

288 | 1972

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

E. Lehmann und G. Berger

Das Momentenausgleichsverfahren nach Cross unter Berücksichtigung der Spannungstheorie II. Ordnung

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 288

Das Momentenausgleichsverfahren nach Cross
unter Berücksichtigung der S p a n n u n g s t h e o r i e
II. O r d n u n g

von

E. Lehmann und G. Berger

Hamburg

1 9 7 2

Das Momentenausgleichsverfahren nach Cross
unter Berücksichtigung der Spannungstheorie

II. Ordnung

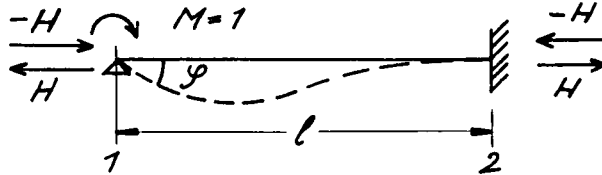
von E. Lehmann und G. Berger

1. Einleitung

Die meisten heute zur Analyse von Balkentragwerken verwendeten Rechenprogramme benutzen die lineare Balkentheorie. In einigen Fällen ist die Berücksichtigung von Einflüssen II. Ordnung, wie sie die Druck- bzw. Zugkräfte auf die Verteilung der Momente haben, notwendig. In der Folge wird das Cross-Verfahren unter Berücksichtigung der Axiallasten dargestellt. Die Programmierung ist nach [1] vornehmbar. Für eine Handrechnung eignen sich die angegebenen Diagramme, sodaß nicht mehr Aufwand als beim üblichen Cross-Ausgleich notwendig ist. Diese Methode ist in den Büchern von Gere [2] und Lightfoot [3] beschrieben. In diesem Bericht erfolgt eine für die Belange der Schiffstechnik hergerichtete Darstellung und Komplettierung. Die Anwendung für stabilitätskritisch konstruierte Bauteile und Ausrüstungskonstruktionen auch ohne die Cross-Methode ist unmittelbar mit den Diagrammen möglich. Weiterhin lassen sich Knickprobleme mit den dargestellten Diagrammen und Formeln aufs einfachste behandeln.

2. Berechnung der Verteiler- und Weiterleitungszahlen

Gegeben sei folgendes System, dessen reziproker Drehwinkel am Auflager "1" der Cross-Steifigkeit entspricht.



Für den Druckfall gilt die folgende DGL

$$W^{IV} + \lambda^2 W'' = 0 \quad (1)$$

mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

Die Lösung dieser DGL lautet:

$$W = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \lambda x + C_4 \cos \lambda x \quad (2)$$

Paßt man die Konstanten an die Randbedingungen

$$W(0) = W(l) = 0; \quad W''(0) = -\frac{1}{EI}; \quad W'(l) = 0 \quad (3)$$

an, so erhält man für den reziproken Drehwinkel

$$k_1 = \frac{1}{W'} = \frac{1}{\varphi} = \lambda EI \frac{\sin \lambda l - \cos \lambda l}{2 - 2 \cos \lambda l - \lambda l \cos \lambda l} \quad (4)$$

Für den Zugfall ergibt sich die DGL

$$W^{IV} - \lambda^2 W'' = 0 \quad (5)$$

mit der Lösung

$$W = C_1 + C_2 x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x \quad (6)$$

Die Steifigkeit ergibt sich dann in Analogie

$$k_1 = \frac{1}{W'} = \frac{1}{\varphi} = \lambda EI \frac{\sinh \lambda l - \cosh \lambda l}{2 - 2 \cosh \lambda l + \lambda l \cosh \lambda l} \quad (7)$$

Für den Fall, daß das Moment an der Stelle "2" verschwindet, d.h. eine freie Auflagerung vorhanden ist, lauten die Randbeding.

$$W(0) = W(l) = 0 ; \quad W''(0) = -\frac{1}{EI} ; \quad W''(l) = 0 \quad (8)$$

Die Steifigkeit ergibt sich im Falle der Druckkraft mit

$$K_2 = \frac{1}{W'} = EI \frac{\lambda l \sin \lambda l}{\lambda l \cos \lambda l - \sin \lambda l} \quad (9)$$

und im Zugfall mit

$$K_2 = \frac{1}{W'} = EI \frac{\lambda l \sinh \lambda l}{-\lambda l \cosh \lambda l + \sinh \lambda l} \quad (10)$$

Entwickelt man die Ausdrücke in Taylorreihen, und bildet man den Grenzwert für $\lambda l \rightarrow 0$ dann erhält man die gewohnten Steifigkeiten von

$$\frac{4EI}{l} \quad \text{und} \quad \frac{3EI}{l} \quad (11)$$

Um die Weiterleitungszahl zu bestimmen, ist die zweite Ableitung der Lösung Gl.2 bzw Gl.6 an die Randbedingungen (Gl.3) anzupassen, sodaß man im Druckfall

$$W''(x) = - \left(\frac{1 - \cos \lambda l - \lambda l \sin \lambda l}{\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l} \sin \lambda x + \cos \lambda x \right) \frac{1}{EI} \quad (12)$$

erhält. Die Funktionswerte an den Stellen $x=0$ bzw. $x=1$ sind die Momente an den Stellen 0 bzw. 1

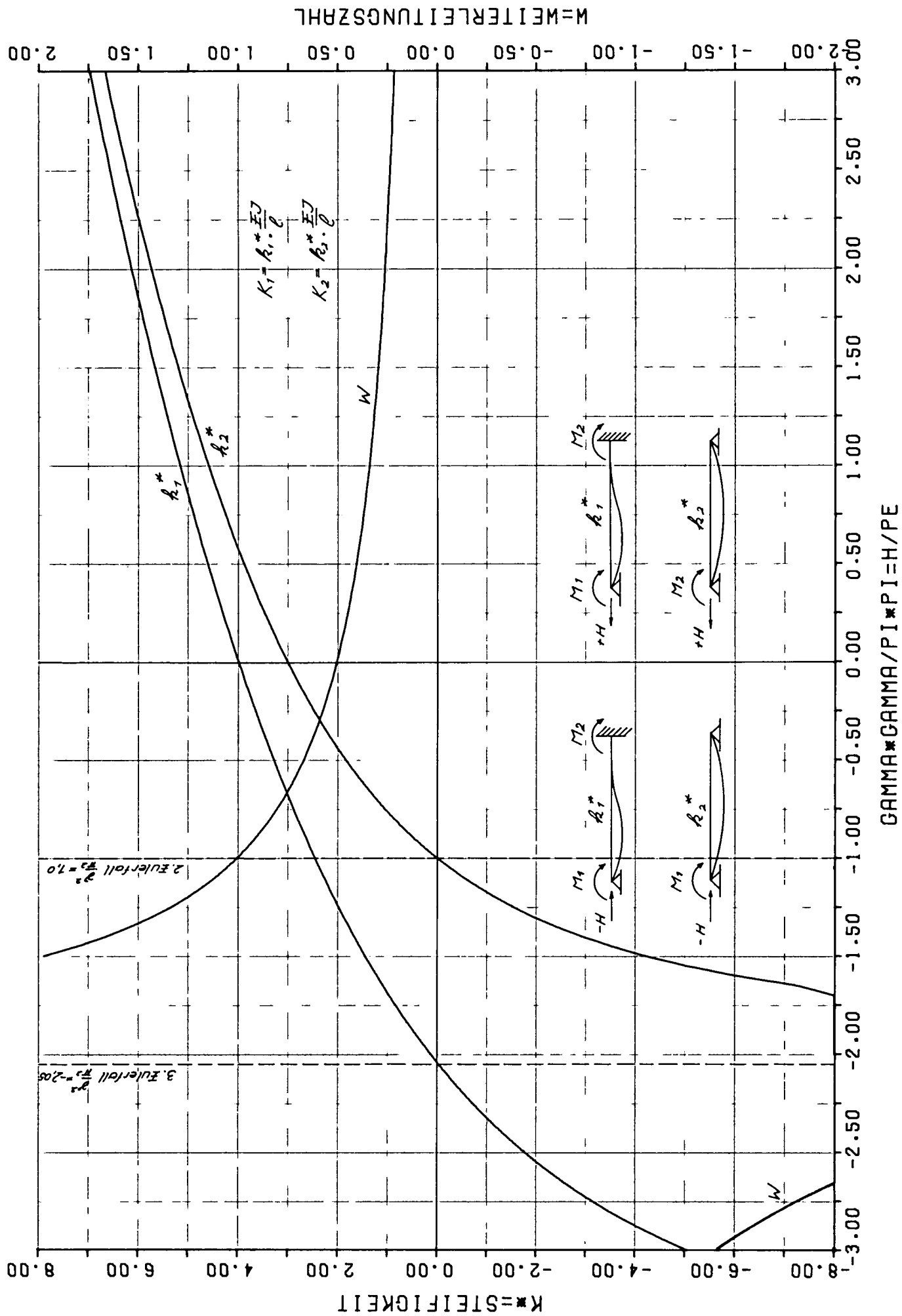
$$M_{21} = \frac{\lambda l - \sin \lambda l}{\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l} \cdot M_{12} \quad (13)$$

Die Weiterleitungszahl ergibt sich dann mit

$$W = \frac{\lambda l - \sin \lambda l}{\sin \lambda l - \lambda l \cos \lambda l} \quad (14)$$

und im Zugfall mit

$$W = \frac{\lambda l - \sinh \lambda l}{\sinh \lambda l - \lambda l \cosh \lambda l} \quad (15)$$



In der Abb.2 sind die obigen Formeln aufgezeichnet über dem Parameter $\frac{\lambda^2}{H} = \frac{H}{P_e}$,er sich ergibt, wenn man für P_e den 1. Eulerfall verwendet ($\lambda = \lambda_1$).

Man kann aus der Abb.2 ersehen, daß die Steifigkeiten bei den entsprechenden Eulerfällen verschwinden.

Die Weiterleitungszahl geht gegen ∞

Führt man einen Grenzübergang für $\lambda \rightarrow 0$ z.B. mit den Taylorreihen für Sinus und Cosinus durch, so ergibt sich die bekannte Weiterleitungszahl 0.5

3. Berechnung der Einspannmomente

Die Einspannmomente für das in Abb.3 dargestellte Tragwerk erhält man, indem man die Durchbiegungsfunktion von 0 bis α und von α bis l ansetzt, dies muß man, weil die 3. Ableitung (Querkraft) unter der Last unstetig ist. Die 6 Konstanten lassen sich mit Hilfe der Rand-

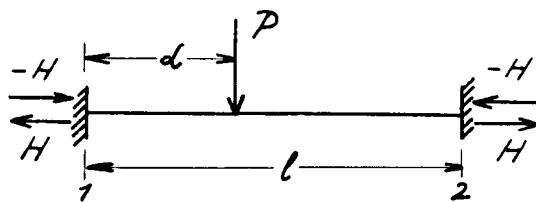


Abb. 3

und Kopplungsbedingungen bei $x = \alpha$ bestimmen.

Eine solche Ableitung ist recht umfangreich, sehr viel eleganter ist die Lösung zu finden, wenn man die Übertragungsmatrix für den Stabzug verwendet, wie sie z.B. in [4] angegeben ist

Die Übertragungsmatrix lautet:

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} M & Q & 1 \\ \hline \frac{\ell^2}{EJ} \frac{1-\cos \alpha \ell}{(\alpha \ell)^2} & \frac{\ell^3}{EJ} \frac{\alpha \ell - \sin \alpha \ell}{(\alpha \ell)^3} & -\frac{P \ell^3}{EJ} \frac{\alpha \ell (1-\alpha) - \sin(1-\alpha) \alpha \ell}{(\alpha \ell)^3} \\ \frac{\ell}{EJ} \frac{\sin \alpha \ell}{\alpha \ell} & \frac{\ell^2}{EJ} \frac{1-\cos \alpha \ell}{(\alpha \ell)^2} & -\frac{P \ell^2}{EJ} \frac{1-\cos(1-\alpha) \alpha \ell}{(\alpha \ell)^2} \\ \cos \alpha \ell & \ell \frac{\sin \alpha \ell}{\alpha \ell} & \frac{P \ell}{\alpha \ell} \sin(1-\alpha) \alpha \ell \\ 0 & 1 & -P \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right\}_{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \\ 1 \end{Bmatrix}_{21} \quad (16)$$

Die beiden obersten Zeilen liefern die Bestimmungsgleichungen für M_{12} bzw. Q_{12} . M_{12} ergibt sich dann zu

$$M_{12} = \frac{P \ell}{\alpha \ell} \frac{(-\alpha \ell (1-\alpha) + \sin(1-\alpha) \alpha \ell)(1-\cos \alpha \ell) + (1-\cos(1-\alpha) \alpha \ell)(\alpha \ell - \sin \alpha \ell)}{2 - 2 \cos \alpha \ell - \alpha \ell \sin \alpha \ell} \quad (17)$$

Bezieht man M auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskräfte und P auf $\alpha = \frac{\ell}{2}$, dann erhält man mit der Umformung $1-\alpha = \beta$

$$M_{12} = F_1 \cdot \frac{P \ell}{8} \quad (18)$$

mit

$$F_1 = \frac{8}{\alpha \ell} \frac{\alpha \alpha \ell + \sin \beta \alpha \ell - \alpha \beta \cos \alpha \ell + \sin \alpha \ell - \sin \alpha \ell - \alpha \cos \beta \alpha \ell}{2 - 2 \cos \alpha \ell - \alpha \ell \sin \alpha \ell} \quad (19)$$

für den Zugfall erhält man in Analogie

$$F_1 = \frac{8}{\alpha \ell} \frac{\alpha \alpha \ell + \sinh \alpha \ell + \alpha \beta \cosh \alpha \ell + \sinh \alpha \ell - \sinh \alpha \ell - \alpha \cosh \beta \alpha \ell}{2 - 2 \cosh \alpha \ell + \alpha \ell \sinh \alpha \ell} \quad (20)$$

In Abb.4 ist das Ergebnis grafisch dargestellt.

