, sowohl für die natürliche Konvektion an vertikalen Wänden als auch für die Rayleigh-Bénard Konvektion weitere Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile bei möglichst hohen Rayleigh-Zahlen zur Verfügung zu haben, um weitere Validierungen durchzuführen. Somit könnten die hier angegebenen Profile weiter bestätigt werden oder bei Bedarf die Konstanten angepasst werden. Bei einer ausreichend großen Datenbasis wäre es auch zu überlegen, das k - ω -Turbulenzmodell (oder ein anderes Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodell) für die natürliche Konvektion anzupassen und sicherzustellen, dass die k^* -Gleichung erfüllt wird.

Ein weiterer Schritt könnte die Implementierung der Wandfunktionen in einem dreidimensionalen CFD-Code sein. Dies könnte der *open source code* OpenFOAM¹ sein oder evt. das Programm TAU vom DLR (Göttingen). Somit sollte es möglich sein, auch kompliziertere Geometrien zu berechnen, wie sie typischerweise in industriellen Anwendungen auftreten.

Für ein Folgeprojekt ist es geplant, die hier vorgestellten Überlegungen auf die gemischte Konvektion (in vertikalen Kanälen) auszuweiten. Es stehen die Lösungen für die beiden Grenzfälle, „natürliche Konvektion“ und „erzwungene Konvektion“, zur Verfügung. Eine adäquate Theorie der gemischten Konvektion sollte in der Lage sein, diese Grenzfälle ebenfalls richtig wiederzugeben. Ein möglicher Ansatz hierzu wäre, ein *blending* zwischen der natürlichen und der erzwungenen Konvektion vorzunehmen. Allerdings gibt es zur Zeit nur wenige Studien für die gemischte Konvektion, in denen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile angegeben werden. Somit ist eine Überprüfung universeller Profile zur gemischten Konvektion zur Zeit noch schwierig.

¹Siehe hierzu: www.opencfd.co.uk/

Anhang A

Entdimensionierung der Impulsbilanz

In diesem Abschnitt soll aufgezeigt werden, wie die Impulsbilanz nach Gleichung (2.16) mit den charakteristischen Bezugsgrößen der natürlichen Konvektion entdimensioniert werden kann. Der Ausgangspunkt ist die Impulsbilanz

$$\rho_0^* \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{Du^*}{Dt^*} = \rho_0^* g^* \beta^* (T^* - T_0^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu_0^* \left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (\text{A.1})$$

und es werden folgende Entdimensionierungen nach Kapitel 3 benutzt:

$$\Theta^\times \equiv \frac{T_w^* - T^*}{T_c^*} \quad \text{mit} \quad T_c^* = \left(\frac{a^{*2}}{g^* \beta^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^3 \right)^{1/4} \quad (\text{A.2})$$

$$U^\times \equiv \frac{u^*}{u_c^*} \quad \text{mit} \quad u_c^* = \frac{g^* \beta^* T_c^{*3}}{\nu^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^{-2} \quad (\text{A.3})$$

$$y^\times \equiv \frac{y^*}{\delta^*} \quad \text{mit} \quad \delta^* = T_c^* \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^{-1} \quad (\text{A.4})$$

$$t^\times \equiv \frac{t^*}{t_c^*} \quad \text{mit} \quad t_c^* = \frac{\delta^*}{u_c^*} \quad (\text{A.5})$$

Setzt man diese Definitionen ein, so ergibt sich zunächst

$$\left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{DU^\times}{Dt^\times} \frac{u_c^{*2}}{\delta^*} = g^* \beta^* T_c^* \frac{(T_w^* - T_0^*) - (T^* - T_0^*)}{T_c^*} + \frac{\partial}{\partial y^\times} \left(\left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right) \frac{\nu_0^* u_c^*}{\delta^{*2}}. \quad (\text{A.6})$$

Es kann gezeigt werden, dass gilt

$$\frac{u_c^{*2}}{\delta^*} = \frac{g^* \beta^*}{\text{Pr}^2} T_c^* \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\nu_0^* u_c^*}{\delta^{*2}} = g^* \beta^* T_c^*. \quad (\text{A.8})$$

Somit kann die Impulsbilanz in entdimensionierter Form geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}^2} \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{DU^\times}{Dt^\times} &= \Theta_0^\times - \Theta^\times \\ &+ \frac{\partial}{\partial y^\times} \left(\left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

siehe auch Gleichung (2.17).

Anhang B

Variable Stoffwerte

Wie schon in Abschnitt 3.1.5 erwähnt, muss bei den benutzten experimentellen Daten, z.B. von Tsuji & Nagano (1988a), berücksichtigt werden, dass sich die Stoffwerte aufgrund des Temperaturprofils im Fluid verändern.

