

56a | März 1959

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr. Hellmut H.E. Baumann

Rollresonanzen in seitlicher Dünung

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr.-Ing. G. Weinblum

Rollresonanzen in seitlicher Dünung

von

Dr. Hellmut H. E. Baumann

Hamburg, März 1959

Rollresonanzen in seitlicher Dünung

Dr. H. Baumann, Hamburg

1. Einleitung

Gefährliche Rollzustände haben bekanntlich eine Periode, die von der amplitudenabhängigen Eigenperiode des Schiffes wenig verschieden ist. Solche Resonanzzustände kommen dadurch zustande, daß die Dämpfung des Schiffes durch periodische Leistungszufuhr aus den Wellen aufgehoben wird, wobei jedoch die Periode der auftreffenden Wellen nicht mit der Rollperiode übereinzustimmen braucht. Das Schiff unterliegt im Seegang sowohl horizontalen als auch vertikalen Wechselbeschleunigungen; dem unterschiedlichen Mechanismus der damit verbundenen Leistungszufuhr entsprechend, sind in seitlicher Dünung zwei Arten von Rollzuständen möglich.

Als Rollzustände erster Art bezeichnen wir die Schwingungszustände eines Schiffes, welche durch die querschiffsgerichtete Wechselbeschleunigung bzw. die damit verbundene Schwankung der statischen Gleichgewichtslage erregt werden. Hier sind, wenn man von „multiplen Resonanzen“ absieht, Rollperiode und Wellenperiode einander gleich. Wieweit multiple Resonanzen, d. h. Resonanzen einer Oberwelle des bei großen Amplituden nicht sinusförmigen Rolloszillogramms mit einer entsprechend kurzen Wasserwelle, bei Schiffen zu erwarten sind, wird hier nicht erörtert. Wir beschränken vielmehr unsere Betrachtung der Rollzustände erster Art auf den bekannten Fall gleicher Periode von Schwingung und Erregung. — Wir werden hierfür im ganzen Stabilitätsumfang die Resonanzkurven und die Grenzkurve beständiger (d. i. dynamisch stabiler) Rollzustände unter Berücksichtigung eines geschwindigkeitsproportionalen, frequenzabhängigen Dämpfungsmoments berechnen und eine bequeme graphischen Konstruktion für diese Kurven angeben.

Als Rollzustände zweiter Art bezeichnen wir die bisher wenig beachteten Schwingungszustände eines Schiffes, welche durch die lotrechte Wechselbeschleunigung bzw. die damit verbundene Gewichtsschwankung „parameter-erregt“ werden.¹⁾ Hier ist, wenn man wieder von multiplen Resonanzen absieht, die Rollperiode doppelt so groß wie die Wellenperiode. Die Erregung wird also durch verhältnismäßig kurze Wellen bewirkt. —

Wir werden sehen,

1. daß Rollzustände zweiter Art erst auftreten können, wenn die Dünungsstärke eine durch die Rolldämpfung bestimmte Schwelle überschritten hat,
2. daß sie dann in einem kritischen Periodenintervall wirklich auftreten und
3. daß ihre Amplitude gefährliche Werte erreichen kann.

Wir werden auch für diese Rollzustände die Resonanzkurven berechnen und zeichnen sowie ihre Beständigkeit untersuchen.

Rollzustände zweiter Art sind übrigens auch bei vorlicher oder achterlicher Dünung möglich. Die am Schiff entlanglaufenden Wellen verursachen nämlich eine periodische Schwankung der Stabilität, welche in der Bewegungsgleichung

¹⁾ Eine der ersten einschlägigen Veröffentlichungen ist unter [9] des am Schluß dieser Arbeit aufgeführten Schrifttums zitiert worden.

als dieselbe Parameter-Erregung erscheint wie eine Gewichtsschwankung. Unsere Untersuchungen über Rollzustände zweiter Art gelten somit mutatis mutandis auch für diesen Erregungsfall.

Die Methode, mit der wir die wesentlich nichtlineare Bewegungsgleichung des Schiffes behandeln wollen, basiert auf physikalischen Erwägungen. Insbesondere verzichten wir bewußt auf eine in allen Einzelheiten genaue Erfassung der Dünung, wir charakterisieren diese nur durch ihre Periode und Stärke; über die Wellenform verfügen wir zu Gunsten mathematischer Bequemlichkeit. Dann müssen wir, besonders bei großen Rollamplituden, Wellenformen in Kauf nehmen, die nicht gerade Sinoiden oder Trochoiden sind, für welche jedoch eine exakte Zuordnung der Rollschwingung besteht. Auf Grund unserer Ansätze können wir die beiden Schwingungsarten des Schiffes auf das freie, ungedämpfte Rollen in ruhigem Wasser zurückführen. Für dessen amplitudenabhängige Grundfunktionen, nämlich die Periode und das Phasenumlaufintegral, werden wir gute Näherungsformeln angeben. Die allgemein geführten theoretischen Berechnungen werden wir auf zwei durch ihre Hebelarmkurven gegebene Schiffe anwenden.

2. Die Bewegungsgleichung

Wir beschreiben das Rollen eines Schiffes in seitlicher Dünung durch die Differentialgleichung²⁾

$$J' \cdot \ddot{\psi} + W(T_S) \cdot \dot{\psi} + [1 + \beta(t)] \cdot P \cdot h(\psi) = 0. \quad (1)$$

Dazu sind folgende Voraussetzungen und Bemerkungen nötig: (s. a. Bild 1) Die Wellenlänge λ der Dünung sei im Vergleich zur Schiffsbreite B groß genug, mindestens

$$\lambda > 4B. \quad (2)$$

Dann nimmt das Schiff an der Orbitalbewegung des Wassers teil und kann unter Beibehaltung seines Deplacements rollen.

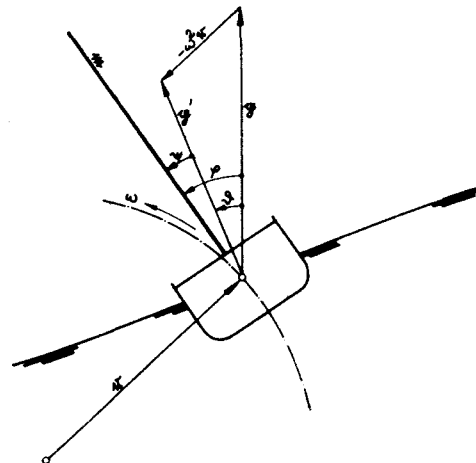


Bild 1 Zur Erläuterung der Bewegungsgleichung eines Schiffes in Dünung. τ = Orbitalradius, ω = dessen Winkelgeschwindigkeit, g = Lotvektor, g' = Scheinlotvektor

²⁾ Der Punkt über einem Größensymbol bedeutet, wie üblich, die Ableitung nach der Zeit. Auf ausführliche Bezeichnung der Funktionsargumente wird häufig verzichtet, wenn sie sich von selbst versteht. Eine Aufstellung der benutzten Bezeichnungen befindet sich am Ende der Arbeit.

Zusätzlich zur Schwerebeschleunigung unterliegt das Schiff noch der Orbitalbeschleunigung vom Betrage $r\omega^2$ (r = Orbitalradius, ω = dessen Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz). Der resultierende Vektor (Scheinlotvektor) schwankt periodisch sowohl in seiner Richtung als auch in seiner Größe. Die statische Gleichgewichtslage des Schiffes pendelt also um einen Winkel $\vartheta(t)$ gegen den Horizont; für dessen Amplitude, die wirksame Wellenschräge $\bar{\vartheta}$, gilt in einer Gerstnerschen Trochoidenwelle die Beziehung

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (3)$$

Bei einer Krängung ψ aus der jeweiligen statischen Gleichgewichtslage ist der Hebelarm $h(\psi)$ wegen (2) derselbe wie in ruhigem Wasser. Das Schiffsgewicht nimmt jedoch wegen der Größenschwankung des Scheinlotvektors einen veränderlichen Momentanwert

$$P' = [1 + \beta(t)] \cdot P \quad (4)$$

an, wobei $\beta(t)$ im Wellental positiv, auf dem Wellenberg negativ ist.

In sinusförmiger Dünung gilt

$$\vartheta(t) = \pm \omega \cdot \beta(t) \quad (5a)$$

(wo das Vorzeichen von der Fortschrittsrichtung abhängt) und

$$\vartheta^2(t) + \beta^2(t) = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^2}; \quad (5b)$$

also ist z. B. für die Standardwelle ($2r : \lambda = 1 : 20$)

$$|\bar{\vartheta}| = |\bar{\beta}| = \frac{\pi}{20} \approx 0,157. \quad (6)$$

Der Rollwinkel gegen den Horizont ist

$$\varphi(t) = \psi(t) + \vartheta(t). \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment J' des Schiffes sei konstant. Die Frequenzabhängigkeit seines hydrodynamischen Anteils kann vernachlässigt werden, solange die von dem rollenden Schiff ausgehende Welle die Voraussetzung (2) erfüllt.

Das Dämpfungsmoment $W(T_S)$ von Schiffen ist noch zu wenig erforscht, als daß man dafür einen analytischen Ausdruck angeben könnte. Es hängt in hydrodynamisch komplizierter Weise u. a. von der Schiffsförmigkeit, der Schwerpunktlage, der Rollperiode und den Augenblickswerten des Rollwinkels und der Winkelgeschwindigkeit ab. Wir berücksichtigen nur seine Abhängigkeit von der Rollperiode T_S und setzen es proportional der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ relativ zur Wasseroberfläche.

3. Die Grundfunktionen für das ungedämpfte Rollen in ruhigem Wasser

Als Grundlage für die Berechnung der erzwungenen Rollschwingungen betrachten wir das ungedämpfte Rollen in ruhigem Wasser. Wir setzen also

$$W = 0 \quad \text{und} \quad r = 0. \quad (8)$$

Dann sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ identisch — wir schreiben dafür $\psi_0(t)$ —, und die Bewegungsgleichung lautet

$$J' \cdot \ddot{\psi}_0 + P \cdot h(\psi_0) = 0. \quad (9)$$

Da hier keine Dämpfung wirkt, ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant:

$$\frac{1}{2} J' \cdot \dot{\psi}_0^2 + U(\varphi_0) = U(\bar{\psi}) \quad (10)$$

mit

$$U(\psi) = P \cdot \int h(\psi) \cdot d\psi, \quad U(0) = 0, \quad U(-\psi) = U(\psi). \quad (11)$$

Wir bilden nun drei, auch für die mathematische Behandlung der Rollzustände in Dünung wichtige Grundfunktionen der Amplitude, nämlich

- die Rollperiode,
 - das Phasenumlauf-Integral und daraus resultierend,
 - den Mittelwert der kinetischen Energie.
- a) Für das Zeitdifferential der freien Schwingung $\psi_0(t)$ folgt aus (10)

$$dt(\varphi_0) = \sqrt{\frac{1}{2} J'} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\psi)}}, \quad (12)$$

woraus sich für die Rollperiode in ruhigem Wasser das „uneigentliche“ Integral

$$T_0(\bar{\psi}) = \sqrt{\frac{1}{2} J'} \cdot 4 \cdot \int_0^{\bar{\psi}} \frac{d\psi}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\psi)}} \quad (13)$$

ergibt.

Eine analytisch geschlossene Form dieses, für das dynamische Verhalten eines Schiffes grundlegenden Integrals ist nur in Sonderfällen möglich. So läßt sich die Amplitudenfunktion

$$\tau(\bar{\psi}) \equiv \frac{T_0(\bar{\psi})}{T_0(0)}, \quad (14)$$

wo

$$T_0(0) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J'}{P \cdot M_0 G}} \quad (15)$$

die Rollperiode für kleine Amplituden ist, bekanntlich mittels des Vollständigen Elliptischen Integrals

$$K \equiv \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 x^2)}} \\ = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{264} k^6 + \dots \right) \quad (16)$$

darstellen, wenn die Hebelarmkurve entweder sinusförmig verläuft oder eine kubische Parabel ist. Für

$$h^I(\psi) = h_{\max} \cdot \sin \frac{\pi\psi}{\psi_u} \quad (17)$$

gilt nämlich

$$\tau^I(\bar{\psi}) = \frac{2}{\pi} K, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\pi\bar{\psi}}{2\psi_u}; \quad (18)$$

und für

$$h^{II}(\psi) = \overline{M_0 G} \cdot \psi \cdot \left[1 - \left(\frac{\psi}{\psi_u} \right)^2 \right] \quad (19)$$

gilt

$$\tau^{II}(\bar{\psi}) = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2}{\pi} K, \quad k^2 = \frac{\bar{\psi}^2}{2\psi_u^2 - \bar{\psi}^2}. \quad (20)$$

Da jedoch die numerische oder planimetrische Auswertung des Integrals (13) wegen des bei $\psi = \bar{\psi}$ verschwindenden Nenners im allgemeinen Schwierigkeiten bereitet, transformieren wir es mit dem Ansatz

$$\psi_0(t) = \bar{\psi} \cdot \sin \alpha(t), \quad (21)$$

d. h. wir stellen das Oszillogramm der Schwingung als Projektion eines Bildpunktes dar, welcher auf dem Kreis mit dem Radius $\bar{\psi}$ ungleichförmig, aber periodisch umläuft. Für die stets positive Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus (10) der Ausdruck

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{J'} \cdot \frac{U(\bar{\psi}) - U(\psi_0)}{\bar{\psi}^2 - \psi_0^2}. \quad (22)$$

Die Rollperiode kann nun offenbar in der Gestalt

$$T_0(\bar{\psi}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} \quad (23)$$

oder, bei Einführung der Periode kleiner Schwingungen (15) und Wahrnehmung der Symmetrie von (22) auch in Gestalt der Amplitudenfunktion

$$\tau(\bar{\psi}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot \overline{M_0 G} \cdot (\bar{\psi}^2 - \psi_0^2)}{U(\bar{\psi}) - U(\psi_0)}} \cdot d\alpha \quad (24)$$

angeschrieben werden. Der Integrand

$$w(\bar{\psi}, \psi) \equiv \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot \overline{M_0 G} \cdot (\bar{\psi}^2 - \psi_0^2)}{U(\bar{\psi}) - U(\psi_0)}} \quad (25)$$

nimmt auf den Grenzen des Integrationsintervalls die Werte

$$w(0, \bar{\psi}) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot \overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}^2}{U(\bar{\psi})}} \text{ bzw. } w(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = \sqrt{\frac{\overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}}{h(\bar{\psi})}} \quad (26)$$

an und verläuft im Innern regulär. Da sein Differentialquotient

$$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{dw}{d\psi_0} \cdot \frac{d\psi_0}{d\alpha} \quad (27)$$

für $\psi_0 = 0$ und $\alpha = \pi/2$ verschwindet, sind die Werte (26) Extrema. Solange nun die Hebelarmkurve einseitig gekrümmt (unterlinear oder überlinear) verläuft, ist $w(\psi_0, \bar{\psi})$ im Integrationsintervall monoton, und die Werte (26) sind die absoluten Extrema. Das Verhältnis

$$q(\bar{\psi}) \equiv \frac{w(\bar{\psi}, \bar{\psi})}{w(0, \bar{\psi})} = \sqrt{\frac{2 U(\bar{\psi})}{\bar{\psi} \cdot P \cdot h(\bar{\psi})}} \quad (28)$$

ist für eine sinusförmige und eine empirisch gegebene (anfangs überlineare) Hebelarmkurve in Bild 2 dargestellt worden. Die Auftragung zeigt, daß sich $q(\bar{\psi})$ erst bei beträchtlichen Rollamplituden um mehr als etwa 20% von 1 unterscheidet, daß also der Integrand (25) noch bei mittleren Amplituden auf ein verhältnismäßig enges Intervall beschränkt ist. Infolgedessen kann der in (24) geforderte Mittelwert des Integranden numerisch oder planimetrisch leicht gebildet werden. Bei einseitig gekrümmter Hebelarmkurve liefert bereits das arithmetische Mittel der Extrema (26) für nicht allzu große Amplituden eine gute Näherung³⁾.