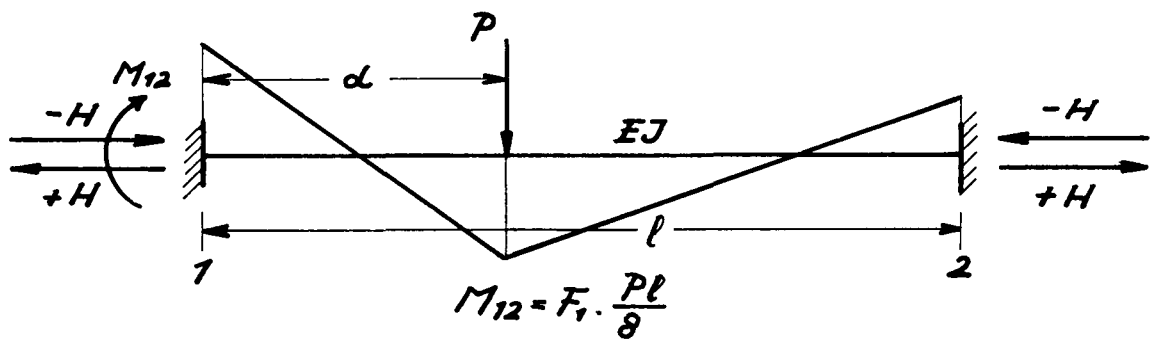
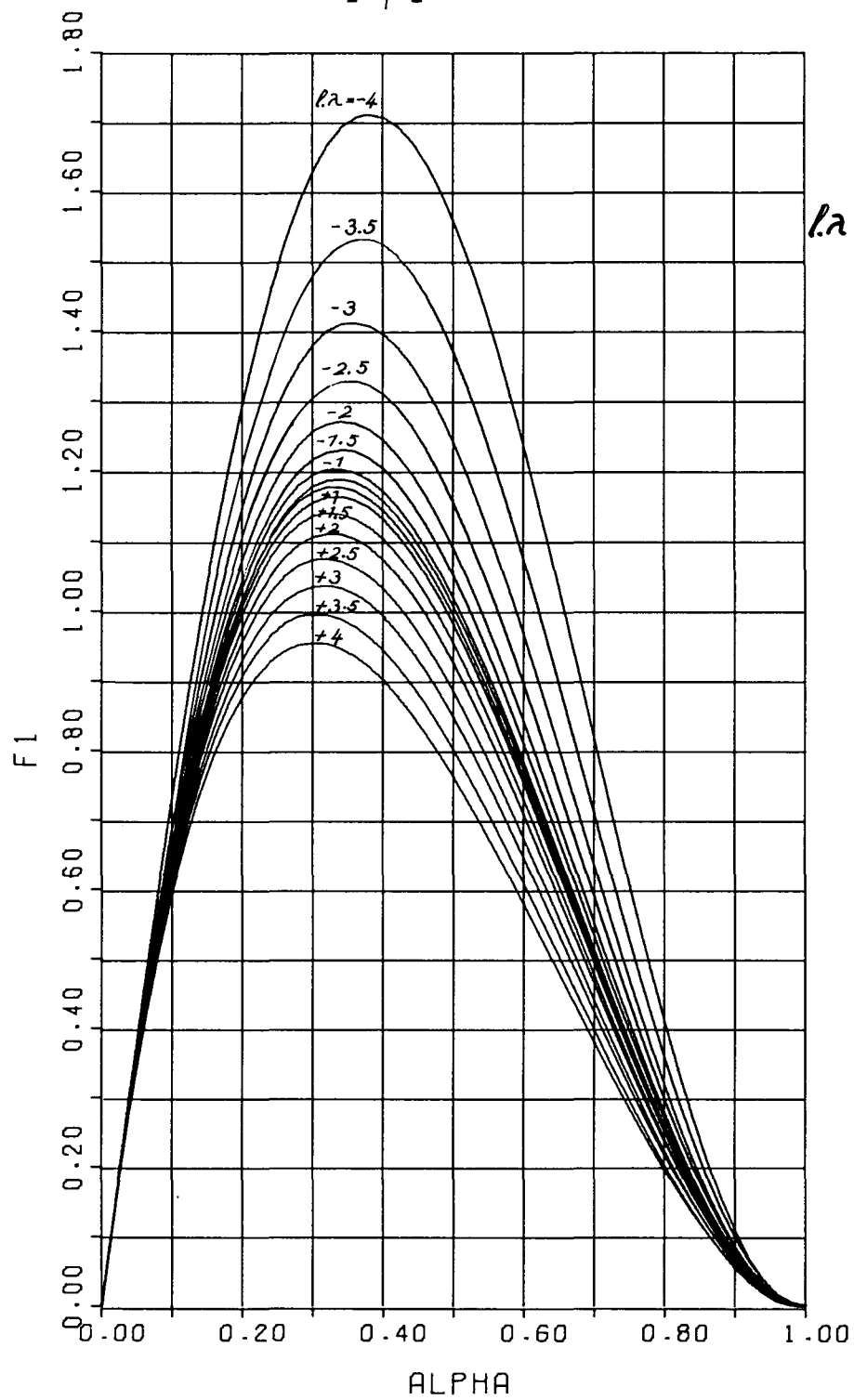


Abb. 4

Für die Streckenlast Abb.5 benötigt man lediglich eine neue Rechte Seite für die Belastungen, sodaß man Gl.21 erhält.

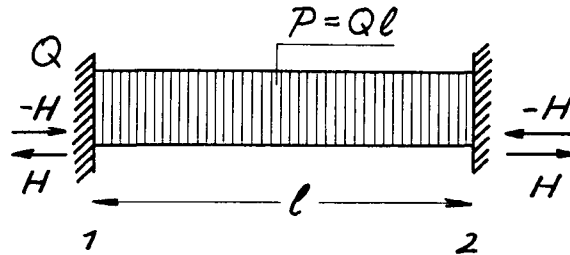


Abb.5

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} M & Q & 1 \end{array} \right\}_{12} \left[\begin{array}{ccc} \frac{l^3}{EJ} \frac{1-\cos \alpha l}{(\alpha l)^2} & \frac{l^3}{EJ} \frac{\alpha l - \sin \alpha l}{(\alpha l)^3} & \frac{Ql^4}{EJ} \frac{1-\cos \alpha l - (\alpha l)^2/2}{(\alpha l)^4} \\ \frac{l}{EJ} \frac{\sin \alpha l}{\alpha l} & \frac{l^2}{EJ} \frac{1-\cos \alpha l}{(\alpha l)^2} & \frac{Ql^3}{EJ} \frac{\sin \alpha l - \alpha l}{(\alpha l)^3} \\ \cos \alpha l & l \frac{\sin \alpha l}{\alpha l} & Ql^2 \frac{\cos \alpha l - 1}{(\alpha l)^2} \\ 0 & 1 & -ql \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \\ 1 \end{array} \right\} \quad (21)$$

Die beiden obersten Zeilen liefern die Bestimmungsgleichungen für M_{12} bzw. Q_{12} . M_{12} ergibt sich dann zu

$$M_{12} = \frac{Ql^2}{(\alpha l)^2} \frac{-(1-\cos \alpha l - \frac{(\alpha l)^2}{2})(1-\cos \alpha l) + (\sin \alpha l - \alpha l)(\alpha l - \sin \alpha l)}{2-2\cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l} \quad (22)$$

Bezieht man M auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskraft, dann erhält man aus Gl.22

$$M_{12} = -\frac{Ql^2}{12} F_2 - \frac{Pl}{12} F_2 \quad (23)$$

mit

$$F_2 = \frac{6}{\alpha l} \left\{ \frac{2 \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l - \alpha l}{2-2\cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l} - \frac{2}{\alpha l} \right\} \quad (24)$$

und für den Zugfall

$$F_2 = \frac{6}{\lambda l} \left\{ \frac{2}{\lambda l} + \frac{2 \sinh \lambda l - \lambda l \cosh \lambda l - \lambda l}{2 - 2 \cosh \lambda l + \lambda l \sinh \lambda l} \right\} \quad (25)$$

Neben konstanten Streckenlasten treten auch Dreieckslasten auf

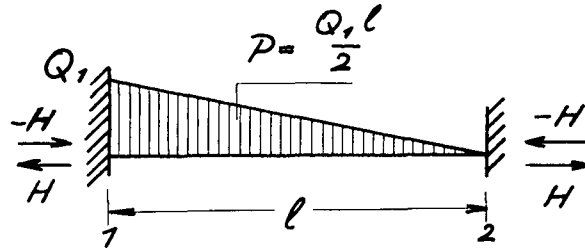


Abb. 6

Man braucht lediglich eine neue Rechte Seite für die Übertr.-Matrix

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} M & Q & 1 \\ \hline \frac{l^2}{EJ} \frac{1 - \cos \lambda l}{(\lambda l)^2} & \frac{l^3}{EJ} \frac{\lambda l - \sin \lambda l}{(\lambda l)^3} & -\frac{l^4 Q_1 (\cos \lambda l - \frac{1}{\lambda l} \sin \lambda l + \frac{(\lambda l)^2}{3})}{EJ (\lambda l)^4} \\ \frac{l}{EJ} \frac{\sin \lambda l}{\lambda l} & \frac{l^2}{EJ} \frac{1 - \cos \lambda l}{(\lambda l)^2} & \frac{l^3 Q_1 (\sin \lambda l - \frac{\lambda l}{2} - \frac{1}{\lambda l} + \frac{\cos \lambda l}{\lambda l})}{EJ (\lambda l)^3} \\ \cos \lambda l & l \frac{\sin \lambda l}{\lambda l} & \frac{l^2 Q_1 (\cos \lambda l - \frac{1}{\lambda l} \sin \lambda l)}{(\lambda l)^2} \\ 0 & 1 & -\frac{Q_1 l}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \\ 1 \end{Bmatrix}_{27} \quad (26)$$

Die beiden obersten Zeilen liefern die Bestimmungsgl. für M_{12} bzw. Q_{12}

$$M_{12} = \frac{Q_1 l^2}{(\lambda l)^2} \frac{(\cos \lambda l - \frac{1}{\lambda l} \sin \lambda l + \frac{(\lambda l)^2}{3})(1 - \cos \lambda l) + (\sin \lambda l - \frac{\lambda l}{2} + \frac{1}{\lambda l} + \frac{\cos \lambda l}{\lambda l})(\lambda l - \sin \lambda l)}{2 - 2 \cos \lambda l - \lambda l \sin \lambda l} \quad (27)$$

Bezieht man das Moment auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskraft, dann erhält man aus Gl. 27

$$M_{12} = \frac{Q_1 l^2}{20} F_3 = \frac{Pl}{10} F_3$$

$$F_3 = \frac{20}{\lambda l} \left\{ \frac{1}{6} \frac{3 \sin \lambda l - 2 \lambda l \cos \lambda l - \lambda l}{2 - 2 \cos \lambda l - \lambda l \sin \lambda l} - \frac{1}{\lambda l} \right\} \quad (28)$$

für den Zugfall gilt

$$F_3 = \frac{20}{\lambda l} \left\{ \frac{1}{\lambda l} + \frac{1}{6} \frac{3 \sinh \lambda l - 2 \lambda l \cosh \lambda l - \lambda l}{2 - 2 \cosh \lambda l + \lambda l \sinh \lambda l} \right\} \quad (29)$$

Außerdem muß man noch das Einspannmoment M_{12} ermitteln.
Dazu führt man wieder eine neue Rechte Seite ein

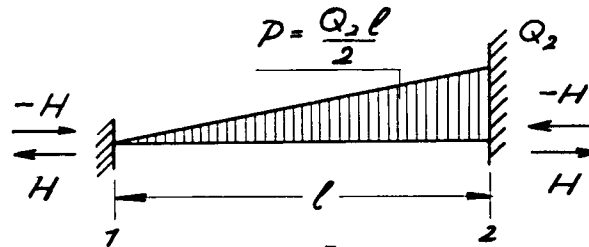


Abb. 7

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} M & Q & 1 \end{array} \right\}_{12} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \\ 1 \end{array} \right\}_{21} \quad (30)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{l^2}{EJ} \frac{1 - \cos \alpha l}{(\alpha l)^2} & \frac{l^3}{EJ} \frac{\alpha l - \sin \alpha l}{(\alpha l)^3} & \frac{Q_2 l^4}{EJ} \frac{1 - \frac{1}{\alpha l} \sin \alpha l - \frac{(\alpha l)^2}{6}}{(\alpha l)^3} \\ \frac{l}{EJ} \frac{\sin \alpha l}{\alpha l} & \frac{l^2}{EJ} \frac{1 - \cos \alpha l}{(\alpha l)^2} & \frac{Q_2 l^3}{EJ} \frac{\frac{1}{\alpha l} - \frac{\cos \alpha l}{\alpha l} - \frac{\alpha l}{2}}{(\alpha l)^3} \\ \cos \alpha l & l \frac{\sin \alpha l}{\alpha l} & Q_2 l^2 \frac{(\sin \alpha l - \alpha l)}{(\alpha l)^3} \\ 0 & 1 & - \frac{Q l}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Die beiden oberen Zeilen liefern die Bestimmungsgl. für M_{12} und Q_{12}

$$M_{12} = \frac{Q_2 l^2}{(\alpha l)^2} \frac{(1 - \frac{1}{\alpha l} \sin \alpha l - \frac{(\alpha l)^2}{6})(1 - \cos \alpha l) + (\frac{1}{\alpha l} - \frac{\cos \alpha l}{\alpha l} - \frac{\alpha l}{2})(\alpha l - \sin \alpha l)}{2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l} \quad (31)$$