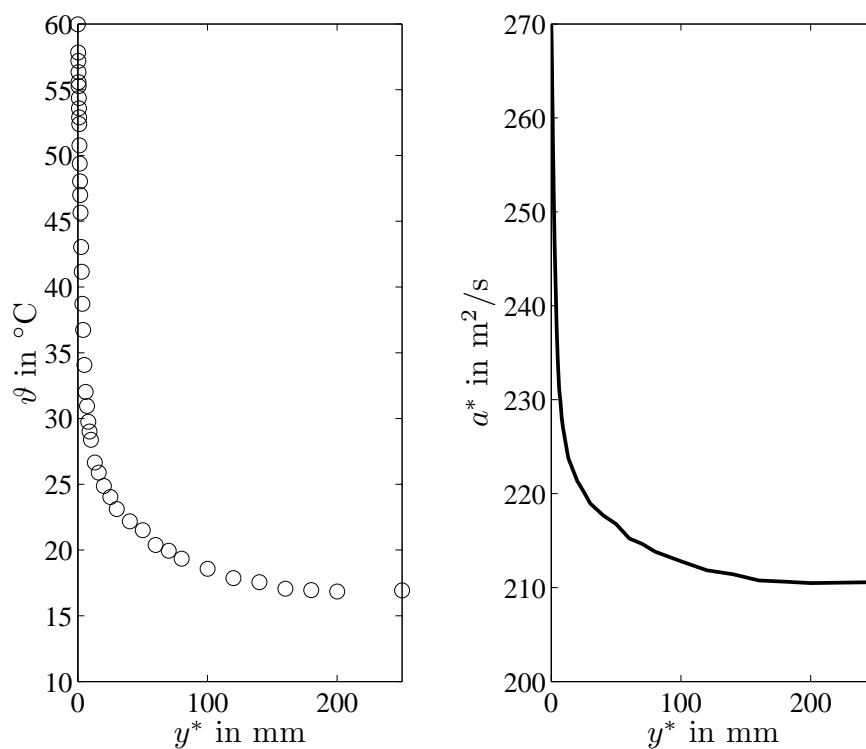


Abbildung B.1: links: Temperaturprofil für $\text{Gr}_x = 8,4 \cdot 10^{10}$ von Tsuji & Nagano (1988a). rechts: Entsprechender Verlauf der Temperaturleitfähigkeit $a^*(T^*)$.

Abbildung B.1 zeigt links einen typischen Temperaturverlauf, wie er den Messungen von Tsuji & Nagano (1988a) entnommen wurde. Es ist der sehr steile Gradient in Wandnähe zu erkennen und ein vergleichsweise konstanter Verlauf in der Überlappungsschicht/Außenschicht. In Abbildung B.1 (rechts) ist die Temperaturleitfähigkeit $a^*(T^*)$ dargestellt, die sich entsprechend des Temperaturprofils ändert. Somit gilt im Bereich der Überlappungsschicht annähernd $a_0^* \approx a^*(T_0^*)$.

Das logarithmische Temperaturprofil nach Gleichung (3.22) ist in der Überlappungsschicht gültig. Es wird nun der Ansatz gewählt, einen fiktiven Temperaturwandgradienten $|\partial T^*/\partial y^*|_{w,fiktiv}$ einzuführen, wie in Abschnitt 3.1.5 gezeigt. Dieser fiktive Temperaturwandgradient entspricht dem Gradienten, der an der Wand vorliegen würde, wenn die Temperaturleitfähigkeit im gesamten Feld den Wert a_0^* hätte.

$$a_0^* \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv} = a_w^* \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv} = \frac{a_w^*}{a_0^*} \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \quad (\text{B.1})$$

Der fiktive Temperaturwandgradient $|\partial T^*/\partial y^*|_{w,fiktiv}$ wird nun benutzt, um die Bezugsgrößen T_c^* , u_c^* und δ^* zu bilden.

$$T_c^* = \left(\frac{a_0^{*2}}{g^* \beta^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv}^3 \right)^{1/4} \quad (\text{B.2})$$

$$u_c^* = \frac{g^* \beta^* T_c^{*3}}{\nu_0^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv}^{-2} \quad (\text{B.3})$$

$$\delta^* = \frac{T_c^*}{\left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv}} \quad (\text{B.4})$$

Entdimensioniert man nun die gemessenen Profile mit diesen (korrigierten) charakteristischen Größen, so stellt man eine sehr gute Übereinstimmung mit den universellen Profilen fest.

B.1 Temperaturprofil in der viskosen Unterschicht

Mit der im vorherigen Abschnitt aufgezeigten Einführung des fiktiven Temperaturwandgradienten $|\partial T^*/\partial y^*|_{w,fiktiv}$ ist eine universelle Darstellung von DNS und experimentellen Daten im Bereich der Überlappungsschicht möglich, da in beiden Fällen von (nahezu) konstanten Stoffwerten ausgegangen werden kann.

Betrachtet man allerdings das Temperaturprofil in unmittelbarer Wandnähe, also in der viskosen Unterschicht, so kann hier nicht mehr von der Temperaturleitfähigkeit a_0^* der Außenschicht ausgegangen werden. Es muss vielmehr die Temperaturleitfähigkeit a_w^* bei der Wandtemperatur betrachtet werden. In der viskosen Unterschicht gilt in dimensionsbehafteten Variablen

$$T_w^* - T^* = \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y^* \quad (\text{B.5})$$

Durch Division mit T_c^* nach Gleichung (B.2) und Erweitern mit a_w^*/a_0^* kann die obige Gleichung in die dimensionslosen Koordinaten umgeschrieben werden

$$\underbrace{\frac{T_h^* - T^*}{T_c^*}}_{= \Theta^\times} = \frac{a_0^*}{a_w^*} \cdot \underbrace{\frac{a_w^*}{a_0^*} \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot \frac{y^*}{T_c^*}}_{= y^*/\delta^* = y^\times} \quad (\text{B.6})$$

Um das lineare Temperaturprofil in der viskosen Unterschicht in den Variablen der Außenschicht (Θ^\times und y^\times , gebildet mit $|\partial T^*/\partial y^*|_{w,fiktiv}$) beschreiben zu können, muss also der Korrekturfaktor a_0^*/a_w^* benutzt werden

$$\Theta^\times = \frac{a_0^*}{a_w^*} \cdot y^\times, \quad (\text{B.7})$$

vgl. Gleichung (3.30). Dieses korrigierte Profil wurde auch in Abbildung 3.6 verwendet.