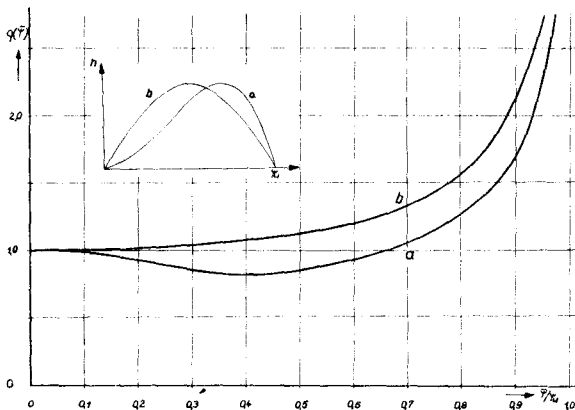


Bild 2 Die Amplitudenfunktion $q(\bar{\psi})$ bei Rollschwingungen gemäß Bild 3a bzw. 3b

³⁾ Es weicht beispielsweise bei den folgenden Hebelarmkurven um weniger als 1 Prozent von dem exakten Wert ab, solange $\bar{\psi} < \frac{2}{3} \psi_{II}$ ist:

$$h^I(\psi) = h_{\max} \cdot \sin \frac{\pi \cdot \psi}{\psi_{II}}, \quad h^{II}(\psi) = \overline{M_0 G} \cdot \psi \cdot \left[1 - \left(\frac{\psi}{\psi_{II}} \right)^2 \right]$$

$$h^{III}(\psi) = \overline{M_0 G} \cdot \psi \cdot \left[1 - \left(\frac{\psi}{\psi_{II}} \right)^4 \right]$$

Wir können dann die Rollperiode in ruhigem Wasser durch die algebraische Näherungsformel

$$\tau(\bar{\psi}) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot \overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}^2}{U(\bar{\psi})}} + \sqrt{\frac{\overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}}{h(\bar{\psi})}} \right) \quad (29)$$

also mittels der Verhältnisse zwischen den Flächen unter der Anfangstangente der Hebelarmkurve und unter der Kurve selbst sowie zwischen den betr. Ordinaten im Schwingungsumkehrpunkt $\bar{\psi}$, darstellen.

Die Bilder 3a und 3b zeigen die Vierteloszillogramme der freien Rollschwingung bei verschiedenen Amplituden, und zwar a) für ein Schiff mit sinusförmiger sowie b) für ein Schiff mit anfänglich überlinearer Hebelarmkurve. Die Verbindungskurve der Maxima stellt die Abhängigkeit der Eigenperiode von der Rollamplitude dar.

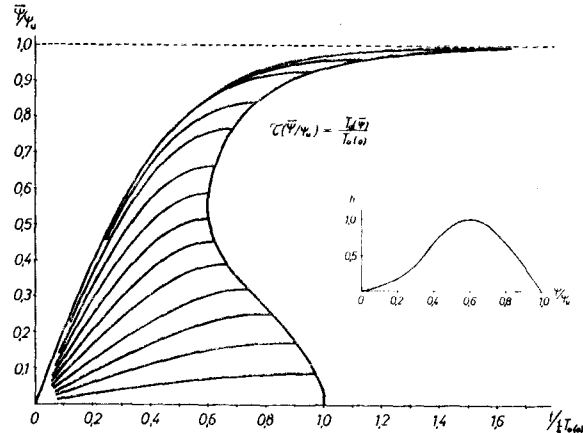


Bild 3a Vierteloszillogramme und Viertelperioden eines Schiffes mit Zusatzstabilität, abhängig von der Rollamplitude

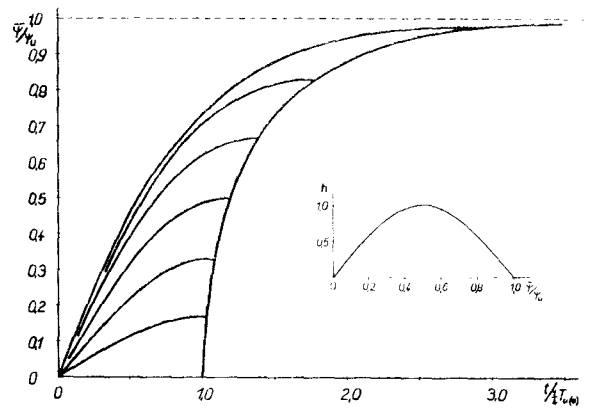


Bild 3b Vierteloszillogramme und Viertelperioden eines Schiffes mit sinusförmiger Hebelarmkurve, abhängig von der Rollamplitude

b) Das normierte Phasenintegral

$$\Phi(\bar{\psi}) \equiv \frac{1}{\pi \bar{\psi}} \cdot \sqrt{\frac{J'}{2 U(\bar{\psi})}} \cdot \oint \phi_0 d\phi_0, \quad (30)$$

welches bei linearem Hebelarmverlauf den Wert 1 hat, kann leicht planimetrisch gewonnen werden. In Bild 4 sind die $\Phi(\bar{\psi})$ -Kurven der beiden den Bildern 3a und 3b zugrunde liegenden Schiffstypen wiedergegeben worden. Wir wollen jedoch auch hierfür eine algebraische Näherungsformel angeben. Mit dem Ansatz (21) nimmt der Ausdruck (30) die Gestalt

$$\Phi(\bar{\psi}) = \sqrt{\frac{J'}{2 U(\bar{\psi})}} \cdot \frac{\bar{\psi}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot d\alpha \quad (31)$$

an, wo $\dot{\alpha}$ wieder durch (22) gegeben ist. Die bei $\alpha = 0, \pi/2, \pi$ usw. liegenden Extrema betragen also

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(\pi) = \dot{\alpha}(2\pi) &= \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi})}{J' \cdot \bar{\psi}^2}} \\ \dot{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{\alpha}\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{1}{q(\bar{\psi})} \cdot \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi})}{J' \cdot \bar{\psi}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

mit $q(\bar{\psi})$ gemäß Gl. (28).

Im Falle einseitig gekrümmter Hebelarmkurve, wo $\dot{\alpha}(\alpha)$ monoton zwischen diesen Werten verläuft, setzen wir näherungsweise

$$\dot{\alpha}(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi})}{J' \cdot \bar{\psi}^2}} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{q(\bar{\psi})}\right) + \left(1 - \frac{1}{q(\bar{\psi})}\right) \cdot \cos 2\alpha \right] \quad (33)$$

und erhalten aus (31) den algebraischen Ausdruck

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\psi}) &\approx \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{q(\bar{\psi})}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{q(\bar{\psi})}\right) \\ &\approx \frac{3}{4} + \frac{1}{4q(\bar{\psi})} \end{aligned} \quad (34)$$

Werte dieses Ausdrucks sind in Bild 4 eingetragen worden.

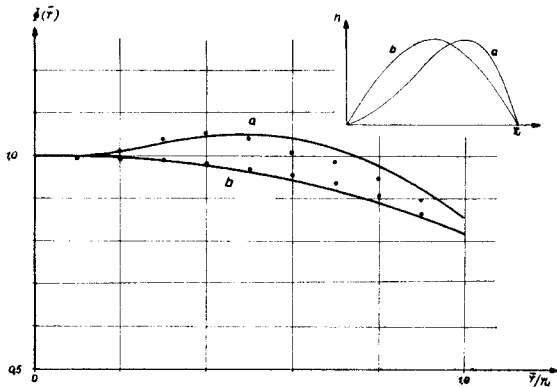


Bild 4 Die Phasenumlaufintegrale $\Phi(\bar{\psi})$ und die Näherungswerte nach Formel (34) bei Rollschwingungen gemäß Bild 3a bzw. 3b

c) Wir betrachten nun noch das über die Periode der freien Schwingung erstreckte normierte Mittel der kinetischen Energie

$$\eta_0(\bar{\psi}) \equiv \frac{2}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} \left(1 - \frac{U(\psi_0)}{U(\bar{\psi})}\right) \cdot dt \quad (35)$$

Auf diese, im allgemeinen von Hebelarmverlauf und Amplitude abhängige Größe wird im folgenden wiederholt Bezug genommen. Sie ist so normiert, daß sich bei linearem Hebelarm, also vorzugsweise bei kleinen Amplituden, der Wert 1 ergibt. Es ist leicht einzusehen, daß bei überlinearem Verhalten der Hebelarmkurve wegen des kürzeren Aufenthalts im Bereich kleiner Geschwindigkeiten (Umkehrpunkte) $\eta_0(\bar{\psi}) > 1$, bei unterlinearem Verhalten dagegen $\eta_0(\bar{\psi}) < 1$ wird und bei Annäherung der Rollamplitude an die Grenze des Stabilitätsbereichs $\eta_0(\bar{\psi})$ dem Wert null zustrebt. — Eine obere Schranke für $\eta_0(\bar{\psi})$ kann leicht aus der Betrachtung der Energiekurve $U(\psi_0)$ gewonnen werden, wenn man die Schar der Parabeln n-ten Grades

$$U_n(\psi) = \alpha_n \cdot |\psi^n|, \quad n \geq 2 \quad (36)$$

ins Auge faßt. Mit $x = \psi/\bar{\psi}$ und Benutzung von (12) und (13) nimmt nämlich der Ausdruck (35) die Gestalt

$$\eta_{0,n} = \frac{I_n}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}} \quad (37)$$

an, in welcher die Amplitude $\bar{\psi}$ nicht mehr erscheint und wo

$$\begin{aligned} I_n &= 2 \cdot \int_0^1 (1-x^n) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} - 2 \cdot \int_0^1 \frac{x^n \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}} \end{aligned} \quad (38a)$$

oder auch

$$I_n = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-x^n} \cdot dx = 2x \cdot \sqrt{1-x^n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{n \cdot x^n \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}} \quad (38b)$$

ist. Bei Elimination des letzten Terms von (38a) und (38b) wird

$$I_n = \frac{2n}{n+2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \quad (39)$$

und somit

$$\eta_{0,n} = \frac{2n}{n+2} \quad (40)$$

Mit wachsendem Exponenten n strebt also $\eta_{0,n}$ gegen den Grenzwert 2. Dieser hat jedoch für Schiffe schon keine Bedeutung mehr; er entspricht einem Körper, der sich über eine gewisse Strecke frei bewegen kann, aber an deren Enden hart reflektiert wird. Als höchster Exponent der Energiekurve eines Schiffes dürfte $n = 6$ genügen, woraus dann $\eta_{0,n} \leq 1,5$ folgt. Wir können also für Schiffe

$$0 \leq \eta_0(\bar{\psi}) \leq \eta_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{im unterlinearen Fall} \\ 1,5 & \text{im überlinearen Fall} \end{cases} \quad (41)$$

setzen.

Bild 5 gibt die $\eta_0(\bar{\psi})$ -Kurven zweier Schiffstypen. Sie sind mit Hilfe der Identität

$$\tau(\bar{\psi}) \cdot \eta_0(\bar{\psi}) \equiv \Phi(\bar{\psi}) \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot \overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}^2}{U(\bar{\psi})}}, \quad (42)$$

welche aus der Energiegleichung (10) leicht beweisbar ist, aus den planimetrierten $\Phi(\bar{\psi})$ -Werten (Bild 4) und den $\tau(\bar{\psi})$ -Werten der Bilder 3a und 3b gebildet worden. Wenn man für $\Phi(\bar{\psi})$ und $\tau(\bar{\psi})$ die Näherungsformeln (34) und (29) sowie die Beziehung (28) benutzt, kann man im Bereich einseitig gekrümmter Hebelarmkurven noch

$$\eta_0(\bar{\psi}) \approx \frac{1}{1+q(\bar{\psi})} + \frac{1}{2q(\bar{\psi})} \quad (43)$$

schreiben. Nach dieser Formel errechnete Näherungswerte sind in Bild 5 eingetragen worden.

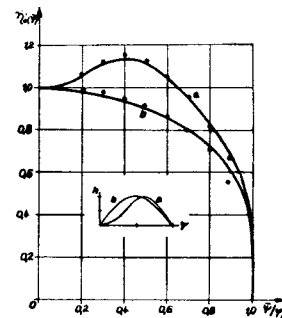


Bild 5 Die Amplitudenfunktion $\eta_0(\bar{\psi})$ und Näherungswerte nach Formel (43) bei Rollschwingungen gemäß Bild 3a bzw. 3b

4. Die stationären Rollzustände in seitlicher Dünung

Wir beschränken unsere Betrachtungen auf stationäre Rollzustände der Periode T_S . Wir setzen also voraus, daß

$$\psi(t + T_S) \equiv \psi(t) \quad (44)$$

sei. Aus der Bewegungsgleichung (1) erhalten wir dann durch Multiplikation mit $\psi(t)$ bzw. $\dot{\psi}(t)$ und Integration über eine Rollperiode unter Berücksichtigung von (7) die beiden Gleichungen

$$\int_0^{T_S} J' \cdot \ddot{\psi} \cdot \psi \cdot dt + \int_0^{T_S} W(T_S) \cdot \psi^2 \cdot dt + \int_0^{T_S} \beta \cdot P \cdot h(\psi) \cdot \psi \cdot dt = 0 \quad (45)$$

bzw.

$$\int_0^{T_S} J' \cdot \ddot{\psi} \cdot \dot{\psi} \cdot dt + \int_0^{T_S} [J' \cdot \dot{\psi} + P \cdot h(\psi)] \cdot \dot{\psi} \cdot dt + \int_0^{T_S} \beta \cdot P \cdot h(\psi) \cdot \psi \cdot dt = 0 \quad (46)$$

Diese geben über die zeitliche Zuordnung von Erregung und Schwingung Aufschluß.

a) Periodenbeziehungen

Das zweite Integral der Gleichung (45) stellt die Dissipation dar; es ist stets positiv. Infolgedessen müssen die beiden anderen Integrale in dieser Gleichung einzeln oder zusammen negativ sein, d. h. die entsprechende Anfachung ergeben. Das zweite Integral der Gleichung (46) verschwindet, wenn das Oszillogramm $\psi(t)$ die für das ungedämpfte Rollen in ruhigem Wasser gültige Beziehung (9) erfüllt, wenn also das Schiff mit seiner Eigenperiode rollt. Dies Integral ist demnach ein Maß für die Verstimmung, welche die beiden anderen Integrale der Gleichung (46) einzeln oder gemeinsam bewirken müssen, damit das Schiff mit einer der Erregung entsprechenden Periode T_S rollt. Bezeichnen wir nun mit T_W die Periode der Dünungswellen und mit $1/n \cdot T_S$ die Teilperioden des im allgemeinen nicht sinusförmigen Oszillogramms $\psi(t)$, so liefert die Forderung, daß die ersten Integrale der Gleichungen (45) und (46) nicht verschwinden, übereinstimmend die Periodenbedingung

$$\frac{1}{n} \cdot T_S = T_W \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (47)$$

Entsprechend liefert die Forderung, daß die dritten Integrale nicht verschwinden, übereinstimmend die Periodenbedingung

$$\frac{1}{2n'} \cdot T_S = T_W \quad n' = 1, 3, 5, \dots \quad (48)$$

Es gibt also unendlich viele Werte n und n' , welche diese Bedingungen erfüllen. Wir wollen jedoch die „multiplen Resonanzen“ nicht näher betrachten; wir berücksichtigen daher nur die Werte $n, n' = 1$.