Bezieht man das Moment auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskraft, dann erhält man aus Gl. 31

$$M_{12} = \frac{Q_2 l^2}{30} F_4 = \frac{P l}{15} F_4$$

$$F_4 = \frac{5}{\alpha l} \frac{3 \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l - 2 \alpha l}{2 - 2 \cos \alpha l - \alpha l \sin \alpha l} \quad (32)$$

und für den Zugfall

$$F_4 = \frac{5}{\alpha l} \frac{3 \sinh \alpha l - \alpha l \cosh \alpha l - 2 \alpha l}{2 - 2 \cosh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l} \quad (33)$$

In Abb. 8 sind die Faktoren F_2, F_3 und F_4 aufgetragen

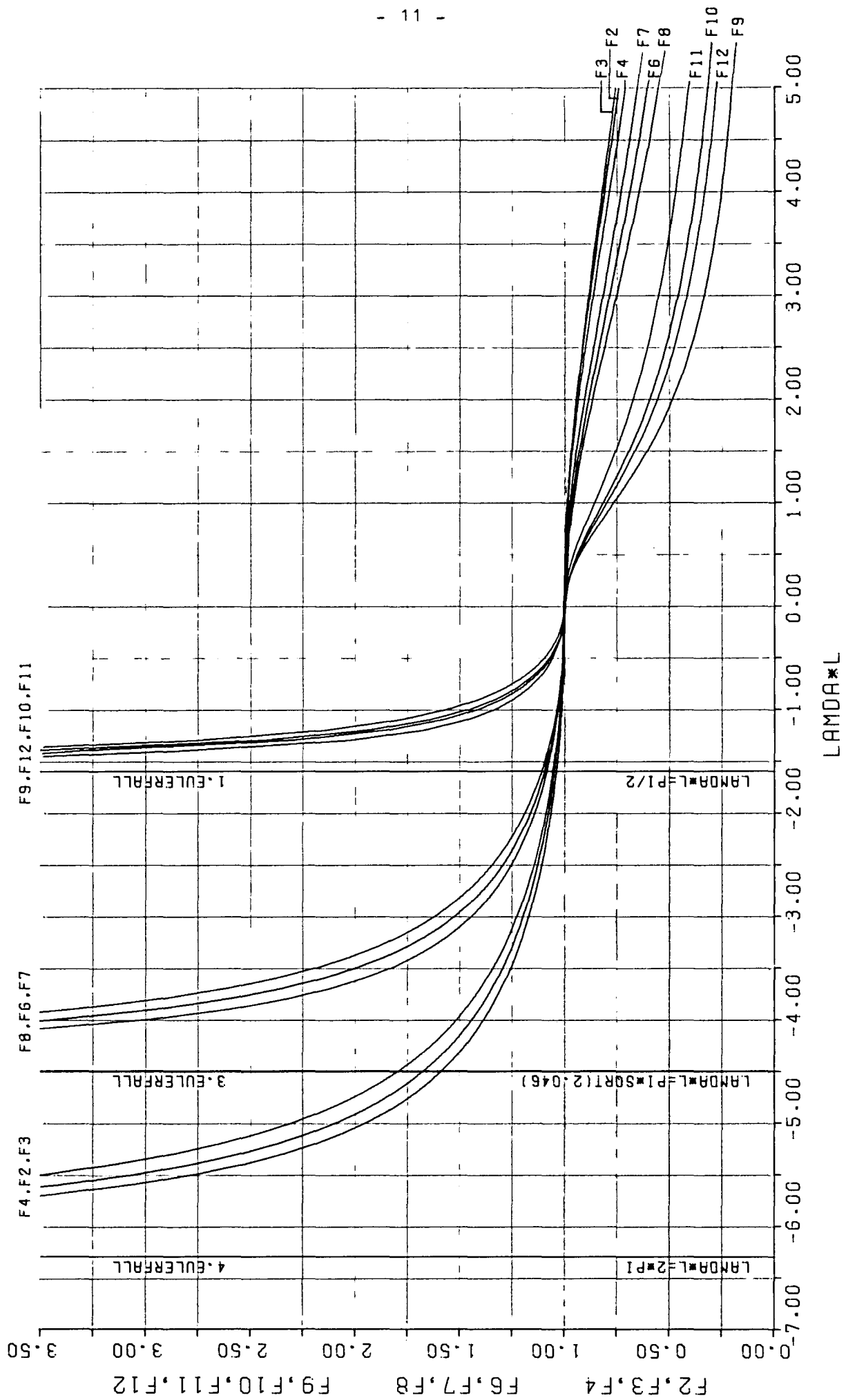


ABB.8

Für den Fall, daß ein Auflager keine Einspannung hat, ergibt sich das Einspannmoment dadurch, daß man in den entsprechenden Übertragungsmatrizen andere Zeilen verwendet.

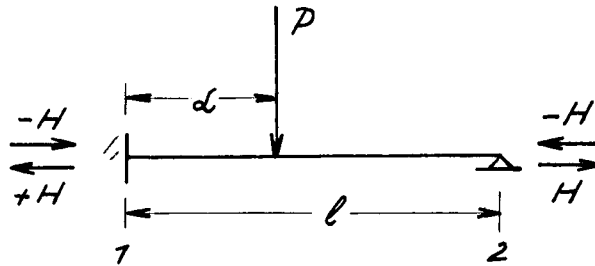


Abb.9

Das Einspannmoment erhält man, wenn man die 1. und 3. Zeile aus Gl. 16 verwendet.

$$M_{12} = \frac{Pl}{\alpha l} \frac{(\alpha l(1-\alpha) + \sin(1-\alpha)\alpha l) \sin \alpha l + \sin(1-\alpha)\alpha l(\alpha l - \sin \alpha l)}{(1 - \cos \alpha l) \sin \alpha l - \cos \alpha l(\alpha l - \sin \alpha l)} \quad (34)$$

Bezieht man M auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskraft und P auf $\alpha = \frac{l}{2}$, dann erhält man mit $1 - \alpha = \beta$

$$M_{12} = F_5 \frac{3Pl}{16} \quad (35)$$

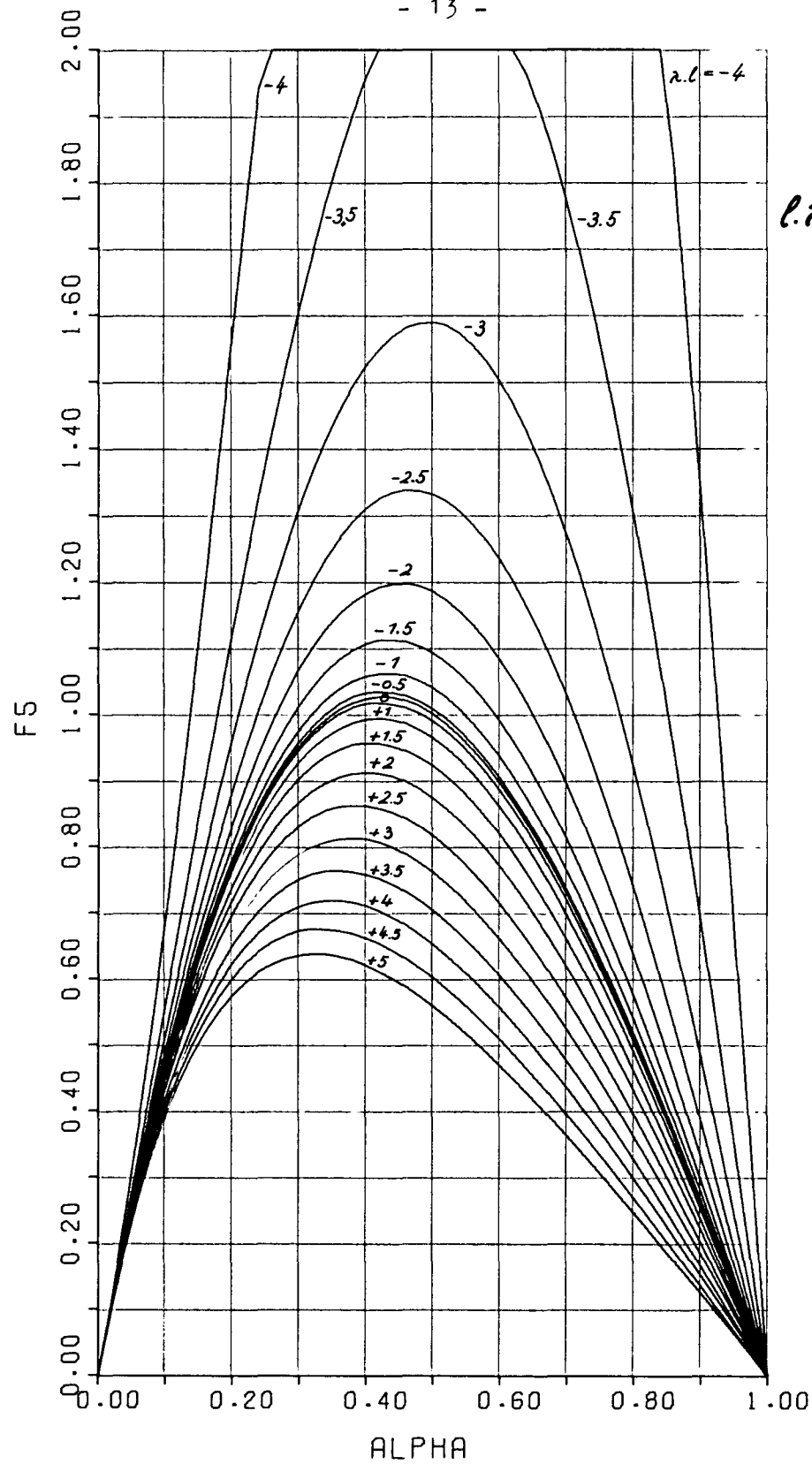
mit

$$F_5 = \frac{16}{3} \cdot \frac{+\beta \sin \alpha l - \sin \beta \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (36)$$

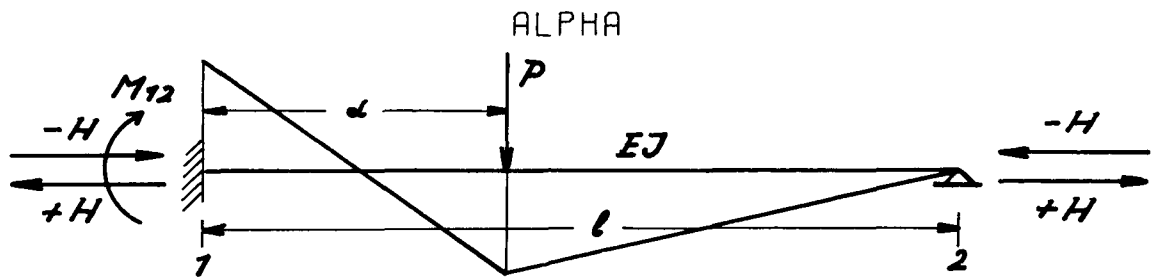
Für den Zugfall erhält man in Analogie

$$F_5 = \frac{16}{3} \cdot \frac{\beta \sinh \alpha l - \sinh \beta \alpha l}{-\sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l} \quad (37)$$

In Abb.10 sind die Gl.36 und 37 grafisch ausgewertet



$$\lambda.l = \pm \sqrt{\frac{H}{EJ}} \cdot l$$



$$M_{12} = F_5 \cdot \frac{3}{16} Pl$$

ABB. 10

Für die Streckenlasten benötigt man ebenfalls die 1. und 3. Zeile der Gl. 21

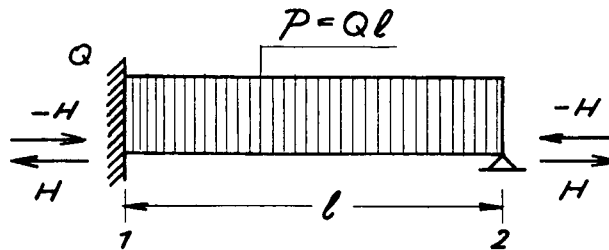


Abb.11

Das Einspannmoment erhält man mit

$$M_{12} = \frac{Ql^2}{(\alpha l)^2} \frac{(1 - \cos \alpha l - \frac{(\alpha l)^2}{2}) \sin \alpha l - (\cos \alpha l - 1)(\alpha l - \sin \alpha l)}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (38)$$

Bezieht man das Moment auf das Einspannmoment ohne Längskräfte, dann erhält man

$$M_{12} = F_6 \frac{Q_1 l^2}{8} = \frac{\mathcal{P} l}{8} F_6 \quad (39)$$

mit

$$F_6 = \frac{8}{(\alpha l)^2} \frac{\frac{(\alpha l)^2}{2} \sin \alpha l + \alpha l \cos \alpha l - \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (40)$$

Für den Zugfall erhält man in Analogie

$$F_6 = \frac{8}{(\alpha l)^2} \frac{-\frac{(\alpha l)^2}{2} \sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l - \alpha l}{-\sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l} \quad (41)$$

Die Formeln Gl. 40 und 41 sind in Abb. 8 grafisch dargestellt. Die Funktionen laufen beim 3. Eulerfall gegen ∞ .