B.2 Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht

Um das Geschwindigkeitsprofil in der viskosen Unterschicht in den Koordinaten der Überlappungsschicht (U^\times und y^\times , gebildet mit $|\partial T^*/\partial y^*|_{w,fiktiv}$) angeben zu können, muss ebenfalls eine Korrektur vorgenommen werden. Der Ausgangspunkt ist die dimensionsbehaftete Impulsbilanz

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\nu_w^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + g^* \beta^* (T_w^* - T_0^*) - g^* \beta^* (T_w^* - T^*). \quad (\text{B.8})$$

Berücksichtigt man, dass der Temperaturverlauf ($T_w^* - T^*$) in der viskosen Unterschicht durch $|\partial T^*/\partial y^*|_w \cdot y^*$ ausgedrückt werden kann, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left(\nu_w^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -g^* \beta^* (T_w^* - T_0^*) + g^* \beta^* \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y^*. \quad (\text{B.9})$$

Zweifache Integration und Verwenden der Randbedingungen führt auf

$$u^* = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w \cdot y^* + \frac{1}{6} \cdot \frac{g^* \beta^*}{\nu_w^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y^{*3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{g^* \beta^*}{\nu_w^*} (T_w^* - T_0^*) \cdot y^{*2}. \quad (\text{B.10})$$

Division durch u_c^* nach Gleichung (B.3) und Benutzen von T_c^* nach Gleichung (B.2) bzw. δ^* nach Gleichung (B.4) führt auf die dimensionslose Darstellung

$$\begin{aligned} U^\times &= \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big|_w \cdot y^\times + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{g^* \beta^*}{\nu_w^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \cdot y^{*3} \right) \cdot \left(\frac{\nu_0^*}{g^* \beta^* T_c^{*3}} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv}^2 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{g^* \beta^*}{\nu_w^*} (T_w^* - T_0^*) \cdot y^{*2} \right) \cdot \left(\frac{\nu_0^*}{g^* \beta^* T_c^{*3}} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w,fiktiv}^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big|_w \cdot y^\times + \frac{1}{6} \cdot \frac{\nu_0^* a_0^*}{\nu_w^* a_w^*} \underbrace{\left[\frac{y^* a_w^*}{T_c^* a_0^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right]^3}_{=y^{\times 3}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu_0^*}{\nu_w^*} \underbrace{\frac{T_w^* - T_0^*}{T_c^*}}_{=\Theta_0^\times} \underbrace{\left[\frac{y^* a_w^*}{T_c^* a_0^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right]^2}_{=y^{\times 2}} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \Big|_w \cdot y^\times + \frac{\nu_0^*}{\nu_w^*} \left(\frac{1}{6} \frac{a_0^*}{a_w^*} y^{\times 3} - \frac{1}{2} \Theta_0^\times y^{\times 2} \right), \quad (\text{B.13})$$

vergl. Gleichung (3.57).

Anhang C

Bilanzgleichungen des CFD-Codes

Für den zweidimensionalen, stationären CFD-Code mit k - ω -Turbulenzmodell werden die folgenden Bilanzgleichungen gelöst:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left([\nu^* + \nu_t^*] \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left([\nu^* + \nu_t^*] \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + g_x^* \beta^* (T^* - T_0^*) \quad (\text{C.1})$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left([\nu^* + \nu_t^*] \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left([\nu^* + \nu_t^*] \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + g_y^* \beta^* (T^* - T_0^*) \quad (\text{C.2})$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left([a^* + a_t^*] \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left([a^* + a_t^*] \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \quad (\text{C.3})$$

$$u^* \frac{\partial k^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial k^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left([\nu^* + \sigma_k \nu_t^*] \frac{\partial k^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left([\nu^* + \sigma_k \nu_t^*] \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\tau_{ij}^*}{\rho^*} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - \beta_k k^* \omega^* \quad (\text{C.4})$$

$$u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left([\nu^* + \sigma_\omega \nu_t^*] \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left([\nu^* + \sigma_\omega \nu_t^*] \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right) + \alpha \frac{\omega^*}{k^*} \frac{\tau_{ij}^*}{\rho^*} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - \beta_\omega \omega^{*2} \quad (\text{C.5})$$

mit

$$\begin{array}{llll} \nu_t^* = \frac{k^*}{\omega^*} & a_t^* = \frac{\nu_t^*}{\sigma_t} & \sigma_t = 0,9 & \sigma_k = \frac{1}{2} \\ \sigma_\omega = \frac{1}{2} & \alpha = \frac{5}{9} & \beta_k = \frac{9}{100} & \beta_\omega = \frac{3}{40} \end{array}$$