Dann verbleiben für die stationären Rollzustände in seitlicher Dünung die beiden einander ausschließenden Periodenbedingungen

$$T_S = T_W \quad \text{oder} \quad T_S = 2 T_W \quad (49) \quad (50)$$

b) Phasenerlegung

Die Gleichungen (45) und (46) bestimmen auch die Phase zwischen den Bewegungen der Welle und des Schiffes. Die Multiplikatoren $\dot{\psi}(t)$ und $\psi(t)$ schließen einen Phasenwinkel von 90° ein, es ist

$$\int_0^{T_S} \dot{\psi} \cdot \psi \cdot dt = 0.$$

Wir zerlegen die Erregung in zwei ebenfalls um 90° phasenverschobene Summanden:

$$\vartheta(t) = \vartheta_w(t) + \vartheta_b(t) \quad \text{bzw.} \quad \beta(t) = \beta_w(t) + \beta_b(t) \quad (51)$$

und bezeichnen als Wirkerregung denjenigen, welcher nur zu den Anfachungsintegralen (45) einen Beitrag leistet, für welchen also

$$\int_0^{T_S} \vartheta_w \cdot \psi \cdot dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{T_S} \beta_w \cdot h(\psi) \cdot \psi \cdot dt = 0 \quad (52)$$

gilt, und als Blinderregung denjenigen, welcher nur zu den Verstimmungsintegralen (46) einen Beitrag leistet, für welchen also

$$\int_0^{T_S} \vartheta_b \cdot \dot{\psi} \cdot dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{T_S} \beta_b \cdot h(\psi) \cdot \dot{\psi} \cdot dt = 0 \quad (53)$$

gilt. Unter der Bedingung (49) können dann die Gleichungen (45) und (46) in der vereinfachten Gestalt

$$\int_0^{T_S} [J' \cdot \ddot{\psi}_w + W(T_S) \cdot \psi_1] \cdot \psi_1 \cdot dt = 0 \quad (54)$$

$$\int_0^{T_S} [J' \cdot \ddot{\psi}_b + J' \cdot \dot{\psi}_1 + P \cdot h(\psi_1)] \cdot \psi_1 \cdot dt = 0 \quad (55)$$

angeschrieben werden. Die Bedingung (50) hingegen gestattet die Schreibweise

$$\int_0^{T_S} [W(T_S) \cdot \psi_2 + \beta_w \cdot P \cdot h(\psi_2)] \cdot \psi_2 \cdot dt = 0 \quad (56)$$

$$\int_0^{T_S} [J' \cdot \dot{\psi}_2 + (1 + \beta_b) \cdot P \cdot h(\psi_2)] \cdot \psi_2 \cdot dt = 0. \quad (57)$$

c) Zwei Arten von Rollzuständen

Wir werden also bei seitlicher Dünung zwei Arten von Rollzuständen, $\psi_1(t)$ oder $\psi_2(t)$, betrachten.

Die Rollzustände erster Art werden durch die mit der Dünung verbundene periodische Horizontalbeschleunigung $b_h(t) = \vartheta(t) \cdot g$ erregt; ihre Periode ist gleich der Dünungsperiode. — Die Rollzustände zweiter Art werden durch die mit der Dünung verbundene periodische Vertikalbeschleunigung $b_v(t) = \beta(t) \cdot g$ erregt; ihre Periode ist doppelt so lang wie die Dünungsperiode.

Die Voraussetzung (2) wird im ersten Fall gut erfüllt. Wenn man nämlich nach Kempf [6] die Rollzahl

$$R = T_S \cdot \sqrt{\frac{g}{B}} \quad (58)$$

mit mindestens 8 ansetzt, so ergibt sich für die Rollzustände erster Art

$$\lambda > 10 B \quad (59)$$

Für die Rollzustände zweiter Art muß im Sinne unserer Voraussetzung (2)

$$R > 10 \quad (60)$$

angenommen werden; wir müssen also sehr steife Schiffe von der Betrachtung dieser Rollzustände ausschließen.

Im Falle multipler Resonanzen müßte R noch größer angenommen werden: z. B. $R > 15$ für $T_S = 3 T_W$; $R > 30$ für $T_S = 6 T_W$.

5. Die Rollzustände erster Art, $T_S = T_W$

Da die periodische Vertikalbeschleunigung $\beta(t) \cdot g$ bei Rollzuständen erster Art zu den Gleichungen (45) und (46) keinen Beitrag leistet, ist sie hier physikalisch unwesentlich. Wir setzen daher vorerst $\beta(t) \equiv 0$ und erörtern den Einfluß der Vertikalbeschleunigung nachträglich.

Wir betrachten also jetzt die Bewegungsgleichung

$$J' \cdot \ddot{\varphi}_1 + W(T_S) \cdot \psi_1 + P \cdot h(\psi_1) = 0, \quad (61)$$

welche durch die Phasenzerlegung (51) in die beiden phasenreinen Beziehungen

$$J' \cdot \ddot{\vartheta}_w + W(T_S) \cdot \psi_1 = + N_1(t) \quad (62)$$

$$J' \cdot (\ddot{\vartheta}_b + \ddot{\psi}_1) + P \cdot h(\psi_1) = - N_1(t) \quad (63)$$

aufgespalten wird. Auch das Moment $N_1(t)$ liefert weder zur Anfandung noch zur Verstimmung des Schiffes einen Beitrag, da wegen (54) und (55)

$$\int_0^{T_S} N_1 \cdot \psi_1 \cdot dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{T_S} N_1 \cdot \psi_1 \cdot dt = 0 \quad (64) \quad (65)$$

ist. Es ist eine Oberwellencombination, über die wir noch in gewissen Grenzen verfügen können.

Wir kennzeichnen nun die Dünung nur durch ihre Periode T_W und ihre wirksame Wellenschräge ϑ . Die genaue Wellenform berücksichtigen wir nicht; vielmehr verfügen wir über den Verlauf der Scheinlotneigung $\vartheta(t)$ derart, daß $N_1(t)$ identisch verschwindet, und daß die Beziehung (63) bequem zu integrieren ist.

a) Amplitudenbeziehungen

Für die Wirkerregung $\vartheta_w(t)$ liefert dann die Beziehung (62) bei zweimaliger Integration unter der Nebenbedingung

$$\int_0^{T_W} \vartheta_w \cdot dt = 0 \quad (66)$$

den Ausdruck

$$\vartheta_w(t) = - \frac{W(T_S)}{J'} \int \psi_1(t) \cdot dt. \quad (67)$$

Mit Hilfe des Formfaktors

$$F(\bar{\psi}) = \frac{2\pi}{\bar{\psi} \cdot T_S} \int_0^{1/4 T_S} \psi_1(t) \cdot dt \quad (68)$$

[$\psi_1(0) = 0$, $\psi_1(1/4 T_S) = \bar{\psi}$], dessen Werte für die Oszillogrammformen der Bilder 3a und 3b in Bild 6 über den Amplituden aufgetragen sind, können wir die Wirkamplitude in der Gestalt

$$\bar{\vartheta}_w = F(\bar{\psi}) \cdot D(T_S) \cdot \bar{\psi} \quad (70)$$

mit

$$D(T_S) = \frac{T_S \cdot W(T_S)}{2\pi J'} \quad (71)$$

anschreiben. Wie Bild 6 zeigt, kann praktisch $F = 1$ gerechnet werden, zumindest, solange man den Dämpfungsgrad $D(T_S)$ nicht genauer erforscht hat. Die Bilder 7 und 8 zeigen Beispiele für die Größe von D .

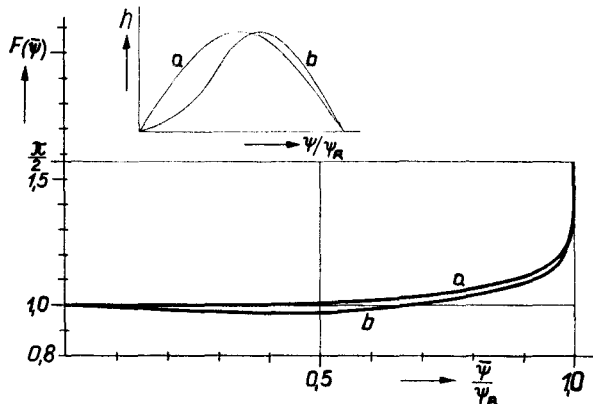


Bild 6 Der Formfaktor $F(\bar{\psi})$ der in Bild 3a und 3b gezeigten Schwingungsformen

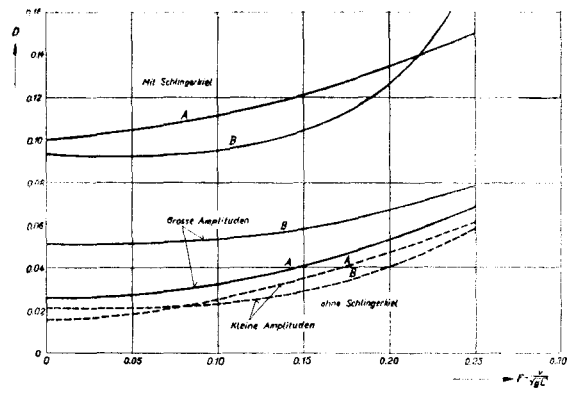


Bild 7 Zusammenstellung von an fahrenden Modellen gemessenen Dämpfungswerten nach Weinblum und St. Denis [10]

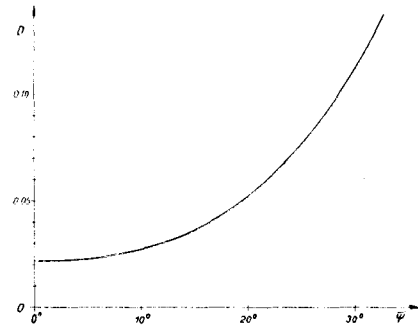


Bild 8 Abhängigkeit der Dämpfungswerte von der Rollamplitude nach Grim [11]

Für die Blinderregung $\vartheta_b(t)$ machen wir den Ansatz, daß ihr Oszillogramm demjenigen der Rollbewegung $\psi_1(t)$ formgleich sei, wir setzen also

$$\ddot{\vartheta}_b(t) = \frac{\bar{\vartheta}_b}{\bar{\psi}} \cdot \ddot{\psi}_1(t) \quad (72)$$

und erhalten aus (63) die Differentialgleichung

$$J' \cdot \left(1 + \frac{\bar{\vartheta}_b}{\bar{\psi}} \right) \cdot \ddot{\psi}_1 + P \cdot h(\psi_1) = 0, \quad (73)$$

welche sich von (9) nur durch den Trägheitsfaktor unterscheidet. Gegenüber der Eigenperiode des Schiffes in ruhigem Wasser tritt also hier der Verstimmungsfaktor

$$\frac{T_S}{T_o(\bar{\psi})} = \sqrt{1 + \frac{\bar{\vartheta}_b}{\bar{\psi}}} \quad (74)$$

auf, welcher je nach der Phase zwischen $\vartheta_b(t)$ und $\psi_1(t)$ größer oder kleiner als 1 ist. Für die Blindamplitude folgt daraus mit $T_S = T_W$ die Beziehung

$$\bar{\vartheta}_b = \left(\frac{T_W^2}{T_o^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \bar{\psi}. \quad (75)$$

Also ist

$$\vartheta_b(t) = \left(\frac{T_W^2}{T_o^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \cdot \psi_1(t). \quad (76)$$

b) Die Form der Dünungswellen

Aus den Gleichungen (67) und (76) ergibt sich nun die unserem Ansatz zugrunde liegende Wellenform, für welche die aufgestellten Gleichungen exakt gelten. Das Oszillogramm der Blinderregung hat nämlich bis auf den Streckungsfaktor (74) denselben Verlauf wie dasjenige der ungedämpften Rollbewegung $\psi_0(t)$ in ruhigem Wasser. Wegen (46) dominiert die Blinderregung außerhalb der Resonanz. Hier ist aber die Rollamplitude und somit der Oberwellengehalt gering. Das Oszillogramm der Wirkerregung hingegen zeigt den Verlauf der Integralkurve zu $\psi_0(t)$; die Amplituden seiner n-ten Oberwellen sind also auf den n-ten Teil reduziert. Allerdings dominiert

die Wirkerregung wegen (45) in Resonanznähe, wo $\psi_0(t)$ wegen der größeren Rollamplituden stärkere Oberwellen enthält (Bilder 3a und 3b).

Die Form der Dünungswellen kann schließlich wiederum durch Integration aus dem Oszillogramm der Wellenneigung $\vartheta(t)$ gewonnen werden, wobei der Oberwellengehalt weiter reduziert wird. Sie ist also außerhalb der Resonanz durch einmalige Integration des Grundoszillogramms $\psi_0(t)$ kleiner Amplitude darstellbar, in der Resonanzumgebung durch zweimalige Integration des Grundoszillogramms großer Amplitude. Die Abweichung der unserem Ansatz zugrunde liegenden Wellenform vom Sinusprofil dürfte daher im Rahmen des auf See Definierbaren liegen.

c) Die Resonanzkurven

Wir können nun für ein gegebenes Schiff nach Ermittlung der Grundfunktion $T_0(\bar{\psi}) = 2\pi/v_0(\bar{\psi})$ die Resonanzkurven $\bar{\psi}(\omega^2, \bar{\vartheta})$, also die Rollamplitude $\bar{\psi}$ über dem Quadrat der Erregerfrequenz $\omega = 2\pi/T_w$ mit der wirksamen Wellenschräge $\bar{\vartheta}$ als Parameter, leicht graphisch ermitteln. Wenn nämlich in einem $\omega^2, \bar{\psi}$ -Plan die Skelettkurve $\bar{\psi}(v_0^2)$ vorliegt, liefert eine einfache Anwendung des Strahlensatzes aus der mit (75) identischen Proportion

$$v_0^2(\bar{\psi}) : \omega^2 = (\bar{\psi} + \bar{\vartheta}_b) : \bar{\psi} \quad (77)$$

zu jedem Wertepaar $\bar{\psi}, \bar{\vartheta}_b$ den passenden Wert ω^2 . Wir können also, wenn die Blindamplitude $\bar{\vartheta}_b$ bekannt ist, eine beliebige dichte Folge von Punkten $(\omega^2, \bar{\psi})$ der Resonanzkurve konstruieren. Die in Bild 9 mit (2) bezeichnete Partie möge das Verfahren erläutern.

Im idealisierten Fall eines Schiffes ohne Dämpfung ist $\bar{\vartheta}_b = \pm \bar{\vartheta}$ zu setzen, wobei entsprechend den beiden möglichen Pha-

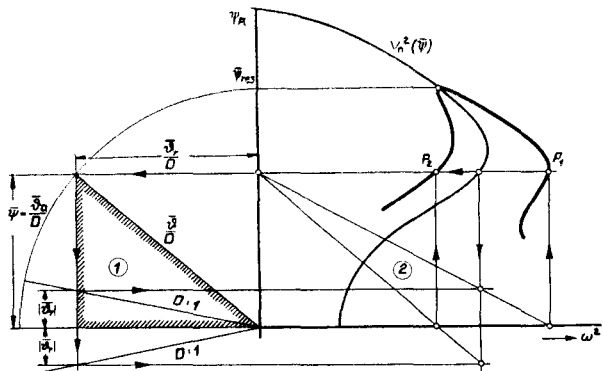


Bild 9 Konstruktion zweier Punkte P_1 und P_2 der Resonanzkurven für Rollzustände erster Art aus der Skelettkurve und der Dämpfung. Die Operation (1) liefert die Blinderregungsamplitude $\pm |\bar{\vartheta}_b|$ aus der Amplitude $\bar{\psi}$ und der Dämpfung D . Die zugehörigen Frequenzen ergeben sich aus der Operation (2)

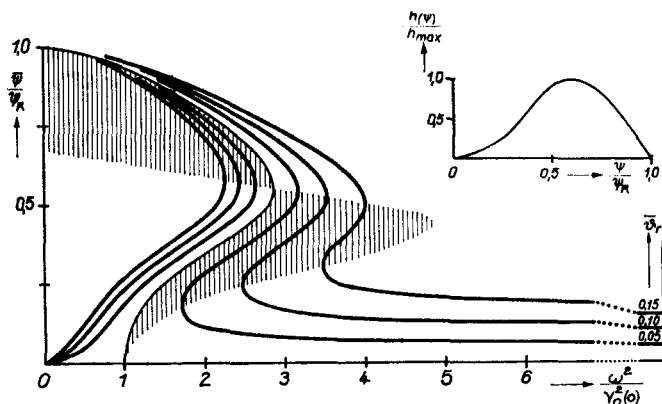


Bild 10a Resonanzkurven der Rollzustände erster Art für Schiffe mit Zusatzstabilität bei drei verschiedenen Blinderregungsamplituden. In den schraffierten Bereichen sind die Rollzustände nicht beständig

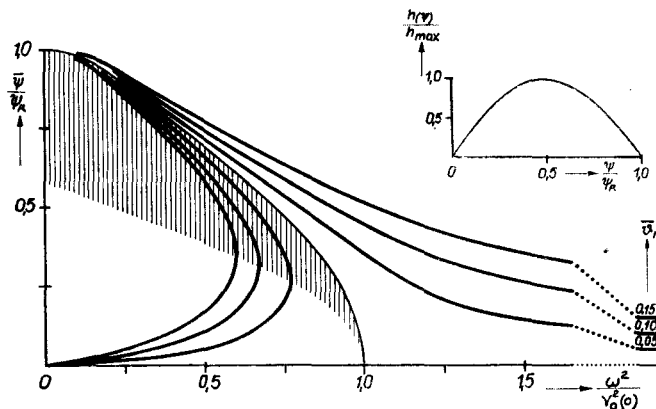


Bild 10b Resonanzkurven der Rollzustände erster Art für Schiffe mit sinusförmiger Hebelarmkurve bei drei verschiedenen Blinderregungsamplituden. In dem schraffierten Bereich sind die Rollzustände nicht beständig

senwinkeln zwischen $\psi_1(t)$ und $\vartheta_b(t)$ beide Vorzeichen zu berücksichtigen sind. Die hier unmittelbar ausführbare Konstruktion ergibt für die in den Bildern 3a und 3b gezeigten Grundfunktionen die in den Bildern 10a und 10b dargestellten Resonanzkurven.