Für den Fall der Dreieckslast erhält man aus Gl. 26

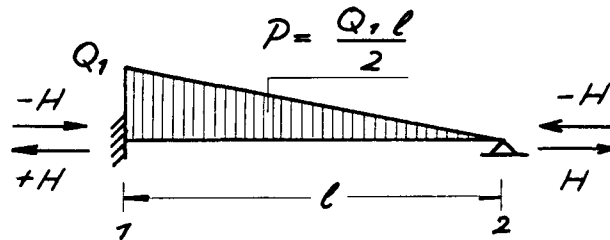


Abb. 12

das Einspannmoment zu

$$M_{12} = \frac{Q_1 l^4 - (\cos \alpha l - \frac{1}{\alpha l} \sin \alpha l + \frac{(\alpha l)^2}{3}) \sin \alpha l + (\cos \alpha l - \frac{1}{\alpha l} \sin \alpha l)(\alpha l - \sin \alpha l)}{(\alpha l)^2 \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (42)$$

Bezieht man das Moment auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskraft, so erhält man

$$M_{12} = F_z \cdot \frac{2 Q_1 l^2}{15} = \frac{p l}{15} F_z \quad (43)$$

mit

$$F_z = \frac{15}{(\alpha l)^2} \frac{\alpha l \cos \alpha l + \frac{(\alpha l)^2}{3} \sin \alpha l - \sin \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (44)$$

Für den Zugfall gilt

$$F_z = \frac{15}{(\alpha l)^2} \frac{\alpha l \cosh \alpha l - \frac{(\alpha l)^2}{3} \sinh \alpha l - \sinh \alpha l}{-\sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l} \quad (45)$$

Die Formeln Gl. 44 und Gl. 45 sind in Abb. 8 grafisch dargestellt.

Für den Fall, daß die Dreieckslast an der Einspannung verschwindet ergibt sich aus Gl. 30

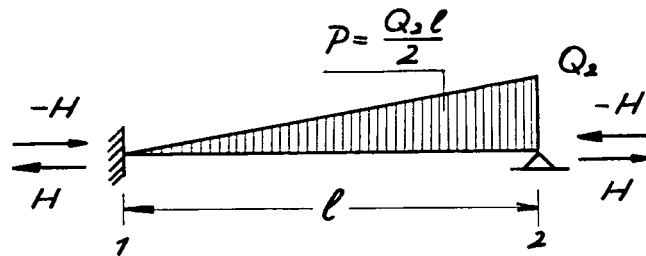


Abb. 13

Das Einspannmoment erhält man mit

$$M_{12} = \frac{Q_2 l^2}{(\alpha l)^2} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{\alpha l} \sin \alpha l - \frac{(\alpha l)^2}{6}) \sin \alpha l + \frac{1}{\alpha l} (\sin \alpha l - \alpha l)(\alpha l - \sin \alpha l)}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (46)$$

Bezieht man das Moment auf das Einspannmoment des Balkens ohne Längskraft, dann erhält man

$$M_{12} = F_8 \frac{7}{60} Q_2 l^2 = \frac{7 P l}{120} F_8 \quad (47)$$

mit

$$F_8 = \frac{120}{7(\alpha l)^2} \frac{\frac{(\alpha l)^2}{6} \sin \alpha l - \alpha l + \sin \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} \quad (48)$$

bzw. für den Zugfall

$$F_8 = \frac{120}{7(\alpha l)^2} \frac{-\frac{(\alpha l)^2}{6} \sinh \alpha l - \alpha l + \sinh \alpha l}{-\sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l} \quad (49)$$

Die Formeln Gl. 48 bzw. 49 sind ebenfalls in Abb. 8 dargestellt.

Bei Kragträgern sind die gleichen Übertragungsmatrizen wie vorher zu verwenden.

Für den Fall einer Einzellast erhält man

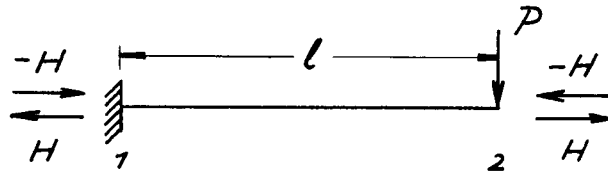


Abb. 14

unter Verwendung von nunmehr der beiden unteren, d.h. der 3. und 4. Zeile der Gl. 16

$$M_{12} = \frac{Pl}{\alpha l} \cdot \frac{\sin \alpha l}{\cos \alpha l} \quad (50)$$

Bezieht man das Moment auf den Fall ohne Axiallast, dann erhält man

$$M_{12} = Pl \cdot F_9 \quad (51)$$

mit

$$F_9 = \frac{\operatorname{tg} \alpha l}{\alpha l} \quad (52)$$

bzw. im Zugfall

$$F_9 = \frac{\operatorname{tgh} \alpha l}{\alpha l} \quad (53)$$

Für den Fall der Streckenlast gilt Abb.14 und Gl. 21

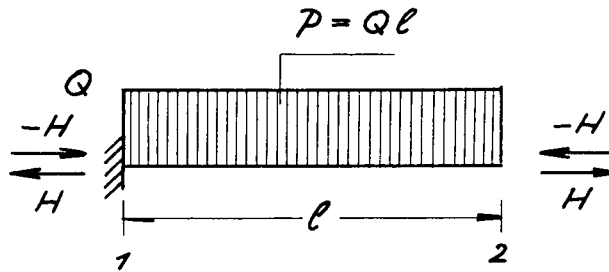


Abb.15

$$M_{12} = \frac{Ql^2}{\alpha l} \frac{\alpha l \cos \alpha l - \alpha l - \sin \alpha l}{\cos \alpha l} \quad (54)$$

bezieht man das Moment auf den Fall ohne Axiallast, so erhält man

$$M_{12} = \frac{Ql^2}{2} F_{10} = \frac{Pl}{2} F_{10} \quad (55)$$

mit

$$F_{10} = \frac{2}{(\alpha l)^2} \frac{-\cos \alpha l + 1 - \alpha l \sin \alpha l}{\cos \alpha l} \quad (56)$$

Für den Zugfall gilt dann

$$F_{10} = \frac{2}{(\alpha l)^2} \frac{\cosh \alpha l - 1 - \alpha l \sinh \alpha l}{\cosh \alpha l} \quad (57)$$

Für den Fall der Dreieckslast gilt Abb.16 und Formel 26

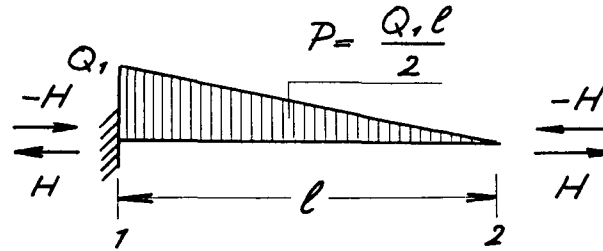


Abb.16

$$M_{12} = -\frac{Ql^2}{(\alpha l)^2} \frac{+ \cos \alpha l + \frac{1}{\alpha l} \sin \alpha l + \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha l}{\cos \alpha l} \quad (58)$$

Bezogen auf das Moment ohne Längskraft gilt

$$M_{12} = \frac{Ql^2}{6} F_{11} = \frac{Pl}{3} F_{11} \quad (59)$$

mit

$$F_{11} = -\frac{3}{(\alpha l)^2} \frac{+ 2 \cos \alpha l - \frac{2}{\alpha l} \sin \alpha l + \alpha l \sin \alpha l}{\cos \alpha l} \quad (60)$$

bzw. für den Zugfall

$$F_{11} = -\frac{3}{(\alpha l)^2} \frac{- 2 \cosh \alpha l + \frac{2}{\alpha l} \sinh \alpha l + \alpha l \sinh \alpha l}{\cosh \alpha l} \quad (61)$$

Für den Fall der Dreieckslast Abb.17

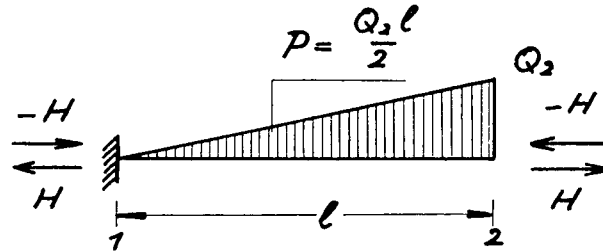


Abb.17

gilt

$$M_{12} = \frac{Q_2 l^2}{(al)^2} \frac{\frac{1}{al} \sin al + 1 - \frac{al}{2} \sin al}{\cos al} \quad (62)$$

Bezogen auf das Moment ohne Längskraft gilt

$$M_{12} = \frac{2Ql^2}{6} F_{12} = \frac{2Pl}{3} F_{12} \quad (63)$$

mit

$$F_{12} = \frac{3}{2(al)^2} \frac{2 - \frac{2}{al} \sin al - al \sin al}{\cos al} \quad (64)$$

und im Zugfall

$$F_{12} = \frac{3}{2(al)^2} \frac{2 - \frac{2}{al} \sinh al + al \sinh al}{\cosh al} \quad (65)$$

Die Funktionen F10 bis F12 sind ebenfalls in Abb.8 grafisch dargestellt.

Man erkennt, daß diese beim 1. Eulerfall gegen ∞ laufen.

4. Berechnung der Feldmomente

Nachdem man nun mit den vorher berechneten Einspannmomenten, Verteilerzahlen und Weiterleitungszahlen den Cross-Ausgleich in üblicher Weise durchgeführt hat, ist es notwendig die Feldmomente zu bestimmen. Für einen Balken mit Einzellast Abb.18 ergibt sich

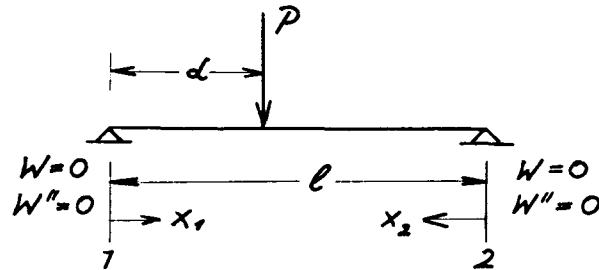


Abb.18

die Lösung der DGL.(1) zu

$$W_1 = C_1 + C_2 x_1 + C_3 \sin \alpha x_1 + C_4 \cos \alpha x_1 \quad 0 \leq x \leq d \quad (66)$$

bzw.

$$W_2 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 \sin \alpha x_2 + b_4 \cos \alpha x_2 \quad d \leq x \leq l$$

Die 8 konstanten kann man mit Hilfe der 4 Rand- und Kopplungsbedingungen bei $x = d$ bestimmen.

Die Randbedingungen ergeben c_1, b_1, c_4 und b_4 zu 0, sodaß für das Moment als 2. Ableitung der Durchbiegungsfunktion folgender, lediglich von der Konstanten c_3 abhängiger, Ausdruck verbleibt.