Die Einträge des Reynolds-Stress-Tensors sind hierbei mit τ_{ij}^* bezeichnet und lauten

$$\tau_{ij}^* = 2\mu_t^* S_{ij}^* - \frac{2}{3}\rho^* k^* \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad S^*_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right). \quad (\text{C.6})$$

Der Tensor hat somit für den zweidimensionalen Fall folgende Form

$$\tau^* = 2\mu_t^* \begin{pmatrix} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{1}{3}\rho^* k^* & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) & \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{1}{3}\rho^* k^* \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Der Term $\tau_{ij}^* \cdot \partial u_i^* / \partial x_j^*$, wie er in der k^* - und in der ω^* -Gleichung auftritt, kann somit angegeben werden als:

$$\tau_{ij}^* \cdot \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = 2\mu_t^* \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{1}{3}\rho^* k^* \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right. \quad (\text{C.8})$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{1}{3}\rho^* k^* \right) \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] \quad (\text{C.9})$$

Für den vertikalen Kanal nach Versteegh & Nieuwstadt (1999), also einen eindimensionalen Fall mit $\partial \dots / \partial x^* = 0$ und $v^* = 0$ folgt somit z.B. für die k^* -Gleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^*} \left([\nu^* + \sigma_k \nu_t^*] \frac{\partial k^*}{\partial y^*} \right) + \nu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 - \beta_k k^* \omega^*, \quad (\text{C.10})$$

siehe auch Gleichung (4.1)

Anhang D

Abschätzung der Dicke der viskosen Unterschicht

Für Experimente zur Rayleigh-Bénard Konvektion kann es z.T. notwendig sein, eine *a priori*-Abschätzung für die Dicke der viskosen Unterschicht zur Verfügung zu haben, da zur Bestimmung des Wandwärmestroms häufig der Temperaturgradient im Fluid benutzt wird. Hierzu müssen ausreichend viele Messpunkte in der viskosen Unterschicht liegen, da nur hier ein linearer Temperaturverlauf vorliegt. Die Nußelt-Beziehung nach Gleichung (5.28) kann auch benutzt werden, um die Dicke der viskosen Unterschicht abzuschätzen, wie im folgenden beispielhaft für das Ilmenauer Fass aufgezeigt werden soll.

Es soll hier beispielhaft die Rayleigh-Zahl $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ betrachtet werden, wie sie am Ilmenauer Fass untersucht wurde, zu Details siehe Abschnitt 5.3.1. Um nun die Dicke der viskosen Unterschicht abschätzen zu können, wird zunächst der Temperaturgradient aus der Nußelt-Zahl ($\Rightarrow Nu = 60,53$ nach Gleichung (5.28)) bestimmt. Mit einem Plattenabstand von $h^* = 0,63$ m und einer Temperaturdifferenz $\Delta T^* = 42,8$ K folgt für den (fiktiven) Gradienten

$$\left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}} = 4112,2 \frac{\text{K}}{\text{m}}. \quad (\text{D.1})$$

Hiermit kann nun auch die charakteristische Bezugstemperatur T_{rbc}^* ermittelt werden

$$T_{rbc}^* = \left(\frac{a^* \nu^*}{g^* \beta^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}}^3 \right)^{1/4} = 5,52 \text{ K}. \quad (\text{D.2})$$

Anhand der dimensionslosen Temperaturprofile in den Abbildungen 5.3 und 5.4 ist zu erkennen, dass die viskose Unterschicht bis $y^\times \approx 1,5$ reicht. Damit ein Messpunkt noch innerhalb der viskosen Unterschicht liegt, muss also $y^\times \leq 1,5$ gelten

$$\frac{y^*}{T_{rbc}^*} \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}} \leq 1,5 \quad \Leftrightarrow \quad y^* \leq 1,5 \cdot T_{rbc}^* \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{w, \text{fiktiv}}^{-1} = 2,0 \text{ mm} \quad (\text{D.3})$$

Für den konkreten Fall am Ilmenauer Fass mit $Ra = 8,1 \cdot 10^8$ ergibt sich also eine Dicke der viskosen Unterschicht von $y^* \approx 2$ mm. Innerhalb dieses Bereichs sollte ein linearer Verlauf vorliegen und der Gradient bestimmt werden können.

Anhang E

Blending-Parameter für die gemischte Konvektion

Um in Abschnitt 6.2.1 den *blending*-Parameter ψ für die Daten von Kasagi & Nishimura (1997) bestimmen zu können, wird der Term u_c^*/u_τ^* benötigt. Dieser Ausdruck soll nun in Größen ausgedrückt werden, die direkt als Ergebnis der DNS-Rechnungen angegeben werden. Hierzu werden die Definitionen von u_c^* nach Gleichung (3.45) und T_c^* nach Gleichung (3.7) benutzt

$$\frac{u_c^*}{u_\tau^*} = \frac{1}{u_\tau^*} \cdot \frac{g^* \beta^* T_c^{*3}}{\nu^* \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w^2} = \left(\frac{g^* \beta^* a^{*6}}{\nu^{*4} u_\tau^{*4}} \cdot \left| \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_w \right)^{1/4}. \quad (\text{E.1})$$

Durch entsprechendes Erweitern kann dies umgeformt werden zu

$$\frac{u_c^*}{u_\tau^*} = \left(\frac{\text{Gr Nu}_{avg}}{(2\text{Re}_\tau)^4 \cdot \text{Pr}^6} \right)^{1/4}. \quad (\text{E.2})$$

Hierbei muss berücksichtigt werden, dass die turbulente Reynolds-Zahl nur mit der halben Kanalhöhe $h^*/2$ gebildet wird. Somit erscheint im Klammerausdruck der Term 2Re_τ .