Zur Berücksichtigung der Rolldämpfung ist zuvor noch die Blindamplitude zu ermitteln. Bei sinusförmigem Verlauf der um 90° phasenverschobenen Oszillogramme $\vartheta_w(t)$ und $\vartheta_b(t)$ gilt

$$\bar{\vartheta}_b = \pm \sqrt{\bar{\vartheta}^2 - \bar{\vartheta}_w^2} \quad (78)$$

Wenn wir diese Beziehung auch auf nicht sinusförmige Oszillogramme $\vartheta_w(t)$ und $\vartheta_b(t)$ anwenden, so entsteht ein Fehler nur dort, wo diese vergleichbare Amplituden haben, also weder im engeren Resonanzbereich, wo die Wirkerregung dominiert, noch in größerer Entfernung von der Resonanz, wo die Blinderregung vorherrscht. Wir glauben, diesen Fehler in Anbetracht der quantitativ noch immer unsicheren hydrodynamischen Unterlagen der Rolldynamik zugunsten einer bequemen Darstellung der Resonanzkurven in Kauf nehmen zu können.

Die in den Bildern 11a und 11b gezeigten Resonanzkurven sind unter Benutzung der Beziehung (78) sowie der Annahme

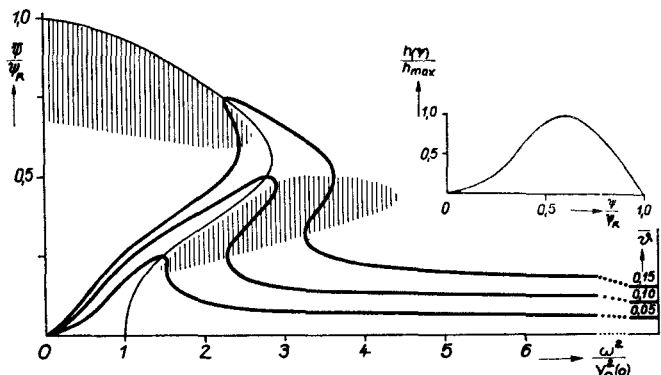


Bild 11a Resonanzkurven der Rollzustände erster Art für Schiffe mit Zusatzstabilität und dem Dämpfungsmaß $D = 0,2$ bei drei verschiedenen Wellenschrägen. In den schraffierten Bereichen sind die Rollzustände nicht beständig

$D(T_S) = 0,2^4$ und $F(\bar{\psi}) = 1$ konstruiert worden. Die jeweilige Blindamplitude wurde so ermittelt, wie die mit (1) bezeichnete Partie in Bild 9 zeigt. Für $D = \text{const}$, $F = 1$ lautet nämlich

4) $D = \text{const}$ bedeutet, daß der Dämpfungskoeffizient $W(T_S)$ der Rollperiode umgekehrt proportional ist. In dem durch die Voraussetzung (2) beschränkten Periodenbereich ist dies eine tragbare Annahme.

Bemerkung: In den Bildern ist statt $\bar{\vartheta}_a = \bar{\vartheta}_w$, statt $\bar{\vartheta}_r = \bar{\vartheta}_b$, statt $\psi_R = \psi_u$ zu setzen.

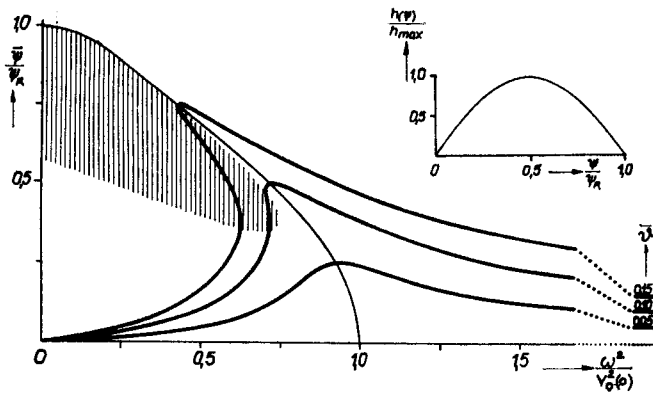


Bild 11b Resonanzkurven der Rollzustände erster Art für Schiffe mit sinusförmiger Hebelarmkurve und dem Dämpfungsmaß $D=0,2$ bei drei verschiedenen Wellenschrägen. In dem schraffierten Bereich sind die Rollzustände nicht beständig

die Gleichung (70)

$$\bar{\theta}_w = D \cdot \bar{\psi} \quad (79)$$

Im Resonanzfall $\bar{\theta}_b = 0$ gilt daher

$$\bar{\theta} = D \cdot \bar{\psi}_{res} \quad (80)$$

womit die Beziehung (78) die Gestalt

$$\bar{\theta}_b = \pm D \cdot \sqrt{\bar{\psi}_{res}^2 - \bar{\psi}^2} \quad (81)$$

annimmt. Zeichnet man nun (wie in Bild 9) einen Viertelkreis mit dem Radius $\bar{\psi}_{res} = \bar{\theta}/D$, welcher auch größer sein kann als ψ_u , so läßt sich nach dem Pythagoräischen Lehrsatz (schraffiertes Dreieck) für jede Rollamplitude $\bar{\psi} < \bar{\psi}_{res}$ zunächst die Strecke $\bar{\theta}_b/D$ und weiterhin mittels der beiden Geraden mit der Neigung $\pm D : 1$ die Amplitude (81) der Blind-erregung gewinnen.

Analytisch können wir bei Benutzung der Beziehung (78) aus (70) und (75) die Resonanzkurven der Rollzustände erster Art durch die Gleichung

$$\bar{\theta}^2 = \left[\left(\frac{T_W^2}{T_o^2(\bar{\psi})} - 1 \right) + F^2(\bar{\psi}) \cdot D^2(T_W) \right] \cdot \bar{\psi}^2 \quad (82a)$$

bzw. unter Benutzung der Kreisfrequenzen

$$\bar{\theta}^2 = \left[\left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) + F^2(\bar{\psi}) \cdot D^2(\omega) \right] \cdot \bar{\psi}^2 \quad (82a)$$

darstellen.

d) Beständige Rollzustände

Die betrachteten Rollzustände erster Art erfüllen sämtlich das in der Bewegungsgleichung ausgedrückte Momenten-Gleichgewicht. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob sie auch alle physikalisch realisierbar sind. Diese Frage interessiert besonders in Hinblick auf die in gewissen Abszissen-Intervallen auftretende Mehrdeutigkeit der Resonanzkurven.

Da wir nur stationäre Rollzustände betrachten, können wir nicht ohne weiteres ihre dynamische Stabilität untersuchen. Wir formulieren deshalb ein auf die Amplitudenbeziehung (82a) bzw. (82b) anwendbares Kriterium für die „Beständigkeit“ eines Rollzustandes, nämlich, daß bei konstanter Periode die Rollamplitude nur dann größer werden darf, wenn die Wellenschräge wächst, und nur dann kleiner, wenn die Wellenschräge abnimmt. Abstrakter ausgedrückt: „Ein beständiger Schwingungszustand liegt vor, wenn beim Übergang zu jedem stationären Nachbarzustand gleicher Periode die Amplituden von Erregung und Schwingung (ungeachtet ihrer Phase)

5) Die gleichzeitige Verwendung der Symbole $D(T_W)$ und $D(\omega)$ ist nicht korrekt. Sie kann aber, da wir die Formeln alternativ verwenden, nicht zu Verwechslungen führen.

gleichzeitig zu- oder abnehmen.“ Die beständigen Rollzustände sind also analytisch durch das Kriterium

$$C \equiv \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial \bar{\psi}^2} > 0 \quad (83)$$

gekennzeichnet.

Wenn wir nun die Steigung der Resonanzkurve bei konstantem D , nämlich den Ausdruck

$$\frac{d\bar{\psi}}{dT_W^2} = \frac{\frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial T_W^2}}{2\bar{\psi} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial \bar{\psi}^2}} = \frac{\bar{\psi}}{C \cdot T_o^2(\bar{\psi})} \cdot \left(\frac{T_W^2}{T_o^2(\bar{\psi})} - 1 \right) \quad (84a)$$

bzw.

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\omega^2} = \frac{\frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial \omega^2}}{2\bar{\psi} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial \bar{\psi}^2}} = \frac{\bar{\psi} \cdot v_o^2(\bar{\psi})}{C \cdot \omega^4} \cdot \left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \quad (84b)$$

betrachten, so finden wir die Regel, daß diese bei beiden Auftragungen in solchen Punkten, welche beständige Rollzustände ($C > 0$) darstellen, links der Skelettkurve ($T_W^2 < T_o^2(\bar{\psi})$) bzw. $\omega^2 < v_o^2(\bar{\psi})$ positiv, rechts davon ($T_W^2 > T_o^2(\bar{\psi})$) bzw. $\omega^2 > v_o^2(\bar{\psi})$ negativ ist.

Auf der Grenze zwischen beständigen und nicht-beständigen Rollzuständen ist $C = 0$; dort verlaufen die Resonanzkurven lotrecht. Die Amplitudenbeziehung (82b) liefert, wenn wir $F(\psi) = 1$ setzen, für die Beständigkeitsgrenze die Gleichung

$$C \equiv \left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right)^2 + D^2(\omega) + \left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \cdot \frac{\bar{\psi}}{\omega^2} \cdot \frac{dv_o^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} = 0$$

$$\equiv \left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} + \frac{\bar{\psi}}{\omega^2} \cdot \frac{dv_o^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} - 1 \right) + D^2(\omega) = 0 \quad (85)$$

Hieraus können wir die Grenzkurve mit elementaren Mitteln graphisch konstruieren.

Bei zunächst vernachlässigter Dämpfung ($D = 0$) müssen die runden Klammern in (85) einzeln null sein. Daraus folgen die Lösungen

$$\omega^2 = v_o^2(\bar{\psi}) \quad \text{und} \quad \omega^2 = v_*^2(\bar{\psi}), \quad (86)$$

von denen die erste die Skelettkurve darstellt und die zweite durch die Beziehung

$$v_*^2(\bar{\psi}) = v_o^2(\bar{\psi}) + \bar{\psi} \cdot \frac{dv_o^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} \quad (87)$$

damit verknüpft ist.

Die in Bild 12 veranschaulichte Konstruktion der Grenzkurve $v_*^2(\bar{\psi})$ besteht also einfach darin, daß man jeden Punkt der Skelettkurve $v_o^2(\bar{\psi})$ um die Länge der Subtangente

$$s = \left| \bar{\psi} \cdot \frac{dv_o^2(\bar{\psi})}{d\bar{\psi}} \right|$$

nach der ihr entgegengesetzten Seite verschiebt.

Mit (87) nimmt der Ausdruck (85) die Gestalt

$$C \equiv \left(\frac{v_o^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{v_*^2(\bar{\psi})}{\omega^2} - 1 \right) + D^2(\omega) \quad (88)$$

an. Wenn $D = 0$ ist, ist dieser in dem Bereich zwischen der Skelettkurve und der soeben konstruierten, durch * gekennzeichneten Grenzkurve negativ; d. h. die Punkte zwischen den Kurven bedeuten nicht-beständige Rollzustände.

Unter dem Einfluß der Dämpfung $D \neq 0$ schrumpft der Bereich nicht-beständiger Rollzustände, weil dann das Klammerprodukt in (88) auf der Grenzkurve g negativ sein muß, damit

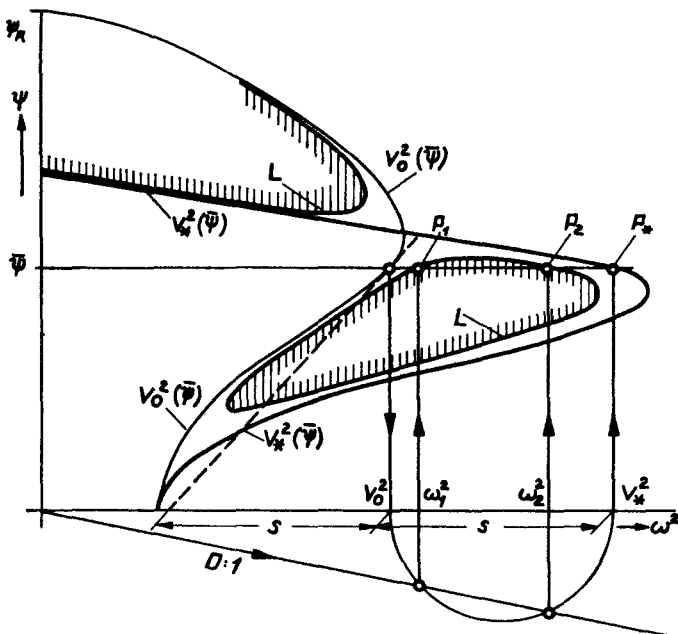


Bild 12 Konstruktion zweier Punkte P_1 und P_2 der Beständigkeitsgrenze G aus der Skelettkurve für Rollzustände erster Art

$C = 0$ wird; in Sonderheit stellen dann alle Punkte der Skelettkurve $v_0^2(\bar{\psi})$ beständige Rollzustände dar. Die graphische Konstruktion der Grenzkurve g unter Berücksichtigung von Dämpfung kann an Hand der Gleichung

$$[v_0^2(\bar{\psi}) - \omega^2] \cdot [v_*^2(\bar{\psi}) - \omega^2] + [\omega^2 \cdot D(\omega)]^2 = 0 \quad (89)$$

erfolgen. Dabei kann man eine beliebig gegebene Dämpfungsfunktion $D(\omega)$ berücksichtigen. Wenn man nämlich $\omega^2 \cdot D(\omega)$ unter der Abszissenachse aufträgt, haben die Schnittpunkte mit dem Halbkreis unter der Strecke $[v_0^2(\bar{\psi}), v_*^2(\bar{\psi})]$ die Abszissen ω_1^2 und ω_2^2 zweier Punkte der gesuchten Grenzkurve; denn es sind $|\omega_{1,2} - v_0^2(\bar{\psi})|$ und $|\omega_{1,2} - v_*^2(\bar{\psi})|$ die Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Höhe $\omega^2 \cdot D(\omega)$. In Bild 12 wird dies Verfahren für konstantes $D = 0,2$ illustriert. So sind die schraffierten Bereiche in den Bildern 10a bis 11b entstanden.