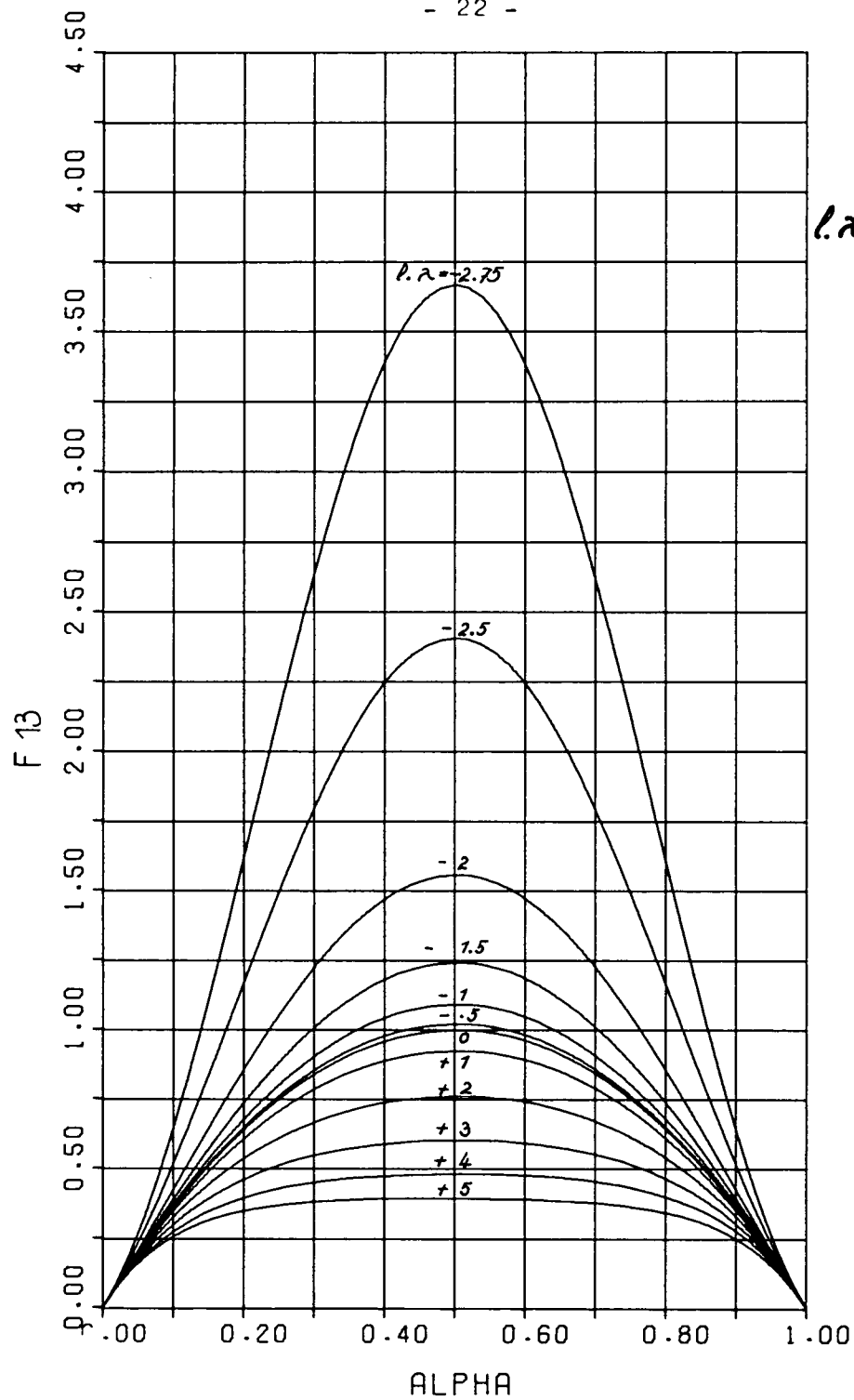
$$M = \frac{P l}{4} \cdot F_{13} \quad (67)$$

$$F_{13} = \frac{4}{\alpha l} \frac{\sin \alpha (l-d)}{\sin \alpha l} \cdot \sin \alpha d \quad (68)$$

und für den Zugfall

$$F_{13} = \frac{4}{\alpha l} \frac{\sinh \alpha (l-d)}{\sinh \alpha l} \cdot \sinh \alpha d \quad (69)$$

In Abb.19 sind die Ergebnisse grafisch dargestellt.



$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{H}{EJ}} \cdot l$$

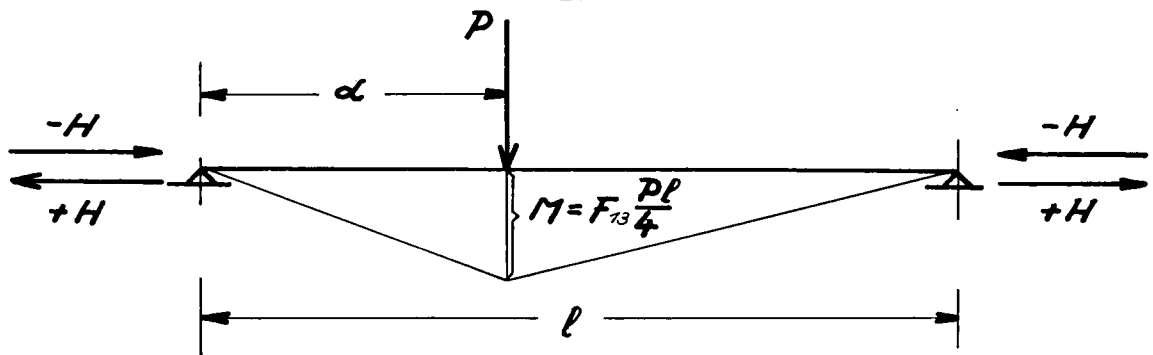


Abb. 19

Für den Fall der Streckenlast Abb.20 ergibt sich die DGL

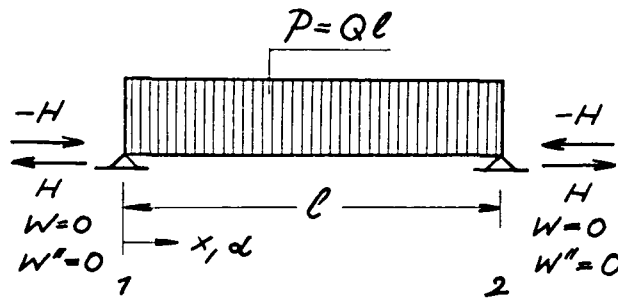


Abb.20

$$W^{IV} + \lambda^2 W'' = \frac{Q}{EI} \quad (70)$$

mit der Lösung

$$W = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \lambda x + C_4 \cos \lambda x + \frac{Q x^2}{2H} \quad (71)$$

Verwendet man die Randbedingungen $w(0)=0$ und $w''(0)=0$ und die Symmetriebedingungen $w'(l/2)=0$ bzw. $w'''(l/2)=0$, dann erhält man folgenden Ausdruck für das Moment

$$M = \frac{Q l^2}{8} F_{14} \quad (72)$$

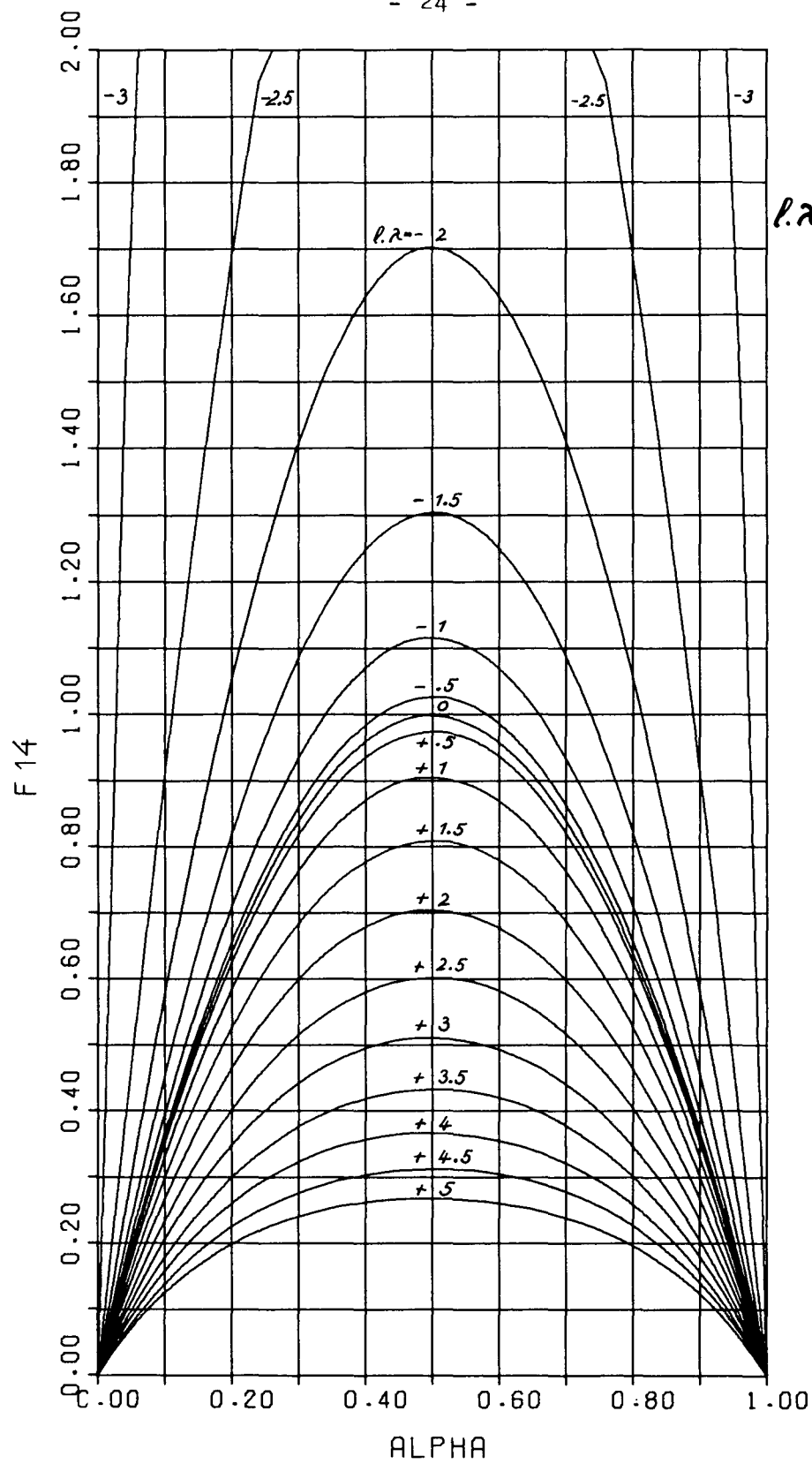
mit

$$F_{14} = \frac{8}{\lambda^2 l^2} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{l-2\alpha}{2}\lambda\right)}{\cos \frac{\lambda l}{2}} - 1 \right\} \quad (73)$$

bzw.für den Zugfall

$$F_{14} = \frac{8}{\lambda^2 l^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{l-2\alpha}{2}\lambda\right)}{\cosh \frac{\lambda l}{2}} \right\} \quad (74)$$

Die Funktionen F_{14} für Druck bzw.Zug sind in Diagramm 21 dargestellt.



$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{H}{EJ}} \cdot l$$

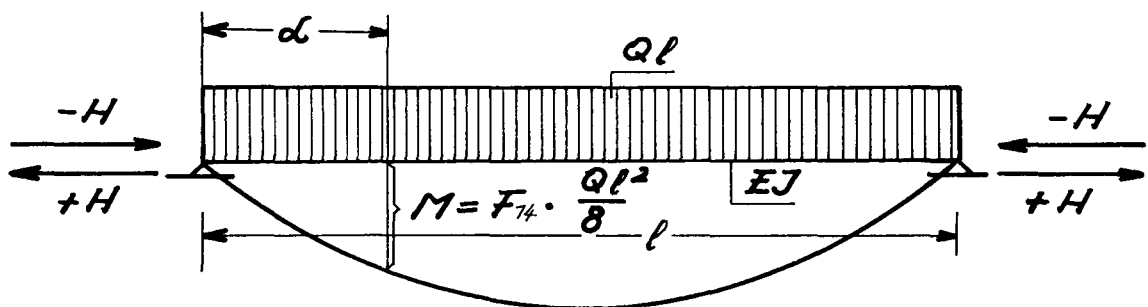


Abb. 21

Für den Fall der Dreieckslast Abb.22 ergibt sich die DGL für das Moment mit Gl. 76. Es genügt die DGL II.Ordnung, da die Konstanten c_1 , bzw. c_2 verschwinden.

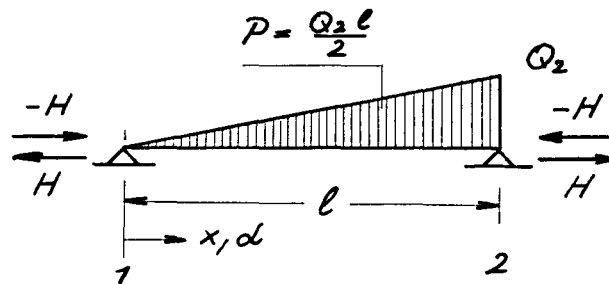


Abb.22

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (75)$$

mit der Lösung

$$M = C_3 EI \lambda^2 \sin \lambda x + C_4 EI \lambda^2 \cos \lambda x - \frac{1}{\lambda^2} Q_2 \frac{x}{l} \quad (76)$$