Für die DNS-Daten von Kasagi & Nishimura (1997) ergibt sich mit

$$\text{Re}_\tau = 150 \quad (\text{E.3})$$

$$\text{Gr} = 9,6 \cdot 10^5 \quad (\text{E.4})$$

$$\text{Pr} = 0,71 \quad (\text{E.5})$$

$$\text{Nu}_{avg} = 14,18 \quad (\text{E.6})$$

ein Wert von

$$\frac{u_c^*}{u_\tau^*} = 0,338 \quad (\text{E.7})$$

Somit folgt für ψ

$$\psi = \frac{1}{0,046} \cdot 0,24 \left(\frac{u_c^*}{u_\tau^*} \right)^3 = 0,201, \quad (\text{E.8})$$

wie in Abschnitt 6.2.1 angegeben.

Literaturverzeichnis

- AHLERS, G. 2001 Effect of sidewall conductance on heat-transport measurements for turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **63**, 015303(R).
- AHLERS, G. & XU, X. 2001 Prandtl-number dependence of heat transport in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3320.
- AMPOFO, F. & KARAYIANNIS, T. G. 2003 Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 3551–3572.
- ASHKENAZI, S. & STEINBERG, V. 1999 High Rayleigh number turbulent convection in a gas near the gas-liquid critical point. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3641–3644.
- BALAJI, C., HÖLLING, M. & HERWIG, H. 2006 Determination of temperature wall functions for high Rayleigh number flows using asymptotics: A systematic approach. *Ein-gereicht beim Int. J. of Heat Mass Transfer*.
- BARENBLATT, G. I. 1993 Scaling laws for fully developed shear flow. Part 1. Basic hypotheses and analysis. *J. Fluid Mech.* **248**, 513–520.
- BARENBLATT, G. I. 1993 Scaling laws for fully developed shear flow. Part 2. Processing of experimental data. *J. Fluid Mech.* **248**, 521–529.
- BETTS P. L. & BOKHARI I. H. 2000 Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity. *Int. J. of Heat Fluid Flow* **21**, 675–683.
- BOUDJEMADI, R., MAPU, V., LAURENCE, D. & LE QUERE, P. 1997 Budgets of turbulent stresses and fluxes in a vertical slot natural convection flow at Rayleigh $Ra = 10^5$ and 5.4×10^5 . *Int. J. of Heat Fluid Flow* **18**, 70–79.
- BUNK, M. & WÖRNER, M. 1998 Direkte numerische Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in Quecksilber. *Forschungszentrum Karlsruhe, FZKA 5915*
- CASTAING, B., GUNARATNE, G., HESLOT, F., KADANOFF, L., LIBCHABER, A., THOMAE, S., WU, X., ZALESKI, S. & ZANETTI, G. 1989 Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **204**, 1–30.
- CHAVANNE, X., CHILLA, F., CHABAUD, B., CASTAING, B. & HÉBRAL, B. 2001 Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid He. *Physics of Fluids* **13**, 1300–1320.

- CHEESEWRIGHT, R. 1968 Turbulent Natural Convection from a Vertical Plane Surface. *J. Heat Transfer* **90**, 1–8.
- CHEESEWRIGHT, R. 1986 The scaling of turbulent natural convection boundary layers in the asymptotic limit of infinite Grashof number. Paper presented at Euromech Colloquium 207, 7-9 April, Delft, The Netherlands.
- CHEESEWRIGHT, R., KING, K. J. & ZIAI, S. 1986 Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant cavity flows. *Proc. ASME Meeting HTD* **60**, 75–86.
- CHU, T. Y. & GOLDSTEIN, R. J. 1973 Turbulent convection in a horizontal layer of water. *Int. J. Heat Mass Transf.* **60**, 141–159.
- CHURCHILL, S. W. & USAGI, R. 1972 A general expression for the correlation of rates of transfer and other phenomena. *AIChE J.* **18**, 1121–1128.
- CRAFT, T. J., GERASIMOV, A. V., IACOVIDES, H. & LAUNDER, B. E. 2002 Progress in the generalization of wall-function treatments. *Int. J. Heat Fluid Flow* **23**, 148–160.
- DALY, B. J. & HARLOW, F. H. 1970 Transport equations in turbulence. *Physics of Fluids* **13**, 2634–2649.
- DRAZIN, P. G. 2002 Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- DU PUIITS, R., RESAGK, C., TILGNER, A., BUSSE, F. H., & THESS A. 2006 Structure of thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Eingereicht beim J. Fluid Mech.*
- DU, Y.-B. & TONG, P. 2000 Turbulent thermal convection in a cell with ordered rough boundaries. *J. Fluid Mech.* **407**, 57–84.
- FERZIGER, J. H. & PERIĆ, M. 1999 Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer Verlag, 2. Auflage, Berlin.
- FLUENT 2005 FLUENT manual. Lebanon, USA.
- FUNFSCHILLING, D., BROWN, E., NIKOLAENKO, A. & AHLERS, G. 2005 Heat transport by turbulent Rayleigh-Benard convection in cylindrical samples with aspect ratio one and larger. *J. Fluid Mech.* **536**, 145–154.
- GEORGE, W. K. & CAPP, S. P. 1979 A theory for natural convection turbulent boundary layers next to heated vertical surfaces. *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 813–826.
- GERSTEN, K. & HERWIG, H. 1992 Strömungsmechanik. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden.
- GOLDSTEIN, R. J. & TOKUDA, S. 1980 Heat transfer by thermal convection at high Rayleigh numbers. *Int. J. Heat Mass Transf.* **23**, 738–740.
- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2000 Scaling in thermal convection: a unifying theory. *J. Fluid Mech.* **407**, 27–56.