e) Wahrscheinliche Rollzustände

Wir wissen nun, welche Teile der Resonanzkurven physikalisch realisierbare Rollzustände darstellen. Es bleibt aber noch die Frage offen, welcher von den möglichen Rollzuständen gleicher Periode in der Wirklichkeit zu erwarten ist. Diese Frage muß statistisch betrachtet werden; es kommt dabei auf den Anfangszustand, aus dem das Schiff in den beständigen Rollzustand einschwingt, und auf die Größe und den zeitlichen Verlauf derjenigen Störmomente an, welche den Übergang in einen anderen Rollzustand bewirken könnten. Diese Dinge liegen außerhalb unserer auf stationäre Zustände beschränkten Betrachtung. Wir können aber von anderer Seite her zweierlei dazu sagen: Zunächst sind Rollzustände kleiner Amplitude wahrscheinlicher als solche großer Amplitude, weil in den letzteren mehr Energie steckt, die dem Schiff erst zugeführt werden muß. Zum anderen hat der Verfasser bei Experimenten am Navipendulum [8] mit einem Schiffspendel sinusförmiger Hebelarmkurve deutlich erfahren, daß in dem zweideutigen Frequenzintervall die Rollzustände großer Amplitude nur mit Sorgfalt hergestellt werden konnten, und daß schon geringfügige Störungen den Übergang in den Rollzustand kleinerer Amplitude bewirkten, und zwar um so eher, je höher der Bildpunkt auf dem Resonanzkurvenast lag. Die Energiebetrachtung und das Experiment sprechen also für eine größere Wahrscheinlichkeit der kleineren Amplitude. — Die jeder Dünung in praxi überlagerten Störwellen werden dem Schiff

nur selten gerade den Impuls erteilen, der zum Übergang aus dem Rollzustand kleiner Amplitude in denjenigen großer Amplitude erforderlich ist, sie werden aber meist ausreichen, den diffizilen Rollzustand großer Amplitude zu stören.

f) Einfluß der Vertikalbeschleunigung

Die periodische Vertikalbeschleunigung $\beta(t) \cdot g$ stört den Schwingungsverlauf der Rollzustände erster Art. Zur Abschätzung dieses Einflusses ersetzen wir in der Bewegungsgleichung (1) den Schwankungsfaktor $1 + \beta(t)$ des aufrichtenden Moments für die Dauer einer Dünungs-Halbwellenlänge durch einen passenden Mittelwert $1 \pm \epsilon \cdot |\beta|$, $0 < \epsilon < 1$ (+ für Wellental, — für Wellenberg).

Dann ist sofort ersichtlich, daß die Phasen des Rolloszillogramms während der Tal-Halbwellen schneller, während der Berg-Halbwellen langsamer durchlaufen werden; es wird also eine Halbschwingung entsprechender Phasenlage verkürzt, die andere verlängert. Ein Einfluß auf die Schwingungsdauer findet jedoch nicht statt, da bei Rollzuständen erster Art

$$\int_0^{T_S} \beta \cdot h(\psi) \cdot \psi \cdot dt = 0 \quad (90)$$

ist, also die Verstimmungsgleichung (46) unberührt bleibt.

Der räumliche Einfluß der Vertikalbeschleunigung zeigt sich in unsymmetrischen Rollauschlägen des Schiffes. Er ist im Resonanzfall $\bar{\psi}_b = 0$ besonders deutlich. Hier läuft das Oszillogramm $\psi_1(t)$ der Rollbewegung wegen (67) mit einer Verspätung von einer Viertelperiode hinter dem der Wellenneigung $\vartheta(t) = \vartheta_w(t)$ her. Das Schiff hat demnach auf einem Wellenberg gerade seine größte Neigung ψ_1 , und zwar in Richtung der zuletzt passierten Wellenschräge, also nach der Leeseite der Dünung; im Wellental findet die größte luvseitige Schiffsneigung ψ_{II} statt. Außerhalb der Resonanz treten die Extremlagen des Schiffes früher oder später ein.

Nun ist das Rückstellmoment in der Bergphase kleiner als in der Talphase. Infolgedessen ist die leeseitige Neigung des Schiffes größer als die luvseitige; d. h. das Oszillogramm

$$\psi_1(t) = \psi_- + \psi_-(t) \quad (91)$$

enthält eine mittlere leeseitige Krängung ψ_- . Um ihre Größe abzuschätzen, setzen wir die Krängungsenergien der Extremlagen

$$\psi_{I/II} = \psi_- \pm \bar{\psi}$$

einander gleich:

$$[1 - \epsilon \cdot |\beta|] \cdot U(\psi_- + \bar{\psi}) = [1 + \epsilon \cdot |\beta|] \cdot U(\psi_- - \bar{\psi}). \quad (92)$$

Wegen der Symmetrie von U können wir dann bei Entwicklung nach ψ_- in erster Näherung

$$U(\psi_- + \bar{\psi}) \pm U(\psi_- - \bar{\psi}) = \begin{cases} 2 U(\bar{\psi}) \\ 2 \psi_- \cdot P \cdot h(\bar{\psi}) \end{cases} \quad (93)$$

schreiben und erhalten schließlich die Beziehung

$$\frac{|\psi_-|}{\bar{\psi}} \approx \frac{\epsilon U(\bar{\psi}) \cdot |\beta|}{\bar{\psi} \cdot P \cdot h(\bar{\psi})} < q^2(\bar{\psi}) \cdot \frac{|\beta|}{2}, \quad (94)$$

wo $q(\bar{\psi})$ die in (28) definierte und in Bild 2 dargestellte Funktion ist.

Die Tatsache einer mittleren Krängung verbietet keineswegs unseren Ansatz, denn ψ_- liefert keinen Beitrag zur Winkelbeschleunigung.

Wir müssen aber nachträglich betonen, daß als Amplitude $\bar{\psi}$ die halbe Winkeldifferenz zwischen den Endlagen, also die Amplitude von $\psi_-(t)$ zu nehmen ist.

6. Die Rollzustände zweiter Art, $T_S = T_W$

Da die periodische Scheinlotneigung $\vartheta(t)$ bei Rollzuständen zweiter Art zu den Gleichungen (45) und (46) keinen Beitrag leistet, ist sie hier physikalisch nicht wesentlich. Wie setzen daher vorerst

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) = \psi_2(t) \quad (95)$$

und erörtern den Einfluß der Scheinlotneigung nachträglich. Wir betrachten also jetzt die Bewegungsgleichung

$$J' \cdot \ddot{\psi}_2 + W(T_S) \cdot \dot{\psi}_2 + [1 + \beta(t)] \cdot P \cdot h(\psi_2) = 0, \quad (96)$$

welche durch die Phasenerlegung (51) in die beiden phasenebenen Beziehungen

$$W(T_S) \cdot \dot{\psi}_2 + \beta_w \cdot P \cdot h(\psi_2) = +N_2(t) \quad (97)$$

$$J' \cdot \ddot{\psi}_2 + [1 + \beta_b] \cdot P \cdot h(\psi_2) = -N_2(t) \quad (98)$$

aufgespalten wird. Auch das Moment $N_2(t)$ liefert weder zur Anfachung noch zur Verstimmung des Schiffes einen Beitrag, da wegen (56) und (57)

$$\int_0^{T_S} N_2 \cdot \dot{\psi}_2 \cdot dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{T_S} N_2 \cdot \psi_2 \cdot dt = 0 \quad (99), (100)$$

ist. Es ist eine Oberwellenkombination, über die wir noch in gewissen Grenzen verfügen können. Wegen der verschiedenen Perioden auf der linken Seite von Gleichung (97) kann $N_2(t)$ nicht identisch verschwinden; es enthält einen wesentlichen Bestandteil mit der Periode $\frac{1}{2} T_S$ und bewirkt eine entsprechende Deformation des ψ_2 -Oszillogramms, die wir jedoch erst nachträglich erörtern.

Wenn wir nun wieder die genaue Wellenform unberücksichtigt lassen, können wir den Verlauf der periodischen Vertikalbeschleunigung so wählen, daß er bequeme Berechnungen ermöglicht. Wir setzen die Wirk- und die Blinderregung in eine möglichst einfache Beziehung zum Verlauf der während einer Rollperiode ebenfalls zweimal oszillierenden potentiellen Energie (11), nämlich in Erfüllung der Bedingungen (52) und (53):

$$\beta_w(t) = -\beta_w \cdot 2 \cdot \sqrt{u(\psi_2)} \cdot (1 - u(\psi_2)) \operatorname{sg} \dot{\psi}_2 \cdot \dot{\psi}_2 \quad (101)$$

$$\beta_b(t) = \beta_b \cdot (1 - 2u(\psi_2)) + \beta_0 \quad (102)$$

mit

$$0 \leq u(\psi) \equiv \frac{U(\psi)}{U(\bar{\psi})} \leq 1. \quad (103)$$

Die Wirkamplitude β_w ist grundsätzlich positiv, während die Blindamplitude β_b , je nach Phasenlage auch negativ sein kann. β_0 ist eine Konstante, welche die mittlere Beschleunigung zum Verschwinden bringt:

$$\int_0^{T_W} \beta(t) \cdot dt = 0. \quad (104)$$

Diese Ansätze können auch in der Gestalt

$$\begin{aligned} \beta(t) &= -\beta \cdot \sin(2\gamma(t) - \gamma_0) + \beta_0 \\ &= \beta_b \cdot \cos 2\gamma(t) - \beta_w \cdot \sin 2\gamma(t) + \beta_0 \end{aligned} \quad (105)$$

mit

$$\beta_b = \beta \cdot \sin \gamma_0, \quad \beta_w = \beta \cdot \cos \gamma_0 \quad (106)$$

geschrieben werden. Dann bedeutet γ_0 die Phasenlage und $\gamma(t)$ das (nicht gleichförmige) Durchlaufen eines Phasenzyklus. Für die Amplitude der Erregung gilt hier streng

$$\beta^2 = \beta_b^2 + \beta_w^2. \quad (107)$$

Da die Wirkerregung wegen der Symmetrie des Ansatzes (101) keinen Beitrag zu dem Integral (104) liefert, hängt die Konstante β_0 nur von dem Oszillogramm der Blinderregung $\beta_b(t)$ ab. Auf Grund des Ansatzes (102) ist

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{\beta_b} &= \frac{2}{T_W} \cdot \int_0^{T_W} u(\psi_2) \cdot dt - 1 \\ &= 1 - \eta_2(\bar{\psi}), \end{aligned} \quad (108)$$

wo man statt T_W auch $T_S = 2 T_W$ nehmen kann.

Die Funktion $\eta_2(\bar{\psi})$ unterscheidet sich von der in Gleichung (35) gegebenen Grundfunktion $\eta_0(\bar{\psi})$, weil die Form des Oszillogramms $\psi_2(t)$ der erzwungenen Schwingung von derjenigen des Oszillogramms $\psi_0(t)$ der freien Schwingung abweicht. Wir können, wie nachträglich gezeigt wird, in erster Näherung

$$\eta_2(\bar{\psi}) = \eta_0(\bar{\psi}) - \frac{1}{2} \beta_b \cdot (2 \eta_0(\bar{\psi}) - \eta_0^2(\bar{\psi}) + \delta) \quad (109)$$

mit

$$|\delta| \leq \eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) \leq 1$$

setzen.

a) Amplitudenbeziehungen und Resonanzkurven

Wir finden die Wirkamplitude, indem wir den Ansatz (101) in die Beziehung (97) einführen und das Integral (99) bilden. Es ergibt sich zunächst mit Hilfe von (11)

$$\begin{aligned} \beta_w \cdot 2 U(\bar{\psi}) \cdot \int_{T_S=2T_W}^{\dots} \sqrt{u(\psi_2)} \cdot (1 - u(\psi_2)) \cdot d u(\psi_2) &= \\ &= W(T_S) \cdot \int_0^{T_S} \dot{\psi}_2^2 \cdot dt, \end{aligned} \quad (110)$$

wo der Wurzelausdruck das Vorzeichen von $\dot{\psi}_2 \cdot \psi_2$ hat.

Nun stellt der Integrand des Umlaufintegrals, über $u(\psi)$ aufgetragen, einen Kreis mit dem Radius $1/2$ dar. Da dieser in der Zeit T_S zweimal durchlaufen wird, hat die linke Seite von (110) den Wert $\beta_w \cdot U(\bar{\psi}) \cdot \pi$. Wir können also bei entsprechender Erweiterung

$$\beta_w = \frac{T_S \cdot W(T_S)}{\pi \cdot J'} \cdot \frac{2}{T_S} \cdot \int_0^{T_S} \frac{1}{2} J' \cdot \dot{\psi}_2^2 \cdot dt \quad (111)$$

schreiben. Der erste Faktor ist das Doppelte des in (71) eingeführten dimensionslosen Dämpfungsbeiwerts. Der zweite kann auf den in (35) erklärten Mittelwert der kinetischen Energie $\eta_0(\bar{\psi})$ zurückgeführt werden, von dem er sich wegen der Beeinflussung des ψ_2 -Oszillogramms durch die Blinderregung $\beta_b(t)$ unterscheidet. Wir können ihn, wie nachträglich gezeigt wird, in erster Näherung durch den Ausdruck

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) = \eta_0(\bar{\psi}) + \frac{1}{2} \beta_b \cdot (2 \eta_0(\bar{\psi}) - 5 \eta_0^2(\bar{\psi}) + \delta) \quad (112)$$

mit

$$|\delta| \leq \eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) \leq 1$$

darstellen. Die Wirkamplitude der Erregung kann also durch zwei Faktoren dargestellt werden:

$$\beta_w = 2 D(T_S) \cdot \eta_\beta(\bar{\psi}). \quad (113)$$

Da wir die explizite Abhängigkeit der Rolldämpfung von der Amplitude vernachlässigt haben, ist es sinnvoll, auch die Amplitudenabhängigkeit der Wirkerregung unberücksichtigt zu lassen, um so mehr, als bei wachsender Rollamplitude der Dämpfungsbeiwert D erfahrungsgemäß zunimmt (vgl. Bild 8), der Mittelwert $\eta_0(\bar{\psi})$ dagegen abnimmt (Bild 5), so daß sich die Tendenzen zum Teil ausgleichen. Wir können also im Rahmen der ohnehin vorhandenen Unsicherheit mit der vereinfachten Formel

$$\beta_w \approx 2 D(T_S) \approx \text{const} \quad (114)$$

rechnen.

Im Gegensatz zu den Rollzuständen erster Art, wo die Wirkamplitude der Erregung im wesentlichen der Rollamplitude proportional ist, liegt also hier der Fall vor, daß die Wirkamplitude im wesentlichen von der Rollamplitude unabhängig ist.

Infolgedessen ist für das Eintreten eines Rollzustandes zweiter Art, auch bei kleinster Amplitude, eine durchaus endliche Dünungsstärke

$$H : \lambda \geq 2 D(T_S) : \pi \quad (115)$$

Voraussetzung. Wird diese Schwelle überschritten, so ergibt sich aus (107) die Blindamplitude β_b , welche bei fest vorgegebener Dünungsstärke β ebenfalls praktisch konstant ist.

Wenn wir nun die Blinderregung gemäß dem Ansatz (102) in die Beziehung (98) einführen und die Oberwellenkombination $N_2(t)$ zunächst vernachlässigen, so erhalten wir die Bewegungsgleichung eines in ruhigem Wasser frei rollenden Ersatz-Schiffes mit dem modifizierten Hebelarm

$$h_\beta(\psi) = [1 + \beta_b(\psi)] \cdot h(\psi) \\ = [1 + \beta_o + \beta_b \cdot (1 - 2u(\psi))] \cdot h(\psi), \quad (116)$$

Wir können also analog zu (10) bis (13) die Krängungsenergie $U_\beta(\psi) = P \cdot \int h_\beta(\psi) \cdot d\psi$

$$= U(\bar{\psi}) \cdot [(1 + \beta_o) \cdot u(\psi) + \beta_b \cdot u(\psi) \cdot (1 - u(\psi))], \quad (117)$$

die Gesamtenergie

$$\frac{1}{2} J' \cdot \dot{\psi}^2 + U_\beta(\psi) = U_\beta(\bar{\psi}) \quad (118)$$

und das Zeitdifferential der erzwungenen Rollschwingung $\psi_2(t)$

$$dt(\psi_2) = \sqrt{\frac{1}{2} J'} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{U_\beta(\bar{\psi}) - U_\beta(\psi)}} \quad (119)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} J'} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\psi) \cdot \sqrt{1 + \beta_o - \beta_b \cdot u(\psi)}}}$$

angeben.