Paßt man die Konstanten an die in Abb.22 angegebenen Randbedingungen an, dann erhält man für den Verlauf des Momentes

$$M = \frac{Q_2 l^2}{16} \cdot F_{15} = \frac{Pl}{8} \cdot F_{15} \quad (77)$$

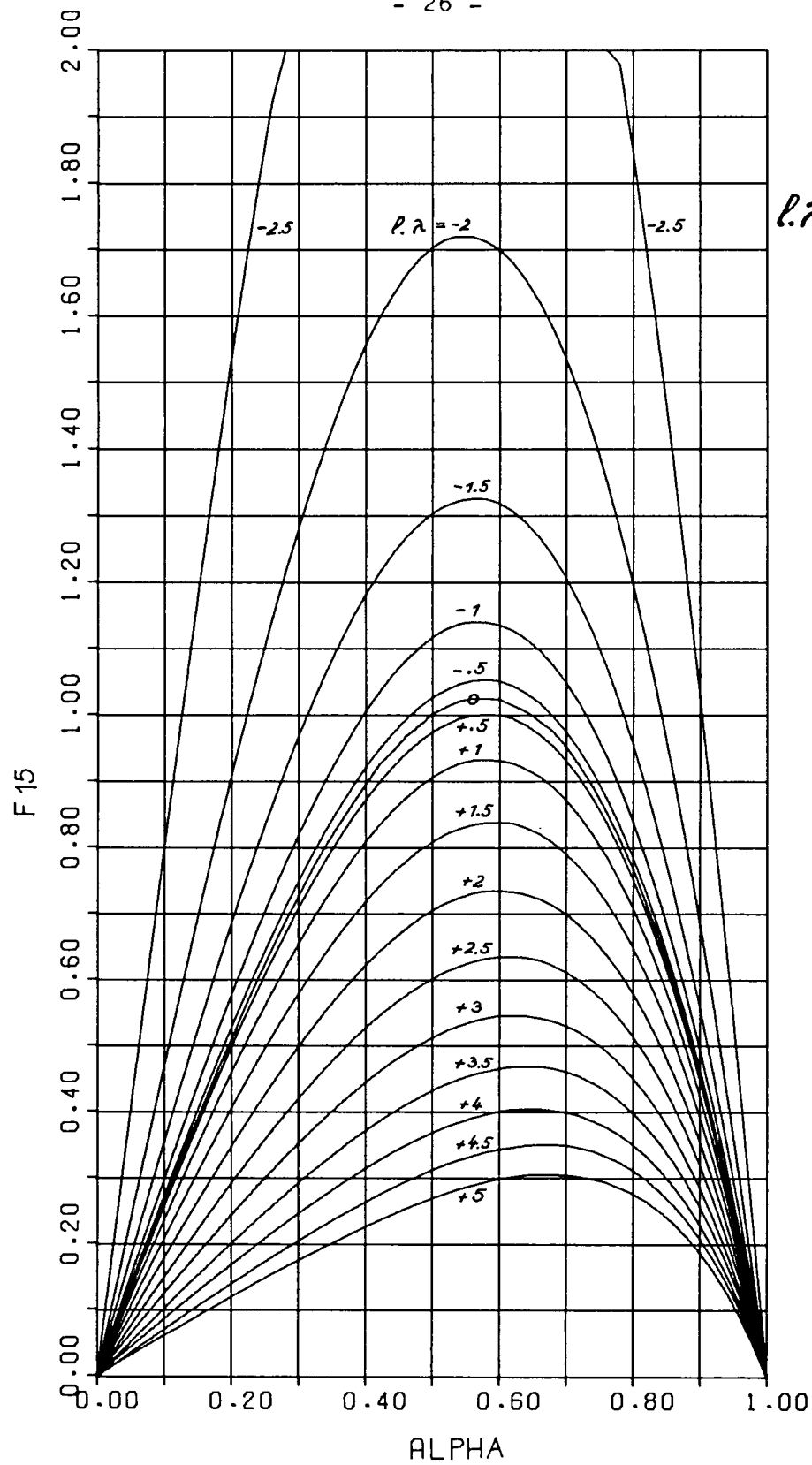
mit

$$F_{15} = \frac{16 Q_2 l^2}{\lambda^2 l^2} \left\{ \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda l} - \frac{x}{l} \right\} \quad (78)$$

und für den Zugfall

$$F_{15} = \frac{16 Q_2 l^2}{\lambda^2 l^2} \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda l} \right\} \quad (79)$$

Die Funktionen F_{15} sind in Abb.23 für Druck- bzw. Zugbelastung dargestellt.



$$p \cdot \lambda = \pm \sqrt{\frac{H}{EJ}} \cdot l$$

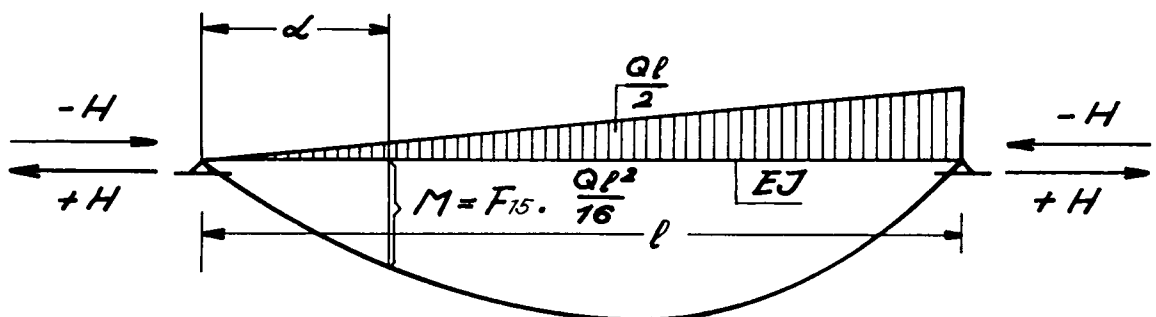


Abb. 23

Für den Fall, daß nur ein Moment an einer Feldgrenze vorhanden ist (Abb.24)

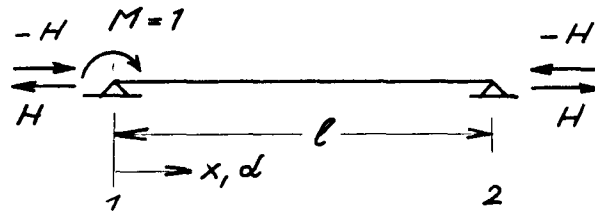


Abb.24

gelten die homogenen DGL.(1) bzw.(5) mit den Lösungen (2) bzw.(6).

Paßt man die Konstanten an das in Abb.20 gegebene Problem an, so erhält man für den Momentenverlauf

$$M = M_{12} \cdot F_{16} \quad (80)$$

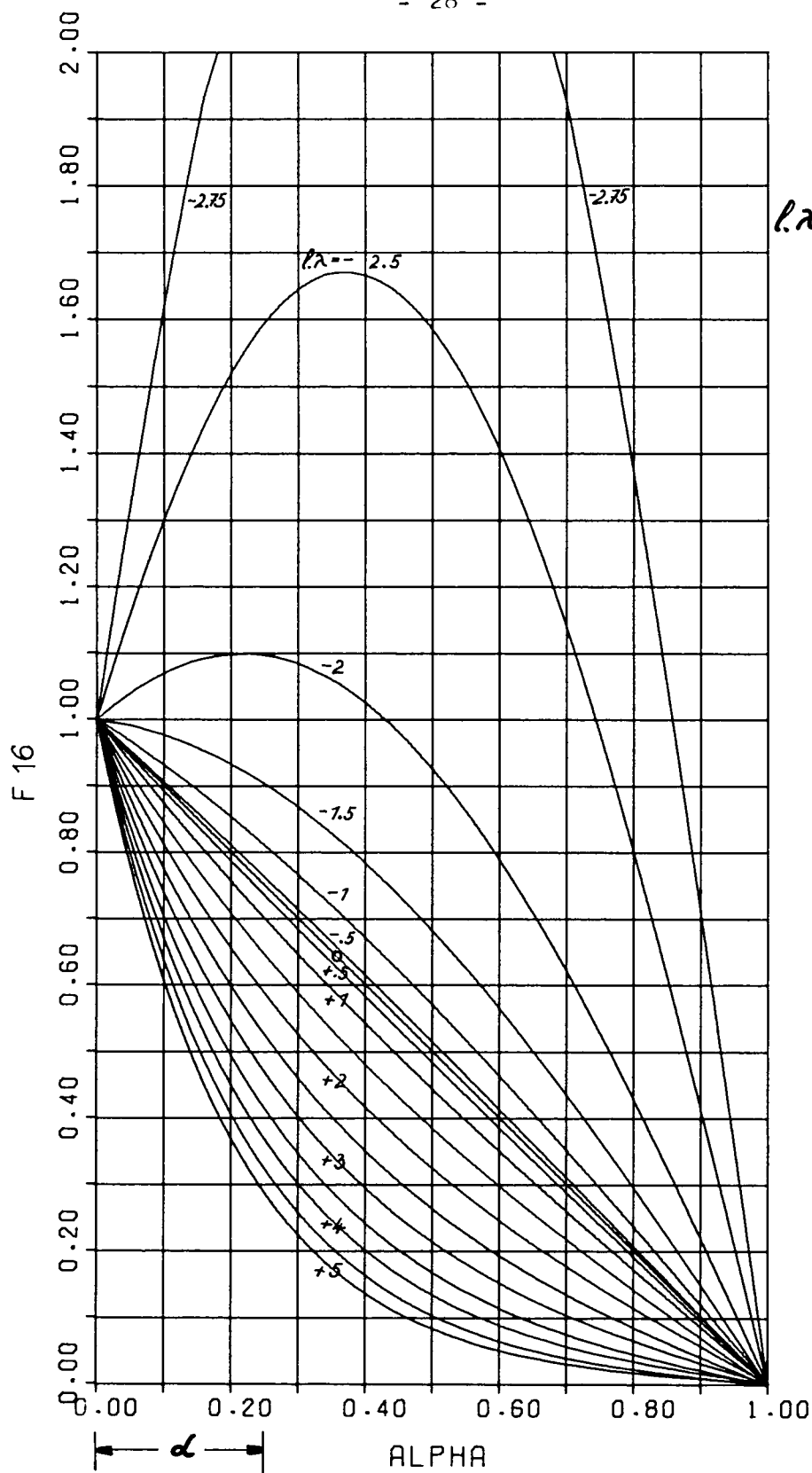
mit

$$F_{16} = \cos \alpha l - \operatorname{ctg} \alpha l \cdot \sin \alpha l \quad (81)$$

und für den Zugfall

$$F_{16} = \cosh \alpha l - \operatorname{ctgh} \alpha l \cdot \sinh \alpha l \quad (82)$$

In Abb.25 sind die Funktionen F_{16} aufgetragen. Diese Verläufe sind auch dann zu verwenden, wenn man die Momentenverteilung z.B. bei Einzelkraftbelastung zwischen Krafteinleitung und Auflager bestimmen will.



$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{H}{EI}} \cdot l$$

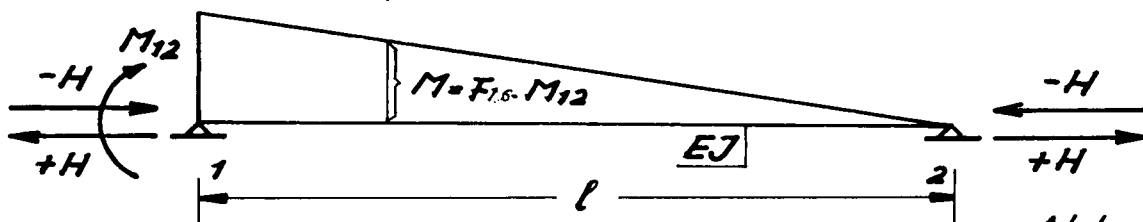
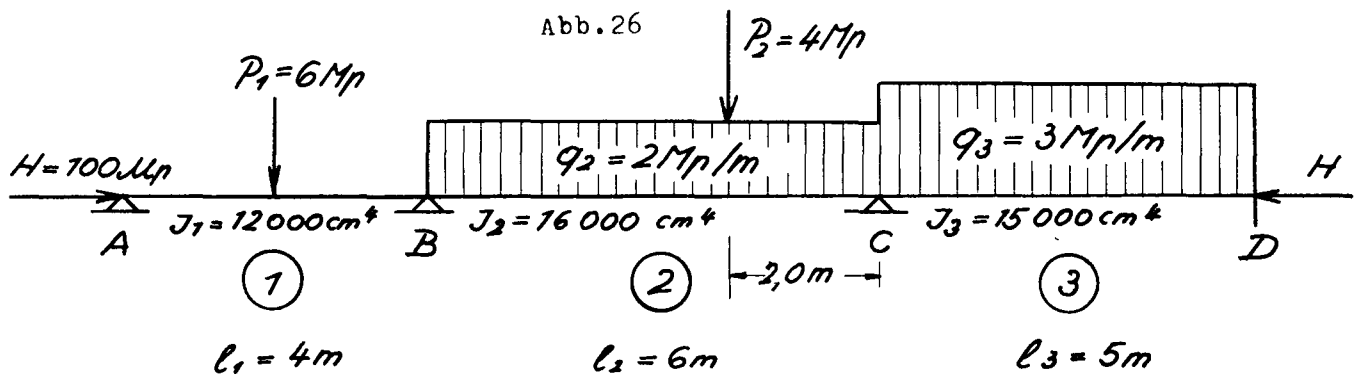


Abb. 25

Beispiel 1: Durchlaufträger (Werkstoff Al)