- GROSSMANN, S. & LOHSE, D. 2001 Thermal convection for large Prandtl numbers. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3316–3319.
- GRÖTZBACH, G. 1990 Simulation of turbulent flow and heat transfer for selected problems of nuclear thermal-hydraulics. *Proc. First Int. Conf. on Supercomputing in Nuclear Applications (SNA '90), Mito, Japan, March 12-16*
- HARTLEP, T. 2004 Strukturbildung und Turbulenz. Eine numerische Studie zur turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion. *Dissertation, Uni Göttingen*
- HENKES, R. A. W. M. & HOOGENDOORN, C. J. 1990 Numerical determination of wall functions for the turbulent natural convection boundary layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **33**, 1087–1097.
- HERWIG, H. 2000 Wärmeübertragung A-Z. Springer Verlag, Berlin.
- HERWIG, H. 2002 Strömungsmechanik. Springer Verlag, Berlin.
- HERWIG, H. 2004 Strömungsmechanik A-Z. Vieweg Verlag, Wiesbaden.
- HÖLLING, M. & HERWIG, H. 2005a Asymptotic analysis of the near wall region of turbulent natural convection flows. *J. Fluid Mech.* **541**, 383–397.
- HÖLLING, M. & HERWIG, H. 2005b The near wall region of turbulent natural convection flows: asymptotic considerations. *PAMM* **5**, 571–572.
- HÖLLING, M. & HERWIG, H. 2006 Asymptotic analysis of heat transfer in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Int. J. Heat Mass Transfer* **49**, 1129–1136.
- INCE, N. Z. & LAUNDER, B. E. 1989 On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures. *Int. J. Heat Fluid Flow* **10**, 110–117.
- JACKSON, J. D., COTTON, M. A. & AXCELL, B. P. 1989 Studies of mixed convection in vertical tubes. *Int. J. Heat Fluid Flow* **10**, 2–15.
- KASAGI, N. & NISHIMURA, M. Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *Int. J. Heat Fluid Flow* **18**, 88–99.
- KENJEREŠ, S., GUNARJO, S. B. & HANJALIĆ, K. 2004 Contribution to elliptic relaxation modelling of turbulent natural and mixed convection. *ICHMT Int. Symposium on Adv. in Comp. Heat Transf.*, April 19-24, Norway, CHT-04-221.
- KERR, R. 1996 Rayleigh number scaling in numerical convection. *J. Fluid Mech.* **310**, 139–179.
- KIŠ, P. 2005 Verbesserung des k - ω -Turbulenzmodells zur Beschreibung natürlicher Konvektion. *Studienarbeit am Institut für Themofluidynamik*, Technische Universität Hamburg-Harburg.
- KOCK, F. & HERWIG, H. 2005 Entropy production calculation for turbulent shear flows and their implementation in cfd codes. *Int. J. Heat Fluid Flow* **26**, 672–680.

- KRAICHNAN, R. H. 1962 Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluids* **5**, 1374–1389.
- LOCK, G. S. H. & TROTTER, F. J. DE B. 1968 Observations on the structure of a turbulent free convection boundary layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, 1225–1232.
- MENTER, F. R. 1994 Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA* **32**, 1598–1605.
- MOCIKAT, H., GÜRTLER, T. & HERWIG, H. 2003 Laser Doppler velocimetry measurements in an interior flow test facility: A database for CFD-code evaluation. *Exp. in Fluids* **34**, 442–448.
- MÜLLER, U. & EHRHARD, P. 1999 Freie Konvektion und Wärmeübertragung. C. F. Müller, Heidelberg.
- NIEMELA, J. J., SKRBK, L., SREENIVASAN, K. R. & DONNELLY, R. J. 2000 Turbulent convection at very high Rayleigh numbers. *Nature* **404**, 837–840.
- NIEMELA, J. J. & SREENIVASAN, K. R. 2003 Confined turbulent convection. *J. Fluid Mech.* **481**, 355–384.
- NIKOLAENKO, A. & AHLERS, G. 2003 Nusselt number measurements for turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 084501.
- NIKOLAENKO, A., BROWN, E., FUNFSCHILLING, D. & AHLERS, G. 2005 Heat transport by turbulent Rayleigh-Bénard convection in cylindrical cells with aspect ratio one and less. *J. Fluid Mech.* **523**, 251–260.
- POLYAKOV, A. F. & SHINDIN, S. A. 1988 Development of turbulent heat transfer over the length of vertical tubes in the presence of mixed air convection. *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 987–992.
- PRIESTLEY, C. H. B. 1954 Convection from a large horizontal surface. *Austral. J. Phys.* **7**, 176–201.
- ROCHE, P.-E., CASTAING, B., CHABAUD, B. & HÉBRAL, B. 2004 Heat transfer in turbulent Rayleigh-Bénard convection below the ultimate regime. *J. Low Temp. Phys.* **134**, 1011–1042.
- SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. 2000 Boundary-layer theory. Springer, Berlin.
- SHRAIMAN, B. I. & SIGGIA, E. D. 1990 Heat transport in high-Rayleigh-number convection. *Phys. Rev. A* **42**, 3650–3653.
- SIEBERS, D. L., MOFFATT, R. F. & SCHWIND, R. G. 1985 Experimental, Variable Properties Natural Convection From a Large, Vertical, Flat Surface. *J. Heat Transfer* **107**, 124–132.
- TANAKA, H. & MIYATA, H. 1980 Turbulent natural convection in a horizontal water layer heated from below. *Int. J. Heat Mass Transf.* **23**, 1273–1281.