Zur weiteren Berechnung führen wir das Zeitdifferential der freien Rollschwingung $\psi_o(t)$ gemäß (12) ein und schreiben (s. Bild 13).

$$dt(\psi_2) = \frac{dt(\psi_o)}{\sqrt{1 + \beta_o - \beta_b \cdot u(\psi_o)}} \quad (120)$$

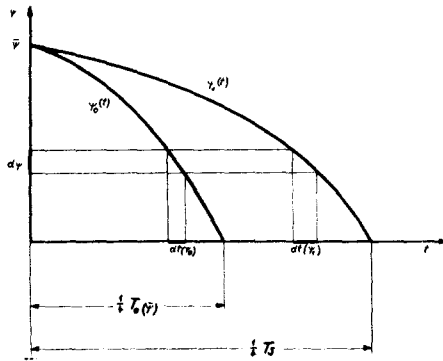


Bild 13 Zur Erläuterung der Transformationsformel (120)

Wir erhalten so für die Periode der erzwungenen Rollbewegung den Ausdruck

$$T_S = \int_0^{T_o(\bar{\psi})} \frac{dt}{\sqrt{1 + \beta_o - \beta_b \cdot u(\psi_o)}} \quad (121)$$

Der aus der lotrechten Wechselbeschleunigung resultierende Verstimmungsfaktor

$$\frac{T_S}{T_o(\bar{\psi})} = \frac{1}{T_o(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_o(\bar{\psi})} [1 + \beta_o - \beta_b \cdot u(\psi_o)]^{-1/2} \cdot dt \quad (122)$$

ist also gleich dem über die Periode der freien Rollschwingung gemittelten Ausdruck

$$[1 + \beta_o - \beta_b \cdot u(\psi_o)]^{-1/2}.$$

Die exakte Berechnung dieses Mittelwertes bereitet im allgemeinen große Schwierigkeiten. Wir beschränken uns daher auf eine für alle $\bar{\psi}$ gültige Näherung erster Ordnung in β_b . Es ist — vgl. auch (108) —

$$[1 + \beta_o - \beta_b \cdot u(\psi_o)]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \beta_b \cdot (1 - \eta_2(\bar{\psi}) - u(\psi_o)) \pm \dots \quad (123)$$

Für die absolute Konvergenz der Entwicklung muß

$$|\beta_b \cdot (1 - \eta_2(\bar{\psi}) - u(\psi_o))| < 1 \quad (124)$$

vorangesetzt werden. Wegen (41), (109) und (103) ergibt sich daraus, wie nachträglich gezeigt wird, für die Amplitude der Blinderregung die Beschränkung

$$\begin{aligned} -0,83 < \beta_b < +0,83 & \text{ im unterlinearen Fall,} \\ -0,60 < \beta_b < +0,66 & \text{ im überlinearen Fall.} \end{aligned} \quad (125)$$

Mit

$$\eta_2(\bar{\psi}) \approx \eta_o(\bar{\psi})$$

und — vgl. (35) —

$$\frac{1}{T_o(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_o(\bar{\psi})} u(\psi_o) \cdot dt = 1 - \frac{1}{2} \eta_o(\bar{\psi})$$

erhalten wir dann für den Verstimmungsfaktor (122) den Näherungsausdruck

$$\begin{aligned} \frac{T_S}{T_o(\bar{\psi})} & \approx 1 - \frac{1}{2} \beta_b \cdot (1 - \eta_o(\bar{\psi}) - 1 + \frac{1}{2} \eta_o(\bar{\psi})) \\ & \approx 1 + \frac{1}{4} \beta_b \cdot \eta_o(\bar{\psi}). \end{aligned} \quad (126)$$

Da nun $T_S = 2T_W$ ist, haben wir hiermit eine implizite Darstellung der Resonanzkurven zweiter Art gefunden. Ihre analytische Umformung in eine explizite Gestalt $\bar{\psi}(T_W, \beta_b)$ ist wegen des transzendenten Charakters der Funktionen $T_o(\bar{\psi})$ und $\eta_o(\bar{\psi})$ nicht möglich. Wir können aber bei gegebener Skelettkurve $T_o(\bar{\psi})$ mittels der Formel (126) leicht die beiden zu einer bestimmten Blinderregungsamplitude $\pm |\beta_b|$ gehörigen Äste der Resonanzkurven zweiter Art gewinnen. Die Bilder 14a und 14b zeigen das Resultat für die beiden dort gekennzeichneten Hebelarmkurven, wobei $|\beta_b| = 0,2$ angenommen wurde.

Unsere Betrachtung hat gezeigt, daß die Rollperiode eines Schiffes durch die lotrechte Wechselbeschleunigung der Wellen nur um wenige Prozent verstimmt wird. Rollzustände zweiter Art sind also nicht bei jeder Dünungsperiode möglich. Wegen des steilen Anstiegs der Resonanzkurven können sie jedoch in dem betreffenden Periodenintervall mit nicht geringen Amplituden auftreten.

b) Beständige Rollzustände

Um zu entscheiden, welche Teile der Resonanzkurven beständige Rollzustände zweiter Art darstellen, wenden wir das im Abschnitt 5d gegebene Kriterium auf die aus (107), (114) und (126) gebildete Amplitudenbeziehung

$$\beta^2 = \left(\frac{T_S}{T_o(\bar{\psi})} - 1 \right)^2 \cdot \frac{16}{\eta_o^2(\bar{\psi})} + 4D^2(T_S) \quad (127)$$

an und kennzeichnen die beständigen Rollzustände durch

$$C \equiv \frac{\partial \beta^2}{\partial \bar{\psi}^2} > 0. \quad (128)$$

Für die Steigung der Resonanzkurven $\bar{\psi}(T_S, \beta)$ bei gegebener Wellenstärke, $\beta = \text{const}$, gilt

$$\frac{d\bar{\psi}}{dT_S} = - \frac{\partial \beta^2 / \partial T_S}{\partial \beta^2 / \partial \bar{\psi}} = - \frac{\partial \beta^2 / \partial T_S}{2\bar{\psi} \cdot C} \quad (129)$$

Die Resonanzkurven verlaufen also auf der Grenze des Beständigkeitsbereichs, wo $C = 0$ ist, lotrecht; desgleichen auf der Abszissenachse $\bar{\psi} = 0$. Mit (127) folgt noch, wenn $D = \text{const}$ gesetzt wird,

$$\frac{d\bar{\psi}}{dT_S} = \frac{16 \cdot (T_o(\bar{\psi}) - T_S)}{C \cdot \bar{\psi} \cdot T_o^2(\bar{\psi}) \cdot \eta_o^2(\bar{\psi})} \quad (130)$$

Auch für die Resonanzkurven zweiter Art gilt demnach bei Auftragung von $\bar{\psi}$ über die Periode (oder auch über der Frequenz) die Regel, daß ihre Steigung in Punkten beständiger Rollzustände ($C > 0$) links der Skelettkurve positiv, rechts

davon negativ ist. Dadurch ist das Vorzeichen β_b bestimmt. Bei überlinearem Verhalten des Schiffes gilt das Pluszeichen, bei unterlinearem das Minuszeichen. Wir schreiben kurz:

$$\beta_b \begin{matrix} > 0 & \text{überlinear,} \\ < 0 & \text{unterlinear.} \end{matrix} \quad (131)$$

In den Bildern 14a und 14b sind die Kurventeile, welche nicht-beständige Rollzustände darstellen, gestrichelt worden. Daß auch das gestrichelte Abszissenintervall, welches der durch das Kriterium (128) nicht erfaßbaren trivialen Lösung $\varphi_2(t) \equiv 0$ der Bewegungsgleichung (96) angehört, nicht-beständige Rollzustände darstellt, zeigt die folgende Betrachtung.

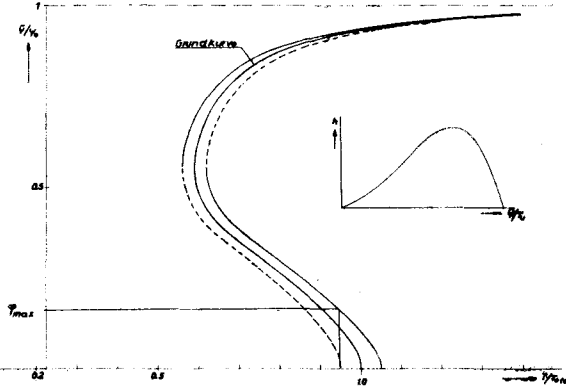


Bild 14a Resonanzkurve zweiter Art eines Schiffes mit Zusatzstabilität bei einer Blinderregungsamplitude $|\beta_b| = 0,2$. Die gestrichelten Kurventeile stellen unbeständige Rollzustände dar. ψ_{max} ist die größte mit Sicherheit eintretende Rollamplitude. Zustände mit größerer Amplitude sind wenig wahrscheinlich

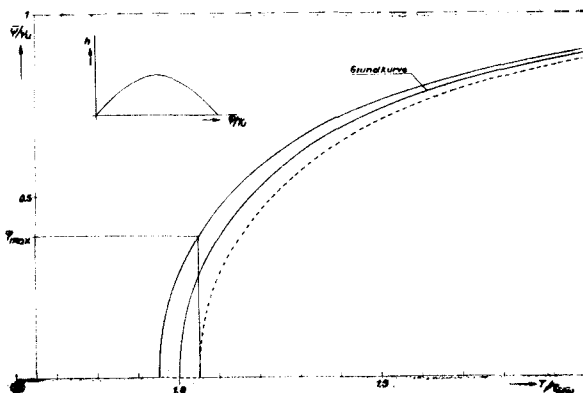


Bild 14b Resonanzkurve zweiter Art eines Schiffes mit sinusförmiger Hebelarmkurve bei einer Blinderregungsamplitude $|\beta_b| = 0,2$. Die gestrichelten Kurventeile stellen unbeständige Rollzustände dar. ψ_{max} ist die größte mit Sicherheit zu erwartende Rollamplitude. Zustände mit größerer Amplitude sind wenig wahrscheinlich

c) Das Kritische Periodenintervall

Im Grenzfall kleiner Amplituden kann

$$h(\psi) = \overline{M_0 G} \cdot \psi, \quad U(\psi) = \frac{1}{2} P \cdot \overline{M_0 G} \cdot \psi^2 \quad (132)$$

und

$$T_0(0) = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{P \cdot \overline{M_0 G}}} \quad (133)$$

gesetzt werden. Der spezielle Hebelarmverlauf kommt hier nicht zur Auswirkung; dafür treten wesentliche Eigenschaften dieser Rollzustände um so deutlicher hervor.

Die Beziehung (98) nimmt jetzt bei Vernachlässigung von $N_2(t)$ die Gestalt einer linearen (sog. Hill'schen) Differentialgleichung an:

$$J' \cdot \ddot{\psi}_2 + [1 + \beta_b(t)] \cdot P \cdot \overline{M_0 G} \cdot \psi_2 = 0. \quad (134)$$

Auf Grund unseres Ansatzes (102) erhalten wir mit

$$u(\psi) = \psi^2 / \bar{\psi}^2 \quad (135)$$

für den stationären Rollzustand die nichtlineare Differentialgleichung

$$J' \cdot \dot{\bar{\psi}}_2 + \left[1 + \beta_0 + \beta_b \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\psi_2^2}{\bar{\psi}^2} \right) \right] \cdot P \cdot \overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}_2 = 0. \quad (136)$$

Der Hebelarmverlauf

$$h_\beta(\psi) = \left[1 + \beta_0 + \beta_b \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\psi^2}{\bar{\psi}^2} \right) \right] \cdot \overline{M_0 G} \cdot \psi \quad (137)$$

des Ersatzschiffes, welches in ruhigem Wasser gemäß dieser Differentialgleichung frei rollt, ist also eine kubische Parabel. Dementsprechend ist die Form des Rolloszillogramms nicht sinusförmig, und zwar um so weniger, je stärker die Blinderregung ist. Die Rollperiode ist trotzdem von der Rollamplitude unabhängig, weil diese zum Stabilitätsumfang der Hebelarmkurve (137) (d. i. derjenige Winkel $\psi = \psi_u$, für welchen die eckige Klammer verschwindet) in einem festen, nur durch die Blinderregung bestimmten Verhältnis steht, nämlich

$$\frac{\bar{\psi}^2}{\psi_u^2} = \frac{2 \beta_b}{1 + \beta_0 + \beta_b}. \quad (138)$$

Die Resonanzkurven verlaufen also lotrecht. Infolgedessen kann sich $\bar{\psi}$ unabhängig von β beliebig ändern, d. h. Resonanzzustände zweiter Art sind bei kleiner Amplitude indifferent, denn der Ausdruck (128) wird null.

Die Rollperiode berechnet sich aus (119), wenn man (133) und (135) benutzt und $\psi/\bar{\psi} = x$ setzt, als Vollständiges Elliptisches Integral 1. Gattung:

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{T_0(0)}{\sqrt{1 + \beta_0}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 x^2)}} \\ &= \frac{T_0(0)}{\sqrt{1 + \beta_0}} \cdot \frac{2}{\pi} K \end{aligned} \quad (139)$$

mit

$$k^2 = \frac{\beta_b}{1 + \beta_0} \quad (140)$$

Wir können auch die Erregung als Funktion des Parameters k^2 mit Hilfe elliptischer Integrale darstellen. Für die Blinderregung erhalten wir aus (140) und (108) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \beta_b - k^2 \cdot \beta_0 &= k^2 \\ [1 - \eta_2(0)] \cdot \beta_b - \beta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (141)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \beta_b &= \frac{k^2}{1 - k^2 \cdot [1 - \eta_2(0)]} \\ \beta_0 &= \frac{k^2 \cdot [1 - \eta_2(0)]}{1 - k^2 \cdot [1 - \eta_2(0)]} \end{aligned} \quad (142)$$

Der Mittelwert

$$\eta_2(0) = \frac{2}{T_S} \cdot \int_0^{T_S} [1 - u(\psi_2)] \cdot dt \quad (143)$$

kann noch mit Hilfe von (119) und (135), wenn wieder $\psi_2/\bar{\psi} = x$ gesetzt wird, in die Gestalt

$$\begin{aligned} \eta_2(0) &= \\ &= 2 - \frac{2}{T_S} \cdot \sqrt{\frac{J'}{P \cdot \overline{M_0 G} \cdot (1 + \beta_0)}} \cdot 4 \cdot \int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 x^2)}} \end{aligned} \quad (144)$$

gebracht werden, so daß man mit Hilfe von (133) und (139) sowie des Vollständigen Elliptischen Integrals

$$D \equiv \int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2x^2)}} \quad (145)$$

den Ausdruck

$$\eta_2(0) = 2 \cdot \left(1 - \frac{D}{K}\right) \quad (146)$$

erhält. Hiermit können wir unter Benutzung von (142) sowohl die Blindamplitude β_b der Erregung als auch die Rollperiode (139) als Funktion von k^2 berechnen.