Dieses Beispiel wurde dem HdW 1960 (S.133) entnommen

A) ohne Druckkraft



a) Steifigkeiten:

$$K_1 = 3 \frac{EJ_1}{l_1} = 3 \cdot \frac{120}{4} = 90E$$

$$K_2 = 4 \frac{EJ_2}{l_2} = 4 \cdot \frac{160}{6} = 106,6E$$

$$K_3 = 4 \frac{EJ_3}{l_3} = 4 \cdot \frac{150}{5} = 120E$$

b) Verteilungsfaktoren:

$$V_{B1} = \frac{90E}{90E + 107E} = \frac{90}{197} = 0,457$$

$$V_{B2} = \frac{107E}{197E} = 0,543$$

$$V_{C2} = \frac{107E}{107E + 120E} = \frac{107}{227} = 0,471$$

$$V_{C3} = \frac{120E}{227E} = 0,529$$

c) Einspannmomente:

$$M_{B1} = -4,5 Mp\cdot m$$

$$M_{B2} = -7,78 \text{ "}$$

$$M_{C2} = -9,56 \text{ "}$$

$$M_{C3} = M_{D3} = -6,25 Mp\cdot m$$

d) Stützmomente

$$M_A = 0$$

$$M_B = -6,49 \text{ Mpm}$$

$$M_C = -8,62 \quad "$$

$$M_D = -5,06 \quad "$$

B) mit Druckkraft

a) Steifigkeiten

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\chi^2}{\pi^2} &= \frac{H}{P_e} = - \frac{100\,000}{\frac{\pi^2 \cdot EJ_1}{l_1^2}} = - \frac{1 \cdot 10^5}{\pi^2 \cdot 0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^4} \\ &= -0,193 \rightarrow \text{Diagr. Abb. 2} \end{aligned}$$

$$k_1^* = 2,6$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\chi^2}{\pi^2} = \frac{H}{P_e} = - \frac{1 \cdot 10^5}{\pi^2 \cdot 0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^4} = -0,327$$

$$k_2^* = 3,6$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\chi^2}{\pi^2} = - \frac{H}{P_e} = - \frac{1 \cdot 10^5}{\pi^2 \cdot 0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^4} = -0,243$$

$$k_3^* = 3,70$$

$$K_1 = k_1^* \cdot \frac{EJ_1}{l_1} = 2,6 \cdot \frac{120}{4} \cdot E = 78 E$$

$$K_2 = k_2^* \cdot \frac{EJ_2}{l_2} = 3,6 \cdot \frac{160}{6} E = 96 E$$

$$K_3 = k_3^* \cdot \frac{EJ_3}{l_3} = 3,7 \cdot \frac{150}{5} E = 111 E$$

b) Verteilungsfaktoren

$$V_{B1} = \frac{78E}{78E + 96E} = \frac{78}{174} = 0,448$$

$$V_{B2} = \frac{96E}{174E} = 0,55$$

$$V_{C2} = \frac{96E}{96E+111E} = \frac{96}{207} = 0,463$$

$$V_{C3} = \frac{111E}{207E} = 0,536$$

c) Weiterleitungszahlen (aus Diagramm Abb.2)

$$W_{B1} = 0,57$$

$$W_{B2} = 0,62$$

$$W_{C2} = 0,62$$

$$W_{C3} = 0,58$$

d) Einspannmomente

$$\begin{aligned} \alpha_1 l_1 &= \pm l_1 \sqrt{\frac{H_1}{EI_1}} = -l_1 \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^5}{0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^4}} = -l_1 \sqrt{0,119 \cdot 10^{-4}} \\ &= -l_1 \cdot 0,345 \cdot 10^{-2} = -4 \cdot 10^2 \cdot 0,345 \cdot 10^{-2} = -1,38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 l_2 &= \pm l_2 \sqrt{\frac{H_2}{EI_2}} = -l_2 \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^5}{0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^4}} = -l_2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2} \\ &= -6 \cdot 10^2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2} = -1,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 l_3 &= \pm l_3 \sqrt{\frac{H_3}{EI_3}} = -l_3 \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^5}{0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^4}} = -0,308 \cdot 10^{-2} \\ &= -5 \cdot 10^2 \cdot 0,308 \cdot 10^{-2} = -1,54 \end{aligned}$$

$$M_A = 0$$

$$M_{B1} = -\frac{3P_1 l_1}{16} F_5 = -\frac{3 \cdot 6 \cdot 4}{16} \cdot 1,07 = -4,8 \text{ Mpm}$$

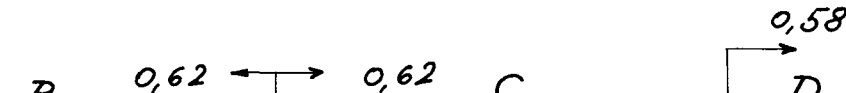
$$\begin{aligned} M_{B2} &= -\frac{P_2 l_2}{8} F_1 - \frac{9P_2 l_2^2}{12} F_2 = -\frac{4 \cdot 6}{8} \cdot 0,64 - \frac{2 \cdot 36}{12} \cdot 1,05 \\ &= -1,92 - 6,3 = -8,2 \text{ Mpm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{C2} &= -\frac{P_2 l_2}{8} F_1 - \frac{9P_2 l_2^2}{12} F_2 = -\frac{4 \cdot 6}{8} \cdot 1,26 - \frac{2 \cdot 36}{12} \cdot 1,08 \\ &= -3,78 - 6,5 = -10,3 \text{ Mpm} \end{aligned}$$

$$M_{C3} = -\frac{9P_3 l_3^2}{12} F_2 = -\frac{3 \cdot 25}{12} \cdot 1,03 = -6,45 \text{ Mpm}$$

$$M_{D3} = M_{C3} = -6,45 \text{ Mpm}$$

e) Stützmomente

						
B		$0,62$	\longleftrightarrow	$0,62$	C	$0,58$ D
1		2	2		3	3
0,45		0,55	0,46		0,54	
- 4,80		+ 8,20	- 10,30		+ 6,45	- 6,45
		+ 1,10	+ 1,77	- 3,85	+ 2,08	+ 1,20
- 2,03	+ 4,50	- 2,47	- 1,53			
		+ 0,44	+ 0,70	- 1,53	+ 0,83	+ 0,48
- 0,20	+ 0,44	- 0,24	- 0,15			
		+ 0,04	+ 0,07	- 0,15	+ 0,08	+ 0,05
- 0,02	+ 0,04	- 0,02				
- 7,05		+ 7,05	- 9,44		+ 9,44	- 4,72
—		—	—		—	—

nat. Vorz.

f) Feldmomente

Fall A ohne Druckkraft

$$M_F\left(\frac{\ell_1}{2}\right) = \frac{P_1 \ell_1}{4} = \frac{6 \cdot 4}{4} = 6 \text{ Mpm}$$

$$M_F\left(\frac{2}{3}\ell_2\right) = \frac{q_2 \ell_2}{2} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{P_2}{3} \cdot \frac{2}{3}\ell_2 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6}{3 \cdot 2} \left(1 - \frac{2\ell}{3\ell}\right) + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6$$

$$= 8 + 5,33 = 13,33 \text{ Mpm}$$

$$M_F\left(\frac{\ell_3}{2}\right) = \frac{q_3 \ell_3^2}{8} = \frac{3 \cdot 25}{8} = 9,38 \text{ Mpm}$$

rall B mit Druckkraft

Stab 3 $\lambda_3 l_3 = -1,54$

F aus Diagramm für $0,2 l_3 = 0,85$ Abb.21
 $0,5 l_3 = 1,35$ Abb.21
 $0,8 l_3 = 0,85$ Abb.21

$$M_{F3}(0,2 l_3) = F_{14}(0,2 l_3) \cdot \frac{9 l_3^2}{8} = 0,85 \cdot 9,38 = 8,0 \text{ Mpm}$$

$$M_{F3}(0,5 l_3) = F_{14}(0,5 l_3) \cdot \text{''} = 1,35 \cdot 9,38 = 12,7 \text{ ''}$$

$$M_{F3}(0,8 l_3) = F_{14}(0,8 l_3) \cdot \text{''} = 0,85 \cdot 9,38 = 8,0 \text{ ''}$$

Stab 2 $\lambda_2 l_2 = -1,8$

1) Momentenverlauf aus Streckenlast

F aus Diagramm für $0,2 l_2 = 0,95$ Abb.21
 $0,67 l_2 = 1,38$ Abb.21

$$M_{F2}(0,2 l_2) = F_{14}(0,2 l_2) \cdot \frac{9 l_2^2}{8} = 0,95 \cdot \frac{2 \cdot 36}{8} = 8,55 \text{ Mpm}$$

$$M_{F2}(0,67 l_2) = F_{14}(0,67 l_2) \cdot \text{''} = 1,38 \cdot 9 = 12,4 \text{ ''}$$

2) Momentenverlauf aus Einzellast

F aus Diagramm für $0,2 l_2 = 0,60$ Abb.25 $\alpha = 0,7 = (1 - \frac{0,2 l_2}{0,67 l_2})$
 $0,67 l_2 = 1,25$ Abb.19

$$M_{F2}(0,2 l_2) = F_4(0,2 l_2) \cdot M_{F2}(0,67 l_2) = 0,60 \cdot 7,5 = 4,5 \text{ Mpm}$$

$$M_{F2}(0,67 l_2) = F_{13}(0,67 l_2) \cdot \frac{P_2 \cdot l_2}{4} = 1,25 \cdot 6 = 7,5$$

Gesamtfeldmoment = Σ aus 1) und 2)

$$M_{F2}(0,2 l_2) = 8,55 + 4,5 = 13,05 \approx 13,1 \text{ Mpm}$$

$$M_{F2}(0,67 l_2) = 12,4 + 7,5 = 19,9 \approx 20,0 \text{ ''}$$

Stab 1 $\lambda_1 l_1 = -1,38$

F aus Diagramm für $0,5 l_1 = 1,2$ Abb.19

$$M_{F1}(0,5 l_1) = F_{13}(0,5 l_1) \cdot \frac{P_1 l_1}{4} = 1,2 \cdot \frac{6 \cdot 4}{4} = 7,2 \text{ Mpm}$$

g) Bestimmung der Momentenschlußlinien für Fall B (mit Druckkr.)

Stab 3 $\lambda_3 l_3 = -1,54$

$M_c = -9,44 \text{ Mpm}$

F aus Diagramm Abb.25 für

$0,2 l_3 = 0,94$

$0,5 l_3 = 0,69$

$0,8 l_3 = 0,30$

$M_{s3c}(0,2 l_3) = F_4(0,2 l_3) \cdot M_c = 0,94 \cdot (-9,44) = -8,88 \text{ Mpm}$

$M_{s3c}(0,5 l_3) = F_4(0,5 l_3) \cdot M_c = 0,69 \cdot (-9,44) = -6,52 \text{ "}$

$M_{s3c}(0,8 l_3) = F_4(0,8 l_3) \cdot M_c = 0,30 \cdot (-9,44) = -2,83 \text{ "}$

$M_D = -4,72 \text{ Mpm}$

F aus Diagramm Abb.25 für

$0,2 l_3 = 0,30$

$0,5 l_3 = 0,69$

$0,8 l_3 = 0,94$

$M_{s3D}(0,2 l_3) = F_4(0,2 l_3) \cdot M_D = 0,30 \cdot (-4,72) = -1,42$

$M_{s3D}(0,5 l_3) = F_4(0,5 l_3) \cdot M_D = 0,69 \cdot (-4,72) = -3,26$

$M_{s3D}(0,8 l_3) = F_4(0,8 l_3) \cdot M_D = 0,94 \cdot (-4,72) = -4,43$

Summe ergibt Schlußlinienverlauf im Stab 3

$M_{s3}(0,2 l_3) = M_{s3c} + M_{s3D} = -8,88 - 1,42 = -10,30 \text{ Mpm}$

$M_{s3}(0,5 l_3) = M_{s3c} + M_{s3D} = -6,52 - 3,26 = -9,78 \text{ "}$

$M_{s3}(0,8 l_3) = M_{s3c} + M_{s3D} = -2,83 - 4,43 = -7,26 \text{ "}$

Stab 2 $\lambda_2 l_2 = -1,8$

$M_B = -7,05 \text{ Mpm}$

F aus Diagramm Abb.25 für

$0,2 l_2 = 1,05$

$0,67 l_2 = 0,46$

$M_{s2B}(0,2 l_2) = F_4(0,2 l_2) \cdot M_B = 1,05 \cdot (-7,05) = -7,40 \text{ Mpm}$

$M_{s2B}(0,67 l_2) = F_4(0,67 l_2) \cdot M_B = 0,46 \cdot (-7,05) = -3,25 \text{ "}$

$M_c = -9,44 \text{ Mpm}$

F aus Diagramm Abb.25 für

$0,2 l_2 = 0,46$

$0,67 l_2 = 1,05$

$M_{s2c}(0,2 l_2) = F_4(0,2 l_2) \cdot M_c = 0,46 \cdot (-9,44) = -4,35 \text{ Mpm}$

$M_{s2c}(0,67 l_2) = F_4(0,67 l_2) \cdot M_c = 1,05 \cdot (-9,44) = -9,90 \text{ "}$

Summe ergibt Schlußlinienverlauf im Stab 2

$$M_{S2}(0,2l_2) = M_{S2B} + M_{S2C} = -7,40 - 4,35 = -11,75 \text{ kNm}$$

$$M_{S2}(0,67l_2) = M_{S2B} + M_{S2C} = -3,25 - 9,90 = -13,15 \text{ "}$$

Stab 1

$$r, l_1 = -1,38$$

$$M_B = -7,05$$

λ aus Diagramm Abb.25 für

$$\begin{aligned} 0,25l_1 &= 0,35 \\ 0,5l_1 &= 0,65 \\ 0,75l_1 &= 0,88 \end{aligned}$$

$$M_{S1B}(0,25l_1) = F_4(0,25l_1) \cdot M_B = 0,35 \cdot (-7,05) = -2,47 \text{ kNm}$$

$$M_{S1B}(0,5l_1) = F_4(0,5l_1) \cdot M_B = 0,65 \cdot (-7,05) = -4,58 \text{ "}$$