- TILGNER, A., BELMONTE, A. & LIBCHABER, A. 1993 Temperature and velocity profiles of turbulent convection in water. *Phys. Rev. E* **47**, 2253–2256.
- TSUJI, T. & NAGANO, Y. 1988a Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 1723–1734. (Daten aus www.ercoftac.org)
- TSUJI, T. & NAGANO, Y. 1988b Turbulence measurements in a natural convection boundary layer along a vertical flat plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 2101–2111. (Daten aus www.ercoftac.org)
- TSUJI, T., NAGANO, Y. & TAGAWA, M. 1991 Thermally driven turbulent boundary layer. *8th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Technical University of Munich, **Vol. 2**, 24.3.1–24.3.6. (Daten aus www.ercoftac.org)
- VAN DYKE, M. 1964 Perturbation methods in fluid mechanics. Academic Press, New York
- VERSTEEG, H. K. & MALALASEKERA, W 1995 An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Harlow.
- VERSTEEGH, T.A.M. & NIEUWSTADT, F.T.M. 1999 A direct numerical simulation of natural convection between two infinite vertical differentially heated walls: scaling laws and wall functions. *Int. J. Heat Mass Transfer* **42**, 3673–3693. (Daten aus www.ercoftac.org)
- VERZICCO, R. & CAMUSSI R. 1999 Prandtl number effects in convective turbulence. *J. Fluid Mech.* **383**, 55–73.
- VERZICCO, R. 2002 Sidewall finite-conductivity effects in confined turbulent thermal convection. *J. Fluid Mech.* **473**, 201–210.
- VERZICCO, R. & CAMUSSI R. 2003 Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech.* **477**, 19–49.
- WANG, M., FU, S. & ZHANG, G. 2002 Large-scale spiral structures in turbulent thermal convection between two vertical plates. *Physical Review E* **66**, 066306.
- WILCOX, D. C. 1993 Turbulence modeling for CFD. La Cañada, Calif.
- WÖRNER, M. 1994 Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Benard Konvektion in flüssigem Natrium. *Dissertation University of Karlsruhe, KfK 5228, Kernforschungszentrum Karlsruhe*
- WU, X.-Z. & LIBCHABER A. 1992 Scaling relations in thermal turbulence: The aspect ratio dependence. *Phys. Rev. A* **45**, 842–845.
- XU, X., BAJAJ K. M. S. & AHLERS, G. 2000 Heat transport in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4357.
- YAN, Z. H. & NILSSON, E. E. A. 2005 Large eddy simulation of natural convection along a vertical isothermal surface. *Heat Mass Transfer* **41**, 1004–1013.

- YOU, J., YOO, J. Y. & CHOI, H. 2003 Direct numerical simulation of heated vertical air flows in fully developed turbulent mixed convection. *Int. J. Heat Mass Transfer* **43**, 1613–1627
- YUAN, X., MOSER, A. & SUTER, P. 1993 Wall functions for numerical simulation of turbulent natural convection along vertical plates. *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 4477–4486.
- ZANOUN, E.-S., DURST, F. & NAGIB, H. 2003 Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows. *Phys. Fluids* **15**, 3079–3089.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Grenzschicht an beheizter vertikaler Platte.	5
2.2	Turbulente Couette-Strömung.	8
2.3	Zwei-Schichten-Struktur einer turbulenten Couetteströmung.	9
2.4	Vergleich eigener Messdaten mit logarithmischem Wandgesetz	11
3.1	Standardgeometrien für natürliche Konvektion an vertikalen Wänden . . .	16
3.2	Vergleich der Standard-Wandfunktionen mit Profilen bei nat. Konvektion .	17
3.3	Zwei-Schichten-Struktur bei natürlicher Konvektion	20
3.4	DNS-Temperaturdaten von Versteegh & Nieuwstadt (1999)	25
3.5	Extrapolation von C und D	26
3.6	Temperatur-Messdaten aus verschiedenen Arbeiten	28
3.7	Dimensionsbehaftetes Temperaturprofil von Tsuji & Nagano (1988a)	29
3.8	Auftretende Messunsicherheiten beim Temperaturgradienten	29
3.9	Vergleich der Nußelt-Zahlen für den vertikalen Kanal.	31
3.10	Nußelt-Daten für die vertikale Platte	33
3.11	Turbulente Prandtl-Zahl aus Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999) . .	35
3.12	E und F für das Geschwindigkeitsprofil	37
3.13	Geschwindigkeitsprofile aus verschiedenen Arbeiten	38
3.14	DNS-Geschwindigkeitsdaten von Versteegh & Nieuwstadt (1999)	39
3.15	Temperatur-Wandfunktion nach George & Capp (1979)	42
3.16	Geschwindigkeitswandfunktion nach George & Capp (1979)	44
3.17	Abweichungen im Bereich der <i>buffer layer</i>	45
3.18	Profile mit <i>blending</i>	46
4.1	Kavität für FLUENT-Rechnungen	49
4.2	Vergleich der FLUENT-Ergebnisse mit DNS-Daten.	50
4.3	Terme der k^* -Gleichung.	52
4.4	Terme der k^* -Gleichung für GGDH.	55