Zur Berechnung der Wirkamplitude bilden wir den durch (111) und (113) definierten Mittelwert $\eta_\beta(\bar{\psi})$. Für kleine Rollamplituden, $\bar{\psi} \rightarrow 0$, ergibt sich aus (118), (117), (132) und (135) mit $\psi_2/\bar{\psi} = x$ der Ausdruck

$$\eta_\beta(0) = \frac{2}{T_S} \cdot \sqrt{\frac{J' \cdot (1 + \beta_0)}{P \cdot M_0 G}} \cdot 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2x^2)} \cdot dx, \quad (147)$$

welcher sich ebenfalls auf die Vollständigen Elliptischen Integrale K und D zurückführen läßt. Durch Prozesse, welche den auf (38a) und (38b) angewandten ähnlich sind, läßt sich zeigen, daß

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2x^2)} \cdot dx = \frac{1}{2} K - \frac{1}{3} \cdot (1+k^2) \cdot D \quad (148)$$

ist. Der Ausdruck (147) nimmt also mit (139) und (133) die Gestalt

$$\eta_\beta(0) = \frac{1 + \beta_0}{3} \cdot \left(4 - (1+k^2) \cdot \frac{2D}{K}\right) \quad (149)$$

an.

In Bild 15 sind die Wirkamplitude $\beta_w = 2D(T_S) \cdot \eta_\beta(0)$ und der Verstimmungsfaktor $T_S/T_0(0)$ für den konstanten Dämpfungswert $D = 0,2$ über der Blindamplitude β_b aufgetragen worden. Es gestattet, zu jeder Rollperiode aus einer endlichen Umgebung der Eigenperiode $T_0(0)$ den zur Aufrechterhaltung eines stationären Rollzustandes zweiter Art mit kleiner Amplitude notwendigen Erregerpfeil nach Größe β und Phase γ_0 bzw. in Komponentendarstellung (β_w, β_b) abzulesen.

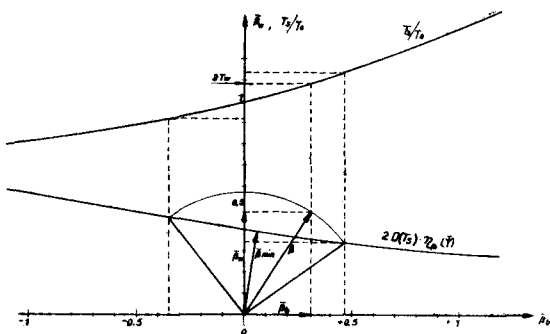


Bild 15 Zum Studium der (nicht beständigen) Rollzustände zweiter Art bei kleiner Amplitude

Das Bild 15 ist auch geeignet, die Rollzustände zweiter Art in statu nascendi sowie das Zustandekommen eines stationären Endzustandes zu betrachten. Wenn nämlich die Amplitude der lotrechten Wechselbeschleunigung den durch β_{min} gegebenen Schwellwert übersteigt, welcher wegen der geringen Neigung der β_w -Kurve praktisch gleich $2 \cdot D(T_0)$ ist, und wenn dabei

$$D \equiv \frac{1}{k^2} \cdot (K - E),$$

nicht zu verwechseln mit unserem Dämpfungsmaß $D(T_S)$!

die doppelte Erregerperiode, $2T_W$, innerhalb des durch den Kreisbogen (mit β um den Ursprung) gegebenen T_S -Intervalls liegt, so ist das Schiff instabil, weil der Überschuß der Wirkerregung $\beta \cdot \cos \gamma_0$ über den zur Entdämpfung des Schiffes notwendigen Wert $2 \cdot D(T_S) \cdot \eta_\beta(0)$ eine Anfachung bewirkt. Da diese Betrachtung von beliebig kleinen Rollamplituden $\bar{\psi} \rightarrow 0$ ausgehen kann, stellt die triviale Lösung $\psi_2(t) \equiv 0$ der Bewegungsgleichung (96), auf welche ja das Kriterium (128) nicht anwendbar ist, innerhalb des durch den Kreisbogen in Bild 15 bestimmten kritischen Periodenintervalls, das wir mit Hilfe von (126) für kleine $|\beta_b|$ näherungsweise in der Form

$$\left| \frac{T_S}{T_0(0)} - 1 \right| < \frac{1}{2} |\beta_b| \quad (150)$$

angeben können, unbeständige Rollzustände zweiter Art dar.

Unter den genannten Bedingungen wächst nun die Rollamplitude nach einem geringen Anstoß solange, bis die veränderte Eigenperiode $T_0(\bar{\psi})$ eine Blindamplitude der Erregung von so großem Betrag erfordert, daß die verbleibende Wirkamplitude $\beta_w = +\sqrt{\beta^2 - \beta_b^2}$ gleich dem Wert $2 \cdot D(T_S) \cdot \eta_\beta(\bar{\psi})$ wird, also mit der Dämpfung ins Gleichgewicht tritt. Da sich die zur Entdämpfung des Schiffes erforderliche Wirkamplitude der Erregung (113) bei endlichen Amplituden nur wenig ändert, ist der stationäre Endzustand des beschriebenen Anfachungsvorgangs im wesentlichen durch das „Ausweichen der Resonanz“ bestimmt. Daß es ein beständiger Zustand ist, erhellt daraus, daß zu einer größeren Rollamplitude gleicher Periode wegen des weiteren Ausweichens der Resonanz eine größere Blinderregung erforderlich ist, welche — sofern nicht die Dämpfung mit wachsender Amplitude maßgeblich abnimmt — nur aus einer stärkeren Bewegung kommen kann. Man kann also von hier aus auch unser Beständigkeitskriterium (128) einsehen.

Unsere Betrachtung hat ergeben, daß in dem kritischen Periodenintervall (150) stets ein Rollzustand zweiter Art eintreten muß. Außerhalb desselben ist die triviale Lösung $\psi_2(t) \equiv 0$ beständig, das Schiff wird also dort nur unter besonderen Anstoßbedingungen in einen nicht trivialen Rollzustand zweiter Art versetzt werden. Auf See ist zwar mit allerlei Anstößen zu rechnen, doch ist die Erwartung für einen passenden Anstoß gering. Dieser müßte nämlich nicht nur dem Schiff eine verhältnismäßig große Energie mitteilen, sondern auch noch nach Größe und Phase ziemlich gut stimmen.

Die größte mit Sicherheit eintretende Rollamplitude $\bar{\psi}_{max}$ ist in den Bildern 14a und 14b markiert worden. Da der Bildpunkt des Rollzustandes über dem Grenzpunkt des kritischen Periodenintervalls liegt, von welchem die (gestrichelt gezeichnete) Kurve unbeständiger Rollzustände ausgeht, gilt für die Amplitude $\bar{\psi}_{max}$ die mittels (126) gebildete Bestimmungsgleichung

$$(1 + \frac{1}{2} \beta_b \cdot \eta_0(\bar{\psi}_{max})) \cdot T_0(\bar{\psi}_{max}) = (1 - \frac{1}{2} \beta_b) \cdot T_0(0), \quad (151)$$

bei deren Lösung die Vorzeichenregel (131) zu beachten ist.

Bei normaler Größe von $|\beta_b|$ ist nun damit zu rechnen, daß schon ein geringes „Ausweichen der Resonanz“ den stationären Rollzustand herbeiführt. Dann ist aber der Quotient $\tau(\bar{\psi}_{max}) \equiv T_0(\bar{\psi}_{max})/T_0(0)$ nur wenig von 1 verschieden; er kann also gut durch unsere Näherungsformel (29) dargestellt werden. Wenn wir darüberhinaus noch (siehe die Bilder 2 und 5)

$$q(\bar{\psi}_{max}) \approx 1 \quad \text{sowie} \quad \eta_0(\bar{\psi}_{max}) \approx 1 \quad (152)$$

setzen, so finden wir — da dann die beiden Wurzelausdrücke in (29) annähernd gleich sind — mittels der etwas groben Näherungsformel

$$\tau(\bar{\psi}_{max}) \approx \sqrt{\frac{M_0 G \cdot \bar{\psi}_{max}}{h(\bar{\psi}_{max})}} \quad (153)$$

eine sehr bequeme Bestimmungsgleichung für die größte mit Sicherheit eintretende Amplitude der Rollzustände zweiter Art, nämlich:

$$h(\bar{\psi}_{\max}) \approx (1 + \bar{\beta}_b) \cdot \overline{M_0 G} \cdot \bar{\psi}_{\max} \quad (154)$$

Diese Näherungsformel läßt sich leicht graphisch auswerten. Man hat die Hebelarmkurve mit derjenigen Ursprungsgeraden zu schneiden, welche die $(1 + \bar{\beta}_b)$ -fache Steigung der Anfangstangente $\overline{M_0 G} \cdot \psi$ hat. Die algebraische Lösung der Gleichung (154) für $h(\psi) = \overline{M_0 G} \cdot \psi \cdot (1 + a\psi^2)$ lautet

$$\bar{\psi}_{\max} \approx \sqrt{\frac{\bar{\beta}_b}{a}} \quad (155)$$

Sie ist wegen (131) reell.

d) Nachträge

1. Einfluß von $\vartheta(t)$ und $N_2(t)$

Wir betrachten noch die Einflüsse sowohl der periodischen Richtungsschwankung $\vartheta(t)$ des Scheinlotvektors als auch der Oberwellenkombination $N_2(t)$, welche sich aus der Beziehung (97) mit dem Ansatz (101) und dem Oszillogramm $\psi_2(t)$ ergibt. Wenn wir dieses jetzt untersuchen, können wir von der inzwischen gefundenen Tatsache Gebrauch machen, daß bei der größten mit Sicherheit eintretenden Amplitude eines Rollzustandes zweiter Art die Eigenperiode des Schiffes, $T_0(\bar{\psi}_{\max})$, zu derjenigen unendlich kleiner Amplitude im Verhältnis $1 - \frac{1}{2}\bar{\beta}_b$ steht, daß also der Amplitudeneinfluß in praktisch vorkommenden Fällen nur einige Prozent beträgt. Wir können daher das Schiff im kritischen Periodenintervall als quasilineares System behandeln und seine Bewegung aus den drei Lösungen $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ und $\psi_3(t)$ der Differentialgleichung (1) superponieren, welche den Erregungen durch

1. die periodische Richtungsschwankung $\vartheta(t)$ des Scheinlotvektors,
2. die periodische Größenschwankung $\beta(t) \cdot g$ desselben,
3. das momentane Differenzmoment $N_2(t)$ zwischen Dämpfung und Anfachung

gemäß den Differentialgleichungen

$$J' \cdot (\ddot{\psi}_1 + \ddot{\vartheta}(t)) + W(T_S) \cdot \dot{\psi}_1 + P \cdot h(\psi_1) = 0 \quad (156)$$

$$J' \cdot \ddot{\psi}_2 + [1 + \beta_b(t)] \cdot P \cdot h(\psi_2) = 0 \quad (157)$$

$$J' \cdot \ddot{\psi}_3 + W(T_S) \cdot \dot{\psi}_3 + P \cdot h(\psi_3) = -N_2(t) \quad (158)$$

entsprechen und deren Summe hinreichend klein bleiben muß.

Wegen (5b) haben die Erregungen $\beta(t)$ und $\vartheta(t)$ beide die Amplitude $2\pi r/\lambda$ und die Periode T_W , sind aber in der Phase um 90° verschieden. Ihre Phasenlage zu der Rollbewegung zweiter Art $\psi_2(t)$ mit der Periode $T_S = 2T_W$ wird durch die Dämpfung bestimmt; sie kann aus der Ansatzgleichung (101) entnommen werden. In Bild 16 sind die Verhältnisse für $\bar{\beta}_b \approx 0$, also für den Fall, daß die Vertikalbeschleunigung $\beta(t) \cdot g$ der Welle gerade eben die Dämpfungsschwelle $2gD(T_S)$ überwunden hat, qualitativ dargestellt worden. Da $\beta_w(t)$ (hier $\approx \beta(t)$) das entgegengesetzte Vorzeichen von

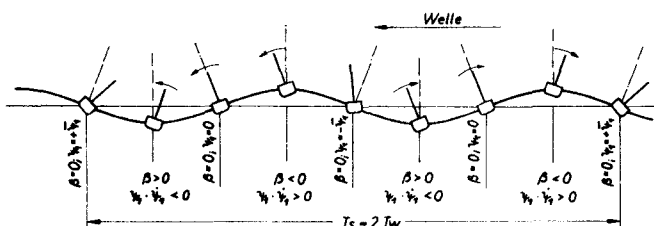


Bild 16 Phasenlage eines Schiffes in der Welle, wenn die Dämpfungsstärke gerade die für Rollzustände zweiter Art charakteristische Dämpfungsschwelle übersteigt

$\psi_2 \cdot \dot{\psi}_2$ hat, befindet sich das Schiff auf den Wellenflanken, wo $\beta(t) = 0$ ist, entweder in der statischen Gleichgewichtslage zur Wellenoberfläche, $\psi_2 = 0$, oder in einer Lage größter Krängung, $\psi_2 = \pm \bar{\psi}_2$; außerdem muß das Schiff im Wellental, wo $\beta(t) > 0$ ist, zur statischen Gleichgewichtslage hin, auf dem Wellenberg dagegen in auskrängender Richtung schwingen. Im Sinne des richtigen Zeitablaufs sind die in Bild 16 dargestellten Lagen des Schiffes von links nach rechts zu lesen. Die Welle kommt also von rechts, und die größten Krängungen $\pm |\bar{\psi}_2|$ des Rollzustandes zweiter Art treten ein, wenn sich das Schiff auf der rückwärtigen Flanke der Welle befindet.

Diesem Rollzustand überlagern wir nun noch den im Abschnitt 5 ausführlich dargestellten Rollzustand erster Art $\psi_1(t)$ mit der Periode T_W . Bei quasilinearer Behandlung der Differentialgleichung (156) können wir jetzt mit der Ersatzfrequenz $\nu_1 \approx 2\pi/T_S$

$$J' \cdot (\dot{\psi}_1 + \dot{\vartheta}) + W(T_S) \cdot \psi_1 + J' \cdot \nu_1^2 \cdot \psi_1 = 0 \quad (159)$$

schreiben, woraus sich für die resonanzferne Erregerfrequenz $\omega_1 = 2\pi/T_W \approx 2\nu_1$, bei welcher die Dämpfung keine maßgebliche Rolle mehr spielt, die stationäre Näherungslösung

$$\psi_1(t) \approx -\frac{1}{3} \cdot \vartheta(t) \quad (160)$$

ergibt. Wir finden so in den Zeitpunkten, zu denen sich das Schiff auf der rückwärtigen Flanke der Welle befindet, die Krängungen

$$\bar{\psi}_{I,II} \equiv \bar{\psi}_1 \pm \bar{\psi}_2 = -\frac{1}{3} \bar{\vartheta} \pm \bar{\psi}_2 \quad (161)$$

Die absolut größte Krängung $\bar{\psi}_{II}$ ist der Wellenneigung $\vartheta(t)$ entgegen, also leewärts gerichtet. Wegen (114) hat die Dünungsstärke $\bar{\vartheta} = \bar{\beta}$ beim Erreichen der Dämpfungsschwelle den Wert $2D(T_S)$. Unter Benutzung von (155) erhalten wir schließlich für den Betrag der absolut größten Krängung bei gleichzeitigem Auftreten von Rollzuständen erster und zweiter Art die Schätzformel

$$\bar{\psi}_{II} \approx \frac{8}{3} D(T_S) + \sqrt{\frac{\bar{\beta}_b}{a}} \quad (162)$$

In der Oberwellenkombination $N_2(t)$ dominiert die dreifache Rollfrequenz

$$\omega_3 = 3 \cdot \frac{2\pi}{T_S} \quad (163)$$

Im Grenzfall sinusförmiger Oszillogramme, von dem wir im kritischen Periodenintervall (150) nicht weit entfernt sind, ist überhaupt nur diese Frequenz vorhanden. Die Amplitude \bar{N} tritt ein, wenn die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}_2(t)$ am größten ist. Für kleine $|\bar{\beta}_b|$ kann hierfür mit Hilfe von (118)

$$\bar{N} \approx W(T_S) \cdot \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi}_2)}{J'}} \quad (164)$$

geschrieben werden. Mit der Ersatzfrequenz — vgl. (32) —

$$\nu_3 \approx \frac{2\pi}{T_S} \approx \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi}_2)}{J' \cdot \bar{\psi}_2^2}} \quad (165)$$

liefert nun (158) für die resonanzferne Erregerfrequenz (163) die stationäre Näherungslösung

$$\psi_3(t) \approx \frac{N(t)}{8J' \cdot \nu_3^2} \quad (166)$$

mit der Amplitude

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_3 &\approx \frac{W(T_S) \cdot \nu_3}{8J' \cdot \nu_3^2} \cdot \bar{\psi}_2 \\ &\approx \frac{1}{8} D(T_S) \cdot \bar{\psi}_2 \end{aligned} \quad (167)$$

Da $D(T_S)$ bei Schiffen kaum mehr als etwa 0,2 beträgt, bewirkt also das Differenzmoment $N_2(t)$ eine Oberschwingung $\psi_3(t)$, deren Amplitude nur wenige Prozent der Rollamplitude ausmacht.