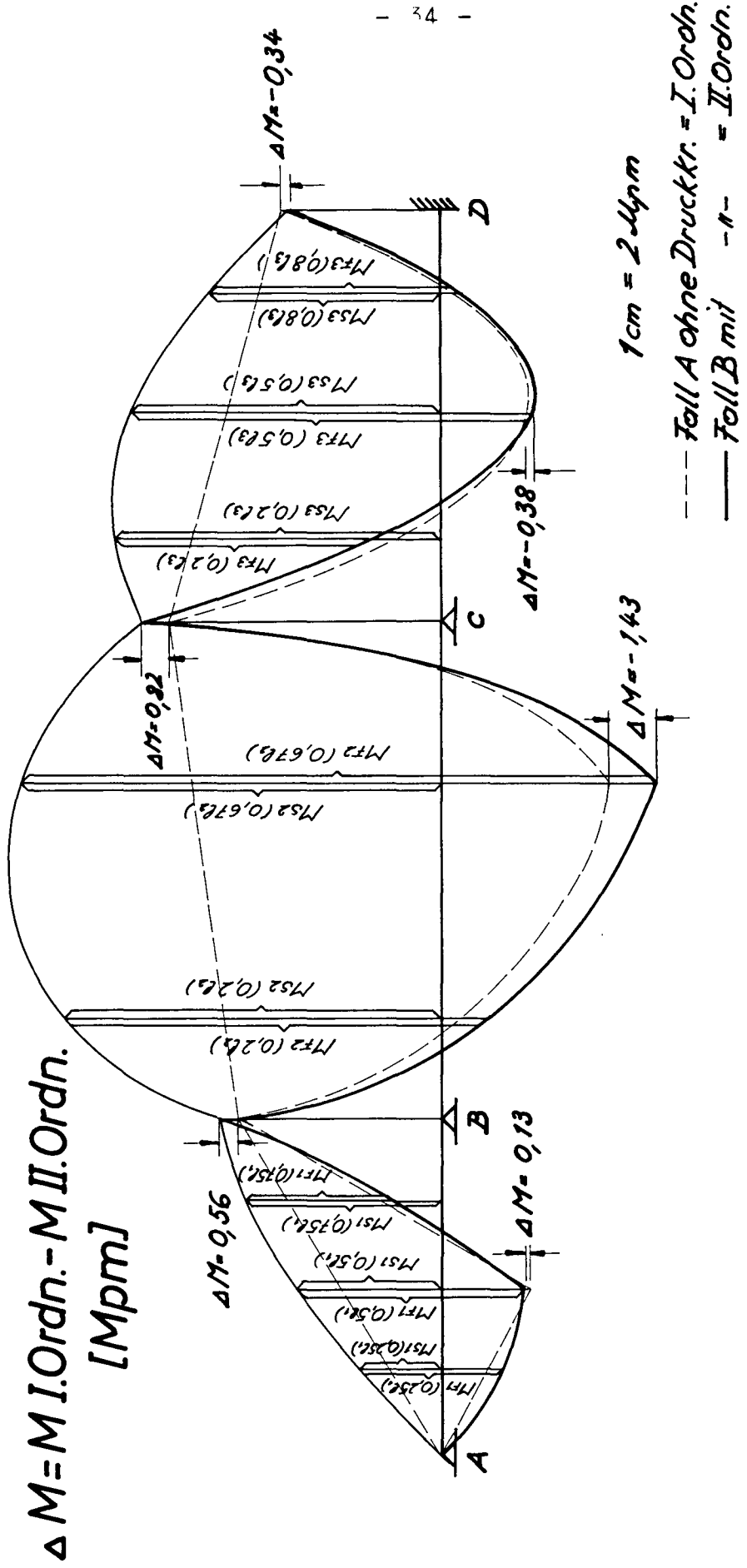
$$M_{S1B}(0,75l_1) = F_4(0,75l_1) \cdot M_B = 0,88 \cdot (-7,05) = -6,20 \text{ "}$$

Feldmomentenverlauf im Stab 1, Nachtrag zu f) Seite 33 unten

$$\begin{aligned} M_{F1}(0,25l_1) &= M_{F1}(0,5l_1) \cdot F_{16} \\ &= 7,2 \cdot 0,65 \\ &= 4,7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

F aus Diagramm Abb.25
mit $\alpha=0.5$

$$M_{F1}(0,75l_1) = M_{F1}(0,25l_1) \text{ wegen Symmetrie}$$



Biegemomentenverlauf

Abb. 27

Beispiel 2: K n i c k u n t e r s u c h u n g

Gegeben ist die Stabkonstruktion eines Lukenquersüßes, das durch ein Mittellängsschott unterstützt wird (Abb.28)

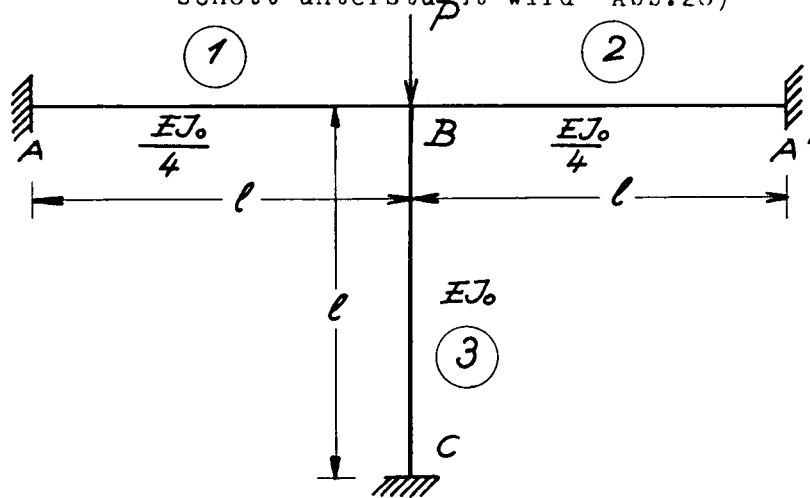


Abb.28

Die Konstruktion versagt, wenn eine Weiterleitungszahl gegen ∞ geht, d.h. wenn die Summe der Steifigkeiten verschwindet.

Am Knoten B lautet die Summe der Steifigkeiten

$$\frac{4 EJ_0}{4l} + \frac{4 EJ_0}{4l} + K^* \frac{EJ}{l} = 0$$

$$K^* = -2 \quad \text{aus Abb. 2} \quad \frac{\gamma^2}{\pi^2} = -2,55$$

$$\underline{\underline{P_{kritisch} = \frac{2,55 \pi^2 EJ_0}{l^2}}}$$

Das Beispiel gestaltet sich besonders einfach, da nur ein Freiheitsgrad vorhanden ist.

Beispiel 3: K n i c k l a s t des Durchlaufträgers aus Beisp.1

Die Berechnung der krit. Drucklast ist bekanntlich ein homogenes Problem, d.h. es sind keine Querlasten vorhanden. Um nun den üblichen Cross-Ausgleich durchzuführen, bringt man ein Hilfsmoment an einem beliebigen Knoten an und gleicht dieses unter Variierung der Drucklast aus.

Die Druckkraft, die den Cross-Ausgleich nicht mehr konvergieren läßt, ist die Knicklast.

Dieser Vorgang drückt sich so aus, daß das auszugleichende Moment des 2. Schnittes identisch ist mit dem auszugleichenden Moment des 1.

Der Quotient aus diesen beiden Momenten liefert, in Abhängigkeit von der Drucklast bei $r=M_0/M_1=1$, die gesuchte Knicklast. (Abb.29)

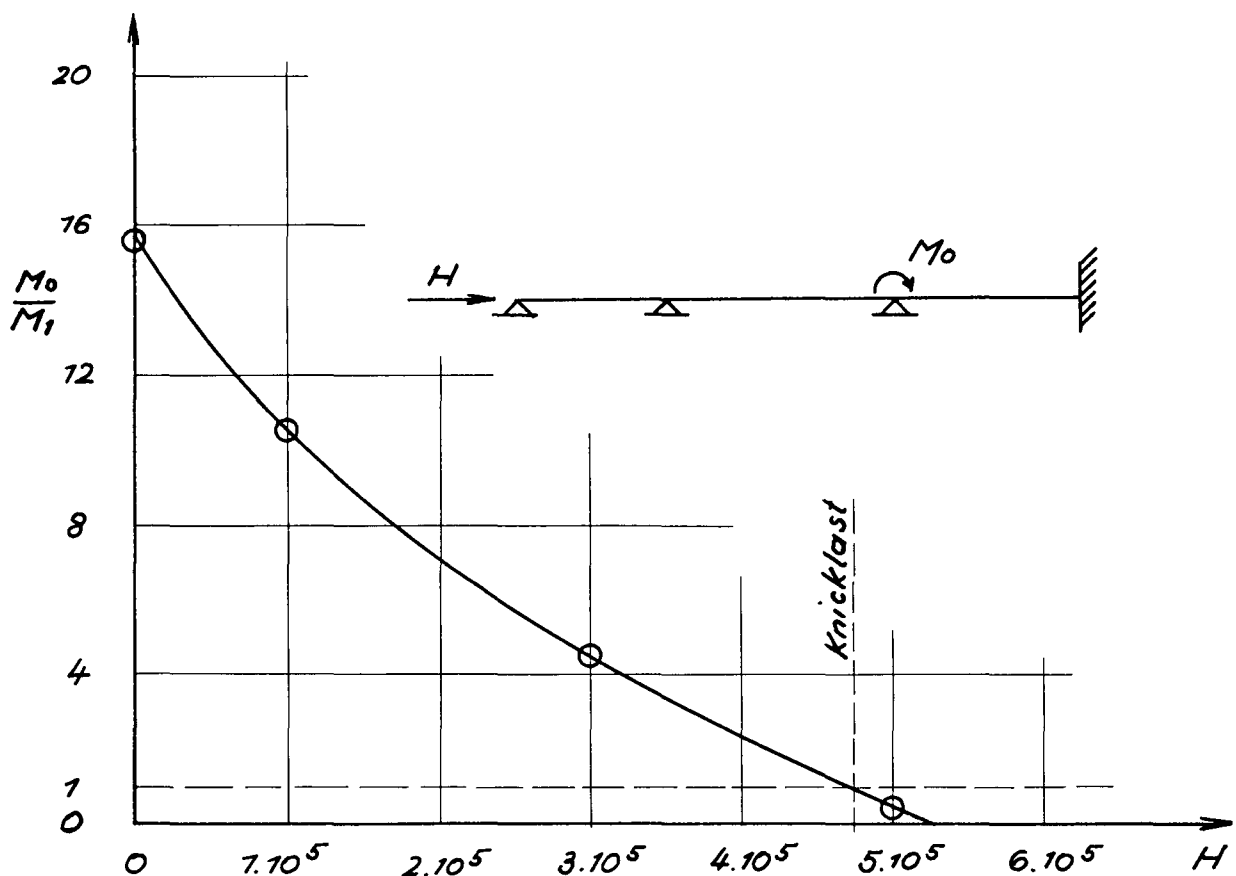
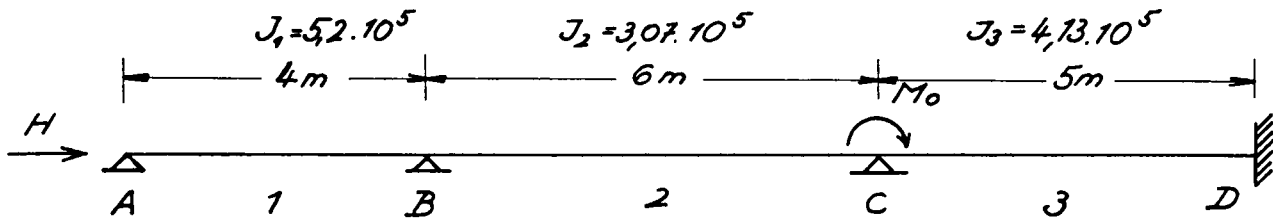


Abb.29

Cross-Ausgleiche



B		$0,62 \leftarrow$	$\rightarrow 0,62$	C		$\rightarrow 0,58$
1		2	2		3	3
0,45		0,55	0,46		0,54	
		-0,286	-0,46	1,0	1,0	-0,54
+0,129	-0,286	+0,157	+0,0975			-0,314

$H = 1 \cdot 10^6$

$$r = 10,25$$

B		$2,3 \leftarrow$	$\rightarrow 2,3$	C		$\rightarrow 1,2$
1		2	2		3	3
0,132		0,868	0,432		0,569	
		-1,0	-0,732	1,0	1,0	-0,569
+0,132	-1,0	+0,868	-2,0			-0,682

$H = 5 \cdot 10^5$

$$r = 0,50$$

B		$0,95 \leftarrow$	$\rightarrow 0,95$	C		$\rightarrow 0,80$
1		2	2		3	3
0,434		0,566	0,438		0,542	
		-0,416	-0,438	1,0	1,0	-0,542
-0,180	-0,416	+0,236	+0,224			

$H = 3 \cdot 10^5$

$$r = 4,46$$

L i t e r a t u r

- [1] Lehmann E. Einführung in die Matrizenstatik
 schiffbaulicher Tragwerke
 Handbuch der Werften Bd.11 1972

- [2] Gere J.M. Moment Distribution
 D.v.Norstaand Company, Inc. New York 1963

- [3] Lightfoot Moment Distribution
 E & F Spon Ltd. 1961

- [4] Pestel E. Matrix Methods in Engineering
 Leckie Mc.Graw Hill Book Comp. 1963