4.5	Terme der k^* -Gleichung mit $c_T = 1,0$	55
4.6	Temperaturverlauf im wandnächsten Kontrollvolumen.	57
4.7	Vergleich von DNS und CAFFA Daten für $Ra = 5,0 \cdot 10^6$ und $Ra = 5,4 \cdot 10^5$	63
4.8	Verlauf von k^*	65
4.9	Turbulente Temperaturleitfähigkeit	65
5.1	Prinzipieller Aufbau der Rayleigh-Bénard-Konvektion	67
5.2	Zwei-Schichten-Struktur in der Nähe der beheizten Wand	71
5.3	Entdimensionierte DNS-Temperaturprofile	74
5.4	Entdimensionierte Temperaturprofile aus Messdaten	74
5.5	Bestimmung von H_∞	75
5.6	Vergleich von DNS-Daten mit <i>blending</i> -Profil.	77
5.7	Vergleich von Nußelt-Daten mit Nußelt-Beziehung (5.28).	80
5.8	<i>High resolution plot</i> für $Pr = 0,7$	81
5.9	<i>High resolution plot</i> für $Pr > 0,7$	82
5.10	Rayleigh-Prandtl-Phasendiagramm nach Grossmann & Lohse (2000).	84
5.11	Theorie von Grossmann & Lohse (2000) für $Pr = 0,7$	85
5.12	Theorie von Grossmann & Lohse (2000) für $Pr \approx 3$	85
5.13	Dimensionsbehaftetes Temperaturprofil nach Du Puits <i>et al.</i> (2006).	87
5.14	Wandnaher Bereich der Daten von Du Puits <i>et al.</i> (2006)	88
5.15	Strahlungsaustausch zwischen Heizplatte und Thermistor	89
5.16	Temperaturprofil in Wandnähe mit Gradient aus Nußelt-Korrelation	92
5.17	Entdimensioniertes Temperaturprofil von Du Puits <i>et al.</i> (2006)	92
5.18	Temperaturprofil in Wandnähe mit Gradient aus Parabel	94
5.19	Entdimensioniertes Temperaturprofil von Du Puits <i>et al.</i> (2006)	94
5.20	Nußelt-Daten der Ahlers-Gruppe.	96
5.21	Abschätzung des Einflusses der Rauheit.	98
5.22	Änderung der Steigung in den Nußelt-Daten.	99
6.1	Vertikale beheizte Couette-Strömung (VHC)	103
6.2	Geschwindigkeits- und Temperaturprofile der VHC	104
6.3	Verhältnis ψ für die natürliche Konvektion	106
6.4	DNS-Temperaturprofil der gemischten Konvektion	107
B.1	Temperaturprofil und entsprechender Verlauf der Temperaturleitfähigkeit.	117

Tabellenverzeichnis

3.1	Bezugsgrößen bei erzwungener und natürlicher Konvektion	24
3.2	Übersicht der universellen Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile	40
4.1	Relevante Größen für die DNS-Daten von Versteegh & Nieuwstadt (1999)	48
4.2	Wandgradienten aus den FLUENT-Simulationen	51
4.3	Wandgradienten, die mit dem modifizierten CAFFA-Code bestimmt wurden	62
5.1	Temperaturprofile zur Bestimmung von G und H	73
5.2	Vergleich der impliziten und expliziten Nußelt-Beziehung.	78
5.3	Studien, die zur Überprüfung der Nußelt-Beziehung (5.28) benutzt werden.	79

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Marc Hölling
Geburtsdatum	22. Juli 1977
Geburtsort	Winsen (Luhe)
Familienstand	ledig

Schulbildung

08.1983 - 06.1987	Grundschule I Winsen (Luhe)
08.1987 - 07.1989	Orientierungsstufe I Winsen (Luhe)
08.1989 - 06.1996	Gymnasium Winsen (Luhe) Abschluss: Abitur (1,9)

Studium

10.1997 - 08.2002	Technische Universität Hamburg-Harburg Studium der Verfahrenstechnik Abschluss: Diplom (mit Auszeichnung)
09.2000 - 01.2001	Auslandssemester: University of Bradford (UK)

Beruf

seit 01.01.2003	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Universität Hamburg-Harburg am Institut für Thermofluidynamik
-----------------	---