II. Die Mittelwerte $\eta_2(\bar{\psi})$ und $\eta_\beta(\bar{\psi})$

Wir untersuchen nun noch den Einfluß, welchen die Blind-
erregung $\beta_b(t)$ auf die durch (108) bzw. (111) und (113)
definierten Mittelwerte $\eta_2(\bar{\psi})$ und $\eta_\beta(\bar{\psi})$ in erster Näherung
hat. Dazu betrachten wir die Integrale

$$\eta_2(\bar{\psi}) = \frac{2}{T_S} \cdot \int_0^{T_S} [1 - u(\psi_2)] \cdot dt \quad (168)$$

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) = \frac{2}{T_S} \cdot \int_0^{T_S} \frac{\frac{1}{2} J' \cdot \psi_2^2}{U(\bar{\psi})} dt. \quad (169)$$

Wenn wir wieder vermöge der Transformation (120) den
Zeitablauf $\psi_0(t)$ der freien Rollschwingung einführen, er-
halten wir

$$\eta_2(\bar{\psi}) = \frac{2}{T_S} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} [1 - u(\psi_0)] \cdot [1 + \beta_0 - \bar{\beta}_b \cdot u(\psi_0)]^{-1/2} \cdot dt \quad (170)$$

und — unter Benutzung von (118) und (117) —

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) = \frac{2}{T_S} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} [1 - u(\psi_0)] \cdot [1 + \beta_0 - \bar{\beta}_b \cdot u(\psi_0)]^{+1/2} \cdot dt \quad (171)$$

Bei Entwicklung der zweiten Klammerfaktoren und Be-
nutzung von (108) sowie (126) ergeben sich dann bis auf
höhere Potenzen von $\bar{\beta}_b$ die Ausdrücke

$$\eta_2(\bar{\psi}) \approx \frac{2}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} [1 - u(\psi_0)] \cdot [1 + \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot (\eta_0(\bar{\psi}) - 2 \cdot [1 - u(\psi_0)])] \cdot dt \quad (172)$$

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) \approx \frac{2}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} [1 - u(\psi_0)] \cdot [1 - \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot (3 \eta_0(\bar{\psi}) - 2 \cdot [1 - u(\psi_0)])] \cdot dt \quad (173)$$

Wir haben also im Wesentlichen die über eine Periode der
freien Schwingung gemittelten Werte der Funktion $[1 - u(\psi_0)]$
sowie ihres Quadrats zu bilden. Mit Hilfe von (35)
und dem Symbol

$$\Delta \equiv \frac{1}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} [1 - u(\psi_0)]^2 \cdot dt \quad (174)$$

erhalten wir zunächst

$$\eta_2(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) + \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot \eta_0^2(\bar{\psi}) - \bar{\beta}_b \cdot \Delta, \quad (175)$$

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) - \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot \eta_0^2(\bar{\psi}) + \bar{\beta}_b \cdot \Delta. \quad (176)$$

Nun ist der Mittelwert eines Quadrats stets größer als das
Quadrat des Mittelwerts, und es gilt insbesondere

$$0 \leq [1 - u(\psi_0)]^2 \leq [1 - u(\psi_0)] \leq 1. \quad (177)$$

Infolgedessen ist der Wert des Ausdrucks (174) auf das
Intervall

$$\frac{1}{2} \eta_0^2(\bar{\psi}) \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \eta_0(\bar{\psi}) \quad (178)$$

beschränkt. Wir setzen daher

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \eta_0^2(\bar{\psi}) + \frac{1}{2} \eta_0(\bar{\psi})) + \frac{1}{2} \delta, \quad (179)$$

wo

$$|\delta| \leq \eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) \leq 1 \quad (180)$$

ist, und erhalten schließlich aus (175) und (176) für den Ein-
fluß der Blinderregung die Abschätzung

$$\eta_2(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) - \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot [\eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) + \delta] \quad (181)$$

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) + \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot [\eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - 5 \eta_0(\bar{\psi})) + \delta] \quad (182)$$

III. Das Konvergenzintervall (125)

Nun können wir als letzten Nachtrag das Konvergenz-
intervall der $\bar{\beta}_b$ -Entwicklung (123) berechnen. Wenn wir die
Beziehung (181) in der Form

$$\eta_2(\bar{\psi}) = \eta_0(\bar{\psi}) - A \cdot \bar{\beta}_b, \quad (183)$$

mit

$$A = \frac{1}{2} [\eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) + \delta] \quad (184)$$

in die Konvergenzbedingung (124) einführen, so nimmt diese
die Gestalt

$$|A \cdot \bar{\beta}_b^2 + m \cdot \bar{\beta}_b| < 1 \quad (185)$$

mit

$$m = 1 - \eta_0(\bar{\psi}) - u(\psi_0) \quad (187)$$

an. Das Konvergenzintervall

$$\beta_1 < \bar{\beta}_b < \beta_{II} \quad (187)$$

kann also durch Schnitt der Parabelschar

$$y_1 = A \cdot \bar{\beta}_b^2, \quad 0 \leq A \leq \frac{1}{4} \quad (188)$$

mit den beiden Geradenscharen

$$y_{2,3} = \pm 1 - m \cdot \bar{\beta}_b, \quad -\eta_{\max} \leq m \leq 1 \quad (189)$$

gefunden werden, wo die Intervalle der Scharparameter A und
m aus (41), (103) und (180) bestimmt sind. In Bild 17 sind
diese Scharen aufgezeichnet worden. Die Abszissen derjenigen
Schnittpunkte, welche der y-Achse auf verschiedenen Seiten
am nächsten liegen, sind die Grenzen $\beta_I < 0$ und $\beta_{II} > 0$ des
Konvergenzintervalls, denn für jedes $\bar{\beta}_b$ zwischen diesen Abs-
zissen ist die Bedingung (185) erfüllt. Die betreffenden
Schnittpunkte, welche der y-Achse auf verschiedenen Seiten
 $\eta_{\max} = 1$ und 1,5 in der Zeichnung markiert worden. Nach
Entnahme der zugehörigen Parameter A und m wurden die
Konvergenzintervalle

$$\begin{aligned} -0,83 < \bar{\beta}_b < +0,83 & \text{ für } \eta_{\max} = 1 \text{ (unterlinear)} \\ -0,60 < \bar{\beta}_b < +0,66 & \text{ für } \eta_{\max} = 1,5 \text{ (überlinear)} \end{aligned} \quad (190)$$

rechnerisch gefunden.

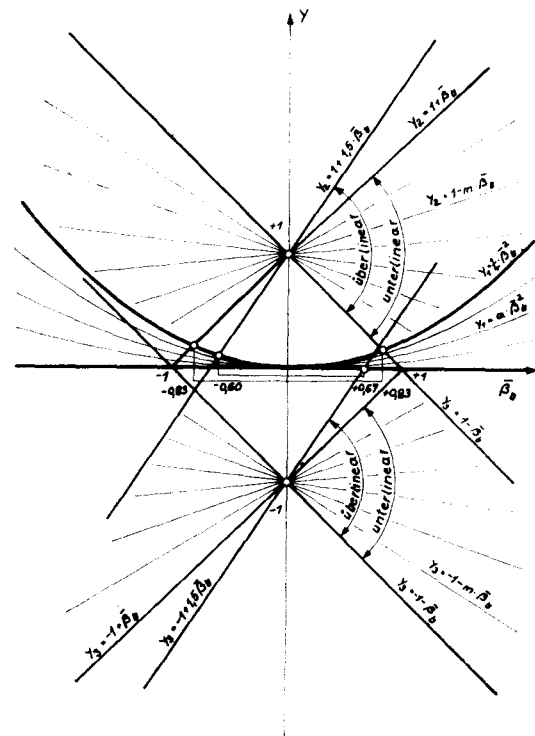


Bild 17 Zur Ermittlung des Konvergenzintervalls (125)

Die vorliegende Arbeit ist aus einem Forschungsauftrag hervorgegangen, den der Verfasser vom Office of Naval Research, Washington D. C., USA, durch freundliche Vermittlung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. G. Weinblum erhalten hat. Der Verfasser möchte auch an dieser Stelle seinen Dank bekunden.

(Abgeschlossen im März 1959, eingegangen am 1. Febr. 1961)

7. Bezeichnungen

a) Allgemein:

t	Zeit
$\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} \psi(t)$	der Punkt bedeutet die Ableitung nach der Zeit
$\bar{\psi}$ usw.	der Querstrich bedeutet die Amplitude einer Schwingung
K, D, E	vollständige elliptische Integrale
k^2	deren Argument

b) Für die Dünung:

λ, H	Länge und Höhe der Wellen
T_W	Wellenperiode
$r(t), r$	Orbitalvektor und Orbitalradius
ω	Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) der Orbitalbewegung
g	Vektor der Erdbeschleunigung
$g = 981 \text{ cm s}^{-2}$	dessen Länge
$g'(t) = g - \omega^2 r(t)$	Scheinlotvektor
$\phi(t)$	Scheinlotwinkel (zwischen $g'(t)$ und g)
$\beta(t) = \frac{1}{g} g'(t) - 1$	dimensionslose Beschleunigung normal zur Wasseroberfläche
$\phi_w(t), \phi_h(t); \beta_w(t), \beta_h(t)$	Wirk- bzw. Blindkomponenten bezüglich der Rollbewegung
β_0	eine Konstante, die die mittlere Normalbeschleunigung zum Verschwinden bringt

c) Für das Schiff:

$m(t)$	Einheitsvektor in Mastrichtung
$\varphi(t)$	Rollwinkel zwischen $m(t)$ und g
$\psi(t)$	Rollwinkel zwischen $m(t)$ und $g'(t)$
$h(\psi), U(\psi)$	Hebelarm und potentielle Energie der Krängung
ψ_u	Stabilitätsumfang
T_S	Rollperiode
$T_0(\bar{\psi}), \nu_0(\bar{\psi})$	Periode und Kreisfrequenz in ruhigem Wasser
J'	Trägheitsmoment einschließlich hydrodynamischer Einflüsse
$W(T_S)$	Dämpfungsbeiwert
$D(T_S), D(T_W), D(\omega)$	dimensionsloser Dämpfungsbeiwert
P	Schiffsgewicht
B	Breite
$\bar{M}_0 \bar{G}$	Metazentrische Höhe

d) Sonstige Bezeichnungen

$\tau(\bar{\psi}), \phi(\bar{\psi})$	Periode bzw. Phasenumlaufintegral bei Rollen in ruhigem Wasser, dimensionslos
$\eta_0(\bar{\psi}), \eta_2(\bar{\psi}), \eta_\beta(\bar{\psi})$	Mittelwerte der kinetischen Energie, dimensionslos
$F(\bar{\psi})$	Formfaktor des Rolloszillogramms
$\alpha(t)$	Phase der Rollbewegung
$w(\psi, \bar{\psi})$	deren reziproke Phasengeschwindigkeit
$q(\bar{\psi}) = w(\bar{\psi}, \bar{\psi})$	deren Ungleichförmigkeitsgrad
$\gamma(t), \gamma_0$	Phase der Rollenergie bzw. Phasenverschiebung
$u(\psi)$	dimensionslose Krängungsenergie
$N_1(t), N_2(t)$	Momente aus Oberwellen
C	Ausdruck der Beständigkeit eines Rollzustands

8. Schrifttum

- [1] Russo, G.: „An Experimental Method of Ascertaining the Rolling of Ships in Waves.“ Trans. Inst. Naval Arch., Bd. 42 (1900), S. 30—52.
- [2] Scribanti, A.: „On the Heeling and Rolling of Ships of Small Initial Stability.“ Trans. Inst. Naval Architects 46 (1904) 93—116.
- [3] Weinblum, G.: „Die Bewegungsgleichungen des Schiffes im Seegang.“ Schiffbau, Bd. 32 (1931), S. 488—495, 509—511 und 525—529.
- [4] Weinblum, G.: „Über den Einfluß der Schiffsförmigkeit auf die Bewegungen eines Schiffes im Seegang.“ Werft, Reederei, Hafen, Bd. 14 (1933) S. 269—275 und 289—292.
- [5] Späth, W.: „Beitrag zur Dynamik der Schiffsbewegungen.“ Werft, Reederei, Hafen, Bd. 14 (1933) S. 104—106.
- [6] Kempf, G.: „Stabilitätsgrenzen für Schiffe.“ Schiffbau, Bd. 41 (1940) S. 17—18.
- [7] Wendel, K.: „Rollschwingungen und Hebelarmkurve.“ Schiffbau, Bd. 41 (1940) S. 45—51.
- [8] Baumann, H.: „Das Navipendulum als Gerät für Modell-Schlingerversuche.“ Werft, Reederei, Hafen, Bd. 22 (1941) S. 103—104.
- [9] Vedeler, G.: „A Mathieu Equation for Ships Rolling among Waves I and II.“ Det Kongelige Norske Videnskabs Selskabs Forhandling, Bd. 22 (1949) S. 113—123.
- [10] Weinblum, G., und St. Denis, M.: „On the Motions of Ships at Sea.“ Annual Meeting SNAME 1950.
- [11] Grim, O.: „Rollschwingungen, Stabilität und Sicherheit im Seegang.“ Schiffstechnik, Bd. 1 (1952) S. 10—21.
- [12] Kervin, F. E.: „Notes on Rolling in Longitudinal Waves.“ Intern. Shipbuilding Progress, Bd. 2 (1955) S. 597 bis 614.
- [13] Klotter, K., und Pinney, E.: „A Comprehensive Stability Criterion for Forced Vibrations in Nonlinear Systems.“ Journal of Applied Mechanics, März 1953, S. 9 bis 12.
- [14] Stoker, J. J.: „Non-linear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems.“ Pure and Applied Mathematics, Bd. II. Interscience Publishers, New York 1950.
- [15] Kauderer, H.: „Nichtlineare Mechanik.“ Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1958.

Berichtigung

Auf Seite 281, rechte Spalte, muß die siebente Zeile von unten richtig heißen: „Schnittpunkte und zugehörigen Konvergenzintervalle sind für“.

SCHIFFSTECHNIK

Forschungshette für Schiffbau und Schiffsmaschinenbau

Verlag: Schiffsverlag „Hansa“ C. Schroedter & Co., Hamburg 11, Stubbenhuk 10. Tel. Sa.-Nr. 36 49 81. — Schriftleitung: Prof. Dr.-Ing. Kurt Wendel, Hamburg. — Alle Zuschriften sind an den obigen Verlag zu richten. — Unaufgefordert eingesandte Manuskripte werden nur auf ausdrücklichen Wunsch zurückgesandt. — Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des Verlages. — Einzelpreis DM 6,50; Jahres-Abonnement DM 30,— zuzüglich Postzustellgebühr, Abonnements-Kündigungen müssen bis spätestens einen Monat vor Ablauf des Jahres-Abonnements beim Verlag vorliegen. — Anzeigenleitung: Irmgard Dahl, Hamburg. — Anzeigenpreisliste Nr. 2. — Bankkonto: Vereinsbank, Abteilung Hafen. — Postscheckkonto: Hamburg Nr. 141 87. Höhere Gewalt entbindet den Verlag von jeder Lieferungsverpflichtung. — Erfüllungsort und Gerichtsstand Hamburg. Druck: Schroedter & Hauer, Hamburg 1.